TRADUIT DU RUSSE

MATHÉMATIQUES

# Exercices de mathématiques supérieures

Y. BOUGROV
S. NIKOLSKI

ÉDITIONS MIR
MOSCOU

# TABLE DES MATIÈRES


Avant-propos . . . . . 8

**Chapitre premier. INTRODUCTION À L'ANALYSE** . . . . . 9

§ 1. Nombres réels. Ensembles . . . . . 9
§ 2. Limite d'une suite . . . . . 10
§ 3. Fonction. Limite d'une fonction . . . . . 12
§ 4. Dérivée . . . . . 14

**Chapitre 2. INTÉGRALES** . . . . . 22

§ 1. Intégrale indéfinie . . . . . 22
§ 2. Intégrale définie . . . . . 25
§ 3. Applications de l'intégrale définie . . . . . 26
§ 4. Intégrales impropres . . . . . 29

**Chapitre 3. ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE ET DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** . . . . . 30

§ 1. Déterminants et matrices . . . . . 30
§ 2. Systèmes d'équations linéaires . . . . . 31
§ 3. Vecteurs . . . . . 32
§ 4. Division d'un segment dans un rapport donné . . . . . 33
§ 5. La droite . . . . . 33
§ 6. Le plan . . . . . 34
§ 7. La droite dans l'espace . . . . . 35
§ 8. Orientation d'un système de vecteurs. Produit vectoriel et produit mixte . . . . . 35
§ 9. Systèmes de vecteurs linéairement dépendants et linéairement indépendants . . . . . 40
§ 10. Opérateurs linéaires. Base . . . . . 40
§ 11. Sous-espaces vectoriels . . . . . 44
§ 12. Opérateurs autoadjoints (hermitiens). Formes quadratiques . . . 46
§ 13. Coniques . . . . . 47
§ 14. Quadriques dans l'espace . . . . . 49

**Chapitre 4. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES** . . . . . 53

§ 1. Notions de base . . . . . 53
§ 2. Limite d'une fonction. Continuité . . . . . 54
§ 3. Dérivées partielles. Différentielles . . . . . 56

§ 4. Dérivées partielles et différentielles d'ordre supérieur . . . . . 57
§ 5. Plan tangent et normale à une surface . . . . . 58
§ 6. Formule de Taylor . . . . . 58
§ 7. Extrémums . . . . . 59
§ 8. Fonctions implicites. Extrémum lié . . . . . 59

**Chapitre 5. SÉRIES** . . . . . 60

§ 1. Séries numériques . . . . . 60
§ 2. Séries de fonctions . . . . . 63
§ 3. Séries entières . . . . . 64

**Chapitre 6. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** . . . . . 64

§ 1. Notions générales . . . . . 64
§ 2. Equations du premier ordre . . . . . 64
§ 3. Espaces métriques. Opérateurs contractants. Théorème d'existence de la solution d'une équation . . . . . 66
§ 4. Equations non résolues par rapport à la dérivée. Solutions singulières . . . . . 67
§ 5. Réduction de l'ordre d'une équation différentielle . . . . . 69
§ 6. Equations linéaires à coefficients constants . . . . . 69
§ 7. Equation d'Euler. Equations à coefficients variables . . . . . 70
§ 8. Méthode de variation des constantes . . . . . 72
§ 9. Systèmes d'équations différentielles . . . . . 72
§ 10. Résolution des équations à l'aide des séries entières . . . . . 73
§ 11. Stabilité au sens de Liapounov . . . . . 74

**Chapitre 7. INTÉGRALES MULTIPLES** . . . . . 75

§ 1. Intégrales fonctions d'un paramètre . . . . . 75
§ 2. Intégrales multiples . . . . . 76
§ 3. Changement de variables d'une intégrale multiple . . . . . 77
§ 4. Application des intégrales multiples . . . . . 78
§ 5. Intégrales impropres . . . . . 80

**Chapitre 8. ANALYSE VECTORIELLE** . . . . . 81

§ 1. Intégrales curvilignes de première espèce . . . . . 81
§ 2. Intégrale d'un vecteur le long d'une courbe . . . . . 83
§ 3. Potentiel. Rotationnel d'un vecteur . . . . . 85
§ 4. Equations différentielles du premier ordre aux différentielles totales . . . . . 85
§ 5. Formule de Green . . . . . 86
§ 6. Intégrale de surface de première espèce . . . . . 87
§ 7. Flux d'un vecteur à travers une surface orientée (intégrale de surface de deuxième espèce) . . . . . 89
§ 8. Formule de Gauss-Ostrogradski . . . . . 92
§ 9. Formule de Stokes . . . . . 93

**Chapitre 9. SÉRIES DE FOURIER. INTÉGRALE DE FOURIER** . . . 95

§ 1. Séries trigonométriques . . . . . 95
§ 2. Série de Fourier . . . . . 96
§ 3. Systèmes orthogonaux de fonctions . . . . . 97
§ 4. Intégrale de Fourier . . . . . 99

**Chapitre 10. ÉQUATIONS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE . . . 100**

**Chapitre 11. FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE . . . . . 102**

§ 1. Notions générales . . . . . 102
§ 2. Limite d'une fonction. Dérivée . . . . . 104
§ 3. Conditions de Cauchy-Riemann. Fonctions harmoniques . . . . 104
§ 4. Applications conformes élémentaires . . . . . 105
§ 5. Intégration des fonctions d'une variable complexe . . . . . 107
§ 6. Formule intégrale de Cauchy . . . . . 108
§ 7. Séries dans le domaine complexe . . . . . 109
§ 8. Points singuliers isolés. Résidus . . . . . 111
§ 9. Calcul des intégrales avec les résidus . . . . . 113

**Chapitre 12. CALCUL OPÉRATIONNEL . . . . . 116**

§ 1. Images des fonctions élémentaires . . . . . 116
§ 2. Recherche de l'original d'après son image . . . . . 118
§ 3. Applications du calcul opérationnel . . . . . 119

**ANNEXE . . . . . 121**

Réponses . . . . . 162
Réponses aux problèmes donnés en Annexe . . . . . 230