MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE MECANIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

en MECANIQUE
(Option: Construction Mécanique)

وزارة التعليم و البحث العلمي
المكتبة الجامعية
المركز الجامعي بالبليدة

FORMULATION THEORIQUE ET RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT

Présenté par
AMEL MAHI

Proposé et dirigé par: Dr A. SOUAHI

Présenté devant le jury constitué de:

Mr: A. GUESSOUM	Ph. D., Président
Mr: A. SOUAHI	Ph. D., Rapporteur
Mr: M. OUALI	Ph. D., Membre
Mr: A. AIAD	Ph. D., Membre
Mr: B. ATTAF	Ph. D., Membre

BLIDA, ALGERIE 1994

32-530-56-1

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE MECANIQUE

32-530-56-1

MEMOIRE DE MAGISTER

en MECANIQUE
(Option: Construction Mécanique)

FORMULATION THEORIQUE ET RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT

Présenté par
AMEL MAHI

Proposé et dirigé par: Dr A. SOUAHI

Présenté devant le jury constitué de:

Mr: A. GUESSOUM	Ph. D., Président
Mr: A. SOUAHI	Ph. D., Rapporteur
Mr: M. OUALI	Ph. D., Membre
Mr: A. AIAD	Ph. D., Membre
Mr: B. ATTAF	Ph. D., Membre

BLIDA, ALGERIE 1994

SOMMAIRE

Parmi les problèmes vibratoires que risque de rencontrer un avion en vol, l'instabilité aéroélastique de flottement apparait comme l'un des plus violents. Le phénomène a pour origine l'interaction entre le mouvement vibratoire de la structure et l'écoulement de l'air.

L'objectif principal de ce travail est de résoudre les équations régissant ce phénomène aéroélastique. Pour ce faire, Nous utilisons deux formulations différentes des équations: la formulation Américaine et la formulation Anglaise.

Pour rendre possible la résolution sur micro-ordinateur, nous appliquons la technique de condensation **statique** de Guyan et le principe de la superposition des modes propres naturels avec une matrice modale tronquée.

Les forces aérodynamiques instationnaires agissant sur la structure d'avion sont déterminées grâce à la théorie de la surface portante.

Des méthodes de résolution itératives et semi-graphique basées sur des résolutions de problèmes aux valeurs propres complexes sont développées.

Les résultats obtenus en appliquant le code numérique développé, sur micro-ordinateur, à des structures d'avion, sont satisfaisants. Le procédé iteratif est plus efficace que le procédé semi-graphique, par contre la formulation Anglaise offre une analyse plus complète du phénomène de flottement que la formulation Américaine.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à mon promoteur, le Docteur A. SOUAHI, d'avoir bien voulu suivre mon travail, de m'avoir aidée, conseillée et encouragée.

Ma sincère gratitude envers tous mes professeurs qui, au cours de mes études, m'ont prodiguée leurs enseignements.

Je remercie également Monsieur M. AZINE responsable du laboratoire d'informatique, Monsieur A. DJERFAF responsable du centre de calcul ainsi que les ingénieurs de laboratoires d'avoir mis à ma disposition les moyens de calcul nécessaires.

Ma reconnaissance au Docteur M. OUALI, directeur de l'Institut de Mécanique ainsi qu'au Docteur M. MAGHRAOUI, sous-directeur de la post-graduation de m'avoir facilité les démarches administratives.

Je suis trés reconnaissante au Docteur A. GUESSOUM d'avoir accépté de présider mon jury ainsi qu'à Messieurs les membres de jury qui ont bien voulu juger mon travail.

Je remercie particulièrement mes parents, mon fiancé, mes frères et mes amis pour l'aide considérable et le soutien moral qu'ils m'ont apportés.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE i

REMERCIEMENTS.....ii

TABLE DES MATIERES.....iii

LISTE DES FIGURES v

LISTE DES TABLEAUX.....viii

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES.....ix

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1: FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

1.1 Introduction.....7
1.2 Réduction du problème par la technique de condensation de Guyan.....8
1.3 Application de la méthode de superposition modale....11
1.4 Formulation des équations du mouvement par la méthode de Lagrange.....14
1.5 Conclusion.....20

CHAPITRE 2: CALCUL DES FORCES AERODYNAMIQUES GENERALISEES

2.1 Introduction.....21
2.2 Hypothèses.....21
2.3 Conséquences directes des hypothèses.....22
2.4 Interconnexion entre les noeuds aérodynamiques et structuraux.....25
2.5 Forces aérodynamiques généralisées - Matrice des coefficients d'influence aérodynamiques généralisés.....27
2.6 Conclusion.....33

CHAPITRE 3: RESOLUTION DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT

3.1 Introduction.....34
3.2 Organigramme résumant le travail effectué.....35

3.3 Origine de l'amortissement des structures aéronautiques 36
3.4 Résolution des équations Américaines du flottement aéroélastique.....39
3.5 Résolution des équations Anglaises du flottement aéroélastique.....50
3.6 Amélioration des algorithmes itératifs du point de vue temps d'exécution.....64
3.7 Conclusion.....66

CHAPITRE 4: DESCRIPTION DE DEUX STRUCTURES D'AVION

4.1 Introduction.....67
4.2 Caractéristiques physiques du matériau utilisé.....67

CHAPITRE 5: APPLICATIONS ET RESULTATS

5.1 Introduction.....76
5.2 Résultats de l'application du logiciel développé à l'aile rectangulaire.....77
5.3 Résultats de l'application du logiciel développé à l'empennage horizontal.....100

CONCLUSION GENERALE.....114
REFERENCES.....117

ANNEXE A: ORTHOGONALITE DES VECTEURS PROPRES NATURELS PAR RAPPORT AUX MATRICES MASSE ET RIGIDITE REDUITES

ANNEXE B: NORMALISATION DES VECTEURS PROPRES PAR RAPPORT LA MATRICE MASSE REDUITE

ANNEXE C: ANALYSE MATHEMATIQUE POUR UNE INTERPOLATION UTILISANT "LES SURFACES SPLINES"

ANNEXE D: LISTE DES MODULES DEVELOPPES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT AEROELASTIQUE

LISTE DES FIGURES

FIGURE 2-1: Séparation du problème réel d'un profil en un problème d'épaisseur et un problème portant....23

FIGURE 2-2: Projection de la voilure sur le plan XOY.....24

FIGURE 2-3: Représentation schématique d'un maillage structural et d'un maillage aérodynamique.....25

FIGURE 3-1: Préparation des matrices pour la résolution du problème de flottement.....36

FIGURE 3-2a: Profil fixe.....37

FIGURE 3-2b: Etat du profil à un instant t.....38

FIGURE 3-3: Détermination de la vitesse de flottement par la résolutions des équations Américaines.....48

FIGURE 3-4: Organigramme du programme principal de la résolution de l'équation Américaine du flottement..49

FIGURE 3-5: Résultats de la résolution des équations Anglaises pour une valeur fixée de k.....55

FIGURE 3-6: Procédé graphique pour la détermination des conditions critiques de flottement.....56

FIGURE 3-7: Organigramme de la résolution de l'équation Anglaise du flottement par le procédé semi-graphique.....57

FIGURE 3-8: Détermination de la vitesse de flottement par la résolution des équations Anglaises (procédé itératif).....62

FIGURE 3-9: Organigramme de la résolution de l'équation Anglaise du flottement par le procédé itératif.63

FIGURE 4-1: Aile rectangulaire.....68

FIGURE 4-2: Maillage par éléments finis de l'aile rectangulaire.....69

FIGURE 4-3: Empennage horizontal.....72

FIGURE 4-4: Maillage par éléments finis de l'empennage horizontal.....73

FIGURE 5-1: Résultats de la résolution des équations Américaines du flottement (aile rectangulaire).....82

FIGURE 5-2: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=0.6 (aile rectangulaire).....84

FIGURE 5-3: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=0.7 (aile rectangulaire).....85

FIGURE 5-4: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=0.8 (aile rectangulaire).....86

FIGURE 5-5: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=0.9 (aile rectangulaire).....87

FIGURE 5-6: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.0 (aile rectangulaire).....88

FIGURE 5-7: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.2 (aile rectangulaire).....89

FIGURE 5-8: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.4 (aile rectanguiaire).....90

FIGURE 5-9: Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.6 (aile rectangulaire).....91

FIGURE 5-10:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.8 (aile rectangulaire).....92

FIGURE 5-11:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=2.0 (aile rectangulaire).....93

FIGURE 5-12:Détermination des conditions de flottement par le procédé semi-graphique (aile rectangulaire).....94

FIGURE 5-13:Résultats de la résolution des équations Anglaises du flottement par le procédé itératif (aile rectangulaire).....95

FIGURE 5-14:Résultats de la résolution des équations Américaines du flottement (empennage horizontal)...104

FIGURE 5-15:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=0.5 (empennage).....105

FIGURE 5-16:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=1.0 (empennage).....106

FIGURE 5-17:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=2.0 (empennage).....107

FIGURE 5-18:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=3.0 (empennage).....108

FIGURE 5-19:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=4.0 (empennage).....109

FIGURE 5-20:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=6.0 (empennage).....110

FIGURE 5-21:Solutions des équations Anglaises du flottement par le procédé semi-graphique pour k=8.0 (empennage).....111

FIGURE 5-22:Résultats de la résolution des équations Anglaises du flottement par le procédé itératif (empennage horizontal).....112

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 4-1: Coordonnées des noeuds du maillage structural de l'aile rectangulaire.....70

TABLEAU 4-2: Type de chaque élément du maillage structural de l'aile rectangulaire.....71

TABLEAU 4-3: Coordonnées des noeuds du maillage structural de l'empennage horizontal.....74

TABLEAU 4-4: Type de chaque élément du maillage structural de l'empennage horizontal.....75

TABLEAU 5-1: Comparaison entre les fréquences naturelles du problème global et celles du problème réduit de l'aile rectangulaire.....78

TABLEAU 5-2: Comparaison entre le 1er mode naturel complet et le 1er mode naturel réduit de l'aile rectangulaire.....79

TABLEAU 5-3: Comparaison entre le 8ème mode naturel complet et le 6ème mode naturel réduit de l'aile rectangulaire.....80

TABLEAU 5-4: Comparaison entre les vitesses de flottement obtenues par les différentes méthodes de résolution pour l'aile rectangulaire.....96

TABLEAU 5-5: Comparaison entre les méthodes de résolution du point de vue "Explosivité" (aile rectangulaire).....97

TABLEAU 5-6: Comparaison entre les méthodes de résolution du point de vue temps de calcul (aile rectangulaire).....99

TABLEAU 5-7: Comparaison entre les fréquences naturelles du problème global et celles du problème réduit de l'empennage horizontal.....101

TABLEAU 5-8: Comparaison entre le 1er mode naturel complet et le 1er mode naturel réduit de l'empennage horizontal.....102

TABLEAU 5-9: Comparaison entre le 9ème mode naturel complet et le 6ème mode naturel réduit de l'empennage horizontal.....103

TABLEAU 5-10: Comparaison entre les méthodes de résolution du point de vue temps de calcul (empennage horizontal).....113

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

[A1] : matrice d'interpolation

[B] : matrice amortissement structurale globale

$[B_r]$: matrice dissipation réduite ou condensée

D : énergie de dissipation

I : matrice unité

[K] : matrice rigidité globale

$[K_r]$: matrice rigidité réduite ou condensée

L : pression aérodynamique nette

[M] : matrice masse globale

$[M_r]$: matrice masse réduite ou condensée

M_∞ : nombre de Mach de l'écoulement à l'infini amont

{P1} : vecteur des charges transversales concentrées

Q_i : $i^{ème}$ force aérodynamique généralisée

{Q} : vecteur des forces aérodynamiques généralisées

[Q] : matrice des coefficients d'influence aérodynamiques

S : surface du plan aérodynamique

[T] : matrice de transformation

T : énergie cinétique

{U} : vecteur des déplacements nodaux

V : vitesse de l'écoulement principal ou vitesse de vol

V_F : vitesse de flottement

X : variable d'espace dans la direction OX

Y : variable d'espace dans la direction OY

Z : variable d'espace dans la direction OZ

a : vitesse du son dans l'écoulement d'air à l'infini amont

b : longueur de référence (corde du profil)

g : facteur d'amortissement structural fictif

h : altitude de vol

i_c : nombre complexe égal à la racine carrée de (-1)

k : fréquence réduite ou paramètre de fréquence

l : fonction charge

n : nombre de colonnes de la matrice modale tronquée

p : nombre de degrés de liberté n'appartenant pas au plan (X-Y)

q : nombre de degrés de liberté appartenant au plan (X-Y)

q_i : $i^{ème}$ coordonnée généralisée

$\{q\}$: vecteur des déplacements généralisés

$\{\bar{q}\}$: vecteur des amplitudes complexes

r : nombre total de degrés de liberté de la structure

t : variable temps

$\{u\}$: vecteur des déplacements nodaux dans la direction X

$\{v\}$: vecteur des déplacements nodaux dans la direction Y

$\{w\}$: vecteur des déplacements nodaux dans la direction Z

$[\beta]$: matrice amortissement structural généralisée

$[\gamma]$: matrice rigidité généralisée

δZ : déplacement virtuel

δW : travail virtuel

ε : précision requise sur le calcul de la fréquence réduite

η : coefficient d'amortissement

λ : valeur propre complexe (formulation Anglaise)

$[\mu]$: matrice masse généralisée

$\{\xi\}$: vecteur des déflexions du plan aérodynamique

Πp : énergie potentielle

ρ_{al} : masse volumique de l'alliage d'aluminium utilisé

ρ_{∞} : masse volumique de l'air

$[\Phi_m]$: matrice modale

$[\Phi_{mt}]$: matrice modale tronquée

$\{\phi\}$: mode propre naturel de la structure

Ω : valeur propre complexe (formulation Américaine)

ω_N : fréquence naturelle de vibration

ω : fréquence circulaire des oscillations

∂ : opérateur de différentiation partielle

$\lceil \rfloor$: matrice diagonale

$[\ ]^T$: matrice transposée

$[\ ]^{-1}$: matrice inverse

INTRODUCTION

Les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si les structures, en particulier celles des avions, étaient parfaitement rigides. Hélas, elles ne le sont pas; il en résulte, en présence d'un écoulement, une interaction mutuelle entre les forces d'inertie, élastiques et aérodynamiques. L'aéroélasticité est la science consacrée à l'étude de cette interaction et à son influence sur la conception d'un avion. Le souci majeur des aéroélasticiens est de détécter ces phénomènes et de s'assurer qu'ils ne se produisent pas dans le domaine opérationnel de l'appareil.

Le flottement (en anglais FLUTTER) est probablement le plus complexe, et potentiellement le plus désastreux de tous les phénomènes aéroélastiques. Il se déclenche sans prévenir, avant qu'aucun indice n'ait permis au pilote de déceler l'approche de la vitesse critique. La rapidité avec laquelle s'amplifie la vibration varie selon le cas, mais souvent, elle est telle que la rupture survient avant que le pilote ait eu le temps de réduire la vitesse pour quitter le domaine d'instabilité. Dans ce cas les aéroélasticiens [1,2,3,4,5...] emploient le mot "explosif" pour donner une idée de la soudaineté du phénomène.

Le premier incident aérospatial dont la cause a été attribuée au flottement s'est produit sur un "Handley 0/400" en 1917 [6]. Les recherches menées, surtout depuis la seconde guerre mondiale, ont permis de mieux comprendre ce phénomène complexe resté longtemps obscur. Aujourd'hui, on le définit comme étant une autoexcitation dynamique d'une structure élastique, produite par des forces aérodynamiques.

Beaucoup de structures sont assujetties à ce type d'instabilité; nous citons les rotors d'hélicoptères, les turbomachines, les gratte-ciel, les ponts etc... . Cependant,

dans le présent travail, nous nous intéressons au flottement se produisant sur des structures d'avion uniquement.

La plus populaire, car trés instructive, façon d'introduire le sujet du flottement est une plaque plane plongée dans un écoulement stationnaire, sur laquelle les rigidités flexionnelle et torsionnelle sont idéalisées par des ressorts. PINES [4] utilisa ce système pour donner une description élémentaire, mais remarquable, sur la façon dont certains paramètres tels que le centre de gravité et le centre aérodynamique peuvent avoir un effet salutaire ou préjudiciable sur une classe de flottement connue sous le nom de "Flottement Binaire". Ce qui ressort de cet exemple c'est sa simplicité pédagogique; c'est pourquoi, la plaque plane a stimulé un intérêt universel dans les institutions académiques. ASHLEY et BISPLINGHOFF [3] y ont apporté une légère amélioration en prenant une aérodynamique quasi-stationnaire.

Il existe plusieurs types de flottement, nous citons:

- La divergence ou flottement à fréquence nulle.

- Le flottement de décrochage qui se produit lorsqu'il y a décollement de la couche limite, en particulier à un grand angle d'incidence.

- Le flottement des modes couplés (à ne pas confondre avec la résonance) dans lequel les fréquences des oscillations de deux ou plusieurs modes convergent vers une même valeur provoquant ainsi l'instabilité de la structure. Ce type de flottement est le plus fréquent [1], c'est pourquoi nous nous y intéressons particulièrement.

Dans le passé, la prévention contre le flottement reposait sur des règles empiriques; tout d'abord, on se concentrait uniquement sur le dimensionnement statique de l'avion [8]. Afin de se conformer aux réglementations aéroélastiques, les constructeurs effectuaient des contrôles rudimentaires. Ceux-ci ont été limités, la plupart du temps,

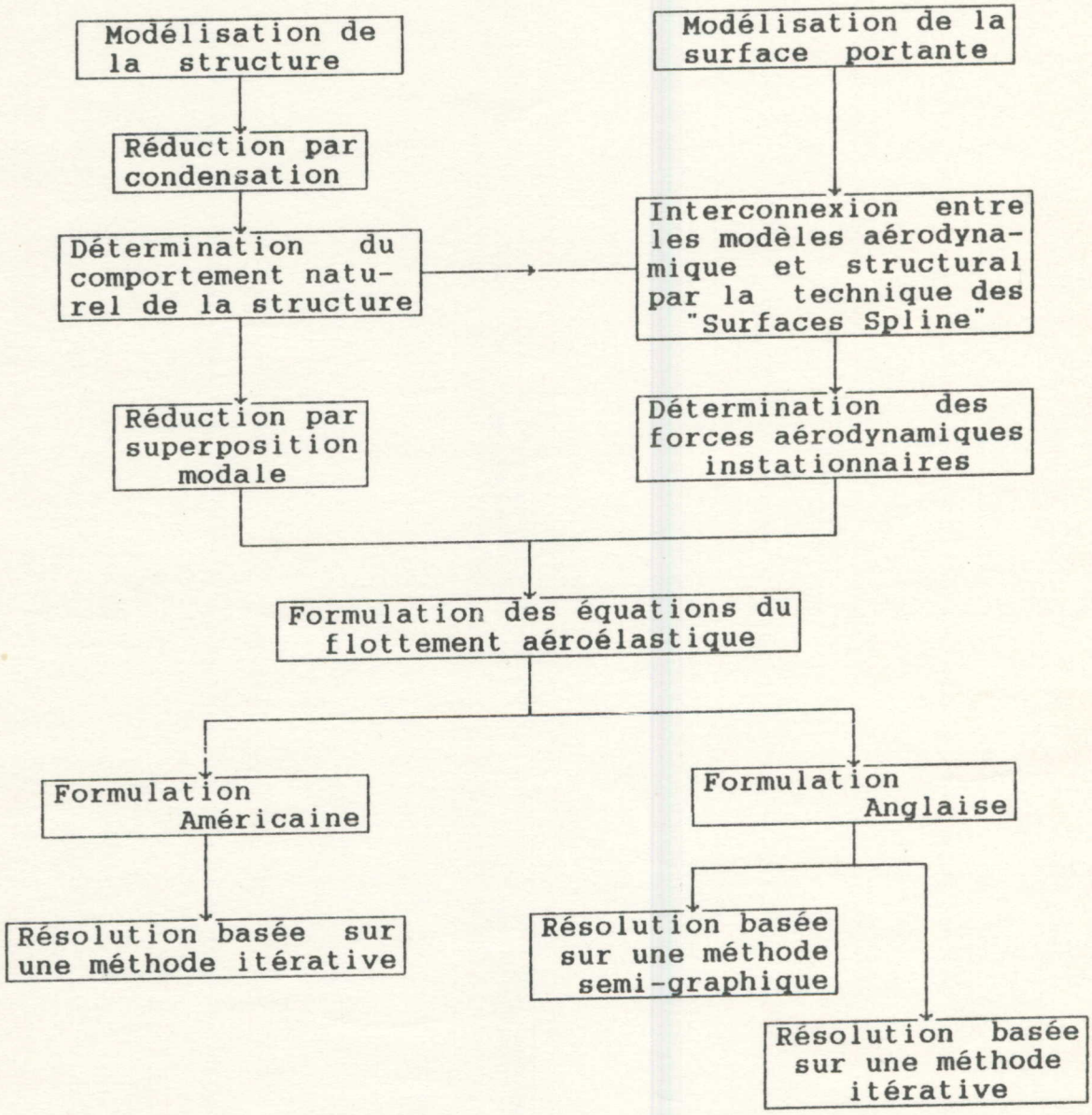
au flottement binaire, à l'idéalisation barre de la structure et parfois, à une représentation bidimensionnelle sous forme de section de profil. Si la vitesse de flottement s'avérait inférieure à celle requise, des corrections sur la masse et la rigidité étaient apportées conduisant généralement à des structures lourdes et trop rigides. Ces corrections devaient être validées par des tests de résonance au sol et de flottement en vol et ces derniers entrainaient souvent à davantage de modifications au niveau de la conception ou bien à des restrictions des performances de l'appareil. Tout ceci prouve les limitations de ces procédés.

Une autre technique qui permet une analyse de flottement plus complète est de construire des modèles de la structure à une échelle réduite et d'utiliser la soufflerie [9, 10]. Malheureusement, ces modèles sont trop onéreux à réaliser puisqu'ils doivent être une réplique reproduisant aussi fidèlement que possible, non seulement la géométrie externe de l'avion, mais également la distribution de masse et de rigidité. Pour ces raisons plutôt économiques que techniques, les essais expérimentaux en soufflerie ne sont que trés rarement utilisés.

L'analyse théorique du problème de flottement a réalisé un grand pas vers l'avant depuis l'avènement de machines de calcul trés rapides ayant des capacités de mémoire trés importantes, et le developpement de techniques d'analyse efficaces et d'algorithmes pouvant manipuler de grosses matrices [2, 11]. Il devint alors évident que l'on puisse obtenir des solutions de flottement économiques pour des types de structures trés complexes et de grandes dimensions tout en ayant une trés bonne précision sur les résultats. En effet, d'avantage de précieuses informations sur les distributions de masse et de rigidité, sur les modes d'oscillations et sur les charges aérodynamiques peuvent être obtenues par des méthodes d'éléments finis et de calculs aérodynamiques. Ainsi, le rêve de concevoir des structures optimales et qui ne "flottent pas" peut devenir réalité.

Depuis l'arrivée de l'ère de l'ordinateur les aéroélasticiens ont pu concrétiser des méthodes plus ou moins performantes pour la résolution des équations du flottement. La méthode des éléments finis [13, 18] a été utilisée par la majorité des chercheurs pour discrétiser la structure. Des modèles aérodynamiques ont été développés pour calculer les forces aérodynamiques. Les spécialistes [1-12, 21-27, 29-41] utilisent jusqu'à présent la théorie de la surface portante. Cependant ils ne cessent de tenter d'améliorer la théorie aérodynamique en cherchant des modèles encore plus efficaces [22-24]. Les aéroélasticiens se sont appliqués et s'appliquent toujours à trouver des moyens efficaces pour résoudre ces équations. J.R. RICHARDSON [2] réalise en 1965 une étude de flottement. Il présente des équations écrites selon les formulations Américaine et Anglaise et ensuite une formulation qu'il dit nouvelle et qui traite les problèmes de flottement avec n'importe quel nombre de degrés de liberté et avec des forces aérodynamiques calculées dans un écoulement compressible. Il explique par la suite certaines anomalies qui risquent de se produire sur les courbes de résultats obtenus par la résolution des équations du flottement tel que le phénomène de "cross". A.J.LAWRENCE et P.JACKSON [5] ont résolu quant à eux les équations du flottement par des méthodes différentes selon les formulations citées ci dessus et une autre dite de Richardson. Ils ont par la suite fait une étude comparative et exhibent des résultats de flottement pour une structure qu'ils ont omis de présenter. R.H.MACNEAL [32] présente en 1972 les premières performances du logiciel "NASTRAN" développé par les chercheurs de la "National Aeronautics and Space Administration" propre à l'étude des problèmes aéroélastiques. Quelques années plus tard, un autre rapport est publié par P.W.RODDEN et R.L. HARDER sur les améliorations et les compléments apportés à ce même logiciel concernant la résolution des équations du flottement et d'autre phénomènes aéroélastiques. Actuellement beaucoup de chercheurs [39, 40, 41...] se sont penchés sur le problème et tentent, chacun à sa manière, de contribuer à l'amélioration des méthodes de résolution des équations du flottement.

Le but de notre présent travail est l'étude théorique du flottement aéroélastique. En effet la tâche qui nous a été attribuée est de résoudre numériquement, les équations régissant ce phénomène. Le logiciel que nous élaborerons sur micro-ordinateur sera basé sur deux formulations différentes. Dans ce qui suit, nous présentons brièvement, à l'aide d'un schéma synoptique, l'oganisation générale de notre travail:



Présentation général du travail

Il sera cependant difficile de rédiger en suivant pas à pas le schéma que nous venons de présenter sans altérer la simplicité à la compréhension de notre mémoire. Celui-ci sera donc présenté comme suit:

- Dans le premier chapitre, nous choisirons un modèle mathématique et nous établirons les équations régissant le mouvement vibratoire libre non amorti tout en réduisant artificiellement la taille du système, grâce à la condensation de Guyan. Nous déterminerons alors le comportement naturel de la structure, autrement dit nous calculerons les valeurs et vecteurs propres naturels du système libre non amorti. Il nous sera alors possible d'utiliser la superposition modale, non pas dans le but de découpler les équations, mais uniquement pour réduire encore plus la taille du système afin que la résolution puisse s'effectuer sur micro-ordinateur. Nous utiliserons ensuite le principe de Lagrange dans le but d'établir les équations régissant le mouvement vibratoire aéroélastique en fonction des forces aérodynamiques instationnaires.

- Dans le deuxième chapitre, nous déterminerons d'abord les déformations de la surface portante à partir des déplacements naturels de la structure originale en utilisant une technique d'interpolation basée sur les "surfaces splines". Nous nous appliquerons par la suite à établir les grandes lignes de la détermination des forces aérodynamiques instationnaires grâce à la théorie de la surface portante.

- Le troisième chapitre sera consacré à l'écriture des équations du flottement sous deux formes différentes:

1 - la formulation AMERICAINE
2 - la formulation ANGLAISE.

Avant d'entreprendre la résolution de ces équations nous élaborerons des programmes utilitaires nécessaires aux calculs des valeurs et vecteurs propres de matrices quelconques réelles ou complexes. Nous développerons par la

suite des algorithmes et des programmes numériques réalisant la résolution des équations du flottement aéroélastique pour chaque formulation. Nous y apporterons également une solution au problème crucial rencontré lors de la résolution de ces équations: le temps de calcul sur machine.

- Nous décrirons dans le quatrième chapitre les deux structures d'avion que nous prendrons comme exemples pour y appliquer le logiciel que nous aurons développé. Ce sont une aile rectangulaire et un empennage horizontal.

- Le cinquième chapitre sera consacré à la présentation des résultats obtenus en appliquant notre code numérique à ces deux strustures. Une analyse de résultats sera faite et nous permettra de comparer entre les différentes méthodes de résolution.

- Enfin nous conclurons sur le travail que nous aurons réalisé.

CHAPITRE 1

FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

1.1 INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, consacré à la formulation mathématique des équations régissant le mouvement vibratoire aéroélastique , nous appliquerons les équations de Lagrange et le concept des coordonnées généralisées. Notre structure sera modélisée par la méthode des éléments finis, largement connue et utilisée dans le domaine des vibrations. Nous calculerons les fréquences et les modes naturels de la structure.

L'étude bibliographique révèle une formulation générale des équations du mouvement vibratoire aéroélastique sous la forme :

$$[\ M\ ]\{\ \ddot{U}\ \} + [\ B\ ]\{\ \dot{U}\ \} + [\ K\ ]\{\ U\ \} = \{\ Q\ \} \qquad (1\text{-}1a)$$

où [M], [B] et [K] sont respectivement les matrices masse, dissipation et rigidité; {U} et {Q} sont respectivement les vecteurs déplacements nodaux et forces aérodynamiques appliquées à la structure. Il est clair qu'afin d'obtenir une bonne approximation des déplacements, la structure devra être discrétisée selon un maillage assez fin. Il en résulte un système d'équations de grande dimension dont les inconvénients sont bien connus. C'est pourquoi nous ne nous contenterons pas d'établir l'équation ci-dessus mais, nous nous appliquerons surtout à réduire artificiellement la taille du système en appliquant la technique de condensation dynamique de Guyan et la théorie de la superposition modale.

1.2 REDUCTION DU PROBLEME PAR LA TECHNIQUE DE CONDENSATION DE GUYAN :

Nous procédons, à présent, au cas particulier du flottement des surfaces portantes d'un avion. Soit (OX,OY,OZ) un repère orthogonal. Si les axes X et Y définissent le plan de la surface portante et Z, l'axe sortant de ce plan, la structure peut raisonnablement être supposée vibrer, principalement, dans la direction de l'axe Z car les modes prépondérants sont des flexions et des torsions suivant cette direction. Cette propriété résulte de la philosophie même de la conception des structures aéronautiques qui sont plus rigides dans les directions X et Y. Ceci nous suggère de ne garder que les degrés de liberté transverses (déplacements paralèlles à l'axe Z) qui seront considérés comme les degrés de liberté principaux. Ceux, se produisant dans les directions X et Y seront supposés négligeables, nous tâcherons donc de les exclure de notre analyse.

La condensation de Guyan [13] est justement une technique permettant de réduire la taille du problème en éliminant certains degrés de liberté. Elle s'effectue en répartissant l'ensemble des degrés de liberté de la structure en deux sous-ensembles:

a- le sous-ensemble des p degrés de liberté dynamiques ou principaux (maîtres), qui vont servir à caractériser, seuls, le comportement dynamique de la structure.

b- le sous-ensemble complémentaire des q degrés de liberté secondaires (ou esclaves).

Le principal avantage de la méthode est qu'elle réduit la taille du système en altérant le moins possible le spectre basse fréquence du système initial [13]. Elle est également relativement simple à programmer, comparée à d'autres méthodes de condensation.

Afin de trouver la relation entre les degrés de liberté n'appartenant pas au plan (X-Y) et ceux appartenant à ce plan, nous utilisons les équations statiques forces-déplacements :

$$[K]\ \{U\} = \{C\} \qquad (1\text{-}1)$$

où [K] est la matrice de rigidité d'ordre r x r

{C} est le vecteur des charges aux noeuds, d'ordre r

et $\{U\} \equiv \{ U(X,Y,Z,t) \}$ est le vecteur des déplacements nodaux; il dépend des coordonnées cartésiennes spatiales X, Y et Z des noeuds du maillage par éléments finis et du temps t. {U} décrit les r libértés discrètes du système.

En supposant qu'aucune charge n'est appliquée aux degrés de liberté du plan de la structure [8] et à la suite d'une séparation et d'un réarrangement des degrés de liberté, l'équation (1-1) devient [13]:

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{dd}] & [K_{d\sigma}] \\ \hline [K_{\sigma d}] & [K_{\sigma\sigma}] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{w\} \\ \hline \begin{Bmatrix}\{u\} \\ \{v\}\end{Bmatrix} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{P\} \\ \hline \{0\} \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}2)$$

$[K_{dd}]$ d'ordre p x p

$[K_{d\sigma}]$ d'ordre p x q

$[K_{\sigma d}]$ d'ordre q x p ; $[K_{\sigma d}] = [K_{d\sigma}]^T$

$[K_{\sigma\sigma}]$ d'ordre q x q

$\{w\}$ vecteur des p déplacements nodaux dans la direction Z; déplacements n'appartenant pas au plan des noeuds de la structure.

$\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\end{Bmatrix}$ vecteur des q déplacements nodaux dans les directions X et Y (pas nécessairement séparés); déplacements compris dans le plan des noeuds de la structure .

$\{P\}$ vecteur charge d'ordre p

$r = p + q$

p nombre de degrés de liberté n'appartenant pas au plan (X-Y)

q nombre de degrés de liberté appartenant au plan (X-Y)

q peut être égal au double de p. Cependant, ceci n'est pas toujours valable et dépendra du nombre et des directions des conditions aux limites imposées à la structure .

A partir de la partie inférieure de l'équation (1-2), nous obtenons la relation de dépendance linéaire entre les degrés de liberté, suivante :

$$\left[K_{sd}\right]\{w\} + \left[K_{ss}\right]\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\end{Bmatrix} = \{0\} \qquad (1\text{-}3)$$

conduisant à:

$$\begin{Bmatrix}\{u\}\\\{v\}\end{Bmatrix} = -\left[K_{ss}\right]^{-1}\left[K_{sd}\right]\{w\} \qquad (1\text{-}4)$$

L'équation (1-4) peut être utilisée pour conduire à la relation de transformation entre l'ensemble des déplacements des noeuds appartenant au plan de la structure et ceux n'y appartenant pas:

$$\{ U \} \equiv \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{ w \} \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -[K_{ss}]^{-1}[K_{sd}] \\ \hline [1] \end{bmatrix} \{ w \} \equiv [T] \{ w \} \qquad (1\text{-}5)$$

$[1]$ matrice identité d'ordre p x p

$[T]$ matrice de transformation d'ordre r x p

1.3 APPLICATION DE LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE:

Tout mouvement vibratoire général d'un système élastique, ayant de petites déformations à partir d'une configuration d'équilibre, peut être exprimé comme une combinaison linéaire de ces différents modes naturels [13, 15]. Ceci est le principe de la superposition modale dont le but fondamental est de créer un nouvel ensemble d'équations découplées. Pour le cas spécifique du flottement, cet avantage ne peut être exploité car la transformation du problème en un ensemble de systèmes découplés, à un degré de liberté, ne peut être facilement appliquée à cause de la présence de la matrice aérodynamique (chapitre 2). Cependant, nous bénéficierons du fait que nous réduisons artificiellement la taille du système et ainsi, le nombre d'équations à résoudre .

Le champs des déplacements transverses de la structure est donc donné par :

$$\{w(X,Y,Z,t)\} = b \sum_{i=1}^{p} \{\phi(X,Y,Z)\}_{m_i} q_i(t) \qquad (1\text{-}6)$$

Nous définissons ainsi une approximation des déplacements en séparant les variables d'espace et de temps. L'équation (1-6) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{Bmatrix} = b \left[\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_1}, \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_2}, \ldots, \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_i} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_p \end{Bmatrix}$$

ou plus simplement:

$$\{w\ (X,Y,Z,t)\ \} = b \left[\Phi_m(X,Y,Z)\right] \{q(t)\} \qquad (1\text{-}7)$$

avec:

b : longueur de référence de la surface portante

$\{\phi\}_{m_i}$: $i^{ème}$ mode propre ou forme propre d'oscillation de la structure n'appartenant pas au plan (X-Y)

$\left[\Phi_m\right]$: matrice modale, d'ordre p x p, dont les colonnes sont les vecteurs propres naturels $\{\phi\}_{m_i}$ avec i=1...p

$\{q\}$: vecteur des amplitudes modales, d'ordre p (à ne pas confondre avec le nombre q des degrés de liberté appartenant au plan (X-Y) de la structure).

La multiplication du second membre de l'équation (1-6) ou (1-7) par la longueur de référence b n'a été faite que dans le but de rendre le vecteur {q} adimensionnel. Il est à noter que les amplitudes des composantes de ce vecteur expriment la contribution de chaque vecteur propre dans le mouvement vibratoire .

Pour des systèmes de grand ordre, tels que ceux correspondant à des structures d'avion, il n'est pas nécessaire, ni pratique de retenir tous les modes propres [8, 17]. La matrice modale peut être tronquée et le nombre limité de vecteurs propres, correspondant aux fréquences naturelles les plus basses, peut approximer la structure vibrante avec une précision suffisante [1, 15]. Ceci conduit à reformuler l'équation (1-7) sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{Bmatrix} = b \left[\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_1}, \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_2}, \ldots, \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_{m_n} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}8)$$

avec $p >> n$

ou encore:

$$\{ w \} = b \sum_{i=1}^{n} \{ \phi \}_{m_i} q_i = b \left[\Phi_{mt} \right] \{ q \} \qquad (1\text{-}9)$$

où $\left[\Phi_{mt} \right]$ et $\{ q \}$ sont respectivement d'ordre p x n et n car uniquement les n premiers modes naturels de vibration sont pris en considération.

$\left[\Phi_{mt} \right]$ est à présent une matrice modale tronquée

Contrairement aux composantes de { U } et { w } qui ont un sens physique, les composantes de { q } sont abstraites. Elles sont alors appelées déplacements ou coordonnées généralisés .

1.4 FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT PAR LA METHODE DE LAGRANGE

Afin de formuler mathématiquement les équations du flottement, nous utilisons le principe de Lagrange qui permet d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation.

Pour un système discret non conservatif d'ordre r, les équations différentielles de Lagrange prennent la forme [13]:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i=1,r) \qquad (1\text{-}10)$$

q_i : $i^{ème}$ coordonnée généralisée

Q_i : $i^{ème}$ force aérodynamique généralisée

T, Πp et D sont respectivement les énergies cinétique, potentielle et de dissipation du système.

Pour des structures modélisées par la methode des éléments finis, avec un nombre fini, r, de degrés de liberté, les différents termes d'énergie peuvent être exprimés par [13, 18]:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\dot{U}_i M_{ij}\dot{U}_j = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T [M]\{\dot{U}\} \\ \Pi p &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} U_i K_{ij} U_j = \frac{1}{2}\{U\}^T [K]\{U\} \\ D &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\dot{U}_i B_{ij}\dot{U}_j = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T [B]\{\dot{U}\} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}11)$$

où [M] est la matrice masse ou inertie d'ordre r x r

[K] est la matrice rigidité d'ordre r x r

[B] est la matrice amortissement structural d'ordre r x r

Grâce à la matrice de transformation [T] obtenue dans l'équation (1-5), les termes d'énergie peuvent être réécrits comme:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T [T]^T [M] [T] \{\dot{w}\} \\ \Pi p &= \frac{1}{2}\{w\}^T [T]^T [K] [T] \{w\} \\ D &= \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T [T]^T [B] [T] \{\dot{w}\} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}12)$$

posons :

$$\left.\begin{aligned} [M_r] &= [T]^T [M] [T] \\ [K_r] &= [T]^T [K] [T] \\ [B_r] &= [T]^T [B] [T] \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}13)$$

$[M_r]$, $[K_r]$, $[B_r]$ étant respectivement les matrices masse, rigidité et dissipation réduites ou condensées d'ordre p x p .

Les nouvelles équations des énergies cinétique, potentielle et de dissipation deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T [M_r] \{\dot{w}\} \\ \Pi p &= \frac{1}{2}\{w\}^T [K_r] \{w\} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}14a)$$

$$D = \frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T [B_r] \{\dot{w}\} \qquad (1\text{-}14b)$$

Puisque nous n'avons pris en considération que les vibrations n'appartenant pas au plan (X-Y), les modes naturels sont obtenus par la résolution du problème réduit des vibrations libres non amorties, obtenu en introduisant les équations (1-14a) dans les équations de Lagrange pour un système libre conservatif. En postulant pour une solution harmonique, nous obtenons:

$$\left[[K_r] - (\omega_N)^2 [M_r]\right] \{\phi\}_m = \{0\} \qquad (1\text{-}15)$$

$(\omega_N)^2$: valeur propre du problème exprimé par l'équation (1-15)

ω_N : fréquence naturelle de vibration

Les matrices $[M_r]$ et $[K_r]$ étant réelles et symétriques, notre logiciel résout le problème aux valeurs propres exprimé par l'équation (1-15) en utilisant la plus compacte et certainement la plus élégante des méthodes appropriées à ce cas, c'est la méthode de Jacobi [19, 20] qui, de plus, fournit les valeurs et les vecteurs propres réels avec une précision appréciable. Il faut cependant admettre qu'elle est relativement lente comparée à la méthode de Householder [20].

A présent que les modes naturels $\{\phi\}_m$ de la structure sont déterminés nous pouvons appliquer le principe de la superposition modale dont nous avons précédemment parlé.

