

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Modélisation mathématique
pour l'aide à la décision

RESOLUTION ET IDENTIFICATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES PAR LA METHODE D'ADOMIAN

Par

BENZITOUNI RADHIA SELMA

Devant le jury composé de :

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Examineur
B. HEBRI	Maître de conférences .A, USTHB, Alger	Examineur
S. MANSEUR	Maître de conférences .B, U. de Blida	Rapporteur

Blida, Juin 2009

ملخص

نتعرض في بحثنا هذا إلى مسألة المطابقة الوسيطة للنماذج الممثلة بمعادلات تفاضلية جزئية (EDP) لقطع مكافئ.

هذه المسألة تتمثل في تعيين الوسائط المجهولة للنموذج بتخفيض دالة الأخطاء.

استعمال الطريقة التوفيقية بين "أدوميان و أليينور" تسمح بتحويل مسألة مطابقة الوسائط إلى مسألة خفض دالة بمتغير واحد.

الطريقة التفكيكية "لأدوميان" تسمح بالتعبير عن الحل على شكل سلسلة مرتبطة ارتباطا واضحا و مباشرا بوسائط للمطابقة، بينما طريقة "أليينور" تسمح بتحويل مسألة خفض دالة ذات عدة متغيرات إلى مسألة خفض دالة بمتغير واحد و ذلك باستعمال تحويلات اختزالية تسمح بتكثيف فضاء الوسائط بواسطة منحنى ألفا-كثيف.

و لقد تم في هذا البحث دراسة مطابقة الوسائط لبعض النماذج البيولوجية الخاصة بظاهرة الانحلال و النتائج العددية المتحصل عليها بواسطة الطريقة التوفيقية "أدوميان و أليينور" تؤكد صحة و فعالية هذا المسلك.

RESUME

Dans ce mémoire, on considère le problème de l'identification paramétrique de modèles représentés par des équations aux dérivées partielles (EDP) de type parabolique. Ce problème consiste à déterminer les paramètres inconnus du modèle en minimisant une fonctionnelle d'erreur.

L'utilisation de la méthode combinée Adomian/Alienor permet de ramener le problème de l'identification des paramètres en un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable.

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet d'exprimer la solution sous forme d'une série, dépendant explicitement des paramètres à identifier, quant à la méthode Alienor, elle permet de transformer un problème de minimisation d'une fonction de plusieurs variables à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable, en utilisant des transformations réductrices qui permettent de densifier l'espace des paramètres par une courbe alpha dense.

L'identification des paramètres de modèles biologiques de diffusion a été étudiée, et les résultats numériques obtenus par la méthode combinée Adomian/Alienor confirment l'efficacité de cette approche.

ABSTRACT

In this thesis, we consider the parametric identification problem of models represented by parabolic partial derived equations. This problem consist in determining the unknown parameters of the model by minimizing a fonctionnel of error.

The use of the combined method Adomian/Alienor permit to bring back the identification problem of parameters to a problem of minimizing a function with one variable.

The decompositionnel method of Adomian allow to express the solution in series form, dependent explicitly on parameters to identify. To the Alienor method, it allows to transform a problem of minimizing a one variable function, by using reducing transformations that allow to densify the space of parameters by an alpha dense curve.

The parameters identification of diffusion biologic models have been studied and the digital results obtained by the combined method Adomian/Alienor confirm the efficiency of this approach.

REMECIEMENTS

Je tiens à exprimer en premier lieu toute ma reconnaissance à Monsieur **Salah Manseur**, Maître de conférence à l'université Saad Dahlab de Blida, pour son aide ainsi que sa disponibilité qui m'ont permis de réaliser ce travail.

Je remercie sincèrement Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida, pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida et Monsieur **Belkhaled Hebri**, Maître de conférence à l'USTHB d'Alger, qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je saisis aussi cette opportunité pour exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin et dont le soutien m'a été précieux durant la préparation de ce mémoire.

Enfin, je voudrais exprimer mes remerciements et ma sympathie à ma famille pour le soutien qu'elle a apporté ainsi que pour ses encouragements permanents.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION 10

1. GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 13

1.1 Introduction 13

1.2 Concepts de base et définitions 14

1.2.1 Classification des équations aux dérivées partielles 16

1.2.2 Classification des problèmes aux limites 18

1.3 Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles 18

1.3.1 La méthode de séparation des variables 19

1.3.2 La méthode des différences finies 20

1.3.3 La méthode des volumes finis 27

2. LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN ET LA METHODE
ALIENOR 30

2.1 Introduction 30

2.2 La méthode décompositionnelle d'Adomian 31

2.2.1 Introduction 31

2.2.2 Principe de la méthode décompositionnelle 31

2.2.3 Calcul des polynômes d'Adomian 33

2.2.4 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian 38

2.2.5 Résolution de quelques équations aux dérivées partielles par la méthode
d'Adomian 41

2.3 La méthode Alienor 58

2.3.1 Introduction 58

2.3.2 Principe de la méthode 58

2.3.3 Quelques transformations réductrices 63

3. L'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE	71
3.1 Introduction	71
3.2 Principe de l'identification	71
3.3 Applications	77
3.3.1 Modèle1 (problème de diffusion des médicaments)	77
3.3.2 Modèle 2 (Equation de FISHER)	85
3.3.3 Discussion	88
CONCLUSION	90
LISTES DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	91
REFERENCES	92

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 2.1	Graphe de comparaison de la méthode d'Adomian (ligne) avec la méthode de séparation des variables (points) pour $t=0.01$	45
Figure 2.2	Graphe de comparaison de la méthode d'Adomian (ligne) avec la méthode de séparation des variables (points) pour $t=0.02$	46
Figure 2.3	Superposition des courbes de la solution exacte (ligne) avec la solution approchée φ_1 (points) pour $t=0.1$.	48
Figure 2.4	Superposition des courbes de la solution exacte (lignes) avec les solutions approchées φ_1, φ_2 (points) pour $t=0.5$.	49
Figure 2.5	Superposition des courbes de la solution exacte (lignes) avec les solutions approchées φ_1, φ_2 et φ_3 (points) pour $t=1$.	49
Figure 2.6	Graphe de la solution de l'exemple 2.14 obtenue par la méthode décompositionnelle d'Adomian pour D_1 et K_1 fixés.	51
Figure 2.7	Courbes des solutions de l'exemple 2.14 obtenues par la méthode d'Adomian (ligne) et les différences finies (points) pour $t=0.4$.	54
Figure 2.8	Graphe de la solution de l'exemple 2.15 obtenue par la méthode d'Adomian pour D_2 et K_2 fixés.	55
Figure 2.9	Courbes des solutions de l'exemple 2.15 obtenues par la méthode d'Adomian (ligne) et les différences finies (points) pour $t=0.001$.	57
Figure 2.10	Courbes des solutions de l'exemple 2.14 obtenues par la méthode Adomian (ligne) et les différences finies (points) pour $t=0.005$.	58
Figure 2.11	Courbe représentative de la fonction $g(\theta)$.	68
Figure 2.12	Courbe représentative de la fonction $g(\theta)$ sur l'intervalle $[0,3]$.	68
Figure 2.13	Courbe de la fonction $T_f^\varepsilon(\theta)$, pour $g(\theta_0) = -1$.	69
Figure 2.14	Courbe de la fonction $T_f^{0.0001}(\theta)$, $\theta_0 = 1.999$.	70
Figure 3.1	Organigramme représentant une méthode de résolution du problème de l'identification.	73

Figure 3.2	Organigramme représentant la résolution du problème de l'identification en utilisant la méthode Alienor.	74
Figure 3.3	Organigramme de résolution du problème de l'identification par les méthodes Adomian et Alienor.	76
Figure 3.4	Courbe représentative de la fonction J_1^*	83
Figure 3.5	Courbe représentative de la fonction J_1^{**} sur l'intervalle $[-10,10]$	84
Figure 3.6	Courbe de l'opérateur $T_{J_1^{**}}^\varepsilon(\theta)$, $\theta_0 = -0.839$.	84
Figure 3.7	Courbe représentative de la fonction $J_2^*(\theta)$.	87
Figure 3.8	Courbe de la fonction $T_{J_2^*}^\varepsilon(\theta)$, $\theta_0 = 6.47$.	87
Figure 3.9	Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/1ère transformation pour $t=0.5$ et $t=0.6$.	88
Figure 3.10	Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/2ème transformation pour $t=0.5$ et $t=0.6$	88
Figure 3.11	Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/Alienor pour $t=0.001$ et $t=0.004$.	89
Tableau 2.1	Solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$.	36
Tableau 2.2	Solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4$.	37
Tableau 2.3	Les résultats numériques obtenus de l'exemple 2.12.	45
Tableau 2.4	Quelques résultats numériques de l'exemple 2.13 pour $t=0.1$.	48
Tableau 2.5	Les résultats numériques de l'exemple 2.14.	53

Tableau 2.6	Résultats numériques de l'exemple 2.15.	57
Tableau 3.1	Données expérimentales simulées pour le problème de diffusion des médicaments.	80
Tableau 3.2	Valeurs des paramètres obtenues en utilisant les deux transformations.	85

INTRODUCTION

La modélisation prend une place importante dans le développement des sciences, elle consiste à représenter des problèmes du monde réel par des formules mathématiques appelées "Modèles Mathématiques". L'écriture d'un modèle mathématique, qui traduit le fonctionnement du phénomène réel va conduire à des équations ou à des systèmes d'équations mathématiques (différentielles, aux dérivées partielles, intégrales,...,etc) dans lesquelles un certain nombre de paramètres sont inconnus. En général, ces paramètres sont déterminés avec des méthodes d'optimisation à partir de données expérimentales disponibles.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'identification des paramètres constants de modèles représentés par des équations aux dérivées partielles (EDP). Pour les déterminer (ou les identifier) souvent on se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur qui calcule les carés des écarts entre les données expérimentales issues du monde réel et les données calculées en résolvant l'EDP.

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles conduit à une fonctionnelle d'erreur qui dépend implicitement des paramètres. Cette fonctionnelle devra être minimisée. Ainsi, la détermination des paramètres dans les modèles va directement conduire à des problèmes d'optimisation.

Donc, pour résoudre le problème de l'identification, il est nécessaire de définir la fonctionnelle à minimiser (qui dépend du type de problème considéré), et de choisir une technique adéquate pour effectuer la minimisation de cette fonctionnelle.

La littérature sur l'optimisation décrit pour l'essentiel des méthodes locales qui permettent l'obtention de minima locaux. Quant aux méthodes globales existantes, elles sont la plupart du temps, des améliorations des méthodes locales que l'on tente de débloquent d'un minimum local, pour aller vers un meilleur minimum. Une fois les paramètres identifiés, c'est à dire l'identification terminée, on obtiendra le modèle qui reflète le mieux la réalité.

Au laboratoire MEDIMAT de PARIS, le professeur Yves Cherruault et ses collaborateurs ont développé une nouvelle approche pour la résolution de problèmes d'identification

que nous avons utilisée dans notre travail. Cette approche consiste à combiner deux méthodes: la méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode Alienor. L'utilisation de la méthode d'Adomian pour la résolution des EDP permet d'avoir une solution dépendant explicitement des paramètres à identifier. La méthode d'optimisation globale Alienor peut alors être directement appliquée.

La méthode décompositionnelle d'Adomian [9, 5, 11, 21] est basée sur la décomposition de la fonction inconnue sous forme d'une série convergente, dont les termes sont déterminés de manière récurrente, et à décomposer les termes non linéaires en série, en utilisant des polynômes d'un type particulier appelés "polynômes d'Adomian". La solution obtenue est reportée dans la fonctionnelle d'erreur, ce qui conduit à une fonctionnelle dépendant explicitement des paramètres.

La méthode Alienor [6, 18, 21] consiste à ramener une fonction de n variables à une fonction d'une seule variable. Donc l'optimisation multivariable conduit à l'optimisation monovariable. Le principe de base de cette méthode est d'exprimer les paramètres inconnus du modèle en fonction d'une même variable, en utilisant des transformations réductrices qui densifient l'espace des paramètres.

La combinaison des deux méthodes permet de ramener les problèmes de l'identification paramétrique à des problèmes de minimisation d'une fonction à une seule variable. Cette technique a été utilisée dans [14] pour l'identification de modèles décrits par des systèmes d'équations différentielles. Pour notre part, nous avons utilisé la méthode combinée Adomian/Alienor pour la résolution du problème de l'identification paramétrique de deux modèles: Modèle biologique de diffusion et le modèle de FISHER (équation de diffusion linéaire et nonlinéaire). Les résultats numériques obtenus, en utilisant le langage de programmation "Maple" (logiciel de calcul formel) sont satisfaisants et confirment l'efficacité de la technique.

Ce mémoire comporte trois chapitres qui sont développés comme suit:

Nous introduisons dans le premier chapitre les principales notions et définitions sur les équations aux dérivées partielles ainsi que quelques méthodes de leur résolution.

Le deuxième chapitre est consacré à la description de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour résoudre des équations fonctionnelles (équations aux dérivées partielles). Une comparaison numérique est faite en résolvant des EDP linéaires et non linéaires par la méthode décompositionnelle, par la méthode des différences finies et par la méthode de séparation des variables. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous abordons la méthode Alienor pour l'approximation des fonctions à plusieurs variables par des fonctions à une seule variable. Nous rappelons l'idée de base de la méthode et son utilisation aux problèmes d'optimisation globale des fonctions de plusieurs variables. Nous terminons le chapitre en donnant un exemple de recherche du minimum d'une fonction multivariable.

Dans le chapitre trois, nous parlons du problème de l'identification paramétrique de deux modèles régis par des équations de diffusion. Nous utilisons la méthode combinée Adomian/Alienor à la résolution de ce problème.

Nous terminons notre travail par une conclusion.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

1.1 Introduction

Les équations ou les systèmes d'équations aux dérivées partielles interviennent aujourd'hui dans la modélisation de nombreux phénomènes provenant de plusieurs domaines comme: la mécanique, l'électricité, la géologie, la biologie, l'économie et la finance, et jouent aussi un grand rôle dans d'autres branches des mathématiques telles que la géométrie ou les probabilités. Les équations de diffusion, par exemple, concernent le thermicien aussi bien qui analyse les propriétés isolantes d'un matériau, que le géologue qui étudie les transferts d'humidité dans une roche poreuse, ou encore le biologiste intéressé par la migration d'une population bactériologique dans un milieu organique. Donc l'étude et la résolution des équations aux dérivées partielles s'adressent à un vaste public scientifique.

En général, on ne peut pas déterminer les solutions analytiques des équations aux dérivées partielles (dans le cas de problèmes réels dans des géométries complexes), il est nécessaire donc de chercher des solutions approchées aussi voisines que possible de ces solutions exactes inconnues.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons quelques notions et définitions fondamentales sur les équations aux dérivées partielles, la classification des équations d'ordre deux et des exemples d'équations connues. Dans la deuxième partie, on donnera quelques méthodes pour la résolution des équations aux dérivées partielles (analytiques et numériques) qu'on utilisera dans le chapitre 2.

1.2 Concepts de base et définitions

Définition 1.1. Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante u (ci-dessous) et les variables indépendantes $x, y, \dots$ (ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est de la forme:

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

où F est une fonction de plusieurs variables, $x, y, \dots$ sont les variables indépendantes et u est la fonction inconnue de ces variables.

Nous utiliserons EDP comme abréviation d'équations aux dérivées partielles. Les équations suivantes sont des EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = \exp(x) \quad (1.4)$$

$$u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + xu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \sin(y) \quad (1.6)$$

Si n est le nombre de variables indépendantes, nous considérons alors le vecteur $(x, y, \dots)$ de variables indépendantes appartenant à un domaine D de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2. Une solution de l'équation (1.1) est une fonction $u = u(x, y, \dots)$ des variables indépendantes $x, y, \dots$, dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent en tout point de D ($D \subset \mathbb{R}^n$), et si on substitue cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation, celle-ci est satisfaite.

Par exemple: L'équation (1.3) est une EDP pour le domaine $\mathbb{R}^2$, et les fonctions $u(x, y) = (x + y)^3$ et $u(x, y) = \sin(x - y)$ sont deux solutions de cette équation.

Par cet exemple, on voit que les solutions d'une EDP peuvent être très différentes. En général, une EDP donnée admet une infinité de solutions. Dans un problème typique, en plus de l'EDP, il ya certaines conditions (aux limites et/ou aux frontières) qui ont comme conséquence de réduire le nombre de solutions jusqu'à une seule (dans une situation idéale).

Définition 1.3. *L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.*

Par exemple: L'équation (1.2) est une EDP d'ordre 1, les équations (1.3), (1.5) et (1.6) sont des EDP du second ordre et l'équation (1.4) est d'ordre 3.

Par la suite, un opérateur L désignera une transformation qui associe à toute "bonne" fonction $u = u(x, y, \dots)$ de plusieurs variables $x, y, \dots$ sur un domaine D , une fonction $Lu = Lu(x, y, \dots)$ sur le même domaine. Le mot "bonne" signifie ici que Lu est bien défini (les dérivées partielles de u existent jusqu'à un certain ordre sur le domaine D).

L'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme $L(u) = f(x, y, \dots)$, où $f(x, y, \dots)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et u est une fonction à déterminer.

Par exemple: l'équation (1.3) peut s'écrire sous la forme $Lu = f(x, y)$ où $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $f(x, y) = 0$, de même dans l'équation (1.4) on a $Lu = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2$ et $f(x, y) = \exp(x)$.

Définition 1.4. *Une EDP est dite linéaire, si elle est de la forme $L(u) = f(x, y, \dots)$, où L est un opérateur linéaire, $f(x, y, \dots)$ est une fonction de n variables indépendantes, $(x, y, \dots)$ appartient à un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et u est la fonction recherchée (l'opérateur L est linéaire si et seulement si $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$, quelque soient les nombres a, b et les bonnes fonctions u, v et $au + bv$).*

Si de plus, $f(x, y, \dots) \equiv 0$, on dit que l'équation est homogène, sinon elle est non-homogène.

Par exemple: L'équation: (1.3) est linéaire homogène, l'EDP (1.5) est linéaire non-homogène, par contre l'EDP (1.6) est non linéaire car l'opérateur L n'est pas linéaire: si on pose $a = b = 1$ et $u(x, t) = v(x, t) = x^2$ alors $L(u + v) \neq L(u) + L(v)$ et elle est non-homogène car $f(x, y) = \sin(y) \neq 0$.

Donc une EDP linéaire d'ordre 2 à n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ est de la forme:

$$\sum_{i,j}^n A_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = E \quad (1.7)$$

où $A_{i,j}, B_i, C, E$ sont des fonctions des variables indépendantes.

Les équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en pratique sont rarement d'ordre élevé, le plus souvent d'ordre deux, alors c'est sur les équations d'ordre deux que s'appuie leur classification générale.

1.2.1 Classification des équations aux dérivées partielles

On s'intéressera aux EDP linéaires d'ordre 2, à deux variables indépendantes, d'après l'équation (1.7) elles s'écrivent sous la forme:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (1.8)$$

avec a, b, c, d, e, f et g sont des fonctions de x et de y (qui ne s'annulent pas simultanément). On suppose que u, a, b, c, d, e, f et g ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2 continues sur un domaine D du plan.

