cahiers scientifiques FASCICULE XXXII

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

# cours de mathématiques du premier cycle

deuxième année

par JACQUES DIXMIER

professeur à l'Université de Paris VI

avec la collaboration de PIERRE DUGAC

## Exercices, indications de solutions, réponses

gauthier-villars

# TABLE DES MATIÈRES.

## ALGÈBRE.

### CHAPITRE XXXII.

#### COMPLÉMENTS SUR LES GROUPES.


| | | Pages. |
|---|---|---|
| 32.1. | Sous-groupes distingués | 1 |
| 32.2. | Décomposition canonique d'un homomorphisme | 2 |
| 32.3. | Automorphismes d'un groupe | 3 |


### CHAPITRE XXXIII.

#### RÉDUCTION DES MATRICES.


| | | |
|---|---|---|
| 33.1. | Vecteurs propres et valeurs propres | 7 |
| 33.2. | Polynôme caractéristique | 9 |
| 33.3. | Relations entre le polynôme caractéristique et les valeurs propres | 11 |
| 33.4. | Cas où le corps de base est le corps des nombres complexes | 11 |
| 33.5. | Théorème de Hamilton-Cayley. Applications | 14 |


### CHAPITRE XXXIV.

#### FORMES MULTILINÉAIRES.


| | | |
|---|---|---|
| 34.1. | L'espace vectoriel des formes $p$-linéaires | 19 |
| 34.2. | Image réciproque par une application linéaire | 20 |


### CHAPITRE XXXV.

#### FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES.


| | | |
|---|---|---|
| 35.1. | Formes bilinéaires symétriques | 23 |
| 35.2. | Formes quadratiques | 24 |
| 35.3. | Orthogonalité | 27 |
| 35.4. | Formes non dégénérées | 27 |
| 35.5. | Relations avec la notion d'orthogonalité du chapitre VIII | 29 |
| 35.6. | Bases orthogonales | 30 |
| 35.7. | Cas où le corps de base est le corps des nombres complexes | 32 |

Pages

35.8. Cas où le corps de base est le corps des nombres réels ..... 33
35.9. Adjointe ..... 37
35.10. Groupe orthogonal ..... 38
35.11. Matrices orthogonales ..... 41
35.12. Applications linéaires symétriques ..... 42

## CHAPITRE XXXVI.

### Formes hermitiennes.

36.1. Formes hermitiennes ..... 45
36.2. Orthogonalité ..... 48
36.3. Bases orthogonales ..... 49
36.4. Espaces préhilbertiens ..... 50
36.5. Adjointe ..... 53
36.6. Groupe unitaire ..... 54
36.7. Applications linéaires hermitiennes ..... 56
36.8. Retour aux applications linéaires symétriques ..... 57
36.9. Étude simultanée de deux formes quadratiques ..... 58

## CHAPITRE XXXVII.

### Formes multilinéaires alternées.

37.1. Antisymétrisation ..... 61
37.2. Produit extérieur de formes alternées ..... 66
37.3. Formes bilinéaires alternées ..... 70
37.4. Cas de l'espace ordinaire orienté ..... 72

# ANALYSE.

## CHAPITRE XXXVIII.

### Généralisation de l'intégrale.

38.1. Intégrales dans des intervalles non bornés ..... 75
38.2. Intégrales de fonctions non bornées ..... 81
38.3. La fonction $\Gamma$ ..... 83

## CHAPITRE XXXIX.

### Séries.

39.1. Définitions et premières propriétés ..... 87
39.2. Séries à termes positifs ..... 89
39.3. Critère de Cauchy pour les séries ..... 93
39.4. Séries absolument convergentes ..... 93
39.5. Multiplication des séries ..... 96

Pages.

39.6. Séries alternées ..... 98
39.7. Séries de fonctions ..... 99
39.8. Propriétés des limites uniformes de suites ..... 100
39.9. Propriétés des séries uniformément convergentes ..... 103

## CHAPITRE XL.

### SÉRIES ENTIÈRES.

40.1. Rayon de convergence ..... 107
40.2. Somme, produit de deux séries entières ..... 110
40.3. Dérivation, intégration d'une série entière ..... 110
40.4. Série de Maclaurin ..... 112
40.5. Développement en série entière de fonctions usuelles ..... 114
40.6. Étude du nombre $e$ ..... 117

## CHAPITRE XLI.

### FONCTION EXPONENTIELLE COMPLEXE.

41.1. Définitions et premières propriétés ..... 121
41.2. Formule d'addition ..... 122
41.3. Partie réelle, partie imaginaire, module, argument de $e^z$ ..... 123
41.4. Dérivée, primitives de $e^{cz}$ ..... 124
41.5. Applications à la trigonométrie ..... 125
41.6. Logarithmes d'un nombre complexe ..... 128

## CHAPITRE XLII.

### SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

42.1. Définition ..... 129
42.2. Convergence d'une série trigonométrique ..... 130
42.3. Continuité, dérivation, intégration d'une série trigonométrique ..... 131
42.4. Série de Fourier ..... 132
42.5. Exemple de recherche d'une série de Fourier ..... 137

## CHAPITRE XLIII.

### EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE.

43.1. Séries de vecteurs ..... 141
43.2. Séries de matrices ..... 143
43.3. Exponentielle d'une matrice ..... 144
43.4. Calcul de l'exponentielle d'une matrice ..... 146

## CHAPITRE XLIV.

### SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Pages.
44.1. Généralités ..... 151
44.2. Systèmes différentiels linéaires ..... 152
44.3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ..... 156

## CHAPITRE XLV.

### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

45.1. Généralités ..... 163
45.2. Équations différentielles linéaires d'ordre $p$ ..... 164
45.3. Équations différentielles linéaires d'ordre $p$ à coefficients constants .... 167

## CHAPITRE XLVI.

### COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS CONTINUES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES.