En introduisant les équations (1-9) dans le système (1-14) nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} b^2 \{\dot{q}\}^T [\Phi_{mt}]^T [M_r] [\Phi_{mt}] \{\dot{q}\} \\ \Pi p &= \frac{1}{2} b^2 \{q\}^T [\Phi_{mt}]^T [K_r] [\Phi_{mt}] \{q\} \\ D &= \frac{1}{2} b^2 \{\dot{q}\}^T [\Phi_{mt}]^T [B_r] [\Phi_{mt}] \{\dot{q}\} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}16)$$

Nous pouvons facilement montrer que les vecteurs propres sont orthogonaux par rapport aux matrices masse et rigidité réduites (voir Annexe A), par conséquent:

$$[\Phi_{mt}]^T [M_r] [\Phi_{mt}] = [\mu] \qquad (1\text{-}17a)$$

$$[\Phi_{mt}]^T [K_r] [\Phi_{mt}] = [\gamma] \qquad (1\text{-}17b)$$

où $[\mu]$ est la matrice diagonale des masses généralisées d'ordre n x n.

$[\gamma]$ est la matrice diagonale des rigidités généralisées d'ordre n x n.

posons:

$$[\beta] = [\bar{\Phi}_{mt}]^T [B_r] [\bar{\Phi}_{mt}] \qquad (1\text{-}17c)$$

La matrice β qui représente l'amortissement structural n'est en général pas diagonale [15], cependant la répartition des forces de dissipation dans la structure est souvent mal connue, c'est alors qu'intervient l'hypothèse de Basile qui considère que β est diagonale pour des structures faiblement dissipatives [13, 15, 17]; quant à nous, nous ne prenons pas compte de cette hypothèse à ce niveau afin de préserver la généralité des équations que nous obtenons.

Les expressions des différents termes d'énergie deviennent:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} b^2 \{\dot{q}\}^T [\mu] \{\dot{q}\} \\ \Pi_p &= \frac{1}{2} b^2 \{q\}^T [\gamma] \{q\} \\ D &= \frac{1}{2} b^2 \{\dot{q}\}^T [\beta] \{\dot{q}\} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}18)$$

L'introduction de ces dernières expressions dans l'équation de Lagrange nous conduit à:

$$\left(\left[\mu \right] \{\ddot{q}\} + \left[\beta \right] \{\dot{q}\} + \left[\gamma \right] \{q\} \right) b^2 = \{Q\} \qquad (1\text{-}19)$$

L'équation (1-19), dans laquelle {Q} est le vecteur des forces aérodynamiques généralisées, représente la formulation générale des vibrations aéroélastiques se produisant sur une structure d'avion ou autre structure en déplacement dans un écoulement d'air.

Les vecteurs propres $\{\phi\}_{mi}$ peuvent éventuellement être normalisés par rapport à la matrice masse (voir annexe B), ce qui pratiquement rend l'équation (1-19) plus simple à manier puisque nous l'obtenons sous la forme :

$$\left(\left[1 \right] \{\ddot{q}\} + \left[\beta \right] \{\dot{q}\} + \left[\omega_N^2 \right] \{q\} \right) b^2 = \{Q\} \qquad (1\text{-}20)$$

$\left[1 \right]$ matrice identité; dans ce contexte, elle est d'ordre n x n

$\left[\omega_N^2 \right]$ matrice spectrale; matrice diagonale des carrés des fréquences naturelles ou des valeurs propres; ordre n x n

Nous remarquons que dans cette dernière équation, les termes de la diagonale de la matrice β sont divisés par les masses généralisées correspondantes. Nous gardons cependant la même notation pour des raisons de commodité.

2.5 CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons d'abord réduit la taille des matrices manipulées en éliminant les degrés de liberté appartenant au plan de la structure sous investigation. Cette première réduction a lieu grâce à la technique de condensation statique de Guyan. La taille des matrices est alors réduite, approximativement, au tiers de la taille initiale.

Nous avons par la suite calculé les fréquences et les modes naturels de la structure en utilisant la méthode de Jacobi.

Nous réalisons un changement de base grâce à la représentation modale. Cette approximation, souvent utilisée dans le domaine des vibrations, permet en général de découpler les équations du mouvement. Cependant, dans le cas des équations régissant un mouvement aéroélastique, le découplage n'est pas possible à cause de la présence de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques. Elle permet quand même de réduire le nombre d'équations à résoudre en tronquant la matrice modale.

Enfin, une normalisation par rapport à la matrice masse réduite est réalisée permettant l'écriture des équations du mouvement vibratoire, par la méthode de Lagrange, en fonction des matrices masse et rigidité généralisées et de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques généralisés que nous allons déterminer dans le chapitre 2.

CHAPITRE 2

CALCUL DES FORCES AERODYNAMIQUES GENERALISEES

2.1 INTRODUCTION:

L'aile vibrant dans un écoulement à vitesse V autour d'une position d'équilibre se voit soumise aux forces aérodynamiques suivantes [21, 25]:

- stationnaires classiques ce sont:

  a - la portance

  b - la trainée

- instationnaires, dépendant de la fréquence et de l'amplitude du mouvement.

Dans ce chapitre, il est traité du calcul de ces forces aérodynamiques instationnaires en subsonique sur des structures vibrant en régime sinusoïdal. Il n'est pas envisagé dans ce cadre, de faire la théorie d'un écoulement instationnaire autour d'une voilure. Nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes du raisonnement qui permet d'obtenir les forces en question.

2.2 HYPOTHESES:

Pour établir les équations des forces aérodynamiques instationnaires, des hypothèses sont adoptées. Elles sont relatives à l'écoulement de l'air d'une part, au mouvement du profil et à sa forme d'autre part. Ce sont les suivantes [6,22, 24]:

1 - La voilure est plongée dans un écoulement qui, à l'infini amont, est défini par une vitesse V (suivant OX) et un nombre de mach M.

2 - Le profil subit des oscillations harmoniques.

3 - Les variations de la vitesse de l'air au voisinage de la voilure sont suffisamment faibles devant V pour que la théorie des petites perturbations soit appliquable.

4 - L'écoulement est supposé irrotationnel, il existe donc des potentiels de vitesse et d'accélération [6].

5 - L'air est considéré comme gaz parfait.

6 - L'écoulement est isentropique.

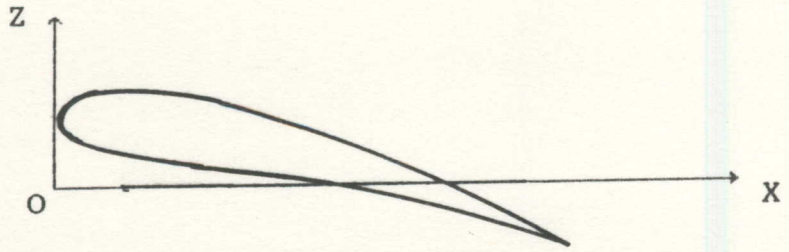
2.3 CONSEQUENCES DIRECTES DES HYPOTHESES:

Des conséquences directes découlent des hypothèses prises dont, les suivantes :

1 - La théorie des petites perturbations permet de linéariser les équations régissant l'écoulement de l'air et donc, tel que le montre la figure 2-1, de séparer le problème en [24]:

   a - un problème d'épaisseur déterminé par la loi d'épaisseur du profil.

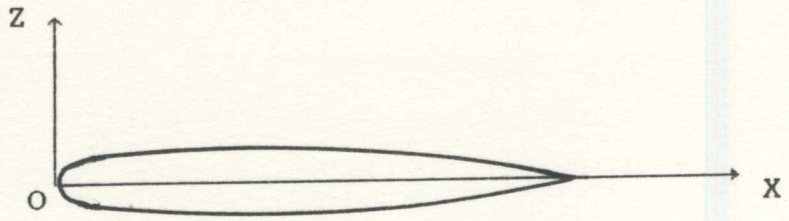
   b - un problème portant déterminé par la forme du squelette du profil. Seul ce problème nous concerne.



Profil réel

Figure 2.1a: Problème réel

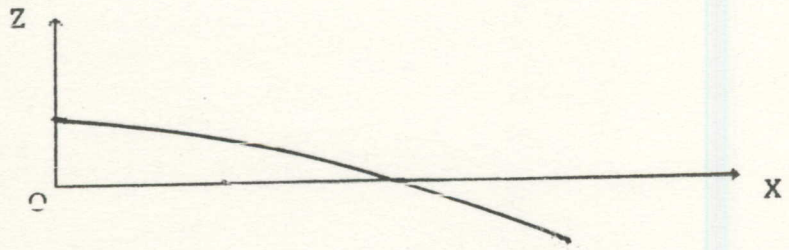
≡



Profil symétrique

Figure 2.1b: Problème d'épaisseur

+



Cambrure du profil

Figure 2.1c: Problème portant

Figure 2-1 : Séparation du problème réel d'un profil en un problème d'épaisseur et un problème portant

2- la théorie des petites perturbations permet également de séparer le problème portant en un problème stationnaire et un problème instationnaire.

Pour l'étude du flottement qui ne concerne que les mouvements autour d'une position moyenne, l'étude peut se limiter au calcul de la partie instationnaire qui est indépendante de la partie stationnaire [21].

Dans ces conditions, les potentielles de vitesse et d'accélération ne dépendent plus de la cambrure de la voilure mais seulement de sa forme en plan, c'est-à-dire la projection de la voilure sur le plan XOY tel que le montre la figure 2-2

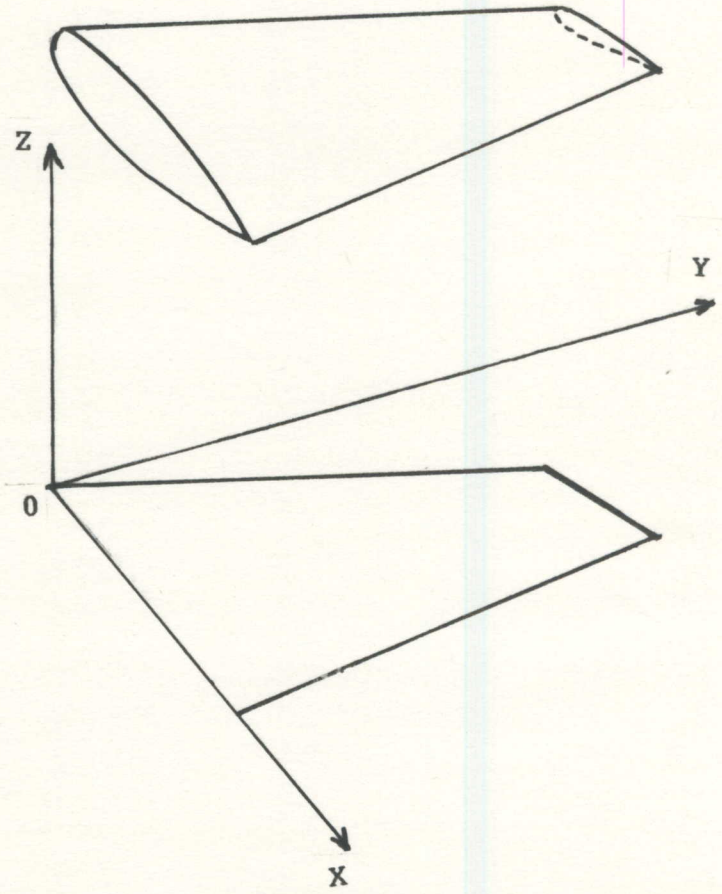


Figure 2-2 : Projection de la voilure sur le plan XOY

2.4 INTERCONNEXION ENTRE LES NOEUDS AERODYNAMIQUES ET STRUCTURAUX:

une fois les modes naturels de la structure déterminés, il est important de connaitre les déplacements aux noeuds de la surface portante dont le maillage est, en général, différent de celui de la structure originale. La figure 2-3 illustre la différence entre les noeuds aérodynamiques et les noeuds structuraux.

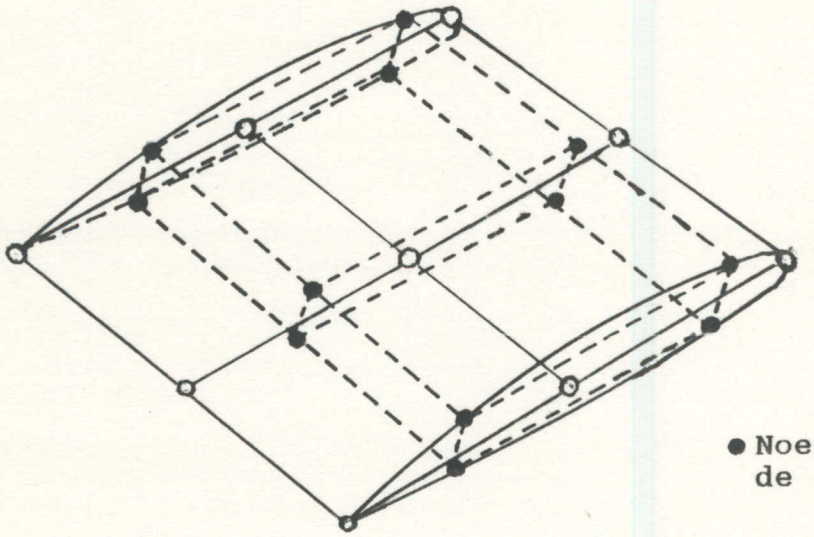


Figure 2-3: Représentation schématique d'un maillage structural et d'un maillage aérodynamique.

L'un des aspects essentiels de l'analyse aéroélastique moderne est justement l'interface aérodynamique/structure utilisant conjointement une méthode aérodynamique de la surface portante et une méthode d'analyse structurale. Sur ce sujet HARDER et DESMARAIS [26] ont pu ingénieusement résoudre

ce problème en utilisant une méthode mathématique dite des "Surfaces Splines" et qui est à la base d'une interpolation bidimentionnelle. Une analyse mathématique est développée dans l'annexe C.

Les déplacements ϕ_{mi} des noeuds de coordonnées $(X_i, Y_i)_s$ de la structure étant à présent connus, la résolution du système d'équations (C-12a) permettra de déterminer les coefficients a_o, a_1, a_2 ainsi que le vecteur des charges concentrées $\{P1\}_i$ ayant provoqué ces déflexions. Ceci se traduit par l'équation (C-12b) appliquée aux noeuds du maillage structural:

$$\left[A1 \right]_s \left\{ P1 \right\}_i = \left\{ \phi \right\}_{mi} \qquad i = 1...n \qquad (2\text{-}1)$$

$[A1]_s$ étant la matrice d'interpolation écrite en fonction des coordonnées des noeuds du maillage structural.

$\{P1\}_i$ étant le vecteur charge provoquant la déformation $\{\phi\}_{mi}$ de la structure.

La résolution des n systèmes (2-1) permet de déterminer les n vecteurs $\{P1\}_i$. Il devient alors possible de calculer les déflexions aux noeuds aérodynamiques $(X_i, Y_i)_a$ par:

$$\left\{ \xi \right\}_i = \left[A1 \right]_a \left\{ P1 \right\}_i \qquad i = 1...n \qquad (2\text{-}2)$$

$[A1]_a$ étant la matrice d'interpolation écrite en fonction des coordonnées des noeuds du maillage aérodynamique.

$\{\xi\}_i$ est le vecteur des déflexions de la surface portante provoquées par le vecteur charge $\{P1\}_i$.

La résolution des n systèmes d'équations (2-2) détermine l'ensemble des n vecteurs $\{\xi\}$.

L'interconnexion entre les déplacements des noeuds stucturaux et des noeuds aérodynamiques est donc basée sur une double interpolation par les "Surfaces Splines". Nous élaborons un programme de résolution des systèmes (2-1) et (2-2) basé sur la méthode de Gauss-Jordan [19].

2.5 FORCES AERODYNAMIQUES GENERALISEES - MATRICE DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE AERODYNAMIQUES GENERALISES:

Contrairement aux matrices masse et rigidité qui sont réelles symétriques, creuses ou en bande, ce qui les rend plus faciles à manier (numériquement), la matrice aérodynamique est complexe à cause du déphasage entre déplacements et forces, non symétrique et pleine. Dû à ce fait, pré- et post-multiplier par la matrice modale (comme il a été fait pour les matrices masse et rigidité dans le chapitre 1) devient trés couteux du point de vue stockage et manipulation. Ces forces sont alors obtenues directement comme des forces généralisées qui par définition peuvent être évaluées à partir de l'équation du travail virtuel [14, 23].

Selon le principe de la superposition modale, la structure est supposée se déplacer selon une combinaison linéaire d'un nombre limité de modes propres. seuls les degrés de liberté principaux (dans la direction Z) sont pris en considération.

Le déplacement Z(X,Y,t) d'un point de coordonnées (X,Y) de la surface portante au temps t est alors donné par la relation :

$$Z(X,Y,t) = b \sum_{i=1}^{n} \xi_i(X,Y)\, q_i(t) \qquad (2\text{-}3)$$

$Z(X,Y,t)$: déplacement hors du plan d'un point de coordonées (X,Y) du plan aérodynamique

b : longueur de référence -la corde du profil par exemple-

$\xi_i(X,Y)$: déflexion du plan aérodynamique au point (X,Y) due au $i^{ème}$ mode de la structure

n : nombre de modes propres considérés

$q_i(t)$: $i^{ème}$ coordonnée généralisée.

La forme dans laquelle les forces aérodynamiques instationnaires "théoriques" peuvent être évaluées, n'est valable que dans le cas de l'écoulement autour d'un profil ayant des oscillations harmoniques [23], nous imposons donc que :

$$q_i(t) = \bar{q}_i(\omega)\, e^{i_c\, \omega t} \qquad i=1,\ldots,n \qquad (2\text{-}4)$$

$\bar{q}_i(\omega)$: $i^{ème}$ amplitude complexe

ω : fréquence circulaire de l'oscillation harmonique (réelle).

i_c : nombre complexe égal à la racine carrée de (-1)

Si au temps t, la surface portante possède un déplacement virtuel δZ, la variation δW du travail virtuel réalisé par les forces aérodynamiques appliquées est donnée par [22, 23]:

$$\delta W = \iint_S L(X,Y,t) \cdot \delta Z(X,Y)\, dX\, dY \qquad (2\text{-}5)$$

où

δW : travail virtuel

S : surface du plan aérodynamique

$L(X,Y,t)$: pression aérodynamique nette agissant au temps t en un point (X,Y) d'un élément de surface dX.dY du plan; distribution de charge aérodynamique

$\delta Z(X,Y)$: déplacement virtuel

dX.dY : élément de surface - surface différentielle -

A partir de l'équation (2-3), le déplacement virtuel peut être exprimé par :

$$\delta Z(X,Y) = b \sum_{i=1}^{n} \xi_i(X,Y)\, \delta q_i \qquad (2\text{-}6)$$

En combinant les équations (2-5) et (2-6) nous obtenons l'expression suivante du travail virtuel :

$$\delta W = b \sum_{i=1}^{n} \delta q_i \iint_S L(X,Y,t) \cdot \xi_i(X,Y)\, dX.dY \qquad (2\text{-}7)$$

Dans un déplacement virtuel infinitésimal, le travail virtuel peut être alternativement exprimé en termes de forces et de déplacements généralisés comme:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\, \delta q_i \qquad (2\text{-}8)$$

$Q_i(t)$: force aérodynamique généralisée dans le $i^{ème}$ mode d'oscillation au temps t.

A partir des équations (2-7) et (2-8) et à la suite d'une identification, nous établissons la relation donnant la force généralisée :

$$Q_i(t) = b \iint_S L(X,Y,t)\, \xi_i(X,Y)\, dX.dY \qquad i=1,\ldots,n \tag{2-9}$$

D'aprés la référence [22], la force de pression normale par unité de surface, appelée également charge aérodynamique au point (X,Y) du plan, au temps t, dans la $j^{ème}$ oscillation harmonique $b\,\xi_j(X,Y)\,e^{i\omega t}$ est définie comme :

$$L_j(X,Y,t) = \rho_\infty V^2\, l_j(X,Y\,;\,k,M_\infty)\, e^{i\omega t} \tag{2-10}$$

$L_j(X,Y,t)$: charge aérodynamique dans la $j^{ème}$ oscillation harmonique

ρ_∞ : masse volumique de l'air dans l'écoulement à l'infini amont

V : vitesse de l'écoulement principal; elle est dans la direction X positive

$l_j(X,Y;k,M_\infty)$: fonction charge correspondant à la $j^{ème}$ oscillation harmonique

k : fréquence réduite ou paramètre de fréquence; $k = \frac{\omega\, b}{V}$

M_∞ : nombre de Mach de l'écoulement libre à l'infini amont; $M_\infty = \frac{V}{a}$

a : vitesse du son dans l'écoulement uniforme à l'infini amont

Pour les modes d'oscillation $b\,\xi_j(X,Y)\,\bar{q}_j(\omega)\,e^{i_c\,\omega t}$ $(j = 1,\ldots,n)$ pris, les charges aérodynamiques prennent la forme :

$$L_j\,(X,Y,t) = \rho_\infty\,V^2\,l_j(\,X,Y\,;\,k,M_\infty\,)\,\bar{q}_j(\omega)\,e^{i_c\,\omega t} \qquad (j = 1,\ldots,n) \qquad (2\text{-}11)$$

Nous supposons que les amplitudes des oscillations sont petites; cette hypothèse permet la linéarisation de l'équation gouvernant l'écoulement et en conséquence, la charge aérodynamique totale L(X,Y,t) peut être considérée comme étant la somme des contributions de chaque mode :

$$L_j\,(X,Y,t) = \rho_\infty\,V^2\,\sum_{j=1}^{n} l_j(X,Y\,;\,k,M_\infty)\,\bar{q}_j(\omega)\,e^{i_c\,\omega t} \qquad (2\text{-}12)$$

La substitution de l'équation (2-12) dans l'équation (2-9) conduit à :

$$Q_i(t) = \rho_\infty V^2 b \sum_{j=1}^{n} \bar{q}_j(\omega)\,e^{i_c\,\omega t} \iint_S \xi_i(X,Y)\,l_j(X,Y;k,M_\infty)\,dX.dY \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (2\text{-}13)$$

En accord avec la référence [22], nous utilisons la quantité adimensionnelle Q_{ij} pour représenter le coefficient de la force aérodynamique généralisée et nous réécrivons l'équation précédente sous la forme :

$$Q_i(t) = \rho_\infty V^2 b^3 \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(k,M_\infty)\, \bar{q}_j(\omega)\, e^{i_c \omega t} \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (2\text{-}14)$$

où

$$Q_{ij}(k,M_\infty) = \frac{1}{b^2} \iint_S \xi_i(X,Y)\, l_j(X,Y\ ;\ k,M_\infty)\, dX.dY \qquad i,j = 1,\ldots,n \qquad (2\text{-}15)$$

$Q_{ij}(k,M_\infty)$ coefficient de la force aérodynamique généralisée.

En notation matricielle, l'équation (2-14) s'écrit comme suit :

$$\left\{ Q\ (t) \right\} = \rho_\infty V^2 b^3 \left[Q\ (k,M_\infty) \right] \left\{ \bar{q}\ (\omega) \right\} e^{i_c \omega t} \qquad (2\text{-}16)$$

ou bien, et à la suite des équations (2-4) et (2-14)

$$\left\{ Q\ (t) \right\} = \rho_\infty V^2 b^3 \left[Q\ (k,M_\infty) \right] \left\{ q\ (t) \right\} \qquad (2\text{-}17)$$

{Q} vecteur des n forces aérodynamiques généralisées

[Q] matrice des coefficients des forces aérodynamiques généralisées; ordre n x n

{q} vecteur des n coordonnées généralisées

Les coefficients des forces aérodynamiques généralisées sont également trouvés dans la bibliographie sous le nom de "coefficients d'influence aérodynamiques".

La matrice des coefficients d'influence aérodynamiques est obtenue sous la forme :

$$[Q] = [Q^R] + i_c\, k[Q^I] \qquad (2\text{-}18)$$

où: $[Q^R]$ et $k[Q^I]$ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques.

2.6 CONCLUSION:

Les forces aérodynamiques instationnaires sont directement déterminées comme des forces généralisées. La forme analytique de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques ne peut être explicitée en fonction du paramètre de fréquence et du nombre de mach, mais on sait en calculer les valeurs numériques pour des valeurs discrètes de k et M_∞ . C'est pourquoi, les forces aérodynamiques doivent être calculées à chaque changement de fréquence et de vitesse. La matrice [Q] est complexe à cause du déphasage entre les forces aérodynamiques et le mouvement de la structure.

CHAPITRE 3

RESOLUTION DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT

3.1 INTRODUCTION:

Une fois les équations du flottement établies, et le vecteur des forces aérodynamiques généralisées determiné, le problème est de caractériser ce phénomène, autrement dit de déterminer:

- l'évolution des fréquences et des amortissements en fonction de la vitesse de vol.

- la vitesse à laquelle se produisent des oscillations auto-entretenues qu'on appelle également: vitesse critique de flottement.

La vitesse de flottement la plus basse marque la frontière entre les vitesses sûres (oscillations amorties) et les vitesses dangereuses (oscillations divergentes). Il y a aussi tout intérêt à connaitre la rapidité de variation de l'amortissement des oscillations avec la vitesse, ce qu'on appelle aussi "explosivité" du flottement.

La combinaison des équations (1-20) et (2-17) conduit à la formulation suivante des équations du flottement aéroélastique:

$$\left[1\right]\left\{\ddot{q}\right\} + \left[\beta\right]\left\{\dot{q}\right\} + \left[\omega_N^2\right]\left\{q\right\} = \rho_\infty V^2 b \left[Q\right]\left\{q\right\} \qquad (3\text{-}1)$$

Il est important de rappeler que les termes aérodynamiques des équations du flottement ne sont valables que dans le cas de l'oscillation sinusoïdale, autrement dit, juste pour la vitesse de flottement. Cependant, ils fournissent des valeurs approchées suffisamment correctes dans le cas d'oscillations faiblement amorties ou faiblement divergentes, en d'autres termes, pour des vitesses légèrement inférieures ou supérieures à la vitesse de flottement [1].

Les aéroélasticiens sont partagés entre deux formulations differentes de l'équation du flottement. La première a pris son essort aux Etats Unis. Elle est appelée "FORMULATION AMERICAINE". La seconde développée en Angleterre est, par conséquent, dénommée "FORMULATION ANGLAISE".

Dans le présent chapitre, nous développons des algorithmes de résolution des équations du flottement écrites selon les deux formulations sus-citées. Nous les programmons par la suite en FORTRAN 77. Cependant, nous tenons à préciser qu'aucun ouvrage ni publication à notre disposition ne nous fournit de détails concis concernant les méthodes de résolution. Tous se contentent d'écrire l'équation du flottement, de citer une méthode de résolution avec de rares explications évasives et enfin de présenter des résultats. Il est donc clair que les algorithmes et programmes développés sont le fruit d'un travail tout à fait personnel.

3.2 ORGANIGRAMME RESUMANT LE TRAVAIL EFFECTUE:

Avant d'entamer la résolution des équations du flottement, résumons dans la figure 3-1 ce qui a été réalisé dans les deux premiers chapitres dans le but de formuler les équations du mouvement et de préparer les matrices masse, rigidité et aérodynamique. Toutes les méthodes de résolution que nous allons par la suite développer passeront impérativement par ces étapes:

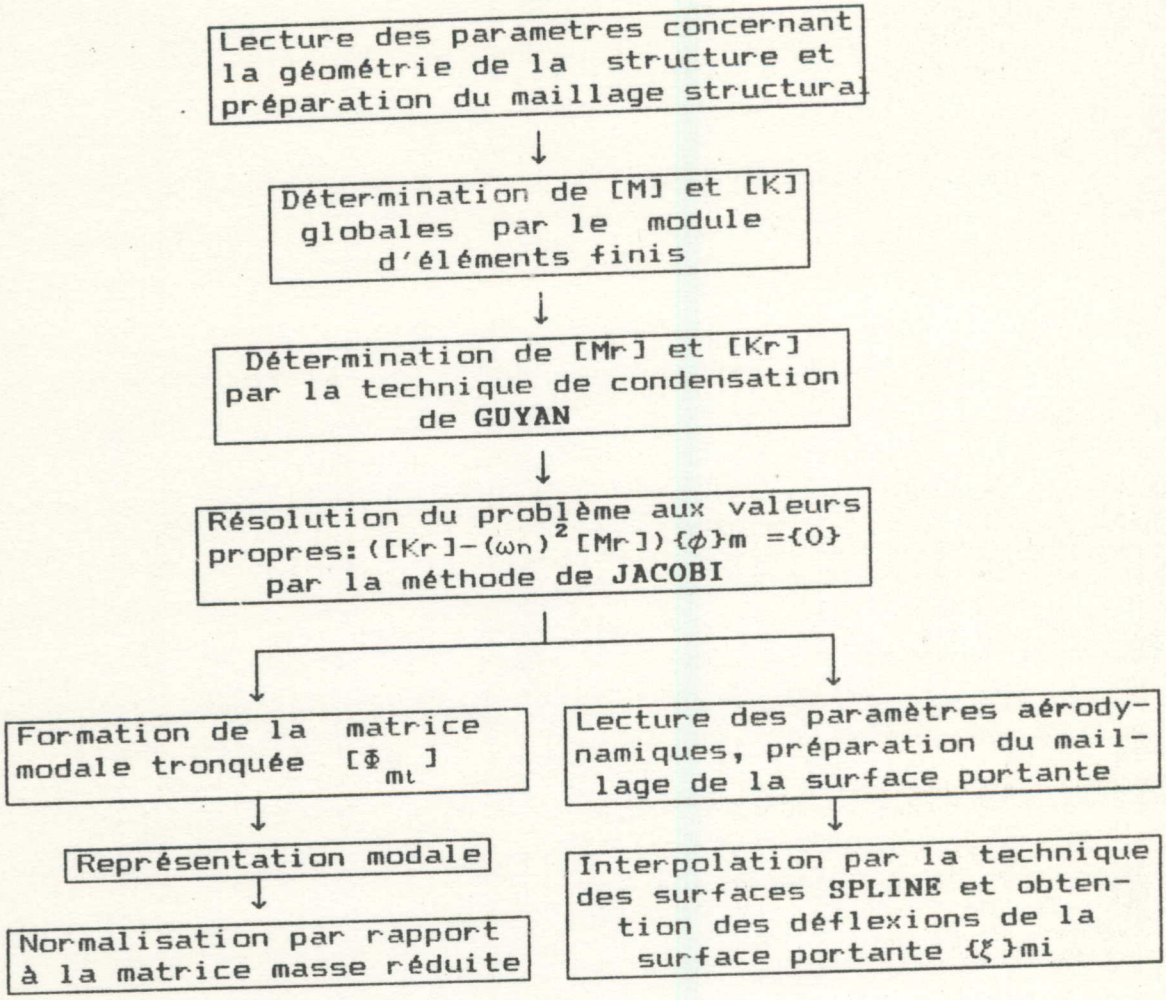


Figure 3-1: Préparation des matrices pour la résolution du problème de flottement

3.3 ORIGINE DE L'AMORTISSEMENT DES STRUCTURES AERONAUTIQUES:

Comme il vient d'être dit en introduction, l'amortissement est un facteur trés important dans le calcul de flottement puisqu'il est à l'origine de la stabilité ou de l'instabilité du système aéroélastique [29]. C'est pourquoi nous jugeons important d'en citer les principales sources:

3.3.1 L'amortissement structural:

Il a pour origine l'hystérisis du matériau et les frottements aux niveau des joints et des connexions entre les différents composants de la structure de l'avion. Analyser l'amortissement d'un assemblage structural n'est pas une tâche facile; il est important de considérer, non seulement le matériau constituant la structure, mais également la façon dont cette structure est assemblée. En plus de cela le phénomène de fatigue du matériau est à prendre en considération. C'est pourquoi, souvent, on ne cherche pas à calculer l'amortissement structural. Il est quelquefois supposé négligeable ou bien éstimé expérimentalement. Dans ce cas, l'hypothèse de Basile est souvent envisagée. Elle considère que seuls les termes de la diagonale de la matrice amortissement structural $[\beta]$ sont prépondérants [15].

3.3.2 L'amortissement aérodynamique:

Pour le définir, considérons un profil d'aile placé dans un écoulement uniforme horizontal avec une incidence i_o. La force aérodynamique qui s'exerce en un point M_1 du profil est verticale et est fonction de l'angle d'incidence. La figure 3-2a représente cet état du profil.

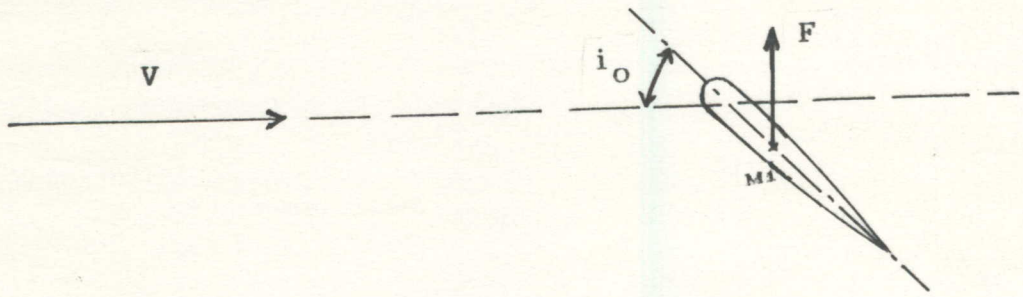


Figure 3-2a : Profil fixe

Si, pour la simplicité du raisonnement, nous considérons le profil animé d'un mouvement vibratoire de translation verticale et nous faisons l'hypothèse que chaque

position du profil est en état d'équilibre (hypothèse de quasistationnarité), nous voyons qu'à chaque instant t le profil a une vitesse instantanée u1(t) et est soumis à la force aérodynamique F(t) perpendiculaire à la vitesse v1(t) de l'écoulement relatif par rapport au profil tel que le représente la figure 3-2b:

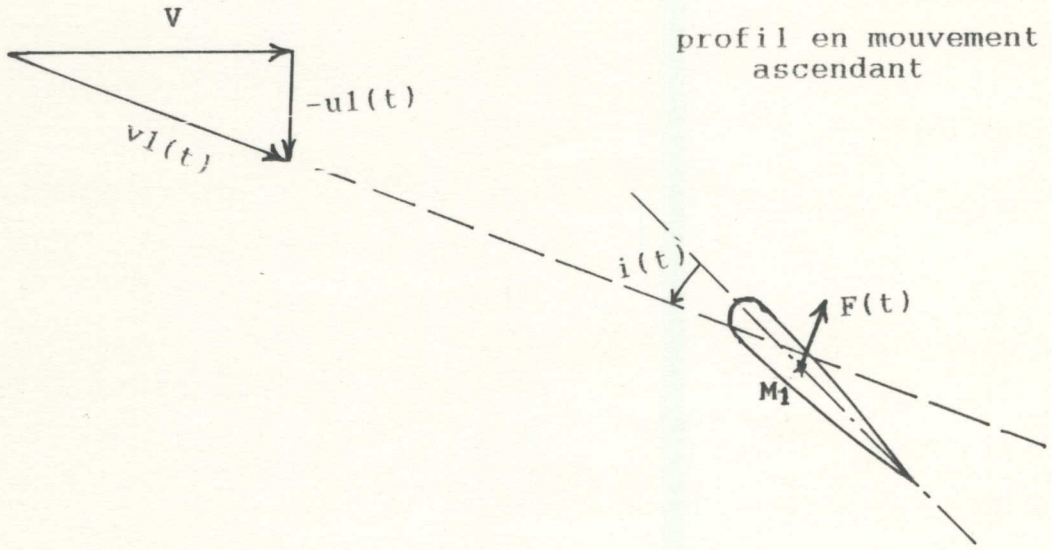


Figure 3-2b: Etat du profil à un instant t

Il apparait ainsi que dans le domaine où la force aérodynamique est une fonction croissante de l'angle d'incidence, lorsque dans son mouvement le profil monte, sa vitesse instantanée se retranche de la vitesse de l'écoulement uniforme pour donner une vitesse relative v1(t) dont la direction fait avec la corde du profil un angle i1(t) inférieur à l'incidence initiale et qui par conséquent diminue la force aérodynamique et s'oppose au mouvement. De même lorsque le profil descend, la vitesse v1(t) fait avec la corde du profil un angle i1(t) supérieur à l'incidence initiale, ce qui augmente la force aérodynamique et s'oppose au mouvement. Ainsi, lorsque le profil vibre, la force aérodynamique quasistationnaire tend à le ramener au repos. Ce phénomène reste encore vrai [30] pour les forces

aérodynamiques réellement instationnaires agissant sur un profil en mouvement vibratoire quelconque. C'est ce qui est conventionnellement appelé: amortissement aérodynamique.

Dans les équations du flottement, la partie imaginaire de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques représente la contribution de l'écoulement dans l'amortissement du mouvement vibratoire.

3.4 RESOLUTION DES EQUATIONS AMERICAINES DU FLOTTEMENT AEROELASTIQUE:

3.4.1 Formulation Américaine des équations:

Pour ce cas, nous considérons le concept de la rigidité complexe qui traite le problème de dissipation à travers l'amortissement structural. Nous prenons donc, non seulement l'hypothèse que la matrice $[\beta]$ est diagonale, mais elle est aussi considérée comme une fraction de la matrice rigidité généralisée. Ce concept est perçu différemment par LAWRENCE et JACKSON [5] et les aéroélasticiens Américains en général, qui négligent l'amortissement structural et introduisent un amortissement fictif; en fait la formulation des équations reste la même.

En aérodynamique instationnaire, il existe peu de modèles donnant entière satisfaction (voir chapitre 2). Pour pouvoir traiter les problèmes de flottement, il suffit de considérer des mouvements de vibrations harmoniques dans lesquels la déformée, écrite sous forme de déplacements généralisés, se traduit par:

$$\left\{ q \right\} = \left\{ \bar{q} \right\} e^{i_c \omega t} \qquad (3\text{-}2)$$

$\{ \bar{q} \}$ vecteur des amplitudes complexes

ω fréquence circulaire des oscillations harmoniques (ω est réelle)

La différentiation du vecteur $\{ q \}$ relativement au temps conduit à :

$$\left.\begin{aligned} \{ \dot{q} \} &= i_c \omega \{ \bar{q} \} e^{i_c \omega t} \\ \{ \ddot{q} \} &= -\omega^2 \{ \bar{q} \} e^{i_c \omega t} \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}3)$$

En introduisant les équations (3-2) et (3-3) dans l'équation (3-1) nous obtenons :

$$\left[-\omega^2 \left[\backslash 1 \backslash \right] + \left[\backslash \omega_N^2 \backslash \right] + i_c \omega \left[\beta \right] - \rho_\infty V^2 b \left[Q \right] \right] \left\{ \bar{q} \right\} = \{0\} \qquad (3\text{-}4)$$

D'aprés la référence [8] ,si l'excitation est de la forme représentée par l'équation (3-2), la matrice amortissement structural globale s'écrira comme suit:

$$[B] = \frac{1}{\pi \omega} [D] \qquad (3\text{-}5)$$

L'amortissement structural est donc inversement proportionnel à la fréquence d'excitation. La matrice $(1/\pi\omega)$ [D] est connue sous le nom de matrice hystéritique.

En accord avec la référence [34], la matrice [D] est proportionnelle à la matrice rigidité [K]:

$$[\,D\,] = \pi\, g\, [\,K\,] \tag{3-6}$$

où g est le facteur d'amortissement structural ou facteur d'amotissement fictif.