- Dans $[1, 2]$, l'équation (1.8) est dite de nature:
 - Hyperbolique au point $(x_0, y_0) \in D \iff (b(x_0, y_0))^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$.
 - Parabolique au point $(x_0, y_0) \in D \iff (b(x_0, y_0))^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) = 0$.
 - Elliptique au point $(x_0, y_0) \in D \iff (b(x_0, y_0))^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) < 0$.

Si une EDP est hyperbolique (respectivement parabolique ou elliptique) en tout point (x_0, y_0) du domaine D , on dira alors qu'elle est de nature hyperbolique (respectivement parabolique ou elliptique) sur D .

En général le signe de $(b(x, y))^2 - 4a(x, y)c(x, y)$, $(x, y) \in D$ peut ne pas être le même dans tout le domaine, par conséquent la nature de l'équation change.

Nous citons les exemples suivants:

- Equation des ondes: (ou de vibration transversale)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1.9)$$

est une équation hyperbolique ($b^2 - 4ac = 4\alpha^2 > 0$).

- Equation de diffusion:

$$\frac{du}{dt} = \beta \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1.10)$$

est une équation parabolique ($b^2 - 4ac = 0$).

- Equation (1.3) (de laplace en 2D) est une équation elliptique ($b^2 - 4ac = -4 < 0$).

Définition 1.5. Soit une EDP donnée (équation d'évolution) et soit la fonction dépendant $u(x, t)$, où $(x, t) \in I_1 \times I_2$. On définit:

La condition initiale est la valeur de la fonction dépendante u spécifiée pour un certain instant initial t_0 (ex: $u(x, t_0) = f(x), \forall x \in I_1$).

Une condition frontière est la valeur de la fonction dépendante u spécifiée pour un certain état initial x_0 (ex: $u(x_0, t) = g(t), \forall t \in I_2$).

Les conditions aux limites sont des conditions qu'on impose sur la fonction dépendante u ou sur sa dérivée sur la frontière du domaine de calcul. Elles sont sous la forme $au + b \frac{\partial u}{\partial x}$ (c'est la donnée de la solution et de certaines de ses dérivées sur le bord du domaine).

- Si $a = 0$, la condition est dite de Neumann.
- Si $b = 0$, la condition est dite de Dirichlet.
- Si $a \neq 0, b \neq 0$, c'est une condition de Cauchy.

1.2.2 Classification des problèmes aux limites

Les problèmes aux limites sont régis par des EDP accompagnées de conditions aux limites spécifiques. Selon le type d'équations on obtient le problème aux limites correspondant.

- Si l'équation est elliptique, le problème est elliptique et on a un problème de valeurs aux limites (PVL).
- Si l'équation est parabolique, le problème est parabolique et on a un problème de valeurs initiales (PVI).
- Si l'équation est hyperbolique, le problème est hyperbolique et on a un problème de valeurs propres (PVP).

Problèmes de valeurs aux limites[2]: Les équations aux dérivées partielles peuvent être par exemple, les équations bidimensionnelles de laplace ou de poisson, accompagnées de conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou de Cauchy.

Problèmes de valeurs initiales[2]: En plus des équations paraboliques, on prescrit des conditions aux limites de type Dirichlet ou de Cauchy, et des conditions initiales.

Problèmes de valeurs propres[2]: En plus des équations hyperboliques on a aux frontières du domaine des conditions aux limites de type Neumann ou de Dirichlet et des conditions initiales.

1.3 Les méthodes de résolution des EDP

Les équations aux dérivées partielles peuvent être résolues par de nombreuses méthodes: Les méthodes analytiques comme la méthode de séparation des variables, la méthodes des caractéristiques,...,etc, qui consistent à rechercher la solution exacte du problème, ce qui n'est pas toujours possible. Il faut alors utiliser des méthodes numériques comme par exemple, la méthode des différences finies, les méthodes des éléments ou des volumes finis,...,etc, qui nous donnent des solutions approchées au problème donné.

Définissons une des méthodes analytiques pour la résolution des EDP :

1.3.1 La méthode de séparation des variables (SV)

Cette méthode est la plus utilisée à cause de sa simplicité pour la résolution des EDP linéaires, vérifiant certaines conditions. Elle consiste à rechercher des solutions particulières, puis de les utiliser à la recherche de la solution générale du problème.

Principe: Soit à résoudre une EDP linéaire donnée, vérifiant des conditions données, et soit la fonction $u(x, t)$ solution de cette EDP. La procédure générale de résolution des équations aux dérivées partielles linéaires par cette méthode est donnée comme suit:

- On exprime la solution $u(x, t)$ comme le produit de fonctions inconnues, chacune d'elles ne dépend que d'une seule variable indépendante x et t : C'est à dire, on cherche une solution sous la forme: $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- On substitue cette solution dans l'EDP, puis on sépare l'équation en équations différentielles ordinaires.
- On ramène les conditions aux limites homogènes de $u(x, t)$ sur celles de X et T .
- On résout les équations différentielles à valeurs propres λ_n .

Les fonctions propres u_n sont le produit des solutions correspondant à chaque valeur propre: $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$. L'équation étant linéaire, la solution est la combinaison linéaire des fonctions propres: $u(x, t) = \sum_n a_n u_n$.

- On détermine les coefficients a_n à partir des conditions aux limites non-homogènes.

Remarque 1.6. *D'après la 4^{ème} étape, la solution de l'EDP est une combinaison linéaire des fonctions propres. Ce résultat est établi d'après le principe de superposition.*

Théorème 1.7. *[2] Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des solutions linéairement indépendantes d'une équation aux dérivées partielles homogène, alors: $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ est aussi solution avec $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes.*

Remarque 1.8. *Pour des problèmes ayant des conditions aux limites non-homogènes, on ne peut pas appliquer directement la méthode de séparation des variables. On doit d'abord faire un changement de variable approprié de façon à rendre les conditions homogènes. Une fois que ces dernières deviennent homogènes, on applique la méthode de séparation des variables.*

Il est toujours souhaitable de pouvoir résoudre des EDP à l'aide de la méthode de séparation des variables (méthode analytique) pour avoir la solution exacte du problème. Cependant cette méthode présente les inconvénients suivants:

- Utilisation d'un grand nombre de termes pour obtenir la solution d'après le principe de superposition. De plus, la solution ne peut pas être exacte puisqu'on ne peut pas atteindre des valeurs infinies de n .
- La solution est toujours difficile à trouver. La méthode est spécifique à chaque type de problème.
- La difficulté s'accroît davantage si les conditions aux limites et l'EDP sont non-homogènes.

La résolution analytique (exacte) des équations aux dérivées partielles est en général impossible, l'approche numérique est donc indispensable. Ces méthodes comme la méthode des différences finies ou la méthode des volumes finis permettent de transformer un problème continu (exact) régi par une EDP à un problème discret (approché).

1.3.2 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation locale des dérivées apparaissant dans les équations aux dérivées partielles, elle donne ainsi des solutions approchées en des points discrets. Cette méthode est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor, Leibniz,...).

Principe: En se basant sur des développements de Taylor, les fonctions dérivées sont approchées par plusieurs types de schémas aux différences. Soit $u(x, t)$ une fonction de l'espace et du temps, suffisamment dérivable sur un certain domaine D . Un développement de Taylor de la fonction u au voisinage de x , avec h assez petit donne:

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + \dots \quad (1.11)$$

En tronquant la série au premier ordre en h , on obtient:

$$u(x + h, t) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O(h) \quad (1.12)$$

ce qui donne:

$$\frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} \simeq \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.13)$$

qui est l'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'ordre 1 par différence finie en "avant" ou "progressive".

Considérons une EDP dont l'inconnu est une fonction $u(x, t)$ définie sur un domaine $D = I_1 \times I_2$.

La méthode consiste à discrétiser le domaine D en temps et en espace, cette discrétisation se fait en donnant un ensemble de points x_i , $i = n, \dots, N$ de l'intervalle d'espace I_1 , qui sont répartis régulièrement avec un pas h (pas de discrétisation spatial), et un ensemble de points t_j , $j = m, \dots, M$ de l'intervalle de temps I_2 , répartis par un pas k (pas de discrétisation de temps).

On pose $x_i = ih$, pour $i = n, \dots, N$ et $t_j = jk$, pour $j = m, \dots, M$. Les points (x_i, t_j) , $i = n, \dots, N$, $j = m, \dots, M$ constituent un maillage (ou grille). La fonction u définie pour les variables continues (x, t) prend la valeur $u(ih, jk)$ aux points $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ du maillage. On note par u_i^j (notation matricielle) la valeur $u(ih, jk)$.

Donc résoudre une EDP par la méthode des différences finies revient à chercher une solution (approchée) aux points du maillage. En utilisant la notation indicielle, la formule (1.13) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} \quad (1.14)$$

Il est possible de construire un schéma en "arrière" ou "régressif":

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} \quad (1.15)$$

De la même manière, nous pouvons déterminer des approximations par différences finies de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ d'ordre 1.

En manipulant des développements de Taylor au voisinage du point x_i , on peut construire des schémas aux différences finies d'ordre supérieur par exemple:

$$u_{i+1}^j = u(x_i + h, t_j) = u_i^j + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + O(h^3) \quad (1.16)$$

et

$$u_{i-1}^j = u(x_i - h, t_j) = u_i^j - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + O(h^3) \quad (1.17)$$

La soustraction des ces deux relations donne:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \quad (1.18)$$

qui est l'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'ordre 2 dite "centrée".

de même l'approximation par différence finie centrée de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (1.19)$$

Consistance, stabilité et convergence des schémas discrétisés: [1] On considère une EDP quelconque définie sur un domaine spacial D , où $\underline{u}$ est la variable dépendante et où les variables indépendantes sont t (temps), $x_1, x_2, \dots, x_n$ (variables d'espace), accompagnées des conditions aux limites sur la frontière de D . On pose $\Omega = D \times]t_0, t]$, où t_0 est l'instant initial, et Γ son contour. Cette équation est notée symboliquement par:

$$\begin{cases} F(\underline{u}) = \underline{g} & \text{dans } \Omega \\ B(\underline{u}) = \underline{h} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.20)$$

mise sous forme discrétisée, ces relations seront notées:

$$\begin{cases} F_{\Delta}(U) = \underline{g} & \text{dans } \Omega \\ B_{\Delta}(U) = \underline{h} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.21)$$

Les relations (1.21) représentent le schéma de discrétisation du problème (1.20), (il est obtenu en remplaçant les dérivées qui y interviennent par des approximations aux différences). Le symbole Δ représente les pas de discrétisation, F_{Δ} et F représentent respectivement les opérateurs discrets et continus. Notons par $\underline{u}$ la solution du problème (1.20) et par U_{Δ} la solution du schéma aux différences finies (1.21).

En général avant d'admettre que la solution U_{Δ} du schéma aux différences finies (1.21) est une approximation valable de $\underline{u}$, il faut vérifier que:

1. Le schéma discrétisé représente correctement l'équation d'origine, ce qui correspond à la propriété de "consistance" (ou cohérence) du schéma (1.21) avec le problème (1.20).
2. La méthode numérique utilisée pour résoudre le schéma (1.21) conduit à une solution U_{Δ} qui vérifie effectivement les équations (1.21), c'est la propriété de "la stabilité" de la résolution du schéma (1.21).
3. La solution U_{Δ} est bien une approximation convenable de la solution exacte, c'est à dire la propriété de "convergence" de U_{Δ} vers $\underline{u}$.

Définissons ces trois notions:

Définition 1.9. [1] On appelle *erreur de troncature* (erreur de discrétisation) l'expression définie par:

$$R_{\Delta}(\underline{u}) = F_{\Delta}(\underline{u}) - F(\underline{u})$$

c'est l'erreur qui est faite systématiquement lorsqu'un opérateur continu est approché par un opérateur discret aux différences finies.

Définition 1.10. [1] L'approximation de F par F_Δ est dite consistante si l'erreur de troncature $R_\Delta(\underline{u})$ tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers zéro ($\Delta \longrightarrow 0$).

La consistance d'un opérateur discret assure à celui-ci de pouvoir représenter exactement l'équation lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Définition 1.11. On dit que la méthode est stable quand les erreurs obtenues au cours des étapes successives du calcul ne sont pas amplifiées.

Pour des problèmes d'évolution temporelle, certains schémas sont stables à condition que le pas de temps soit inférieur à une certaine valeur critique, qui dépend du pas d'espace. Cette inégalité constitue la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (1928) ou condition CFL. Elle est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité (la condition CFL varie d'une équation à une autre).

Définition 1.12. On dit que le schéma aux différences finies est convergent si la quantité $\underline{u}(x, t) - U_\Delta(x, t)$ tend vers zéro quand les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Définition 1.13. On appelle problème bien posé, un problème dont la solution est unique et dépend de façon continue des conditions aux limites. Tout problème physique est susceptible d'être bien posé, et sa solution est alors représentative de la réalité.

Théorème 1.14. [1, 3] Pour un problème linéaire, bien posé, et satisfaisant la condition de consistance, alors convergence et stabilité sont deux notions équivalentes.

On peut en général, utiliser deux approches pour discrétiser un problème donné, la première dite explicite et la deuxième implicite.

La méthode explicite: Un schéma de discrétisation est dit explicite, si on peut écrire la valeur u_i^{j+1} au temps $(j+1)k$ comme combinaison linéaire finie des valeurs u_i^j au temps précédent (dans un schéma explicite, l'indice $(j+1)$ n'affecte que u_i).

soit l'équation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.22)$$

Pour un schéma de discrétisation explicite de cette équation, on utilise les approximations progressives suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} \quad (1.23)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (1.24)$$

ce qui nous donne le schéma:

$$u_i^{j+1} = (1 + r)u_i^j - ru_{i+1}^j \quad (1.25)$$

où $r = \frac{ck}{h}$.

En écrivant ce schéma de discrétisation aux points du maillage, on obtient un système d'équations algébriques discrètes sous la forme matricielle suivante:

$$\{u\}_{j+1} = [A] \{u\}_j \quad (1.26)$$

où $[A]$ est la matrice des coefficients (tridiagonale), $\{u\}_j$ est le vecteur connu donné par les conditions aux limites (non-homogènes) et $\{u\}_{j+1}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.

Le vecteur solution est déterminé directement puisque $[A]$ et $\{u\}_j$ sont connus.

Le schéma de discrétisation explicite (1.25) est stable si $|r| \leq 1$ et $c < 0$ et il est instable si $c > 0$.

Remarque 1.15. *La méthode explicite ne présente pas de difficultés pour sa programmation. Mais la limitation sur le pas de temps qui ne doit pas excéder la valeur imposée par le critère de stabilité est un inconvénient pour cette méthode.*

La méthode implicite: Un schéma de discrétisation est dit implicite si d'autres valeurs de u autres que les valeurs u_i^j sont nécessaires (le temps $(j+1)\Delta t$ intervient pour plusieurs points voisins).

Reprenons l'équation (1.22), pour obtenir un schéma implicite, on utilise les approximations aux différences finies progressives suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} \quad (1.27)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (1.28)$$

En remplaçant les équations (1.27) et (1.28) dans (1.22), on retrouve le schéma:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + r(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) = 0 \quad (1.29)$$

Pour ce schéma là, on obtient un système d'équations algébriques sous la forme:

$$\{u\}_j = [B] \{u\}_{j+1} \quad (1.30)$$

tel que $[B]$ est la matrice des coefficients, $\{u\}_j$ est le vecteur connu et $\{u\}_{j+1}$ le vecteur solution recherché.

A chaque itération, le vecteur des inconnus se détermine par la résolution d'un système linéaire en utilisant des méthodes directes comme la méthode de Gauss, ou itératives comme la méthode de Gauss-seidel, relaxation...

La méthode implicite appliquée à l'équation (1.22) est stable si $c < 0$, et elle est instable si $c > 0$.

La méthode de Crank-Nicholson: [2] John Crank et Phyllis Nicolson ont proposé en 1947 une méthode alternative appelée méthode de Crank-Nicolson (ou semi-implicite). Le schéma numérique associé à cette méthode est une combinaison des schémas explicites et implicites.

Si on reprend l'équation (1.22), et en utilisant les approximations aux différences suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (1.31)$$

et la moyenne des dérivées spatiales:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} \right) \quad (1.32)$$

on aura le schéma de discrétisation:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{ck}{4h} [(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + (u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})] \quad (1.33)$$

où encore:

$$u_i^{j+1} + \frac{ck}{4h} [(u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})] = u_i^j - \frac{ck}{4h} [(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)] \quad (1.34)$$

L'équation (1.34) s'exprime sous la forme matricielle

$$\{u\}_j = [C] \{u\}_{j+1} \quad (1.35)$$

où $[C]$ est la matrice des coefficients, $\{u\}_j$ est le vecteur connu et $\{u\}_{j+1}$ le vecteur solution recherché.

Avantages et inconvénients de la méthode des différences finies: Le principal avantage de la méthode est sa grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul. Par contre ses principaux inconvénients sont:

- Limitation à des géométries simples.
- Difficultés de prise en compte des conditions de type Neumann.

1.3.3 La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Contrairement à la méthode des différences finies qui utilise des approximations de dérivées, la méthode des volumes finis, utilise des approximations d'intégrales.

Cette méthode a été mise au point initialement pour des lois de conservation et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. De plus, c'est des méthodes qui permettent de traiter des géométrie complexes (contrairement aux différences finies).

Principe: [4] On résoud l'équation aux dérivées partielles de manière approchée sur un maillage. Ce maillage est constitué de "volumes de contrôles" (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont leurs réunions forment le domaine d'étude. On intègre ensuite l'équation sur ces volumes de contrôles, on approche alors le flux sur les bords par une technique de différences finies.

Considérons une loi de conservation 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1.36)$$

où u est une grandeur physique en fonction de la variable d'espace x ($x \in [a, b]$) et du temps t et $f(u)$ est une fonction de u .

Pour cette méthode, on ne se donne plus des points (la méthode des différences finies) mais des volumes de contrôles (mailles) K_i , $i = 1, \dots, N$, avec $K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ et on pose $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ qui est la taille de la maille (les indices demi-entier désignent les interfaces de la maille avec les mailles voisines).

Pour chaque maille K_i on se donne un point $x_i \in K_i$, par exemple, on pourra considérer $x_i = \frac{1}{2}(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}})$, mais ce n'est pas le seul point, on a donc:

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = b \quad (1.37)$$

Un élément fondamental de la discrétisation en volumes finis est de supposer que la valeur de la grandeur u est constante dans chaque maille et égale à une valeur de la grandeur approchée de sa moyenne sur la maille (ou bien à sa valeur au centre de la maille, on parle alors de volumes finis cell-centered).

Le temps est discrétisé en intervalles de pas Δt , et la discrétisation spatiale pour les volumes finis consiste à intégrer maille par maille la loi de conservation. D'autre part, le terme de dérivation en temps ($\frac{\partial u}{\partial t}$) est évalué au moyen d'une méthode numérique d'intégration d'équation différentielles (Runge-Kutta, méthodes explicite ou implicite...), on aura ainsi un schéma de discrétisation par volumes finis de la loi de conservation.

Remarque 1.16. [4] On peut montrer que les deux schémas différences et volumes finis sont identiques "au bord près" dans le cas d'un maillage régulier c'est à dire que le pas du maillage est constant $h_i = h$, $\forall i = 1, \dots, N$ avec x_i centre de la maille.

