COLLECTION

Formation des enseignants



Remi Ziglon

Les structures

NOUVELLE PÉDAGOGIE DE LA MATHÉMATIQUE

HERMANN

Table

Introduction XIII

CHAPITRE 16. **Compléments sur les groupes** 1

1. Sous-ensembles d'un groupe et sous-groupes 1
2. Exemple de loi externe 2
3. Loi externe : définition 3
4. Autres exemples de lois externes 4
5. Sous-groupe engendré par un élément d'un groupe. Groupe cyclique 6
6. Exemples de « classes à gauche » 10
7. Classes à gauche ; classes à droite Théorème de Lagrange 10

CHAPITRE 17. **Groupe opérant sur un ensemble** 13

1. Définition 13
2. Translation modulo 5 14
3. Définition de « groupe opérant sur un ensemble » 16
4. Exemples de groupes opérant sur un ensemble 17
5. Thèmes de réflexion 20
6. Exemple de trajectoires 21
7. Trajectoires 22
8. Autres exemples de trajectoires 23
9. Sous-groupe opérant sur le groupe 23
10. Intérêt de la notion de « groupe opérant sur un ensemble » 24
11. Une fiche pour le premier cycle 24
12. Thème de réflexion 30

CHAPITRE 18. **Anneaux - Corps** 31

1. Loi distributive sur une loi de groupe : première propriété 31
2. Exercice 32
3. Loi distributive sur une loi de groupe : deuxième propriété 33
4. Premier exemple de corps 34
5. Première définition de « corps » et autres exemples 35
6. Deux conséquences directes de la définition de « corps » 36
7. Anneaux 36

8. Intégrité 38
9. Deux propriétés des anneaux 38
10. Anneau et corps - Autre définition de « corps » 39
11. Intégrité et régularité 41
12. Thèmes de réflexion 41

CHAPITRE 19. **Isomorphisme - Homomorphisme** 43

1. Exemple de transfert de structure 43
2. Transfert de structure à l'aide d'une bijection 44
3. Isomorphisme 45
4. Exemples d'isomorphismes 46
5. Homomorphismes 48
6. Thèmes de réflexion 51
7. Homomorphisme d'anneaux 52

CHAPITRE 20. **Structuration** 53

1. Un corps fini 53
2. Ensemble des applications de source $\{a,b\}$ et de but $\{0, 1, 2\}$ 54
3. Structuration de cet ensemble d'applications 55
4. Structuration mécanique d'un ensemble d'applications 56
5. Retour sur l'exemple du paragraphe 3 : $\mathscr{A}$ (E,B) est un anneau 58
6. Thème de réflexion 58

CHAPITRE 21. **Applications indicatrices** 59

1. Un corps à deux éléments 59
2. Application indicatrice 59
3. Structuration de l'ensemble des applications indicatrices relatives à un ensemble 61
4. Propriétés des applications indicatrices 61
5. Intersection et réunion 62
6. Théorème de de Morgan 64
7. Différence symétrique 65
8. Différence 66
9. Thèmes de réflexion 67
10. Inclusion 68
11. Thèmes de réflexion 69

CHAPITRE 22. **Construction de $(\mathbf{Z}, +)$ à partir de $(\mathbf{N}, +)$** 71

1. Bilan concernant l'ensemble **N** des naturels 71
2. Première étape : Structuration de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ à partir de $(\mathbf{N}, +)$ 73
3. Deuxième étape : Relation d'équivalence dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 74
4. Troisième étape : Structuration de **Z** 76
5. $(\mathbf{Z}, \oplus)$ prolonge $(\mathbf{N}, +)$ 78
6. Ecriture des éléments de **Z** à partir de ceux de Γ **(N)** 79
7. Identification de Γ **(N)** et de **N** 80
8. Construction traditionnelle de **Z** 81
9. Ordre dans **Z** 81
10. Thème de réflexion : symétrisation 81