En combinant les équations (3-5) et (3-6) nous obtenons la matrice amortissement structural sous la forme :

$$[\,B\,] = \frac{g}{\omega}\,[\,K\,] \tag{3-7}$$

A la suite de la troisième équation du système (1-13), en pré-multipliant par $[T]^T$ et en post-multipliant par [T] l'équation (3-7), nous obtenons :

$$[\,B_r\,] = \frac{g}{\omega}\,[\,K_r\,] \tag{3-8}$$

En combinant les équations (1-17b) et (1-17c) et en prenant en considération le fait que les vecteurs propres ont été normalisés par rapport à la matrice masse, la pré-multiplication de l'équation (3-8) par la transposée de la matrice modale tronquée $[\Phi_{mt}]^T$ et la post-multiplication par la matrice $[\Phi_{mt}]$ nous conduit à:

$$\left[\beta\right] = \frac{g}{\omega}\,\left[\begin{array}{|c|}\hline \omega_N^2 \\ \hline \end{array}\right] \tag{3-9}$$

l'équation du flottement devient alors:

$$\left[-\omega^2\left[\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array}\right] + \left[\begin{array}{|c|}\hline \omega_N^2 \\ \hline \end{array}\right] + ig\left[\begin{array}{|c|}\hline \omega_N^2 \\ \hline \end{array}\right] - \rho_\infty V^2 b\,[\,Q\,]\right]\{\bar{q}\} = \{0\} \tag{3-10}$$

En posant:

$$k = \frac{\omega\, b}{V} \tag{3-11}$$

et

$$\Omega = \frac{1 + ig}{\omega^2} \tag{3-12}$$

l'équation (3-10) prendra la forme suivante :

$$\left[\left[\lambda_1 \right] - \Omega \left[\lambda_{\omega_N^2} \right] + \rho_\infty \frac{b^3}{k^2} \left[Q \right] \right] \left\{ \bar{q} \right\} = \left\{ 0 \right\} \tag{3-13}$$

où :

Ω est la valeur propre complexe ou aéroélastique

g est le facteur d'amortissement structural ou facteur d'amortissement artificiel

k est la fréquence réduite

L'équation (3-13) peut être écrite sous la forme plus familière des problèmes aux valeurs propres:

$$\left[A_{ame} - \Omega\, I \right] \{ \bar{q} \} = \{ 0 \} \tag{3-14}$$

avec:

$$A_{ame} = \left[\lambda_{\omega_N^2} \right]^{-1} \left[\left[\lambda_1 \right] + \rho_\infty \frac{b^3}{k^2} \left[Q \right] \right] \tag{3-15}$$

où A_{ame} est une matrice pleine, complexe et non symétrique de dimension (n x n)

I la matrice unité de dimension (n x n)

3.4.2 Méthode LR pour la détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice complexe quelconque:

Il est pratiquement impossible de résoudre les problèmes aux valeurs propres d'une matrice non symétrique avec autant de facilité que pour une matrice symétrique. Si la matrice est défectueuse, il n'existe pas de moyen sûr pour déceler ce problème durant le calcul des valeurs propres, et il est quelquefois possible de le déceler durant le calcul des vecteurs propres dont le processus de recherche est différent [31]. Le problème se complique encore davantage si la matrice n'est pas bien équilibrée autrement dit, si les lignes et les colonnes correspondantes ont des normes trés différentes. Les complications s'accentuent lorsque les matrices sont, en plus, complexes. Pour toutes ces raisons nous avons adopté la stratégie de résolution suivante:

a - Le calcul automatique de la précision de la machine. Notons que cette précision n'est pas celle requise sur les résultats. Cette valeur intervient plutôt dans le déroulement interne des modules cités ci-aprés et permet d'éviter les débordements sur les calculs de flottants et de limiter les erreurs accumulées par arrondi. La prise en compte de cette précision et de celle désirée sur les résultats permet d'arrêter l'algorithme et constitue une condition de sortie efficace.

b - Le pré-conditionnement de la matrice complexe. Ceci est justifié par l'observation faite par OSBORNE [20] à propos des algorithmes déja existants: les résultats obtenus sont entachés d'erreurs qui sont au moins de l'ordre de $\varepsilon_m . \|A\|_E$ où ε_m est la précision de la machine et $\|A\|_E$ est une norme Euclidienne au sens de FROBENIUS [20]. Il suffit donc de trouver une transformation permettant de réduire la norme de [A] tout en préservant ses valeurs propres. Nous utilisons celle développée par OSBORNE que nous adaptons au cas des matrices complexes.

c - La réduction de la matrice complexe à la forme HESSENBERG supérieure [20, 31]. Cette réduction est recommandée pour une meilleure stabilité numérique lorsque, pour certaines matrices, les normes des lignes et de leurs colonnes correspondantes n'ont pas toutes le même ordre de grandeur. Elle permet également de réduire le volume de calcul nécessaire [20].

d - La recherche de toutes les valeurs propres de la matrice complexe, préconditionnée et réduite à la forme HESSENBERG, par le procédé LR de RUSTIHAUSER amélioré [19,20].

e - La recherche des vecteurs propres de la matrice originale par résolution d'un système itératif reposant sur la décomposition LU de DOOLITTLE [19, 20] adaptée aux matrices complexes et sur la technique de raffinements successifs de WIELANDT [20].

3.4.3 Développement d'un algorithme de résolution des équations Américaines:

Comme il a été dit précédemment, g est un amortissement fictif artificiellement introduit dans les équations, il représente également le paramètre majeur qui joue sur la stabilité du système. En effet, suivant le signe de g, le terme $i_c\, g\left[\omega_N^2\right]\{\bar{q}\}$ de l'équation (3-10) est équivalent à des forces actives ou dissipatives réparties comme les forces élastiques mais déphasées de $\Pi/2$ par rapport à celles-ci, et ceci est exprimé par le complexe (i_c) qui y intervient.

La résolution des équations du flottement écrites selon la formulation Américaine se ramène à la détermination de la fréquence de vibration ω et de l'amortissement fictif g pour chaque mode de vibration, en résolvant le problème aux valeurs propres complexes exprimé par les équations (3-14) et

(3-15). Si l'on trouve une solution avec g positif, le terme additif apportera de l'énergie au système, il représentera alors une excitation entrainant le système vers un état d'instabilité, par contre, une valeur négative de g représentera un mode de vibration dans lequel le terme additif dissipe de l'énergie en entrainant le système vers un état de stabilité [32, 33]. Suite à cela, il est facile de comprendre que si g est proche de zéro, la solution correspondante représentera la frontière du domaine d'instabilité (ou de stabilité), et la vitesse critique de flottement sera celle correspondant à ce dernier cas.

Nous passons à présent à la mise en oeuvre d'un algorithme réalisant la résolution de l'équation Américaine du flottement aéroélastique. Il faut cependant remarquer que cette tâche n'est pas aussi simple qu'elle en a l'air; en effet, cette équations s'écrit en fonction des coefficients d'influence aérodynamiques qui sont implicitement fonction du nombre de Mach et du paramètre k, lui même dépendant de la fréquence de vibration que nous ne connaissons justement pas. Nous sommes donc dans l'obligation de procéder par une méthode itérative en choisissant une plage de vitesses, en général celles appartenant au domaine opérationnel de l'appareil. Pour chaque vitesse, on se donne une valeur initiale de la fréquence réduite :

$$k = k_{(s)}^{(j=1)} \qquad (3\text{-}16)$$

où l'indice supérieur (dans ce cas 1) représente le numéro de l'itération et l'indice inférieur s, le numéro du mode sous investigation ($1 \leq s \leq n$).

Une fois V et k fixés, il est possible de calculer la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques $[Q(k,M_{\infty})]$ grâce à l'équation (2-15). En injectant Q dans le système d'équations (3-13), les seules inconnues restant à ce niveau

sont les n valeurs propres complexes de la matrice A_{ame}. Elles sont obtenues sous la forme :

$$\Omega_{(s)}^{(j)} = \frac{1}{\left(\omega_{(s)}^{(j)}\right)^2}\left(1 + i_c\, g_{(s)}^{(j)}\right) \qquad (3\text{-}17)$$

La détermination de la fréquence circulaire ω et de l'amortissement fictif g pour le mode s choisi à la première itération se réalise en calculant :

$$\omega_{(s)}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{Re\left(\Omega_{(s)}^{(j)}\right)}} \qquad (3\text{-}18)$$

$$g_{(s)}^{(j)} = \frac{Im\left(\Omega_{(s)}^{(j)}\right)}{Re\left(\Omega_{(s)}^{(j)}\right)} \qquad (3\text{-}19)$$

Cependant si nous réinjectons les équations (3-18) et (3-19) dans l'équation (2-15), celle ci ne sera pas automatiquement vérifiée. En effet, k et V ne satisfont pas toutes les équations étant donné que nous les ayons nous mêmes introduits.

Grâce à l'équation (3-11) nous calculons une nouvelle estimation de la fréquence réduite pour pouvoir passer à l'itération supérieure:

$$k_{(s)}^{(j+1)} = \frac{1}{\sqrt{Re\left(\Omega_{(s)}^{(j)}\right)}}\ \frac{b}{V} \qquad (3\text{-}20)$$

Avec cette nouvelle valeur de k nous reprenons le même procédé et nous ne nous arrêtons que lorsque nous atteignons la précision ε désirée. Cette dernière condition se traduit par:

$$\left| k_{(s)}^{(j+1)} - k_{(s)}^{(j)} \right| \leq \varepsilon \qquad (3\text{-}21)$$

L'inéquation (3-21) exprime la convergence pour le mode s. Celle-ci étant atteinte, il faut alors passer à l'inspection du mode supérieur (s+1) grâce à la réinitialisation de k par:

$$k_{(s+1)}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{Re\left(\Omega_{(s+1)}^{(c)}\right)}} \frac{b}{V} \qquad (3\text{-}22)$$

où c représente l'indice supérieur du groupe des n valeurs propres aéroélastiques Ω obtenues aprés convergence, c'est-à-dire lorsque l'inéquation (3-21) est vérifiée. Nous poursuivons ainsi jusqu'à convergence des n modes de vibration pour la vitesse V choisie. Nous passons alors à la vitesse supérieure en suivant le même procédé. Comme résultat, nous obtenons pour chaque vitesse, n fréquences circulaires et n amortissements fictifs correspondant aux n premiers modes de vibration de la structure. Ces résultats sont exploités graphiquement de la façon dont le montre la figure 3-3.

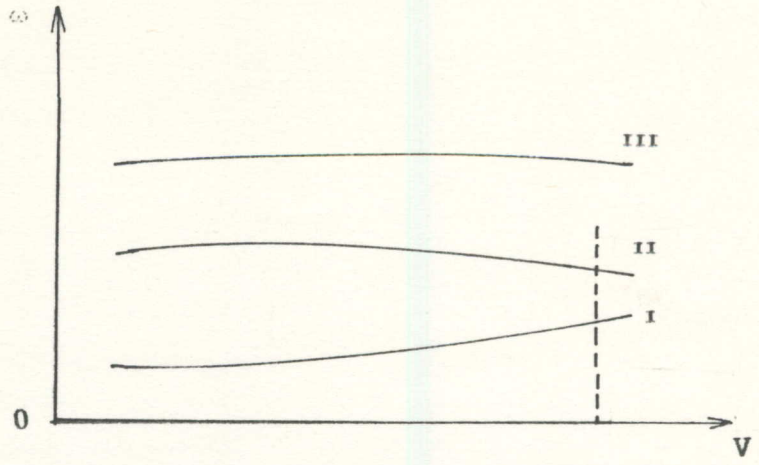


Figure 3-3 a: Fréquence de vibration en fonction de la vitesse de vol

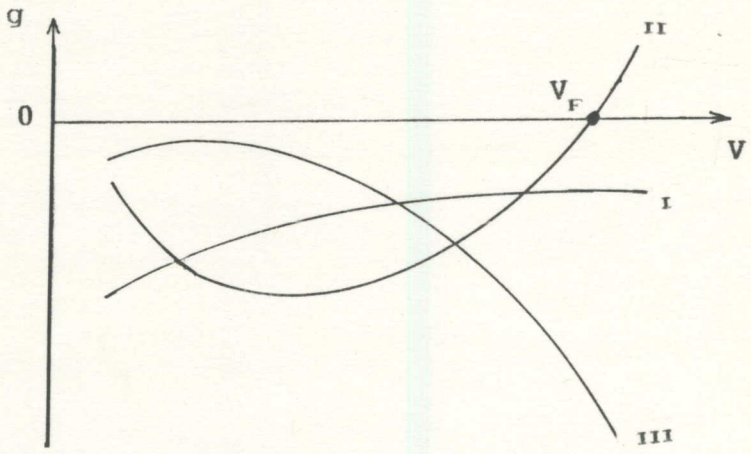


Figure 3-3 b: Coefficient d'amortissement fictif en fonction de la vitesse de vol

Figure 3-3: Détermination de la vitesse de flottement par la résolution des équations Américaines

La figure 3-4 représente l'organigramme de déroulement des principales étapes de cette méthode de résolution.

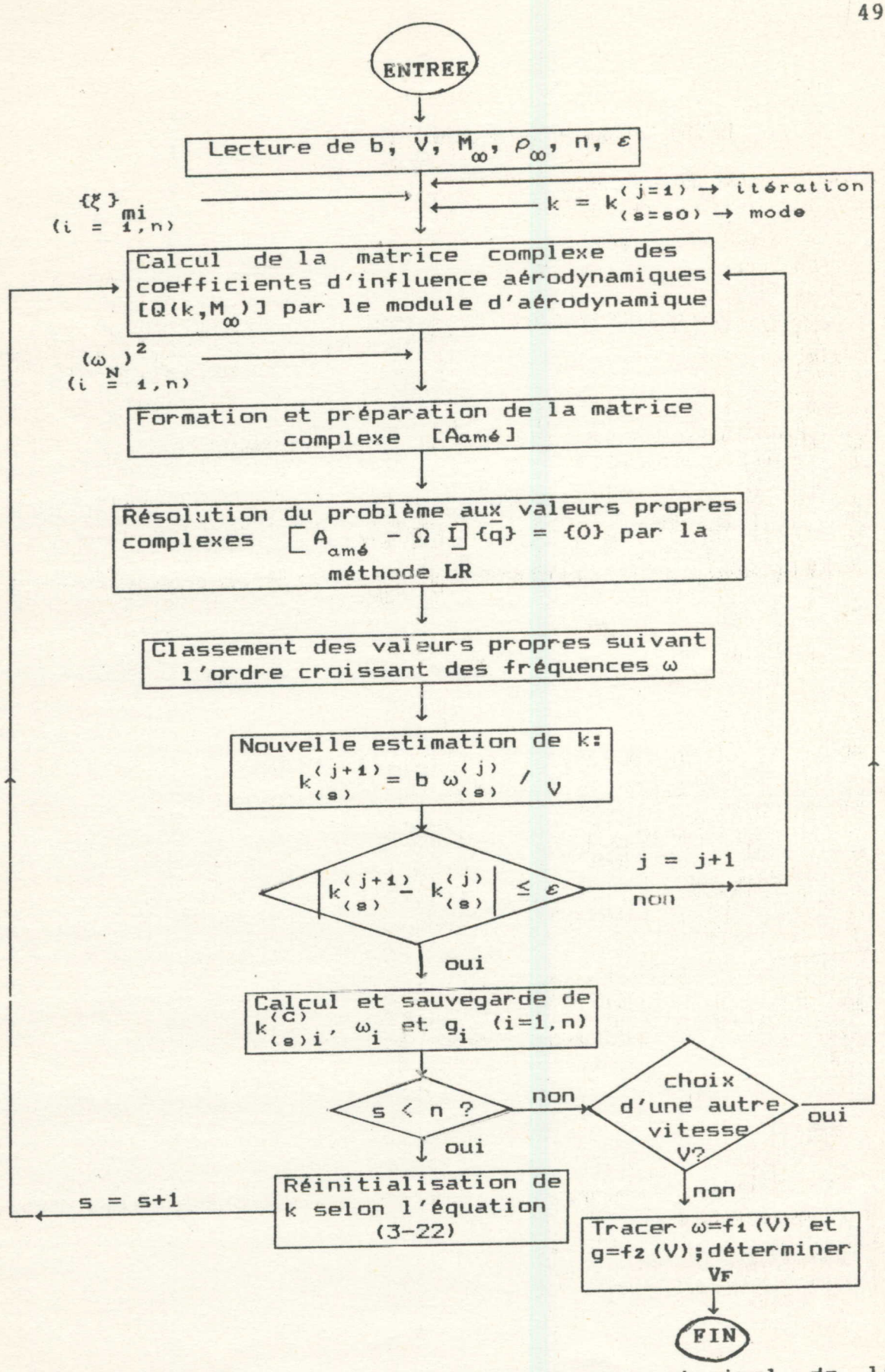


Figure 3-4: Organigramme du pogramme principal de la résolution de l'équation Américaine du flottement

3.5 RESOLUTION DES EQUATIONS ANGLAISES DU FLOTTEMENT AEROELASTIQUE:

3.5.1 Formulation Anglaise des équations:

La matrice des coefficients d'influence aérodynamiques étant complexe, elle possède une partie réelle et une partie imaginaire. Le module aérodynamique nous la fournit sous la forme suivante :

$$[\,Q(k,M_\infty)\,] = [\,Q^R(k,M_\infty)\,] + i_c\, k\,[\,Q^I(k,M_\infty)\,] \qquad (3\text{-}23)$$

Notons que dans la formulation Anglaise, le paramètre k n'est plus appelé fréquence réduite mais paramètre de fréquence.

En introduisant l'équation (3-23) dans l'équation (3-1) nous obtenons :

$$\left[\left[\lambda_1\right]\{\ddot{q}\} + \left[\beta\right]\{\dot{q}\} + \left[\omega_N^2\right]\{q\}\right] = \rho_\infty V^2 b \left[\,[\,Q^R\,] + i_c\, k[\,Q^I\,]\right]\{q\} \qquad (3\text{-}24)$$

L'hypothèse du mouvement harmonique étant toujours maintenue, l'introduction de l'équation (3-2) dans la première équation du système (3-3) donne:

$$\{\,\dot{q}\,\} = i_c\,\omega\,\{\,q\,\} \qquad (3\text{-}25)$$

l'équation (3-24) devient alors:

$$\left[\backslash 1 \backslash\right] \left\{\ddot{q}\right\} + \left[\left[\backslash \beta \backslash\right] - \rho_\infty V b^2 \left[Q^I \right]\right] \left\{\dot{q}\right\} +$$

$$\left[\left[\backslash \omega_N^2 \backslash\right] - \rho_\infty V^2 b \left[Q^R \right]\right] \left\{q\right\} = \left\{0\right\} \qquad (3\text{-}26)$$

où :

$\rho_\infty V^2 b \left[Q^R \right]$ est la matrice de rigidité aérodynamique

et

$\rho_\infty V b^2 \left[Q^I \right]$ est la matrice d'amortissement aérodynamique

L'équation (3-26) représente la formulation Anglaise des équations du flottement aéroélastique.

Contrairement à la formulation Américaine où l'écriture sous forme canonique est directe, pour la formulation Anglaise nous devons effectuer la transformation de Duncan sur l'équation (3-26) pour obtenir:

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\backslash \beta \backslash\right] - \rho_\infty V b^2 \left[Q^I \right] & \left[\backslash 1 \backslash\right] \\ \hline \left[\backslash 1 \backslash\right] & \left[0 \right] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{\dot{q}\} \\ \{\ddot{q}\} \end{array}\right\} +$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\backslash \omega_N^2 \backslash\right] - \rho_\infty V^2 b \left[Q^R \right] & \left[0 \right] \\ \hline \left[0 \right] & -\left[\backslash 1 \backslash\right] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{0\} \\ \{0\} \end{array}\right\}$$

(3-27)

Le système double alors de dimension. En notant la matrice bloc du premier terme de l'éqation (3-27) par [E] et celle du second terme par [F], et en effectuant le changement de variable suivant:

$$\left\{ Z^* \right\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}28)$$

Nous aboutissons à:

$$[E] \{ \dot{Z}^* \} + [F] \{ Z^* \} = \{ 0 \} \qquad (3\text{-}29)$$

Les matrices [E] et [F] sont de dimension (2n x 2n) et le vecteur {Z*} est de dimension 2n.

posons : $$Z^* = \bar{Z}\, e^{-\lambda t} \qquad (3\text{-}30)$$

où λ est un paramètre complexe.

La différentiation par rapport au temps de l'équation (3-30) donne :

$$\dot{Z}^* = \bar{Z}\, \lambda\, e^{\lambda t} \qquad (3\text{-}31)$$

posons:

$$A_{ang} = - E^{-1} F \qquad (3\text{-}32)$$

En introduisant les équations (3-30), (3-31) et (3-32) dans l'équation (3-29) nous obtenons la forme canonique suivante:

$$\left[A_{ang} - \lambda I \right] \{ \bar{Z} \} = \{ 0 \} \qquad (3\text{-}33a)$$

où

$$A_{ang} = \left[\begin{array}{c|c} \left[0 \right] & \left[\backslash 1 \backslash \right] \\ \hline \rho_\infty V^2 b \left[Q^R \right] - \left[\backslash \omega_N^2 \backslash \right] & \rho_\infty V b^2 \left[Q^I \right] - \left[\backslash \beta \backslash \right] \end{array} \right] \qquad (3\text{-}33b)$$

La matrice A_{ang} est une matrice réelle, non symétrique et semi-pleine.

Les équations (3-33) représentent un problème aux valeurs propres complexes de la matrice A_{ang}.

3.5.2 Méthode QR pour la détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice réelle quelconque:

La manipulation de matrices réelles, non symétriques et semi-pleines est une opération délicate. Les complications numériques qui peuvent surgir sont de mêmes natures que celles citées dans la section 3.4.2. Les opérations a, b et c exposées dans cette même section sont donc un passage nécessaire. Les algorithmes effectuant cette tâche sont relativement simillaires à ceux utilisés pour le cas d'une matrice complexe sauf que dans le présent cas les matrices manipulées sont réelles. Pour le calcul des valeurs propres complexes, nous optons pour le procédé QR de FRANCIS et KUBLANOVSKAYA [19, 20] adapté aux matrices Hessenberg réelles et pré-conditionnées. Le processus QR est largement recommandé pour ce type de matrices [20].

Les vecteurs propres complexes sont déterminés par le même procédé que celui décrit à l'étape (e) de la section 3.4.2 .

3.5.3 Développement d'algorithmes de résolution des équations Anglaises:

Il est possible de résoudre les équations Anglaises du flottement aéroélastique soit par un balayage en paramètre de fréquence dont une partie importante de la résolution est graphique, soit par un processus itératif. Cependant, ces deux procédés passent impérativement par la résolution du problème (3-33) qui aboutit sur une série de n paires de valeurs propres complexes conjuguées que nous notons par :

$$\lambda = \omega (\eta \pm i_c) \qquad (3\text{-}34)$$

où:

ω est la fréquence de vibration du système amorti

et

η est son coefficient d'amortissement.

Les valeurs propres nous concernant sont celles ayant une partie imaginaire positive. Comme pour la méthode Américaine, la résolution des équations Anglaises du flottement se heurte à un problème d'indétermination vu qu'elles s'écrivent en fonction de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques, elle même fonction de la vitesse de vol et du paramètre de fréquence k qui est justement inconnu. Les deux méthodes que nous allons développer réglent, chacune à sa façon, ce problème d'indétermination.

3.5.3.1 Méthode semi-graphique avec un balayage en paramètre de fréquence:

La mise en oeuvre de l'algorithme commence par le choix, d'une part, d'une plage de vitesses couvrant autant

que possible le domaine opérationnel de l'appareil à une altitude donnée, et d'autre part d'une plage de paramètres de fréquence. Pour chaque valeur de k, nous calculons la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques puis les valeurs propres aéroélastiques du problème (3-33), par la méthode QR précedemment décrite, pour toute la plage des vitesses. Ceci nous permet de tracer une série de graphes pour chaque paramètre de fréquence (voir figure 3-5):

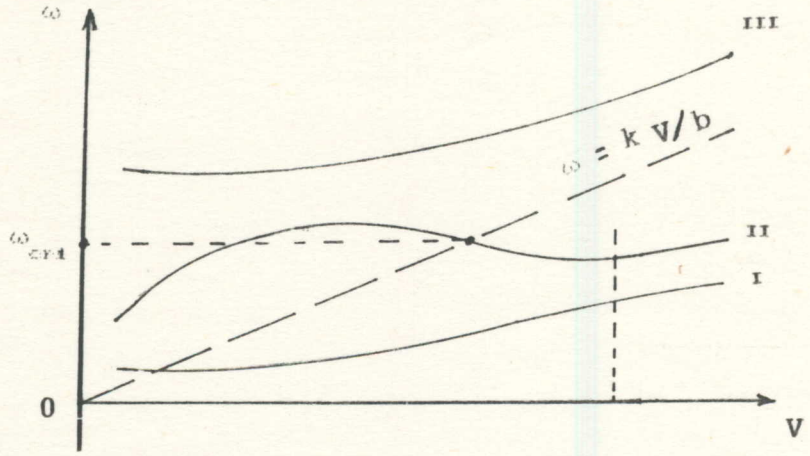


Figure 3-5 a:Fréquence de vibration en fonction de la vitesse

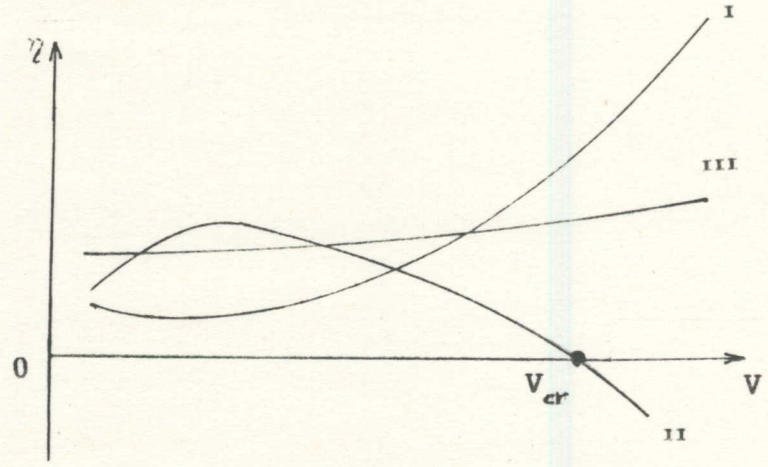


Figure 3-5 b: Coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse

Figure 3-5: Résultats de la résolution des équations Anglaises pour une valeur fixée de k

La détermination d'une série de valeurs $\omega_{cr1}(k)$ et $V_{cr}(k)$ pour différentes valeurs de k, tel que le montre la figure 3-5, nous permet de faire la représentation graphique suivante:

$$V_{cr} = V_{cr}(k) \tag{3-35a}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{cr1} &= \omega_{cr1}(k) \\ \omega_{cr2} &= \frac{k\, V_{cr}(k)}{b} \end{aligned}\right\} \tag{3-35b}$$

et de déterminer la vitesse critique de flottement tel que le montre la figure 3-6.

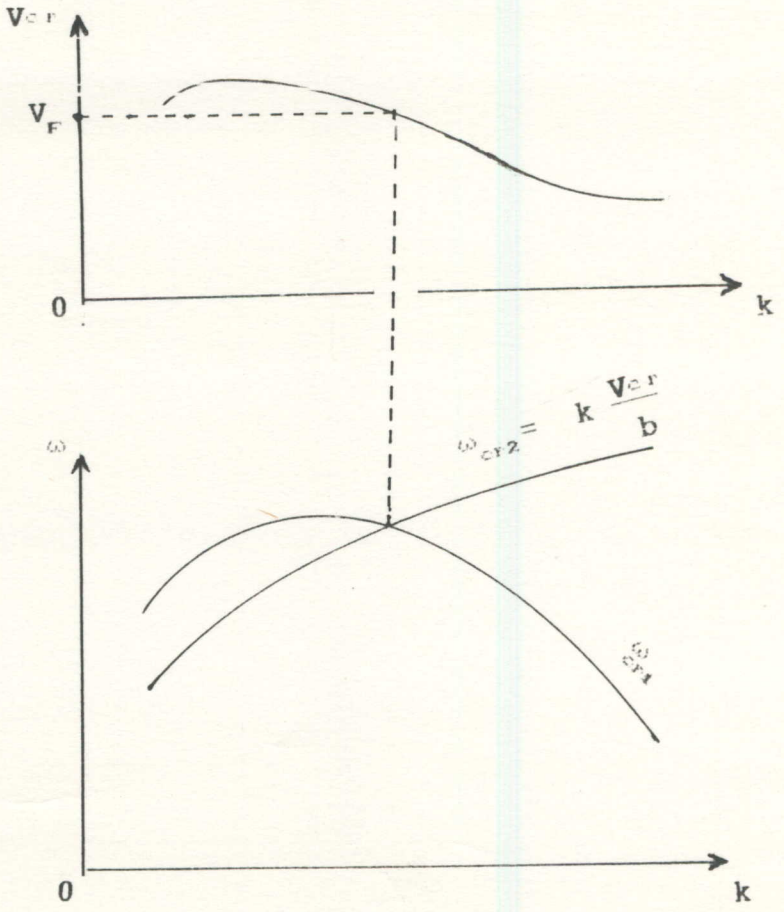
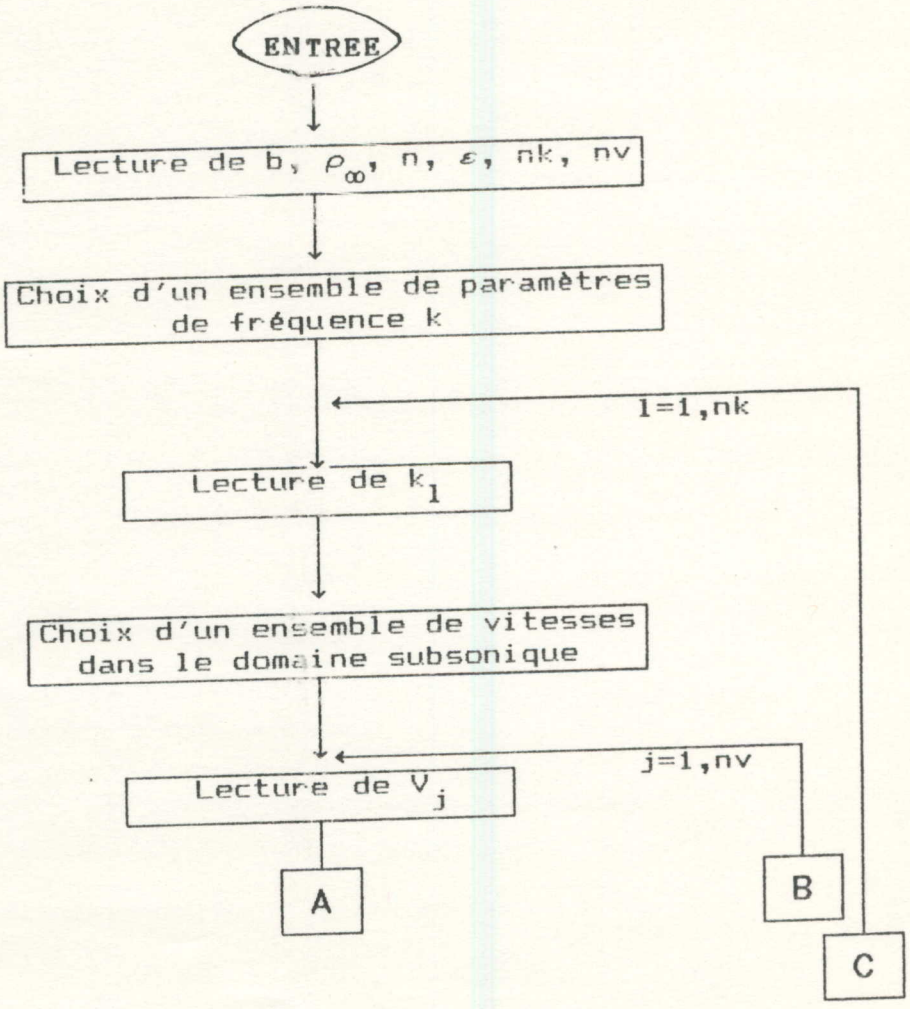


Figure 3-6 : Procédé graphique pour la détermination des conditions critiques de flottement

Il est clair à présent que la solution définitive s'obtient graphiquement. La méthode est plutôt simple mais nécessite, pour chaque paramètre de fréquence, le calcul des forces aérodynamiques et ensuite la résolution du problème aux valeurs propres complexes, pour un nombre relativement important de vitesses. elle nécessite également le tracé de beaucoup de graphes; un travail laborieux pour l'obtention de la seule valeur de la vitesse de flottement V_F.

La figure 3-7 est un organigramme englobant les grandes lignes de la résolution des équations Anglaises du flottement aéroélastique par cette méthode en grande partie graphique.



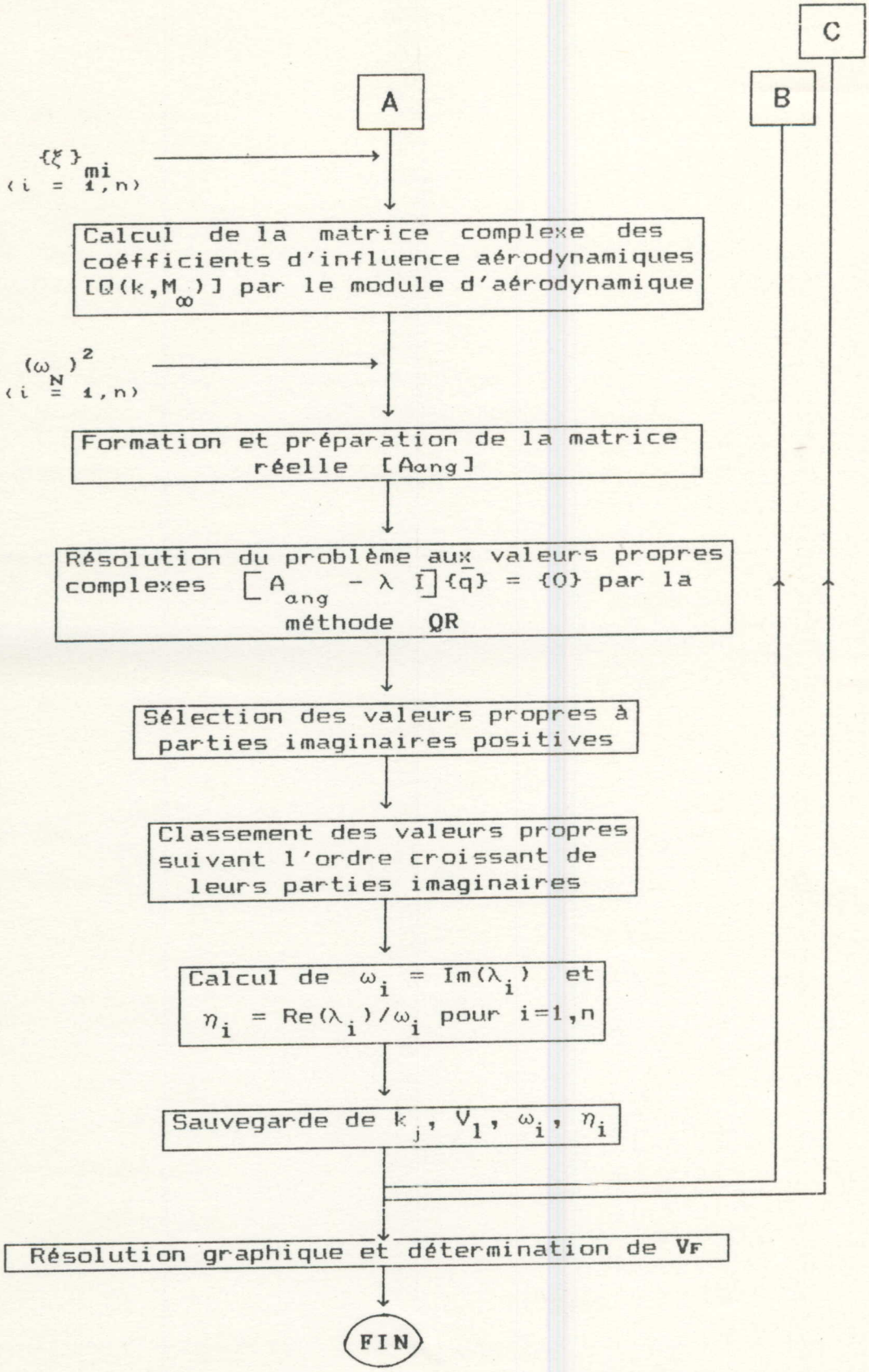


Figure 3-7: Organigramme de la résolution de l'équation Anglaise du flottement par le procédé semi-graphique

3.5.3.2 Résolution des équations Anglaises du flottement par une méthode itérative:

Cette méthode présente l'avantage de donner directement la vitesse de flottement en itérant plusieurs fois sur le paramètre de fréquence jusqu'à convergence du processus.

Notre algorithme commence par le choix d'une vitesse V prise dans le domaine d'exploitation de l'appareil, et d'un paramètre de fréquence trés petit sans pour autant atteindre la valeur zéro car ce serait un phénomène de "Divergence statique" [3,12] qui se présenterait. Le calcul des valeurs propres aéroélastiques du problème (3-33) conduit à une série de 2xn racines complexes conjuguées:

$$\lambda_{r,s}^{(j)} = \omega_{r,s}^{(j)} \left[\eta_{r,s}^{(j)} \pm i_c \right] \qquad (3\text{-}36)$$

où r est le numéro du mode oscillatoire

s est le nombre de modes oscillatoires sous investigation

j est le numéro de l'itération

Nous élaborons une procédure de tri qui ne choisira parmi les valeurs propres obtenues que celles ayant une partie imaginaire positive puis classera les n modes par ordre croissant de leurs fréquences d'oscillation:

$$\omega_{1,s} < \omega_{2,s} < \ldots < \omega_{n,s}$$

Ces valeurs propres aéroélastiques, en particulier leurs parties imaginaires, ne satisfont pas l'équation du

paramètre de fréquence (3-11), il faut alors faire une nouvelle estimation de k par :

$$k_s^{(j+1)} = \omega_{s,s}^{(j)} \frac{b}{V} \qquad (3\text{-}37)$$

A nouveau, la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques est calculée en fonction de la nouvelle valeur de k.

Nous reprenons alors le calcul des valeurs propres à l'itération suivante. L'algorithme ne s'arrêtera que lorsque la précision ε que nous fixons, généralement de l'ordre de 10^{-2} ou bien 10^{-3} [12], est atteinte. Cette condition se traduit par :

$$\left| k_s^{(j+1)} - k_s^{(j)} \right| \leq \varepsilon \qquad (3\text{-}38)$$

Notons la serie de valeurs propres qui ont convergé par:

$$\lambda_{r,s}^{(c)} = \omega_{r,s}^{(c)} \left[\eta_{r,s}^{(c)} \pm i_c \right] \qquad (3\text{-}39)$$

Parmi les n valeurs propres à parties réelles positives, seule $\lambda_{s,s}^{(c)}$ satisfait simultanément les équations (3-11) et (3-33), le mode s est alors défini à la vitesse V par sa fréquence d'oscillation:

$$\omega_s = \mathrm{Im}\left[\lambda^{(c)}_{r,s}\right] \qquad (3\text{-}40)$$

et son coefficient d'amortissement:

$$\eta_s = \frac{\mathrm{Re}\left[\lambda^{(c)}_{r,s}\right]}{\mathrm{Im}\left[\lambda^{(c)}_{r,s}\right]} \qquad (3\text{-}41)$$

Nous poursuivons à présent l'investigation du mode suivant en incrémentant s de 1. L'estimation initiale du paramètre de fréquence sera :

$$k^{(i)}_{s+1} = \omega^{(c)}_{s+1,s}\ \frac{b}{V} \qquad (3\text{-}42)$$

$\omega^{(c)}_{s+1,s}$ étant la fréquence appartenant au groupe du mode s qui aura convergé et concernant le mode s+1.

Le processus reste identique à celui du mode précédent. Nous inspectons ainsi les n modes de vibration pour la même vitesse V. Nous reprenons ensuite les mêmes étapes de calcul pour toutes les vitesses du domaine operationnel.

L'obtention de la vitesse de flottement est à présent possible, il suffit de représenter graphiquement les n courbes $\omega = f_1(V)$ et les n courbes $\eta = f_2(V)$. La figure 3-8 représente un exemple de résultats de flottement par cette méthode.

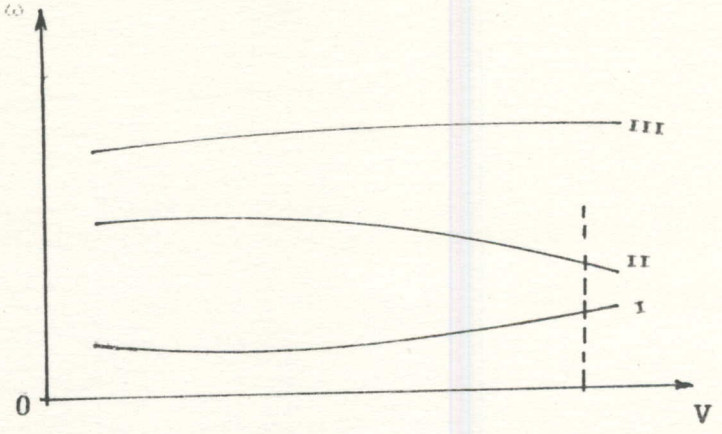


Figure 3-8 a: Fréquence de vibration en fonction de la vitesse de vol

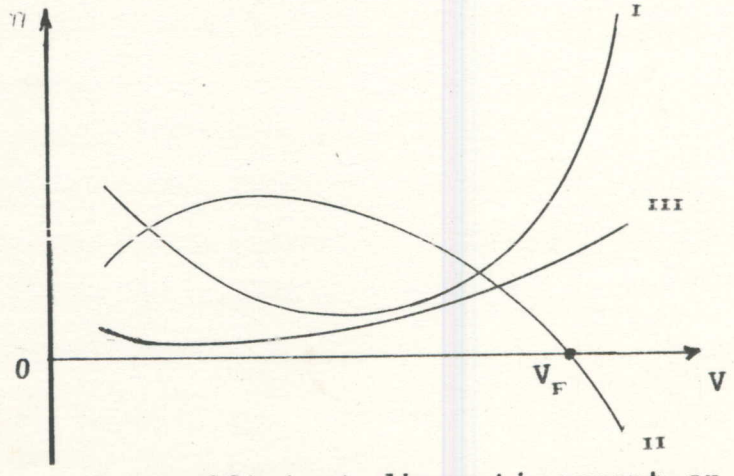


Figure 3-8 b: Coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse de vol

Figure 3-8 :Détermination de la vitesse de flottement par la résolution des équations Anglaises (procédé itératif)

La figure 3-9 est un organigramme simplifié représentant l'organisation générale du programme principal de la résolution des équations Anglaises du flottement par le procédé itératif.