Avantages et inconvénients: Les principaux avantages de la méthode sont:

- Adaptation à une géométrie quelconque.
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-linéaires hyperboliques.
- Conservative (le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent).
- De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode: Fluent, StaeCD, CFX,...

Mais son principal inconvénient est qu'il y a peu de résultats théoriques de convergence.

CHAPITRE 2

LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN ET LA METHODE ALIENOR

2.1 Introduction

Chaque fois qu'on cherche à comprendre et à maîtriser un phénomène issu du réel, on se retrouve confronté au problème de la modélisation mathématique. Ce problème va directement impliquer deux domaines: les méthodes de résolution des équations fonctionnelles, et les problèmes d'optimisation globales pour déterminer le modèle qui reflète le mieux la réalité.

Pour résoudre, en général, des équations fonctionnelles, linéaires ou non linéaires (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations algébriques,...,etc), on utilise des méthodes classiques comme les différences finies, les volumes finis,...,etc. Ces méthodes nous donnent une solution approchée en des points discrets du domaine, de plus elles discrétisent l'espace et le temps.

Quant aux problèmes d'optimisation globale, ils consistent à chercher des extrema (généralement des minima) de fonctions de plusieurs variables, et leurs méthodes de résolution sont parfois coûteuses en temps de calcul et dans leur complexité.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons le principe d'une méthode qui permet la résolution des équations fonctionnelles sans les inconvénients des méthodes classiques, appelée "méthode décompositionnelle d'Adomian". Puis nous présentons quelques exemples comparant les résultats de la résolution des EDP par la méthode d'Adomian et ceux obtenus par la méthode des différences finies et la méthode de séparation des variables.

Nous présentons dans la deuxième partie, la méthode d'optimisation globale "Alienor", et son application au problème de minimisation d'une fonction de plusieurs variables. Puis

nous terminons ce chapitre par un exemple de recherche du minimum d'une fonction de deux variables.

2.2 La méthode décompositionnelle d'Adomian

2.2.1 Introduction

La méthode décompositionnelle d'Adomian a été introduite par G.Adomian au début des années 80, sans aucun résultat de convergence [14, 16]. C'est quelques années plus tard que Y.Cherruault [17] a montré la convergence de la méthode en donnant une nouvelle définition à cette dernière, puis Y.Cherruault et G.Adomian [19] ont proposé une nouvelle preuve de convergence de la méthode basée sur les propriétés des séries convergentes. Quant à K.Abbaoui [9], il a donné des résultats théoriques et pratiques sur la méthode. Donc la méthode décompositionnelle d'Adomian est une méthode générale pour résoudre tous les types d'équations fonctionnelles.

2.2.2 Principe de la méthode décompositionnelle d'Adomian

Soit à résoudre l'équation fonctionnelle:

$$u - N(u) = f \quad (2.1)$$

où N est un opérateur non linéaire de E dans E (E est un espace de Hilbert), $f \in E$ (une fonction connue de E) et $u \in E$ l'inconnue de l'équation (2.1).

L'équation (2.1) est écrite sous une forme appelée "forme canonique d'Adomian", et on suppose qu'elle admet une solution unique dans E .

La méthode décompositionnelle d'Adomian consiste à chercher la solution u sous forme d'une série [5, 6]:

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (2.2)$$

et à décomposer le terme non linéaire $N(u)$ en série:

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (2.3)$$

Les A_n sont appelés "*Polynômes d'Adomian*", qui dépendent exclusivement de $u_0, \dots, u_n$, et sont obtenus à partir des relations suivantes [9, 5]:

$$v = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i, \quad N(v) = N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i A_i \quad (2.4)$$

qui impliquent la formule:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i\right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.5)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un paramètre introduit par convenance.

Remplaçons les expressions (2.2) et (2.3) dans (2.1), on obtient:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.6)$$

Cette égalité est satisfaite pour:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f, \\ u_1 = A_0(u_0), \\ u_2 = A_1(u_0, u_1), \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ u_n = A_{n-1}(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

A partir de la formule (2.7) on peut calculer les termes de la série sans ambiguïté, de façon explicite et unique si les polynômes d'Adomian sont connus, et ainsi la solution exacte de l'équation (2.1) est déterminée:

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En général on se contente d'une approximation de la solution sous la forme d'une série tronquée d'ordre s (puisque'on ne peut pas calculer tous les termes):

$$\varphi_s = \sum_{i=0}^{s-1} u_i \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = u. \quad (2.8)$$

Il est clair que plus s est grand, meilleure est la précision.

Nous avons ainsi une méthode simple pour résoudre l'équation (2.1), si les polynômes d'Adomian sont connus.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir les différentes formules de détermination de ces polynômes.

2.2.3 Calcul des polynômes d'Adomian

Plusieurs chercheurs (G.Adomian, K.Abbasoui, L.Gabet,...) ont développé des formules simples et pratiques pour calculer les polynômes d'Adomian. D'après [7], la formule la plus souvent proposée par G.Adomian et ses collaborateurs est la suivante:

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n c(n, k) N^{(k)}(u_0) \quad (2.9)$$

où les $c(k, n)$ représentent la somme de tous les produits (divisés par $m!$) des k termes u_i , dont la somme des indices i est égale à n , m étant le nombre de répétition des mêmes termes dans le produit.

Par exemple: $c(1, 2) = u_2$, $c(3, 4) = \frac{1}{2!} u_1^2 u_2$.

En pratique la détermination du terme $c(n, k)$ devient difficile pour $n > 5$.

A partir de la formule (2.9) on détermine les polynômes d'Adomian d'après [7, 27] par:

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0), \\
A_1(u_0, u_1) &= u_1 \cdot \frac{d}{du_0} N(u_0), \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \cdot \frac{d}{du_0} N(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \cdot \frac{d^2}{du_0^2} N(u_0), \\
A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \cdot \frac{d}{du_0} N(u_0) + u_1 \cdot u_2 \cdot \frac{d^2}{du_0^2} N(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \cdot \frac{d^3}{du_0^3} N(u_0), \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En 1994 K.Abbaooui a proposé et a démontré une formule récurrente déduite de la formule (2.4), le résultat est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.1. [5] *Si la fonction N est indéfiniment dérivable, alors les polynômes d'Adomian sont déterminés à partir des formules suivantes:*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0), \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.11}$$

où,

$$\begin{aligned}
u^k &= u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}, \\
k! &= k_1! k_2! \dots k_n!, \\
|nk| &= k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n.
\end{aligned}$$

La preuve de ce théorème se trouve dans [5].

L'utilisation de la formule (2.11), revient à trouver les k_i solutions de l'équation $|nk| = n$, qui devient difficile pour $n \geq 3$, d'où le corollaire suivant:

Corollaire 2.2. [5] *Les polynômes A_n sont donnés par les formules:*

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0), \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.12}$$

où $(\alpha_i)_i$ est une suite décroissante.

La preuve de ce corollaire est déduite de la formule (2.11) (En faisant un changement de variable).

G.Adomian a réécrit les formules (2.2) et (2.3) sous la forme suivante:

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n \quad (2.13)$$

et

$$N(u_\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \lambda^n \quad (2.14)$$

avec $A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ sont les polynômes d'Adomian définis par la formule (2.5).

A partir des formules (2.13) et (2.14), les polynômes d'Adomian peuvent être déterminés en utilisant la technique présentée dans [8]: On calcule $N(u_\lambda) = N(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n)$, puis on identifie l'expression obtenue à partir de la formule (2.14) (égalité entre deux polynômes dépendant de λ).

Cette technique n'est pas applicable si $N(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n)$ est très compliquée ou impossible à calculer.

Quelques exemples pour le calcul des polynômes d'Adomian: Détermination des polynômes d'Adomian par les différentes formules:

- Si $N(u) = u^2$.

– En utilisant la formule (2.10):

$$A_0(u_0) = u_0^2,$$

$$A_1(u_0, u_1) = 2u_0u_1,$$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = 2u_0u_2 + u_1^2,$$

$$A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = 2u_0u_3 + 2u_1u_2,$$

.

.

.

– En utilisant la formule (2.12):

$$A_0(u_0) = u_0^2,$$

$$\text{Pour } n = 1, \quad A_1(u_0, u_1) = \sum_{\alpha_1=1} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} = u_1 N'(u_0) = 2u_0 u_1,$$

$$\text{Pour } n = 2, \quad A_2(u_0, u_1, u_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \frac{u_2^{\alpha_2}}{2!},$$

Les solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ sont $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0) \vee (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1)$ d'où:

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = N'(u_0) u_1^0 u_2^1 + N^{(2)}(u_0) \frac{u_1^2}{2!} u_2^0 = 2u_0 u_2 + u_1^2,$$

$$\text{Pour } n = 3, \quad A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \frac{u_2^{(\alpha_2-\alpha_3)}}{(\alpha_2-\alpha_3)!} \frac{u_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!},$$

On peut résoudre l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$ par la procédure suivante, donnée par K.Abboui dans [9, 20] sachant que $(\alpha_i)_i$ est une suite décroissante.

α_1	α_2	α_3
3	0	0
2	1	0
1	1	1

Tableau 2.1: Solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$.

Donc les solutions de l'équation sont: $(\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0) \vee (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0) \vee (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1)$.

D'où:

$$A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = N^{(3)}(u_0) \frac{u_1^3}{3!} + N^{(2)}(u_0) u_1 u_2 + N^{(1)}(u_0) u_3,$$

Pour le polynôme $A_4(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$, les solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4$ sont données par:

α_1	α_2	α_3	α_4
4	0	0	0
3	1	0	0
2	2	0	0
2	1	1	0
1	1	1	1

Tableau 2.2: Solutions de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4$.

c'est à dire: $(\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0) \vee (\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0) \vee (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0) \vee (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0) \vee (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1)$.

Ainsi, les polynômes d'Adomian peuvent être calculés sans aucune difficulté pour n'importe quel n , en utilisant la procédure précédente pour la résolution de l'équation $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$.

- En utilisant la technique de [8]:

On a $u_\lambda = \sum_{n=0}^{n=3} u_n \lambda^n$ (si on cherche les polynômes A_0, A_1, A_2 et A_3),

et

$$N(u_\lambda) = N\left(\sum_{n=0}^{n=3} u_n \lambda^n\right) = u_0^2 + 2u_0 u_1 \lambda + (u_1^2 + 2u_0 u_2) \lambda^2 + (2u_0 u_3 + 2u_1 u_2) \lambda^3, \quad (2.15)$$

d'autre part:

$$N(u_\lambda) = \sum_{n=0}^{n=3} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \lambda^n = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^3. \quad (2.16)$$

Par identification des deux formules (2.15) et (2.16) on aura:

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= u_0^2, \\
A_1(u_0, u_1) &= 2u_0u_1, \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_1^2 + 2u_0u_2, \\
A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

- Si $N(u) = u \frac{\partial}{\partial x} u = uu_x$ où $u = u(x, t)$,

– En utilisant la formule (2.5):

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= u_0(u_0)_x, \\
A_1(u_0, u_1) &= u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x, \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_0(u_2)_x + u_1(u_1)_x + u_2(u_0)_x, \\
A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_0(u_3)_x + u_1(u_2)_x + u_2(u_1)_x + u_3(u_0)_x, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.18}$$

– En utilisant la technique de [8]:

$$\begin{aligned}
N(u_\lambda) &= N(\sum_{n=0}^{n=3} u_n \lambda^n) \\
&= (u_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + u_3 \lambda^3)(u_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + u_3 \lambda^3)_x \\
&= u_0(u_0)_x + [u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x] \lambda + [u_0(u_2)_x + u_1(u_1)_x \\
&\quad + (u_0)_x u_2] \lambda^2 + [(u_0(u_3)_x + u_1(u_2)_x + u_2(u_1)_x + (u_0)_x u_3] \lambda^3.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On identifie (2.16) et (2.19), on retrouve le résultat.

2.2.4 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian

D'importants théorèmes ont été donnés, impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions dépendent de l'opérateur non linéaire N [5, 9]. De plus le choix du terme u_0 peut influencer la convergence ou la divergence de la méthode. Un des points importants de la méthode est, la forme canonique de l'équation fonctionnelle (2.1), qui est très pratique pour l'étude de la convergence de cette dernière.

Voici quelques résultats importants de convergence:

Théorème 2.3. [5] Si $\sum_{n \geq 0} A_n < +\infty$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n < +\infty$ et réciproquement.

Dans [5], Y. Cherruault a montré que la méthode décompositionnelle d'Adomian appliquée au problème (2.1) équivaut à trouver la suite $(S_n)_n$ telle que:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante:

$$(S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad S_0 = 0, \quad u_0 = f) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

d'où le résultat de convergence suivant:

Théorème 2.4. [5] Si l'opérateur N est une contraction (c'est à dire $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence:

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \text{ avec } S_0 = 0, \quad n \geq 0,$$

converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.

d'où:

Corollaire 2.5. [5] Si N est une contraction alors les séries des $(u_n)_n$ et des $(A_n)_n$ sont convergentes de plus: $\sum_{n \geq 0} u_n$ est solution de l'équation:

$$u - N(u) = f.$$

Un autre résultat important:

Théorème 2.6. [5] Si $M < \frac{1}{e}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ alors:

$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ est absolument convergente, où M est un majorant de $N^{(n)}(u_0)$ pour tout n .

Le résultat suivant nous donne l'estimation de l'erreur commise à n'importe qu'elle étape:

Théorème 2.7. [5] Si $M\alpha < \frac{1}{e}$, nous avons la majoration suivante:

$$\| \varepsilon_n \| = \| u - \varphi_n \| \leq \frac{(M\alpha e)^n}{1 - M\alpha e} \quad (2.21)$$

où M est un majorant de $N^{(n)}(u_0)$ pour tout n , et $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles (E.D.P), Y.Cherruault propose une démonstration de convergence qui est basée sur une formulation variationnelle. On considère l'équation fonctionnelle suivante:

$$u - N(u) = f$$

On résoud ce problème dans un espace de Hilbert E muni de la norme $\| \cdot \|_E$ et du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. On suppose que $f \in E'$ (dual de E).

Sachant que $R(u) = N(u) - u$, on pose les hypothèses suivantes [17, 5]:

$$(H_1) : (R(u) - R(v), u - v) \geq k \|u - v\|_E^2, \forall u, v \in E, k > 0.$$

$$(H_2) : \forall M > 0, \exists C_M > 0 \text{ tel que } \forall u, v \in E \text{ vérifiant } \|u\| \leq M, \|v\| \leq M \text{ on a } (R(u) - R(v), w) \leq C_M \|u - v\| \|w\|, \forall w \in E.$$

Avec les hypothèses (H_1) et (H_2) Y.Cherruault (1989), Mavoungou et Y.Cherruault (1992, 1994) ont prouvé la convergence de la méthode, en utilisant l'idée développée par M.Sibony (Y.Cherruault, 1989) qui l'a appliquée aux équations générales aux dérivées partielles.

On a alors le théorème suivant:

Théorème 2.8. [10, 12] pour tout $f \in E'$, il existe $u \in E$ tel que $u - N(u) = f$. De plus, la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = f, \\ u_{n+1} = u_n - \rho(N(u_n) - u_n), \quad \rho > 0, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

converge fortement dans E vers une solution de $u - N(u) = f$.

K.Abbaoui propose une démonstration de convergence (condition suffisante) pour le problème de diffusion donnée dans le théorème suivant:

Théorème 2.9. [10, 12] *Si l'opérateur non linéaire f est lipchitzien, alors la méthode décompositionnelle d'Adomian appliquée au problème:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

est convergente.

La preuve de ce théorème se trouve dans [10, 12].

Si on considère l'espace de Hilbert $H = L^2(]-1, 1[\times]0, T[)$, on a le résultat suivant:

Proposition 2.10. [10] *La méthode décompositionnelle d'Adomian appliquée au problème de Fisher suivant:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u), & |x| < 1, \quad t > 0, \quad u = u(x, t) \\ u(x, 0) = v(x), & |x| < 1, \end{cases}$$

est convergente pour toute valeur $\beta \in \mathbb{R}$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [10].

2.2.5 Résolution de quelques équations aux dérivées partielles par la méthode d'Adomian

Exemple 2.11. *On considère l'équation de la chaleur définie par:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \quad (2.22)$$

avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Dans cet exemple, on résout l'équation (2.22) par la méthode d'Adomian, puis on compare la solution obtenue avec la solution trouvée par la méthode de séparation des variables (définie dans le chapitre 1).

Résolution de l'équation par la méthode d'Adomian: Pour appliquer la méthode décompositionnelle à la résolution de l'équation de la chaleur (2.22), cette dernière doit être mise sous la forme canonique (2.1).

L'équation (2.22) s'écrit en utilisant les opérateurs L_x et L_t de la manière suivante:

$$L_t u = L_x u, \quad \text{avec } L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.24)$$

L'opérateur L_t étant inversible, on note par L_t^{-1} son opérateur inverse qui est défini par: $L_t^{-1} = \int_0^t (.) ds$. En appliquant l'opérateur L_t^{-1} à l'équation (2.24) on aura:

$$L_t^{-1} L_t u = L_t^{-1} L_x u \quad (2.25)$$

ce qui donne la forme canonique de l'équation:

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} L_x u, \quad (2.26)$$

On cherche la solution sous forme d'une série et en utilisant l'identification (2.7), on détermine les termes de la série solution par:

$$u_0 = u(x, 0) = x(\pi - x),$$

et

$$u_{n+1} = L_t^{-1} L_x u_n, \quad n \geq 0,$$

comme L_t^{-1} représente l'opérateur d'intégration entre 0 et t , on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x(\pi - x), \\ u_1 = -2t, \\ u_2 = 0, \\ u_3 = 0, \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

d'où la solution:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots u_n + \dots = x(\pi - x) - 2t,$$

qui est la solution exacte de l'équation (2.22).

Résolution de l'équation par la méthode de séparation des variables(SV): En utilisant la méthode de séparation des variables (SV) à la résolution de l'équation (2.22), on cherche d'abord une solution particulière de l'équation (2.22), qui satisfait les conditions (2.23) sous la forme de $u(x, t) = X(x)T(t)$ où X et T sont des fonctions qui dépendent respectivement de x et de t . En substituant cette valeur dans l'équation (2.22), on retrouve:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \quad (2.27)$$

Séparons l'équation (2.27) en deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Le terme de gauche de cette équation est une fonction de x seulement, alors que le terme de droite est une fonction de t . Pour que nous puissions avoir cette égalité, il faut que chacun de ces termes soit constant et on notera cette constante λ . De ceci, on tire les deux équations différentielles suivantes:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{et} \quad T'(t) - \lambda T(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

On ramène les conditions aux limites de $u(x, t)$ sur celles de X , c'est à dire:

$$X(0) = 0 \quad \text{et} \quad X(\pi) = 0,$$

D'où les solutions à valeurs propres (λ_n) des deux équations différentielles sont égales à:

$$X_n(x) = B_n \sin(nx),$$

et

$$T_n(t) = C_n \exp(-\lambda_n t),$$

avec B_n et C_n sont des constantes et les valeurs propres λ_n sont données par:

$$\lambda_n = -n^2, n \in \mathbb{Z},$$

Donc la solution particulière de l'équation est:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \sin(nx) \exp(-n^2 t), \quad \text{où} \quad A_n = B_n C_n. \quad (2.28)$$

Les conditions aux extrémités étant linéaires, donc d'après le principe de superposition, la solution générale est une combinaison linéaire des solutions particulières (2.28), donnée par:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nx) \exp(-n^2 t),$$

avec

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx) dx.$$

En intégrant deux fois par parties, on retrouve les valeurs des coefficients A_n (les coefficients de fourrier), et ainsi la solution générale de l'équation (2.22) est:

$$u(x, t) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^3 \pi} \sin(nx) \exp(-n^2 t). \quad (2.29)$$

Pour une approximation de la solution, on prend une série tronquée d'ordre 10.