46.1. Fonctions continues sur un ensemble compact ..... 171
46.2. Application : démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss ..... 173
46.3. Fonctions continues sur un ensemble connexe ..... 175

## CHAPITRE XLVII.

### APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES.

47.1. Définition des applications différentiables ..... 179
47.2. Critères pratiques ..... 182
47.3. Différentielle d'une application composée ..... 185
47.4. Difféomorphismes ..... 187
47.5. Immersions, submersions ..... 189
47.6. Sous-variétés ..... 192
47.7. Espace tangent à une sous-variété ..... 197
47.8. Sous-variétés orientées ..... 200

## CHAPITRE XLVIII.

### FORMES DIFFÉRENTIELLES.

48.1. Formes différentielles de degré 1 ..... 205
48.2. Formes différentielles de degré $p$ ..... 207
48.3. Dérivée extérieure d'une forme différentielle ..... 210
48.4. Primitives d'une forme différentielle ..... 213
48.5. Image réciproque d'une forme différentielle par une application ..... 217
48.6. Formes différentielles dans un espace affine ..... 219
48.7. Champs de vecteurs ..... 221

## CHAPITRE IL.

### INTÉGRALES MULTIPLES.

Pages.

49.1. Ensembles boréliens dans $\mathbf{R}^n$ ..... 225
49.2. Fonctions boréliennes ..... 228
49.3. Intégrale des fonctions boréliennes élémentaires positives ..... 230
49.4. Intégrale des fonctions boréliennes positives ..... 231
49.5. Intégrale des fonctions boréliennes quelconques ..... 234
49.6. Intégration dans un ensemble ..... 237
49.7. Réduction des intégrales multiples aux intégrales simples ..... 240
49.8. Exemples de calcul ..... 242
49.9. Calcul des aires, des volumes ..... 245
49.10. Changement de variables ..... 249
49.11. Passage en coordonnées polaires ..... 254

## CHAPITRE L.

### INTÉGRALES DES FORMES DIFFÉRENTIELLES.

50.1. Intégrale d'une forme différentielle relativement à une application ..... 257
50.2. Généralisation ..... 261
50.3. Intégrale d'une forme différentielle sur une sous-variété orientée ..... 265
50.4. Travail et flux d'un champ de vecteurs ..... 271

## CHAPITRE LI.

### FORMULE DE STOKES.

51.1. Bord ..... 275
51.2. Bord orienté ..... 281
51.3. Formule de Stokes ..... 285

## CHAPITRE LII.

### FONCTIONS HOLOMORPHES.

52.1. Définition et premiers exemples ..... 289
52.2. Fonctions holomorphes définies par des séries entières et des séries de Laurent ..... 290
52.3. Autres définitions de l'holomorphie ..... 294
52.4. Primitive d'une fonction holomorphe ..... 298
52.5. Fonction réciproque d'une fonction holomorphe ..... 299
52.6. Formule de Cauchy ..... 300
52.7. Analyticité des fonctions holomorphes ..... 303
52.8. Résidus ..... 306

# GÉOMÉTRIE.

## CHAPITRE LIII.

### LONGUEUR D'UNE COURBE.

53.1. Définition de la longueur ..... 313
53.2. Abscisse curviligne ..... 315
53.3. Champs de formes quadratiques ..... 319

Pages.

53.4. Relations avec la notion de longueur ..... 323
53.5. Abscisse curviligne sur une sous-variété orientée de dimension 1 ..... 324

## CHAPITRE LIV.

### COURBURE.

54.1. Vecteur rotation ..... 329
54.2. Formules de Frenet ..... 331
54.3. Recherche pratique du centre de courbure ..... 335

## CHAPITRE LV.

### COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

55.1. Ensembles algébriques ..... 339
55.2. Ensembles algébriques définis par une équation du second degré ..... 343
55.3. Ensembles algébriques dans le plan définis par une équation du second degré ..... 345
55.4. Cônes du second degré ..... 347
55.5. Ensembles algébriques dans l'espace défini par une équation du second degré ..... 348

Exercices ..... 351

Quelques suggestions et réponses ..... 425

Index des notations ..... 473

Index terminologique ..... 475

Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 70, rue de Saint-Mandé, 93100 MONTREUIL
196387-79 — Dépôt légal, Imprimeur, 1979, n° 2331
Dépôt légal : 4e trimestre 1979
*Imprimé en France*