SERIE D'EXERCICE N°1

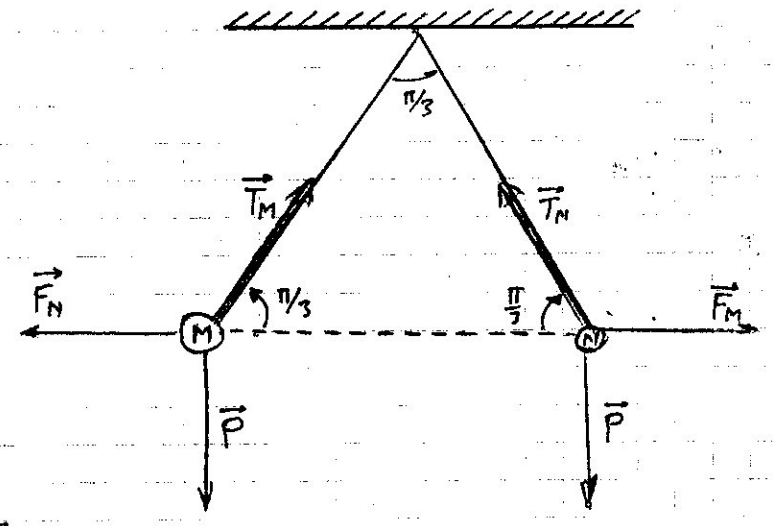
Interaction Electrique et Electrostatique

LOI DE COULOMB

Exercice N°1

Dans le vide et loin de tout autre corps, deux petites boules conductrices portent la même charge électrique q, et sont suspendues au même point fixe P par deux fils fins, isolants, inextensibles, de masse négligeable et de même longueur tel que $PM = PN = 0,4\,m$. La masse de chaque boule est de 3 grammes et à l'équilibre l'angle $M\hat{P}N = \pi/3$.
Quelle est la valeur absolue de la charge q.

SOLUTION:



La charge q située au pt M est au repos (équilibre statique) donc:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_N + \vec{T}_M + \vec{P} = \vec{0}$$

* Projection sur l'axe horizontal:

$$-F + T\cos\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow F = \frac{T}{2}$$

* Projection sur l'axe vertical

$$-P + T\cos\frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow P = T\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A partir de ces 2 équations, on en déduit $F = \frac{P}{\sqrt{3}}$

d'où $$|q| = a\sqrt{\frac{m\,g}{K\sqrt{3}}}$$

Avec $MN = a = 0,4\,m$

$m = 3\,g = 3.10^{-3}\,Kg$

$g = 9,81\,m/s^2$

$K = 9.10^9 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Application numérique

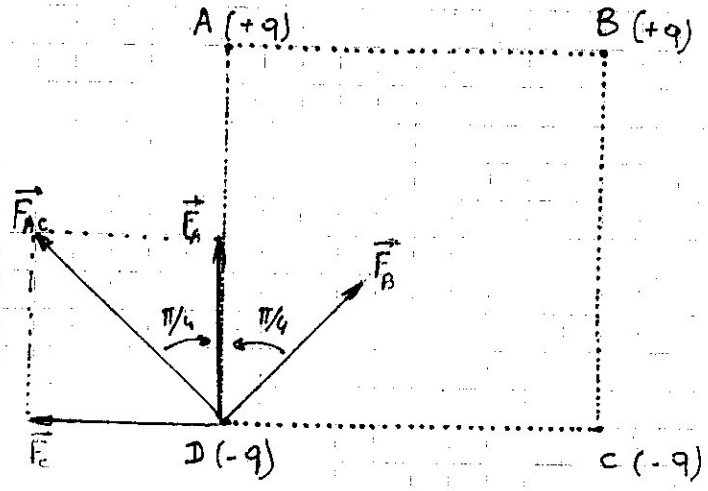
$$\boxed{|q| = \qquad\qquad Cb}$$

Exercice N°2

On place aux quatre sommets d'un carré ABCD de 10 cm d'arête, deux protons (A et B) et deux electrons (C et D). Sachant que $e = -1,6.10^{-19}$ Cb, quelle est la valeur du module de la force F s'exerçant sur l'électron D.

SOLUTION

Sur le point D, chargé par(-q) s'exercent 2 forces d'attraction $\vec{F_A}$ et $\vec{F_B}$ et une force de répulsion $\vec{F_C}$.
On ne considere pas la force du poids car on suppose les 4 charges posés sur un plan horizontal (poids et réaction).
Soit $\vec{R_D}$ la resultante de toutes les forces s'exerçant sur le pt D.



$$\vec{R_D} = \vec{F_C} + \vec{F_A} + \vec{F_B}$$

$$\vec{R_D} = \vec{F_{AC}} + \vec{F_B}$$

Comme $|F_A| = |F_C|$; $F_{AC} = F_A\sqrt{2} = F_C\sqrt{2} = F\sqrt{2}$

$\vec{R_D}$ est composé maintenant de 2 vecteurs $\vec{F_{AC}}$ et $\vec{F_B}$ perpendiculaires entre eux.

$$\vec{R_D} = \vec{F_{AC}} + \vec{F_B}$$

$$R_D^2 = F_{AC}^2 + F_B^2 \Longrightarrow R_D = \sqrt{2F_A^2 + F_B^2}$$

$$|F_B| = K\frac{q^2}{r^2} = K\frac{q^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{F}{2}$$

d'où $R_D = \sqrt{2F^2 + \frac{F^2}{4}} = \frac{3}{2}F$

Finalement le module de la resultante $R_D = \frac{3}{2}K\frac{q^2}{a^2}$

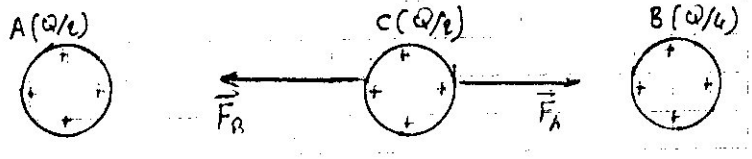
Exercice N° 3

Deux boules conductrices identiques (sans dimensions) A et B distantes de $\ell = 50$ cm portent respectivement les charges Q et $Q/4$. Une troisième boule C est mobile sans frottement sur la ligne droite qui les joint. Initialement neutre, elle est amenée en contact avec A puis abandonnée à elle-même. Déterminer alors sa position d'équilibre.

SOLUTION :

- 1ère étape : C (non chargé) entre en contact avec A

- 2ème étape : C (chargé) s'éloigne de A



La boule C, initialement sans charge, au contact avec la boule A (chargée par $+Q$) va partager avec cette dernière la charge $+Q$: équilibre des charges.

Si on suppose que la durée du partage de la charge est très bref (le temps d'un éclair), alors les 2 boules seront chargées équitablement $+Q/2$ chacune.

- A et C : charges de même signe $\Rightarrow$ A va pousser C vers B avec une force $\vec{F}_A$ telle que $|\vec{F}_A| = \dfrac{K\,(Q/2)^2}{x^2}$ $\qquad AC = x$

C et B : charges de même signe $\Rightarrow$ B va pousser C vers A avec une force $\vec{F}_B$ telle que $|\vec{F}_B| = \dfrac{K\,Q/2 \cdot Q/4}{(\ell - x)^2}$ $\qquad CB = \ell - x$

A l'équilibre statique $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

$\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ seront alors égales en module mais de sens opposés.

$$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| \Rightarrow K\frac{(Q/2)^2}{x^2} = K\frac{Q/2 \cdot Q/4}{(\ell - x)^2}$$

c'est-à-dire que $\dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{1}{8(\ell - x)^2}$ ou encore $2(\ell - x)^2 = x^2$

$$x^2 - 4\ell x + 2\ell^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \ell(2 - \sqrt{2}) & \text{point entre A et B} : \vec{F}_A = -\vec{F}_B \\ x_2 = \ell(2 + \sqrt{2}) & \text{point en dehors de AB} : \vec{F}_A = \vec{F}_B \end{cases}$$

Donc, pour notre cas la boule C s'arrêtera entre A et B tel que

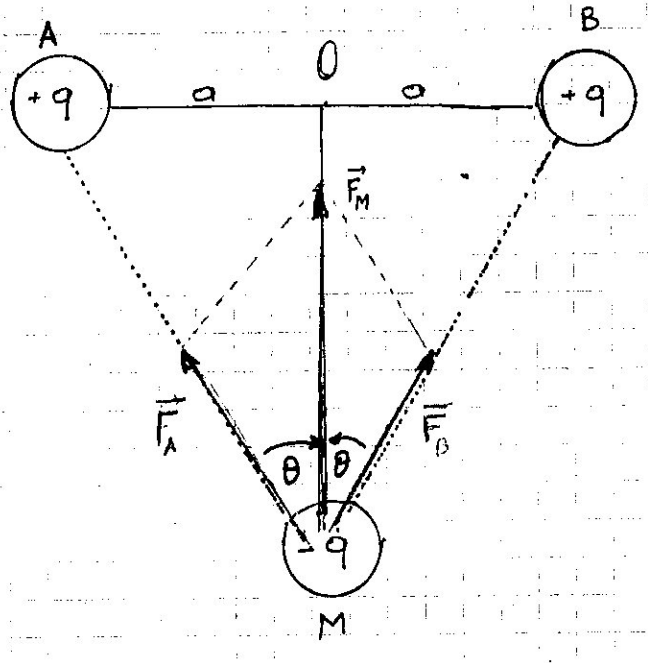
$$\boxed{AC = 29{,}5 \text{ cm}}$$

Exercice N°4

Deux charges ponctuelles positives de même valeur q sont situées en deux point A et B distants de $2a$. Une troisieme charge ponctuelle négative $(-q)$ est placée en un point M situé sur la médiatrice du segment qui joint les points A et B.

1. Représenter sur un schema, la force electrique au point M.
2. Déterminer son expression litterale.
3. Pour quelle distance de M au milieu de AB, cette force est maximale ?

