J. Lelong-Ferrand
J.M. Arnaudiès

Cours de mathématiques

Tome 3

Géométrie et cinématique

2e édition

Dunod Université

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. **Géométrie affine** 1

§ 1 Compléments de géométrie vectorielle 1
§ 2 Projecteurs, homothéties, dilatations et transvections (cas vectoriel) 5
§ 3 Espaces affines 11
§ 4 Applications affines. Groupe affine 15
§ 5 Structures vectorielles sur un espace affine 19
§ 6 Sous-variétés affines. Sous-espaces affines 21
§ 7 Fonctions affines ; équations d'une variété affine 27
§ 8 Barycentres 31
§ 9 Coordonnées barycentriques 37
§ 10 Quelques transformations affines particulières 41
§ 11 Convexité 46
§ 12 Repères. Orientation des espaces affines de dimension finie 52
§ 13 Droites en dimension 2 57
§ 14 Plans d'un espace affine de dimension 3 61

CHAPITRE II. **Notions de géométrie euclidienne** 68

§ 1 Espaces affines attachés à un e.v.n. Cas euclidien 68
§ 2 Orthogonalité. Notion élémentaire d'angle 71
§ 3 Cas du plan. Angles orientés 77
§ 4 Coordonnées polaires 83
§ 5 Coordonnées cylindriques et sphériques 86
§ 6 Droites du plan euclidien 90
§ 7 Gerbe de droites définie par une équation homogène du second degré (dans le plan) 95
§ 8 Droites et plans en dimension 3 99
§ 9 Plans définis par une équation homogène du second degré 106
§ 10 Isométries et déplacements. Décomposition canonique 109
§ 11 Structure des isométries ; points fixes 114
§ 12 Générateurs des groupes Is ($\mathscr{E}_n$) et Dep ($\mathscr{E}_n$) 121
§ 13 Similitudes. Inversions 126

CHAPITRE III. **Etude élémentaire de quelques ensembles** 132

§ 1 Cercles du plan euclidien 133
§ 2 Points conjugués par rapport à un cercle 140
§ 3 Axes radicaux. Faisceaux de cercles 142

§ 4 Equations polaires et cartésiennes des coniques 147
§ 5 Cylindres, cônes et conoïdes 154
§ 6 Sphères (en dimension 3) 161
§ 7 Quadriques à centre 167
§ 8 Cylindres à centre et cônes du second degré 178
§ 9 Paraboloïdes et cylindres paraboliques 182
§ 10 Surfaces de révolution 186
§ 11 Notion géométrique de tangente et de plan tangent à un ensemble 195

CHAPITRE IV. **Champs de vecteurs et torseurs** 202

§ 1 Endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel euclidien 202
§ 2 Cas d'un espace de dimension 3 205
§ 3 Notion générale de champ de vecteurs 210
§ 4 Champs de gradients (sur un espace euclidien) 214
§ 5 Cas d'un espace euclidien de dimension 3 : rotationnel 219
§ 6 Formules d'analyse vectorielle 226
§ 7 Champs équiprojectifs 228
§ 8 Torseurs 232
§ 9 Axe central d'un torseur 235
§ 10 Comoment de deux torseurs 237
§ 11 Torseurs élémentaires 239
§ 12 Vecteurs glissants. Vecteurs liés 240
§ 13 Décomposition d'un torseur en torseurs élémentaires 245
§ 14 Sommes de glisseurs 249
Appendice. Torseurs parallèles à un plan. Champs équiprojectifs de $\mathscr{E}_2$ 252

CHAPITRE V. **Etude affine des arcs géométriques** 253

§ 1 Chemins. Arcs géométriques 253
§ 2 Arcs orientés 259
§ 3 Sous-arcs. Arcs réguliers 261
§ 4 Contact des arcs 269
§ 5 Images d'un arc. Invariance du contact dans un difféomorphisme 273
§ 6 Sous-espaces fondamentaux 275
§ 7 Résultats pratiques. Exemples 281
§ 8 Caractérisation des arcs contenus dans une sous-variété affine 284
§ 9 Etude affine des arcs plans simples 288
§ 10 Branches infinies des arcs plans 292
§ 11 Courbes planes définies implicitement 296
§ 12 Exemples de courbes algébriques 303

CHAPITRE VI. **Propriétés métriques des arcs** 308

§ 1 Notion générale d'arc rectifiable. Longueur 308
§ 2 Cas euclidien 313
§ 3 Paramètres normaux. Courbure. Contact 318

