cahiers scientifiques FASCICULE XXX
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

cours de mathématiques du premier cycle

première année

par JACQUES DIXMIER
professeur à l'Université de Paris VI
avec la collaboration de PIERRE DUGAC

Exercices, indications de solutions, réponses

gauthier-villars

TABLE DES MATIÈRES.

ALGÈBRE.

CHAPITRE I.

ENSEMBLES.

		Pages.
1.1.	Appartenance	1
1.2.	Inclusion	2
1.3.	Opérations élémentaires	2
1.4.	Propriétés des opérations élémentaires	3
1.5.	Produit d'ensembles	4
1.6.	Fonctions	5
1.7.	Composition des applications	7
1.8.	Applications injectives, surjectives, bijectives	8
1.9.	Image directe, image réciproque	10
1.10.	Familles	10
1.11.	Relations d'équivalence	11
1.12.	Décomposition canonique d'une application	14
1.13.	Relations d'ordre	15
1.14.	Majorant, plus grand élément, borne supérieure	16
1.15.	Analyse combinatoire	18
1.16.	Équipotence des ensembles	21
1.17.	Opérations logiques élémentaires	23
1.18.	Quantificateurs	24

CHAPITRE II.

LOIS DE COMPOSITION.

2.1.	Définition	27
2.2.	Lois associatives	28
2.3.	Lois commutatives	30
2.4.	Élément neutre	30
2.5.	Éléments inverses	31
2.6.	Homomorphismes	34

CHAPITRE III.

GROUPES.

3.1.	Définition	37
3.2.	Sous-groupes d'un groupe	38
3.3.	Classes suivant un sous-groupe	40
3.4.	Groupe quotient d'un groupe commutatif	41

Pages.
3.5. Homomorphismes de groupes 43
3.6. Décomposition canonique d'un homomorphisme 44
3.7. Groupes opérant dans un ensemble 46

CHAPITRE IV.

ANNEAUX.

4.1. Définition 49
4.2. Sous-anneaux, idéaux 51
4.3. Anneau quotient d'un anneau commutatif 52
4.4. Homomorphismes d'anneaux 54
4.5. Corps 55
4.6. Anneaux intègres 57
4.7. Construction de l'anneau **Z** 59

CHAPITRE V.

POLYNÔMES A UNE VARIABLE.

5.1. Définition 61
5.2. Degré d'un polynôme 63
5.3. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes 64
5.4. Divisibilité des polynômes 65
5.5. Polynômes premiers entre eux 67
5.6. Multiples communs à deux polynômes 68
5.7. Polynômes irréductibles 69
5.8. Fonctions polynômes 71
5.9. Racines d'un polynôme 72
5.10. Formule d'interpolation de Lagrange 74
5.11. Cas du corps **C** 75
5.12. Cas du corps **R** 77
5.13. Dérivée d'un polynôme 79
5.14. Division suivant les puissances croissantes 81
5.15. Nombres complexes 83

CHAPITRE VI.

FRACTIONS RATIONNELLES A UNE VARIABLE.

6.1. Définition 89
6.2. Partie entière d'une fraction rationnelle 91
6.3. Décomposition en éléments simples 92
6.4. Cas du corps **C** 94
6.5. Cas du corps **R** 96

CHAPITRE VII.

POLYNÔMES A PLUSIEURS VARIABLES.

7.1. Définition 101
7.2. Relation avec les polynômes à une variable 102
7.3. Degrés 103

Pages.
7.4. Fonctions polynômes 104
7.5. Autre définition des polynômes homogènes 105
7.6. Dérivées 105

CHAPITRE VIII.

Espaces vectoriels.

8.1. Définition 109
8.2. Sous-espaces vectoriels 111
8.3. Espaces vectoriels quotients 113
8.4. Applications linéaires 114
8.5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires 116
8.6. Produit d'espaces vectoriels 119
8.7. Indépendance linéaire 121
8.8. Bases d'un espace vectoriel 123
8.9. Existence de bases 126
8.10. Dimension 128
8.11. Rang d'une application linéaire 131
8.12. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ 132
8.13. Dual d'un espace vectoriel 134
8.14. Formes bilinéaires 137
8.15. Formes bilinéaires non dégénérées 139
8.16. Bases duales 142
8.17. Orthogonalité 144
8.18. Transposition 149
8.19. Formes multilinéaires 152

CHAPITRE IX.