SOLUTION



$AB = 2a$
$AO = OB = a$
$OM = x$
$AM = r_A$
$BM = r_B$

La force electrique qui agit sur M est la somme de toutes les forces electriques provoquées par les charges qui sont autour de M.
Autrement dit:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_M = K\frac{q^2}{r_A^2}\vec{u} + K\frac{q^2}{r_B^2}\vec{v}$$

$$\vec{F}_M = K\frac{q^2}{a^2+x^2}\vec{u} + K\frac{q^2}{a^2+x^2}\vec{v}$$

Projection sur l'axe vertical passant par O.

$$|F_M| = K\frac{q^2}{a^2+x^2}\cos\theta + K\frac{q^2}{a^2+x^2}\cos\theta \qquad \text{or } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

d'ou $$|F_M| = 2Kq^2 \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

Cette force F_M sera maximale lorsque $\frac{dF_M}{dx} = 0$ (croissante puis décroisse

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{2Kq^2x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2Kq^2\left[(a^2+x^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{1/2}\cdot 2x\right]}{(a^2+x^2)^3} = 0$$

Donc $$\frac{2Kq^2}{(a^2+x^2)^{5/2}}\left(a^2+x^2-3x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \\ x_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ de part et d'autre de l'axe AB

$$\boxed{x = \pm a/\sqrt{2}}$$

CALCUL DIRECT DU CHAMPS ET DU POTENTIEL

A/ CHARGES PONCTUELLES

Exercice N°5 X

Deux charges q et q' sont placées en deux points A et B, distants de $2l$, avec $q' = 3q$. Déterminer le champ électrique

1 - En un point M situé au milieu de AB

2 - En un point N situé sur la droite AB à l'extérieur du coté de B tel que $NB = 2l$

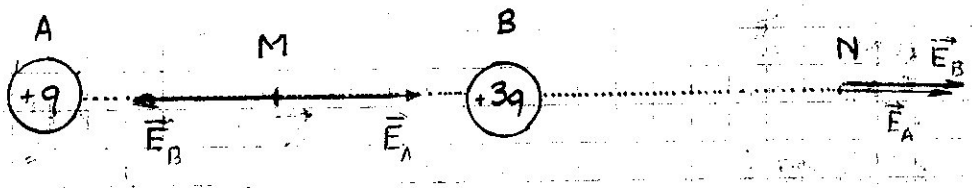
3 - Montrer qu'il existe entre A et B, un point O où le champ est nul

SOLUTION :

$AB = 2l$

$q_A = q$

$q_B = 3q$



1°/ En M, milieu de AB, le champ $\vec{E_M}$ vaut :

$$\vec{E_M} = \vec{E_A} + \vec{E_B}$$

$$\vec{E_M} = \left(\frac{Kq}{l^2} - \frac{3Kq}{l^2}\right)\vec{u} = -2K\frac{q}{l^2}\vec{u}$$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire de $A \to B$)

2°/ En un point N situé à $3l$ de M.

$$\vec{E_N} = \vec{E_A} + \vec{E_B}$$

$$\vec{E_N} = \left(\frac{Kq}{(4l)^2} + \frac{3Kq}{(2l)^2}\right)\vec{u} = \frac{13}{16}\frac{Kq}{l^2}$$

3°/ Montrons qu'il existe entre A et B un point O où le champ est nul.

$AO = x$ donc $OB = 2l - x$

$$\vec{E_o} = \vec{E_A} + \vec{E_B} = \vec{0}$$

$$\vec{E_o} = \left(\frac{Kq}{x^2} - \frac{3Kq}{(2l-x)^2}\right)\vec{u} = \vec{0}$$

donc $x^2 = \frac{(2l-x)^2}{3}$ ou encore :

$$x^2 + 2lx - 2l^2 = 0$$

$\Delta' = l^2 + 2l^2$ toujours positif $\Rightarrow$ il existe toujours une ou des solutions

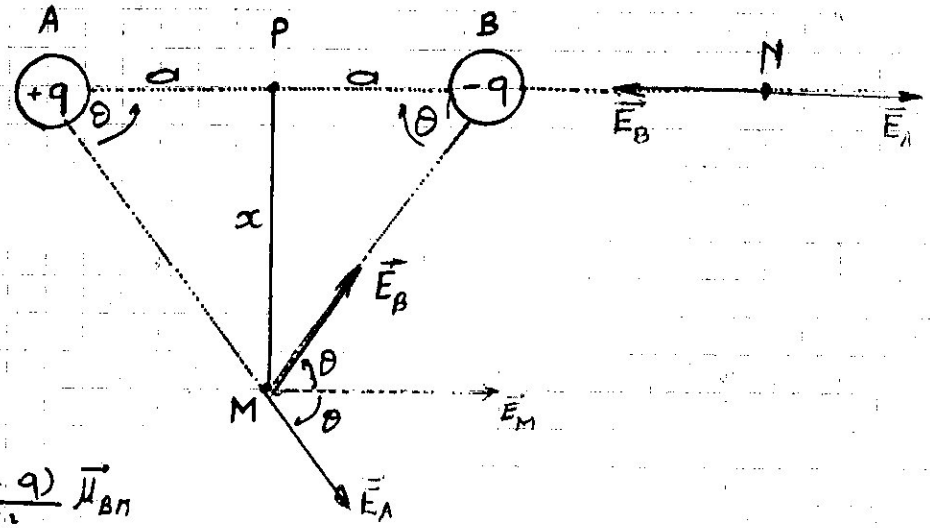
$$x^2 + 2lx - 2l^2 = 0 \begin{cases} x_1 = l(\sqrt{3} - 1) & \text{entre A et B} \\ x_2 = -l(\sqrt{3} + 1) & \text{à rejeter} \end{cases}$$

Finalement AM $\boxed{AO = x = l(\sqrt{3} - 1)}$

Exercice N°6 : X

Deux charges q et q' sont placées en deux points A et B, distants de $2l$; (avec q' et $3q$). On considère les points : P (milieu de AB), M (sur la médiatrice de AB, N (sur la droite AB à l'extérieur du côté de B). Sachant que $q_A = q$ et $q_B = -q$, calculer le champ E produit par les 2 charges en M et en N, pour les cas où $r >> l$.

SOLUTION



$AB = 2l = 2a$
$M \in$ médiatrice de AB
$AP = PB = a$
$AM = r_A$
$BM = r_B$
$PM = x$

a/ Champ produit au point M :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\vec{E}_M = K\frac{q}{r_A^2}\vec{u}_{AM} + K\frac{(-q)}{r_B^2}\vec{u}_{BM}$$

Par projection sur l'axe horizontal passant par M :

$$E_M = K\frac{q}{a^2+x^2}\cos\theta + K\frac{q}{a^2+x^2}\cos\theta \quad ; \text{ comme } \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$E_M = 2\frac{Kq.a}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{2KP}{r^3} \quad \text{avec } \vec{p} = q\vec{a} : \text{moment dipolaire}$$

Approximations usuelles $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$; $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2$
$(1-\varepsilon)^n \simeq 1 - n\varepsilon$ $\quad (1+\varepsilon_1)/(1+\varepsilon_2) = 1+\varepsilon_1-\varepsilon_2$

b/ Champ produit au point N :

Posons $PN = x$ donc $AN = x + a$ et $BN = x - a$

$\vec{E}_N = \vec{E}_A + \vec{E}_B$ par projection sur l'axe AB : $E = E_A - E_B$

$$E = K\frac{q}{r_A^2} - K\frac{q}{r_B^2} = \frac{Kq}{(x+a)^2} - \frac{Kq}{(x-a)^2}$$

$$E = \frac{Kq}{x^2}\left(\frac{1}{(1+\frac{a}{x})^2} - \frac{1}{(1-\frac{a}{x})^2}\right) \quad \text{comme } \frac{1}{(1+\frac{a}{x})^2} = 1 - 2\frac{a}{x}$$

$$E = \frac{Kq}{x^2}\left(\left(1-\frac{2a}{x}\right) - \left(1+\frac{2a}{x}\right)\right)$$

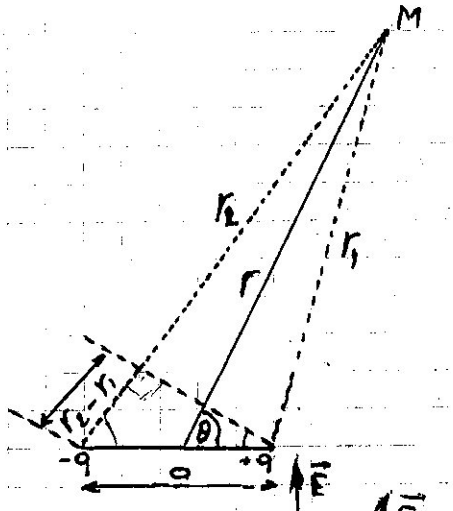
$$\boxed{E \simeq -\frac{4Kqa}{x^3}}$$

Exercice N°7

Soit un ensemble supposé rigide de deux charges (+q) et (-q), (dipole électrique), situé à une distance 2a d'une de l'autre.

1. Calculer le potentiel V en un point M de l'espace à une distance r ($r \gg 2a$)
2. En déduire le champ électrique. Tracer les equipotentielles et les lignes de champ.

SOLUTION :



a/ Le potentiel V résultant du dipôle, en un pt M

sera $V = V(q_1) + V(q_2) = K\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$

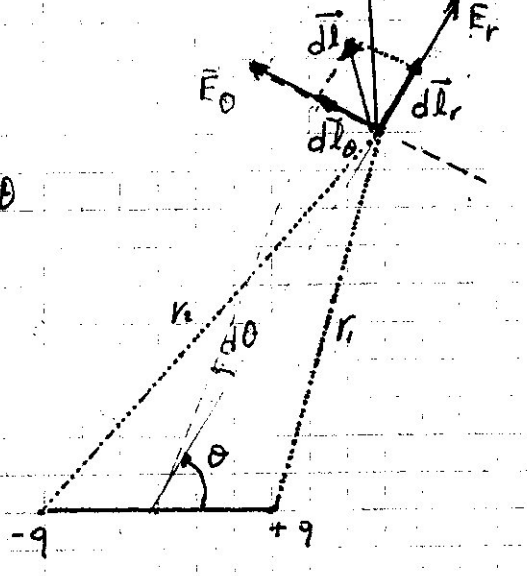
$$V(M) = Kq\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Approximations : si la distance $r \gg a$, alors

$r_2 - r_1 = a\cos\theta$ et $r_1 \cdot r_2 = r^2$ (cf. fig 1)