Comparaison des résultats: On fixe les instants $t = 0.01$ et $t = 0.02$, pour plusieurs valeurs de x . Les résultats sont donnés par le tableau ci-dessous qui représente la valeur de la solution calculée par Adomian ($u(\text{Adomian})$), la valeur de la solution calculée par la méthode de séparation des variables ($u(\text{SV})$) et l'erreur commise entre les deux valeurs ($E(u(x, t))$).

t	x	$u(Adomian)$	$u(SV)$	$E(u(x, t))$
0.01	1	2.121592654	2.122045844	0.000453190
	1.1	2.225751919	2.225852064	0.000100145
	1.2	2.309587902	2.309587902	0.000323283
	1.3	2.374070450	2.373663435	0.000407015
	1.4	2.418229716	2.418140000	0.000089716
	1.5	2.442388981	2.442695901	0.000306920
0.02	1	2.101592654	2.101742215	0.000149561
	1.1	2.205751919	2.205795472	0.000043553
	1.2	2.289911185	2.289811090	0.000100095
	1.3	2.354070450	2.353934424	0.000136026
	1.4	2.398229716	2.398196321	0.000033395
	1.5	2.422388981	2.422489742	0.000100761

Tableau 2.3: Les résultats numériques obtenus de l'exemple 2.12.

Les deux figures suivantes montrent la solution de l'équation obtenue par la méthode d'Adomian (ligne) et celle obtenue par la méthode de séparation des variables (points), à des instants de mesures fixés $t = 0.01$ et $t = 0.02$.

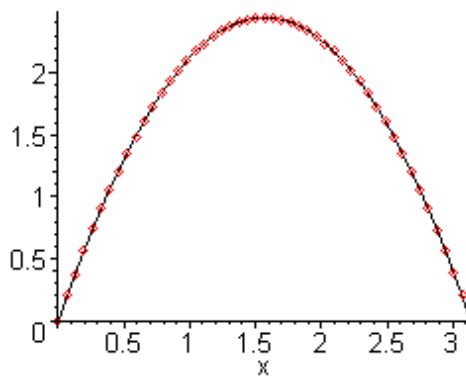


Figure 2.1: Graphe de comparaison de la méthode d'Adomian (ligne) avec la méthode de séparation des variables (points) pour $t = 0.01$.

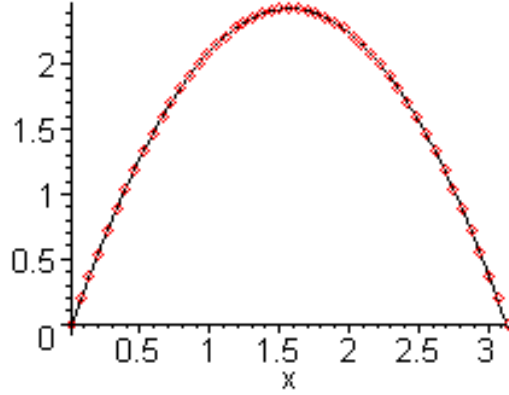


Figure 2.2: Graphe de comparaison de la méthode d'Adomian (ligne) et la méthode de séparation des variables (points) pour $t = 0.02$.

Exemple 2.12. On considère l'équation du second ordre suivante [25]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad (2.30)$$

avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \exp(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = \exp(t), & t > 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Résolution de l'équation par la méthode d'Adomian: Si on pose $L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, alors l'équation s'écrit:

$$L_t u = L_x u - u^2 + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.32)$$

Comme L_t est inversible, alors $L_t^{-1} = \int_0^t (\int_0^t (.) ds) ds$ (l'opérateur d'intégration double).

En appliquant l'opérateur L_t^{-1} à l'équation (2.30), et en posant $N(u) = u^2$ et $M(u) = u \frac{\partial u}{\partial x}$, on obtient:

$$u(x, t) = u(x, 0) + t u_t(x, 0) + L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} (N(u)) + L_t^{-1} (M(u)). \quad (2.33)$$

La méthode décompositionnelle d'Adomian consiste à chercher la solution u sous forme d'une série, et à décomposer les termes non linéaires N et M en séries comme suit:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t), \quad (2.34)$$

$$N(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \quad (2.35)$$

et

$$M(u) = u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n, \quad (2.36)$$

où A_n et B_n sont les polynômes d'Adomian correspondant aux fonctions N et M respectivement, et qui ont été calculés précédemment.

En remplaçant les valeurs de $u(x, t)$, $N(u)$ et $M(u)$ dans l'équation (2.33) et par identification on retrouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = u(x, 0) + tu_t(x, 0) = \exp(x)(1 + t), \\ u_1 = -L_t^{-1}A_0 + L_t^{-1}B_0 + L_t^{-1}L_x u_0 = \exp(x)\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right), \\ u_2 = -L_t^{-1}A_1 + L_t^{-1}B_1 + L_t^{-1}L_x u_1 = \exp(x)\left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}\right), \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n = -L_t^{-1}A_1 + L_t^{-1}B_1 + L_t^{-1}L_x u_1 = \exp(x)\left(\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right), \quad n \geq 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, on calcule tous les termes de la série solution de la même manière, d'où:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = \exp(x)(1 + t) + \exp(x)\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) + \dots = \exp(x + t), \quad (2.37)$$

qui est la solution exacte de l'équation.

On note par:

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 : les solutions obtenues par la méthode d'Adomian en prenant des séries tronquées d'ordre 1, 2, 3 et 4 respectivement, c'est à dire:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{n=0}^0 u_n(x, t) = \exp(x)(1 + t), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^1 u_n(x, t) = \exp(x)\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right), \\ \varphi_3 &= \sum_{n=0}^2 u_n(x, t) = \exp(x)\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}\right) \text{ et } \varphi_4 = \sum_{n=0}^3 u_n(x, t) = \exp(x)\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}\right). \end{aligned}$$

$u(\text{exacte})$: La solution exacte de l'EDP.

Dans le tableau suivant, on donne quelques résultats numériques des différentes approximations de la solution suivant l'ordre de la série tronquée, pour une valeur de t fixée.

x	$u(\text{exacte}) - \varphi_1$	$u(\text{exacte}) - \varphi_2$	$u(\text{exacte}) - \varphi_3$	$u(\text{exacte}) - \varphi_4$
	$t = 0.1$			
0.1	0.000004698	0.000000001	0.000000001	0.000000001
0.2	0.000005193	0.000000002	0.000000002	0.000000000
0.3	0.000005738	0.000000001	0.000000001	0.000000001
0.4	0.000006342	0.000000002	0.000000002	0.000000001
0.5	0.000007008	0.000000001	0.000000001	0.000000000

Tableau 2.4 : Quelques résultats numériques de l'exemple 2.13 pour $t = 0.1$.

D'après les résultats numériques obtenus, on remarque que pour $t = 0.1$, une série tronquée d'ordre 1 permet d'avoir une bonne approximation de la solution. Pour $t = 0.5$ par exemple, on doit prendre une série tronquée d'ordre 2 pour une bonne approximation. Mais pour $t = 1$ on doit aller jusqu'à l'ordre 3. Nous illustrons ces résultats par les graphes suivants:

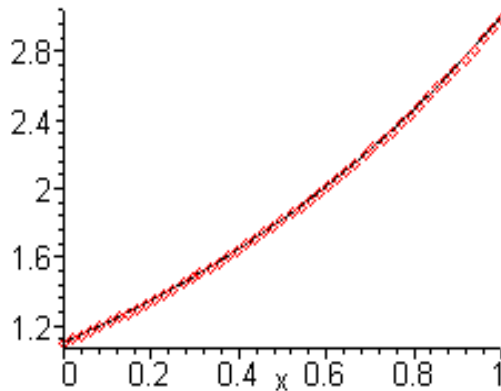


Figure 2.3: Superposition des courbes de la solution exacte (ligne) avec la solution approchée φ_1 (points) pour $t = 0.1$.

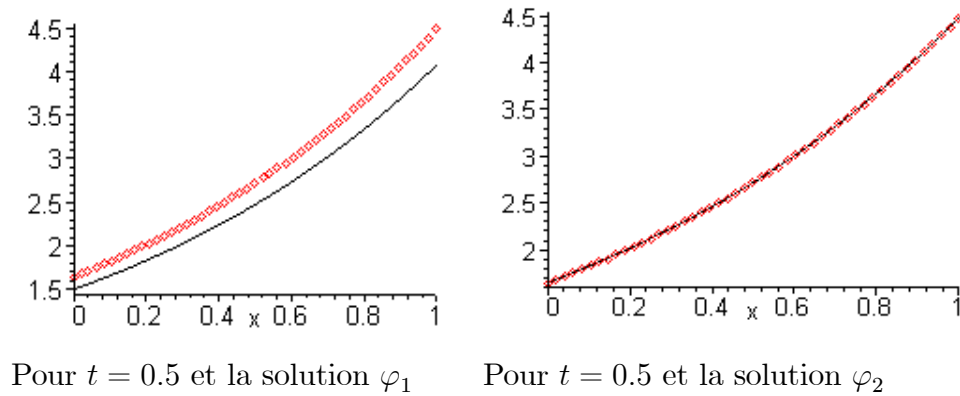


Figure 2.4: Superposition des courbes de la solution exacte (lignes) avec les solutions approchées φ_1 et φ_2 (points) pour $t = 0.5$.

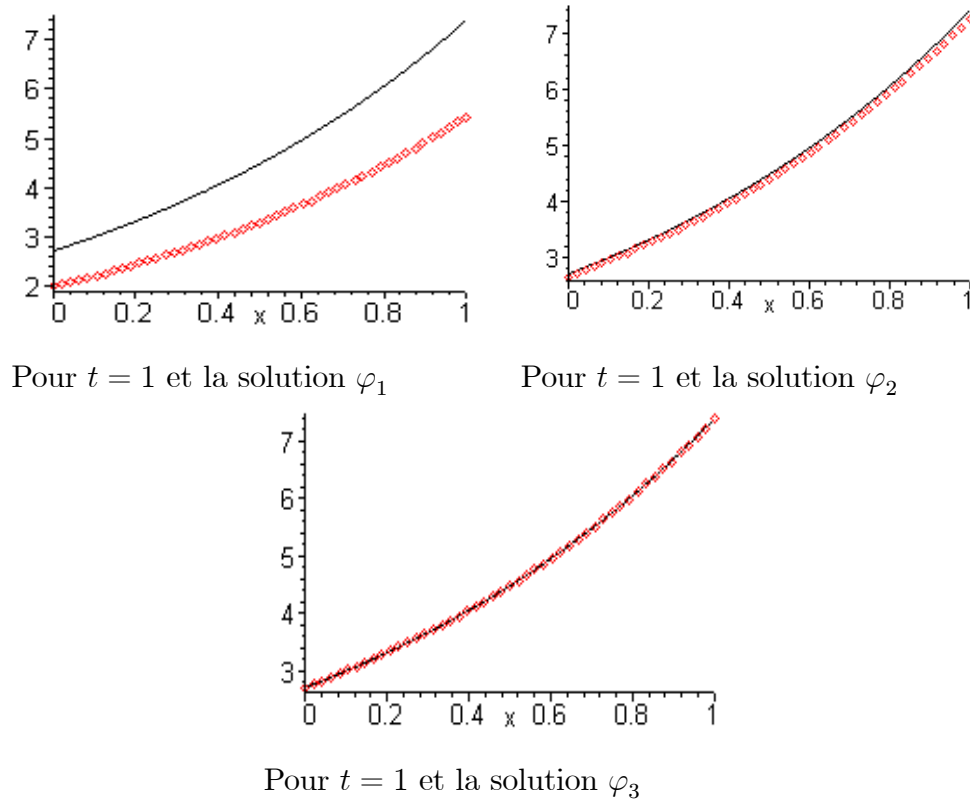


Figure 2.5: Superposition des courbes de la solution exacte (lignes) avec les solutions approchées φ_1 , φ_2 et φ_3 (points) pour $t = 1$.

On remarque que la superposition des courbes des solutions exactes et approchées est parfaite si on augmente l'ordre de la série tronquée. On conclut que: En augmentant l'ordre de la série tronquée, on s'approche plus de la solution exacte.

Dans les deux exemples suivants, nous allons résoudre deux EDP de diffusion (linéaire et non linéaire) en utilisant deux méthodes de résolution: La méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode des différences finies (schéma implicite et explicite). Les résultats obtenus seront comparés pour des valeurs des paramètres fixés.

Exemple 2.13. *Considérons l'équation de diffusion suivante [22]:*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K_1 C, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.38)$$

où D_1 et K_1 sont des constantes positives.

sous les conditions:

$$\begin{cases} C(x, 0) = e^{-(x-0.05)^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ C(0, t) = f(t), & 0 < t \leq 1, \\ C(1, t) = g(t), & 0 < t \leq 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

où f et g sont des fonctions connues.

Résolution de l'équation par la méthode d'Adomian: De la même manière que pour les exemples précédents, on écrit l'équation sous sa forme canonique, on cherche la solution sous forme d'une série, puis par identification, on détermine la solution. On obtient:

$$L_t C = D_1 L_x C - K_1 C, \quad \text{avec } L_t = \frac{\partial}{\partial t} \text{ et } L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

alors:

$$L_t^{-1} L_t C = D_1 L_t^{-1} L_x C - K_1 L_t^{-1} C \quad \text{où} \quad L_t^{-1} = \int_0^t (.) ds,$$

d'où la forme canonique de l'équation:

$$C(x, t) = C(x, 0) + D_1 L_t^{-1} L_x C - K_1 L_t^{-1} C \quad (2.40)$$

ce qui implique les termes de la série solution:

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_0 = C(x, 0) = e^{-(x-0.05)^2}, \\
C_1 = D_1 L_t^{-1} L_x C_0 - K_1 L_t^{-1} C_0 \\
\quad = D_1 [-2e^{-(x-0.05)^2} t + (-2x + \frac{1}{10})^2 e^{-(x-0.05)^2} t] - K_1 e^{-(x-0.05)^2} t, \\
C_2 = D_1 L_t^{-1} L_x C_1 - K_1 L_t^{-1} C_1 \\
\quad = \frac{1}{2} D_1 [D_1 [12e^{-(x-0.05)^2} - 12(-2x + \frac{1}{10})^2 e^{-(x-\frac{1}{20})^2} + \\
\quad \quad + (-2x + \frac{1}{10})^4 e^{-(x-\frac{1}{20})^2}] + 2K_1 e^{-(x-\frac{1}{20})^2} - K_1 (-2x + \frac{1}{10})^2 e^{-(x-\frac{1}{20})^2}] t^2, \\
\quad \quad \quad \cdot \\
\quad \quad \quad \cdot \\
\quad \quad \quad \cdot \\
C_{n+1} = D_1 L_t^{-1} L_x C_n - K_1 L_t^{-1} C_n, \quad n \geq 0.
\end{array} \right. \quad (2.41)$$

Donc la solution de l'équation est:

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(x, t).$$

Pour des paramètres D_1 et K_1 fixés ($D_1 = 0.06$, $K_1 = 0.05$), on trace le graphe suivant qui représente la solution de l'équation par la méthode d'Adomian (série tronquée d'ordre 4). Cette dernière dépend explicitement des paramètres D_1 et K_1 à identifier, ce qui est pratique pour la résolution du problème de l'identification.

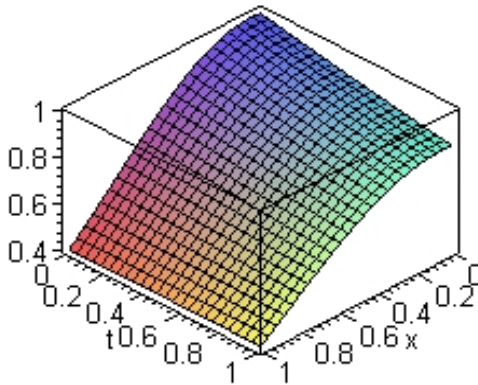


Figure 2.6 : Graphe de la solution de l'exemple 2.14 obtenue par la méthode décompositionnelle d'Adomian pour D_1 et K_1 fixés.

Résolution de l'équation par la méthode des différences finies: La méthode des différences finies consiste à discrétiser l'équation (2.38), en remplaçant les dérivées partielles apparaissant dans cette dernière par des différences finies. L'inconnu est une fonction C définie pour $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Le domaine de définition de C est discrétisé par la grille: $G_{h,k} = \{(x_i, t_j) / x_i = ih, 0 \leq i \leq 10, t_j = jk, 0 \leq j \leq 10\}$.

On choisit: $h = 0.1$ (le pas de discrétisation spatiale) et $k = 0.1$ (le pas de temps). On note par: $C_i^j = C(x_i, t_j)$ la valeur de la fonction C aux points $(x_i, t_j) = (ih, jk)$ de la grille $G_{h,k}$.

Revenons à l'équation (2.38), pour $D_1 = 0.06$ et $K_1 = 0.05$, on remplace les dérivées partielles du premier et second ordre par les différences finies suivantes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \simeq \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{k}, \quad (2.42)$$

et

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \simeq \frac{C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}}{h^2}. \quad (2.43)$$

Ramenons les expressions (2.42) et (2.43) dans l'équation (2.38), on obtient:

$$C_i^{j+1} = C_i^j + \frac{0.06k}{h^2} C_{i-1}^{j+1} - \frac{0.12k}{h^2} C_i^{j+1} + \frac{0.06k}{h^2} C_{i+1}^{j+1} - 0.05k C_i^j \quad (2.44)$$

qui est le schéma numérique des différences finies (implicite).

Pour $h = k = 0.1$, on aura:

$$C_i^j = 2.21105 C_i^{j+1} - 0.60301 C_{i-1}^{j+1} - 0.60301 C_{i+1}^{j+1} \quad (2.45)$$

Les conditions (2.39) pour le schéma discret s'écrivent:

$$\begin{aligned} C_i^0 &= \exp((-1)(x_i - 0.05)^2), \quad 0 \leq i \leq 10, \\ C_0^j &= C_0 = f(t_j), \quad 0 < j \leq 10, \\ C_{10}^j &= C_1 = g(t_j), \quad 0 < j \leq 10. \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'application du schéma (2.45) aux points du maillage donne un système d'équations algébriques linéaires sous forme:

$$A\{C\} = \{C_c\} \quad (2.47)$$

où A est la matrice des coefficients, $\{C\}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage, et $\{C_c\}$ est le vecteur connu donné par les conditions(2.39).

A partir de la formule (2.47) on obtient une solution approchée de l'équation (2.38) en tous points (x_i, t_j) du maillage.

