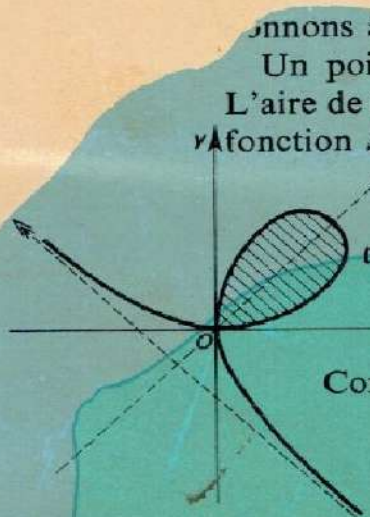
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

5 - Géométrie



onnons à z un
Un point M de l
L'aire de la surface engendr
fonction S de la cote z du poi
positif. Il lui correspon
ans ces conditions, $S(z)$ s
tronc de cône engendré par
admet pour coordonnées c

Considérons l'arc de parabole

$$A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4z}}\,\sqrt{z}\,\mathrm{d}$$

2. *Aire de la sphère.* La sphère de centre O et de rayo
i-cercle d'équation

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^4 t} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int (1+\mathrm{tg}^2\, t)\,\mathrm{d}(\mathrm{tg}\, t) = \mathrm{tg}$$

d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$, tournant auto

quation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$, tournant a

équations $x = a[\ln \mathrm{tg}(t/2 + \pi/4) - \sin t]$, y

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+2\cos$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = 3\pi\frac{a^2}{2}.$$

C'est ce résultat, bien connu en géométrie élémentaire, que nous avons utilisé ci-dessus pour évaluer l'aire latérale du tronc de cône engendré par MM' et qui nous lon de trouver la formule générale de l'aire des surfa



$$A = \int_0^h 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h z\sqrt{1+\frac{R}{h^2}}\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^{\cdot} \sqrt{1+4z}\,\mathrm{d}z =$$

$$A = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-z^2}\,\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2-z^2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z = 4\pi R^2$$

8.19 Courbe d'équation $y^3 = x$, $y \in [0, 1]$, tournant autour de Oy.

8.20 Courbe d'équation $x^2 + y^2 = 4$, limitée par les points $(1, \sqrt{3})$ et $(2, 0)$, t
Courbe d'équation $y^2 = 4x$, limitée par les points $(0, 0)$ et $(3, 2\sqrt{3})$, tournant Astroïde d'é

6e édition

dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. **Fonctions à valeurs vectorielles**

1.1 Limites des fonctions à valeurs vectorielles 1
1.2 Limites dans les plans euclidiens 1
1.3 Continuité des fonctions à valeurs vectorielles 2
1.4 Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles 3

CHAPITRE 2. **Construction des arcs paramétrés**

2.1 Définition des arcs paramétrés 6
2.2 Étude au voisinage d'un point 6
2.3 Branches infinies 8
2.4 Points doubles 9
2.5 Intervalle d'étude 11
2.6 Tracé d'un arc paramétré 11
2.7 Exemples 12
2.8 L'astroïde 15
2.9 La tractrice 16
2.10 La parabole semi-cubique 17
2.11 Le folium de Descartes 18
2.12 La cycloïde 20

Exercices 22

CHAPITRE 3. **Construction des courbes en coordonnées polaires**

3.1 Équation de la droite 23
3.2 Équation du cercle 25
3.3 Coniques ayant un foyer en O 27
3.4 Tangente en un point 29
3.5 Branches infinies 30
3.6 Intervalle d'étude et symétries 32
3.7 Points doubles 33
3.8 Tracé d'une courbe en coordonnées polaires 34

3.9 La cardioïde 37
3.10 La cissoïde 38
3.11 La strophoïde 38
3.12 La lemniscate de Bernoulli 40
3.13 Les spirales 40

Exercices 43

CHAPITRE 4. **Étude métrique des courbes**

4.1 Longueur d'un arc de courbe 44
4.2 Exemples 45
4.3 Étude de la chaînette 47
4.4 Abscisse curviligne 49
4.5 Rayon de courbure 50
4.6 Calcul pratique du rayon de courbure 51
4.7 Exemples 52
4.8 Cercle osculateur 54

