J. Lelong-Ferrand
J.M. Arnaudiès

Cours de mathématiques

Tome 2

Analyse

4e édition

Classes préparatoires
1er cycle universitaire

Dunod Université

Table des matières

CHAPITRE I. **Nombres réels. Extensions** 1

§ 1 Introduction. Propriétés des rationnels 1
§ 2 Suites convergentes, suites de Cauchy (dans **Q**) 2
§ 3 Construction de **R** ; structure algébrique. Notations 5
§ 4 Relation d'ordre sur **R** 8
§ 5 Approximation des réels par les rationnels. Axiome d'Archimède 11
§ 6 Représentation décimale des nombres réels 13
§ 7 Suites convergentes et suites de Cauchy dans **R** 15
§ 8 Caractérisation axiomatique de **R** 18
§ 9 Grandeurs mesurables 22
§ 10 Prolongements de **R** 25
§ 11 Propriétés des limites. Exemples 29

CHAPITRE II. **Suites de nombres réels. Fonctions numériques** 33

§ 1 Propriétés de **R** liées à la relation d'ordre 33
§ 2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble de **R** 36
§ 3 Suites monotones 37
§ 4 Plus grande et plus petite limite 39
§ 5 Valeurs d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass 42
§ 6 Notation de voisinage 45
§ 7 Limites de fonctions numériques définies sur les parties de **R** 48
§ 8 Limites à droite et à gauche. Fonctions monotones 52
§ 9 Fonctions continues 54
§ 10 Fonctions strictement croissantes sur un intervalle. Homéomorphismes 58

CHAPITRE III. **Eléments de topologie** 62

§ 1 Distances. Espaces métriques 62
§ 2 Espaces vectoriels normés 66
§ 3 Boules. Voisinages. Ouverts et fermés 70
§ 4 Notion générale de structure topologique 73
§ 5 Intérieur, adhérence, frontière d'un ensemble 75
§ 6 Limites de suites. Suites de Cauchy 78
§ 7 Limites de fonctions. Fonctions continues 82
§ 8 Limites et continuité dans les espaces métriques 88
§ 9 Espaces produits. Cas de $\mathbf{R}^n$ 92
§ 10 Espaces compacts 98
§ 11 Espaces et ensembles connexes 105
§ 12 Espaces vectoriels normés. Applications linéaires 108

CHAPITRE IV. **Dérivées. Développements limités** 117

§ 1 Notion de dérivée. Fonctions dérivables 118
§ 2 Application à l'étude des fonctions élémentaires 124
§ 3 Théorème de Rolle. Applications 128
§ 4 Formule générale des accroissements finis 132
§ 5 Fonctions convexes d'une variable numérique 136
§ 6 Formules de Taylor 140
§ 7 Développements limités polynomiaux 146
§ 8 L'algèbre des développements limités 155
§ 9 Généralisation. Développements asymptotiques 164
§ 10 Exemples de développements asymptotiques 174

CHAPITRE V. **Différentielles. Applications différentiables** 178

§ 1 Introduction. Espaces affines 178
§ 2 Différentielles 181
§ 3 Interprétation de la différentiabilité. Notations 188
§ 4 Propriétés des applications différentiables 192
§ 5 Formule des accroissements finis 201
§ 6 Extrema des fonctions différentiables 203
§ 7 Différentielles des fonctions de plusieurs variables 208
§ 8 Théorème de Schwarz 213
§ 9 Formule de Taylor 220

CHAPITRE VI. **Applications des différentielles** 225

§ 1 Développements limités des fonctions de plusieurs variables. Applications 225
§ 2 Fonctions homogènes et fonctions convexes sur un espace vectoriel 228
§ 3 Le problème des fonctions implicites 233
§ 4 Extension des résultats précédents 240
§ 5 Applications réciproques. Changements de variables 244
§ 6 Rang d'une application. Fonctions indépendantes 247