Dans ce cas $V = \frac{Kqa\cos\theta}{r^2} = \frac{KP\cos\theta}{r^2}$

b/ Le champ electrique $\vec{E}$ en M



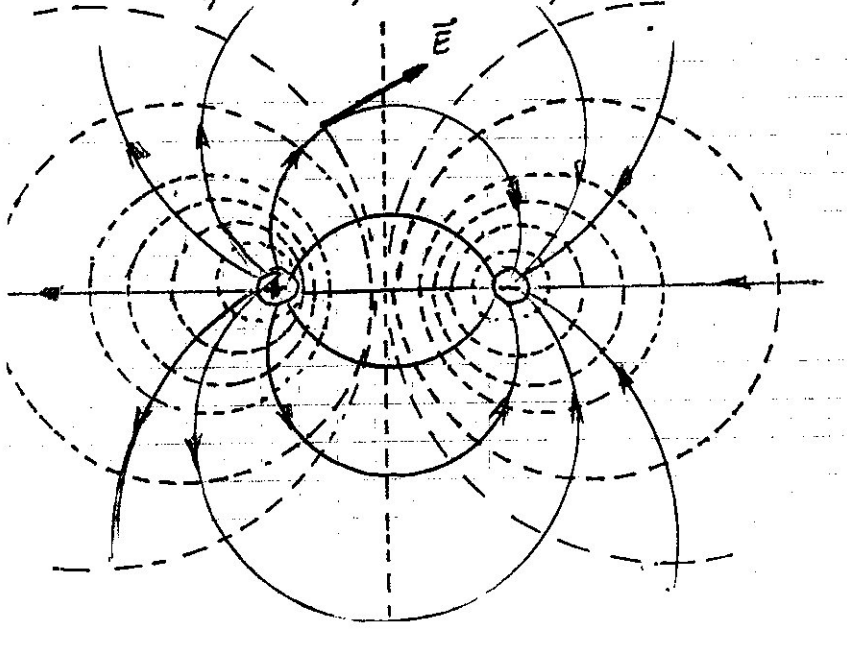
Sachant que $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$

$dV = -(E_r\,dl_r + E_\theta\,dl_\theta)$ comme $dl_\theta = r\,d\theta$

$dV = -(E_r\,dr + E_\theta\,r\,d\theta)$

d'où $\vec{E}\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2KP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{KP\sin\theta}{r^3} \end{cases}$

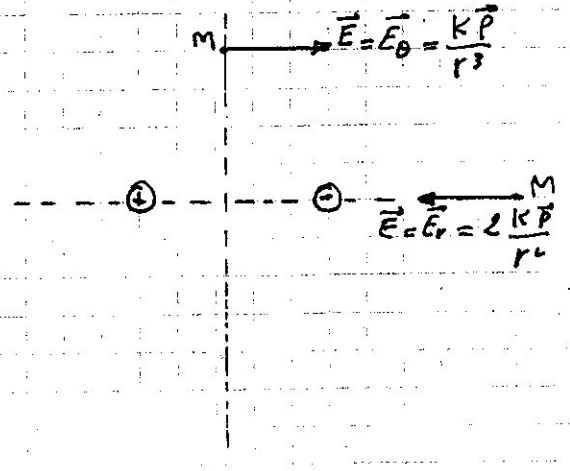
D'où le graphe des equipotentielles (en pointillés) et le champ electrique en trait plein.



Cas particuliers :

si M est sur la mediatrice $\vec{E} = \vec{E}_\theta$

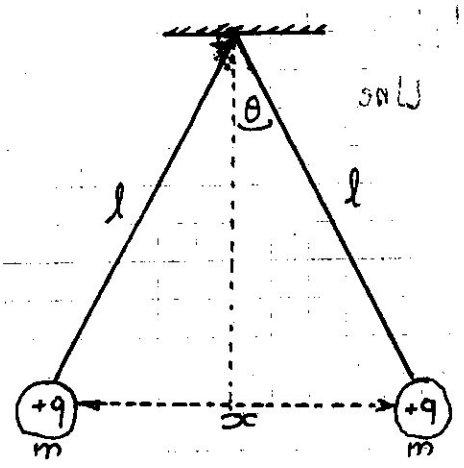
si M ∈ l'axe AB $\vec{E} = \vec{E}_r$



Exercices Supplémentaires 1

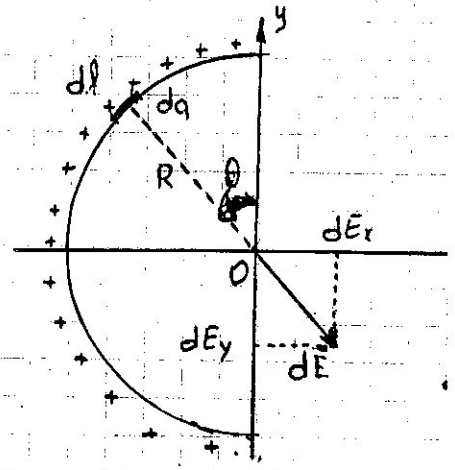
Deux boules ponctuelles de masse m et portant chacune d'elles une charge q, sont suspendues à l'aide de 2 fils fixés au même point O. On suppose que θ est suffisamment faible pour qu'on puisse approximer $\operatorname{tg}\theta \simeq \sin\theta$. Montrer qu'à l'équilibre statique, les 2 boules restent distantes d'une longueur x telle que

$$x = \left(\frac{q^2\, l}{2\pi\varepsilon_0 m g}\right)^{1/3}$$



Une baguette de longueur l est recourbée en demi-cercle de rayon R et de centre O, et porte une charge totale $+q$, uniformément réparti sur toute sa longueur. Déterminer l'expression litterale du champ $\vec{E}$ en O. Que devient ce champ si on met en face de la premiere baguette, une deuxieme baguette similaire à la premiere et portant une charge $-q$.

SOLUTION



1/ Nous allons commencer par calculer l'expression d'un champ $d\vec{E}$ produit par une charge infinitésimale dq.

$$d\vec{E}\left|\begin{matrix} dE_x \\ dE_y \end{matrix}\right. \quad \text{coordonnées cartésiennes.}$$

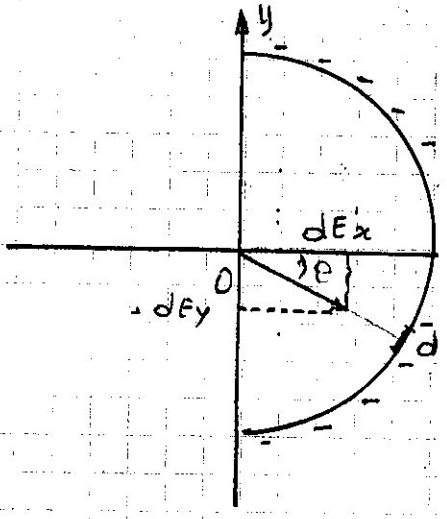
$$dE_x = dE.\sin\theta = \frac{K\,dq}{R^2}\sin\theta = \frac{K\lambda\,dl}{R^2}\sin\theta$$

$$dE_y = -dE\cos\theta = -\frac{K\,dq}{R^2}\cos\theta = -\frac{K\lambda\,dl}{R^2}\cos\theta$$

comme $dl = R\,d\theta$

$$\vec{E}\left|\begin{matrix} E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi} \frac{k\lambda R}{R^2}\,d\theta.\sin\theta = \frac{2k\lambda}{R} \\ E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi} -\frac{k\lambda R\,d\theta}{R^2}\,d\theta\cos\theta = 0 \end{matrix}\right.$$

Donc finalement le champ $\vec{E}$ sera porté sur Ox



2°/ Calculons le champ $\vec{E}'$ produit par la 2ème baguette chargée négativement $(-q)$

$$d\vec{E}'_x\left|\begin{matrix} dE'_x \\ dE'_y \end{matrix}\right. \quad \text{, en faisant un calcul exactement similaire}$$

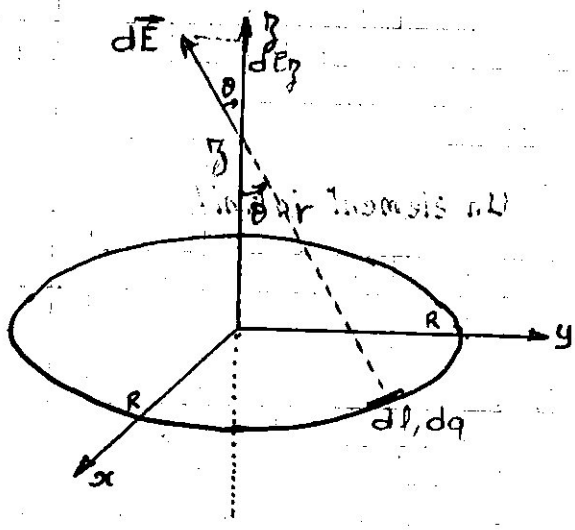
$$\vec{E}'\left|\begin{matrix} E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi} \frac{k\lambda R}{R^2}\,d\theta.\sin\theta = \frac{2k\lambda}{R} \\ E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi} -\frac{k\lambda R}{R^2}\,d\theta\cos\theta = 0 \end{matrix}\right.$$

Donc finalement le champ electrique total $\vec{E}_T$ sera la somme des champs produits par les 2 baguettes

$$\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_T\left|\begin{matrix} E_{Tx} = \frac{4k\lambda}{R} \\ E_{Ty} = 0 \end{matrix}\right.}$$

Un fil ayant la forme d'une circonférence de centre O et de rayon R porte une charge q uniformément répartie sur toute la longueur. On supposera la densité linéique $\lambda > 0$.
Déterminer les expressions litterales du champ et du potentiel en un point de l'axe Oz situé à une distance z de O. (l'ordre des questions est imperatif. $E(z)$ puis $V(z)$.

<u>SOLUTION</u>



Un élement infinitésimal dl de la circonférence porte la charge $dq = \lambda\, dl$ et crée en z un champ électrique $d\vec{E}$ tel que $d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}$

ou $dE_z = K\frac{dq}{r^2}\cos\theta$

or $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

d'où $E = \int dE_z = \int_0^{2\pi R} \frac{K\lambda\, dl}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot z = \frac{K.z.\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot 2\pi R.$

mais comme $q = \lambda.2\pi R$: charge totale du fil, on aboutit à

$$\boxed{\vec{E} = \frac{K\,q\,z}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

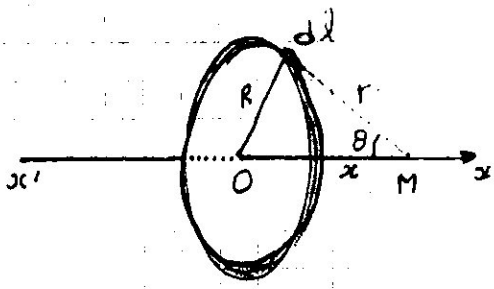
r le potentiel $V = -\int E\, dz = -\int \frac{K\,q\,z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\, dz \Rightarrow V(z) = \frac{K\,q}{\sqrt{R^2+z^2}} + C^{te}$

Exercice Sup 3

Une spire circulaire de rayon R et de centre O, porte une charge Q pas repartie uniformément sur sa circonférence.
Déterminer d'abord l'expression litterale du potentiel electrostatique en un point M de l'axe de la spire.
Déterminer finalement l'expression litterale du champ electrique au même
Representer l'allure de la courbe d'energie potentielle de la charge q en fon de l'éloignement $OM = x$, sachant que Q peut se déplacer sur Ox