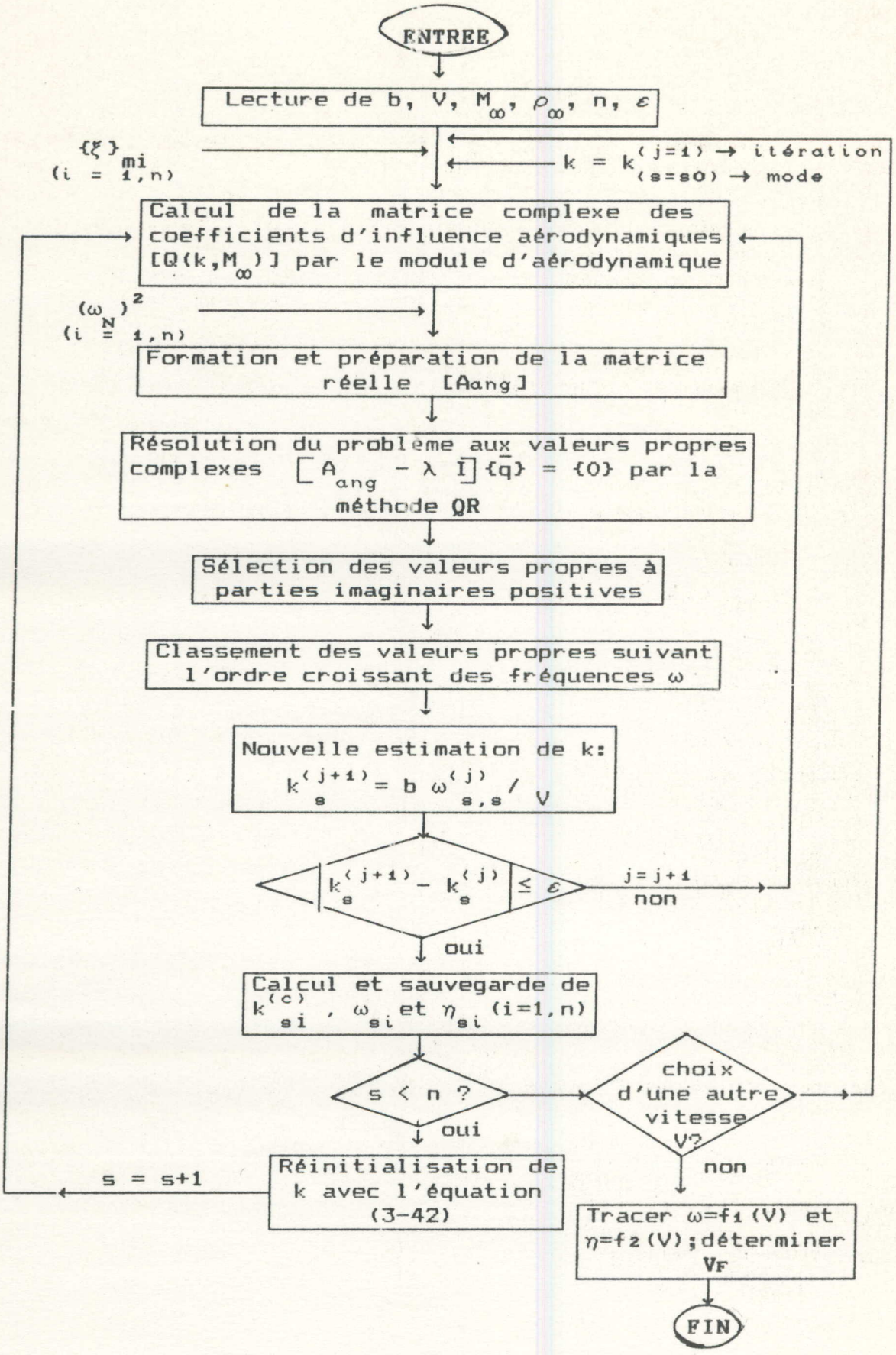


Figure 3-9: Organigramme de résolution de l'équation Anglaise du flottement par le procédé itératif

3.6 AMELIORATION DES ALGORITHMES ITERATIFS DU POINT DE VUE TEMPS D'EXECUTION:

Les plus grands inconvénients des méthodes de résolution des équations du flottement sont:

1- la grande dimension du système nécessitant une importante capacité mémoire, c'est pourquoi les équations du flottement étaient résolues sur de gros ordinateurs tels que " HP", " VAX", "IBM" etc... . Nous avons rendu cette résolution possible sur micro-ordinateur en réduisant artificiellement la dimension du système et en optimisant les programmes.

2- Le temps de calcul considérable à cause de la nécessité de déterminer les forces aérodynamiques et de résoudre un problème aux valeurs propres complexes à chaque itération, particulièrement pour les méthodes itératives développées. Il faudra également noter le nombre assez important des itérations nécessaires à la résolution.

En balayant ainsi toute la plage des vitesses, nous nous heurtons à un problème de temps d'exécution remarquablement important; dû à ce fait, nous avons d'abord donné à nos algorithmes la possibilité de permettre à un utilisateur bousculé par le temps, d'arrêter l'exécution du programme à n'importe quelle étape des itérations, à n'importe quel mode de vibration et à n'importe quelle vitesse, de stocker tous les résultats intermédiaires dans un fichier et de reprendre les calculs par la suite sans que la partie déja effectuée ne soit perdue. Ceci est une petite astuce pratique, mais qui ne régle en rien le problème sus-cité.

LAWRENCE et JACKSON [5] résolvent ce problème en partant de l'hypothèse qu'en régime subsonique, les forces aérodynamiques sont indépendantes du nombre de Mach et donc de la vitesse de vol, c'est pourquoi, ils calculent une

matrice aérodynamique pour une valeur de k donnée, et cette matrice sera valable pour toutes les vitesses appartenant au domaine subsonique. Ils diminuent, par ce procédé, considerablement le temps de calcul mais ils augmentent l'erreur sur la vitesse de flottement car, et nous l'avons vérifié par le calcul, l'approximation qu'ils utilisent n'est pas tout à fait correcte.

Par la suite nous avons pensé nécessaire d'intervenir sur le second paramètre qui influence le temps d'exécution: c'est le nombre d'itérations sur la fréquence réduite ou paramètre de fréquence k.

Nous remarquons que pour les petites vitesses, les modes vibrent à des fréquences trés proches de leurs fréquences naturelles. C'est pourquoi, pour la plus petite vitesse V_i, au lieu de commencer les itérations par une valeur de k proche de zéro et souvent trés loin de celle qui donnera convergence, nous choisissons d'initialiser la première itération par :

$$k_{s,i}^{(1)} = \left(\omega_N\right)_s \frac{b}{V_i} \qquad (3\text{-}43)$$

où s représente le numéro du mode sous investigation

et i le numéro de la vitesse V choisie.

L'algorithme se déroule ensuite normalement, selon que l'on résoud les équations Américaines ou Aglaises du flottement, jusqu'à convergence des n modes à la vitesse V_i. Nous passons alors à la vitesse suivante V_{i+1} en réinitialisant avec:

$$k_{s,i+1}^{(1)} = \omega_{s,i}^{(c)} \frac{b}{V_{i+1}} \qquad (3\text{-}44)$$

$\omega^{(c)}_{s,i}$ étant la fréquence de vibration du mode s qui a convergé pour la vitesse V_i.

3.7 CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons établi les formulations Américaine et Anglaise de l'équation du flottement aéroélastique. Nous avons développé, pour chacune de ces formulations, des méthodes de résolution expliquées par des algorithmes assez détaillés et des organigrammes simplifiés. Ces méthodes nécessitent la résolution de problèmes aux valeurs propres divers et le calcul des forces aérodynamiques instationnaires pour chaque couple (k,M_∞). Nous avons ensuite tenté une amélioration des procédés itératifs pour chacune des deux formulations afin de minimiser le temps de calcul sur machine. Plusieurs subroutines nécessaires à la formulation et la résolution des équations du flottement ont été développées. Une liste non exhaustive est donnée dans l'annexe D.

CHAPITRE 4

DESCRIPTION DE DEUX STRUCTURES D'AVION

4.1 INTRODUCTION:

Nous consacrons ce quatrième chapitre à la description des deux structures auxquelles nous allons appliquer le code de calcul de flottement que nous avons développé. Ce sont les suivantes:

- une aile rectangulaire monocaisson décrite par les figures 4-1 et 4-2 et les tableaux 4-1 et 4-2.
- un empennage horizontal, multicaisson, effilé et à flèche arrière décrit par les figures 4-3 et 4-4 et les tableaux 4-3 et 4-4.

4.2 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU MATERIAU UTILISE:

Le materiau constituant les deux structures est un alliage d'aluminium dont les caractéristiques physiques sont:

module de Young	$E = 69.0 \ 10^9 \ N/m^2$
coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
masse volumique	$\rho_{al} = 2816.0 \ Kg/m^3$

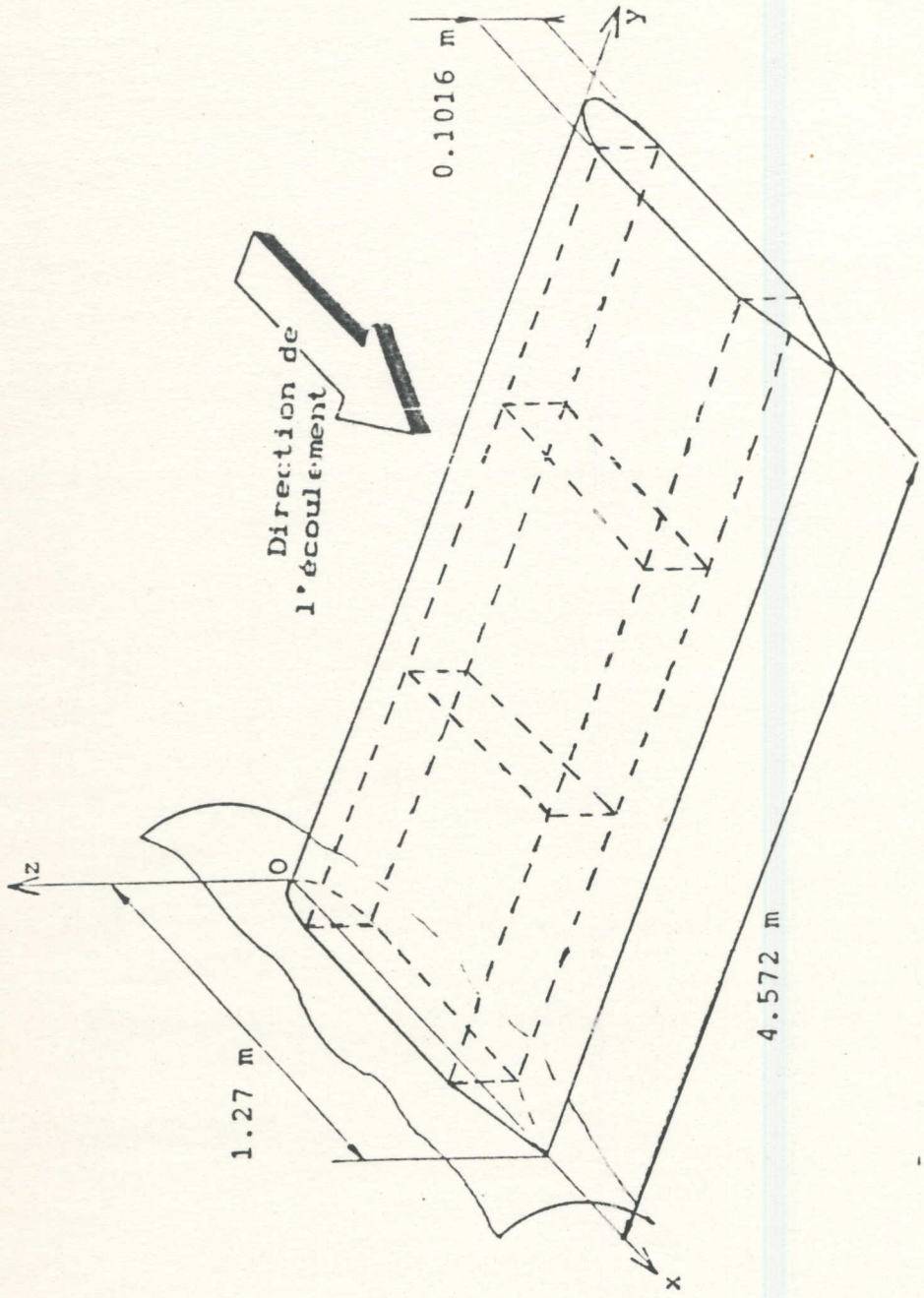


Figure 4-1: Aile rectangulaire

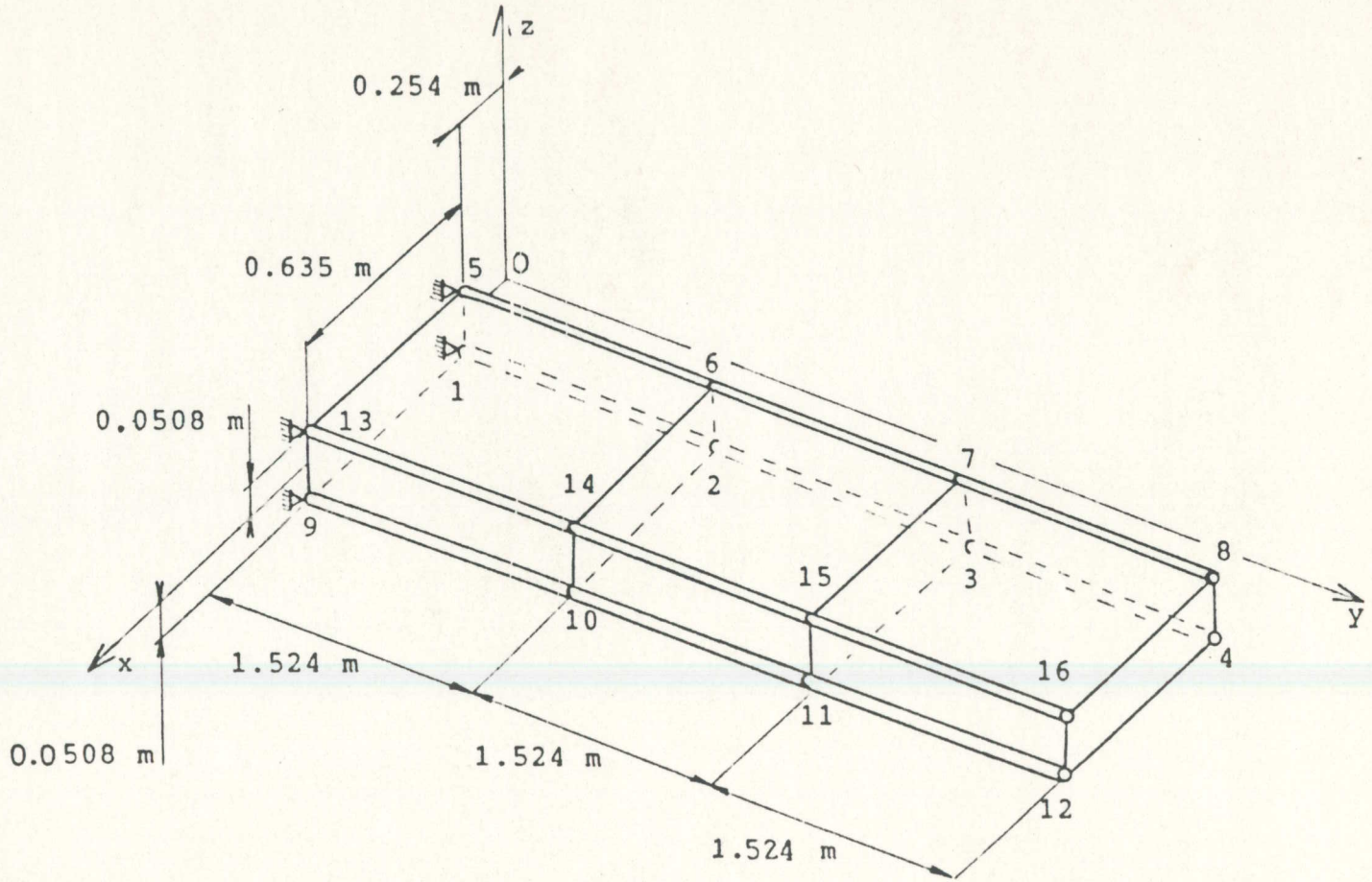


Figure 4-2: Maillage par éléments finis de l'aile rectangulaire

Tableau 4-1: Coordonnées des noeuds du maillage structural de l'aile rectangulaire

Numéro de noeud	coordonnée X (m)	coordonnée Y (m)	coordonnée Z (m)
1	0.254	0.000	- 0.0508
2	0.254	1.524	- 0.0508
3	0.254	3.048	- 0.0508
4	0.254	4.572	- 0.0508
5	0.254	0.000	0.0508
6	0.254	1.524	0.0508
7	0.254	3.048	0.0508
8	0.254	4.572	0.0508
9	0.889	0.000	- 0.0508
10	0.889	1.524	- 0.0508
11	0.889	3.048	- 0.0508
12	0.889	4.572	- 0.0508
13	0.889	0.000	0.0508
14	0.889	1.524	0.0508
15	0.889	3.048	0.0508
16	0.889	4.572	0.0508

Tableau 4-2: Type de chaque élément du maillage structural de l'aile rectangulaire

Numéro de l'élément	noeuds de l'élément				Type de l'élément
1	1	2			Elément poutre
2	2	3			Elément poutre
3	3	4			Elément poutre
4	1	2	5	6	Elément plaque quadrilatérale
5	2	3	6	7	Elément plaque quadrilatérale
6	3	4	7	8	Elément plaque quadrilatérale
7	5	6			Elément poutre
8	6	7			Elément poutre
9	7	8			Elément poutre
10	1	2	9	10	Elément plaque quadrilatérale
11	2	3	10	11	Elément plaque quadrilatérale
12	3	4	11	12	Elément plaque quadrilatérale
13	5	6	13	14	Elément plaque quadrilatérale
14	6	7	14	15	Elément plaque quadrilatérale
15	7	8	15	16	Elément plaque quadrilatérale
16	9	10			Elément poutre
17	10	11			Elément poutre
18	11	12			Elément poutre
19	9	10	13	14	Elément plaque quadrilatérale
20	10	11	14	15	Elément plaque quadrilatérale
21	11	12	15	16	Elément plaque quadrilatérale
22	13	14			Elément poutre
23	14	15			Elément poutre
24	15	16			Elément poutre
25	2	6	10	14	Elément plaque quadrilatérale
26	3	7	11	15	Elément plaque quadrilatérale
27	4	8	12	16	Elément plaque quadrilatérale

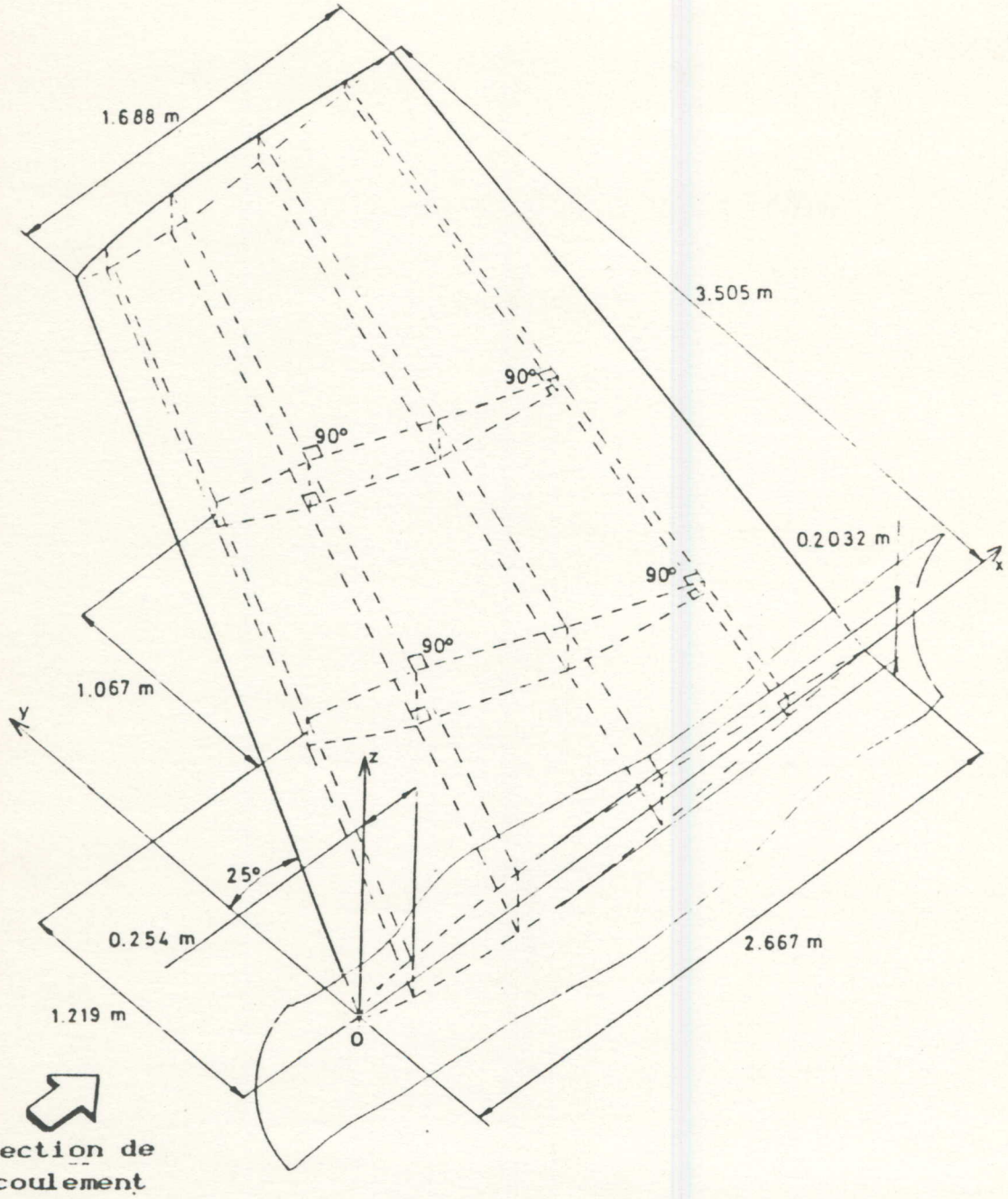


Figure 4-3: Empennage horizontal

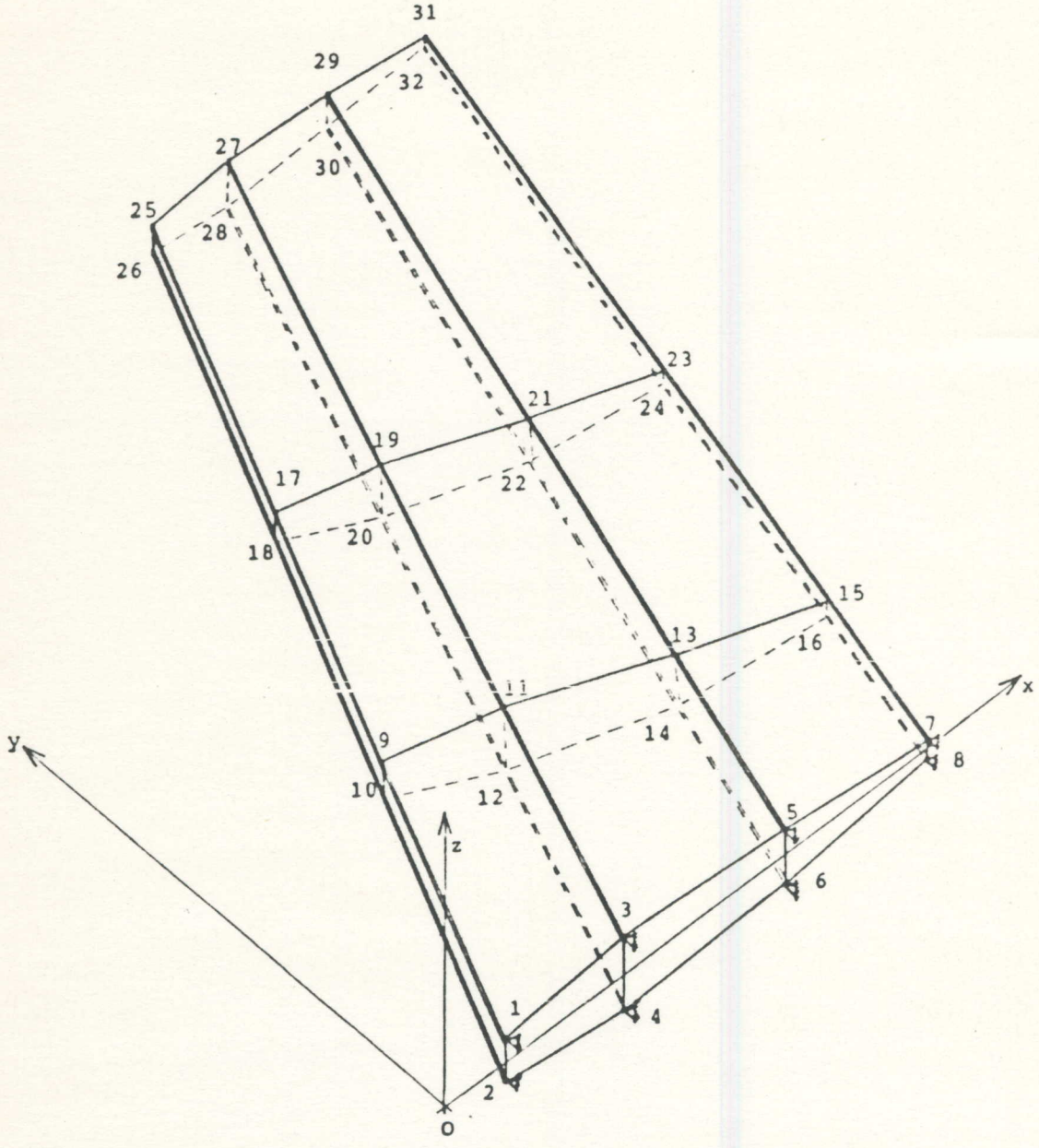


Figure 4-4: Maillage par éléments finis de l'empennage horizontal

Tableau 4-3 : Coordonnées des noeuds du maillage structural de l'empennage horizontal

Numéro de noeud	coordonnée X (m)	coordonnée Y (m)	coordonnée Z (m)
1	0.2540	0.0000	0.1270
2	0.2540	0.0000	- 0.1270
3	0.8128	0.0000	0.2032
4	0.8128	0.0000	- 0.2032
5	1.5748	0.0000	0.1524
6	1.5748	0.0000	- 0.1524
7	2.2606	0.0000	0.0508
8	2.2606	0.0000	- 0.0508
9	0.7901	1.2192	0.1108
10	0.7901	1.2192	- 0.1108
11	1.2157	1.0570	0.1807
12	1.2157	1.0570	- 0.1807
13	1.8235	0.8253	0.1392
14	1.8235	0.8253	- 0.1392
15	2.4187	0.6886	0.0471
16	2.4187	0.6886	- 0.0471
17	1.2592	2.2860	0.0966
18	1.2592	2.2860	- 0.0966
19	1.6302	2.1445	0.1576
20	1.6302	2.1445	- 0.1576
21	2.1602	1.9425	0.1214
22	2.1602	1.9425	- 0.1214
23	2.6792	1.8234	0.0411
24	2.6792	1.8234	- 0.0411
25	1.7953	3.5052	0.0804
26	1.7953	3.5052	- 0.0804
27	2.1489	3.5052	0.1286
28	2.1489	3.5052	- 0.1286
29	2.6312	3.5052	0.0964
30	2.6312	3.5052	- 0.0964
31	3.0653	3.5052	0.0322
32	3.0653	3.5052	- 0.0322

Tableau 4-4 : Type de chaque élément du maillage structural de l'empennage horizontal

Numéro de l'élément	Noeuds de l'élément				Type de l'élément
1	2	1	10	9	Elément plaque quadrilatérale
2	4	3	12	11	Elément plaque quadrilatérale
3	6	5	14	13	Elément plaque quadrilatérale
4	8	7	16	15	Elément plaque quadrilatérale
5	1	3	9	11	Elément plaque quadrilatérale
6	2	4	10	12	Elément plaque quadrilatérale
7	3	5	11	13	Elément plaque quadrilatérale
8	4	6	12	14	Elément plaque quadrilatérale
9	5	7	13	15	Elément plaque quadrilatérale
10	6	8	14	16	Elément plaque quadrilatérale
11	1	9			Elément poutre
12	2	10			Elément poutre
13	3	11			Elément poutre
14	4	12			Elément poutre
15	5	13			Elément poutre
16	6	14			Elément poutre
17	7	15			Elément poutre
18	8	16			Elément poutre
19	10	9	12	11	Elément plaque quadrilatérale
20	12	11	14	13	Elément plaque quadrilatérale
21	14	13	16	15	Elément plaque quadrilatérale
22	10	9	18	17	Elément plaque quadrilatérale
23	12	11	20	19	Elément plaque quadrilatérale
24	14	13	22	21	Elément plaque quadrilatérale
25	16	15	24	23	Elément plaque quadrilatérale
26	9	11	17	19	Elément plaque quadrilatérale
27	10	12	18	20	Elément plaque quadrilatérale
28	11	13	19	21	Elément plaque quadrilatérale
29	12	14	20	22	Elément plaque quadrilatérale
30	13	15	21	23	Elément plaque quadrilatérale
31	14	16	22	24	Elément plaque quadrilatérale
32	9	17			Elément poutre
33	10	18			Elément poutre
34	11	19			Elément poutre
35	12	20			Elément poutre
36	13	21			Elément poutre
37	14	22			Elément poutre
38	15	23			Elément poutre
39	16	24			Elément poutre
40	18	17	20	19	Elément plaque quadrilatérale
41	20	19	22	21	Elément plaque quadrilatérale
42	22	21	24	23	Elément plaque quadrilatérale
43	18	17	26	25	Elément plaque quadrilatérale
44	20	19	28	24	Elément plaque quadrilatérale
45	22	21	30	29	Elément plaque quadrilatérale
46	24	23	32	31	Elément plaque quadrilatérale
47	17	19	25	27	Elément plaque quadrilatérale
48	18	20	26	28	Elément plaque quadrilatérale
49	19	21	27	29	Elément plaque quadrilatérale
50	20	22	28	30	Elément plaque quadrilatérale
51	21	23	29	31	Elément plaque quadrilatérale
52	22	24	30	32	Elément plaque quadrilatérale
53	17	25			Elément poutre
54	18	26			Elément poutre
55	19	27			Elément poutre
56	20	28			Elément poutre
57	21	29			Elément poutre
58	22	30			Elément poutre
59	23	31			Elément poutre
60	24	32			Elément poutre
61	26	25	28	27	Elément plaque quadrilatérale
62	28	27	30	29	Elément plaque quadrilatérale
63	30	29	32	31	Elément plaque quadrilatérale

CHAPITRE 5

APPLICATIONS ET RESULTATS

5.1 INTRODUCTION:

Dans ce dernier chapitre, nous présentons les résultats obtenus en appliquant notre logiciel aux deux structures décrites dans le chapitre précédent.

Les conditions de vol sont fixées comme suit:

altitude	h = 2962 m
masse volumique de l'air	ρ_∞= 0.909 kg/m^3
vitesse du son dans l'air	a = 335 m/s

Notons que notre code de calcul est exécuté sur un micro-ordinateur PC AT 80-386 SX cadensé à 25 MHz. La précision sur le paramètre k, fixée à 10^{-3}, est considérée dans le milieu de l'industrie aéronautique comme trés satisfaisante [12].

Les comportements naturels des deux structures seront décrits par leurs fréquences et leurs modes naturels. Ensuite seront présentés des courbes relatives à chaque structure pour chaque méthode de résolution. Une comparaison entre les vitesses de flottement, l'explosivité et le temps de calcul pour les différentes méthodes de résolution sera faite. Nous comparerons également nos résultats avec ceux obtenus par McINTOSH et ASHLEY [35] sur l'aile rectangulaire. Cette référence étant la seule parmi toutes celles à notre disposition qui ait fourni toutes les données nécessaires pour qu'une comparaison puisse être faite.

5.2 RESULTATS DE L'APPLICATION DU LOGICIEL DEVELOPPE A L'AILE RECTANGULAIRE:

5.2.1 Valeurs et vecteurs propres naturels:

Avant de résoudre le problème aux valeurs propres réduit, nous avons d'abord résolu le problème global afin de pouvoir justifier l'utilisation d'une méthode de condensation statique . Le tableau 5-1 englobe les fréquences naturelles du problème global et celles du problème réduit de l'aile rectangulaire. Ces dernières sont aussi appelées fréquences naturelles principales. Une comparaison entre deux fréquences naturelles correspondantes montre une différence insignifiante pour les premières fréquences du système libre non amorti. Cette différence s'accentue légèrement lorsque nous avançons vers les plus grandes fréquences. Ceci n'est cependant pas un problème puisque nous utilisons par la suite une superposition modale utilisant les six premiers modes naturels uniquement.

La détermination des vecteurs propres naturels du système global nous permet de justifier l'hypothèse que les déformations des structures aéronautiques sont prépondérantes dans la direction Z (voir chapitre 1). En effet, les deux exemples de vecteurs propres que nous considérons sont représentés par les tableaux 5-2 et 5-3. Il est facile d'y remarquer que les déplacements dans les directions X et Y sont négligeables devant ceux dans la direction Z. C'est également le cas pour tous l'ensemble des vecteurs propres naturels du système global. Sur les mêmes tableaux figurent les vecteurs propres naturels déterminés par la résolution du système condensé. Nous remarquons sans peine que les composantes de ces vecteurs sont égales aux déplacements dans la direction Z du vecteur propre global correspondant.

Tous ce qui vient d'être dit justifie l'utilisation d'une méthode de condensation et laisse considérer celle de Guyan comme une technique tout à fait satisfaisante.

Tableau 5-1: Comparaison entre les fréquences naturelles du problème global et celles du problème réduit de l'aile rectangulaire

Mode	Fréquences en Hz	
	Problème global	Problème réduit
1	10.78	10.78
2	28.67	28.67
3	37.00	
4	69.20	69.20
5	104.2	104.2
6	165.9	
7	190.5	190.5
8	222.9	223.0
9	273.4	
10	378.0	685.9
11	791.7	
12	855.7	
13	889.8	
14	1093.	
15	1159.	
16	1233.	
17	1244.	
18	1296.	
19	1347.	
20	1413.	
21	1600.	
22	1606.	
23	1634.	
24	1775.	
25	2423.	
26	2571.	
27	2700.	
28	2833.	
29	2905.	3083.
30	3137.	3580.
31	4305.	4257.
32	4430.	
33	4451.	
34	4500.	4588.
35	4652.	4698.
36	4817.	

Tableau 5-2: Comparaison entre le 1^{er} mode naturel complet et le 1^{er} mode naturel du problème réduit de l'aile rectangulaire

N° de Noeud	1^{er} mode naturel complet			1^{er} mode naturel (Pb réduit)
	déplacement dans la direction X	déplacement dans la direction Y	déplacement dans la direction Z	déplacement dans la direction Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.1072×10^{-3}	0.2044×10^{-2}	0.3538×10^{-1}	0.3538×10^{-1}
3	0.2101×10^{-4}	0.2986×10^{-2}	0.1147	0.1147
4	0.6629×10^{-5}	0.3204×10^{-2}	0.2093	0.2093
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.1070×10^{-3}	-0.2044×10^{-2}	0.3538×10^{-1}	0.3538×10^{-1}
7	-0.2179×10^{-4}	-0.2986×10^{-2}	0.1147	0.1147
8	-0.6990×10^{-5}	-0.3204×10^{-2}	0.2093	0.2093
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	-0.1072×10^{-3}	0.2044×10^{-2}	0.3538×10^{-1}	0.3538×10^{-1}
11	-0.2085×10^{-4}	0.2986×10^{-2}	0.1147	0.1147
12	-0.6697×10^{-5}	0.3204×10^{-2}	0.2093	0.2093
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.1069×10^{-3}	-0.2044×10^{-2}	0.3538×10^{-1}	0.3538×10^{-1}
15	0.2175×10^{-4}	-0.2986×10^{-2}	0.1147	0.1147
16	0.6849×10^{-5}	-0.3204×10^{-2}	0.2093	0.2093

Tableau 5 3: Comparaison entre le $8^{ème}$ mode naturel complet et le $6^{ème}$ mode naturel du prolème réduit de l'aile rectangulaire

N° de Noeud	$8^{ème}$ mode naturel complet			$6^{ème}$ mode naturel (Pb réduit)
	déplacement dans la direction X	déplacement dans la direction Y	déplacement dans la direction Z	déplacement dans la direction Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2586×10^{-1}	0.3894×10^{-2}	-0.1731	-0.1733
3	-0.2964×10^{-1}	0.1634×10^{-2}	0.2143	0.2143
4	0.2999×10^{-1}	-0.1687×10^{-1}	-0.2048	-0.2048
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.2591×10^{-1}	-0.3892×10^{-2}	-0.1732	-0.1733
7	0.6964×10^{-1}	-0.1638×10^{-2}	0.2142	0.2143
8	-0.2998×10^{-1}	0.1687×10^{-1}	-0.2048	-0.2048
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.2590×10^{-1}	-0.3897×10^{-2}	0.1731	0.1733
11	-0.2963×10^{-1}	-0.1636×10^{-2}	-0.2142	-0.2143
12	0.2998×10^{-1}	-0.1688×10^{-1}	0.2048	0.2048
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	-0.2586×10^{-1}	0.3896×10^{-2}	0.1733	0.1733
15	0.2565×10^{-1}	0.1636×10^{-2}	-0.2142	-0.2143
16	-0.2999×10^{-1}	-0.1687×10^{-1}	0.2047	0.2048

5.2.2 Résultats de la superposition modale:

Afin de savoir jusqu'à combien de modes l'on peut tronquer la matrice modale tout en ayant une bonne précision sur la vitesse de flottement, nous avons commencé par résoudre les équations complètes du flottement. Nous avons par la suite tronqué la matrice modale d'un vecteur à chaque fois. Nous remarquons qu'avec une matrice constituée des trois premiers modes naturels principaux uniquement la résolution donne la même vitesse de flottement qu'avec une matrice modale complète (erreur de 0.008 %). Cependant, nous choisissons de prendre six modes qui est le nombre en général utilisé par les aéroélasticiens pour cette approximation.

5.2.3 Résultats de flottement par la résolution des équations Américaines:

La résolution des équations Américaines du flottement a pour résultats une série de valeurs propres aéroélastiques complexes qui nous fournissent la fréquence de vibration et le coefficient d'amortissement fictif g pour chaque mode de vibration considéré. Nous représentons par la figure 5-1a la variation de la fréquence en fonction de la vitesse de vol et par la figure 5-1b celle du facteur g. Grâce à ces courbes, nous pouvons déterminer la vitesse critique de flottement. En effet, la situation où le coefficient g s'annule est critique et la vitesse correspondante est la vitesse de flottement (voir chapitre 3). Nous déterminons ainsi la vitesse de flottement pour l'aile rectangulaire. Cette vitesse critique est estimée à 282.66 m/s.

Nous remarquons sur la figure 5-1a qu'à l'approche de la vitesse de flottement, les courbes des fréquences des deux premiers modes tendent à se rapprocher, ce qui traduit le flottement de modes couplés. C'est le second mode de vibration qui présente un coefficient d'amortissement nul. C'est donc le mode critique de flottemment.