Comparaison des résultats: Le tableau suivant, résume les valeurs des solutions obtenues par la méthode décompositionnelle d'Adomian $u(\text{Adomian})$ et celle des différences finies $u(\text{diff finies})$ pour des valeurs fixées de x et de t . La quantité $E(u)$ exprime la différence entre les deux solutions.

t	x	$u(\text{Adomian})$	$u(\text{diff finies})$	$E(u)$
0.4	0.1	0.9341267759	0.9054400934	0.0286866825
	0.2	0.9172391247	0.8993830141	0.0178561106
	0.3	0.8843737745	0.8749225230	0.0094512515
	0.4	0.8372694795	0.832686014	0.0045834655
0.5	0.6	0.7034847969	0.7010675943	0.0024172026
	0.7	0.6320245055	0.6291825421	0.0028419634
	0.8	0.5577689435	0.5533198918	0.0044490517
	0.9	0.4835201492	0.4761411658	0.0073789834

Tableau 2.5 : Les résultats numériques de l'exemple.2.14.

Les deux figures suivantes représentent les courbes des solutions obtenues par la méthode d'Adomian (ligne) et par la méthode des différences finies (points), pour les valeurs $t = 0.5$ et $t = 0.6$ respectivement.

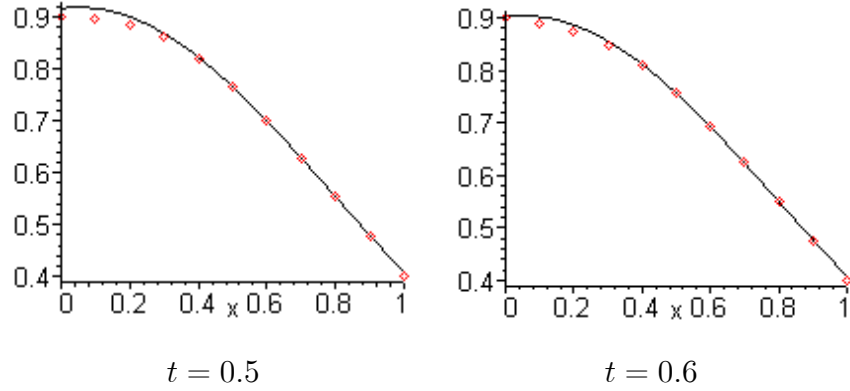


Figure 2.7: Courbes des solutions de l'exemple 2.14 obtenues par les méthodes Adomian (lignes) et les différences finies (points) pour $t = 0.5$ et $t = 0.6$

Exemple 2.14. Soit l'EDP suivante [24]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2 u(1 - u), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.48)$$

avec les conditions:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.49)$$

Résolution de l'EDP par la méthode d'Adomian: On pose: $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ et $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. L_t^{-1} est l'opérateur inverse de l'opérateur L_t , qui est défini par: $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds$. L'équation s'écrit alors:

$$L_t^{-1} L_t u = D_2 L_t^{-1} L_x u + K_2 L_t^{-1} u - K_2 L_t^{-1} u^2, \quad (2.50)$$

d'où:

$$u(x, t) = u(x, 0) + D_2 L_t^{-1} L_x u + K_2 L_t^{-1} u - K_2 L_t^{-1} u^2. \quad (2.51)$$

La méthode décompositionnelle d'Adomian cherche la solution de l'équation (2.51) sous forme de série: $u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t)$ et à décomposer le terme non linéaire en série: $N(u) = u^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$, où les (A_n) sont les polynômes d'Adomian.

L'équation (2.51) devient:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + D_2 L_t^{-1} L_x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) + K_2 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) - K_2 L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right), \quad (2.52)$$

d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = u(x, 0) = x, \\ u_1(x, t) = D_2 L_t^{-1} L_x u_0 + K_2 L_t^{-1} u_0 - K_2 L_t^{-1} A_0 \\ \quad = K_2 x t (1 - x), \\ u_2(x, t) = D_2 L_t^{-1} L_x u_0 + K_2 L_t^{-1} u_0 - K_2 L_t^{-1} A_0 \\ \quad = -D_2 K_2 t^2 + K_2^2 x t^2 (1 - x) \left(\frac{1}{2} - x \right), \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ u_n = D_2 L_t^{-1} L_x u_{n-1} + K_2 L_t^{-1} u_{n-1} - K_2 L_t^{-1} A_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.53)$$

On retrouve une solution approchée de l'EDP (2.48), en prenant une série tronquée d'ordre 3 :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^2 u_n(x, t)$$

La solution approchée déterminée par la méthode décompositionnelle d'Adomian est représentée par la courbe suivante pour des paramètres fixés $D_2 = K_2 = 1$:

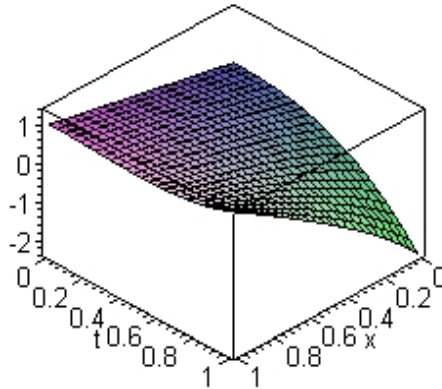


Figure 2.8: Graphe de la solution de l'exemple 2.15 obtenue par la méthode d'Adomian pour D_2 et K_2 fixés.

Résolution de l'équation par la méthode des différences finies: On discrétise l'équation (2.48) en utilisant les approximations suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}, \quad (2.54)$$

Pour des paramètres fixés $D_2 = K_2 = 1$, et en remplaçant les approximations (2.54) dans l'équation (2.48), on obtient le schéma de discrétisation (explicite) suivant:

$$u_i^{j+1} = (1 - 2r)u_i^j + ru_{i+1}^j + ru_{i-1}^j + ku_i^j(1 - u_i^j), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.55)$$

avec $r = \frac{k}{h^2}$. On initialise le schéma par $u_i^0 = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n + 1$.

On remplaçant par $i = 0$ et $i = n$ dans la formule (2.55), on retrouve les points $x_{-1} = -h$ et $x_{n+1} = 1 + h$. En utilisant les conditions $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$, et les approximations:

$$\frac{u_1^j - u_{-1}^j}{2h} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}^j - u_{n-1}^j}{2h} = 0 \quad (2.56)$$

on obtient le schéma suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^0 = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n + 1 \\ u_0^{j+1} = (1 - 2r)u_0^j + 2ru_1^j + ku_0^j(1 - u_0^j), \quad j = 0, \dots, m - 1 \\ u_i^{j+1} = ru_{i-1}^j + (1 - 2r)u_i^j + ru_{i+1}^j + ku_i^j(1 - u_i^j), \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ u_{n+1}^{j+1} = 2ru_n^j + (1 - 2r)u_{n+1}^j + ku_{n+1}^j(1 - u_{n+1}^j), \quad j = 0, \dots, m - 1 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

A partir du schéma (2.57), et pour $h = 0.001$ et $k = 0.05$, on peut déterminer la solution de l'EDP en des points discrets.

Comparaison des résultats: Dans le tableau suivant, nous donnons les résultats de la méthode décompositionnelle d'Adomian $u(\text{Adomian})$, la méthode des différences finies $u(\text{diff finies})$ et l'erreur $E(u)$ entre les deux valeurs.

t	x	$u(\text{Adomian})$	$u(\text{diff finies})$	$E(u)$
0.001	0.1	0.1000890350	0.10009	0.000000965
	0.15	0.1501265438	0.1501275	0.000000957
	0.2	0.2001590472	0.20016	0.000000953
	0.25	0.2501865462	0.2501875	0.000000954
0.005	0.5	0.5012249974	0.501229931	0.0000049336
	0.55	0.5512122048	0.551215711	0.0000035062
	0.6	0.6011744311	0.601178771	0.0000043399
	0.65	0.6511116952	0.651115298	0.0000036028

Tableau 2.6 : Résultats numériques de l'exemple 2.15.

Les résultats numériques du tableau, sont représentés par les figures suivantes:

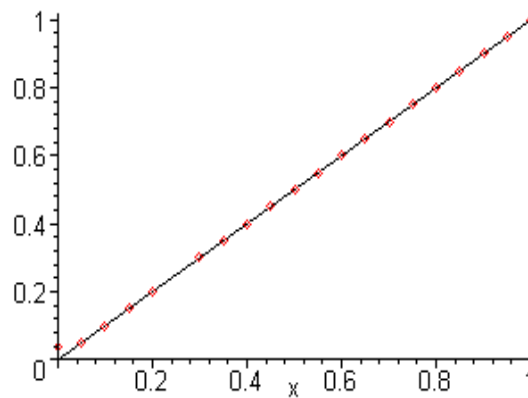


Figure 2.9: Courbes des solutions de l'exemple 2.15 obtenues par les méthodes Adomian (ligne) et les différences finies (points) pour $t = 0.001$.

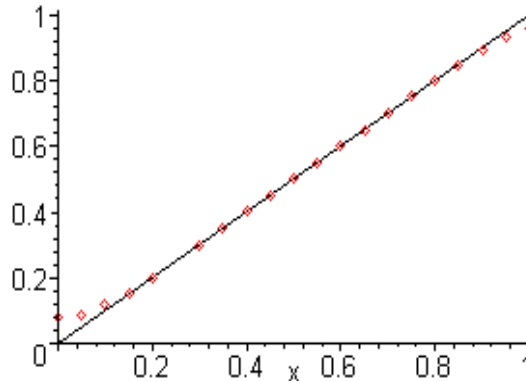


Figure 2.10: Courbes des solutions de l'exemple 2.15 obtenues par les méthodes Adomian (ligne) et les différences finies (points) pour $t = 0.005$.

2.3 La méthode Alienor

2.3.1 Introduction

Au début des années 80, Y.Cherruault et A.Guiliez [5, 6, 21, 18], ont introduit la méthode Alienor pour la résolution des problèmes d'optimisation. Cette méthode permet de ramener une fonction de n variables à une fonction d'une seule variable grâce à des transformations réductrices qui permettent de construire des courbes α -denses (que nous définirons plus loin), afin de densifier l'espace $\mathbb{R}^n$. Donc la méthode Alienor permet de ramener le problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$, à un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}$.

2.3.2 Principe de la méthode

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, continue, et vérifiant la condition de croissance à l'infini (condition de convexité globale) cette condition assure que les minima de f sont atteints à distance finie.

$$\lim_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow +\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = +\infty \quad (2.58)$$

et soit le problème de minimisation global:

$$Glob.Min_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.59)$$

La méthode Alienor appliquée à ce problème consiste à chercher une transformation réductrice (appelée Alienor) qui permet d'exprimer toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction d'une seule variable θ :

$$x_i = h_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.60)$$

où les h_i sont des fonctions de classe C^∞ , dépendantes de θ (qui sont en fonction de cosinus et sinus) et sont explicitement calculables.

Donc à partir de la formule (2.60), la fonction f devient:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)) = f^*(\theta) \quad (2.61)$$

et le problème de minimisation global:

$$Glob.Min_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.62)$$

devient:

$$Glob.Min_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} f^*(\theta) \quad (2.63)$$

où $\theta_{\max}$ est la plus grande valeur que peut prendre θ .

La première transformation réductrice proposée par Y.Cherruault et A.Guiliez est basée sur les propriétés de la spirale d'archimède de la manière suivante:

Soient deux variables x et y que nous écrirons en coordonnées polaires (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2.64)$$

On relie les deux nouvelles variables r et θ grâce à la spirale d'archimède d'équation [5, 6]:

$$r = a\theta, \quad \theta \geq 0 \quad (2.65)$$

avec $\theta \geq 0$ et a est un paramètre fixé destiné à tendre vers zéro.

On remplace (2.65) dans (2.64) on obtient:

$$\begin{cases} x = a\theta \cos \theta = h_1(\theta) \\ y = a\theta \sin \theta = h_2(\theta) \end{cases} \quad (2.66)$$

On a ainsi exprimé les deux variables x et y en fonction d'une unique variable θ .

La relation (2.66) est la restriction du plan $\mathbb{R}^2$ à la spirale d'Archimède $r = a\theta$.

Pour 3 variables x , y et z , on relie d'abord x et y à l'aide de la spirale d'archimède d'angle θ_1 c'est à dire:

$$\begin{cases} x = a\theta_1 \cos \theta_1 \\ y = a\theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (2.67)$$

puis on relie les 2 variables θ_1 et z par une spirale d'Archimède d'angle θ , on obtient ainsi:

$$\begin{cases} \theta_1 = a\theta \cos \theta \\ z = a\theta \sin \theta \end{cases}, \theta \geq 0 \quad (2.68)$$

On remplace la valeur de θ_1 de (2.68) dans (2.67) on aura:

$$\begin{cases} x = h_1(\theta) = a^2\theta \cos \theta \cos(a\theta \cos \theta) \\ y = h_2(\theta) = a^2\theta \cos \theta \sin(a\theta \cos \theta) \\ z = h_3(\theta) = a\theta \sin \theta \end{cases}, \theta \geq 0 \quad (2.69)$$

qui exprime x, y et z en fonction de l'unique variable θ .

Ce procédé est valable pour n variables x_i , on relie deux à deux les variables par des spirales d'archimède d'angle θ_i , jusqu'à ce qu'on aboutit à une unique variable θ [5] (on a ainsi une structure d'arbre).

A partir de cela, on peut dire qu'on a " approché l'espace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}$ ".

La transformation réductrice utilisée pour transformer le problème de minimisation multivariable à un problème de minimisation d'une seule variable doit satisfaire certaines

propriétés de densification, pour que les minima de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ peuvent être approchés par les minima de la fonction $f^*(\theta)$.

Définissons d'abord l' α -densité:

Définition 2.15. *On dit qu'un sous-espace S d'un compact K (où de $\mathbb{R}^n$) est α -dense ($\alpha > 0$) dans K (où dans $\mathbb{R}^n$) si pour tout $x \in K$, il existe $x' \in S$, tel que $d(x, x') \leq \alpha$, où d est la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. (c'est à dire: un sous espace S de $\mathbb{R}^n$ est α -dense si tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être approché à α près par au moins un point du sous-espace S).*

D'où le résultat:

Théorème 2.16. *[6, 12] La transformation Alienor $x_i = h_i(\theta)$, $i = 1, \dots, n$ où les h_i sont obtenus comme précédemment en reliant deux à deux les variables à l'aide de spirales d'Archimède, est α -dense dans $\mathbb{R}^n$, avec un coefficient α qui peut tendre vers 0 avec le paramètre a .*

D'après la définition (2.15) on a:

Lemme 2.17. *[6, 5, 12] La spirale d'Archimède $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, a paramètre strictement positif fixé, est πa -dense dans $\mathbb{R}^2$.*

A partir de ce résultat on déduit que si l'on choisit a suffisamment petit, la spirale d'Archimède passe aussi près que l'on veut de n'importe quel point du plan.

Théorème 2.18. *[6, 12] Tout point de $\mathbb{R}^n$, peut être approché avec la précision que l'on souhaite par au moins un point de la transformation Alienor.*

La qualité de l'approximation dépend du choix de a .

Le résultat suivant montre que le problème (2.63) est une approximation du problème (2.62).

Théorème 2.19. *[6, 12] Les minimiseurs globaux de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, vérifiant les hypothèses précédentes peuvent être approximés par les minimiseurs globaux de $f^*(\theta)$.*

L'approximation sera meilleure d'autant plus α est choisit petit.

Remarque 2.20. *Tout minimum local ou global de f peut être approché par un minimum de la fonction f^* . Par contre la réciproque est fausse:*

Tout minimum de f^ n'est pas obligatoirement une approximation d'un minimum de f , car la fonction f^* est la restriction de f à la spirale généralisée S (La spirale généralisée S est définie par: $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i = h_i(\theta), i = 1, \dots, n\}$), car S est strictement contenue dans $\mathbb{R}^n$. (Les minima locaux de S ne sont pas obligatoirement une approximation des minima locaux de $\mathbb{R}^n$).*

Revenons maintenant au problème (2.63):

$$\text{Min}_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} f^*(\theta)$$

qui consiste à chercher le minimum de la fonction f^* sur un intervalle $[0, \theta_{\max}]$.

f^* est une fonction continue sur un domaine fermé et borné, par conséquent elle admet au moins un minimum sur $[0, \theta_{\max}]$.

Cet intervalle dépend de l'intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, c'est le pavé $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ sur lequel on cherche les minima de la fonction f . Donc le problème (2.63), est un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable sur un intervalle.

Dans la pratique, la résolution de ce problème peut se faire de la manière suivante: On subdivise l'intervalle $[0, \theta_{\max}]$ en sous-intervalles de longueur $\Delta\theta$ (on discrétise l'intervalle), puis on calcule la valeur de la fonction f^* en tout point $k\Delta\theta$, $k = 0, \dots, N$, avec $N\Delta\theta = \theta_{\max}$, ensuite on cherche le minimum absolu parmi toutes les valeurs $f^*(k\Delta\theta)$, $k = 0, \dots, N$. On trouvera ainsi un ou plusieurs k^* réalisant le minimum de f .

Revenons maintenant sur la détermination de $\theta_{\max}$ intervenant dans l'intervalle de recherche des minima de la fonction d'une variable $f^*(\theta)$ sur le domaine borné $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. La formule qui permet de calculer $\theta_{\max}$ est donnée dans le théorème:

Théorème 2.21. [5] *Pour n quelconque le $\theta_{\max}$ associé au domaine B est donné par la formule*

$$\theta_{\max} = [\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2]^{\frac{1}{2}} / 2n^s$$

où s est le nombre d'étages de la transformation, défini par les inégalités $2^{s-1} < n \leq 2^s$.

La valeur de $\theta_{\max}$ dépendra de la transformation réductrice utilisée. Il existe d'autres formules qui permettent de calculer $\theta_{\max}$ dans [5].

Les fonctions h_i déterminées à partir de la transformation réductrice Alienor sont obtenues en plusieurs étapes, donc le temps de calcul dépend du nombre de variables, ce qui entraîne un temps d'évaluation de la fonction à minimiser $f^*(\theta)$ très grand. A cause de cet inconvénient, des travaux ont été réalisés pour trouver des transformations réductrices qui peuvent être directement calculées (en une seule étape), sans l'utilisation de spirales d'archimède (elles minimisent le temps de calcul du minimum global).

2.3.3 Quelques transformations réductrices

1^{ère} Transformation réductrice:[6](transformation de Cherruault) Le professeur Cherruault propose une transformation de type:

$$x_i = \cos \alpha_i \theta, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.70)$$

où

$$x_i = \sin \alpha_i \theta, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.71)$$

avec $(\alpha_i)_i$ est une suite lentement croissante (la notion de croissance lente signifie ici que les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont très proches les uns des autres, tout en constituant une suite croissante: $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ petit)

La suite de Fibonacci définie par:

$$\begin{cases} F_0 = 1, F_1 = 1, \\ F_{j+1} = F_j + F_{j-1}, j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.72)$$

permet de choisir les α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 = F_1 \\ \alpha_i = \frac{F_i + 0.9}{F_{i+1}}, \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.73)$$

Les transformations réductrices (2.70) et (2.71) calculées à partir de la suite de Fibonacci sont $\alpha - dense$ dans $[-1, 1]^n$, avec un paramètre de densification α :

$$\alpha = \pi \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \sqrt{n-1} \quad (2.74)$$

Pour les deux transformations réductrices (2.70) et (2.71), on peut calculer la valeur de $\theta_{\max}$ par la relation:

$$\theta_{\max} = \frac{2\pi}{\alpha_1} \quad (2.75)$$

$\mathcal{Z}^{ème}$ Transformation réductrice:[23](transformation de Mora) La transformation suivante:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_i = h_i(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos m^{i-1}\pi\theta), \theta \geq 0, i = 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{avec } m = 2 \text{ ou } 3 \quad (2.76)$$

est $\alpha - dense$ dans $[0, 1]^n$ avec un paramètre de densification:

$$\alpha = \frac{1}{m} \sqrt{n-1} \quad (2.77)$$

$\mathcal{J}^{ème}$ Transformation réductrice:[6, 23] On définit la transformation réductrice par:

$$x_i = h_i(\theta) = \cos(w_i\theta + \varphi_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.78)$$

où les $(w_i)_i$ et $(\varphi_i)_i$ sont deux suites choisies lentement croissantes. Cette transformation est aussi $\alpha - dense$ dans $[-1, 1]^n$ avec un paramètre de densification:

$$\alpha = 2k\sqrt{n-1} \frac{w_{n-1}}{w_n}, \quad k > 0 \quad (2.79)$$

$\mathcal{A}^{ème}$ Transformation réductrice:[23] Soit la transformation réductrice suivante:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_i = h_i(\theta) = 1 - \sin(2^{i-1}\theta), \theta \geq 0, i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.80)$$

qui est $\alpha - dense$ dans $\mathbb{R}^n$.