SOLUTION :

Un élement infinitésimal dl de la circonférence porte la charge dq et crée en un point M de l'axe x'x le potentiel dV tel que :



$$dV = K \frac{dq}{r}$$

Le potentiel crée par la totalité de la circonférence sera donc :

$$V = \int dV = \int K \frac{dq}{r}$$

En un point M fixé, r reste constant, seulement nous devons l'exprim en Fonction de x et R.

$$V = \int \frac{K}{r} dq = \frac{K q}{r} \quad \text{avec } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; ; q = Q \; ; r = \sqrt{R^2 + x}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}}$$

Calcul du champ électrique $\vec{E}$

★ 1ᵉ methode : Calcul direct

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta \Rightarrow dE_x = K \frac{dq}{r^2} \cos\theta = K \frac{x \cdot dq}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\text{d'où} \quad E = E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot x}{}$$

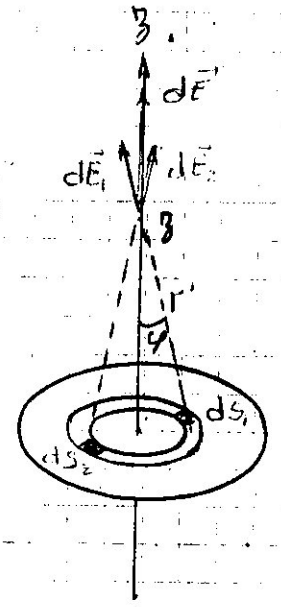
★ 2ᵉ méthode : Deduire $\vec{E}$ à partir de V(M)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

ce qui se résume à $E_x = \frac{\partial V}{}$; $E_y = 0$; $E_z = 0$

2/ Déterminer le potentiel V au même pt M par 2 méthodes différentes. Comparer.
3/ Etudier le cas où $R \to \infty$

SOLUTION :



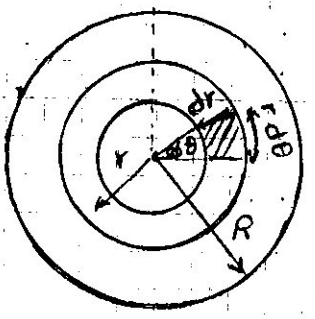
Choisissons un élement infinitésimal de surface ds appartenant au disque: rectangle infinitesimal de longueur $r\,d\theta$ et de largeur dr.
De cette maniere si θ varie de 0 à 2π et si r varie en même temps de 0 à R, on aura couvert la totalite de la surface du disque.
Donc $dS = r\,d\theta.\,dr$
De plus, chaque élement dS_1 aura son symétrique dS_2 par rapport à O. La resultante $d\vec{E} = d\vec{E_1} + d\vec{E_2}$ sera portée entierement sur l'axe Oz.

$d\vec{E} = K \dfrac{dq}{r'^2}\,\vec{u}_{r'}$. En projetant sur Oz:

$$dE_z = dE.\cos\varphi = K\frac{dq}{r'^2}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{z}{r'} = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad ; \quad dq = \sigma\,ds$$

$$dq = \sigma\,r\,dr\,d\theta$$



d'où $dE_z = K\dfrac{\sigma\,r\,dr.\,d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,.\,z$.

$$E_z = K\sigma z\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_z = 2\pi K\sigma z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad , \text{comme } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\star\ \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{u}_z}\ \star$$

Il est à noter que nous avons calculé le champ electrique $\vec{E}$ uniquement pour z positif. Si z est negatif, on fera exactement le même calcul, sauf que $\vec{E}$ sera dirigé vers le bas $\vec{E} = -f(z)\,\vec{u}_z$. Donc on observera une symetrie par rapport à l'origine O.

1/ Calcul du potentiel $V(M)$ à partir de l'expression de $E(z)$.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$; $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{MM'} = -E\, dz$

d'où $V(z) = -\int \vec{E}.\vec{dz} = -\int E(z).\, dz$ car $\vec{E}$ et $\vec{dz}$ colinea

$$V(z) = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right) + C \quad :(co$$

Pour déterminer la constante C, on doit utiliser la condition au limites qui précise que $V(z) = 0$ lorsque $z \to \infty$.

Approximation $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ c.à.d $(1+\varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$

$V(z) = 0$ si $z \to \infty \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ $\boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)}$ ★

2/ Calcul direct du potentiel $V(M)$ et du champ $\vec{E}(M)$:

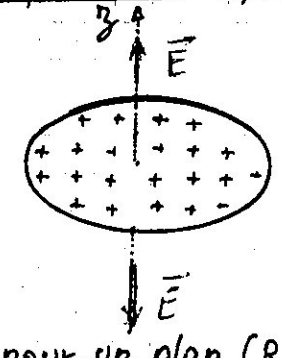
élement infinitésimal $dV = K\frac{dq}{r'}$, $dq = \sigma\, dS = \sigma\, r\, d\theta.\, dr$; $r' =$

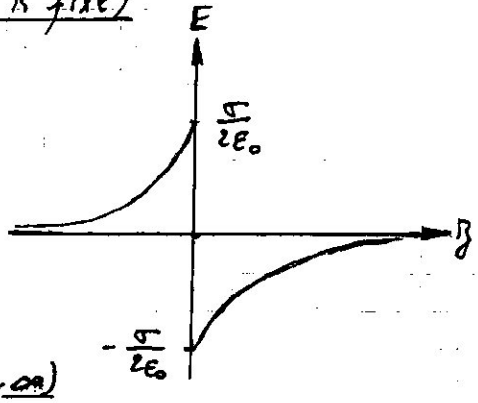
$$V = \int dV \Rightarrow V = K\sigma \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - \right.}$$

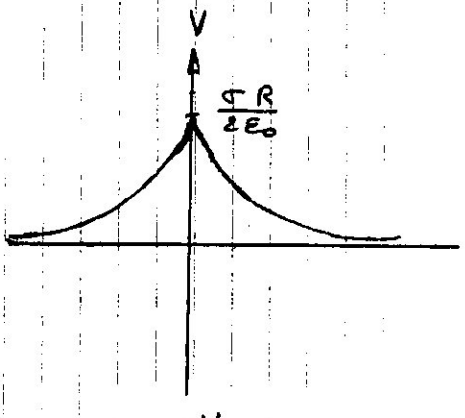
D'où on en déduit $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$; $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}$

c.à.d ★ $\boxed{E(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$ ★

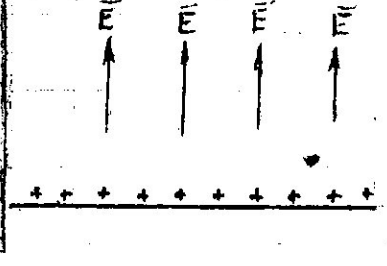
★ pour un disque (R fixé)

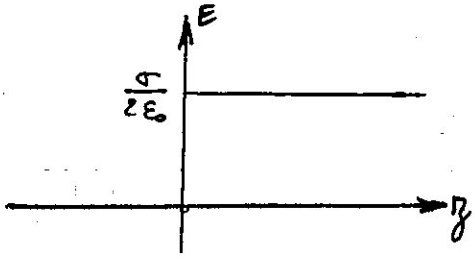


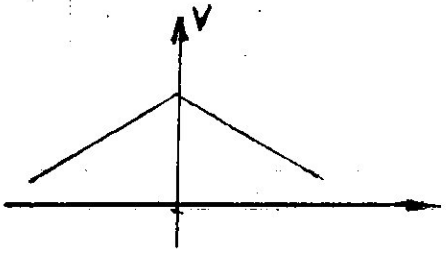




★ pour un plan ($R \to \infty$)



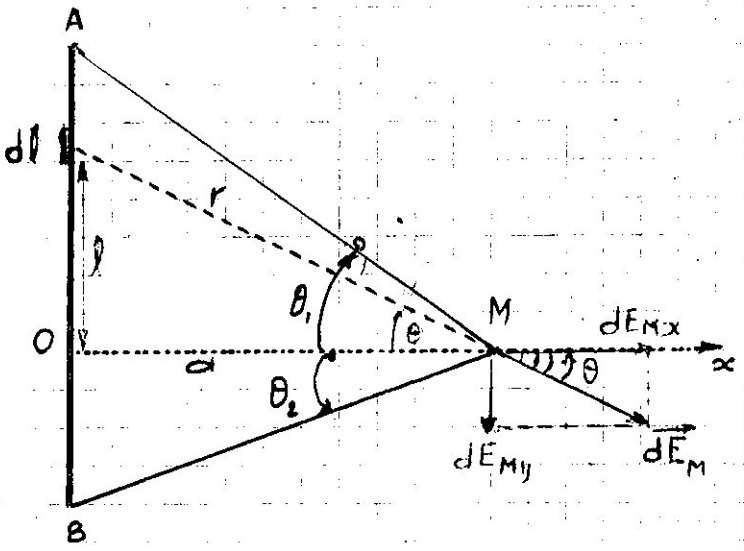




2) $\vec{E}$ en un pt appartenant à la mediatrice de ce fil AB
3) $\vec{E}$ en un pt de l'espace pour un Fil de longueur infinie.

OLUTION

Champ électrique en M quelconque



$AB = L$
$q = \lambda L$ (avec λ constante)
$OM = a$
En supposant $q > 0$, le champ $d\vec{E}$ causé par une charge infinitesimale dq, situé à une distance l de O, sera sortant.

$$d\vec{E}_M = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r$$

Par projection sur l'axe horizontal Ox et l'axe vertical Oy, l'on a:

$$dE_{Mx} = dE_M \cdot \cos\theta = \frac{K\lambda dl}{r^2}\cos\theta$$

$$dE_{My} = dE_M \cdot \sin\theta = K\frac{\lambda dl}{r^2}\sin\theta$$

avec $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{l}{r} \end{cases}$ $\quad tg\theta = \frac{l}{a}$

probleme dans ce cas, c'est que lorsque l'element dl (qui cause $d\vec{E}$) varie, ors les 3 parametres l, θ et r varient simultanement.
onc il faudra convertir tous ces parametres variables en fonction de θ
or les données du probleme, θ_1 et θ_2 sont des angles).
Il s'agit de determiner dl et dr en fonction de $d\theta$.

dl : je ne peux utiliser $l = r\sin\theta$: 2 variables mais $\boxed{l = a\,tg\theta} \Rightarrow dl = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$

dr : on ne peut utiliser $r = l/\sin\theta$ mais $\boxed{r = \frac{a}{\cos\theta}}$.