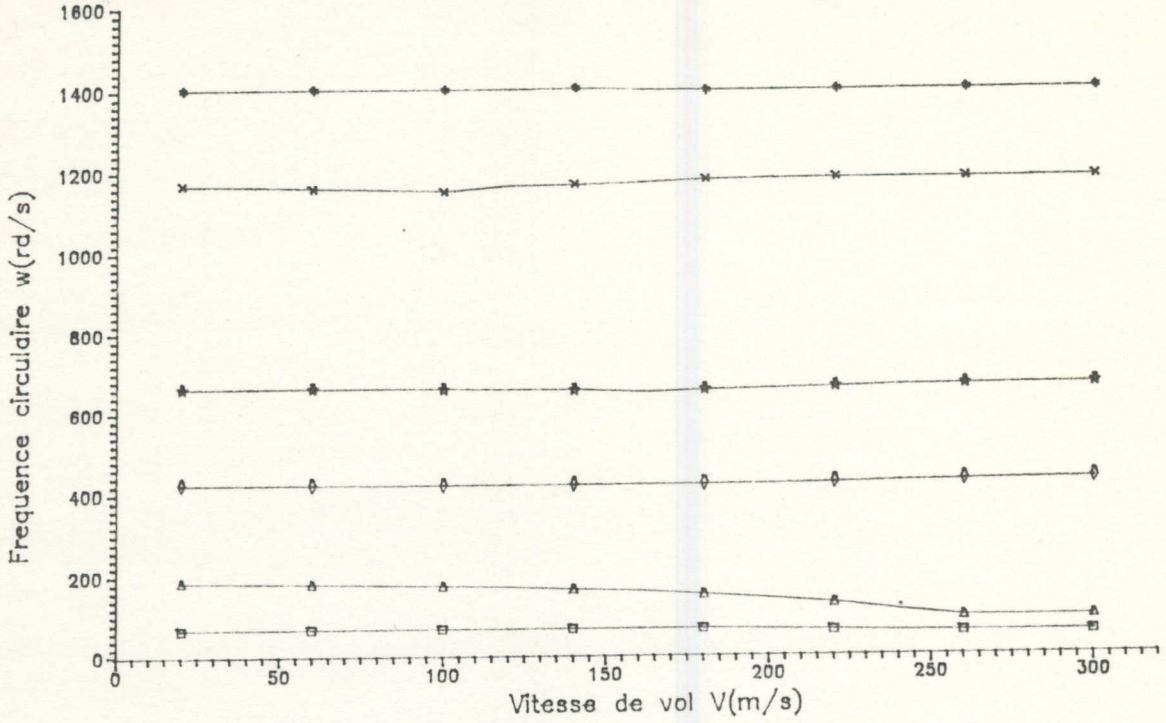


Figure 5-1a *: La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

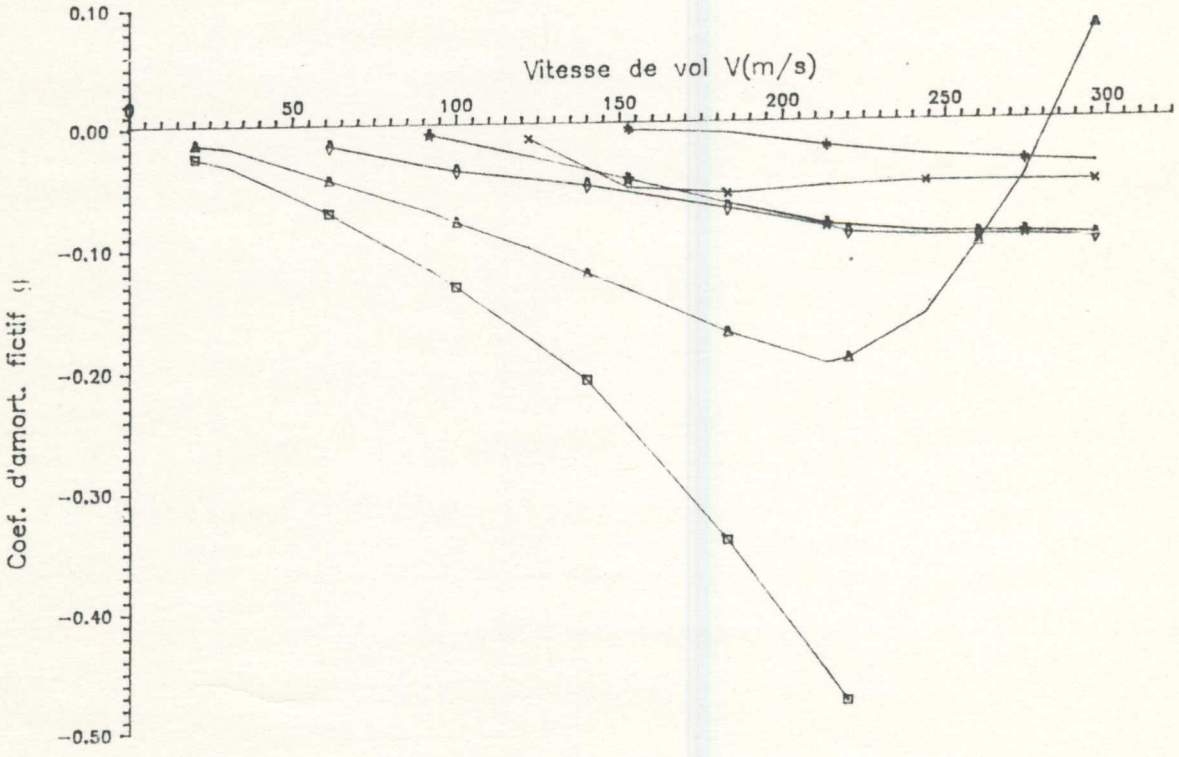


Figure 5-1b *: Le coefficient g en fonction de la vitesse*

Figure 5-1:Resultats de la resolution des equations Americaines du flottement (aile rectangulaire)

5.2.4 Résultats de flottement par la résolution des équations Anglaises:

5.2.4.1 Résultats de la méthode semi-graphique:

Tel que l'indique le nom que nous lui avons attribuée, cette méthode repose en grande partie sur une résolution graphique. En effet, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 3, nous obtenons une série de couples de graphes correspondant chacun à une valeur du paramètre de fréquence k. L'ensemble des figures 5-2 jusqu'à 5-11 représente cette série de couples de graphes pour l'aile rectangulaire. Nous en déduisons les valeurs de ω_{cr1}, ω_{cr2}, et V_{cr} pour chaque valeur de k. Ceci nous permet de tracer les deux graphes finaux de V_{cr} en fonction de k et sur un meme repère d'axes ω_{cr1} et ω_{cr2} en fonction de k. La détermination de la vitesse de flottement se fait de la manière expliquée dans le chapitre 3 et illustrée par la figure 5-12. La vitesse critique de flottement obtenue par cette méthode a pour valeur 277.58 m/s.

5.2.4.2 Résultats de la méthode itérative:

Les résultats obtenus nous permettent de tracer les courbes des fréquences et des coefficients d'amortissement en fonction de la vitesse de vol (figures 5-13a et 5-13b). Lorsque le coefficient d'amortissement s'annule (voir chapitre 3), il se produit un flottement dont la vitesse est estimée, par cette méthode, à 281.33 m/s. Nous remarquons encore une fois qu'à l'approche de cette vitesse, les fréquences des deux premiers modes tendent à se rapprocher. Ceci traduit le flottement des modes couplés, autrement dit, chacun des deux modes excite l'autre en amplifiant ainsi la vibration. Nous remarquons également que c'est encore le second mode de vibration qui présente un amortissement qui s'annule.

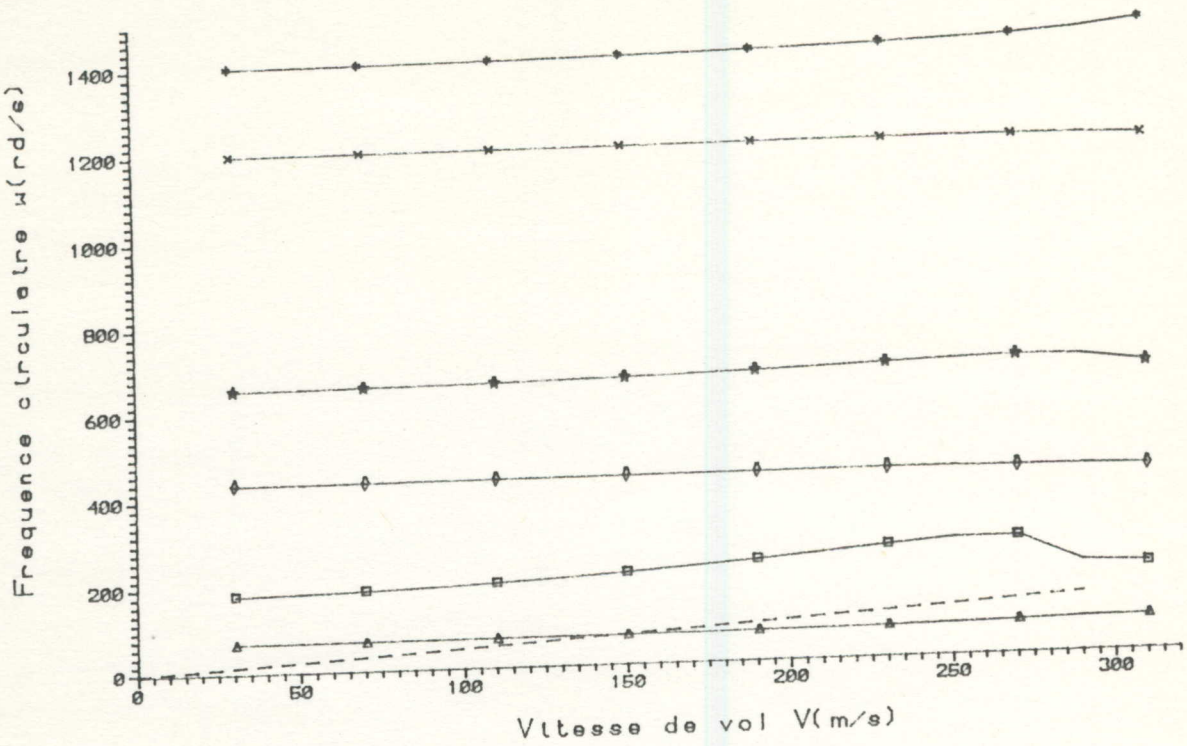


Figure 5-2a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

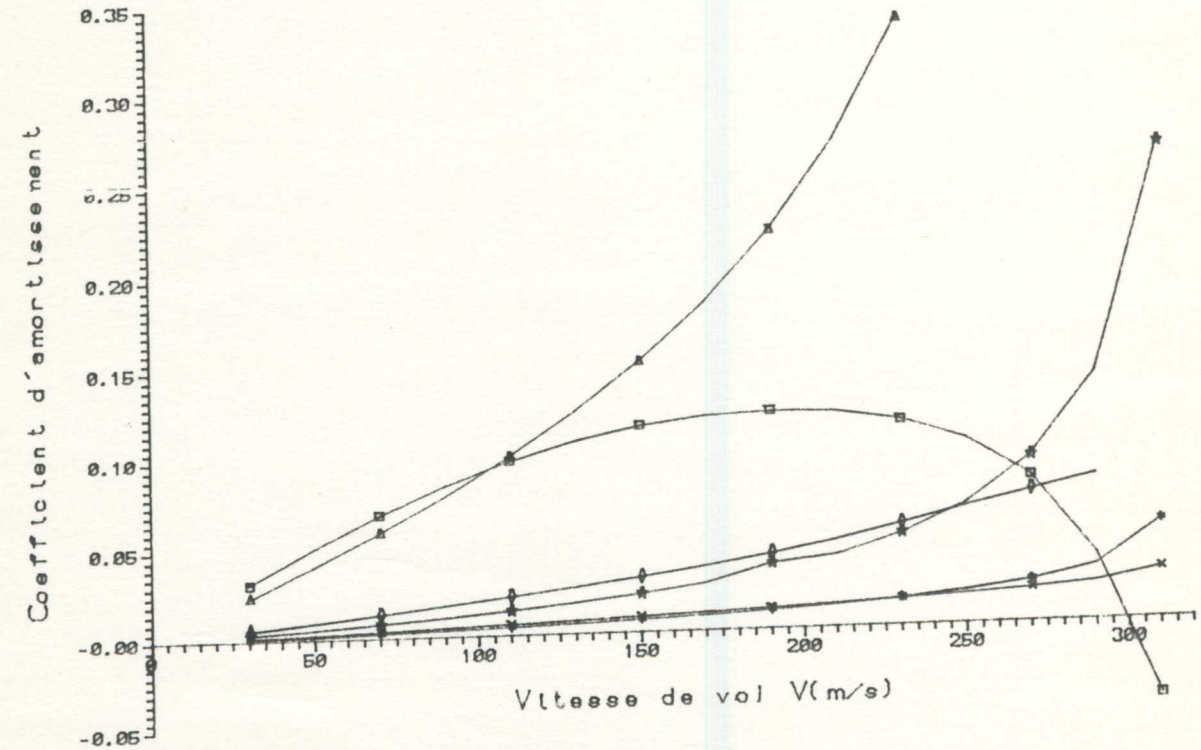


Figure 5-2b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess

Figure 5-2 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=0.6 (aile rectangulaire)

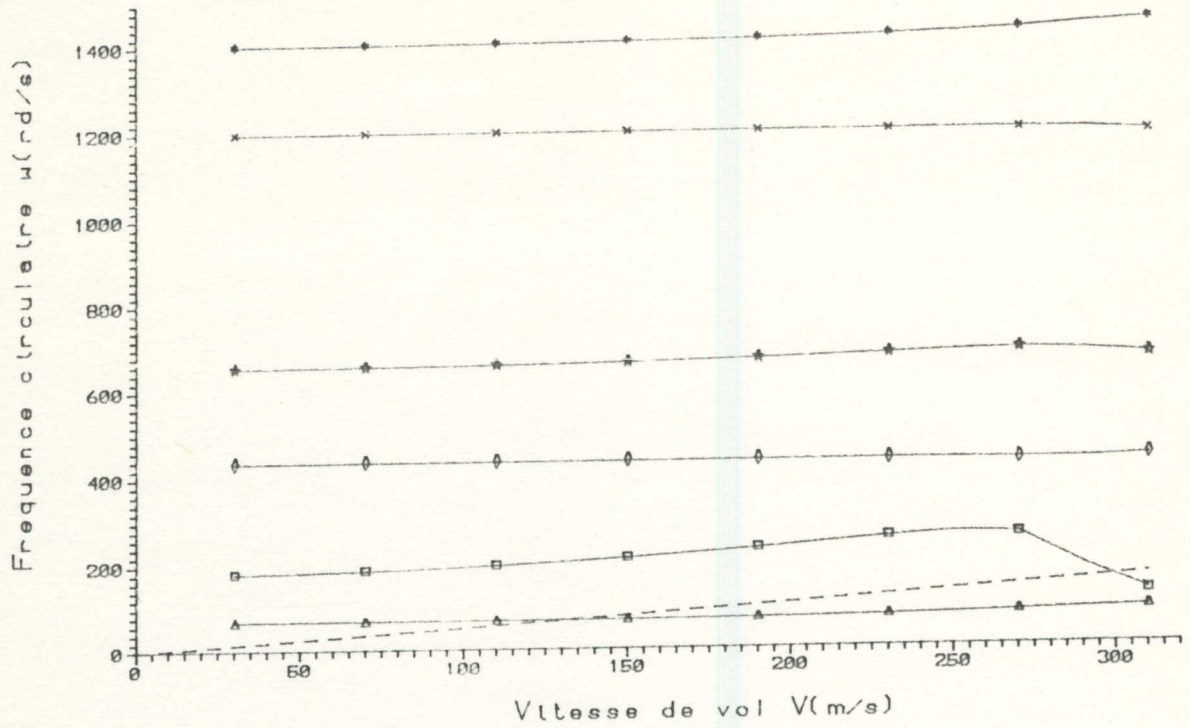


***Figure 5-3a** : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

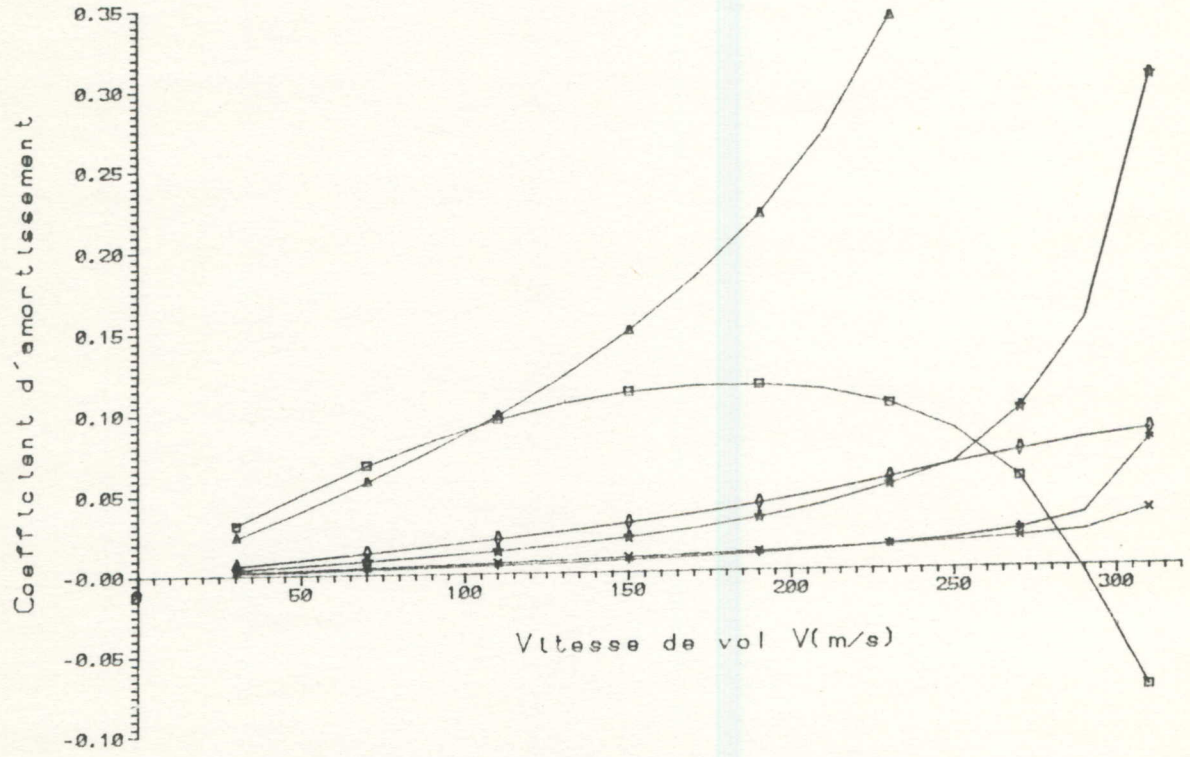


***Figure 5-3b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-3** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=0.7 (aile rectangulaire)*

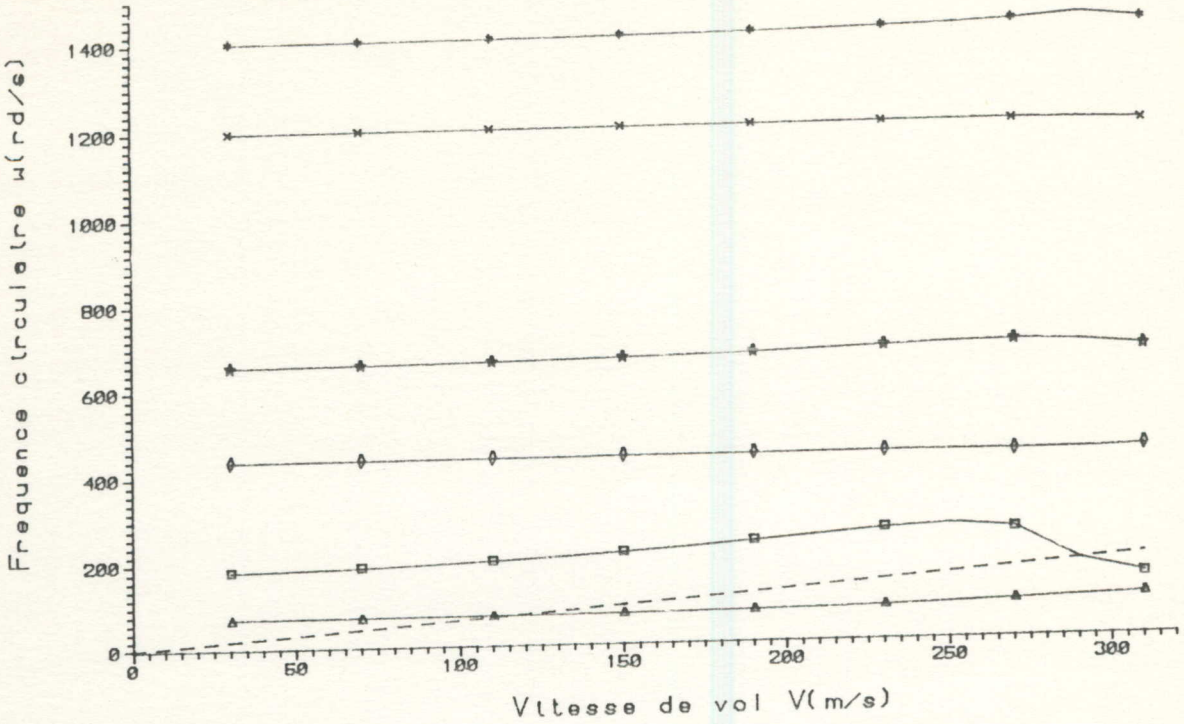


Figure 5-4a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

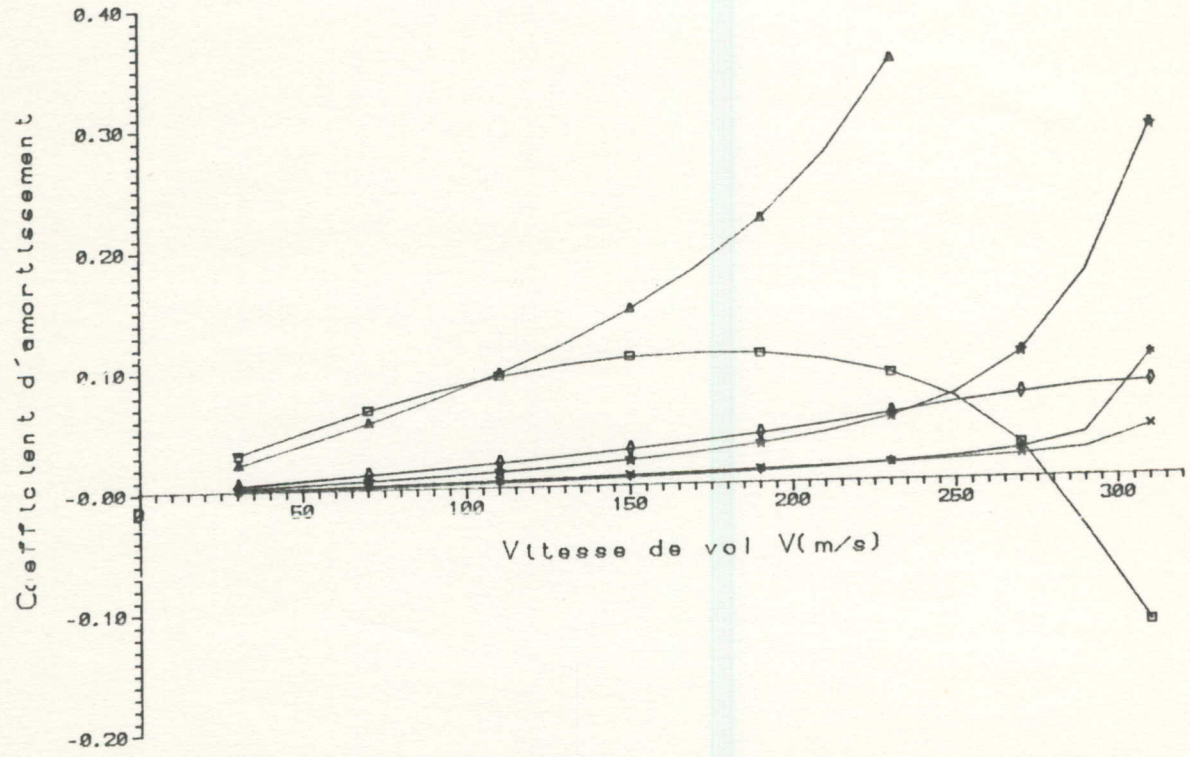


Figure 5-4b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess

Figure 5-4 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=0.8 (aile rectangulaire)

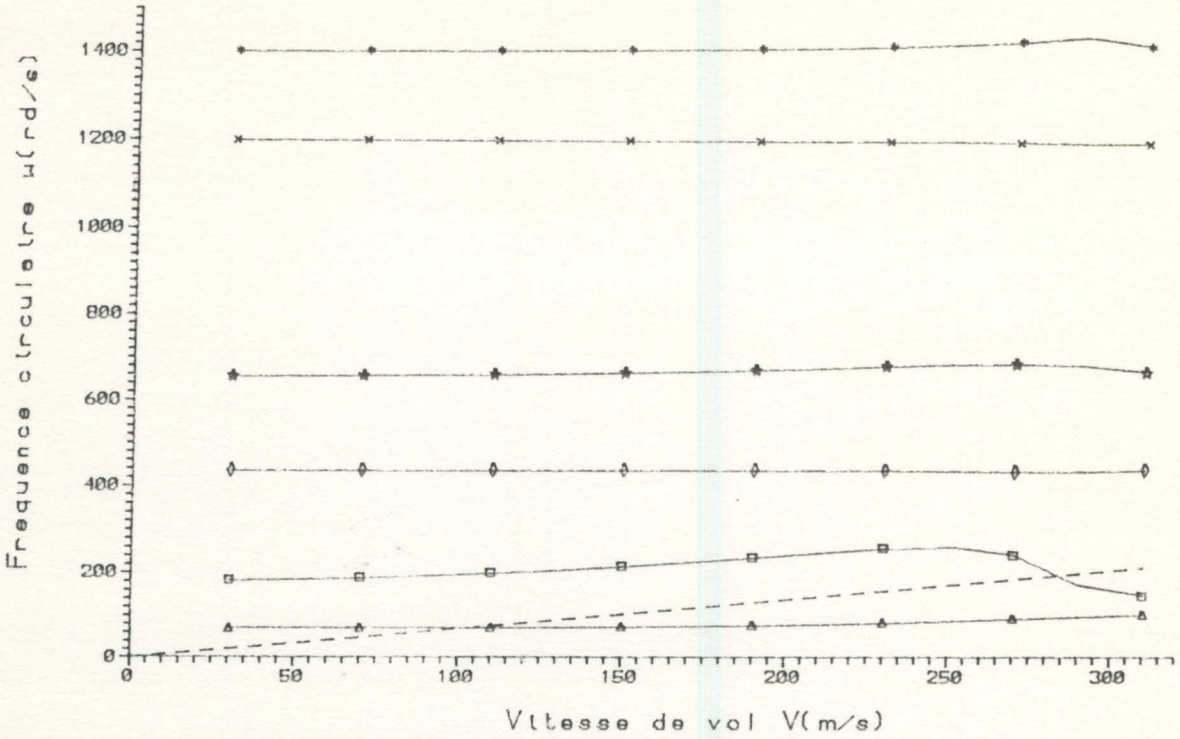


***Figure 5-5a** : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

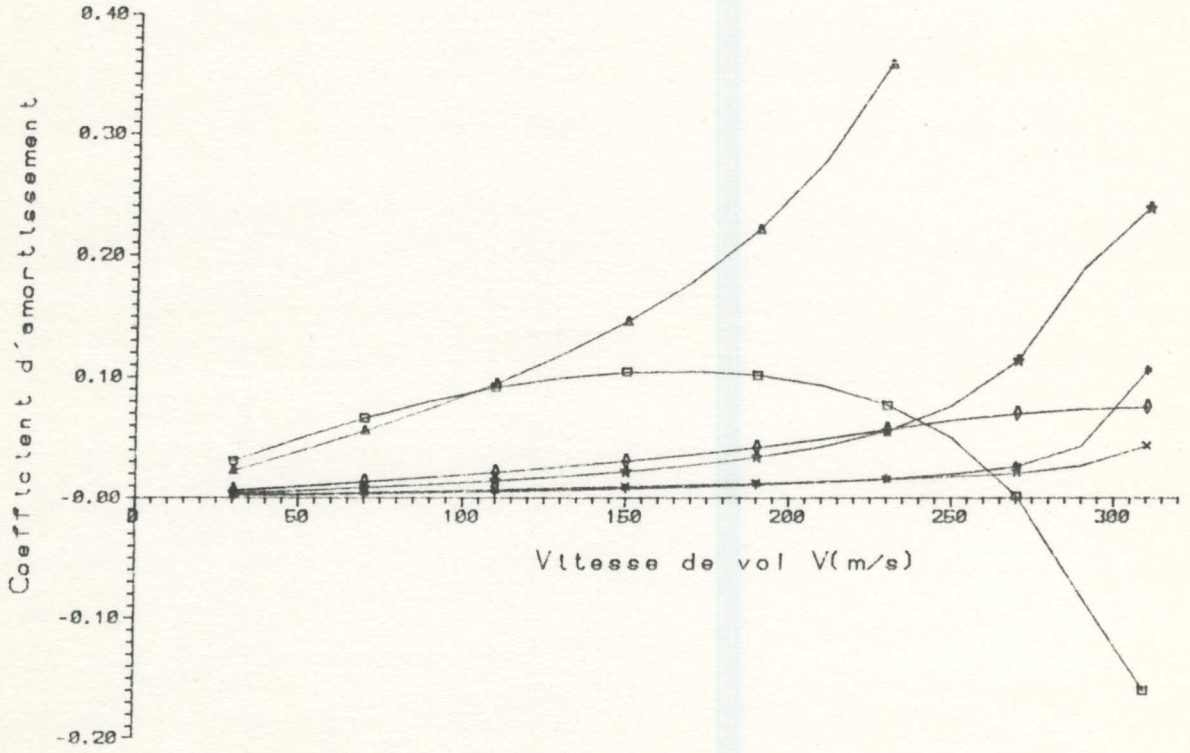


***Figure 5-5b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-5** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=0.9 (aile rectangulaire)*

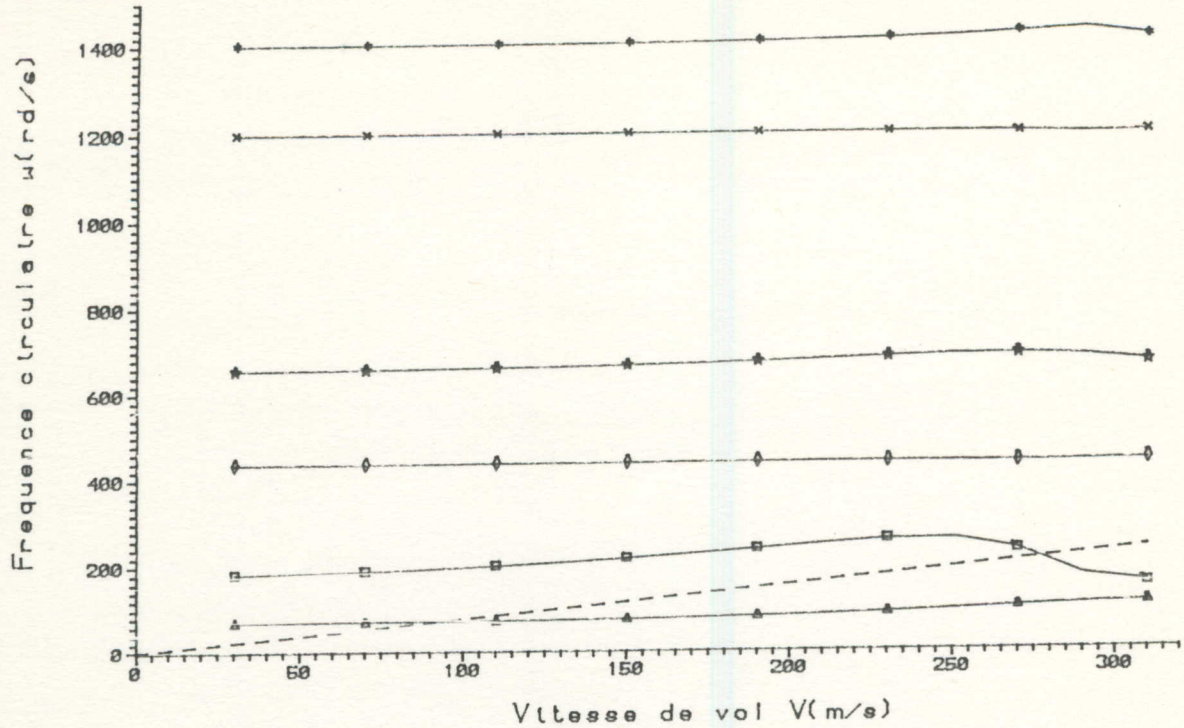


***Figure 5-6a** : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

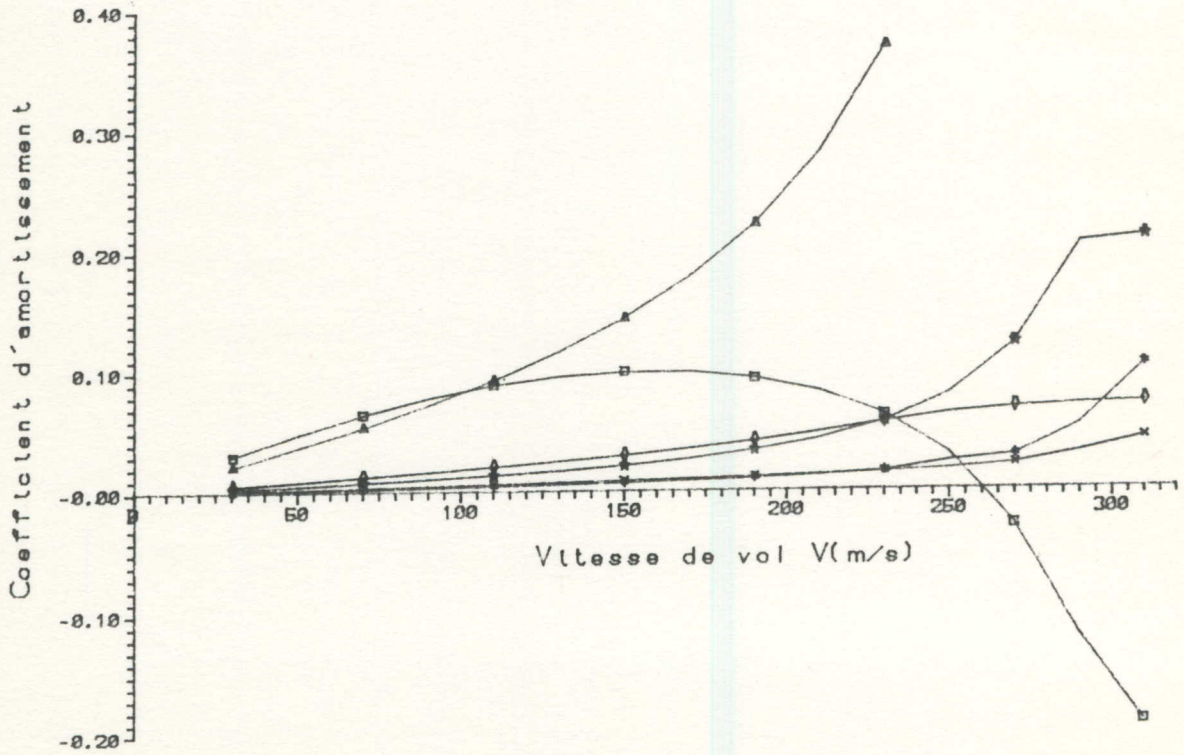


***Figure 5-6b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-6** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.0 (aile rectangulaire)*

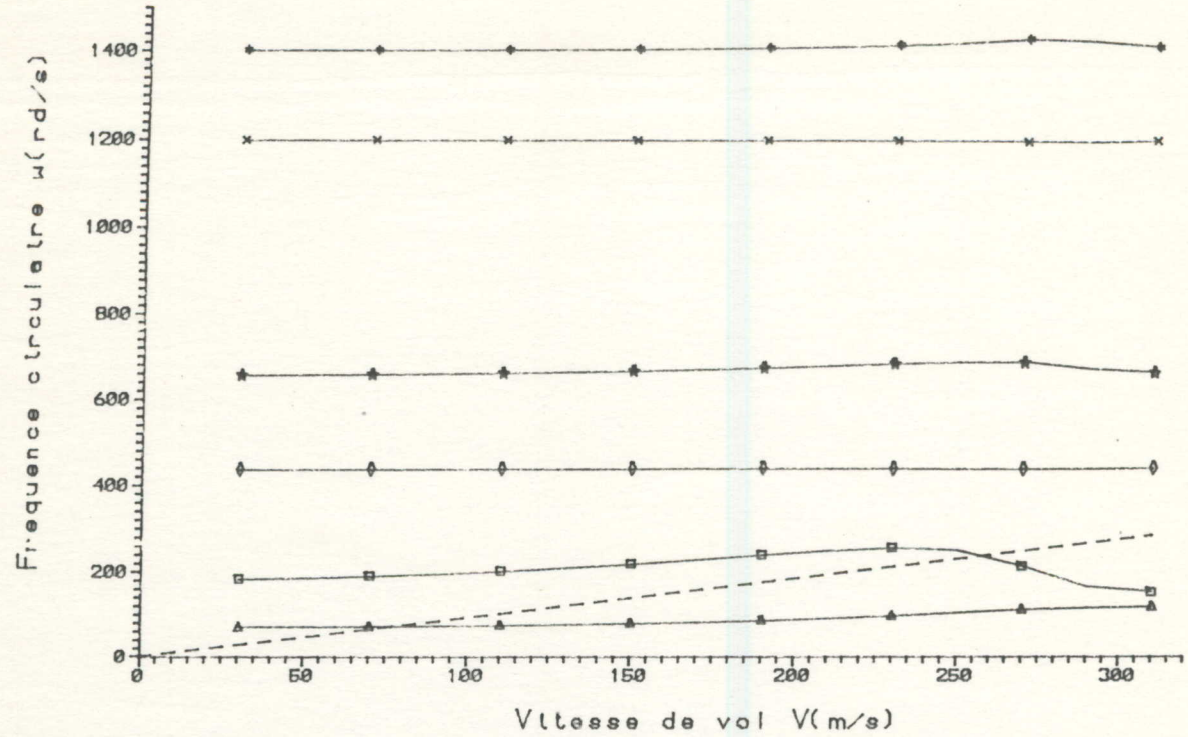


***Figure 5-7a** : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

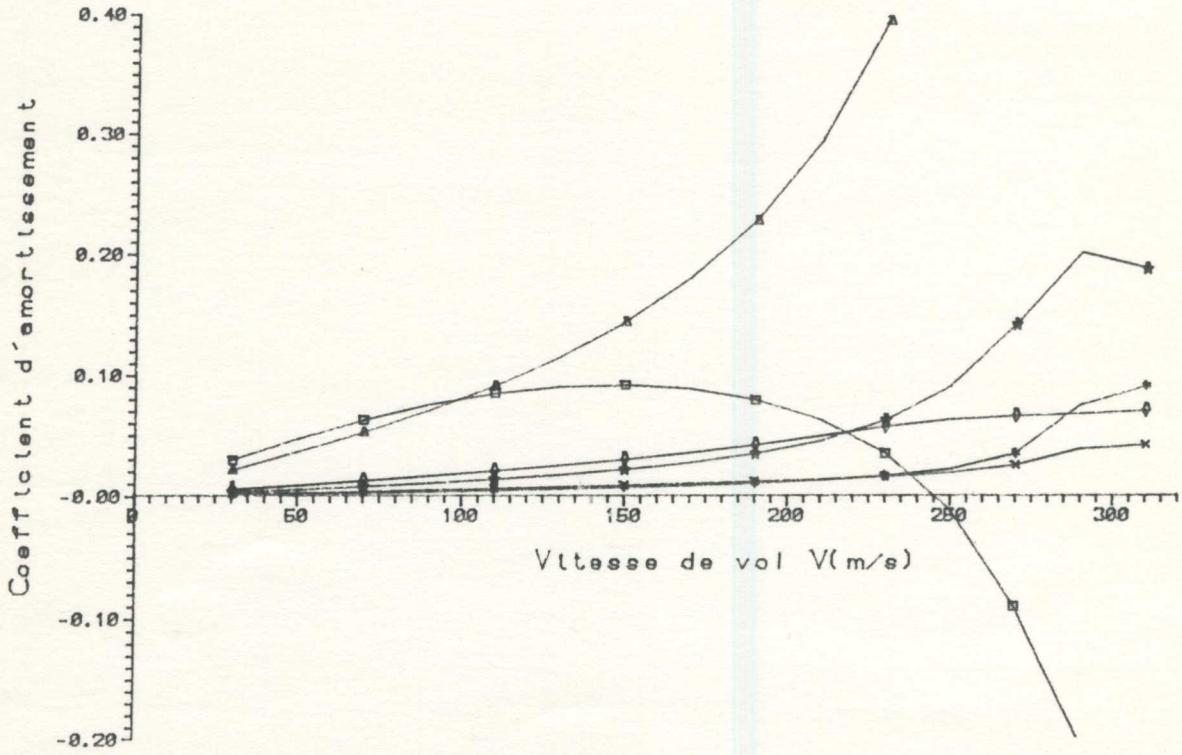


***Figure 5-7b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-7** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.2 (aile rectangulaire)*

