Mathématiques Université



EXERCICES DE PROBABILITÉS
avec rappels de cours

Maîtrises de mathématiques pures et appliquées
Écoles d'ingénieurs

M. Cottrell Ch. Duhamel V. Genon-Catalot

BELIN

Table

Avant-propos 7

CH. I : PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI 9

COURS. - 1. Expérience aléatoire. Epreuves *9* / 2. Evénements aléatoires. Tribus *9* 3. Probabilités *10* / 4. Variables aléatoires *12* / 5. Introduction aux marches aléatoires *12* .

EXERCICES. - 1. Trois dés *14* / 2. Des livres sur une étagère *15* / 3. Conditionnement *16* / 4. Indépendance *16* / 5. Fonction d'Euler *17* / 6. Un parapluie conditionné *18* / 7. Formule de Bayes *19* / 8. Cherchez l'erreur *20* / 9. Où l'on voit comment se transmet l'information *21* / 10. Indépendance conditionnelle *22* 11. Loi de succession de Laplace *22* / 12. Probabilité d'une réunion finie d'ensembles *24* / APPENDICE. - A. Théorème du scrutin *26* / B. Retours en zéro *30* .

CH. II : VARIABLES ALÉATOIRES, LOIS DE PROBABILITÉ 33

COURS. - 1. Limite supérieure, limite inférieure d'une suite d'événements *33* 2. Indépendance d'une famille de tribus *33* / 3. Théorèmes d'existence et d'unicité *34* / 4. Variables aléatoires. Tribus engendrées *35* / 5. Loi de probabilité. Espérance *35* / 6. Moments des variables aléatoires réelles *36* 7. Fonctions de répartition *36* / 8. Lois marginales *37* / 9. Indépendance des v.a. *37* / 10. Egalité P-presque sûrement *38* .

EXERCICES. - 1. Tribus indépendantes *39* / 2. Indice aléatoire *39* / 3. V.a. X-mesurables *39* / 4. V.a. p.s. constante *40* / 5. Borne supérieure essentielle *41* 6. Atomes d'un espace probabilisé *42* / 7. Exemple de mesure invariante *44* / 8. Estimateurs de la moyenne et de la variance *46* / 9. Espérance d'une v.a. à valeurs entières ou réelles positives *47* / 10. Binomiale négative *48* / 11. Rencontre *49* / 12. Temps d'arrêt *51* / 13. Calculs de lois *52* / 14. Loi de Cauchy et convolution *54* / 15. Egalisation *56* / 16. Statistiques d'ordre *56* / 17. Simulation *59* / 18. Loi de F(X) *60* / 19. Loi non absolument continue. Distribution de Cantor *61* .

CH. III : LOIS DISCRÈTES, FONCTIONS GÉNÉRATRICES, LOIS UNIFORME ET EXPONENTIELLE 63

COURS. - 1. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ *63* / 2. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ *64* .

EXERCICES. - 1. Fonction génératrice de v.a. binomiale et de Poisson *65* / 2. Dés truqués *66* / 3. Loi binomiale négative *67* / 4. Somme aléatoire de v.a. *68* 5. Processus de branchement *70* / 6. Loi triangulaire *72* / 7. Statistiques d'ordre de v.a. uniformes *73* / 8. Somme de 2 v.a. exponentielles de paramètres distincts *76* / 9. Temps d'attente en parallèle ou statistiques d'ordre de v.a. exponentielles *76* / 10. Exemple de temps d'attente en parallèle *78* / 11. Lois gamma, béta, χ^2 *80* / 12. Première valeur record *84* / 13. Théorème de la Palice *85* 14. Files d'attente *88* / 15. Estimation de la durée de vie (moyenne) d'une ampoule électrique *89* / APPENDICE : Processus de Poisson. - Définition *91* A.1. Instants d'arrivée avant le n^e *91* / A.2. Paradoxe de l'autobus *93* A.3. Indépendance *95* .

CH. IV : CONVERGENCE EN LOI 97

COURS. - 1. Convergence faible des probabilités *97* / 2. Convergence en loi des v.a. *97* / 3. Mesure image *97* / 4. Suite tendue *98* / 5. Fonctions caractéristiques *98* / 6. Propriétés des fonctions caractéristiques *98* / 7. Seconde fonction caractéristique *99* / 8. Théorème limite centrale *100* .

EXERCICES. - 1. Convergence en loi et arithmétique *101* / 2. Convergence des fonctions de répartition *101* / 3. Convergence faible des mesures de Dirac *103* 4. Convergence en loi pour des probabilités sur $\mathbb{N}$ *103* / 5. Théorème de Scheffé *103* / 6. Probabilité d'un intervalle *104* / 7. Suite tendue *106* 8. Théorèmes de Helly et Prohorov *107* / 9. Théorème de Lévy *110* / 10. F.c. d'une v.a. discrète *111* / 11. F.c. des lois discrètes usuelles *112* / 12. F.c. des lois continues usuelles *113* / 13. Somme d'un nombre aléatoire de v.a. *116* / 14. Loi de Cauchy *116* / 15. Une application amusante du théorème limite centrale *118* 16. Erreurs d'arrondi *119* / 17. Caractérisation de la loi normale *120* 18. Théorème limite centrale pour une somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes équidistribuées *120* / 19. Convergence en loi de la médiane d'un échantillon *122* / 20. Type *123* / 21. Lois indéfiniment divisibles *125* / 22. Stabilité *128* / 23. Extrêmes *131* / 24. Caractérisation des fonctions caractéristiques (th. de Bochner) *133* .