Matrices.

9.1. Définition 153
9.2. Matrice d'une application linéaire 154
9.3. Opérations sur les matrices 156
9.4. Matrices carrées 158
9.5. Matrices lignes, matrices colonnes 159
9.6. Transposée d'une matrice 161
9.7. Matrices inversibles 162
9.8. Changement de base 163
9.9. Matrices équivalentes 164
9.10. Matrices semblables 166
9.11. Matrice d'une forme bilinéaire 166

CHAPITRE X.

Déterminants.

10.1. Signature d'une permutation 169
10.2. Formes multilinéaires alternées 172
10.3. Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n 174
10.4. Déterminant d'un système de vecteurs par rapport à une base 176
10.5. Déterminant d'une application linéaire de E dans E 177
10.6. Déterminant d'une matrice carrée 178

Pages.
10.7. Calcul d'un déterminant par blocs 182
10.8. Développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne 184
10.9. Critère pour que des vecteurs soient linéairement indépendants 186
10.10. Calcul du rang d'une matrice 187
10.11. Orientation des espaces vectoriels réels 188
10.12. Produit mixte dans l'espace ordinaire orienté 189
10.13. Produit vectoriel dans l'espace ordinaire orienté 191

CHAPITRE XI.

Systèmes d'équations linéaires.

11.1. Définition 195
11.2. Systèmes de Cramer 196
11.3. Systèmes linéaires quelconques 197

CHAPITRE XII.

Notions affines.

12.1. Sous-espaces affines 199
12.2. Équations d'un sous-espace affine 200
12.3. Représentation paramétrique d'un sous-espace affine 202
12.4. Applications affines 203
12.5. Barycentre 205
12.6. Ensembles convexes 208
12.7. Espaces affines 210

ANALYSE.

CHAPITRE XIII.

Construction des nombres réels.

13.1. Entiers rationnels, nombres rationnels 215
13.2. Suites de Cauchy, équivalence des suites de Cauchy 215
13.3. Addition des nombres réels 217
13.4. Multiplication des nombres réels 218
13.5. Identification des nombres rationnels à des nombres réels 220
13.6. Comparaison des nombres réels 220

CHAPITRE XIV.

Limites.

14.1. Limite d'une suite de nombres 223
14.2. Suites de Cauchy 227
14.3. Suites monotones 229
14.4. Limites infinies 230
14.5. Limite d'une fonction 232

14.6. Équivalence
14.7. Partie principale d'un infiniment petit
14.8. Les notations o et O
14.9. Fonctions continues
14.10. Fonctions uniformément continues
14.11. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement
14.12. Application : fonctions réciproques des fonctions circulaires
14.13. Limite simple, limite uniforme d'une suite de fonctions

CHAPITRE XV.

DÉRIVÉES.

15.1. Définition
15.2. Extensions de la notion de dérivée
15.3. Dérivées successives
15.4. Règles de calcul
15.5. Dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires
15.6. Formule de Leibniz
15.7. Théorème des accroissements finis
15.8. Fonctions convexes

CHAPITRE XVI.

INTÉGRALES.

16.1. Intégrale des fonctions en escalier 269
16.2. Intégrale des fonctions continues 272
16.3. Premières propriétés de l'intégrale 275
16.4. Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration 278
16.5. Primitives 279
16.6. Intégration par parties 282
16.7. Changement de variables 282
16.8. Application : formule de Wallis 285
16.9. Valeur moyenne d'une fonction 286

CHAPITRE XVII.

FONCTION LOGARITHMIQUE ET FONCTIONS ASSOCIÉES.

17.1. Définition de la fonction logarithmique 289
17.2. Logarithme d'un produit 290
17.3. Fin de l'étude des variations de $\operatorname{Log} x$ 291
17.4. Logarithmes de base a 292
17.5. Fonction exponentielle 293
17.6. Généralisation 295
17.7. L'exponentielle définie comme limite 298
17.8. Fonctions hyperboliques 298
17.9. Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques 302
17.10. Fonction $y = x^{\alpha}$ 305
17.11. Variations de x^{α} 306
17.12. Ordres de croissance 309

N° 358 / 2021 ج

AVR 2021
مكتبة المعهد
28 AVR 2021

CHAPITRE XVIII.

Calcul des primitives.