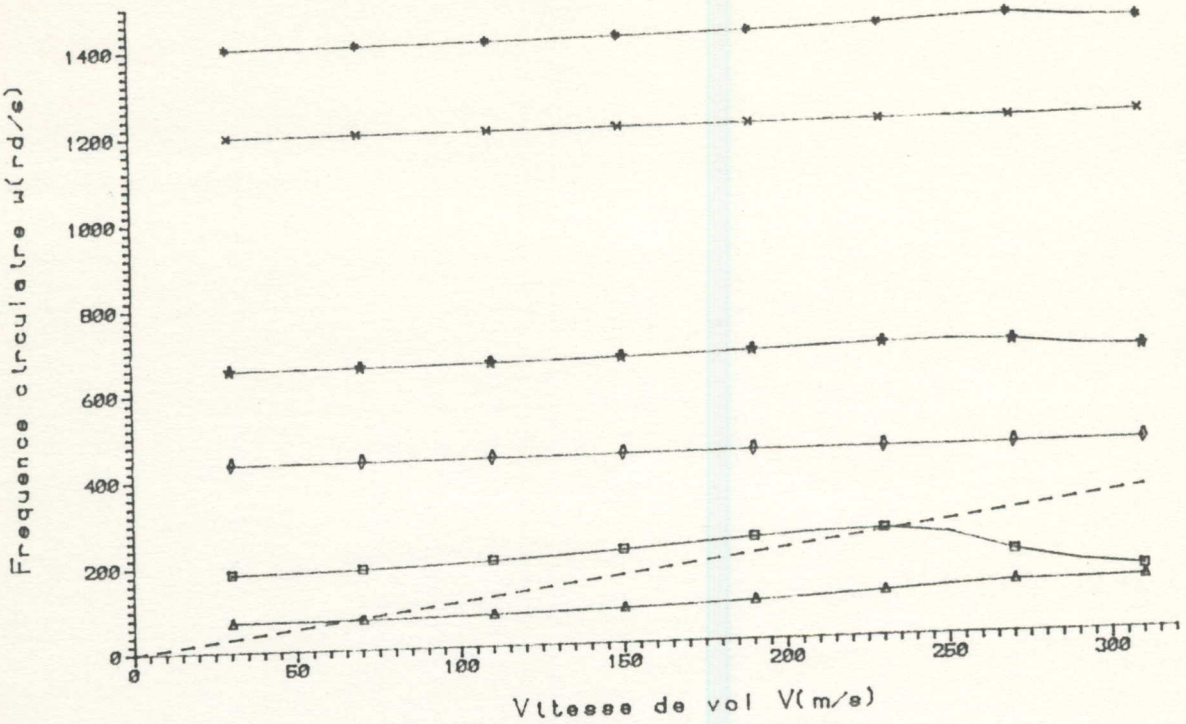


Figure 5-8a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

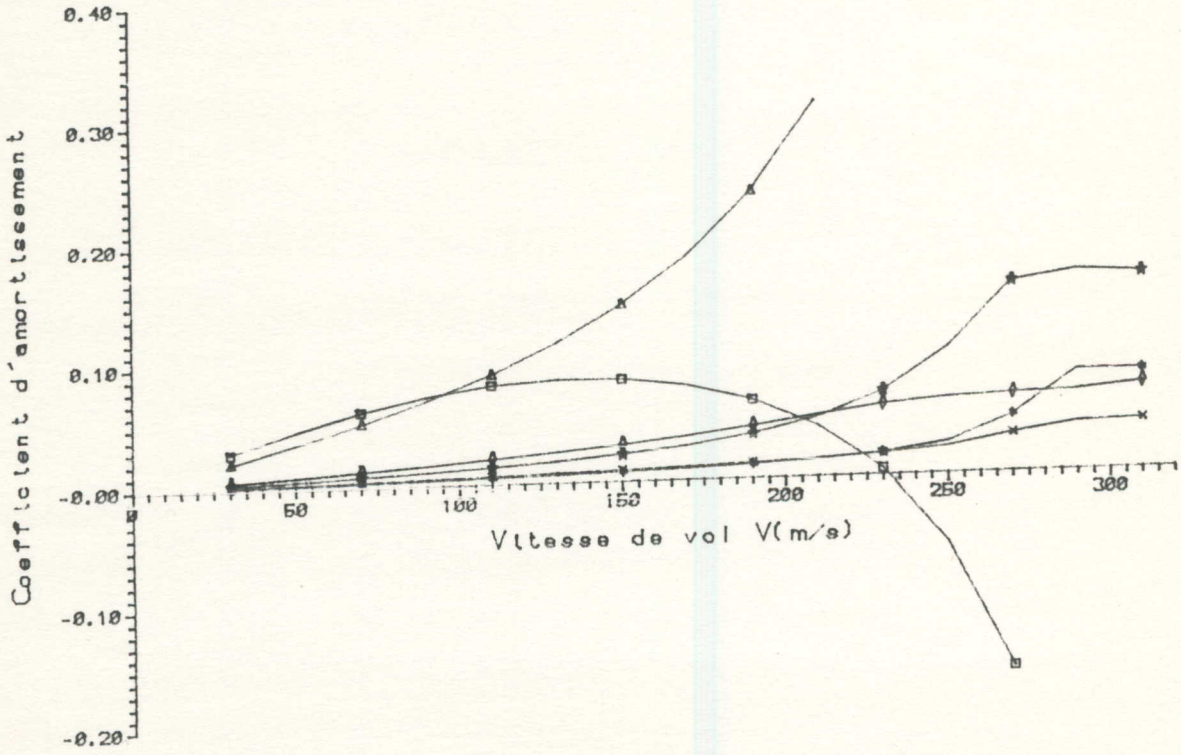


Figure 5-8b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess

Figure 5-8 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.4 (aile rectangulaire)

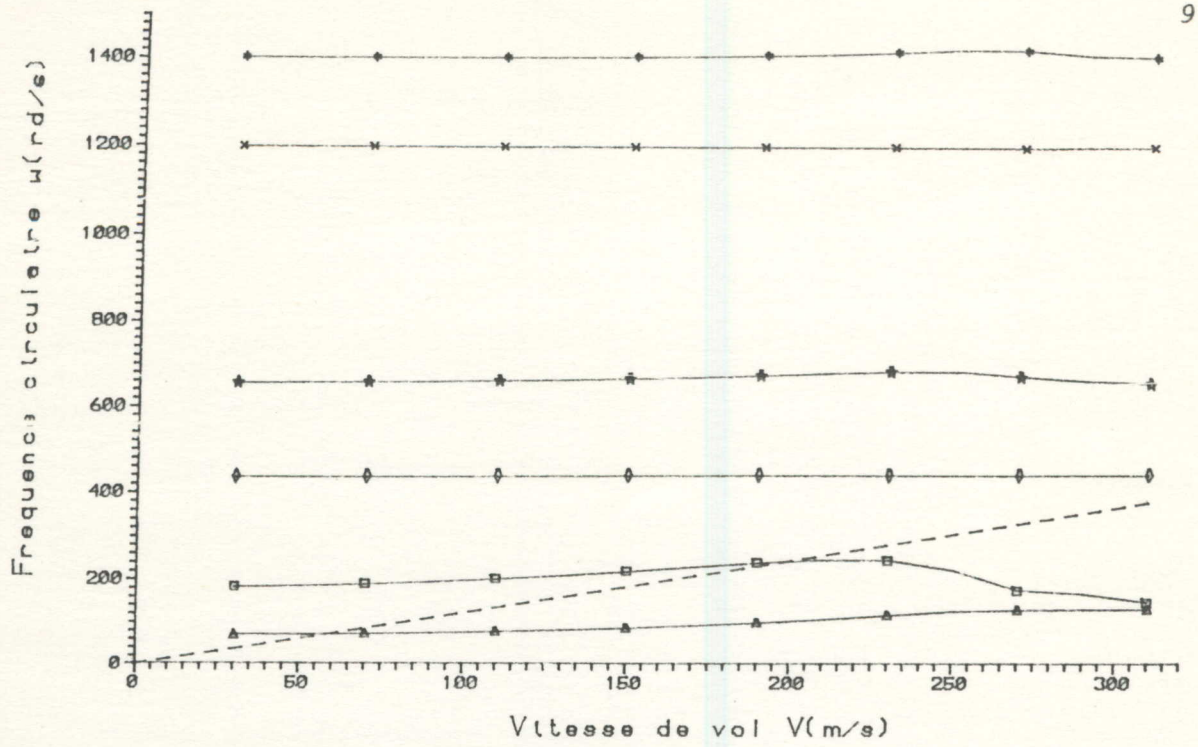


Figure 5-9a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

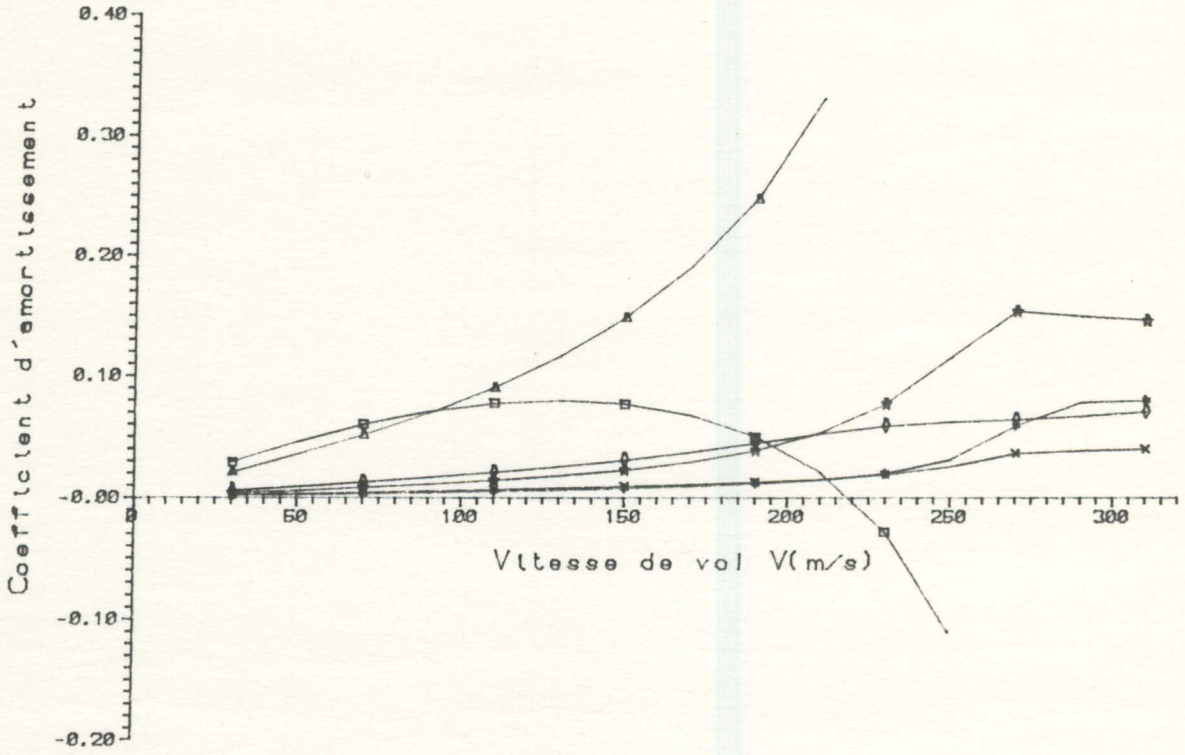


Figure 5-9b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess

Figure 5-9 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.6 (aile rectangulaire)

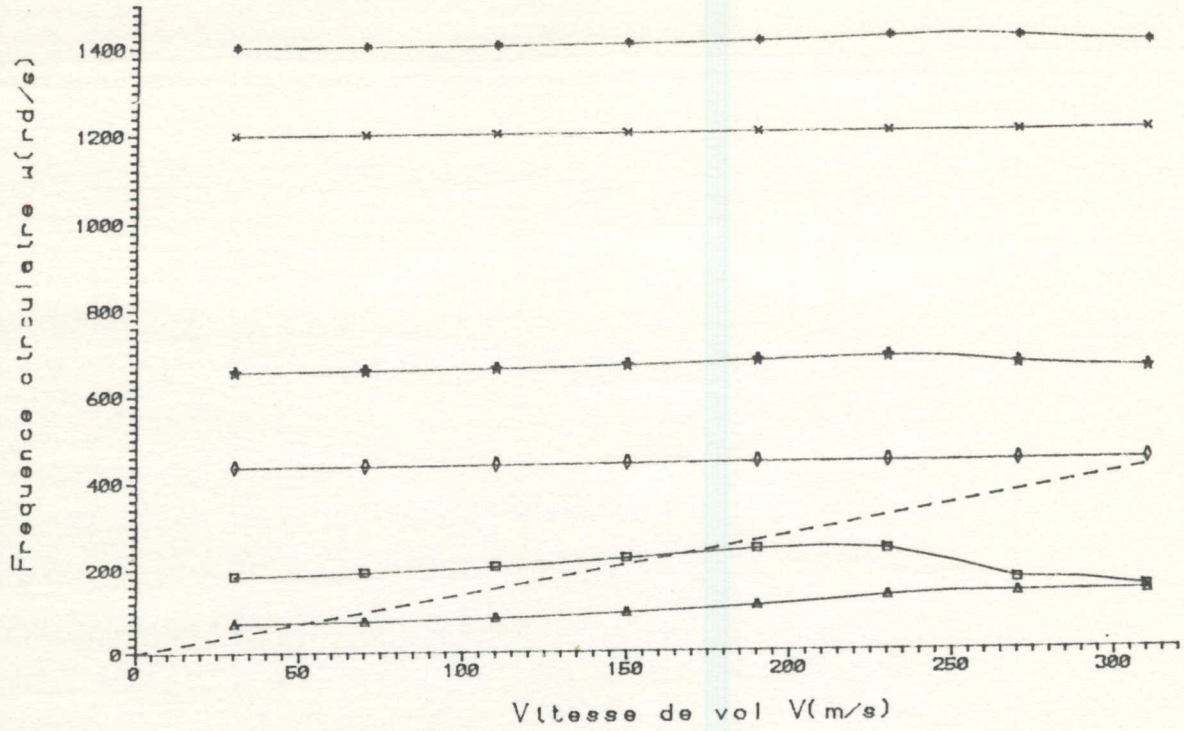


Figure 5-10a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

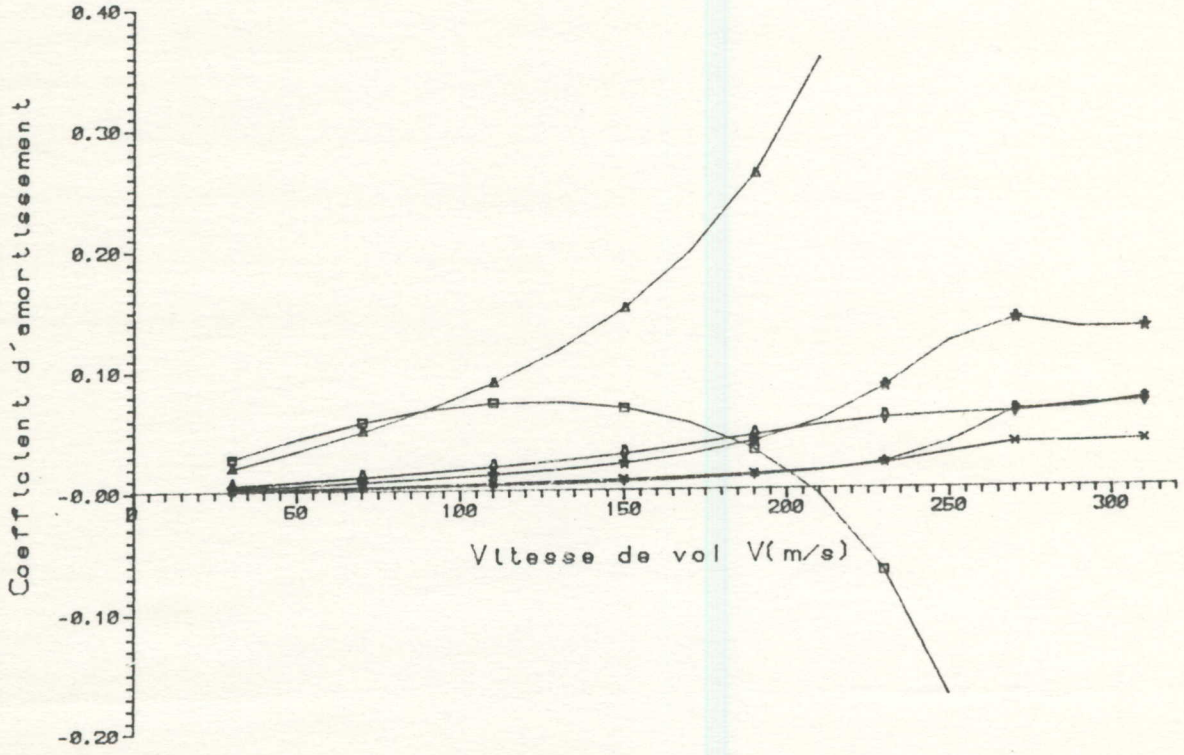


Figure 5-10b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse

Figure 5-10 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.8 (aile rectangulaire)

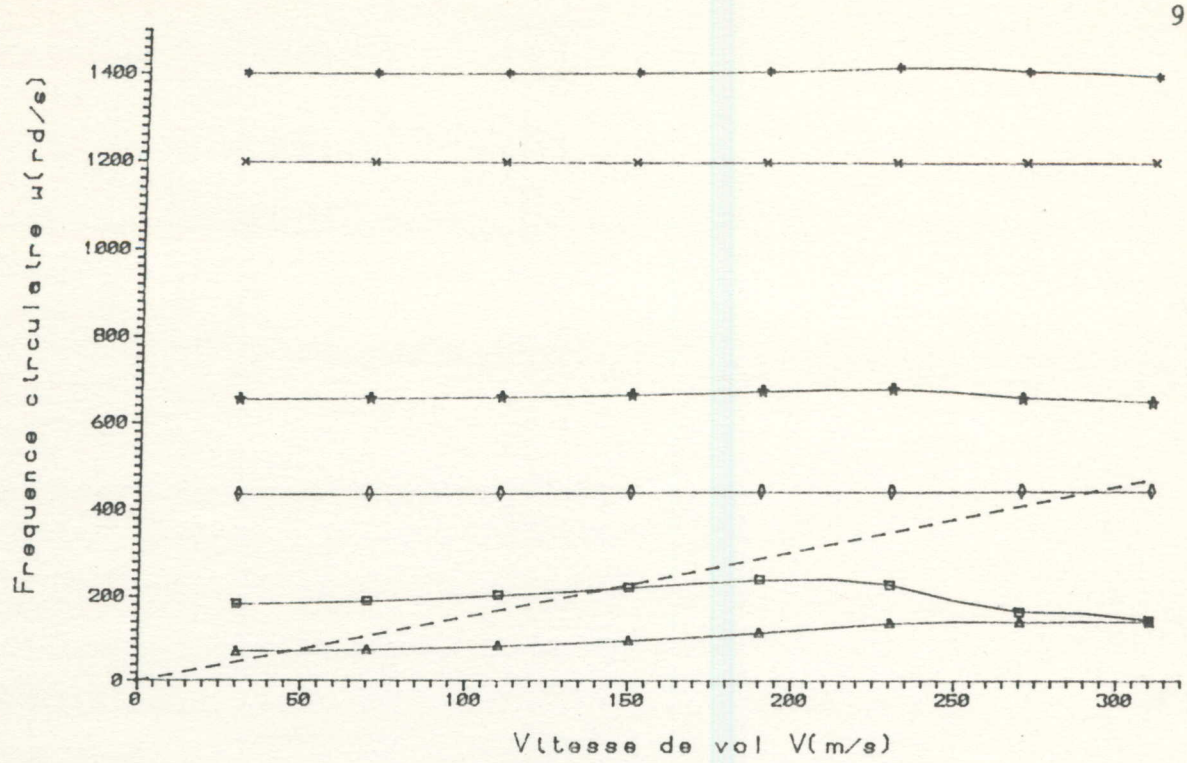


Figure 5-11a : La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

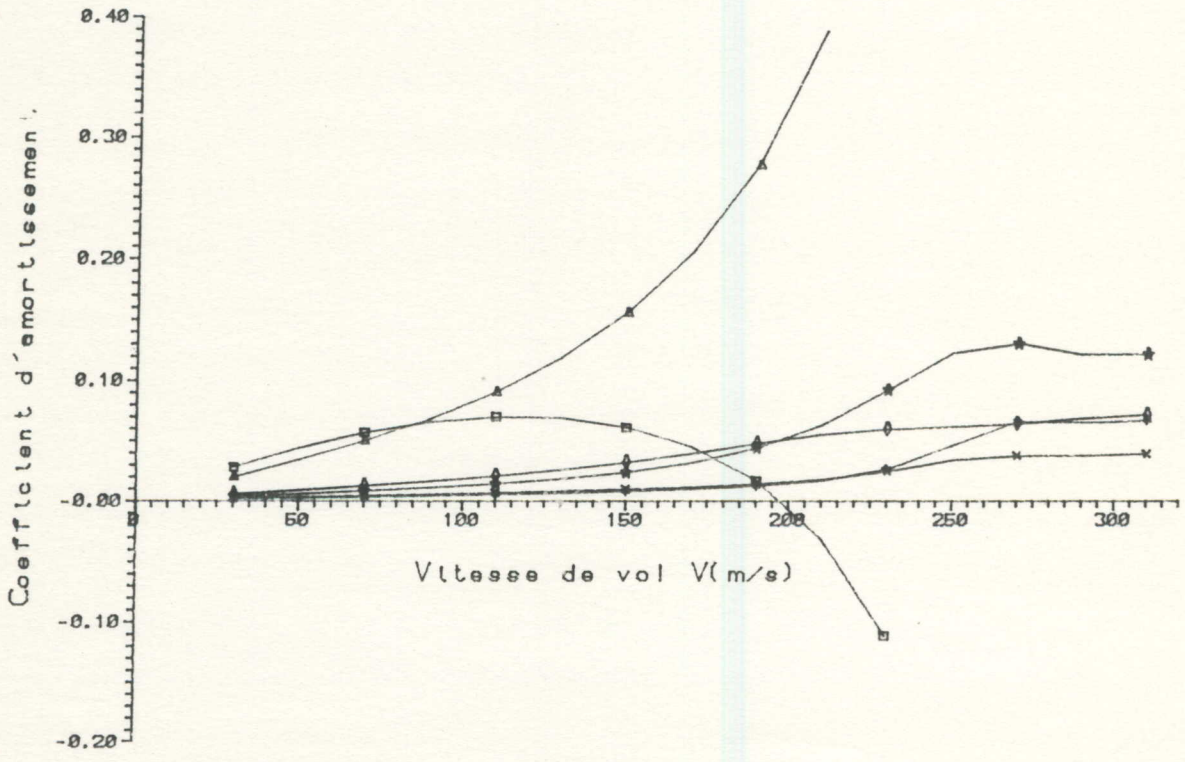


Figure 5-11b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse

Figure 5-11 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=2.0 (aile rectangulaire)

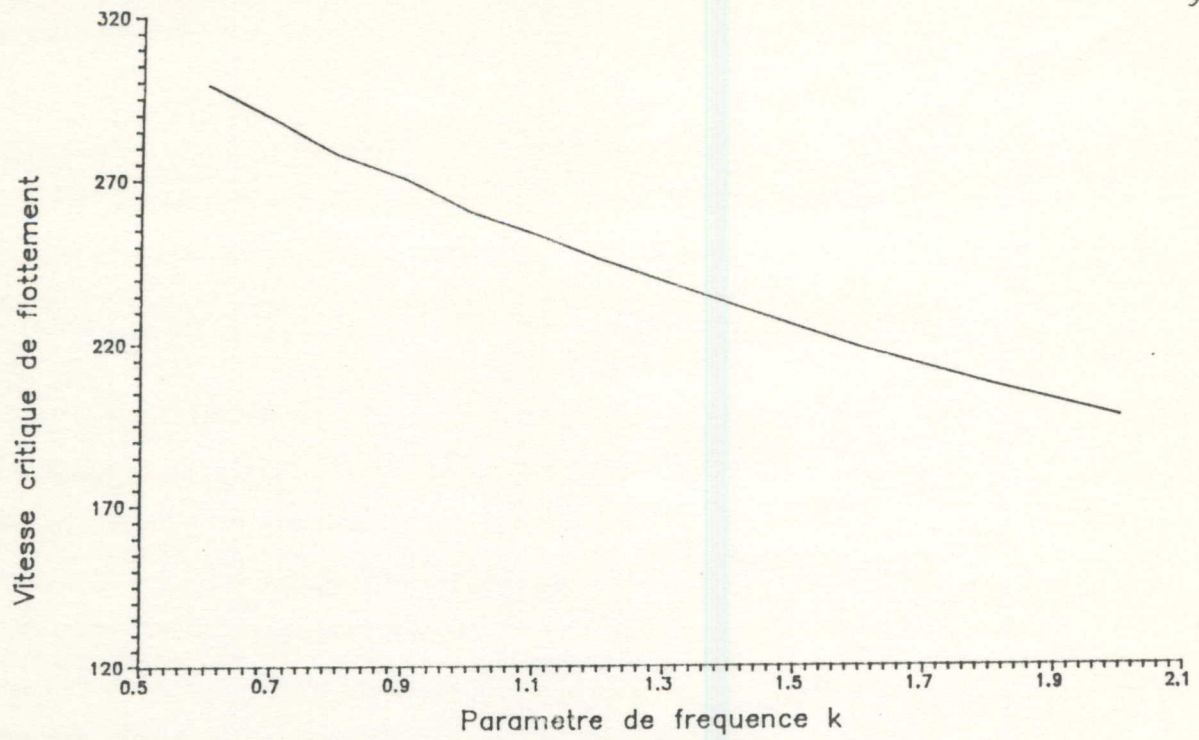


***Figure 5-12a** :La vitesse critique en fonction du parametre k*

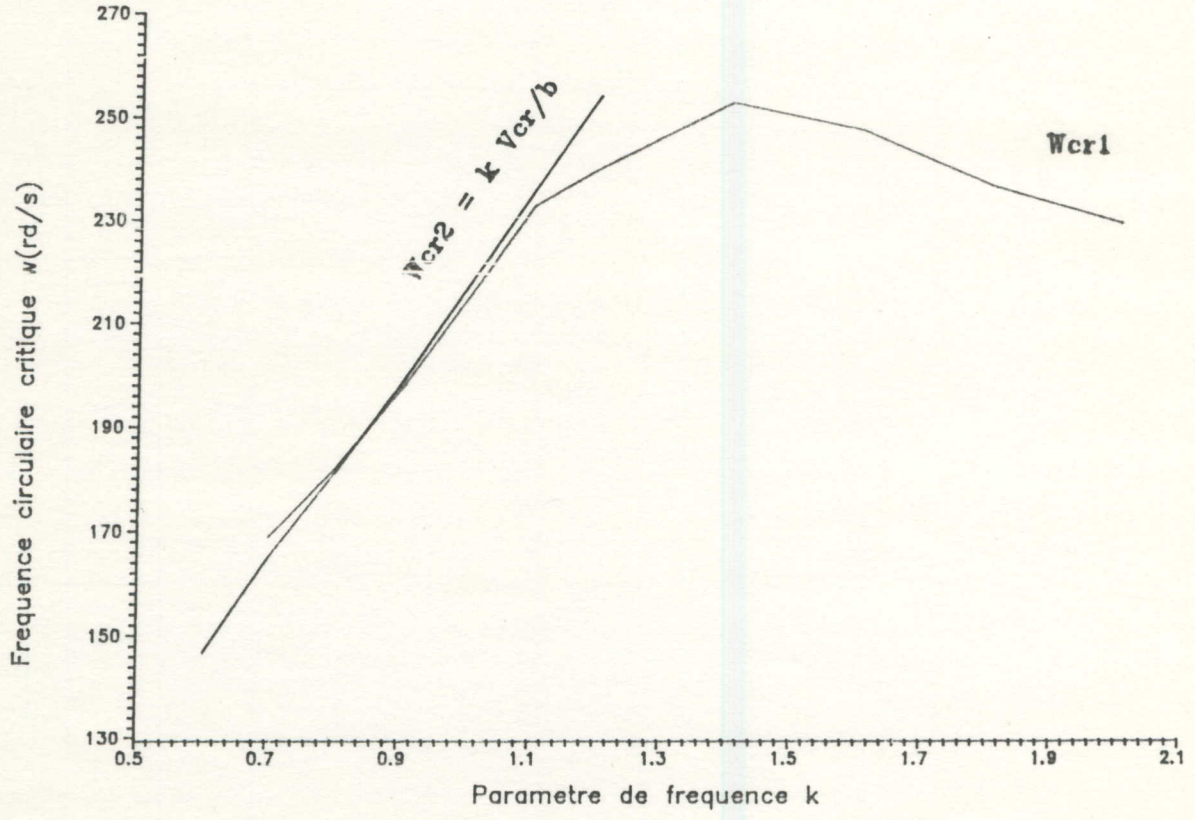


***Figure 5-12b** :Frequences critiques en fonction du parametre k*

***Figure 5-12** :Determination des conditions de flottement par le procede semi-graphique (aile rectangulaire)*

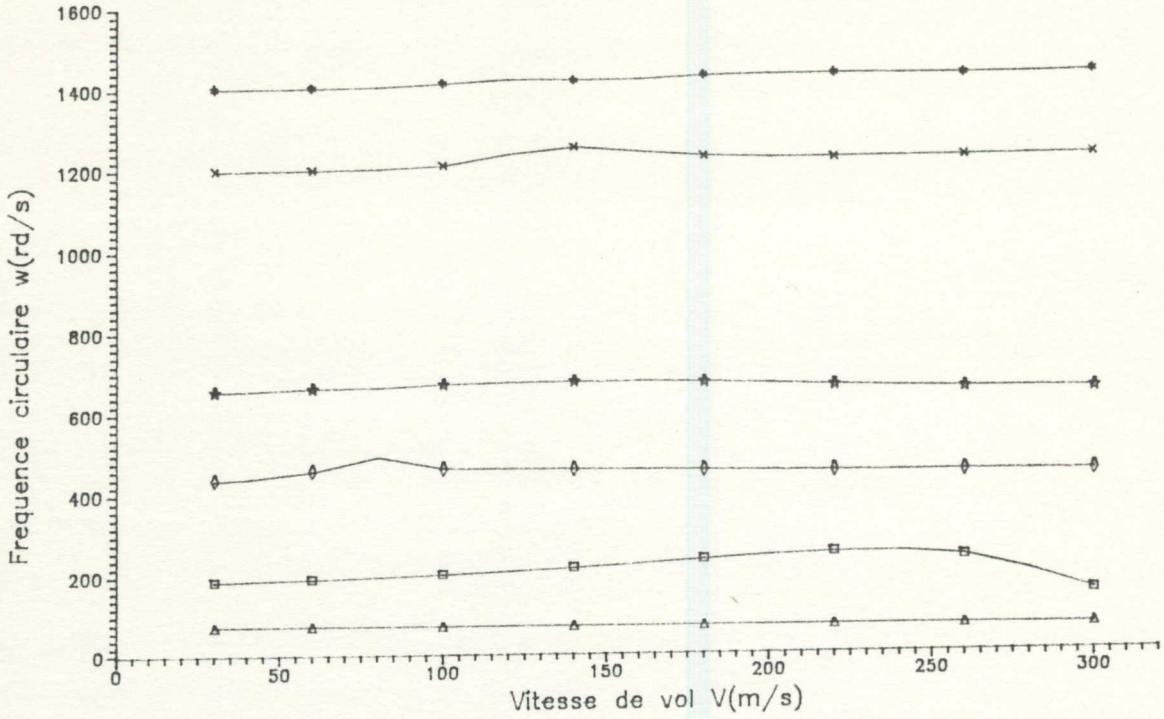


Figure 5-13a *:La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

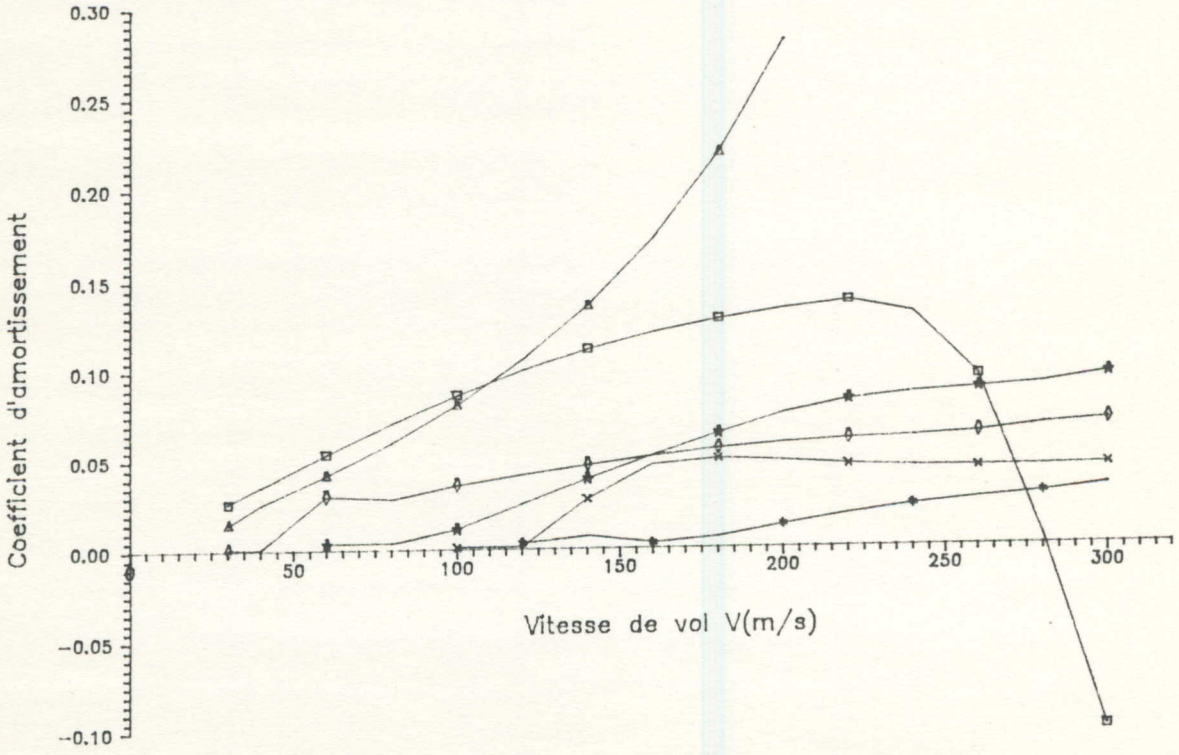


Figure 5-13b *:Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

Figure 5-13 *:Resultats de la resolution des equations Anglaises du flottement par le procede iteratif (aile rectangulaire)*

5.2.5 Comparaison entre les vitesses de flottement obtenues:

Dans le tableau 5-4 nous comparons nos résultats de flottement avec ceux obtenus par McINTOSH et ASHLEY [35] sur la même structure d'aile d'avion. Remarquons cependant que ce sont les seuls auteurs a avoir donné suffisamment de détails concernant la structure considérée pour qu'une comparaison puisse être faite. Nous notons par E_r l'erreur relative sur chacune des vitesses de flottement que nous obtenons par rapport à celle de la référence [35] qui a pour valeur :

$$V_{F\ M.A} = 244.95 \quad m/s$$

Tableau 5-4 :Comparaison entre les vitesses de flottement obtenues par les différentes méthodes de résolution pour l'aile rectangulaire

	Méthode Américaine procédé itératif	Méthode Aglaise semi-graphique	Méthode Anglaise procédé itératif
V_F	282.66 m/s	277.58 m/s	281.33 m/s
E_r	15.3 %	13.3 %	14.8 %

5.2.6 Etude de l'explosivité:

L'explosivité du flottement est, telle que nous l'avons préalablement dit, liée à la rapidité de variation de l'amortissement en fonction de la vitesse de vol. Par conséquent, ce sera la pente de la tangente du graphe représentant le coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse au point de flottement qui définira cette propriété du phénomène aéroélastique. Dans le tableau 5-5 ont été présentées les valeurs de ces pentes pour les résultats obtenus par les deux procédés itératifs. Les solutions des équations Americaines et Anglaises du flottement prédisent un flottement "non explosif". En effet, elles montrent une variation trés lente de l'amortissement qui alerte l'approche de la vitesse de flottement. ASHLEY ET McINTOSH prédisent également un flottement non explosif. Le procédé semi-graphique de résolution des équations Anglaises du flottement ne peut, quant à lui, fournir d'informations à ce sujet.

Tableau 5-5: Comparaison entre les méthodes de résolution du point de vue explosivité (aile rectangulaire)

	Valeur de la pente en valeur absolue	Explosivité
Méthode Américaine (procédé itératif)	0.55 %	Flottement non explosif
Méthode Anglaise (procédé itératif)	0.52 %	Flottement non explosif
Résultat de la référence [35]	0.62 %	Flottement non explosif

5.2.7 Etude du temps de calcul:

Remarquons qu'en analyse de flottement aéroélastique, le temps de calcul sur machine est un paramètre à prendre sérieusement en considération en particulier lorsqu'on sait que la résolution de problèmes réels globaux peut s'étaler sur des mois d'exécution, même sur des machines puissantes et trés rapides [7]. C'est pourquoi, une dizaine d'heures de calcul sur un micro-ordinateur (voir tableau 5-6), comme il est le cas pour les méthodes que nous avons développées, peut être considérée comme un temps trés raisonnable et trés pratique. Nous avons cependant cherché a améliorer encore plus le paramètre TEMPS. Dans ce but, nous avons tenté une interpolation des forces aérodynamiques tel que le conseille la référence [12], mais le procédé s'est avéré insatisfaisant. En effet, pour avoir une bonne interpolation il est nécessaire de calculer un assez grand nombre de matrices de coefficients d'influence aérodynamiques pour différentes valeurs du paramètre de fréquence k. Ce qui justement absorbe beaucoup de temps pour obtenir des résultats de flottement avec une moins bonne précision. Nous nous sommes alors interessés au nombre d'itérations sur la fréquence réduite, nécessaires à la résolution. Etudier soigneusement les valeurs initiales du paramètre k plutôt que de les choisir aléatoirement nous a permis d'obtenir un trés bon résultat concernant le temps d'execution pour les deux méthodes itératives. La méthode semi-graphique quant à elle exige un choix judicieux de la plage des paramètres de fréquence, le temps de calcul sur machine est alors dérisoire. L'inconvénient majeur que présente cette dernière méthode de résolution est le nombre important de graphes qu'il est nécessaire de tracer afin d'obtenir la vitesse de flottement. Le temps économisé sur machine est alors perdu à tracer les graphes nécessaires. Dans le tableau 5-6, nous présentons le temps de calcul sur un micro-ordinateur 386 SX, que met chaque méthode de résolution pour aboutir à la vitesse de flottement.

Tableau 5-6: Comparaison entre les différentes méthodes de résolution du point de vue temps de calcul pour l'aile rectangulaire

	Temps de calcul sur micro-ordinateur 386 SX
Méthode Américaine procédé itératif	09 heures 49 minutes
Méthode Américaine améliorée	06 heures 25 minutes
Méthode Anglaise semi-graphique	04 heures 55 minutes
Méthode Anglaise procédé itératif	10 heures 17 minutes
Méthode Anglaise améliorée	06 heures 50 minutes

5.3 RESULTATS DE L'APPLICATION DU LOGICIEL A L'EMPENNAGE HORIZONTAL :

Nous procédons exactement de la même façon que pour l'aile rectangulaire. Nous présentons donc dans le tableau 5-7 les fréquences naturels du problème global et celles du problème réduit de l'empennage horizontal. Les tableaux 5-8 et 5-9 représentent les deux vecteurs propres naturels du problème global correspondant au premier et sixième vecteurs propres principaux de l'empennage horizontal. Les remarques faites sur les valeurs et vecteurs propres naturels de l'aile rectangulaire restent valables pour ceux de cette deuxième structure d'avion.

Nous présentons dans la figure 5-14 les résultats de la résolution des équations Américaines du flottement. Aucun mode de vibration ne présente un coefficient d'amortissement fictif nul, ceci traduit la stabilité de la structure dans les conditions considérées.

Depuis la figure 5-15 jusqu'à la figure 5-21, nous présentons la série de résultats obtenus par la résolution de l'équation Anglaise du flottement, par le procédé semi-graphique, pour des valeurs discrètes du paramètre de fréquence. Pour chacune des valeurs de k, nous remarquons qu'aucun mode de vibration ne présente un coefficient d'amortissement nul. Il n'y a donc pas de vitesse de flottement pour cette deuxième structure. La figure 5-22 représente les résultats obtenus par la résolution deséquations Anglaises du flottement par le procédé itératif. Encore une fois, les résultats confirment la stabilité de l'empennage horizontal dans les conditions prises et dans le domaine opérationnel considéré.

Le tableau 5-10 représente une comparaison entre les temps de calcul sur micro-ordinateur, absorbés par chaque méthode de résolution sur une plage de quinze vitesses comprises entre 30 et 310 m/s.