L'utilisation de la méthode Alienor, permet de transformer des fonctions de plusieurs variables en des fonctions d'une seule variable. La fonction $f^*(\theta)$ qui en découle possède beaucoup de minima locaux. La recherche du minimum global devient alors une tâche difficile.

Nous allons développer dans ce paragraphe, une méthode adaptée aux fonctions d'une seule variable qui possèdent plusieurs extrêma locaux. Cette méthode qui a été proposée par G.Mora, Y.Cherruault et A.Benabidallah [21] en 2003, permet d'éliminer progressivement tous les minima locaux pour ne conserver à la fin qu'un minimum global. l'idée de base consiste à appliquer une transformation à la fonction à minimiser. On note par T_f^ε l'opérateur qui agit sur la fonction d'une seule variable f . On notera par:

$C_*(I)$ l'ensemble des fonctions continues ayant un nombre fini de points de discontinuité sur I (I intervalle sur lequel f est définie).

Définissons d'abord:

Définition 2.22. Soit $f \in C_*(I)$. On appelle ensemble admissible S_f l'ensemble des extrêma locaux et globaux de f .

Définition 2.23. Soit F un sous ensemble de $C_*(I)$. Un opérateur $T(f)$ noté $T_f : F \longrightarrow C_*(I)$ est appelé "Opérateur qui Preserve l'Optimisation globale" O.P.O (Optimization Preserving Operator), si pour tout f et $T_f \in F$, on a:

- a) $S_{T_f} \subset S_f$.
- b) Les ensembles S_{T_f} et S_f ont au moins un minimiseur global commun.

Proposition 2.24. [6, 21] Soit f une fonction dans $C_*(I)$, et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, alors l'opérateur $T_f = g \circ f$ est un O.P.O.

Les opérateurs suivants définissent des O.P.O et vérifient la relation $S_{T_f} = S_f$:

$$T_f = af + b, a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R},$$

$$T_f = \exp(f).$$

Remarque 2.25. Les O.P.O de la forme $g \circ f$ ne sont pas utilisables pour l'optimisation globale, puisqu'ils ne permettent pas de réduire l'ensemble S_f des minimiseurs locaux.

Le théorème suivant définit un O.P.O, et ses propriétés:

Théorème 2.26. [6, 21] Soit θ_0 un point arbitraire de I , A une constante et Θ est la fonction d'Heaviside. Toute fonction bijective $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ de classe C^1 , avec $\phi' \neq 0$ définit un O.P.O sur le sous ensemble $\Delta_L(I)$ des fonctions lipshitziennes de constante L . Cet opérateur, noté T_f^ε est défini par la formule:

$$T_f^\varepsilon(\theta) = \phi^{-1}[\varepsilon + \phi(f(\theta) - f(\theta_0) + A)] + \frac{1}{\varepsilon}\theta\Theta[f(\theta) - f(\theta_0)],$$

avec $f \in \Delta_L(I)$, $\theta \in I$ et $0 < \varepsilon < 1$ suffisamment petit. De plus:

a) T_f^ε converge vers f , sauf pour une constante dans l'ensemble

$$L_f(f(\theta_0)) = \{\theta \in \mathbb{R} / f(\theta) \leq f(\theta_0)\}.$$

b) Tous les extremums de T_f^ε sont dans $L_f(f(\theta_0))$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [21].

Notons que la fonction d'Heaviside Θ est une fonction discontinue prenant la valeur 0 pour tous les réels strictement négatifs et la valeur 1 partout ailleurs.

Remarque 2.27. La construction d'un tel O.P.O nécessite une fonction strictement croissante et de plus bijective avec une dérivée non nulle. Donc la classe d'O.P.O construite de cette manière est très faible.

Définissons un autre type d'O.P.O associé à la fonction objectif f qui n'utilise pas de fonctions croissantes:

Définition 2.28. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que f est lipshitzienne et vérifie la condition de croissance à l'infini. Soit θ_0 un élément arbitraire de I . L'opérateur $T_f : f \longrightarrow T_f$ ($T_f \in C_*(I)$) défini par:

$$T_f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta) - f(\theta_0) + |f(\theta) - f(\theta_0)|]$$

est un opérateur qui préserve l'optimisation* (noté O.P.O *).

Donnons quelques résultats:

Proposition 2.29. [6, 12] L'opérateur T_f vérifie la condition de croissance à l'infini:

$$\lim_{\|\theta\| \rightarrow +\infty} T_f(\theta) = +\infty.$$

Proposition 2.30. [6, 12] Pour tout $\theta_0 \in I$, on a:

$$\min_{\theta \in I} T_f(\theta) = 0$$

Proposition 2.31. *[6, 12] T_f et f ont au moins un minimiseur global en commun.*

Ce résultat implique que l'O.P.O* permet de transformer un problème d'optimisation globale en un problème de résolution de l'équation $T_f(\theta) = 0$.

D'où le résultat:

Théorème 2.32. *[6, 12] Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$, dont nous cherchons un optimiseur global. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $T_f(\theta) = 0$.*

Si $S = \{\theta^\}$ alors $\text{Glob.Min}_{\theta \in I} f(\theta) = f(\theta^*)$.*

D'après le résultat précédent, si S contient un unique élément, alors c'est la solution du problème de minimisation globale.

Théorème 2.33. *[6, 12] Soit θ_0 un élément arbitraire de I , ε un réel positif assez petit et Θ la fonction d'Heaviside. Pour toute fonction $f \in C_*(I)$, l'opérateur T_f^ε donné par:*

$$T_f^\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta) - f(\theta_0) + | f(\theta) - f(\theta_0) |] + \frac{1}{\varepsilon} \times \Theta [f(\theta) - f(\theta_0)],$$

définit un O.P.O. De plus, T_f^ε vérifie les propriétés ci-après:*

a) T_f^ε converge vers f sauf pour une constante dans l'ensemble:

$$L_f(f(\theta_0)) = \{ \theta \in I, f(\theta) > f(\theta_0) \}.$$

b) Pour tout $\theta \in L_f(f(\theta_0))$ on a: $T_f^\varepsilon(\theta) = 0$.

c) Si $L_f(f(\theta_0)) = \{\theta_0\}$ alors $f(\theta^) = \text{Glob.Min}_{\theta \in I} f(\theta)$.*

Exemple 2.34. *Soit la fonction à deux variables définie par:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2. \quad (2.81)$$

Le problème est de chercher la valeur $X^* = (x^*, y^*)$ qui minimise la fonction f .

La solution analytique vaut $X^* = (2, 0)$ pour une valeur de la fonction f égale à -2.

On résout ce problème de minimisation par la méthode Alienor, en utilisant la transformation réductrice:

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos(3\pi\theta)). \end{cases} \quad (2.82)$$

En remplaçant les valeurs de x et de y dans l'équation (2.81), on obtient une fonction d'une seule variable θ :

$$g(\theta) = \theta^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(3\pi\theta)\right)^2 - 4\theta + 2 \quad (2.83)$$

La figure suivante représente la courbe de la fonction g :

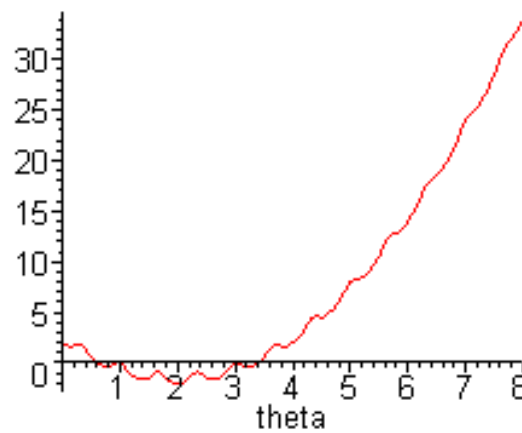


Figure 2.11: Courbe représentative de la fonction $g(\theta)$

A partir de cette courbe, on remarque que le minimum global appartient à l'intervalle $[0, 3]$ (puisque la valeur de la fonction est minimale).

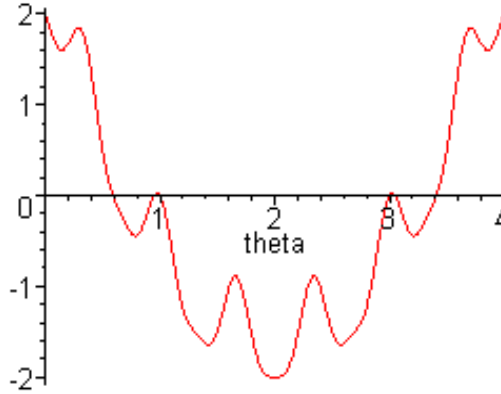


Figure 2.12: Courbe représentative de la fonction g sur $[0, 3]$.

De plus, la fonction g admet plusieurs minima, donc le problème de minimisation sera résolu par une méthode d'optimisation basée sur l'O.P.O*.

A partir de la courbe de $g(\theta)$ on choisit une valeur arbitraire $g(\theta_0)$. On applique ensuite l'opérateur T_g^ε au point $g(\theta_0)$ (c'est à dire qu'on néglige tous les points $(\theta, g(\theta))$ tel que $g(\theta) \geq g(\theta_0)$), et on pose $\varepsilon = 0.0001$.

On obtient alors:

$$T_g^\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2} [g(\theta) - g(\theta_0) + |g(\theta) - g(\theta_0)|] + 10000 \times Heaviside(g(\theta) - g(\theta_0)).$$

Ensuite, on cherche θ_0 qui annule la fonction $T_g^\varepsilon(\theta)$. On modifie la valeur de $g(\theta_0)$ jusqu'à l'obtention d'un minimum unique θ^* .

On coupe la courbe de la fonction par $g(\theta_0) = -1$, ce qui signifie qu'on néglige tous les points $(\theta, g(\theta))$ tel que $g(\theta)$ soit supérieure à -1 , de plus $T_g^\varepsilon(\theta)$ converge vers $g(\theta)$ pour toute valeur de θ , tel que $g(\theta)$ soit inférieure ou égale à -1 . On obtient:

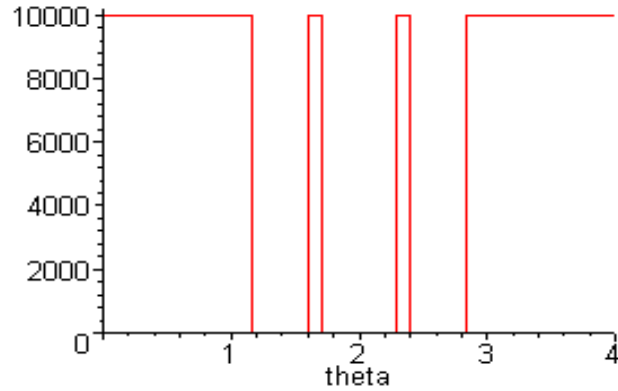


Figure 2.13: Courbe de la fonction $T_g^\varepsilon(\theta)$, pour $g(\theta_0) = -1$.

Si on coupe la courbe à $g(\theta_0) = -1.999$, on retrouve la figure suivante qui représente le minimum global.

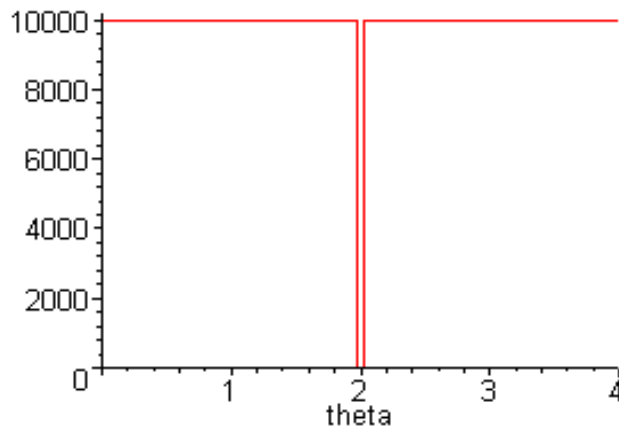


Figure 2.14: Courbe de la fonction $T_f^{0.0001}(\theta)$, $\theta_0 = 1.999$.

D'où $\underset{\theta \in [1.95, 2.1]}{Glob.Min} g(\theta) = -1.999999$.

Le minimum global de la fonction f est atteint pour $(x^*, y^*) = (1.999, 0.000022)$ et il est égale à -1.999999 .

CHAPITRE 3

L'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE

3.1 Introduction

Beaucoup de problèmes du monde réel, peuvent être représentés par une formulation mathématique (équations différentielles ou aux dérivées partielles, systèmes d'équations différentielles,...,etc), dans laquelle un certain nombre de paramètres sont inconnus et qu'on ne pourra pas mesurer expérimentalement.

Ce chapitre est consacré à la détermination (à l'identification) de ces paramètres [14, 22, 5], qui consiste à minimiser une certaine fonction J appelée fonctionnelle d'erreur. La minimisation de cette fonction permet de trouver le meilleur modèle compatible avec les données expérimentales. Donc l'identification des paramètres inconnus dans le modèle va conduire directement à des problèmes d'optimisation.

Nous allons appliquer les deux méthodes, la méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode Alienor pour la résolution du problème de l'identification. La méthode décompositionnelle d'Adomian nous donnera la solution du problème sous forme de série dépendant explicitement des paramètres à identifier, quand à la méthode Alienor, elle nous permettra de transformer la fonction J qui dépend des paramètres inconnus en une fonction d'une seule variable. Ainsi, le problème de l'identification paramétrique devient un problème d'optimisation d'une fonction à une seule variable.

Comme application, nous allons décrire le problème de l'identification paramétrique de phénomènes modélisés par deux équations aux dérivées partielles.

3.2 Principe de l'identification

Nous allons décrire le problème de l'identification paramétrique d'un modèle mathématique, comportant des paramètres inconnus.

Considérons un phénomène réel modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + KH(C) \quad (3.1)$$

sous certaines conditions initiales et aux limites.

Dans l'EDP (3.1) $C(x, t)$ peut représenter la concentration (d'une substance ou d'un virus), la pression (d'une substance), la densité d'une population,...

D et K sont des paramètres inconnus (D, K réels positifs).

H est une fonction donnée qui peut être linéaire ou non linéaire.

x est la variable d'espace et t la variable de temps.

Le problème de l'identification consiste à identifier (à déterminer) les paramètres D et K (qu'on suppose constants) à partir de données expérimentales, en introduisant la fonctionnelle J définie par:

$$J = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (C_i^j - C(x_i, t_j))^2 \quad (3.2)$$

qu'il faudra minimiser, sachant que:

Les C_i^j sont les données expérimentales mesurées aux instants de mesures t_j (connus), $j = 1, \dots, m$, et aux positions x_i (connues), $i = 1, \dots, n$.

Les $C(x_i, t_j)$ représentent les valeurs calculées en résolvant l'EDP, aux instants t_j , $j = 1, \dots, m$, et aux positions x_i , $i = 1, \dots, n$.

La fonctionnelle J calcule la somme des carrées des écarts entre les données expérimentales disponibles et les données calculées. C'est à dire une distance entre l'état observé (réel) et l'état calculé. La minimisation de cette dernière permet de savoir si le modèle mathématique proposé est en adéquation avec les données expérimentales.

En effet, si pour les paramètres D et K qui réalisent le minimum absolu on a: $J = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, alors le modèle est compatible avec l'observation (les données expérimentales).

En général, l'identification des paramètres d'un modèle se fait en minimisant la fonctionnelle d'erreur. Pour le calcul de cette dernière, on doit connaître la solution de l'équation étudiée. Si on utilise une méthode numérique de résolution de l'équation autre que la méthode décompositionnelle d'Adomian, la fonctionnelle dépendra implicitement

des paramètres à identifier, donc on doit résoudre l'équation étudiée un grand nombre de fois (jusqu'à l'obtention des bons paramètres). Donc le problème de l'identification sera résolu suivant l'organigramme:

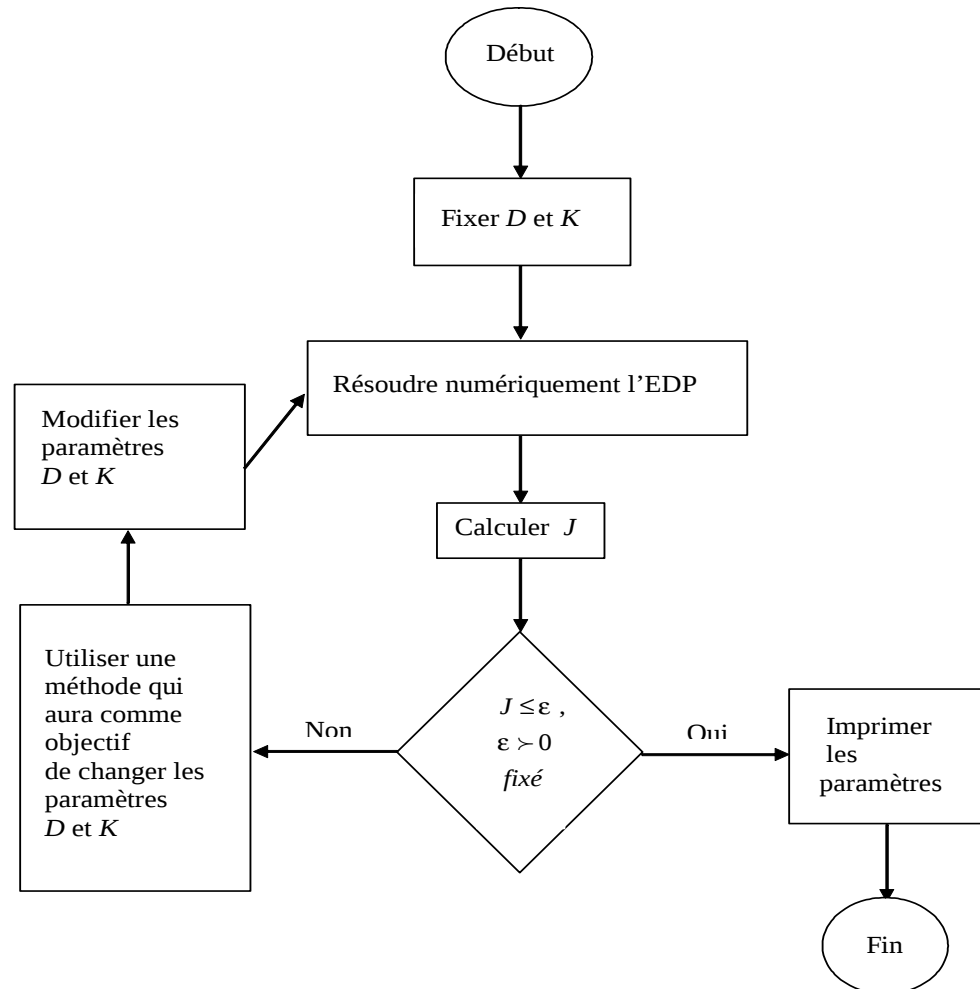


Figure 3.1: Organigramme représentant une méthode de résolution du problème de l'identification.