CH. V : CONVERGENCES 137

COURS. - 1. Inégalités *137* / 2. Différentes sortes de convergence *137* / 3. Evénements asymptotiques. Lemme de Borel-Cantelli *138* / 4. Transformée de Laplace *139*.

EXERCICES. - Lim sup *140* / 2. Retours à zéro *140* / 3. Séries de v.a. indépendantes *141* / 4. Espérance *141* / 5. Loi forte des grands nombres. Théorème de Cantelli *143* / 6. Non-équivalence des diverses convergences *144* / 7. Somme et produit *145* / 8. Convergence de sommes de v.a. indépendantes *146* / 9. Loi forte des grands nombres *146* / 10. Une série *147* / 11. Une minoration *148* 12. Théorèmes d'analyse *148* / 13. Transformée de Laplace *151* / 14. Théorème de Chernoff *152* .

CH. VI : ESPÉRANCES CONDITIONNELLES 157

COURS. - 1. Espérance conditionnelle d'une v.a. intégrable *157* / 2. L'espérance conditionnelle comme projecteur *160* / 3. Version régulière *160* / 4. Cas gaussien *161* .

EXERCICES. - 1. Loi binomiale. Loi de Poisson *162* / 2. Conditionnement d'une v.a. discrète. Généralités *163* / 3. Exemple de conditionnement par une v.a. discrète *165* / 4. Dérivée usuelle et dérivée de Radon-Nikodym *167* / 5. Conditionnement par le sup de deux tribus *168* / 6 . Partition engendrée par les statistiques d'ordre *169* / 7. Loi conditionnelle sans densité *174* / 9. Conditionnement par les statistiques d'ordre *176* / 10. Variance et covariance conditionnelles *179* / 11. Somme d'un nombre aléatoire de v.a. *180* / 12. Densités conditionnelles *181* / 13. $E(\psi(X,Y) \mid X)$ *182* / 14. Version régulière *184* / 15. Produit infini de v.a. *185* .

CH. VII : VARIABLES ET VECTEURS ALÉATOIRES GAUSSIENS 191

COURS. - 1. Généralités sur les vecteurs aléatoires *191* / 2. Vecteurs aléatoires gaussiens (ou normaux) *193* .

EXERCICES. - 1. Orthogonalité et indépendance *195* / 2. Indépendance de deux combinaisons linéaires de gaussiennes indépendantes *195* / 3. Indépendance mutuelle *196* 4. Vecteur gaussien standard. Forme canonique *197* / 5. Evaluation de la queue de la distribution normale *199* / 6. Une caractérisation de la loi normale *200* 7. C.N.S. d'indépendance de $\overline{X}$ et S^2 *202* / 8. Loi du χ^2 *205* / 9. Loi du χ'^2 *205* 10. Convergence de la loi multinomiale *207* / 11. Théorème de Cochran *210*

12. Analyse de la variance à un facteur *212* / 13. Convergence en probabilité de variables gaussiennes *214* / 14. Coefficient de corrélation linéaire et rapport de corrélation *215* / 15. Espérance conditionnelle pour un vecteur gaussien *218* / 16. Suite gaussienne markovienne *220* / 17. Estimateurs bayésiens *222*.

CH. VIII : MARTINGALES A TEMPS DISCRET 226

COURS. - 1. Définitions : sous-martingales, martingales, sur-martingales *226* 2. Martingales de carré intégrable *227* / 3. Temps d'arrêt. Echantillonnage des martingales *227* / 4. Théorèmes de convergence forts. Equiintégrabilité. Loi forte des grands nombres *228* .

EXERCICES. - 1. Changement de tribus *229* / 2. Exemples de martingales *229* 3. Stratégies. Processus arrêté *230* / 4. Décomposition de Doob *231* / 5. Martingale stationnaire *232* / 6. Applications de l'inégalité de Jensen *233* 7. Exemples *234* / 8. Identité de Wald. Franchissement de barrières *235* 9. Marches aléatoires. Arrêtez si vous gagnez *238* / 10. Convergence pour les martingales de L^2 *239* / 11. Théorème des trois séries (condition suffisante) *241* / 13. Marche aléatoire de Bernoulli *242* / 14. Equiintégrabilité et suite des espérances conditionnelles *244* / 15. Théorème de Radon-Nikodym *244* 16. Loi du Log-itéré *247* .

CH. IX : CHAÎNES DE MARKOV 251

COURS. - 1. Définitions *251* / 2. Théorèmes *252* .

EXERCICES. - 1. Etude de ρ_{xy} *255* / 2. Probabilité d'absorption *256* / 3. Marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^k$ *259* / 4. Chaînes d'Ehrenfest *261* / 5. Chaîne de naissance et mort *266* / 6. Application : *"I shoud've quit when I was ahead"* *268* 7. Un critère de récurrence *268* / 8. Propriété de Markov forte *270* / 9. Convergence de martingale *272* / 10. Martingales : temps de sortie *274* / 11. File d'attente : application de l'exercice IX.7. *275* .

ANNEXE : THÉORIE DE LA MESURE (THÉORÈMES) 277

I. Tribus *277* / II. Applications mesurables *278* / III. Mesures *278* / IV. Intégration des v.a.r. *281* / V. Espaces L^p *283* .

Bibliographie 284

Notations 285

Index 286