Tableau 5-7: Comparaison entre les fréquences naturelles du problème global et celles du problème réduit de l'empennage horizontal

Mode	Fréquences en Hz	
	Problème global	Problème réduit
1	35.39	35.39
2	111.6	
3	118.5	118.6
4	177.2	177.2
5	308.0	308.2
6	355.7	
7	393.1	
8	448.2	448.3
9	565.0	565.4
10	575.5	575.9
11	750.5	751.4
12	804.7	
13	836.4	842.1
14	953.4	955.0
15	983.3	
16	1098.	1097.
17	1100.	1104.
18	1354.	
19	1394.	
20	1409.	
21	1481.	1490.
22	1554.	
23	1700.	
24	1743.	
25	1810.	
26	1907.	
27	2000.	
28	2024.	
29	2153.	
30	2181.	
31	2281.	
32	2324.	
33	2398.	
34	2529.	
35	2641.	
36	2648.	
37	2756.	2736.
38	2775.	
39	2867.	
40	2997.	
41	3089.	
42	3145.	
43	3219.	
44	3478.	3567.
45	3560.	
⋮	⋮	

Tableau 5-8 : Comparaison entre Le 1^{er} mode naturel complet et le 1^{er} mode naturel du problème réduit de l'empennage horizontal

N° de Noeud	1^{er} mode naturel complet			1^{er} mode naturel (Pb réduit)
	déplacement dans la directin X	déplacement dans la directin Y	déplacement dans la directin Z	déplacement dans la directin Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	-0.3803×10^{-2}	-0.5716×10^{-2}	0.3991×10^{-1}	0.3991×10^{-1}
10	0.3803×10^{-2}	0.5716×10^{-2}	0.3991×10^{-1}	0.3991×10^{-1}
11	-0.4808×10^{-2}	-0.1061×10^{-1}	0.4184×10^{-1}	0.4184×10^{-1}
12	0.4808×10^{-2}	0.1061×10^{-1}	0.4184×10^{-1}	0.4184×10^{-1}
13	-0.2433×10^{-2}	-0.9167×10^{-2}	0.3828×10^{-1}	0.3828×10^{-1}
14	0.2433×10^{-2}	0.9167×10^{-2}	0.3828×10^{-1}	0.3828×10^{-1}
15	-0.4917×10^{-9}	-0.3930×10^{-2}	0.3650×10^{-1}	0.3650×10^{-1}
16	0.4917×10^{-9}	0.3930×10^{-2}	0.3650×10^{-1}	0.3650×10^{-1}
17	-0.4931×10^{-2}	-0.1009×10^{-1}	0.1496	0.1496
18	0.4931×10^{-2}	0.1009×10^{-1}	0.1496	0.1496
19	-0.7622×10^{-2}	-0.1666×10^{-1}	0.1535	0.1535
20	0.7622×10^{-2}	0.1666×10^{-1}	0.1535	0.1535
21	-0.5441×10^{-2}	-0.1358×10^{-1}	0.1569	0.1569
22	0.5441×10^{-2}	0.1358×10^{-1}	0.1569	0.1569
23	-0.1684×10^{-2}	-0.4998×10^{-2}	0.1669	0.1669
24	0.1684×10^{-2}	0.4998×10^{-2}	0.1669	0.1669
25	-0.5066×10^{-2}	-0.9733×10^{-2}	0.3225	0.3225
26	0.5066×10^{-2}	0.9733×10^{-2}	0.3225	0.3225
27	-0.8342×10^{-2}	-0.1583×10^{-1}	0.3453	0.3453
28	0.8342×10^{-2}	0.1583×10^{-1}	0.3453	0.3453
29	-0.6292×10^{-2}	-0.1232×10^{-1}	0.3778	0.3778
30	0.6292×10^{-2}	0.1232×10^{-1}	0.3778	0.3778
31	-0.2019×10^{-2}	-0.4258×10^{-2}	0.4070	0.4070
32	0.2019×10^{-2}	0.4258×10^{-2}	0.4070	0.4070

Tableau 5-9: Comparaison entre Le $9^{ème}$ mode naturel complet et le $6^{ème}$ mode naturel du problème réduit de l'empennage horizontal

N° de Noeud	$9^{ème}$ mode naturel complet			$6^{ème}$ mode naturel (Pb réduit)
	déplacement dans la directin X	déplacement dans la directin Y	déplacement dans la directin Z	déplacement dans la directin Z
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.2737×10^{-1}	-0.3389×10^{-2}	0.4652	0.4644
10	-0.2739×10^{-1}	0.3356×10^{-2}	0.4652	0.4644
11	0.6909×10^{-1}	-0.6981×10^{-2}	0.1868	0.1850
12	-0.6909×10^{-1}	0.6991×10^{-2}	0.1868	0.1850
13	0.2346×10^{-i}	-0.1934×10^{-2}	-0.1746	-0.1762
14	-0.2345×10^{-1}	0.1937×10^{-2}	-0.1746	-0.1762
15	0.1604×10^{-2}	-0.1764×10^{-1}	-0.1531	-0.1471
16	-0.1595×10^{-2}	0.1763×10^{-1}	-0.1531	-0.1471
17	-0.1439×10^{-1}	0.2182×10^{-1}	-0.2274	-0.2209
18	0.1442×10^{-1}	-0.2177×10^{-1}	-0.2274	-0.2209
19	-0.2746×10^{-1}	0.1400×10^{-1}	-0.2872	-0.2862
20	0.2746×10^{-1}	-0.1400×10^{-1}	-0.2872	-0.2862
21	-0.8272×10^{-1}	0.1438×10^{-1}	-0.1648	-0.1695
22	0.8272×10^{-1}	-0.1438×10^{-1}	-0.1648	-0.1695
23	-0.8187×10^{-2}	-0.1882×10^{-2}	0.6451	0.6488
24	0.8167×10^{-2}	0.1890×10^{-2}	0.6451	0.6488
25	-0.1669×10^{-2}	-0.4287×10^{-1}	0.3515	0.3520
26	0.1673×10^{-2}	0.4283×10^{-1}	0.3515	0.3520
27	0.3302×10^{-1}	-0.6234×10^{-1}	0.2589	0.2573
28	-0.3302×10^{-1}	0.6231×10^{-1}	0.2589	0.2573
29	0.5018×10^{-1}	-0.1379×10^{-1}	-0.4726×10^{-1}	-0.4940×10^{-1}
30	-0.5018×10^{-1}	0.1383×10^{-1}	-0.4726×10^{-1}	-0.4940×10^{-1}
31	0.3076×10^{-1}	0.1764×10^{-1}	-0.3177	-0.3118
32	-0.3077×10^{-1}	-0.1768×10^{-1}	-0.3177	-0.3118

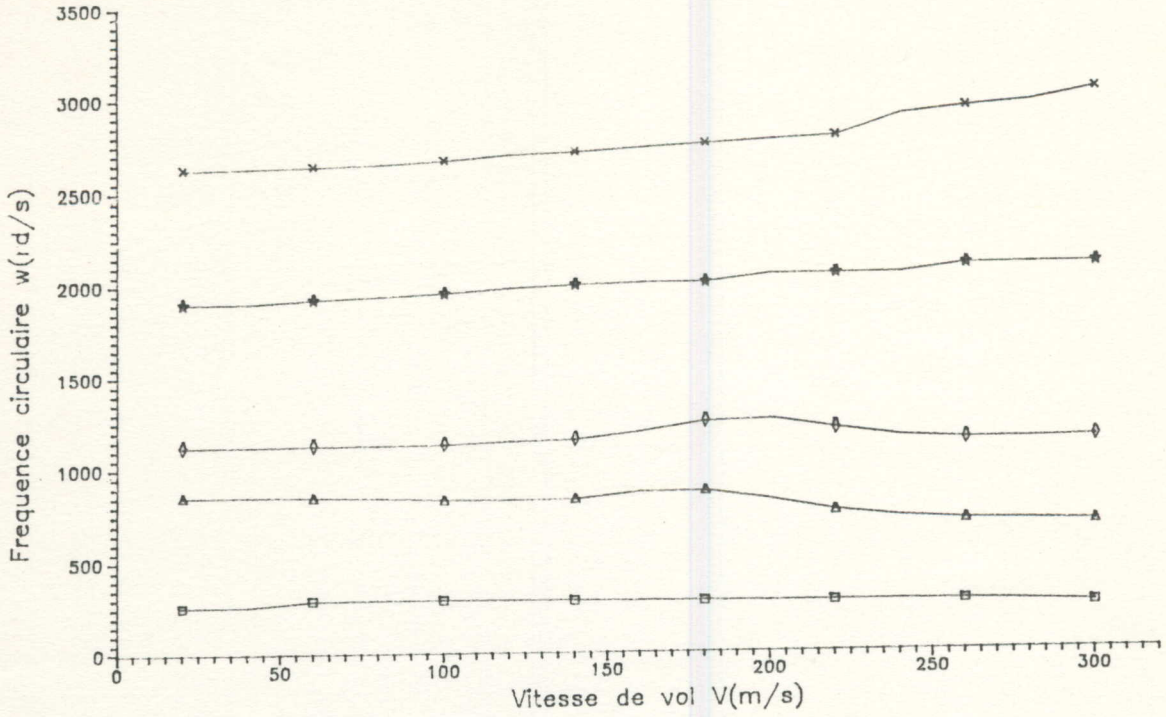


Figure 5-14a :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

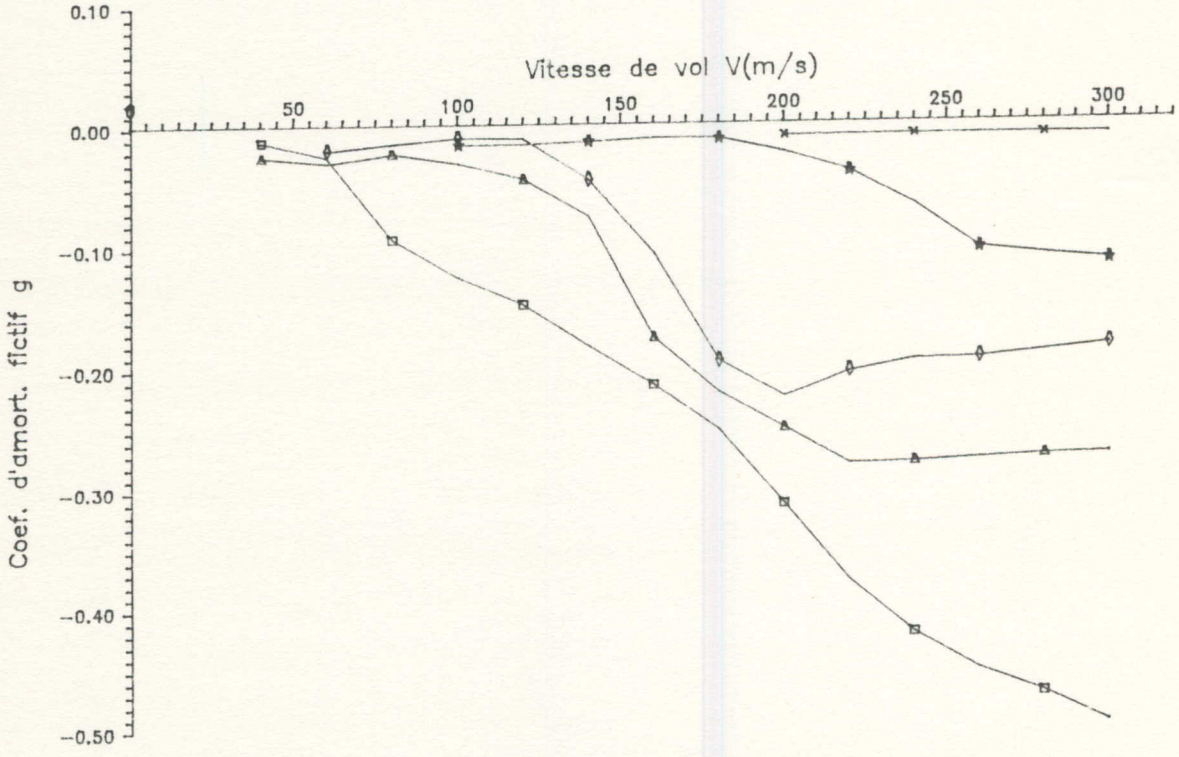


Figure 5-14b :Le coefficient g en fonction de la vitesse

Figure 5-14 :Resultats de la resolution des equations Americaines du flottement (empennage horizontal)

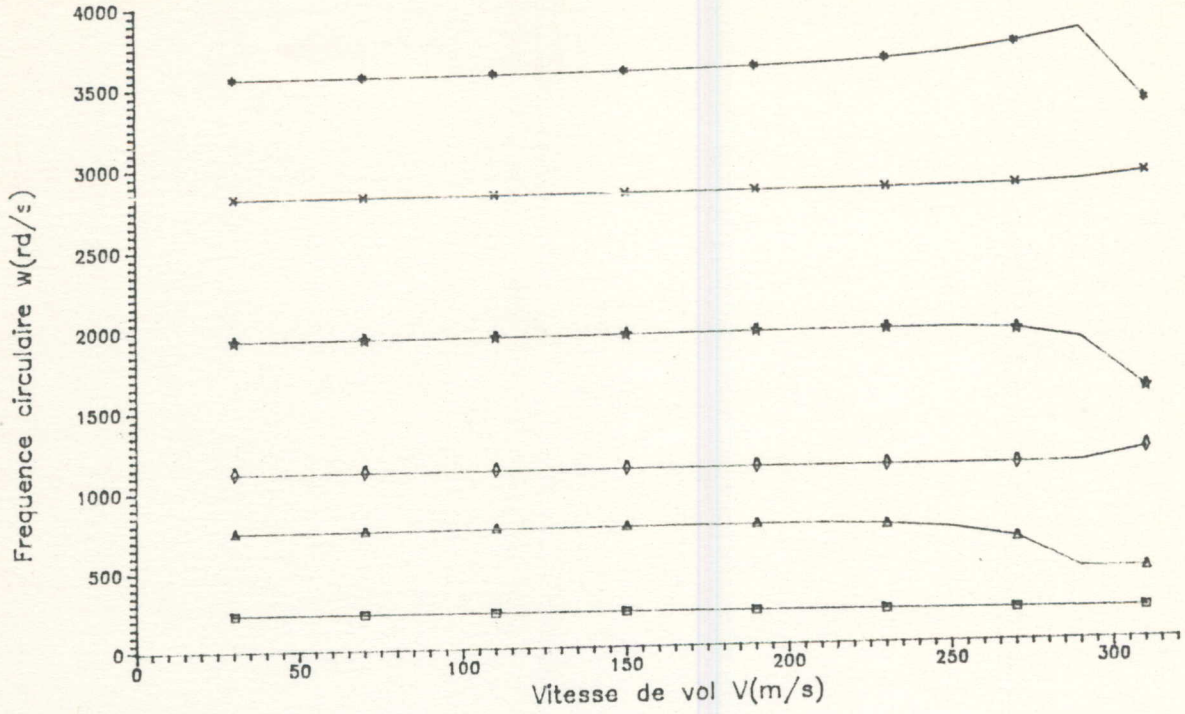


***Figure 5-15a** :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

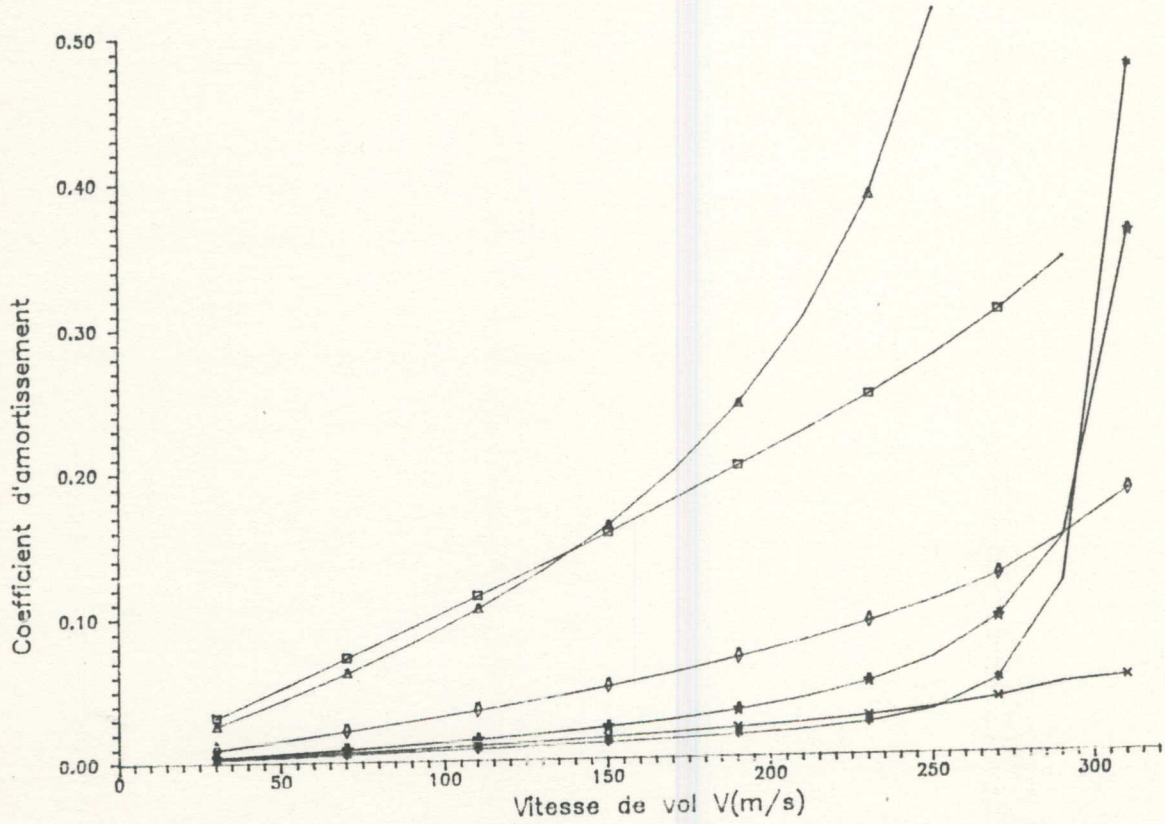


***Figure 5-15b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-15** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=0.5 (empennage)*

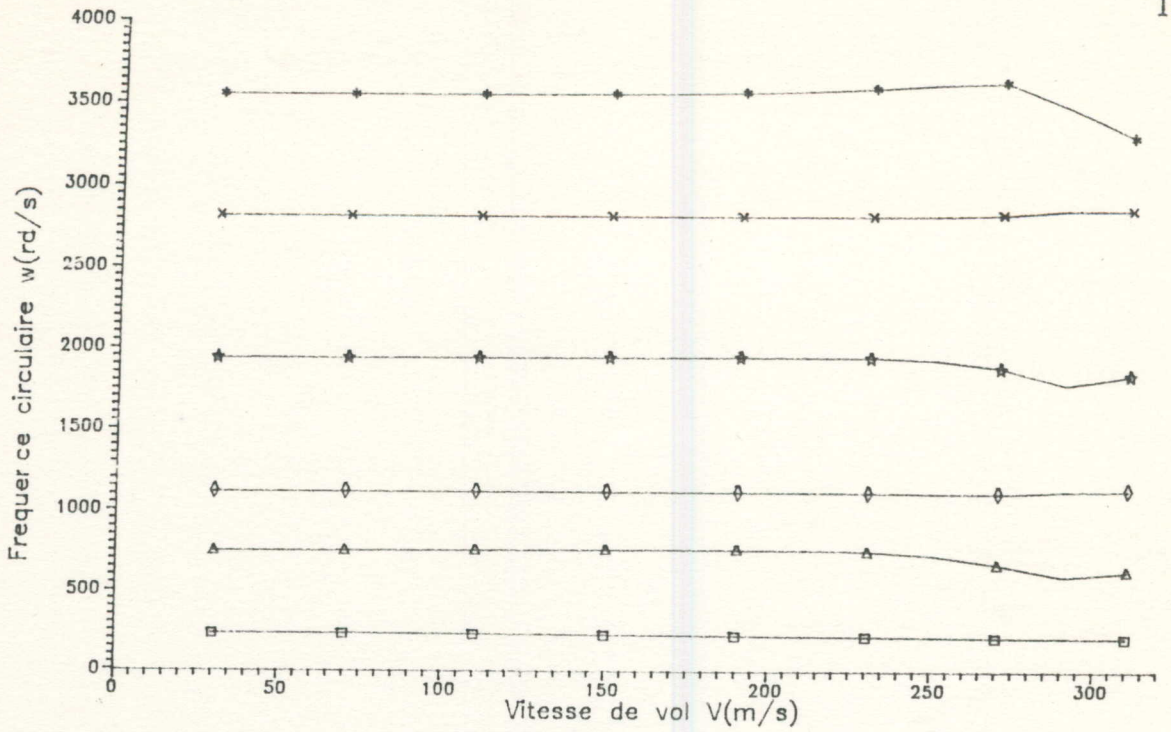


***Figure 5-16a** :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

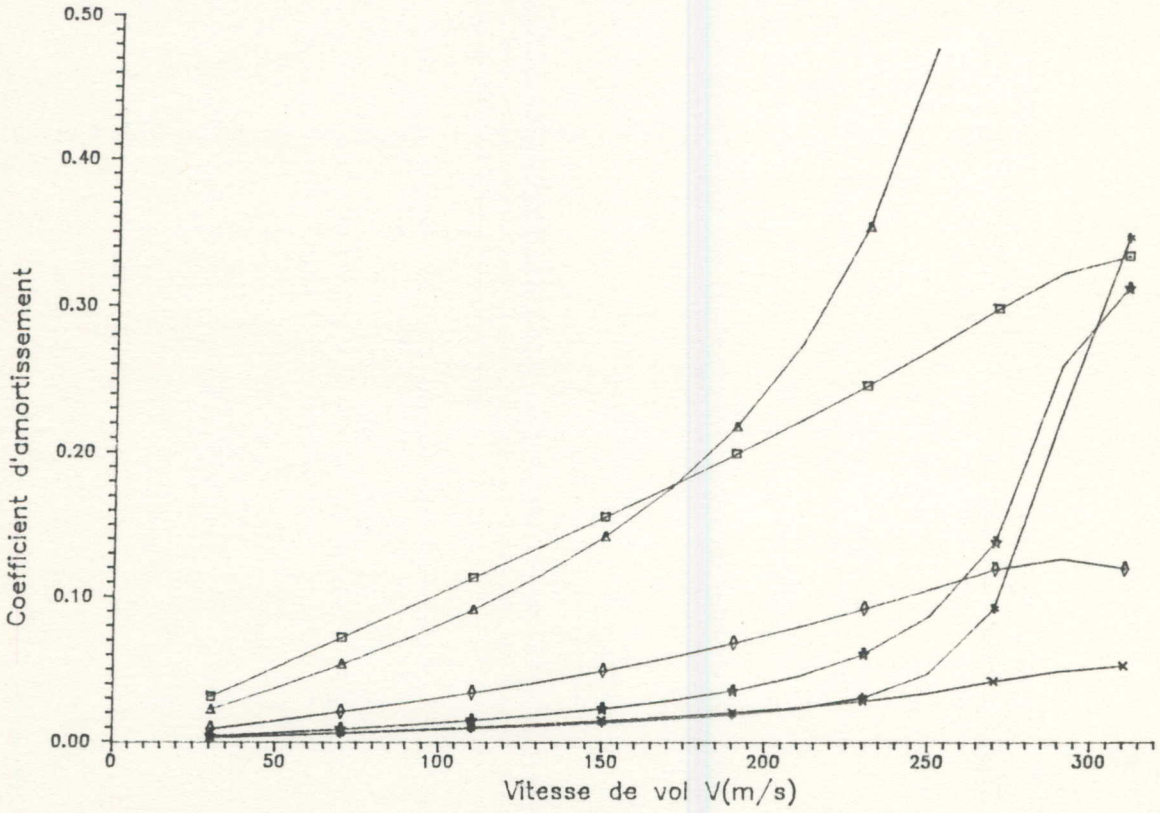


***Figure 5-16b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-16** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=1.0 (empennage)*

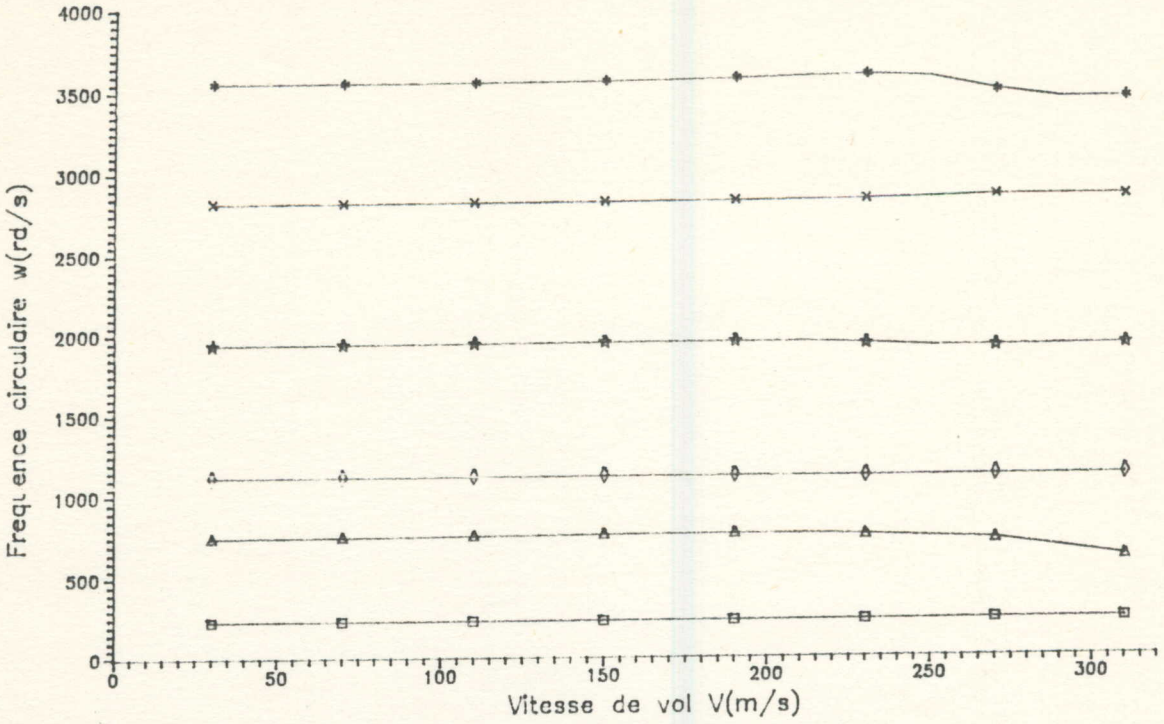


Figure 5-17a :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

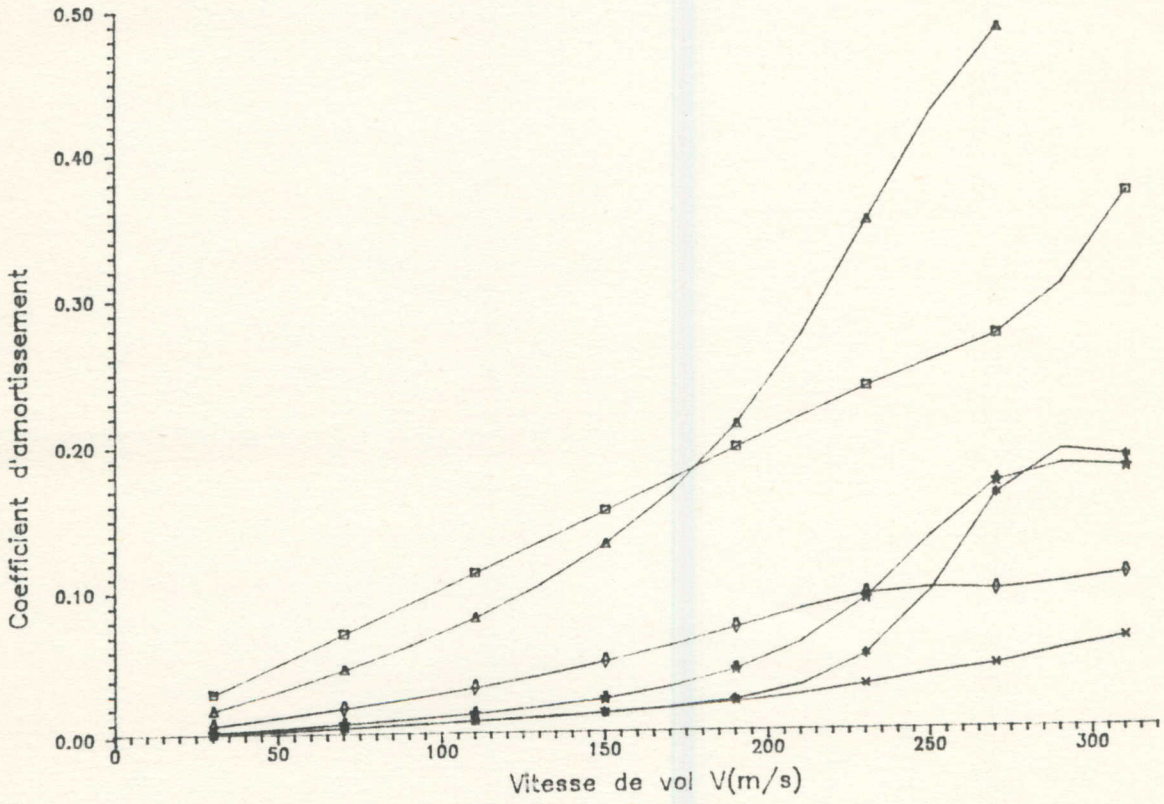


Figure 5-17b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess

Figure 5-17 :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=2.0 (empennage)

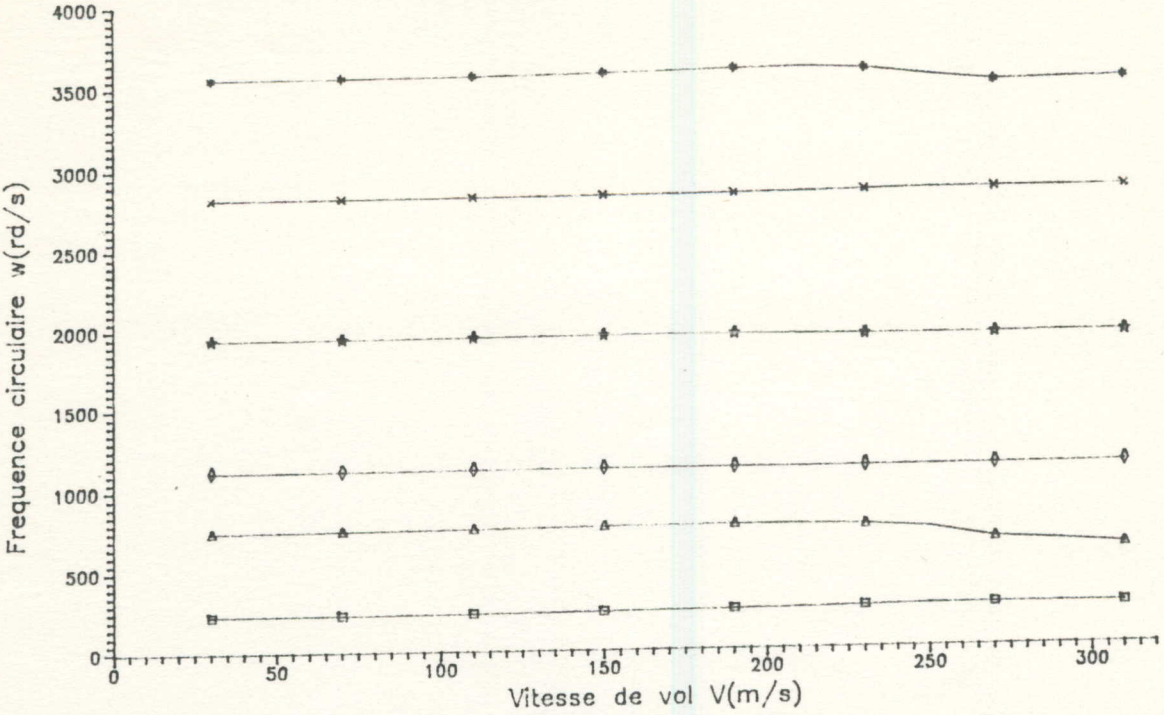


***Figure 5-18a** :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

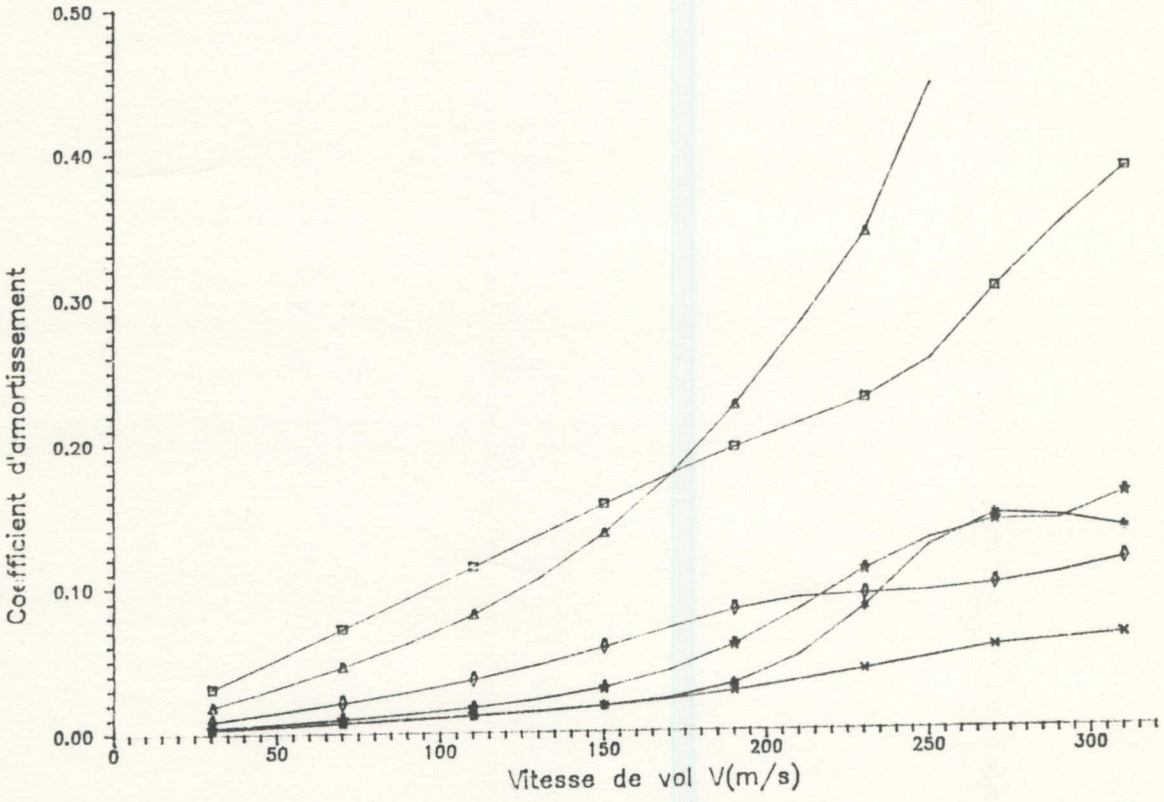


***Figure 5-18b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-18** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=3.0 (empennage)*

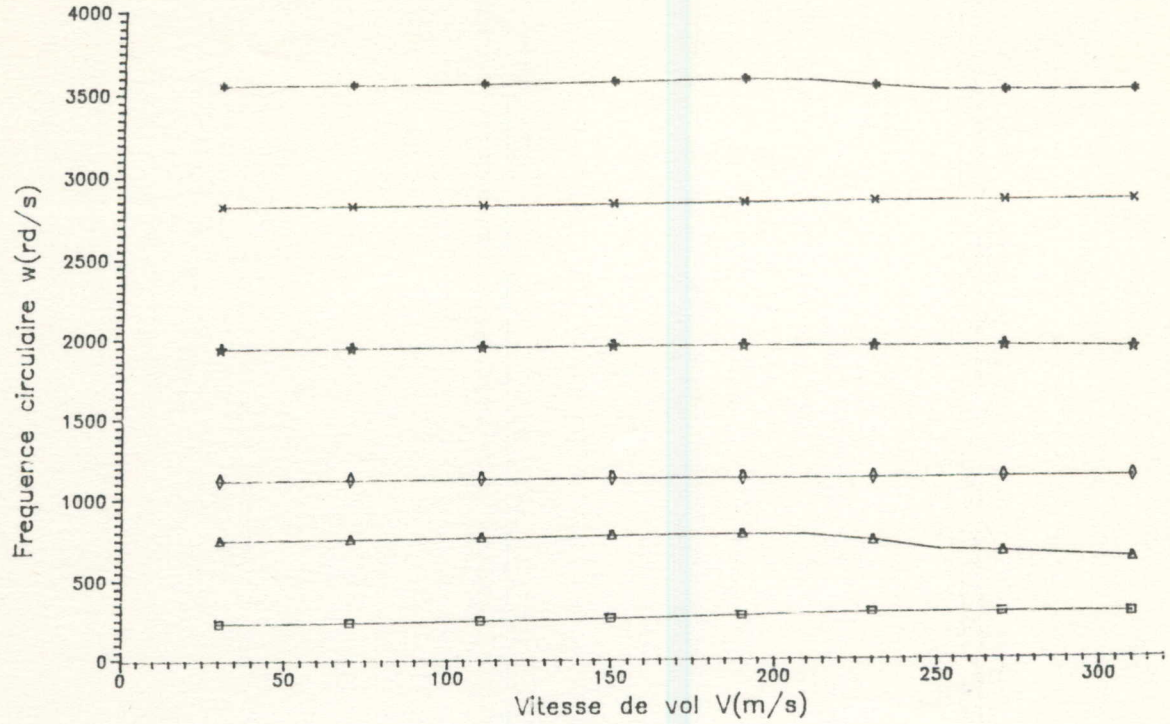


***Figure 5-19a** :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

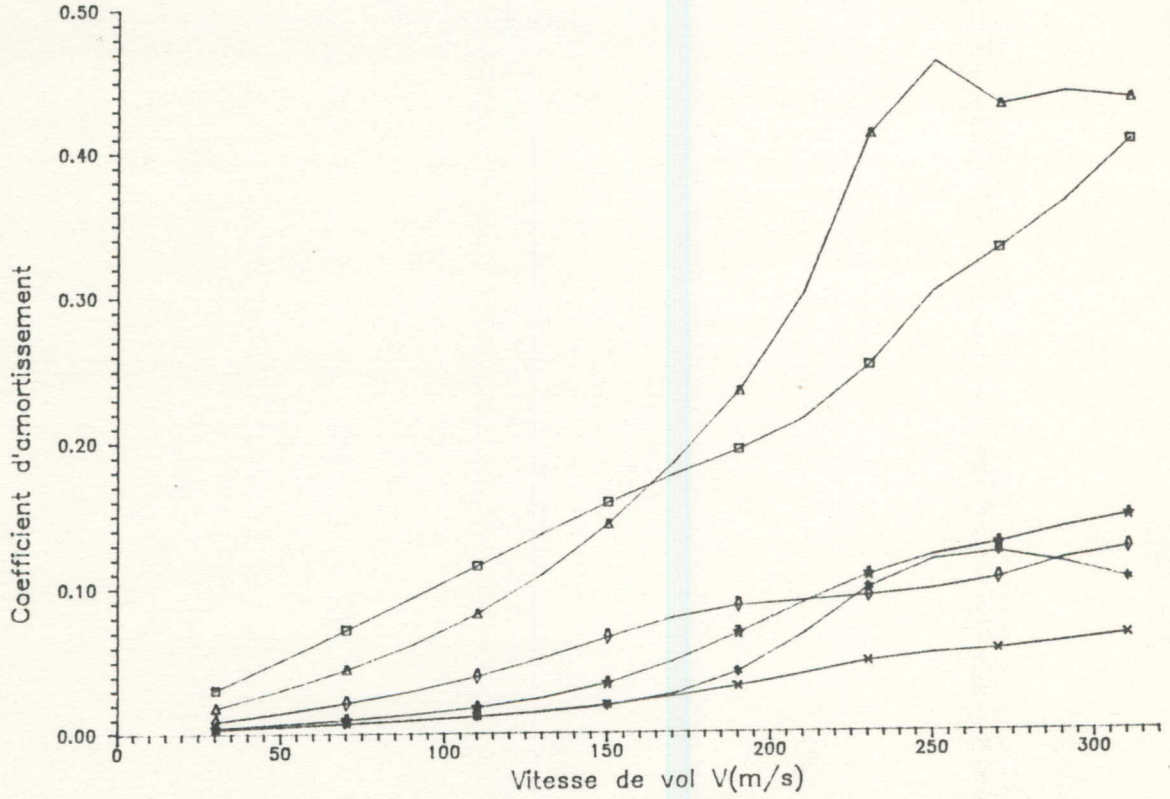


***Figure 5-19b** :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

***Figure 5-19** :Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=4.0 (empennage)*

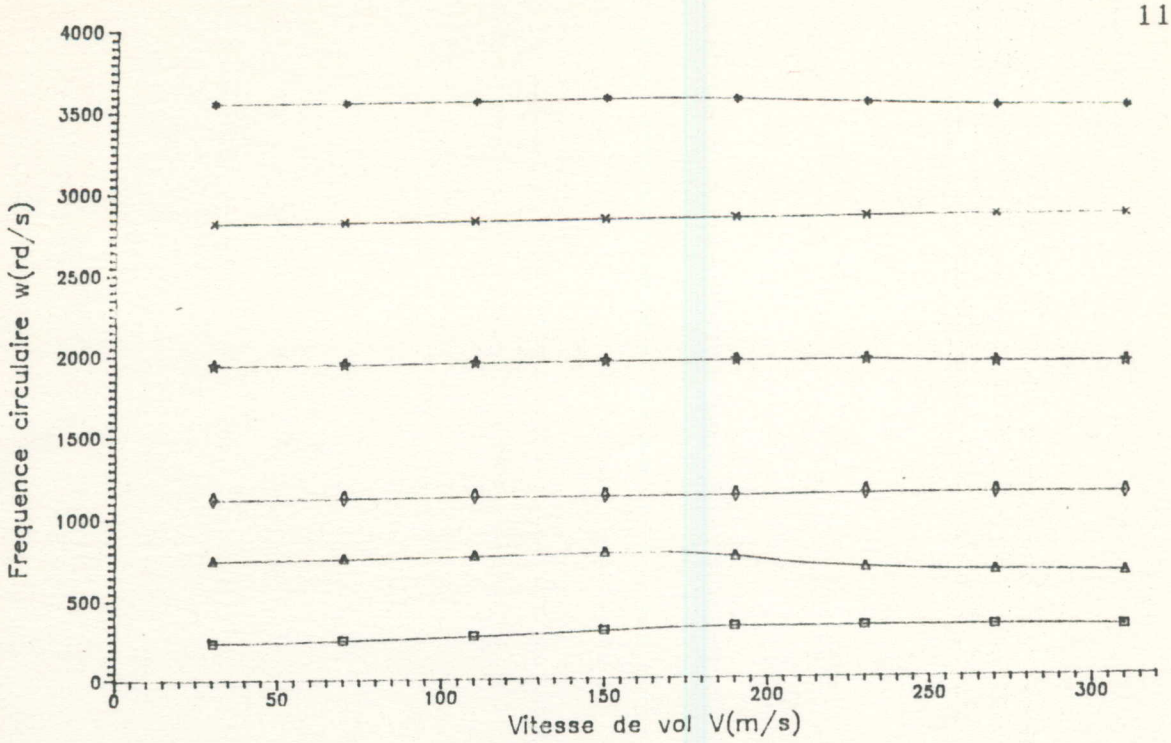


Figure 5-20a *:La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

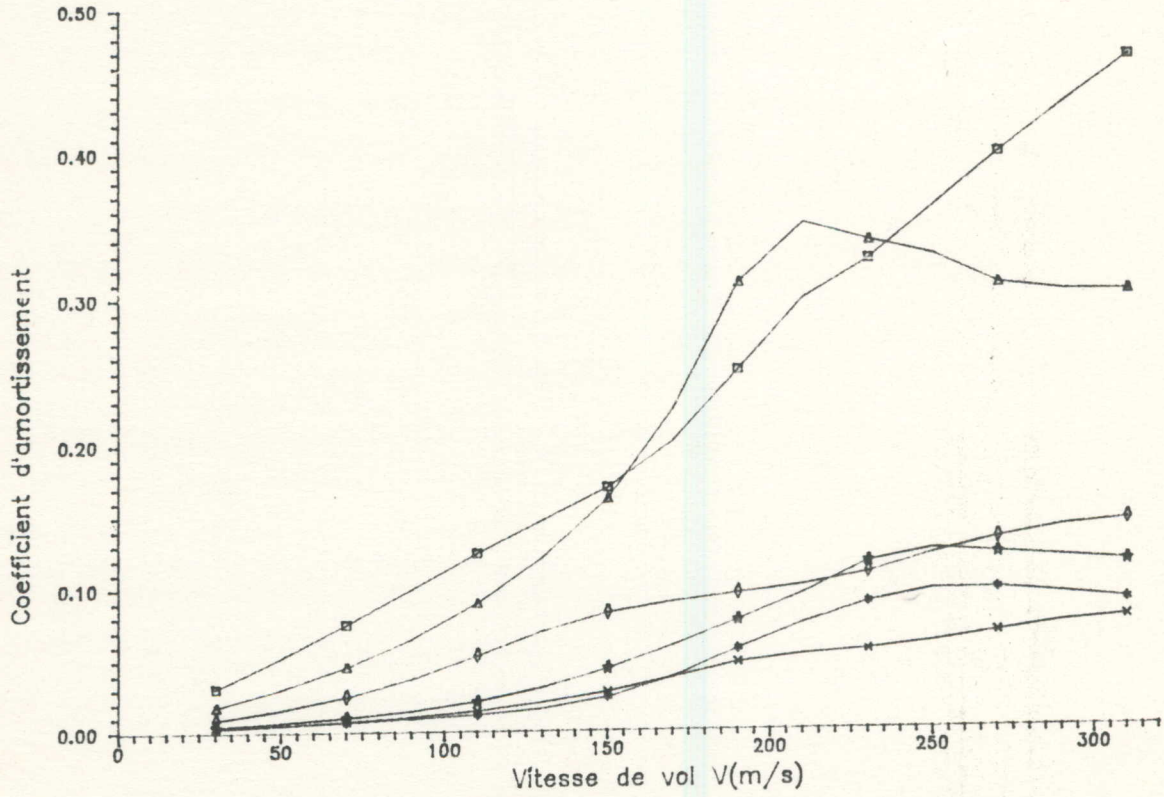


Figure 5-20b *:Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

Figure 5-20 *:Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=6.0 (empennage)*

