J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

4-Equations différentielles

$$-\frac{1}{y}\frac{1}{1+x^2/y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

...ns la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prenons la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2).1 - y.2y}{(x^2+y^2)^2}$$

...'est une équation différentielle linéaire du ...
...s second membre. Le cas où $\alpha = 0$ est cel...
...iendrons plus.
... polynôme caractéristique est

$$P = X^2 + 2\alpha X + \Omega^2.$$

...us devons distinguer trois cas, suivant que le discriminant

$$\Delta' = \alpha^2 - \Omega^2,$$

est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Prenons enfin la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)(-1) + x.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

De telles singularités apparaissent souvent en physique, lorsqu'on a
théorème mathématique ... sans vérifier qu'on a le droit de l'appliquer

$$f'_x(0,y) = \frac{f(0,y)-f(0,y)}{x} \quad \text{et} \quad f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}.$$

$$LC\frac{d^2 i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + \frac{}{C}$$

6e édition

Posons pour simplifier l'écrit

$$\frac{R}{2L} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{LC}$$

nous obtenons l'équation fond...

dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. **Fonctions de plusieurs variables**

1.1 Définition . . . 1
1.2 Parties remarquables . . . 3
1.3 Limite d'une fonction en un point . . . 4
1.4 Fonction continue en un point . . . 4
1.5 Continuité sur une partie . . . 6
1.6 Dérivées partielles . . . 7
1.7 Dérivée d'une fonction composée . . . 8
1.8 Dérivées partielles successives . . . 11
1.9 Théorème de Schwarz . . . 13
1.10 Fonctions homogènes . . . 15
1.11 Dérivées partielles d'une fonction homogène . . . 16
1.12 Égalité d'Euler . . . 16
1.13 Fonctions implicites . . . 18
1.14 Calculs de dérivées de fonctions implicites . . . 19
1.15 Dérivée seconde d'une fonction implicite . . . 21
1.16 Fonctions définies par des intégrales . . . 23
1.17 Application à des calculs d'intégrales . . . 24
1.18 La fonction gamma . . . 25

Exercices . . . 27

CHAPITRE 2. **Différentielle d'une fonction de plusieurs variables**

2.1 Fonctions différentiables . . . 30
2.2 Différentielle d'une fonction . . . 31
2.3 Applications des différentielles aux calculs approchés . . . 33
2.4 Applications radioélectriques . . . 35
2.5 Formes différentielles . . . 37

Exercices . . . 40

CHAPITRE 3. **Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables**

3.1 Maximums et minimums . . . 42
3.2 Formule des accroissements finis . . . 43
3.3 Formule de Taylor-Lagrange . . . 44
3.4 Application à la recherche des maximums et des minimums . . . 46
3.5 Exemples de recherche de maximums et de minimums . . . 47

Exercices . . . 52

CHAPITRE 4. **Équations différentielles du premier ordre**

4.1 Généralités . . . 53
4.2 Classification des équations différentielles du premier ordre . . . 53
4.3 Premier type : Équations à variables séparables . . . 53

4.4 Deuxième type : Equations homogènes 55
4.5 Troisième type : Équations linéaires 57
4.6 Premier cas : Équation linéaire sans second membre 57
4.7 Deuxième cas : Équation linéaire avec second membre 58
4.8 Cas particulier important : Équation linéaire à coefficients constants et avec second membre constant 61

Exercices 62

CHAPITRE 5. **Applications des équations différentielles du premier ordre**

5.1 Loi de l'intérêt composé 64
5.2 Croissance d'une population 66
5.3 Profil d'égale résistance 68
5.4 Surface d'équilibre d'un liquide en rotation 70
5.5 Détermination d'une trajectoire 71
5.6 Chute d'un corps dans l'air 72
5.7 Portée d'un projectile dans l'air 74
5.8 Miroir parabolique 75
5.9 Détente isotherme d'un gaz parfait 77
5.10 Équation des courbes adiabatiques des gaz parfaits 78
5.11 Variation de la pression atmosphérique avec l'altitude 80
5.12 Décharge d'un condensateur dans une résistance 82
5.13 Charge d'un condensateur à travers une résistance 85
5.14 Disparition du courant électrique dans une bobine d'inductance 88
5.15 Établissement du courant dans une bobine d'inductance 89
5.16 Transformation de l'énergie électrique en chaleur 90
5.17 Formule fondamentale du courant alternatif 92