Pour notre part, nous allons résoudre le problème de l'identification, en utilisant la méthode combinée Adomian/Alienor de la manière suivante:

On résout l'équation (3.1) par la méthode décompositionnelle d'Adomian, ce qui nous donne une solution de l'équation dépendant explicitement des paramètres inconnus D et K . En prenant une série tronquée d'ordre s , on aura une solution approchée de l'équation (3.1) donnée par:

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^{s-1} C_n(D, K, x, t) \quad (3.3)$$

où C_n , $n = 0, \dots, s - 1$, sont les termes de la série d'Adomian.

En remplaçant (3.3) dans (3.2), la fonctionnelle J est déterminée et dépend explicitement des paramètres à identifier D et K . La résolution de l'EDP par la méthode décompositionnelle d'Adomian permet d'obtenir l'organigramme suivant:

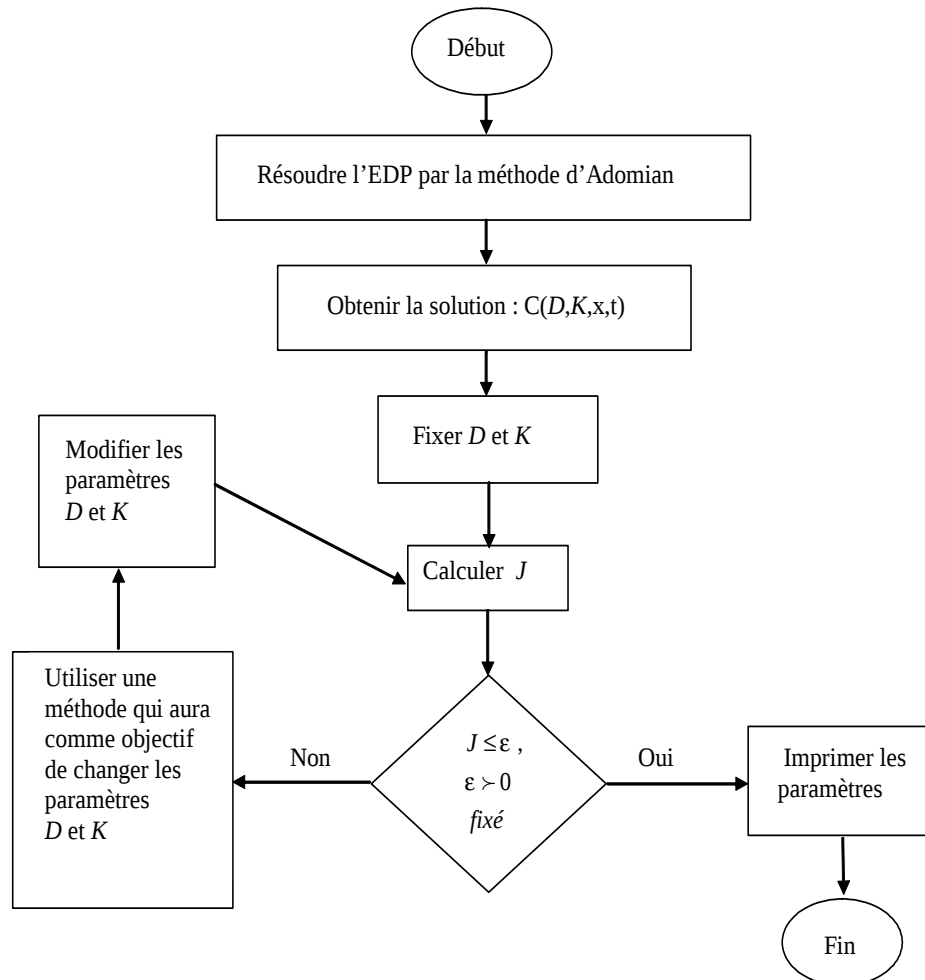


Figure 3.2: Organigramme représentant la résolution du problème de l'identification en utilisant la méthode d'Adomian.

Remarque 3.1. *L'utilisation de la méthode décompositionnelle pour la résolution de l'équation permet d'écrire la fonctionnelle J en fonction explicite des paramètres à identifier. On évitera dans ce cas, la résolution de l'équation à chaque étape.*

Pour la minimisation de La fonctionnelle d'erreur, on utilise la méthode Alienor qui permet de déterminer le minimum global de J , c'est à dire:

$$\min_{D,K} J(D, K) \quad (3.4)$$

qui est un problème de minimisation classique d'une fonction à deux variables D et K . La fonctionnelle $J(D, K)$ est approchée par une fonction $J^*(\theta)$, en utilisant la transformation réductrice:

$$\begin{cases} D = h_1(\theta) \\ K = h_2(\theta) \end{cases} \quad (3.5)$$

où $h_1, h_2 \in C^\infty$, et sont des fonctions choisies de manière à α -densifier l'espace $\mathbb{R}^2$, c'est à dire, la courbe h est α -dense dans $\mathbb{R}^2$, avec $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))$.

Donc le problème de minimisation (3.4) est approché par le problème

$$\min_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} J^*(\theta) \quad (3.6)$$

avec $J^*(\theta) = J(h_1(\theta), h_2(\theta))$ et $\theta_{\max}$ est la plus grande valeur que peut prendre θ .

Le problème (3.6) est un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable θ . Sachant que la fonction J^* est continue sur un domaine fermé et borné, elle possède au moins un minimum dans $[0, \theta_{\max}]$.

Y.Cherruault a montré dans [13], que toute solution du problème (3.4) est une approximation d'une solution du problème (3.6) puisque $h \subseteq \mathbb{R}^2$.

En utilisant la méthode Alienor pour la minimisation de J , l'organigramme 2 devient:

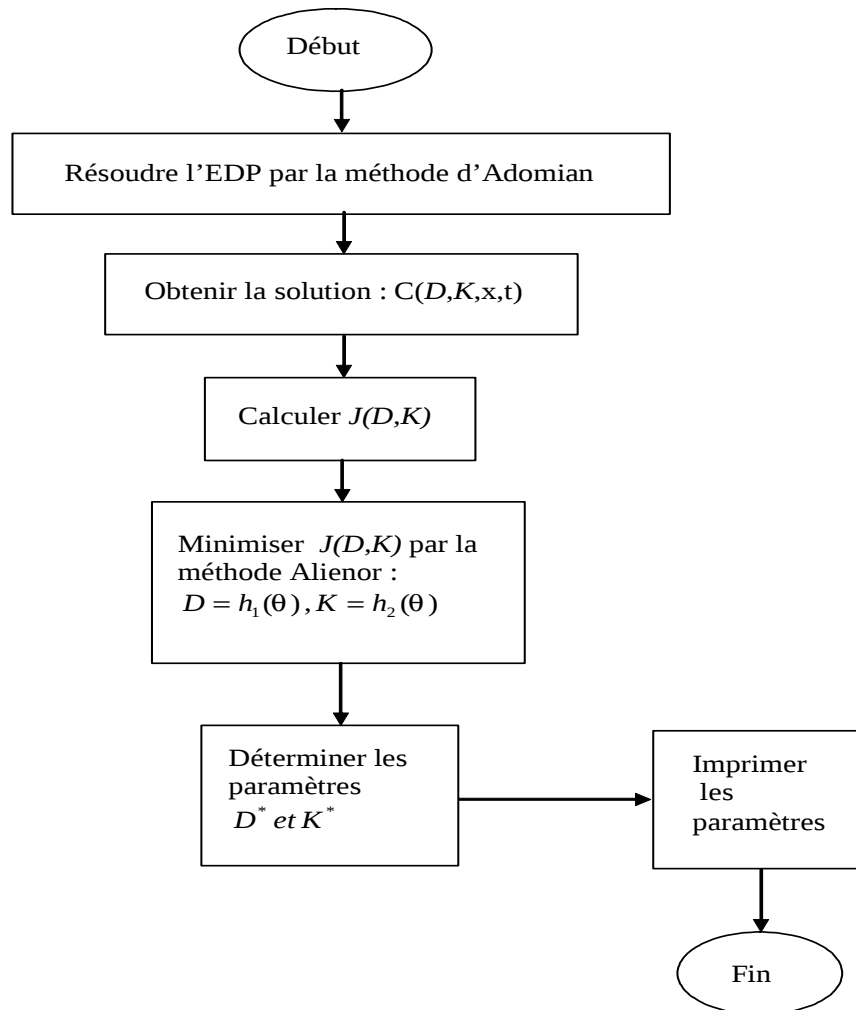


Figure 3.3: Organigramme de résolution du problème de l'identification par les méthodes Adomian et Alienor.

Le résultat suivant, permet de préciser l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'identification des paramètres.

Théorème 3.2. [13] *Si la fonctionnelle $J^*(\theta)$ admet un minimum global unique θ^* satisfaisant $J^*(\theta^*) = 0$, (ou proche de zéro), alors le problème d'identification admet une solution unique, et l'on obtiendra le "meilleur" modèle possible.*

Si $J^(\theta)$ possède plusieurs minima globaux vérifiant $J^*(\theta^*) = 0$, (ou proche de zéro), alors le problème d'identification n'admet pas de solution unique (on a seulement l'existence de la solution).*

Si $J^(\theta)$ possède un ou plusieurs minima globaux vérifiant $J^*(\theta^*) \neq 0$, alors le modèle mathématique n'est pas compatible avec les données expérimentales.*

3.3 Application:

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'identification des paramètres inconnus de deux modèles représentés par des équations de diffusion (EDP parabolique).

Modèle 1: Modèle biologique de diffusion, c'est à dire l'équation (3.1) dans le cas où la fonction H est linéaire et elle est égale à $H(C) = -C$.

Modèle 2: Modèle de FISCHER: L'équation (3.1) dans le cas où la fonction H est non linéaire et elle est égale à $H(C) = C(1 - C)$.

3.3.1 Modèle 1 (Problème de diffusion des médicaments):

Les modèles mathématiques sont de plus en plus utilisés en médecine et en biologie, dans des domaines d'application très variés. Formalisant des phénomènes complexes, ils permettent d'évaluer des hypothèses en fournissant des éléments de compréhension ou de prédiction.

On considère l'équation aux dérivées partielles [33]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K_1 C \quad (3.7)$$

Cette EDP est utilisée pour résoudre par exemple, le problème de diffusion des antibiotiques ou de substances antitumorales dans le cerveau (puisque les mécanismes de transport des substances antitumorales agissant sur les tumeurs peuvent être simplifiés en supposant que le transport des médicaments est régi par diffusion). Les scientifiques essayent de résoudre ce problème en étudiant la concentration des antibiotiques dans les emplacements d'infections et entre les capillaires, en employant l'EDP (3.7).

Notons par:

$C(x, t)$ est la concentration du médicament anticancéreux dans le fluide intestinal.

D_1 coefficient de diffusion de la substance antitumorale dans le cerveau.

K_1 coefficient d'échange.

Soit le problème suivant:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K_1 C, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.8)$$

sous les conditions:

$$C(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.9)$$

$$C(0, t) = g(t), \quad 0 < t \leq 1 \quad (3.10)$$

$$C(1, t) = h(t), \quad 0 < t \leq 1 \quad (3.11)$$

telles que φ , g et h sont des fonctions connues.

Notre but est d'identifier les paramètres D_1 et K_1 en minimisant la fonctionnelle d'erreur:

$$J_1 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (C_i^j - C(x_i, t_j))^2 \quad (3.12)$$

où les C_i^j sont les données expérimentales mesurées et les $C(x_i, t_j)$ représentent les valeurs calculées en résolvant l'EDP (3.8), aux instants t_j , $j = 1, \dots, m$, et aux positions x_i , $i = 1, \dots, n$.

On pose $\varphi(x) = e^{-(x-0.05)^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

Les valeurs de la solution de l'EDP $C(x_i, t_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, sont déterminées par la méthode décompositionnelle d'Adomian (la solution est déterminée dans le chapitre 2), en prenant une série tronquée d'ordre 4. La solution obtenue dépend des paramètres D_1 et K_1 , de la variable x et de la variable t :

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^3 C_n(D_1, K_1, x, t) \quad (3.13)$$

La série solution est déterminée à partir des termes obtenues d'après la formule (2.41).

On suppose que les paramètres exacts (réels) sont $D_1 = 0.06$ et $K_1 = 0.05$, et on pose $g(t) = 0.9$ pour $0 < t \leq 1$ et $h(t) = 0.4$ pour $0 < t \leq 1$.

Considérons aussi, la solution de l'EDP obtenue par la méthode des différences finies (schéma implicite) à partir des paramètres exacts comme données expérimentales C_i^j calculées en dix instants de mesures et dix positions.

Le tableau suivant résume les données expérimentales simulées du problème de diffusion des médicaments:

t	x	concentration	t	x	concentration
0	0	0.9	0.1	0	0.9
	0.1	0.9975031224		0.1	0.9570462718
	0.2	0.9777512372		0.2	0.9549767620
	0.3	0.9394130628		0.3	0.9231051889
	0.4	0.8847059049		0.4	0.8718895663
	0.5	0.8166864826		0.5	0.8066928584
	0.6	0.7389684883		0.6	0.7316522685
	0.7	0.6554062543		0.7	0.6505819131
	0.8	0.5697828247		0.8	0.5669379449
	0.9	0.4855368952		0.9	0.4833052827
	1	0.4		1	0.4
0.2	0	0.9	0.3	0	0.9
	0.1	0.9328920314		0.1	0.9169228671
	0.2	0.9335021871		0.2	0.9150043521
	0.3	0.9062868358		0.3	0.8900425001
	0.4	0.8587405936		0.4	0.8455661743
	0.5	0.7965519614		0.5	0.7862953646
	0.6	0.7241906276		0.6	0.7165744275
	0.7	0.6454961282		0.7	0.6402004817
	0.8	0.5637520282		0.8	0.5603847390
	0.9	0.4814271018		0.9	0.4796593036
	1	0.4		1	0.4

t	x	concentration	t	x	concentration
0.4	0	0.9	0.5	0	0.9
	0.1	0.9054400934		0.1	0.8966374063
	0.2	0.8993830141		0.2	0.8861487274
	0.3	0.8749225230		0.3	0.8611048033
	0.4	0.8326860140		0.4	0.8203291950
	0.5	0.7760355649		0.5	0.7659044541
	0.6	0.7088440947		0.6	0.7010675943
	0.7	0.6347458615		0.7	0.6291825210
	0.8	0.5568966977		0.8	0.5533198918
	0.9	0.4779084966		0.9	0.4761411658
	1	0.4		1	0.4
0.6	0	0.9	0.7	0	0.9
	0.1	0.8895657086		0.1	0.8836887311
	0.2	0.8748169247		0.2	0.8649952067
	0.3	0.8485733511		0.3	0.8372292083
	0.4	0.8086266403		0.4	0.7976344166
	0.5	0.7560181783		0.5	0.7464641573
	0.6	0.6933211523		0.6	0.6856766338
	0.7	0.6235611641		0.7	0.6179314059
	0.8	0.5496804057		0.8	0.5460045500
	0.9	0.4743492672		0.9	0.4725363383
	1	0.4		1	0.4

t	x	concentration	t	x	concentration
0.8	0	0.9	0.9	0	0.9
	0.1	0.8786821419		0.1	0.8743375508
	0.2	0.8563836730		0.2	0.8487560729
	0.3	0.8269478040		0.3	0.8176052730
	0.4	0.7873597696		0.4	0.7777813561
	0.5	0.7373005535		0.5	0.7285609566
	0.6	0.6781950819		0.6	0.6709245517
	0.7	0.6123397539		0.7	0.6068275911
	0.8	0.5423193486		0.8	0.5386513944
	0.9	0.4707113493		0.9	0.4688856095
	1	0.4		1	0.4

t	x	concentration
1	0	0.9
	0.1	0.8705139281
	0.2	0.8419408792
	0.3	0.8090889111
	0.4	0.7688628613
	0.5	0.7202603083
	0.6	0.6639004386
	0.7	0.6014300665
	0.8	0.5350255445
	0.9	0.4670710130
	1	0.4

Tableau 3.1 : Données expérimentales simulées pour le problème de diffusion des médicaments.

La fonctionnelle J_1 est déterminée à partir des données expérimentales simulées du tableau précédent, et la solution de l'équation obtenue par la méthode décompositionnelle. On passe maintenant à sa minimisation par la méthode Alienor, en utilisant les deux transformations réductrices suivantes:

- 1^{ère} transformation réductrice:

$$\begin{cases} D_1 = \theta \\ K_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos(3\pi\theta)) \end{cases}, \theta \geq 0 \quad (3.14)$$

- 2^{ème} transformation réductrice:

$$\begin{cases} D_1 = \cos(3\theta + 1) \\ K_1 = \cos(3.1\theta + 1.1) \end{cases} \quad (3.15)$$

En utilisant la 1^{ère} transformation réductrice, on approche la fonction $J_1(D_1, K_1)$ par la fonction $J_1^*(\theta)$ qui dépend d'une seule variable θ . La courbe représentative de la fonction J_1^* , nous permet de situer le minimum global dans l'intervalle $[0, 1]$.

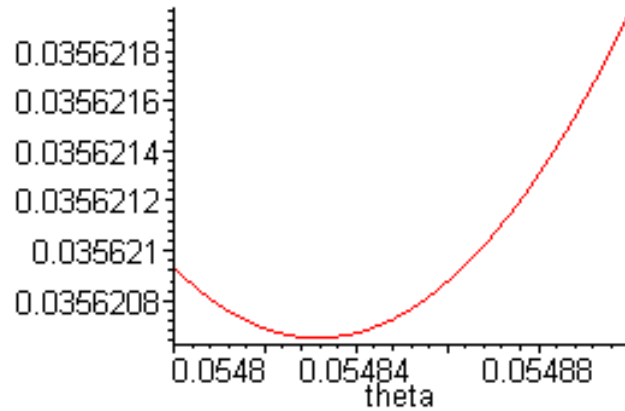


Figure 3.4 : Courbe représentative de la fonction J_1^* .

Plus précisément, le minimum de la fonction J_1^* est atteint pour la valeur de $\theta = 0.05483$.

De même, en utilisant la 2^{ème} transformation réductrice, on approche la fonction $J_1(D_1, K_1)$ par la fonction $J_1^{**}(\theta)$.

La figure suivante représente la fonction J_1^{**} sur l'intervalle $[-10, 10]$.