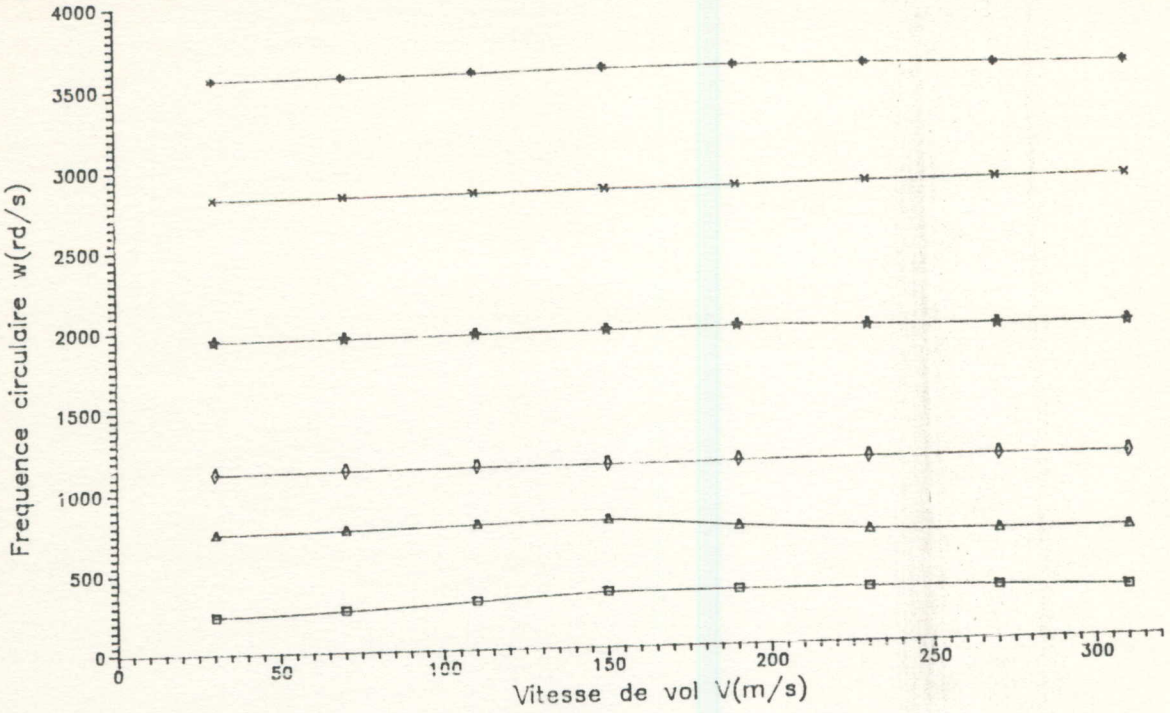


Figure 5-21a *:La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse*

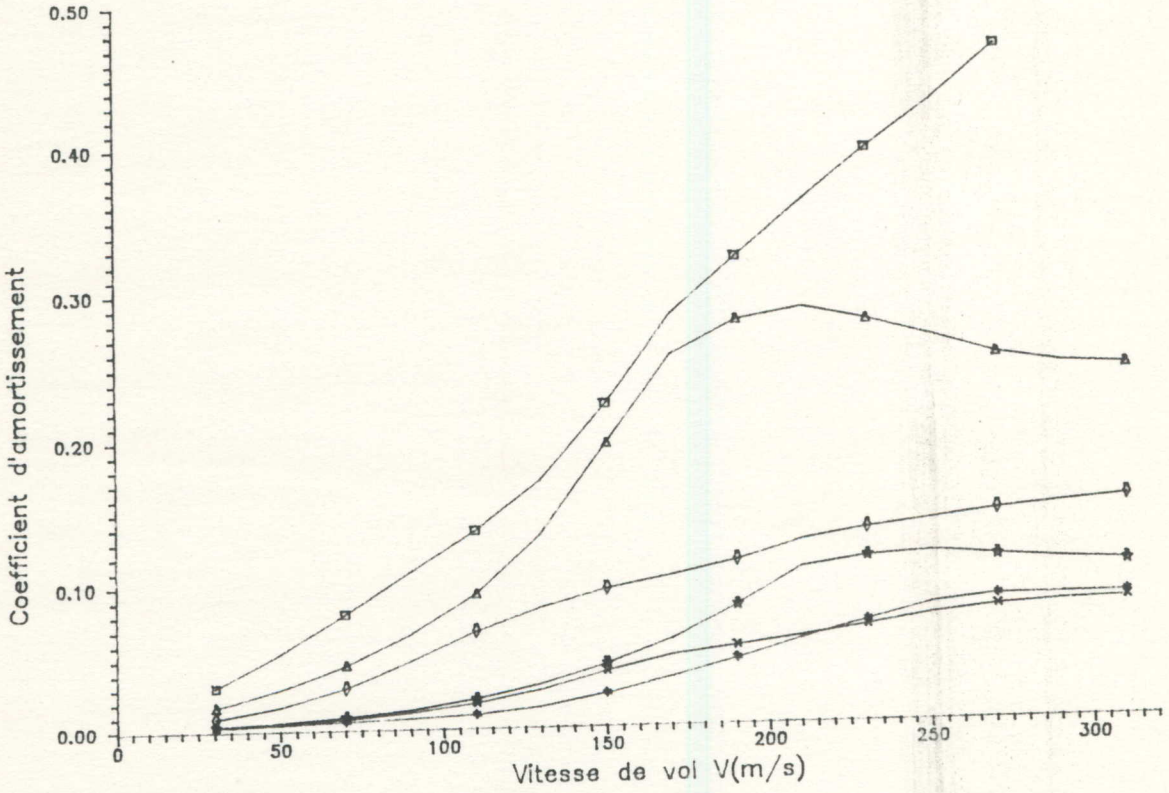


Figure 5-21b *:Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitess*

Figure 5-21 *:Solutions des equations Anglaises du flottement par le procede semi-graphique pour k=8.0 (empennage)*

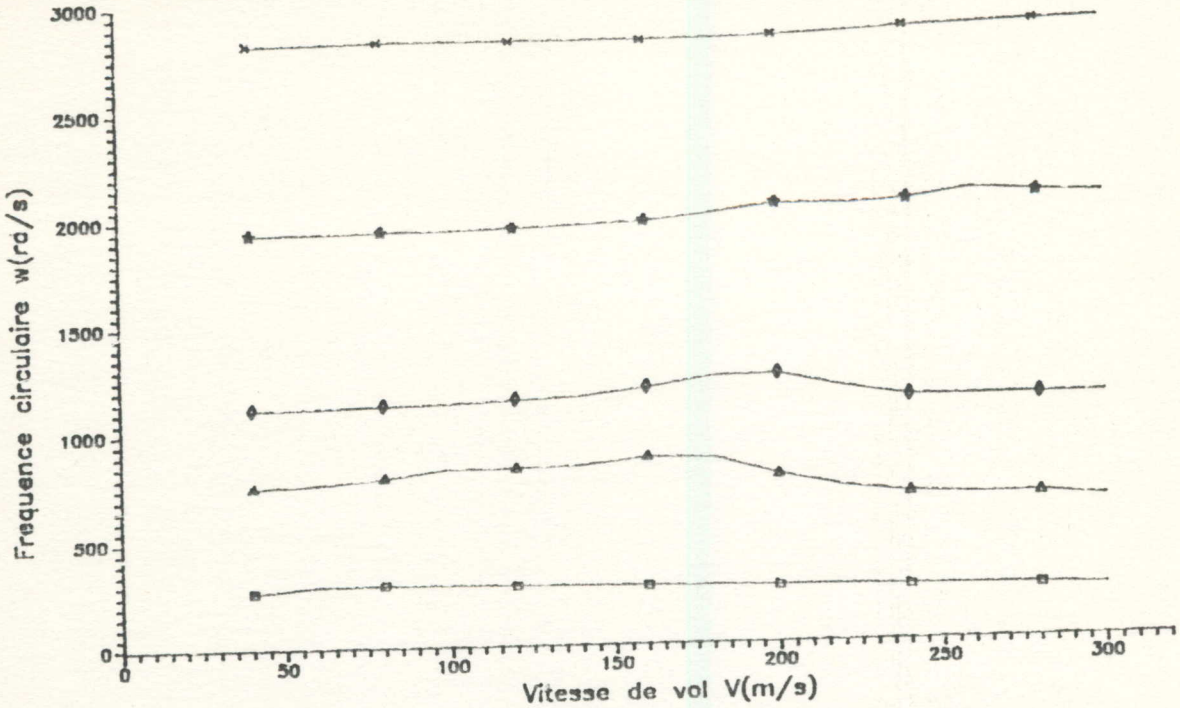


Figure 5-22a :La frequence d'oscillation en fonction de la vitesse

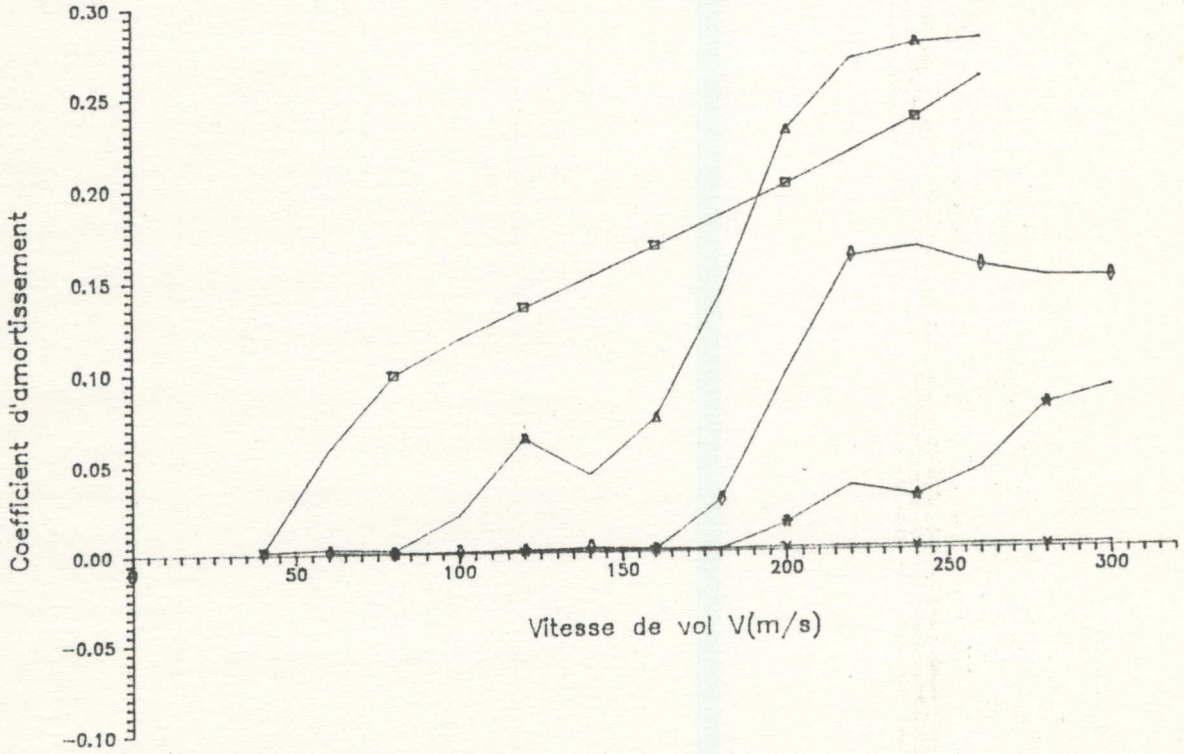


Figure 5-22b :Le coefficient d'amortissement en fonction de la vitesse

Figure 5-22: Resultats de la resolution des equations Anglaises du flottement par le procede iteratif (empennage horizontal)

Tableau 5-10 : Comparaison entre les différentes méthodes de résolution du point de vue temps de calcul pour l'empennage horizontal

	Temps de calcul sur micro-ordinateur
Méthode Américaine procédé itératif	10 heures 08 minutes
Méthode Américaine améliorée	07 heures 22 minutes
Méthode Anglaise semi-graphique	05 heures 35 minutes
Méthode Anglaise procédé iteratif	10 heures 37 minutes
Méthode Anglaise améliorée	07 heures 49 minutes

CONCLUSION GENERALE

Au terme de ce présent travail, nous jugeons avoir atteint le but que nous nous sommes fixés: résoudre efficacement les équations du flottement aéroélastique, écrites selon les formulations Anglaise et Américaine, par différents procédés et sur micro-ordinateur.

Il suffira à l'utilisateur de notre logiciel d'introduire les données concernant la géométrie de la structure et celles de l'écoulement. Notre code se chargera de calculer les matrices masse et rigidité globales de la structure, de déterminer le comportement naturel du système, de réduire le nombre d'équations à résoudre par condensation de Guyan et superposition modale. Il formera ensuite le système d'équations à résoudre selon la formulation désirée, calculera les forces aérodynamiques instationnaires auxquelles est soumise la structure et résoudra le problème de flottement par différents procédés en fournissant la vitesse à laquelle se produit ce phénomène aéroélastique tant appréhendé et redouté à cause des dégats catastrophiques qu'il risque de causer.

Les résultats obtenus dans le cinquième chapitre prouvent la validité de notre code de calcul:

- La condensation statique de Guyan a conduit à des résultats satisfaisants.
- Tronquer la matrice modale est également une bonne approximation en plus du fait qu'elle permet de réduire le nombre d'équations à résoudre.
- Les vitesses de flottement obtenues par chacune des méthodes de résolution sont comparées entre elles et avec les résultats obtenus par McINTOSH et ASHLEY [35], et s'avèrent être satisfaisantes.

Nous pouvons ainsi conseiller à l'utilisateur l'une ou l'autre des méthodes selon les moyens et les besoins:

- La formulation Américaine est à utiliser lorsque nous n'avons besoin de connaitre que la vitesse de flottement. La résolution par cette formulation ne fournit aucune information suplémentaire sur le comportement aéroélastique de la structure. Le coefficient d'amortissement fictif n'a aucun sens physique. Le temps nécessaire à la résolution par cette méthode est, quant à lui, intéressant.

- La résolution du problème de flottement selon la formulation Anglaise est une analyse plus complète. Le coefficient d'amortissement possède un sens physique. Le procédé semi-graphique utilisé nécessite le tracé d'une multitude de graphes afin d'obtenir la seule valeur de la vitesse de flottement. Il est cependant intéressant du point de vue temps de calcul sur machine. Le procédé itératif est certainement plus efficace que le précédent mais relativement plus lent.

Notre code de calcul permet également de faire une analyse de flottement en fonction de l'altitude de vol. Il peut trés bien résoudre le problème statique de la divergence aéroélastique. Il est aussi possible de l'utiliser dans le but d'une optimisation efficace de la structure. Il rassemble une multitude de subroutines que nous avons développées en tenant compte des problèmes numériques fréquents en analyse aéroélastique et qui constituent une bibliothèque mathématique pouvant être utilisée pour différents objectifs.

Il serait également intéressant, dans le cadre de travaux futurs, d'introduire les effets thermiques qui sont insignifiants dans le domaine subsonique mais risquent de devenir importants dans le domaine hypersonique.

Enfin, nous espérons que notre travail stimulera de l'intérêt et qu'il sera poursuivi par l'étude d'autres

phénomènes provenant du couplage entre la structure et l'écoulement, afin de constituer un logiciel complet d'analyse aéroélastique, propre à l'Institut de Mécanique.

REFERENCES

1. NIBLETT,L.T., "A guide to classical flutter". Aeronautical Journal, November 1988, pp 339 354.

2. RICHARDSON,J.R., "A more realistic method for routine flutter calculations". AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity, August-September 1965.

3. BISPLINGHOFF,R.L., and ASHLEY,H., "Principles of aeroelasticity". Dover publications, INC, New York, 1962.

4. PINES,S. "An elementary explanation of the flutter mechanism". Proceedings National Specialists Meeting on Dynamics and Aeroelasticity. Institute of the Aeronautical sciences, Ft. Worth, Texas, November 1958, pp. 52-58.

5. LAWRENCE,A.J. and JACKSON.P., "Comparison of different methods of assessing the free oscillatory characteristics of aeroelastic systems". RAE report, A.R.C C.P. N° 1084, December 1968.

6. UEDA,T. and DOWWELL,E.H., "Flutter analysis using nonlinear aerodynamic forces". Journal of aircraft, Vol. 21, N° 2, February 1984.

7 RAHULAN,T., "Aeroelasticity". Handout, department of Aeronautical and Mechanical Engineering, University of Salford.

8. SOUAHI,A., "Structural optimisation of aircraft lifting surfaces to satisfy flutter requirements". PhD Thesis, Cranfield Institute of Technology, June 1986.

9. DESTUYNDER,R., "Méthodes d'essais instationnaires en soufflerie mises en oeuvres dans le cadre des études de flottement". Recherche Aérospatiale, N° 2, 1987, pp.1-11.

10. GHIRINGHELLI,G.L., LANZ,M. and MANTEGAZZA.P., "A comparison of methods used for the identification of flutter from experimental data". Journal of Sound and Vibration, Vol 119, N° 1, 1987, pp 39-51.

11. DAT,R. et MEURZEC,J.L., "Sur les calculs de flottement par la méthode dite du balayage en fréquence réduite". La recherche Aérospatial, N° 133, Novembre-Décembre 1969, pp.41-43.

12. RODDEN,P.W., HARDER,R.L. and BELLINGER,E.D., "Aeroelastic addition to NASTRAN". NASA Contractor Report 3094, 1979.

13. IMBERT,J.F., "Analyse des structures par éléments finis". Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. Editions Cepadues, 1979.

14. DAT,R., "Les méthodes utilisées pour l'étude des vibrations aéroélastiques des structures aéronautiques". Cycle de conférences tenu à Ermenonville, 4-8 Septembre 1972, pp 537-560.

15. DAT,R., "Vibrations aérélastiques". Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1979.

16. MEIROVITCH,L., "Analytical methods in vibrations". The Macmillan company, New York, 1967.

17. GIBERT,R.J., "Vibrations des structures". Editions Eyrolles, Paris, 1988.

18. ZIENKIEWICZ,O.C., "The finite element method". Mac Graw-Hill, 1979.

19. HORNBECK,R.W., "Numerical methods". Quantum Publishers, Inc, 1975.

20. WILKINSON,J.H. and REINSCH,C., "Linear algebra". Handbook for automatic computation, Volume II. New York 1971.

21. BARNES,W.M., "Aerodynamics and flight dynamics". John Willey & Sons, 1979.

22. DAVIES,D.E, "Calculation of unsteady generalized airforces on a thin wing oscillating harmonically in subsonic flow". RAE report, A.R.C R. & M. N° 3049, August 1963.

23. DAVIES,D.E., " Theoretical determination of subsonic osciliatory airforce coefficients". RAE report, A.R.C. R. & M. N° 3804, May 1976.

24. DOLE,C.E., "Flight theory and aerodynamics". John Willey & Sons, 1981.

25. KUETHE,A.M. and CHOU,C.Y., "Foundations of aerodynamics". John Wiley & Sons, 1986.

26. HARDER,R.L., and DESMARAIS,R.N., "Interpolation using Surface Splines". Journal of aircraft, Vol 9, February 1972, pp 189-192.

27. RODDEN,W.P., Mc GREW,J.A. and KALMAN,T.P., "Comment on interpolation using Surface Splines". Journal of aircraft, Vol 9, N° 12, December 1972, pp 869-870.

28. TIMOSHENKO,S.P., and GOODIER,J.N., "Theory of elasticity". McGraw Hill, New York, 1970.

29. LOTTATI,I. "The role of structural and aerodynamic damping on the aeroelastic behavior of wings". Journal of aircraft, Vol. 23, N° 7, January 1986, pp. 606-608.

30. CAVAILLE,Y., AUREILLE,R.,and CHANCELEE,H., "Aerodynamic damping in turbomachinery". 17th Annual International Gas Turbine Conference, March 26-30, 1972.

31. SHEID,F., "Numerical analysis". Mac Graw-Hill, New-York, 1986.

32. MACNEAL,R.H., editor, "The NASTRAN theoretical manual". The MacNeal-Schwendler Corporation, 7442 N.Figueroa Street, Los Angeles, USA, 1972.

33. BLINGER, D., editor, "MSC/NASTRAN, aeroelastic supplement". The MacNeal-Schwendler Corporation, 7442 N.Figueroa Street, Los Angeles, USA, 1980.

34. MEIROVITCH,L., "Computational methods in structural dynamics". Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijin, The Netherlands, Rockville, Maryland, USA, 1980.

35. McINTOSH,S.C. AND ASHLEY,H., "On the optimisation of discrete structures with aeroelastic constraints". An International Journal of Computers and Structures, Vol.8, N° 3/4, May 1978, pp.411-419.

36. FUNG,Y.C. and SECHLER,E.E., editors, "Thin-shell structures. Theory, experiment and design", pp.157-201, Prenctice-Hall, Inc., englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

37. HITCHINGS,D., "FINEL introduction manual". Imperial College of Science and Technology, Dept. of Aeronautics.

38. KOTTAPALI,S.B.R., "Unsteady aerodynamics of oscillating airfoils with inplane motons". Journal of the American

Helicopter Society, Vol. 30, January 1985, pp. 62-63.

39. ELISHAKOFF,I.and HOLLKAMP,J., "Computerized symbolic solution for a non conservative system in which instability occurs by flutter in one range of a parameter and by divergence in another". Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA, May 1986.

40. GHIRINGHELLI,G.L., LANZ,M. and MANTEGAZZA,P., "A comparison of methods used for the identification of flutter from experimental data". Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico Di Milano, via Golgi,40-20133 Milano, Italy, January 1986.

41. POTKANSKI,W., "Flutter analysis of light aircraft".Acta Mechanica 62, Mielec, Poland, 1986, pp. 105 112.

ANNEXE A

ORTHOGONALITE DES VECTEURS PROPRES NATURELS PAR RAPPORT AUX MATRICES MASSE ET RIGIDITE REDUITES

Montrons que des vecteurs propres naturels correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux par rapport aux matrices masse et rigidité réduites.

Les vecteurs propres naturels sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres réduit suivant:

$$\left[[K_r] - (\omega_N)^2 [M_r] \right] \{ \phi \}_m = \{ 0 \} \qquad \text{(A-1)}$$

si $\left(\omega_{Na} , \{ \phi \}_{ma} \right)$ et $\left(\omega_{Nb} , \{ \phi \}_{mb} \right)$ sont deux couples de solutions de l'équation (A-1), nous écrivons:

$$[K_r] \{ \phi \}_{ma} - (\omega_{Na})^2 [M_r] \{ \phi \}_{ma} = \{ 0 \} \qquad \text{(A-2)}$$

$$[K_r] \{ \phi \}_{mb} - (\omega_{Nb})^2 [M_r] \{ \phi \}_{mb} = \{ 0 \} \qquad \text{(A-3)}$$

La prémultiplication des équations (A-2) et (A-3) par $\{ \phi \}^T_{mb}$ et $\{ \phi \}^T_{ma}$ respectivement, conduit à:

$$\{\phi\}_{mb}^{T}\left[K_r\right]\{\phi\}_{ma} - \left(\omega_{Na}\right)^2\{\phi\}_{mb}^{T}\left[M_r\right]\{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(A-4)}$$

$$\{\phi\}_{ma}^{T}\left[K_r\right]\{\phi\}_{mb} - \left(\omega_{Nb}\right)^2\{\phi\}_{ma}^{T}\left[M_r\right]\{\phi\}_{mb} = 0 \qquad \text{(A-5)}$$

En prenant la transposée de l'équation (A-5), et comme conséquence de la symétrie des matrices masse et rigidité réduites, nous obtenons:

$$\{\phi\}_{mb}^{T}\left[K_r\right]\{\phi\}_{ma} - \left(\omega_{Nb}\right)^2\{\phi\}_{mb}^{T}\left[M_r\right]\{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(A-6)}$$

En soustrayant l'équation (A-6) de l'équation (A-4) nous aboutissons à:

$$\left[\left(\omega_{Nb}\right)^2 - \left(\omega_{Na}\right)^2\right]\{\phi\}_{mb}^{T}\left[M_r\right]\{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(A-7)}$$

Puisque les deux valeurs propres sont, par hypothèse, différentes ($a \neq b$) alors l'équation (A-7) ne sera vérifiée que si :

$$\{\phi\}_{mb}^{T}\left[M_r\right]\{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(A-8)}$$

et à la suite des équations (A-4) et (A-5)

$$\{\phi\}_{mb}^{T}\left[K_r\right]\{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(A-9)}$$

et si a = b alors:

$$\left.\begin{aligned} \{\phi\}^T_{m_b} [M_r] \{\phi\}_{m_a} &\neq 0 \\ \{\phi\}^T_{m_b} [K_r] \{\phi\}_{m_a} &\neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A-10)$$

Ainsi, l'horthogonalité des vecteurs propres naturels par rapport aux matrices masse et rigidité réduites est montrée.

ANNEXE B

NORMALISATION DES VECTEURS PROPRES PAR RAPPORT A LA MATRICE MASSE REDUITE

Nous pouvons traduire l'orthogonalité des vecteurs propres naturels par rapport aux matrices masse et rigidité réduites par :

$$\left.\begin{aligned} \{\phi\}_{m^b}^{T}\,[M_r]\,\{\phi\}_{m^a} &= \mu_{ab}\,\delta_{ab} \\ \{\phi\}_{m^b}^{T}\,[K_r]\,\{\phi\}_{m^a} &= \gamma_{ab}\,\delta_{ab} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B-1)}$$

$[M_r]$ et $[K_r]$ sont respectivement les matrices masse et rigidité réduites d'ordre p x p

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = b \\ 0 & \text{si} \quad a \neq b \end{cases} \qquad \text{(B-2)}$$

δ_{ab} est le symbole de Kronecker

μ_{ab} et δ_{ab} sont respectivement la masse généralisée et la rigidité généralisée

par conséquent:

$$\left.\begin{aligned} [\Phi_{mt}]^{T}[M_r]\,[\Phi_{mt}] &= [\mu]_{nxn} \\ [\Phi_{mt}]^{T}[K_r]\,[\Phi_{mt}] &= [\gamma]_{nxn} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B-3)}$$

où $[\Phi_{mt}]$ est la matrice modale tronquée de dimension pxn

$[\mu]$ et $[\gamma]$ sont respectivement les matrices masse et rigidité généralisées d'ordre nxn

Soit l'équation aux valeurs propres naturelles écrite pour un mode $\{\phi\}_{ma}$:

$$\left[[K_r] - (\omega_{Na})^2 [M_r]\right] \{\phi\}_{ma} = \{0\} \qquad \text{(B-4)}$$

En prémultipliant l'équation (B-4) par le vecteur ligne $\{\phi\}^T_{ma}$, nous obtenons:

$$\{\phi\}^T_{ma} \left[[K_r] - (\omega_{Na})^2 [M_r]\right] \{\phi\}_{ma} = 0 \qquad \text{(B-5)}$$

En posant (a=b) dans les équations (B-1) et comme conséquence du système (B-2), l'équation (B-5) devient:

$$\gamma_{aa} - \omega^2_{Na}\, \mu_{aa} = 0 \qquad \text{(B-6)}$$

Nous obtenons ainsi la rigidité généralisée en fonction de la fréquence naturelle et de la masse généralisée :

$$\gamma_{aa} = \omega^2_{Na}\, \mu_{aa} \qquad \text{(B-7)}$$

Afin de normaliser par rapport à la matrice masse divisons le vecteur propre $\{\phi\}_{m_a}$ par la racine carrée de la masse généralisée μ_{aa} et posons:

$$\{\bar{\phi}\}_{m_a} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{aa}}} \{\phi\}_{m_a} \qquad \text{(B-8)}$$

Ainsi, en réécrivant la matrice modale tronquée en fonction des n vecteurs propres naturels normalisés par rapport à la masse généralisée et en utilisant l'équation (B-7), le système (B-3) devient:

$$\left.\begin{aligned} \left[\bar{\Phi}_{mt}\right]^T \left[M_r\right] \left[\bar{\Phi}_{mt}\right] &= \left[\backslash 1 \backslash\right]_{nxn} \\ \left[\bar{\Phi}_{mt}\right]^T \left[K_r\right] \left[\bar{\Phi}_{mt}\right] &= \left[\backslash \omega_N^2 \backslash\right]_{nxn} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B-9)}$$

où

$\left[\bar{\Phi}_{mt}\right]$ est la matrice modale tronquée formée par les n vecteurs $\{\bar{\phi}\}_m$.

$\left[\backslash 1 \backslash\right]$ est matrice identité représentant à présent la la matrice des masses généralisées.

$\left[\backslash \omega_N^2 \backslash\right]$ est la matrice spéctrale formée par les carrée des fréquences naturelles des n premiers modes de vibration appartenant au plan de la structure.

ANNEXE C

ANALYSE MATHEMATIQUE POUR UNE INTERPOLATION UTILISANT LES " SURFACES SPLINES"

Il existe des méthodes particulières qui permettent de séléctionner des éléments et des noeuds pour la structure et d'autres pour la surface portante. Chacune de ces méthodes est recommandée pour un problème particulier, soit structural, soit aérodynamique. Il arrive souvent que le modèle structural d'une aile, par exemple, demande un maillage uni-, bi-, ou tri-dimensionnel et que la théorie des surfaces portantes soit en même temps appliquée, comme il est le cas pour nous. Il est évident que ces noeuds choisis par des moyens différents et pour des buts différents ne coincident en général pas.

Une méthode générale d'interpolation existe, elle permet de trouver une relation entre les maillages de natures différentes en utilisant le principe des fonctions spline appliqué à l'analyse mathématique des plaques minces en flexion.

L'équation differentielle fondamentale gouvernant le déplacement w sous une charge transversale q_T est donnée par l'équation de sophie Germain [28]

$$\Delta^2 w = \frac{q_T}{D} \qquad (C-1)$$

où D est la rigidité cylindrique de la plaque mince

$$D = E\, e^3 / 12(1-\nu^2) \qquad (C-2)$$

avec :

E : coefficient ou module de Young

e : épaisseur de la plaque

ν : coefficient de Poisson

en coordonnées polaires r et θ:

$$\begin{cases} X = r \cos\theta \\ Y = r \sin\theta \end{cases} \qquad (C\text{-}3)$$

l'équation (C-1) devient :

$$\Delta^2 w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q_r}{D} \qquad (C\text{-}4)$$

la solution de l'équation (C-4) est donnée sous la forme [12]:

$$w(X,Y) = a_0 + a_1 X + a_2 Y + \sum_{i=1}^{n} K_i(X,Y)\, P_i \qquad (C\text{-}5)$$

tel que :

$$\left.\begin{aligned} K_i(X,Y) &= \frac{1}{16\,\Pi D}\, r_i^2 \ln r_i^2 \\ \text{et} \qquad r_i^2 &= (X-X_i)^2 + (Y-Y_i)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (C\text{-}6)$$

les P_i sont des charges concentrées aux points (X_i, Y_i), les (n+3) inconnues (a_0, a_1, a_2, et P_i pour i = 1 à n) sont déterminées à partir des (n+3) équations :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 0 \qquad (C\text{-}7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i P_i = 0 \qquad (C\text{-}8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i P_i = 0 \qquad (C\text{-}9)$$

et

$$w_j = a_o + a_1 X_j + a_2 Y_j + \sum_{i=1}^{n} K_{ij} P_i \qquad (j=1,n) \qquad (C\text{-}10)$$

où $K_{ij} = K_i (X_j, Y_j)$

notons que $K_{ij} = K_{ji}$

et $K_{ij} = 0$ quand $i = j$

En écrivant les n équations (C-10) sous forme matricielle nous obtenons:

$$w(X,Y) = [\, 1 \;\; X \;\; Y \;\; K_1(X,Y) \ldots K_n(X,Y)] \begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \qquad (C\text{-}11)$$

Les coefficients inconnus a_o , a_1 , a_2 , P_1, P_2,..., P_n sont déterminés en résolvant le système suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & \cdots & X_N \\ 0 & 0 & 0 & Y_1 & \cdots & Y_N \\ \hline 1 & X_1 & Y_1 & 0 & \cdots & K_{1N} \\ 1 & X_2 & Y_2 & K_{21} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & X_N & Y_N & K_{N1} & \cdots & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \hline P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ Pn \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ wn \end{array}\right\} \qquad \text{(C-12a)}$$

Nous réécrivons ce système sous la forme plus simple suivante:

$$\left[A1\right] \left\{P1\right\} = \left\{D1\right\} \qquad \text{(C-12b)}$$

$\left[A1\right]$ est la matrice d'interpolation qui peut s'écrire en fonction des coordonnées des noeuds aérodynamiques ou structuraux

$\left\{P1\right\}$ est le vecteur des charges concentrées (contient également les coefficients a_0, a_1 et a_2)

$\left\{D1\right\}$ est le vecteur des déplacements dûs au vecteur des charges concentrées

ANNEXE D

LISTE DES MODULES DEVELOPPES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU FLOTTEMENT AEROELASTIQUE

A défaut de présenter le "listing" du logiciel que nous avons développé car celui ci est trop long, nous présentons dans cette annexe la liste des principaux modules développés dans le but de résoudre les équations du flottement. Cette liste n'est cependant pas exhaustive : beaucoup de subroutines intermédiaires ont été programmées mais que nous omettons de citer.

COMPUR : Calcul automatique de la précision de la machine de calcul.

JACOBI : Recherche des valeurs et vecteurs propres d'une matrice réelle symétrique par la métode de Jacobi.

KMG : Module calculant les matrices masse et rigidité global d'une structure modélisée par la méthode des éléments finis (module tiré de la référence [37]).

CONDYN : Réduction des matrices masse et rigidité par la technique de condensation statique de Guyan.

GJ : Résolution de systèmes linéaires à coefficients réels par la méthode de Gauss-Jordan avec pivotement partiel.

AERO : Calcul des forces aérodynamiques instationnaires et des coefficients d'influence aérodynamiques par la

méthode de collocation.

SPLN1D : Interpolation Spline à une dimension (pour réaliser une interpolation de matrice).

SPLN2D : Interpolation Spline à deux dimensions.

CONECT : l'interconnexion entre le maillage aérodynamique et le maillage structural basée sur RINV, GJ et SPLN2D.

RLU : Décomposition LU de Doolittle, des matrices réelles non symétriques.

RLUSOL : Résolution du système linéaire dont la matrice A est traitée par RLU.

COMLU : Décomposition LU de Doolittle des matrices complexes non symétriques.

CLUSOL : Résolution du système linéaire dont la matrice A est traitée par COMLU.

RINV : Inversion d'une matrice réelle non symétrique basée sur RLU et RLUSOL.

COMINV : Inversion d'une matrice complexe non symétrique basée sur COMLU et CLUSOL.

RPCOND : Pré-conditionnement d'une matrice réelle non symétrique.

CPCOND : Pré-conditionnement d'une matrice complexe non symétrique.

RHESS : Réduction à la forme Hessenberg d'une matrice réelle non symétrique pré-conditionnée.

CHESS : Réduction à la forme Hessenberg d'une matrice complexe non symétrique pré-conditionnée.

RHQR : Recherche, par la méthode QR, de toutes les valeurs propres complexes d'une matrice réelle non symétrique préalablement traitée par RHESS.

CHLR : Méthode LR de recherche de toutes les valeurs propres d'une matrice complexe non symétrique préalablement traitée par CHESS.

RVECP : Recherche des vecteurs propres d'une matrice réelle non symétrique connaissant ses valeurs propres.

CVECP : Recherche des vecteurs propres d'une matrice complexe non symétrique connaissant ses valeurs propres.

TRI : Tri des valeurs propres à partie réelle positive et classement de ces valeurs dans l'ordre croissant (par la méthode de Shell-Mezner).

FSOLAM : Formation de l'équation américaine du flottement et résolution par le procédé itératif.

FSOLAG : Formation de l'équation Anglaise du flottement et Résolution par le procédé semi-graphique.

FSOLAI : Formation de l'équation Anglaise du flottement et résolution par le procédé itératif.