CHAPITRE 6. **Applications des équations différentielles linéaires du premier ordre aux circuits électriques**

6.1 Problème I 97
6.2 Problème II 100
6.3 Problème III 102
6.4 Problème IV 105
6.5 Problème V 109
6.6 Problème VI 110
6.7 Problème VII 115
6.8 Problème VIII 120

CHAPITRE 7. **Équations différentielles du deuxième ordre**

7.1 Classification des équations différentielles du deuxième ordre 124
7.2 Équations où la fonction n'apparaît que par ses dérivées 124
7.3 Équations où la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde 126
7.4 Équations où la variable n'apparaît pas explicitement 127
7.5 Exemples 128

7.6 Équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre 129
7.7 Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes 130
7.8 Le polynôme caractéristique a une racine double 131
7.9 Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées 132
7.10 Équations linéaires avec second membre 134
7.11 Exemples 135
7.12 Équations différentielles linéaires à coefficients non constants sans second membre 141
7.13 Équations différentielles linéaires avec second membre quelconque 143

Exercices 145

CHAPITRE 8. **Applications des équations différentielles du deuxième ordre**

8.1 Loi de la chute des corps (accélération constante) 146
8.2 Trajectoire d'un projectile 146
8.3 Loi de la chute des corps (attraction newtonnienne) 147
8.4 Calcul de la période d'un pendule simple 149
8.5 Oscillations d'un solide autour d'un axe 150
8.6 Mouvement rectiligne d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance 153
8.7 Mouvement plan d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance 156
8.8 Oscillations d'une colonne liquide 157
8.9 Calcul de la période d'un circuit oscillant 158
8.10 Propagation de la chaleur le long d'une barre 159
8.11 Étude détaillée de la décharge d'un condensateur dans une bobine d'inductance 161
8.12 Analogie mécanique 170
8.13 Mouvement du cadre mobile d'un appareil de mesures électriques 171
8.14 La résonance 172
8.15 Cas de l'amortissement 173

CHAPITRE 9. **Applications des équations différentielles linéaires du deuxième ordre aux circuits électriques**

9.1 Problème I 175
9.2 Problème II 179
9.3 Problème III 183
9.4 Problème IV 184
9.5 Problème V 187
9.6 Problème VI 189

CHAPITRE 10. **Transformation de Laplace**

10.1 Transformation de Laplace 192
10.2 Cas des fonctions périodiques 193
10.3 Dérivation 194
10.4 Intégration 195

10.5 Originale d'une dérivée 196
10.6 Translation 196
10.7 Originale d'une translatée 197
10.8 Homothétie 197
10.9 Produit de convolution 198
10.10 Intégration des équations différentielles linéaires 200
10.11 Impédance opérationnelle 202

Exercices 205

CHAPITRE 11. **Calcul numérique**

11.1 Vocabulaire du calcul numérique 208
11.2 Règles de calcul des erreurs 208
11.3 Exemples pratiques de calculs d'erreur 209
11.4 Interpolation linéaire 213
11.5 Méthode des parties proportionnelles 217
11.6 Méthode de Newton 219
11.7 Méthode d'itération 221
11.8 Méthode des rectangles 225
11.9 Méthode des trapèzes 227
11.10 Calcul approché de la somme d'une série 231
11.11 Séries majorées par une série géométrique 232
11.12 Séries majorées par une intégrale 233
11.13 Séries alternées 234

Solutions des exercices

Chapitre 1 237
Chapitre 2 246
Chapitre 3 251
Chapitre 4 256
Chapitre 7 266
Chapitre 10 276

Transformées de Laplace usuelles 280