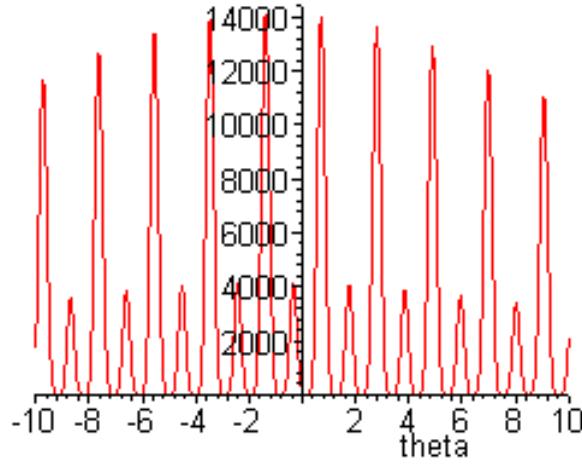


Figure 3.5: Courbe représentative de la fonction J_1^{**} sur l'intervalle $[-10, 10]$.

Le minimum global dans ce cas, est calculé par une méthode d'optimisation globale basée sur l'O.P.O, puisque la fonction J_1^{**} admet plusieurs minima. Après des coupures successives de la courbe (précédente), on aboutit à la figure suivante qui est obtenue en coupant la courbe à $J_1^{**}(\theta_0) = 0.04$, ce qui correspond à une valeur de $\theta_0 = -0.839$.

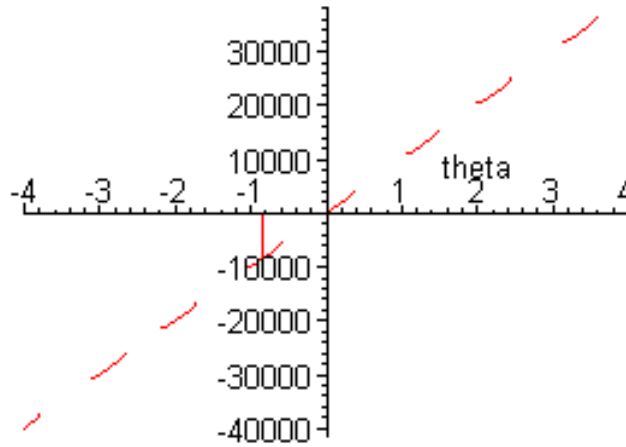


Figure 3.6: Courbe de l'opérateur $T_{J_1^{**}}^\epsilon(\theta)$, $\theta_0 = -0.839$.

Le tableau suivant, résume les valeurs des paramètres obtenus à partir des deux transformations réductrices, ainsi que la valeur de la fonctionnelle J_1 .

Paramètres	1 ^{ère} transformation	2 ^{ème} transformation
D_1	0.05483	0.05377
K_1	0.06528	0.06983
La valeur de la fonctionnelle J_1	0.03562	0.03576

(3.16)

Tableau 3.2: Valeurs des paramètres obtenues en utilisant les deux transformations.

3.3.2 Modèle 2 (Equation de FISHER):

Soit l'équation aux dérivées partielles suivantes [33]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_2 C(1 - C) \quad (3.17)$$

appelée "équation de FISHER".

Cette équation décrit par exemple, la propagation d'un virus mutant, ou l'évolution d'une population de neutrons dans une centrale nucléaire, ou encore la migration d'une population. Elle est aussi très utilisée en finance.

Considérons le problème:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_2 C(1 - C), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.18)$$

avec les conditions:

$$\begin{cases} C_x(0, t) = C_x(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ C(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Le problème est de déterminer les deux paramètres D_2 et K_2 en minimisant la fonctionnelle d'erreur:

$$J_2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (C_i^j - C(x_i, t_j))^2 \quad (3.20)$$

tel que les C_i^j représentent les données expérimentales mesurées aux instants t_j , $j = 1, \dots, m$ et aux positions x_i , $i = 1, \dots, n$.

Les $C(x_i, t_j)$ sont les valeurs calculées en résolvant l'EDP, aux instants t_j , $j = 1, \dots, m$ et aux positions x_i , $i = 1, \dots, n$.

La solution approchée de l'EDP (3.18) est déterminée par la méthode décompositionnelle d'Adomian (calculée au chapitre 2), en prenant une série tronquée d'ordre 3. Cette solution dépend explicitement des paramètres D_2 et K_2 et des deux variables d'espace et du temps x et t :

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^2 C_n(D_2, K_2, x, t) \quad (3.21)$$

On suppose que les paramètres exacts (réels) sont $D_2 = K_2 = 1$.

Les C_i^j sont les données expérimentales obtenues en résolvant l'EDP (3.18) par la méthode des différences finies (schéma explicite) à partir des paramètres exacts à des instants t_j , $j = 1, \dots, m$ et positions x_i , $i = 1, \dots, n$ connus.

La minimisation de la fonctionnelle J_2 se fait par la méthode Alienor en utilisant la transformation réductrice:

$$\begin{cases} D_2 = \cos \theta \\ K_2 = \cos(0.966\theta) \end{cases} \quad (3.22)$$

On approche ainsi, la fonctionnelle $J_2(D_2, K_2)$ par la fonction d'une seule variable $J_2^*(\theta)$. Cette dernière admet plusieurs minima, d'après son graphe représentatif:

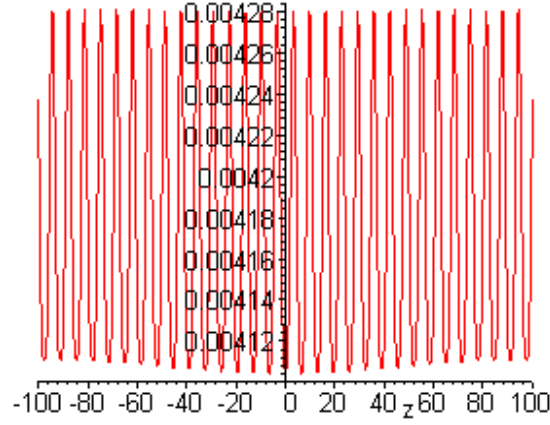


Figure 3.7: Courbe représentative de la fonction $J_2^*(\theta)$.

Donc on utilise l'O.P.O pour minimiser la fonction J_2^* (on introduit l'opérateur $T_{J_2^*}^\varepsilon(\theta)$). Après plusieurs coupures de la courbe de la fonction, on obtient la figure suivante:

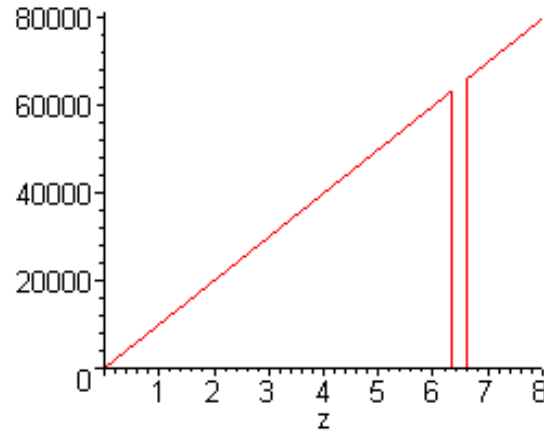


Figure 3.8: Courbe de la fonction $T_{J_2^*}^\varepsilon(\theta)$, $\theta_0 = 6.47$

Cette dernière est obtenue en coupant la courbe de la fonction J_2^* à $J_2^*(\theta_0) = 0.0041043$, (c'est à dire qu'on néglige tous les points où $J_2^*(\theta)$ est supérieur à 0.0041043). La valeur de θ_0 correspondante est égale à $\theta_0 = 6.47$.

Pour une valeur de $\theta = 6.47$, on obtient les paramètres $D_2 = 0.9826008259$ et $K_2 = 0.9994500816$, ce qui correspond à une valeur de la fonctionnelle J égale à 0.0041040945.

3.3.3 Discussion:

D'après les résultats numériques obtenus, on remarque que les paramètres identifiés sont proches des paramètres exacts pour les modèles 1 et 2.

Les paramètres identifiés sont reportés dans les solutions des EDP (3.8) et (3.18) afin de les comparer avec les données expérimentales.

La comparaison des courbes des données expérimentales (en points) avec les courbes de la solution en fonction des paramètres identifiés (lignes) sont illustrées par les figures suivantes:

Modèle 1:

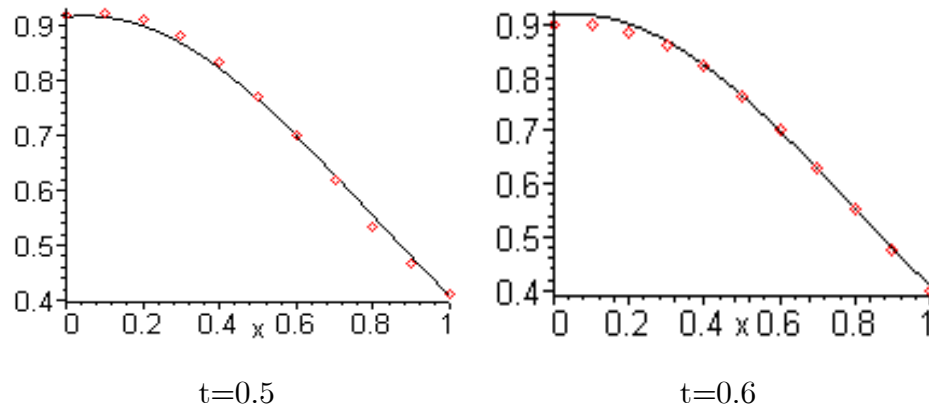


Figure 3.9: Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/1^{ère} transformation pour $t = 0.5$ et $t = 0.6$.

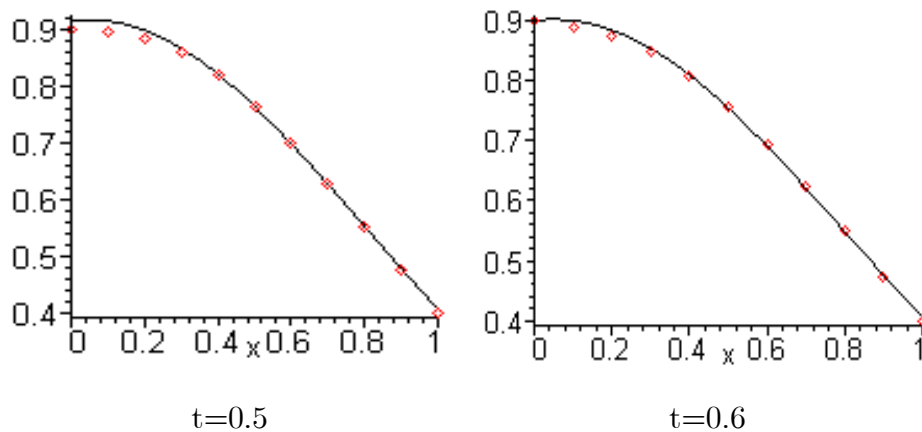


Figure 3.10: Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/2^{ème} transformation pour $t = 0.5$ et $t = 0.6$.

Modèle 2:

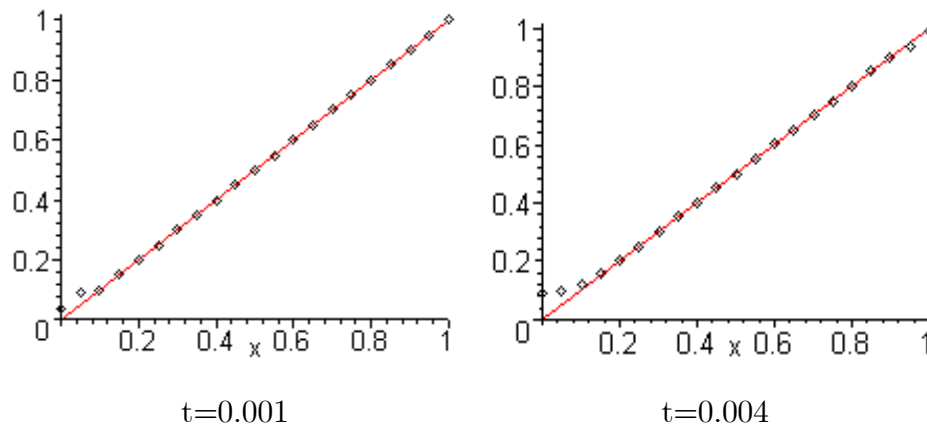


Figure 3.11: Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes de la solution obtenue par la méthode Adomian/Alienor pour $t = 0.001$ et $t = 0.004$.

On remarque qu'on a une bonne superposition des courbes, en utilisant les deux méthodes Adomian et Alienor. On conclut donc que cette technique donne des résultats satisfaisants.

CONCLUSION

Le travail de recherche que nous avons traité au cours de ce mémoire est le problème de l'identification des paramètres de modèles régis par des équations aux dérivées partielles.

La combinaison de la méthode décompositionnelle d'Adomian avec la méthode Alienor transforme le problème de l'identification paramétrique en un problème d'optimisation globale.

Cette approche a été appliquée pour identifier les paramètres de deux équations de diffusion linéaire et non linéaire. La comparaison des solutions obtenues par la méthode combinée Adomian/Alienor avec les données expérimentales des deux modèles donne des résultats satisfaisants, ce qui confirme l'efficacité de cette approche.

Plusieurs problèmes restent ouverts et très intéressants dans ce domaine, pour les travaux de recherche futurs comme:

- a)* Considération des systèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites.
- b)* Considération des systèmes différentiels non linéaires bruités ou comportant des paramètres variables du temps.
- c)* Considération du problème de contrôle pour des équations et systèmes d'équations aux dérivées partielles.

APPENDICE

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A_n, B_n	: Polynômes d'Adomian.
L	: Opérateur différentiel.
L^{-1}	: L'inverse de l'opérateur différentiel.
N	: Terme non-linéaire.
$O.P.O$	: Opérateur qui préserve l'optimisation.
EDP	: Equations aux dérivées partielles.
PVL	: Problèmes de valeurs aux limites.
PVI	: Problèmes de valeurs initiales.
PVP	: Problèmes de valeurs propres.
Δ	: Les pas de discrétisation.
h	: Le pas de discrétisation spatial.
k	: Le pas de temps.
E	: Espace de Banach.
λ	: Paramètre intrduit par convenance.
φ_s	: Série tronquée d'ordre s .
$[A]$	: Matrice des coefficients.
$c(k, n)$	: Coefficients des polynômes d'Adomian.
$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$	: Pavé de $\mathbb{R}^n$.
Fi	: Les termes de la suite de Fibonacci.
$C_*(I)$	: L'ensemble des fonctions continues ayant un nombre fini de points de discontinuité
S_f	: L'ensemble des extrêma locaux et globaux de f .

RÉFÉRENCES

- [1] A. Le Pourhiet, "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles", Cepadues-Editions, 1988.
- [2] M. Tahar Abbas, "Méthodes numériques", tome1, Office des Publications Universitaires (O.P.U), 2007.
- [3] E. Goncalvès, "Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO", Grenoble, 2005.
- [4] R. Herbin, "Analyse numérique des équations aux dérivées partielles", Master de mathématiques, Université Aix Marseille1.
- [5] Y. Cherruault, "Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant", Presses Universitaires de France (P.U.F), Paris, 1998.
- [6] Y. Cherruault, G. Mora, "Optimisation globale: Théorie des courbes α -denses", Economica, 2005.
- [7] B.O. Konfe, Y. Cherruault, "Formal software for calculing Adomian polynomials of high order. Application to nonlinear partial differential equations", 2004.
- [8] J. Biazar, M. Ilie, A. Khoshkenar, "An improvement to an alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases", Elsevier, Applied Mathematics and Computation 173, 2006, pp. 582-592.
- [9] K. Abbaoui, "Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine", Thèse de l'Université Paris, Laboratoire MEDIMAT, 1995.
- [10] N. Ngarhasta, B. Some, K. Abbaoui, Y. Cherruault, "New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model", Kybernetes, V. 31, n^o1, 2002, pp. 61-75.

- [11] S. Khelifa, "Equations aux dérivées partielles et méthode décompositionnelle d'Adomian", Thèse de Doctorat Es sciences. Université H. Boumedienne, Algérie, 2002.
- [12] B.O. Konfe, "Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomian, pour la bio-médecine", thèse de l'université de ouagadougou, 2005.
- [13] Y. Cherruault, "Optimisation, méthodes locales et globales", Presses Universitaires de France (P.U.F), Paris, 1999.
- [14] G. Adomian, "Nonlinear stochastic operators equations", Academic press, 1986.
- [15] S. Manseur, N. Messaoudi, "Identification des paramètres d'un Système Immunitaire du HIV par la méthode combinée Adomian/Alienor", 2^{ème} colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information Cusi'05, 12-14 juin 2005, Béjaïa, Algérie.
- [16] G. Adomian, "Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to physic", Kluwar Academic, 1989.
- [17] Y. Cherruault, "Convergence of Adomian's Method", Kybernetes, V. 18, n^o2, 1989, pp. 31-38.
- [18] T. Benneouala, Y. Cherruault, "Alienor method for global optimization with large number of variables", Kybernetes, V. 34, n^o7/8, 2005, pp. 1104-1111.
- [19] Y. Cherruault, G. Adomian, "Decomposition methods: A new proof of convergence", Math1.Comput. Modelling. V. 18, n^o12, 1993, pp. 103-106.
- [20] K. Abbaoui, Y. Cherruault, "Convergence of Adomian's method applied to differentiel equations", Computers Math Applic, V.28, n^o5, 1994, pp. 103-109.
- [21] G. Mora, Y. Cherruault, A. Benabidallah, "Global Optimization Preserving Operators", Kybernetes, V. 32, n^o9/10, 2003, pp.1473-1480.
- [22] A. Bellagoun, Y. Cherruault, A. Meulemans, "Modelling and identification of drug diffusion in brain", Bellman, Math1, comput. V. 17, n^o9, 1993, pp. 101-105.

- [23] N.A. Messaoudi, "Identification et contrôle des systèmes indéterminés non linéaires par la méthode combinée Adomian/Alienor", Thèse de l'université de Blida, Algérie, 2006.
- [24] Aslak Treito, Ragnar Winther, "Introduction to Partial Differential Equations: A Computational approach ", Springer.
- [25] Y. Cherruault, "A computational approach to the wave equations: An application of the decomposition method", *Kybernetes*, V. 33, n^o1, 2004, pp. 80-97.
- [26] B. Neta, "Numerical solution of partial differential equations", Montrey california, 2003.
- [27] G. Adomian, "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations", *Computers Math, Applic*, V. 21, n^o5, 1991, pp. 101-127.
- [28] Y. Cherruault, A. Guillez, "Une méthode pour la recherche du minimum global d'une fonctionnelle". CRAS, Paris, T296, série 1, 1993, pp. 175-178.
- [29] G. Adomian, "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations". *Computers.Math.Applic*. V. 21, n^o 5, 1991, pp.101-127.
- [30] K. Abbaoui, Y. Cherruault, "Convergence of the Adomian method applied to nonlinear equations", *Mathematical and Computer Modelling*, V. 20, n^o 9, 1994, pp. 60-73.
- [31] K. Abbaoui, Y. Cherruault, "Convergence of Adomian method applied to differential equations", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 28, n^o 5, 1994, pp 103-9.
- [32] K. Abbaoui, Y. Cherruault, "New ideas for proving convergence of decomposition methods", *Computers Math. Applic*. V. 29, n^o 7, 1995, pp. 103-108.
- [33] R. Benzitouni, S. Manseur, "Identification d'un modèle de diffusion par la méthode combinée Adomian/Alienor", Colloque international sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information Cosi'09, 25-27 Mai 2009, Annaba, Algérie (article accepté).