Exercices 55

CHAPITRE 5. **Courbes définies par une propriété différentielle**

5.1 Courbes à sous-tangente constante 57
5.2 Courbes à tangente constante 58
5.3 Courbes à sous-normale constante 58
5.4 Courbes à normale constante 59
5.5 Courbes dont les normales passent par un point fixe 60
5.6 Courbes telles que l'abscisse curviligne soit proportionnelle au carré de l'abscisse 60
5.7 Courbes à sous-tangente polaire constante 61
5.8 Courbes à sous-normale polaire constante 61
5.9 Courbes coupant les rayons vecteurs sous un angle constant 62
5.10 Courbes telles que $\|\boldsymbol{OM}\| = \|\boldsymbol{OT}\|$ 62
5.11 Courbes à rayon de courbure constant 63
5.12 Courbes telles que le rayon de courbure soit égal à la longueur de la normale 63

Exercices 65

CHAPITRE 6. **Intégrales curvilignes**

6.1 Intégrale d'une forme différentielle 66
6.2 Cas des formes différentielles exactes 67
6.3 Détermination du potentiel scalaire 72
6.4 Méthode de Poincaré 74
6.5 Facteurs intégrants 76
6.6 L'entropie 78

Exercices 80

CHAPITRE 7. **Intégrales multiples**

7.1 Intégrale double sur un rectangle 82
7.2 Intégrale double sur une partie quarrable 85
7.3 Changement de variable dans les intégrales doubles 88
7.4 La formule de Green-Riemann 89
7.5 Intégrales doubles généralisées 91
7.6 Intégrales triples 92

Exercices 94

CHAPITRE 8. **Calcul des aires**

8.1 Aire limitée par le graphe d'une fonction 97
8.2 Aire comprise entre deux graphes 99
8.3 Aire limitée par le support d'un arc paramétré 100
8.4 Aire limitée par une courbe en coordonnées polaires 102
8.5 Aire d'une surface de révolution 104

Exercices 109

CHAPITRE 9. **Calcul des volumes**

9.1 Volume limité par une surface d'équation résolue en z 113
9.2 Volume limité par une surface et deux plans parallèles 118
9.3 Formule des trois niveaux 120
9.4 Volume limité par une surface de révolution 122
9.5 Cas d'une surface de révolution engendrée par une courbe fermée 124

Exercices 126

CHAPITRE 10. **Recherche des centres d'inertie**

10.1 Préliminaires 127
10.2 Centre d'inertie d'un système matériel 127
10.3 Propriétés du centre d'inertie d'un système matériel 128
10.4 Coordonnées du centre d'inertie d'un système matériel 130
10.5 Centre d'inertie d'un arc de courbe 130
10.6 Premier théorème de Guldin 134
10.7 Centre d'inertie d'une surface plane 135
10.8 Second théorème de Guldin 138
10.9 Centre d'inertie d'une surface de révolution 139
10.10 Centre d'inertie d'un volume 140

Exercices 141

CHAPITRE 11. Calcul des moments d'inertie

11.1 Moment d'inertie d'un système matériel 144
11.2 Moment d'inertie d'un solide 144
11.3 Liens entre moments d'inertie 145
11.4 Théorème de Huygens 146
11.5 Moments d'inertie de courbes 147
11.6 Moments d'inertie des surfaces planes 148
11.7 Moments d'inertie des surfaces de révolution 152
11.8 Moments d'inertie des volumes 153

Exercices 154

Solutions des exercices

Chapitre 2 155
Chapitre 3 169
Chapitre 4 184
Chapitre 5 190
Chapitre 6 197
Chapitre 7 201
Chapitre 8 208
Chapitre 9 213
Chapitre 10 216
Chapitre 11 217

Index terminologique 231