CHAPITRE 23. **La multiplication dans Z** 85

1. Première méthode 85
2. Deuxième méthode 89
3. Résumé : anneau des entiers 91
4. Thème de réflexion 91

CHAPITRE 24. **Le corps des rationnels** 93

1. Etude de $(\mathbf{Z}^*, \times)$ 93
2. Symétrisation de $(\mathbf{Z}^*, \times)$ 93
3. Abstraction, concrétisation 95
4. Ensemble **Q** 95
5. Autre construction de **Q** 96
6. Simplification 96
7. Addition dans **Q** 97
8. Le corps des rationnels 97
9. Ordre sur **Q** 97
10. Division dans **Q*** 98
11. Division dans **Q** 100
12. **N, Z, Q** : Le point sur les ensembles de nombres 101
13. Notation fractionnaire 102
14. Ensemble **D** des décimaux 102
15. Thèmes de réflexion 103

CHAPITRE 25. **Congruences dans Z** 105

1. Multiples dans **Z** 105
2. Une relation d'équivalence 106

3. Classes d'équivalence et ensemble-quotient 107
4. Exercices 108
5. Notation ; résumé des propriétés 110
6. Additions dans C_m 112
7. Sous-groupes 115
8. Multiplication dans C_m 116
9. L'anneau $(C_m, +, \times)$ 117
10. Thèmes de réflexion 118
11. Diviseurs du zéro d'un anneau 119
12. Thèmes de réflexion 119

CHAPITRE 26. **Idéaux de Z** 121

1. Multiples de **Z** 121
2. Structure $(b\,\mathbf{Z}, +, \times)$ 122
3. Produit d'un élément de m **Z** et d'un entier 124
4. Idéal de l'anneau commutatif $(\mathbf{Z}, +, \times)$: définition 125
5. Thème de réflexion 125
6. Idéaux de $(\mathbf{Z}, +, \times)$ 126
7. Thèmes de réflexion 127

CHAPITRE 27. **Arithmétique dans Z** 129

1. Idéal et plus petit multiple commun 129
2. Diviseur 130
3. Idéal et plus grand diviseur commun 131
4. Entiers étrangers. Théorème de Bezout-Bachet 133
5. Thème de réflexion 138

CHAPITRE 28. **Vectoriel** 141

1. Premier exemple de vectoriel 141
2. Définitions 143
3. Propriétés du **K**-vectoriel $\mathscr{V}$ 145
4. **R**-vectoriel des vecteurs géométriques 148
5. Sous-vectoriel 152
6. Exercice 155
7. Somme de sous-vectoriels. Sous-vectoriels supplémentaires 156
8. Autres exemples de vectoriels 157
9. Vectoriels $\mathbf{R}^n$ 160
10. Modules 162
11. Thèmes de réflexion 164

CHAPITRE 29. **Combinaisons linéaires de vecteurs. Bases d'un vectoriel** . 165

1. Combinaisons linéaires de vecteurs 165
2. Sous-vectoriel engendré par une partie finie 167
3. Partie libre 168
4. Partie liée : n-uplet lié 172
5. Bases 175
6. Thèmes de réflexion 180

CHAPITRE 30. **Applications linéaires** 183

1. Exemples 183
2. Définitions 186
3. Détermination d'une application linéaire 188
4. Applications linéaires et sous-vectoriels 190
5. Application linéaire injective 192
6. Application linéaire surjective 193
7. Application linéaire bijective 194
8. Vectoriels de même dimension 195
9. Application linéaire et dimension 197
10. Structuration de l'ensemble des applications linéaires d'un vectoriel vers un vectoriel 199
11. Formes linéaires 203
12. Applications linéaires de **R** vers **R** 205
13. Thèmes de réflexion sur les formes linéaires 207
14. Thèmes de réflexion sur l'ensemble du chapitre 209

INDEX TERMINOLOGIQUE 211

INDEX DES NOTATIONS 213

BIBLIOGRAPHIE 215