CHAPITRE VII. **Séries** 253

§ 1 Séries. Propriétés générales 254
§ 2 Séries numériques à termes positifs et séries absolument convergentes 259
§ 3 Exemples de séries à termes positifs. Etude de $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ 266
§ 4 Règles de Cauchy, d'Alembert, Duhamel 270
§ 5 Exemples de séries semi-convergentes 276
§ 6 Problèmes d'associativité et de commutativité pour les séries 280
§ 7 Calcul approché de la somme d'une série numérique 283
§ 8 Produits infinis 291
§ 9 Familles sommables 296
§ 10 Séries doubles 302

CHAPITRE VIII. **Suites et séries de fonctions. Etude générale** 309

§ 1 Convergence simple et convergence uniforme 310
§ 2 Critères de convergence uniforme 312

§ 3 Limite uniforme de fonctions continues 316
§ 4 Limites de fonctions dérivables ou différentiables 320
§ 5 Séries de fonctions 324
§ 6 Critères de convergence uniforme pour les séries 326
§ 7 Autres critères 330
§ 8 Exponentielle complexe 333
§ 9 Fonctions trigonométriques et hyperboliques 340
§ 10 Argument et logarithme d'un nombre complexe 343

CHAPITRE IX. **Séries entières. Fonctions analytiques** 348

§ 1 Rayon et disque de convergence 348
§ 2 Fonctions définies par une série entière 352
§ 3 Etude sur le cercle de convergence 360
§ 4 Somme et produit de séries entières 361
§ 5 Composition des séries entières 363
§ 6 Inverse d'une série entière 367
§ 7 Séries majorantes. Séries entières réciproques 370
§ 8 Développements en série entière de Log $(1 + z)$, $(1 + z)^{\alpha}$, Arc tg z, Arc sin z 375
§ 9 Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe 380
§ 10 Existence de fonctions analytiques 383
§ 11 Propriétés des zéros ; prolongement analytique 386
§ 12 Séries entières d'endomorphismes. Exponentielle d'une matrice 391

CHAPITRE X. **Intégrale simple** 397

§ 1 Intégration des fonctions en escalier 398
§ 2 Intégrale de Riemann (fonctions numériques) 402
§ 3 Intégrale de Riemann (fonctions vectorielles) 408
§ 4 Propriétés générales de l'intégrale de Riemann 413
§ 5 Produit de fonctions intégrables. Inégalités de Schwarz et de Minkowski 418
§ 6 Exemples de fonctions intégrables : fonctions réglées, fonctions continues . . 421
§ 7 Intégrale indéfinie. Dérivation 427
§ 8 Changement de variable 434
§ 9 Intégration par parties. Applications 439
§ 10 Calcul des primitives 444
§ 11 Valeur approchée d'une intégrale définie 454
§ 12 Limite uniforme de fonctions intégrables. Intégration terme à terme d'une série 461
§ 13 Formules de la moyenne 466
§ 14 Sommes de Riemann 468

CHAPITRE XI. **Intégrales généralisées. Intégrales dépendant d'un paramètre** 473

§ 1 Intégrales généralisées 473
§ 2 Calcul pratique des intégrales généralisées 479
§ 3 Critères généraux de convergence 483
§ 4 Convergence absolue et semi-convergence. Règles pratiques 487
§ 5 Intégrales semi-convergentes. Règle d'Abel 495
§ 6 Relations entre la convergence des intégrales et la convergence des séries 499
§ 7 Intégrales définies dépendant d'un paramètre 503
§ 8 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre 510
§ 9 Critères de convergence uniforme pour les intégrales 512

§ 10 Exemples 515
§ 11 Limites d'intégrales généralisées 519
§ 12 Application aux séries 523
§ 13 Appendice : définition de l'intégrale de Lebesgue 524

CHAPITRE XII. **Séries de Fourier** 528

§ 1 Séries trigonométriques 528
§ 2 Coefficients de Fourier 532
§ 3 Règles de convergence 537
§ 4 Quelques applications des séries de Fourier 544
§ 5 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro 545
§ 6 Problèmes d'approximation 550
§ 7 Un exemple d'espace préhilbertien 551
§ 8 Théorème de Parseval 555

EXERCICES 559
BIBLIOGRAPHIE 634
INDEX ALPHABÉTIQUE 635