J. Lelong-Ferrand
J.M. Arnaudiès

Cours de mathématiques

Tome 1

Algèbre

3e édition

Classes préparatoires
1er cycle universitaire

Dunod Université

Table des matières

CHAPITRE I. **Vocabulaire de théorie des ensembles** 1

§ 1 Notions sur la formalisation 1
§ 2 Règles de logique formelle 3
§ 3 Quantificateurs 6
§ 4 Opérations sur les ensembles 8
§ 5 Correspondances et applications 12
§ 6 Familles 17
§ 7 Produits 20
§ 8 Relations d'équivalence et ensemble quotient 22
§ 9 Relations d'ordre 26
§ 10 Dénombrement 31
§ 11 Les ensembles de base 39

CHAPITRE II. **Lois de composition. Groupes** 40

§ 1 Généralités 40
§ 2 Propriétés d'une loi de composition 45
§ 3 Axiomes de la structure de groupe. Exemples de groupes. Homomorphismes 48
§ 4 Sous-groupe. Groupe engendré. Groupe produit 52
§ 5 Groupe quotient dans le cas abélien 57
§ 6 Groupes quelconques : classes. Sous-groupes distingués. Quotient 62
§ 7 Groupes finis. Groupe symétrique 65
§ 8 Groupes opérant sur un ensemble 69

CHAPITRE III. **Structures algébriques faisant intervenir plusieurs lois** 77

§ 1 Généralités 77
§ 2 Généralités sur les anneaux 79
§ 3 Sous-anneaux et anneaux produits 87
§ 4 Homomorphismes, idéaux et anneaux quotients 89
§ 5 Divisibilité dans un anneau 95
§ 6 Corps 99
§ 7 Calcul dans le corps des nombres complexes 104
§ 8 Structure de module sur un anneau 111
§ 9 Structure d'algèbre sur un anneau commutatif 118

CHAPITRE IV. **Polynômes à une ou plusieurs indéterminées** 120

§ 1 Définition de $A[X]$. Propriétés générales 120
§ 2 Division euclidienne. Propriétés arithmétiques de $K[X]$ lorsque K est un corps commutatif 125
§ 3 Algorithme d'Euclide 131
§ 4 Polynômes irréductibles sur un corps 135
§ 5 Fonction polynôme. Racines. Formule de Taylor 137
§ 6 Relations entre les coefficients et les racines. Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ 144
§ 7 Notions sur $K[X_1, \ldots, X_n]$ 149

CHAPITRE V. **Fonctions symétriques. Equations algébriques (Théorie élémentaire)** 159

§ 1 Polynômes symétriques 159
§ 2 Formules de Newton 166
§ 3 Equations du deuxième et du troisième degré 172
§ 4 Equation du quatrième degré 178
§ 5 Equations de degré $\geqslant 5$ 182

CHAPITRE VI. **Elimination** 187

§ 1 Résultant de deux polynômes à une variable 187
§ 2 Méthode de Cayley. Exemples de calcul du résultant 194
§ 3 Application de l'élimination à la transformation de Tschirnhaus 200
§ 4 Discriminant d'un polynôme 206
§ 5 Expressions des racines communes à deux équations lorsque leur résultant est nul 210

CHAPITRE VII. **Fractions rationnelles** 217

§ 1 Le corps $K(X)$ 217
§ 2 Décomposition en éléments simples sur un corps quelconque K 221
§ 3 Recherche des parties polaires relatives à des facteurs de la forme $(X - a)^\alpha$ 224
§ 4 Notions sur les séries formelles 227
§ 5 Exemples de calculs pratiques 232
§ 6 Intégration des fractions rationnelles 239

CHAPITRE VIII. **Espaces vectoriels** 245

§ 1 Généralités 245
§ 2 Caractérisation des bases d'un espace vectoriel 250
§ 3 Théorème de la dimension finie 253
§ 4 Espaces vectoriels et applications linéaires. Rang d'une application linéaire 259
§ 5 Dualité 262
§ 6 Langage de la géométrie affine 270

CHAPITRE IX. **Matrices** 275

§ 1 Propriétés générales 275
§ 2 Matrices et applications linéaires 285
§ 3 Changement de base 293

CHAPITRE X. **Les déterminants et leurs applications** 298

§ 1 Applications et formes multilinéaires 298
§ 2 Déterminants 304
§ 3 Exemples de calcul de déterminants 314
§ 4 Application des déterminants à l'étude du rang d'une matrice 320
§ 5 Equations linéaires 323

CHAPITRE XI. **Réduction des matrices carrées et application** 332

§ 1 Valeurs propres, polynôme caractéristique 332
§ 2 Sous-espaces propres 336
§ 3 Polynômes d'endomorphismes. Le théorème de Cayley-Hamilton .. 342
§ 4 Sous-espaces caractéristiques 348
§ 5 Endomorphismes diagonalisables 353
§ 6 Endomorphismes nilpotents. Facteurs invariants. Réduction de Jordan 355

CHAPITRE XII. **Formes bilinéaires et formes quadratiques** 361

§ 1 Généralités sur les formes bilinéaires 361
§ 2 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques 363
§ 3 Orthogonalité 367
§ 4 Problème de la classification. Solution lorsque $K = \mathbf{C}$ ou $K = \mathbf{R}$ .. 371
§ 5 Espace euclidien 376
§ 6 Projections et symétries 384
§ 7 Groupe orthogonal, le groupe orthogonal réel 386

CHAPITRE XIII. **Formes hermitiennes. Théorie spectrale. Isométries de $\mathbf{R}^n$** .. 394

§ 1 Généralités 394
§ 2 Classification des formes hermitiennes sur un espace de dimension finie 397
§ 3 Espaces préhilbertiens de dimension finie 398
§ 4 Projections et symétries 402
§ 5 Groupe unitaire 403
§ 6 Théorie spectrale (formes hermitiennes) 407
§ 7 Théorie spectrale (formes quadratiques réelles) 411
§ 8 Théorie spectrale (formes quadratiques sur un corps quelconque) .. 416
§ 9 Isométries de E_n (espace euclidien de dimension n) 422
§ 10 Isométries vectorielles 425
§ 11 Isométries affines : théorème de prolongement 431

CHAPITRE XIV. **Polynômes à plusieurs indéterminées et applications géométriques** 436

§ 1 Anneaux factoriels 436
§ 2 Factorialité des anneaux de polynômes 440
§ 3 Correspondances algébriques. Homographies (en caractéristique 0) .. 444
§ 4 Hypersurfaces algébriques dans $\mathbf{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ 448
§ 5 Courbes algébriques et courbes algébriques unicursales dans $\mathbf{C}^2$ 453

EXERCICES 459

PROBLÈMES 506

BIBLIOGRAPHIE 525

SYMBOLES UTILISÉS DANS CE TRAITÉ 526

INDEX ALPHABÉTIQUE 529