Pages.
18.1. Primitives usuelles 311
18.2. Intégration des fractions rationnelles 312
18.3. Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles. I 315
18.4. Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles. II 316
18.5. Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles. III 318
18.6. Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles. IV 319

CHAPITRE XIX.

Formule de Taylor.

19.1. Démonstration de la formule de Taylor 321
19.2. Recherche de la partie principale d'un infiniment petit 321
19.3. Allure d'un graphe au voisinage d'un point 324

CHAPITRE XX.

Développements limités.

20.1. Définition 327
20.2. Développements limités usuels 329
20.3. Opérations sur les développements limités 331
20.4. Parties principales d'infiniment petits usuels 336
20.5. Généralisations des développements limités 337
20.6. Applications des développements limités à la recherche de limites 340

CHAPITRE XXI.

Normes. Distances.

21.1. Normes 343
21.2. Distances 345
21.3. Limite d'une suite de points dans un espace métrique 347
21.4. Limite d'une application d'un espace métrique dans un autre 350
21.5. Applications continues d'un espace métrique dans un autre 352
21.6. Ensembles ouverts, ensembles fermés 351

CHAPITRE XXII.

Dérivées des fonctions vectorielles.

22.1. Définition 357
22.2. Dérivées successives 359
22.3. Règles de calcul 359
22.4. Formule de Taylor-Young 361

CHAPITRE XXIII.

Dérivées partielles.

23.1. Définition 363
23.2. Dérivée d'une fonction composée 364

Pages.

23.3. Dérivées partielles secondes 367
23.4. Dérivées partielles successives 369
23.5. Dérivées successives d'une fonction composée 370
23.6. Formule de Taylor 371

CHAPITRE XXIV.

DIFFÉRENTIELLES.

24.1. Différentielle d'une fonction en un point 375
24.2. Différentielle d'une fonction 378
24.3. Différentielle d'une fonction composée 379
24.4. Calcul des différentielles 381
24.5. Fonctions stationnaires 382
24.6. Gradient d'une fonction 384

CHAPITRE XXV.

FONCTIONS IMPLICITES.

25.1. Définition et existence 387
25.2. Première généralisation 391
25.3. Deuxième généralisation 392

CHAPITRE XXVI.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

26.1. Définition 395
26.2. Interprétation géométrique 397
26.3. Théorème général d'existence et d'unicité 398
26.4. Équations à variables séparées 398
26.5. Équations linéaires 402
26.6. Application à un problème géométrique 405

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE XXVII.

COURBES PARAMÉTRÉES DANS LE PLAN.

27.1. Définition 407
27.2. Tangente 410
27.3. Forme au voisinage d'un point 412
27.4. Branches infinies 414
27.5. Concavité 417
27.6. Construction des courbes paramétrées planes 418

CHAPITRE XXVIII

Courbes paramétrées dans l'espace.

Pages.

28.1. Définition 425
28.2. Tangente 425
28.3. Plan osculateur 426
28.4. Forme au voisinage d'un point 428

CHAPITRE XXIX.

Surfaces paramétrées dans l'espace.

29.1. Définition 431
29.2. Exemples de surfaces paramétrées 432
29.3. Plan tangent 435

CHAPITRE XXX.

Équations des courbes et des surfaces.

30.1. Équation d'une courbe dans le plan 439
30.2. Équation d'une surface dans l'espace 440
30.3. Équations d'une courbe dans l'espace 441
30.4. Exemples de recherche d'équations de surface 441
30.5. Ellipsoïde 445
30.6. Hyperboloïde à une nappe 447
30.7. Hyperboloïde à deux nappes 448
30.8. Paraboloïde elliptique 449
30.9. Paraboloïde hyperbolique 450

CHAPITRE XXXI.

Coordonnées polaires.

31.1. Définition 453
31.2. Équation polaire d'une courbe 455
31.3. Tangente à une courbe définie paramétriquement en coordonnées polaires. 459
31.4. Concavité d'une courbe définie paramétriquement en coordonnées polaires. 461
31.5. Constructions de courbes définies par une équation $r = f(\theta)$ 462
31.6. Coordonnées cylindriques 466
31.7. Coordonnées sphériques 467

Exercices 469
Quelques réponses et suggestions 579

Index des notations 617
Index terminologique 619

Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 70, rue de Saint-Mandé, 93100 MONTREUIL
196742-80 — Dépôt légal, Imprimeur, 1980, nº 2351
Dépôt légal : 3e trimestre 1980 *Imprimé en France*