§ 4 Cas d'un plan orienté. Formules de Frenet 326
§ 5 Etude locale d'un arc plan 332
§ 6 Fonctions angulaires associées à un arc plan 335
§ 7 Equations intrinsèques d'un arc plan 342
§ 8 Arcs de $\mathscr{E}_3$. Courbure, torsion, repère de Serret-Frenet 347
§ 9 Calcul de la courbure et de la torsion 351
§ 10 Etude métrique locale des arcs de $\mathscr{E}_3$ 357
§ 11 Equations intrinsèques d'un arc de $\mathscr{E}_3$ 361
§ 12 Hélices dans $\mathscr{E}_3$ 368

CHAPITRE VII. **Construction de courbes planes** 373

§ 1 Un exemple de paramétrisation cartésienne 373
§ 2 Etude globale de paramétrisations 380
§ 3 Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires 388
§ 4 Exemples de construction de courbes définies en coordonnées polaires 395
§ 5 Développées, développantes, courbes parallèles 401
§ 6 Courbes trochoïdes et cycloïdes 413
§ 7 Propriétés générales des courbes cycloïdales 419
§ 8 Etude de quelques courbes cycloïdales particulières 425

CHAPITRE VIII. **Propriétés affines des surfaces** 436

§ 1 Nappes géométriques 436
§ 2 Etude du support d'une nappe 440
§ 3 Nappes régulières 442
§ 4 Plan tangent 446
§ 5 Position d'une nappe par rapport à un plan tangent 456
§ 6 Surfaces réglées 462
§ 7 Surfaces développables 467
§ 8 Plongements. Sous-variétés 470

CHAPITRE IX. **Propriétés métriques des surfaces** 475

§ 1 Première forme quadratique fondamentale 475
§ 2 Normale. Repère de Darboux 480
§ 3 Deuxième forme quadratique fondamentale 488
§ 4 Endomorphisme associé à la deuxième forme fondamentale 497
§ 5 Torsion géodésique. Directions principales 501
§ 6 Détermination effective des directions et courbures principales 507
§ 7 Exemples 512
§ 8 Courbes remarquables tracées sur une nappe 517
§ 9 Equations différentielles de la forme $A\,du^2 + 2\,B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$
Détermination des asymptotiques et des lignes de courbure 523
§ 10 Détermination des géodésiques 530

§ 4 Equations polaires et cartésiennes des coniques 147
§ 5 Cylindres, cônes et conoïdes 154
§ 6 Sphères (en dimension 3) 161
§ 7 Quadriques à centre 167
§ 8 Cylindres à centre et cônes du second degré 178
§ 9 Paraboloïdes et cylindres paraboliques 182
§ 10 Surfaces de révolution 186
§ 11 Notion géométrique de tangente et de plan tangent à un ensemble 195

CHAPITRE IV. **Champs de vecteurs et torseurs** 202

§ 1 Endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel euclidien 202
§ 2 Cas d'un espace de dimension 3 205
§ 3 Notion générale de champ de vecteurs 210
§ 4 Champs de gradients (sur un espace euclidien) 214
§ 5 Cas d'un espace euclidien de dimension 3 : rotationnel 219
§ 6 Formules d'analyse vectorielle 226
§ 7 Champs équiprojectifs 228
§ 8 Torseurs 232
§ 9 Axe central d'un torseur 235
§ 10 Comoment de deux torseurs 237
§ 11 Torseurs élémentaires 239
§ 12 Vecteurs glissants. Vecteurs liés 240
§ 13 Décomposition d'un torseur en torseurs élémentaires 245
§ 14 Sommes de glisseurs 249
Appendice. Torseurs parallèles à un plan. Champs équiprojectifs de $\mathscr{E}_2$ 252

CHAPITRE V. **Etude affine des arcs géométriques** 253

§ 1 Chemins. Arcs géométriques 253
§ 2 Arcs orientés 259
§ 3 Sous-arcs. Arcs réguliers 261
§ 4 Contact des arcs 269
§ 5 Images d'un arc. Invariance du contact dans un difféomorphisme 273
§ 6 Sous-espaces fondamentaux 275
§ 7 Résultats pratiques. Exemples 281
§ 8 Caractérisation des arcs contenus dans une sous-variété affine 284
§ 9 Etude affine des arcs plans simples 288
§ 10 Branches infinies des arcs plans 292
§ 11 Courbes planes définies implicitement 296
§ 12 Exemples de courbes algébriques 303

CHAPITRE VI. **Propriétés métriques des arcs** 308

§ 1 Notion générale d'arc rectifiable. Longueur 308
§ 2 Cas euclidien 313
§ 3 Paramètres normaux. Courbure. Contact 318