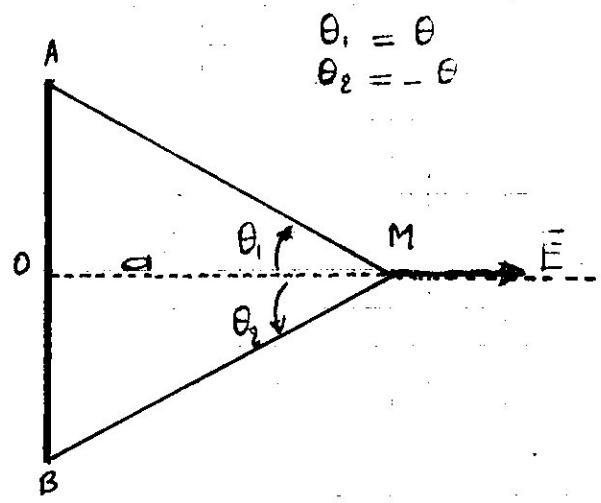
$$\vec{E}_M \begin{cases} E_{Mx} = \int \frac{K\lambda dl}{r^2}\cos\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K\lambda\cos\theta}{a}\,d\theta \\ E_{My} = \int \frac{K\lambda dl}{r^2}\sin\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K\lambda\sin\theta}{a}\,d\theta \end{cases}$$

inalement on obtient

$$\boxed{\vec{E}(M) \left| \begin{array}{l} E_{Mx} = \frac{K\lambda}{a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ E_{My} = \frac{K\lambda}{a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{array} \right.} \quad ★$$

★ Champ $\vec{E}(M)$ appartenant à la médiatrice de AB

Si M appartient à la médiatrice de AB, on observe évidemment une symetrie par rapport à l'axe Ox, car si on prend 2 à 2 tous les elements du fil de part et d'autre de O, on constate que $\vec{E}_M$ est porté sur Ox seul.

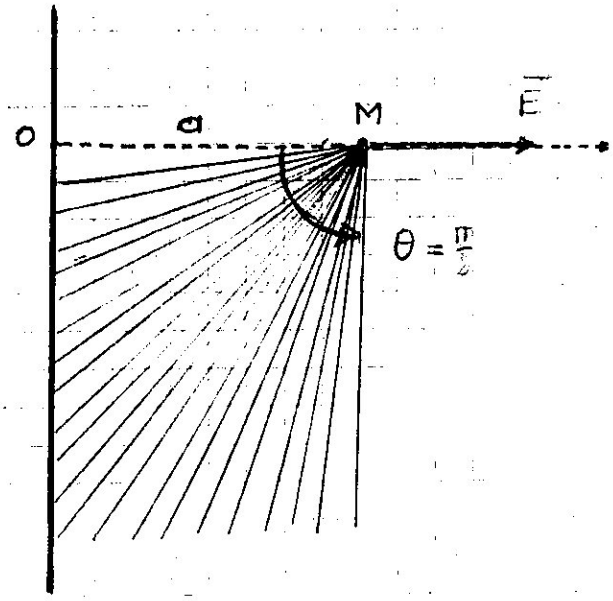


Donc on aura

$$\vec{E}(M)\begin{cases} E_{Mx} = \dfrac{K\lambda}{a}\left(\sin\theta - \sin(-\theta)\right) \\ E_{My} = \dfrac{K\lambda}{a}\left(\cos(-\theta) - \cos\theta\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M)\begin{cases} E_{Mx} = \dfrac{2K\lambda}{a}\sin\theta \\ E_{My} = 0 \end{cases}}$$

★ Champ $\vec{E}(M)$ d'un Fil infini :

Quelque soit le point M dans l'espace, on aura une symetrie parfaite par rapport à l'axe horizontal Ox. On dit que le champ électrique est radial.



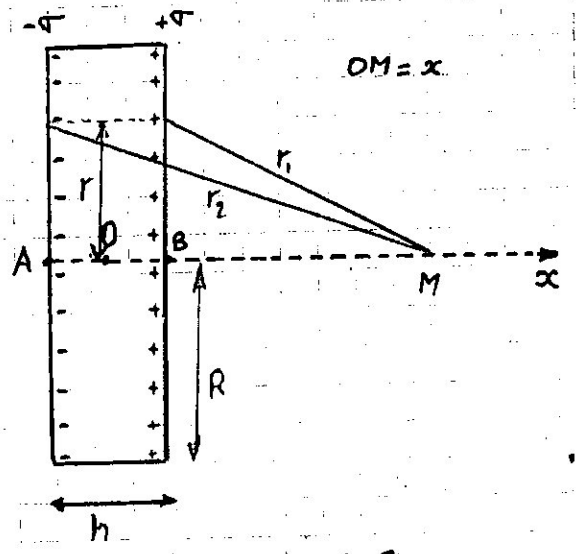
Du moment que le fil est infini, $\forall M$, on peut le considerer sur la "médiatrice" du fil car $OA = +\infty$ et $OB = -\infty$. En plus à tout élément dl, on peut faire correspondre un symétrique dl' par rapport à l

d'où finalemt

$$\vec{E}(M)\left| E_{Mx} = \frac{2K\lambda}{a}\sin\frac{\pi}{2} \right. \Rightarrow \left| E_{Mx} = \frac{2K\lambda}{}\right.$$

de façon uniforme [illegible]
Déterminer le potentiel et le champ électrique en un point de son axe de coordonné $OM = x$. Que deviennent $V(M)$ et $\vec{E}(M)$ dans le cas où x est très grand par rapport à h.

disque vue de profil



SOLUTION :

C'est un cas de figure à symétrie totale par rapport à l'axe horizontal Ox. Le champ $\vec{E}(M)$ sera donc horizontal et sortant pour $(+\sigma)$ et rentrant pour $(-\sigma)$

$S = \pi r^2 \Rightarrow dS = 2\pi r.\, dr$

$Q = \sigma S \Rightarrow dq = \sigma\, dS = 2\pi\sigma\, r dr$

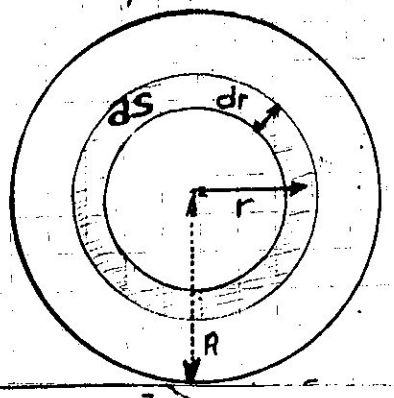
$OA = OB = \frac{h}{2}$ et $AM = x + \frac{h}{2}$; $BM = x - \frac{h}{2}$

$$dV = dV(+\sigma) + dV(-\sigma)$$

$$dV = K\frac{dq}{r_1} - K\frac{dq}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\tfrac{h}{2})^2 + r^2} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt{(x+\tfrac{h}{2})^2 + r^2}$$

disque vue de face



d'où $$dV = \frac{K\sigma\, dS}{r_1} - \frac{K\sigma\, dS}{r_2}$$

$$dV = \frac{K\sigma\, 2\pi r.\, dr}{\sqrt{(x-\frac{h}{2})^2 + r^2}} - \frac{K\sigma\, 2\pi r\, dr}{\sqrt{(x+\frac{h}{2})^2 + r^2}}$$

$$V = 2\pi K\sigma \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{(x-\frac{h}{2})^2 + r^2}} - \int_0^R \frac{r\, dr}{\sqrt{(x+\frac{h}{2})^2 + r^2}}$$

$$\boxed{V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(x-\tfrac{h}{2})^2 + R^2} - \sqrt{(x+\tfrac{h}{2})^2 + R^2} + h\right]}$$

Calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Comme nous l'avons prévu avant de commencer les calculs, le champ $\vec{E}(M)$, pour des raisons de symétrie axiale sera porté uniquement sur l'axe Ox

$$\vec{E}(M) = E_x(M)\,\vec{i}$$

$$\boxed{E_x(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{x + \frac{h}{2}}{\sqrt{(x+\frac{h}{2})^2 + R^2}} + \frac{x - \frac{h}{2}}{\sqrt{(x-\frac{h}{2})^2 + R^2}}\right]}$$

Exercice N°10

Une couronne circulaire limitée par deux cercles concentriques de rayons a et R ($a < R$). La partie entre a et R porte une charge q uniformément répartie sur la surface.

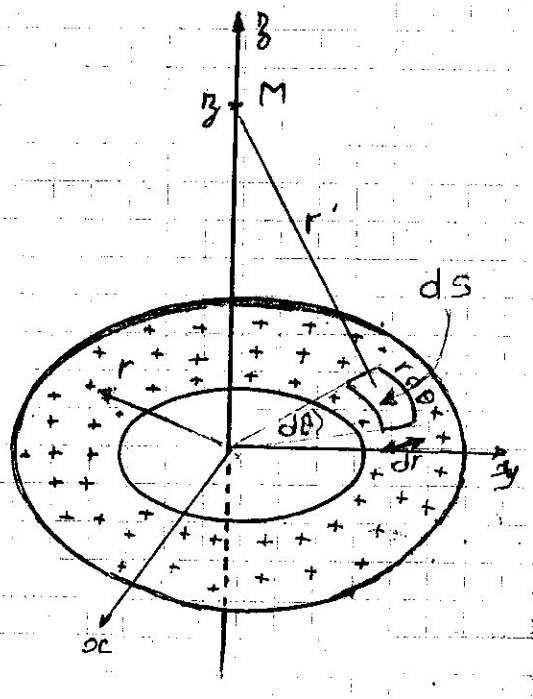
a/ Calculer le champ $\vec{E}$ et le potentiel produit par cette répartition en un point M situé sur l'axe Oz passant par le centre de la couronne si $OM = z$

b/ Que vaut E si $a = 0$

c/ Si $a \neq 0$, Calculer E pour $R \to \infty$ et tracer $E(z)$

d/ Calculer E si $a = 0$ et $R = +\infty$

SOLUTION



Raisonnement Préliminaire.

L'axe sur lequel figure M est perpendiculaire à la couronne, en plus il passe par son centre. Si q est > 0, le champ $\vec{E}$ sera sortant et dirigé suivant Oz, car on observe une symétrie parfaite par rapport à l'axe Oz.

$$d\vec{E}_{gauche} + d\vec{E}_{droite} = d\vec{E}_{Oz}.$$

Choix de l'élement infinitesimal dS

$$dS = r\,d\theta\,dr \quad \text{avec} \begin{cases} r : a \to R \\ \theta : 0 \to 2\pi \end{cases}$$

Les exercices précedents nous ont permis de constater qu'il est plus aisé de déterminer d'abord le potentiel electrique en M, $V(M)$ puis d'en déduire $\vec{E}(M)$.

$$dV = K\frac{dq}{r'}$$

$q = \sigma S$, comme $\sigma = C^{te} \Rightarrow dq = \sigma dS$

surface du rectangle $dS = r\,d\theta.\,dr$

l'hypothenuse $r' = \sqrt{r^2 + z^2}$ d'ou $dV = \int dV$

$$V = K\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{ou} \quad V = 2\pi K\sigma \int_a^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

En posant $u = r^2 + z^2$, $du = 2r\,dr$, on trouve

$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}\right)}$$

On remarque que le potentiel $V(z)$ est toujours positif quelque soit le point $M \in Oz$ (à condition que σ soit positive bien sûr)

B/ Détermination du champ $\vec{E}(M)$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

* si V est en coordonnées polaires $\vec{E}(M) \left| \begin{array}{ll} \vec{E}_r = -\dfrac{dV}{dr}\,\vec{u}_R & \text{: radio} \\ \vec{E}_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{d\theta}\,\vec{u}_\theta & \text{: transvo} \end{array} \right.$

* si V est en coordonnées cartesiennes $\vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

On confirme, bien sûr, que le champ $\vec{E}(M)$ ne possède que la composante suivant Oz seulement, d'où

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}}$$

THEOREME DE GAUSS

Flux du champ électrique $\vec{E}$

On définit le flux d'un champ $\vec{E}$ à travers un élément de surface ds par

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Le flux total de $\vec{E}$ à travers la surface totale s sera don

$$\phi = \iint_{(S)} d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

le théoreme de GAUSS stipule que la quantité du flux electrique à travers une surface S fermée est donnée par

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Donc l'application du théoreme de GAUSS se composera toujours de 2 étapes distinctes et obligatoires.
La premiere partie définit le flux du champ electrique à travers une surface fermée que l'on appellera surface de GAUSS.

$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

C'est un produit scalaire entre 2 vecteurs $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ et non pas un produit de 2 modules.

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E \cdot dS \cdot \cos\theta$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est toujours normal (perpendiculaire) à la surface ds que l'on aura choisie. Si et seulement si le champ $\vec{E}$ est radial, alors

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 0 = E \cdot dS$$

La deuxieme partie du théorème de GAUSS est un calcul quantitatif

$$\phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

où ΣQ_i représente la somme algebrique des charges se trouvant à l'intérieur de la surface fermée S_G.

Donc IMPERATIVEMENT pour tous les exercices suivants on determinera:

- ★ Définition du flux $\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$
- ★ Evaluation du flux $\phi = \Sigma Q_i / \varepsilon_0$
- ★ Deduction du module du champ $\vec{E}$.

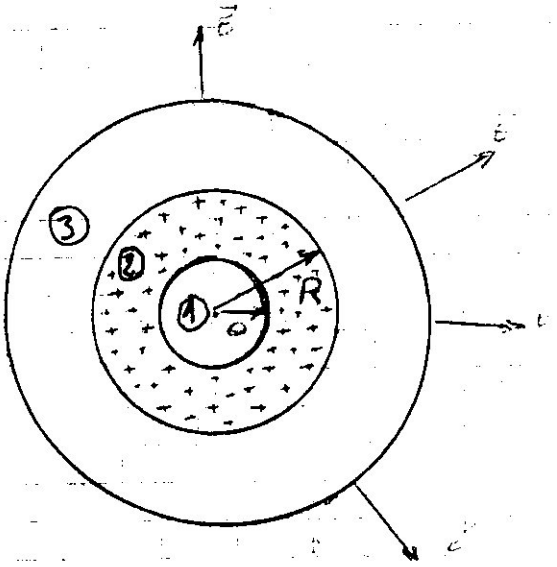
Exercice N° 11 :

Une sphere de rayon R possede une cavité de rayon a, une charge q est répartie uniformément sur le volume limité par a et R.

1/ Calculer et tracer E(r) dans tout l'espace.

2/ Calculer et tracer V(r) dans tout l'espace.

SOLUTION :



L'espace est partagé en 3 domaines

Le champ, s'il existe, est toujours centrifuge.

$r \in]0, a[\cup]a, R[\cup]R, +\infty[$

1er cas si $r < a$, region 1

Théoreme de Gauss.

1ère étape : $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$: S_G sphere fictive $r<a$

$\vec{E}$ et $\vec{dS}$ sont colinéaires donc $\vec{E}.\vec{dS} = E\,dS$

$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E \oiint dS = ES \Rightarrow \Phi = E.4\pi r^2$

2e étape : $\Phi = \dfrac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = 0$

Comme $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1(M) = 0 \quad \forall M \in$ region 1

b. cas $a<r<R$: région 2 : S_G sphere fictive $a<r<R$

1ère étape : $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E.4\pi r^2$ toujours avec $r \in]a, R[$

2e étape : $\Phi = \dfrac{q_i}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$; $\Phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\int_a^r 4\pi r^2 dr = \dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right)$

Comme $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right) \Rightarrow E_2(M) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{a^3}{3r^2}\right)$

c. cas où $r>R$: region 3 : S_G sphere fictive $r>R$.

1er étape : $\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = E.S = E.4\pi r^2$ $r \in$ région 3

2e étape : $\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$; $\Phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\int_a^R 4\pi r^2 dr = \dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right)$

comme $\oiint \vec{E}.dS = \dfrac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \dfrac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right) \Rightarrow E_3(M) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 r^2}\left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right)$

Finalement

$$\boxed{E(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } r<a \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{a^3}{3r^2}\right) & \text{si } a<r<R \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 r^2}\left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{a^3}{3}\right) & \text{si } r>R \end{cases}}$$

alcul du potentiel $V(M)$ dans tout l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ou $V = -\int \vec{E}.\vec{dr}$ comme $\vec{E}$ et $\vec{dr}$ colineaires : $V(r) = -\int E.dr$

a/ cas de la Region ① $r<a$

$$V_1(r) = -\int E\,dr = C_1$$

b/ cas de la Région ② $a<r<R$

$$V_2(r) = -\int E\,dr = -\int \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{a^3}{3r^2}\right)dr \Rightarrow V_2(M) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{a^3}{3r}\right) + C_2$$

/ cas de la Region ③ $r>R$

$$V_3(r) = -\int E\,dr = -\int \frac{\rho}{\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)dr \Rightarrow V_3(M) = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) + C_3$$

Détermination des constantes C_1, C_2 et C_3

3ᵉ cas $V_3(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) + C_3$

condition aux limites $V_3(r) = 0$ quand $r \to \infty$ donc $C_3 = 0$

2ᵉ cas $V_3(R) = V_2(R)$ condition de continuité

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0 R}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{6} + \frac{a^3}{3R}\right) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

3ᵉ cas $V_2(a) = V_1(a)$ condition de continuité

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^3}{3a}\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2}{2} = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

Finalement,

$$\boxed{V(M) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) & \text{si } r<a \\ -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{a^3}{3r}\right) + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } a<r<R \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) & \text{si } r>R \end{cases}}$$

Exercice N°12

Une sphere de rayon R porte une charge positive dont la densité volumique ne depend que de la distance à son centre tel que :

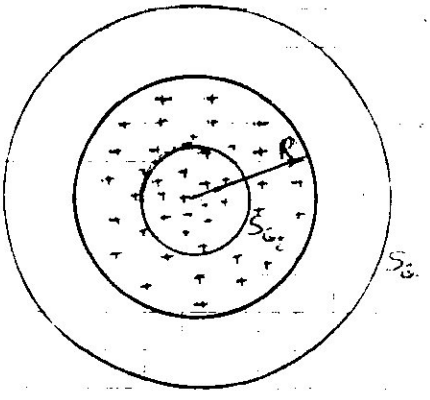
$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \text{ où } \rho_0 \text{ est constante.}$$

1/ Déterminer le champ electrique E dans tout l'espace.

2/ Pour quelle distance r_m, ce champ est maximal ?

SOLUTION

Détermination du module de $\vec{E}_M$



* cas où M est à l'exterieur de la sphere $r > R$

1er étape : $\Phi = \oiint_{S_{G_1}} \vec{E}_M \cdot \vec{dS} = \oiint_{S_{G_1}} E_n \cdot dS$

car $\vec{E}_n$ est radial et $\vec{dS}$ normal à S_{G_2}

Comme E_n est constant à travers S_{G_1}

$$\Phi = \oiint_{S_{G_1}} E_n \, dS = E_n \iint dS = E_M \cdot 4\pi r^2$$

2e étape : $\Phi = \dfrac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

d'où $\Phi = \dfrac{\rho_0 \, 4\pi}{\varepsilon_0} \left(\dfrac{R^3}{3} - \dfrac{R^3}{4}\right) \Rightarrow \Phi = \dfrac{\rho_0 R^3 \pi}{3 \varepsilon_0}$

3e étape : Égalité

$$\Phi = \oiint_{S_{G_1}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_M \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 R^3 \pi}{3 \varepsilon_0}$$

d'où $\boxed{E_1(M) = \dfrac{\rho_0 R^3}{12 \varepsilon_0 r^2}}$

* cas où M est à l'interieur de la sphere $r < R$

1er étape : $\Phi = \oiint_{S_{G_2}} \vec{E}_M \cdot \vec{dS} = \oiint_{S_{G_2}} E_n \, dS$

car $\vec{E}_n$ est radial (centrifuge) et dS normal à S_{G_2}

Comme E_n est constant à travers S_{G_2}

$$\Phi = \oiint_{S_{G_2}} E_M \cdot dS = E_M \iint dS = E_M \cdot 4\pi r^2$$

2ᵉ étape : $\Phi = \dfrac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\left(1-\frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 \, dr$$

$$\Phi = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\int_0^r \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr \Rightarrow \Phi = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

3ᵉ étape : Egalite

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_M \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

d'où $E_{2(M)} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right)$

d'où finalement $\boxed{E(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right) & \text{si } r < R \end{cases}}$

Pour quelle distance r_m le champ est-il maximal ?

* si $r > R$, $E_1(M) = \dfrac{\alpha}{r^2}$ donc le maximum de $E_1 = E_1(R) = \dfrac{\rho R_0}{12\varepsilon_0}$

* si $r < R$; $E_2(M) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right)$

$E_2(M)$ atteint un maximum lorsque $\dfrac{dE_2}{dr} = 0$

$$\frac{dE_2}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{2R}\right) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3}R$$

D'où $E_{2max}(r) = E_2\left(\frac{2}{3}R\right) = \dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$

Finalement : maximum de $E_1(M) = \dfrac{\rho R}{12\varepsilon_0}$

maximum de $E_2(M) = \dfrac{\rho R}{9\varepsilon_0}$

On en déduit $\boxed{\max E(M) = \dfrac{\rho R}{9\varepsilon_0}}$

Exercice 13

Soient deux plans infinis chargés uniformement en surface et de densité respectives σ_1 et σ_2 positive. Ces deux plans sont disposés parallèlement et distant de l.

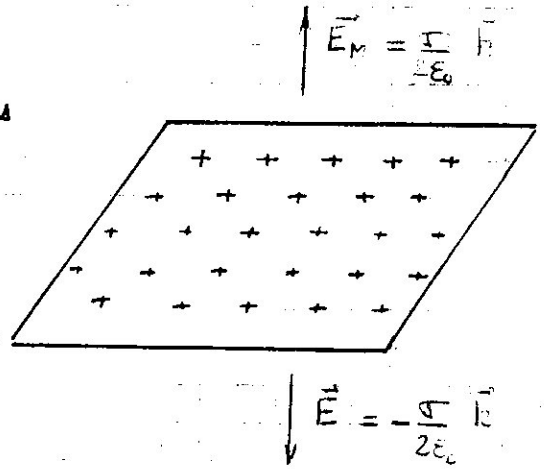
1/ Déterminer le champ électrique dans tout l'espace.

2/ Déterminer le potentiel electrique dans chaque zone.

3/ En prenant comme référence de potentiel l'un des deux plans et si $\sigma_1 = +\sigma$ et $\sigma_2 = -\sigma$, tracer E et V.

SOLUTION

Nous avons vu dans plusieurs exercices précedemment que le champ $\vec{E}(M)$ causé par un plan chargé uniformément en surface était normal à ce plan avec un module égal à $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



Dans notre cas, nous avons 2 plans chargés par σ_1 et σ_2 et // entre eux.

Donc 3 zones à étudier

★ 1/ si M est au dessus de $P_1(\sigma_1)$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{k} \quad , \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

★ 2/ si M est entre les 2 plans P_1 et P_2

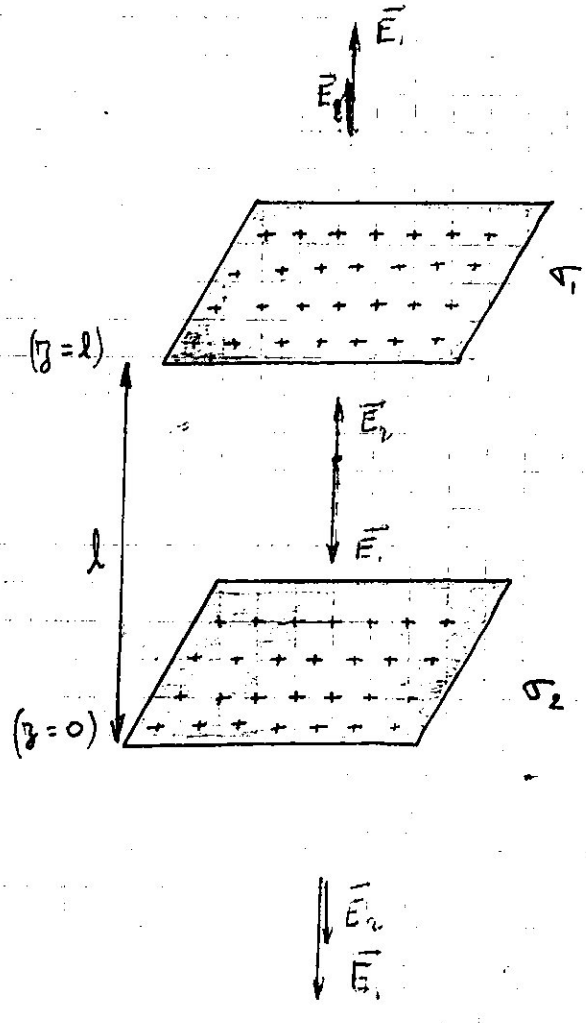
$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{k} \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

★ 3/ si M est en dessous de P_2

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{k} \quad ; \quad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{k}$$



Détermination du potentiel $V(M)$ dans les 3 différentes zones.

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Dans toutes les zones $\vec{E}(M)$ avait une composante suivant $\vec{k}$ seulement, ce qui se réduit donc à :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow V(M) = -\int E(M)\, dz \quad \text{pour les 3 cas.}$$

★ si M est au dessus de P_1

$$V(M) = -\int E(M)\, dz \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\, dz$$

d'où $V_1(M) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} z + C_1$

★ si M est entre P_1 et P_2

$$V(M) = -\int E(M)\, dz \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}\, dz$$

d'où $V_2(M) = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} z + C_2$

★ si M est en dessous de P_2

$$V(M) = -\int E(M)\, dz \Rightarrow V(M) = \int \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}\, dz$$

d'où $V_3(M) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} z + C_3$

Détermination des constantes C_1, C_2 et C_3 :

1ère condition de continuité $V_1(z = l) = V_2(z = l) \Rightarrow -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} l + C_1 = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} l + C_2$

2e condition de continuité $V_2(z = 0) = V_3(z = 0) \Rightarrow C_2 = C_3$

En prenant comme référence de potentiel le plan P_2 : $V_3(z) = 0$

si $V_3(z) = 0 \Rightarrow C_3 = C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} l}$

Exercice 1A

Soient deux cylindres concentriques de rayon a et b, de longueur infinie et portant respectivement les charges $+\lambda$ et $-\lambda$ par unité de longueur:

a/ Déterminer $\vec{E}$ dans tout l'espace et en déduire V

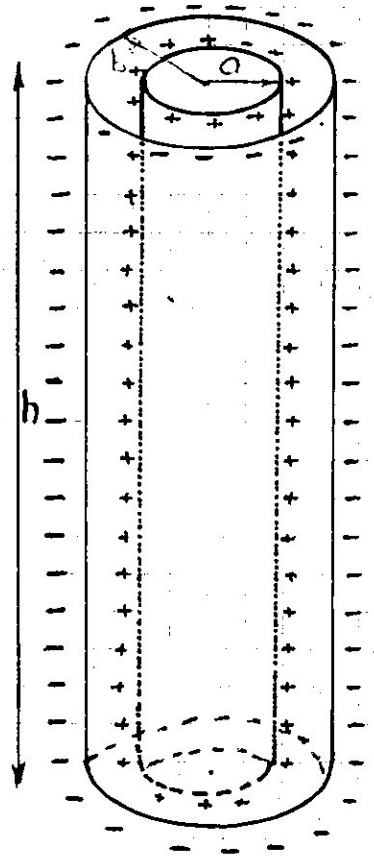
b/ Tracer $E = f(r)$ et $V = g(r)$

c/ Tracer les lignes de champ entre les deux cylindres et à l'extérieur.

d/ Donner l'allure des surfaces equipotentielles ; où sont-elles les plus resserrées ?

SOLUTION :

0/ Détermination du champ $\vec{E}(M)$



Cylindre interne : charge λh ; cylindre externe : $-\lambda h$

L'espace sera divisé en 3 zones. $\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

Zone ① : $r < a$: Theoreme de Gauss

1er étape : définition : $\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$; $\vec{E}$ est radial ; $\vec{dS}$ normal à S

donc $\vec{E} // \vec{dS}$. De plus sur toute la surface S (à r constant), $E = c^{te}$

donc $\phi = \oiint E.dS = E \oiint dS = E.2\pi r.h$

2e étape : Evaluation : $\phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = 0$: aucune charge

3e étape : Comparaison : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$

$E.2\pi r h = 0 \Rightarrow E(M) = 0$

Zone ② : $a < r < b$: Theoreme de GAUSS

1re étape : définition : $\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$: $\vec{E}$ radial ; $\vec{dS}$ normal à S

donc $\vec{E} // \vec{dS}$. De plus sur toute la surface de Gauss S_G,

E est c^{te}. $\phi = \iint E.dS = E \iint dS = ES$: $\phi = 2\pi r h.E$

2e étape : Evaluation : $\phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{h.\lambda}{\varepsilon_0}$

3e étape : Comparaison : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2\pi r h = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0}$

d'où $E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$

Zone ③ où $r > b$

1re étape : définition : $\phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$; $\vec{E}$ radial, E constant sur S $\Rightarrow \phi = ES = E.2\pi r.h$

2e étape : Evaluation : $\phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{-\lambda h + \lambda h}{\varepsilon_0} = 0$

3e étape : Comparaison : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2\pi r.h = 0 \Rightarrow E(M) = 0$

Finalement : $E_M(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$

b/ Détermination du potentiel $V_M(r)$ pour $r \in 3$ zones

Coordonnées Cartésiennes

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Longrightarrow \vec{E} \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$ ou mieux encore $\vec{E} \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$ Coordonnées cylindriques

Donc $\vec{E} \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = E_M \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$ car $\vec{E}$ est toujours radial (s'il existe) d'où $V_M = -\int E.dr$

Zone ① : $r < a$; $V_1(M) = -\int E.dr = C_1$

Zone ② : $a < r < b$; $V_2(M) = -\int E.dr = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}\, r + C_2$

Zone ③ : $r > b$; $V_3(M) = -\int E.dr = C_3$.

Détermination des constantes C_1 ; C_2 et C_3 :

Condition aux limites : $\underset{r \to \infty}{V_3(M)} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

Condition de continuité : $V_3(r=b) = V_2(r=b) \Rightarrow C_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}\, b$

Condition de continuite : $V_2(r=a) = V_1(r=a) \Rightarrow C_1 = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}\, a/b$

$$E_M(r=) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$

$$V_M(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}\, a/b & \text{si } r < a \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \text{Ln}\, \dfrac{r}{b} & \text{si } a < r < b \\ 0 & \text{si } r > b \end{cases}$$

Exercice S6

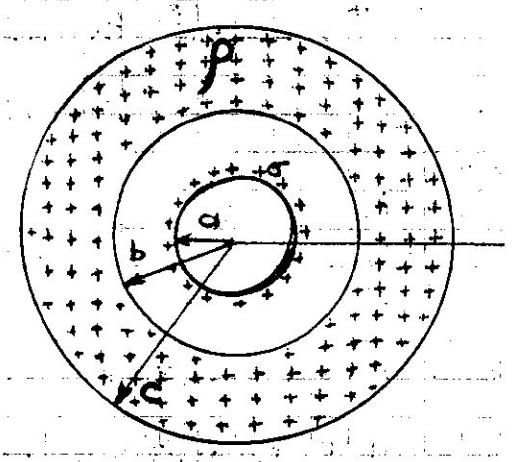
On définit trois sphères concentriques de rayons a, b et c tels que $a<b<c$. La sphère de rayon a est chargée en surface avec une répartition constante σ. Le volume compris entre les sphères de rayons b et c est chargé avec une répartition constante ρ.

1/ Calculer le champ $\vec{E}$ crée en tout point de l'espace. (le rayon r variant de 0 à l'infini)

2/ Tracer l'allure de E en fonction de r.

Données:

On prendra $\rho = 3\sigma \frac{a^2}{b^3}$ pour tout l'exercice.



SOLUTION:

1/ Le champ électrique crée par un sphère chargée par une densité volumique ou surfacique, est toujours radial (sens de $\vec{r}$). Nous appliquons donc le théorème de Gauss. Quelque soit le rayon de la surface de Gauss, on aura:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} \quad ; \vec{E} \text{ radial} \; ; \; \vec{dS} \text{ normal à } dS$$

donc $\vec{E}$ et $\vec{dS}$ colinéaires. De plus si r est fixé E est constant, d'où

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \oiint E.dS \Rightarrow \Phi = E \iint dS$$

Finalement $\Phi = E.4\pi r^2$ pour tous les cas.

Nous partagerons l'espace en 4 régions.

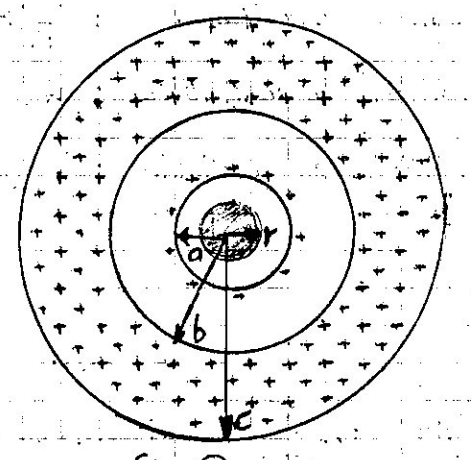


Fig ①

a) $r < a$: cas ① ; Fig. ①

Dans ce cas, la surface de Gauss ne renferme aucune charge : $Q_i = 0$

$$\Phi = \iint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = 0$$

donc $\boxed{E(r) = 0}$

b/ $a \leq r \leq b$: cas ② ; Fig ②

Dans ce cas, les charges intérieures à la surface fermée de Gauss sont celles de la répartition surfacique σ.

$Q_i = \sigma S_a$: (S_a = surface de la sphère a)

$S_a = 4\pi a^2$

$$\Phi = E.S_G = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{\sigma.4\pi a^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}}$$

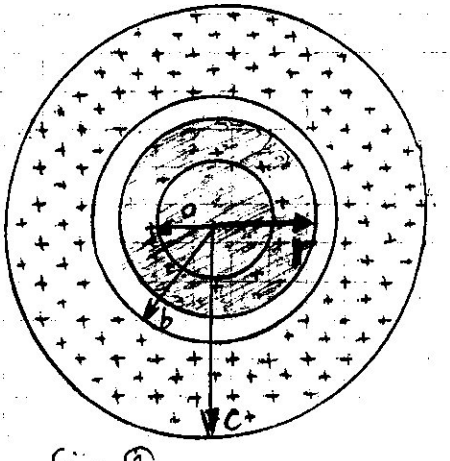


Fig ②

3ᵉ cas $b < r < c$: Fig ③

Dans cette 3ᵉ zone, la charge interieure à la surface de Gauss est :

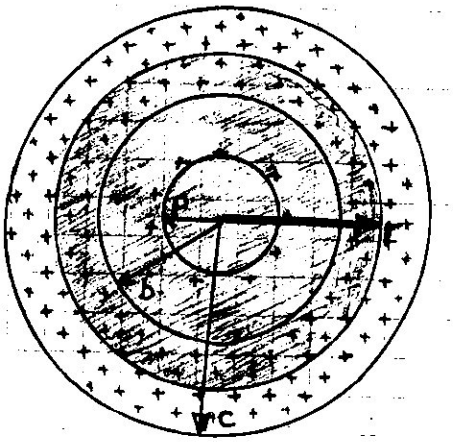
$$Q_i = \sigma S_a + \rho V_{(b,r)}$$

où S_a est la surface de la sphere a, et $V_{(b,r)}$ le volume compris entre les spheres de rayons b et r.

$$V_{(b,r)} = \int_b^r dV = \frac{4}{3}\pi (r^3 - b^3)$$

d'où $Q_i = \sigma . 4\pi a^2 + \rho . \frac{4}{3}\pi (r^3 - b^3)$

comme $\rho = 3\sigma \frac{a^2}{b^3} \Rightarrow Q_i = 4\pi \frac{\sigma a^2}{b^3} . r^3$



Par application du theoreme de Gauss

$$E . 4\pi r^2 = 4\pi \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 b^3} . r^3 \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 b^3} r}$$

4ᵉ cas : $r > c$: Fig ④

La charge interieure à la surface de Gauss est independante de r.

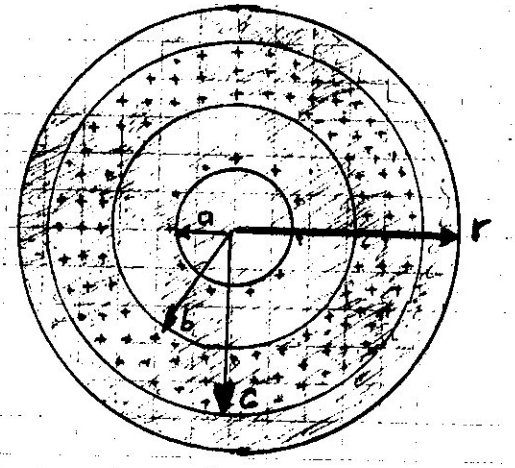
$$Q_i = \sigma S_a + \rho V_{(b,c)} \text{ : charge totale}$$

$$Q_i = \sigma . 4\pi a^2 + \rho \frac{4}{3}\pi (c^3 - b^3) \text{ or } \rho = 3\sigma \frac{a^2}{b^3}$$

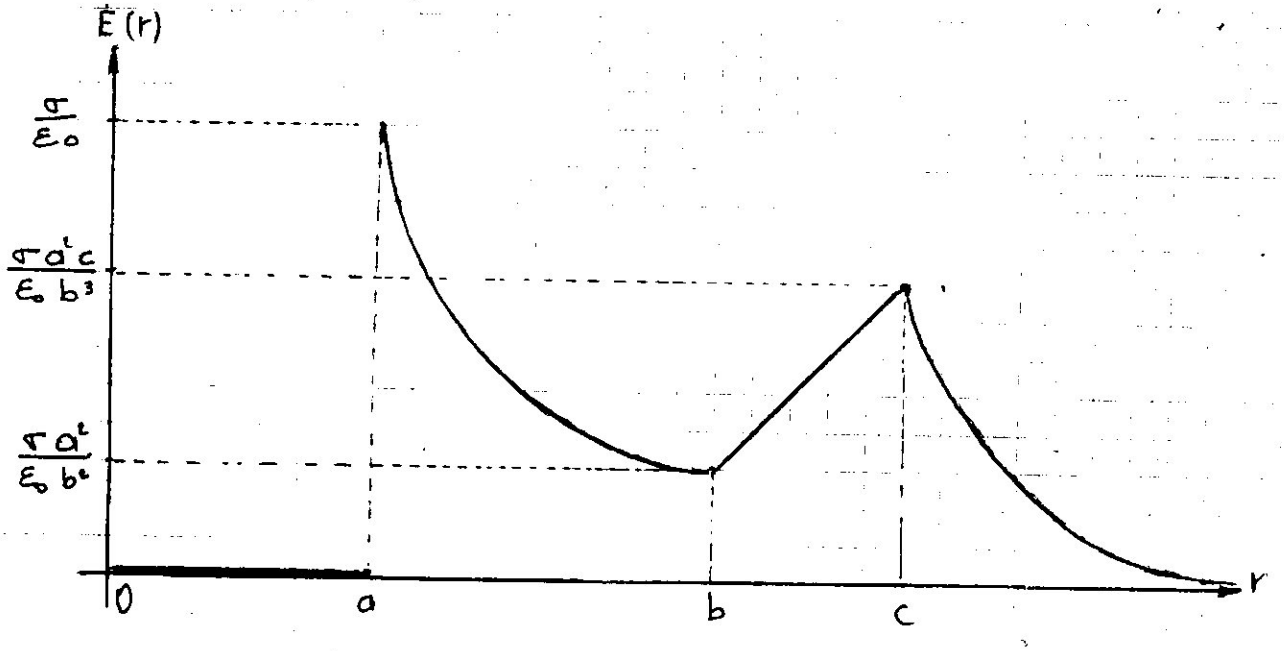
$$Q_i = 4\pi \sigma a^2 \frac{c^3}{b^3}$$

Par application du theoreme de Gauss, on a

$$E . 4\pi r^2 = \frac{4\pi \sigma a^2 c^3}{\varepsilon_0 b^3} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma a^2 c^3}{\varepsilon_0 b^3} . \frac{1}{r^2}}$$



Allure du graphe du champ $E(r)$



Exercice S7

En appliquant le théoreme de Gauss, determinez le champ et le potentie d'une couche spherique uniformément chargée.

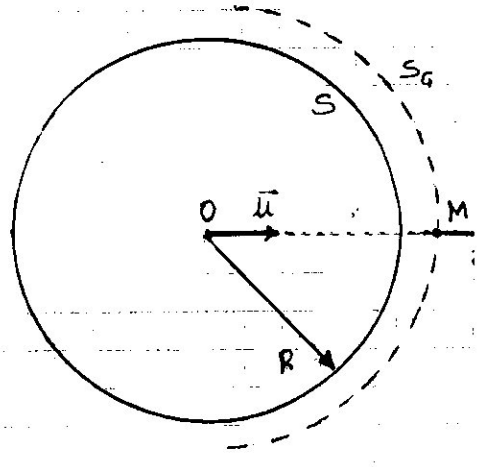
SOLUTION :

Le rayon de la couche est R, la charge q, la densité surfacique uniforme $\sigma = \frac{q}{4\pi}$

Champ electrostatique:

Par raison de symétrie, le champ en tout point M, s'il n'est pas nul, est parallèle à $\vec{OM}$ (Fig 1). Son module est fonction uniquement de $r = |\vec{OM}|$

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}$$



Theoreme de GAUSS

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$

1ère étape:

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint E\,dS \Rightarrow \Phi = 4\pi r^2 E(r)$$

2ème étape :

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \begin{cases} q/\varepsilon_0 & \text{si } r > R \\ 0 & \text{si } r < R \end{cases}$$

d'où

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{u} & \text{si } r > R \\ \vec{0} & \text{si } r < R \end{cases}$$

a/ En tout point exterieur à la couche spherique, le champ electrostatique est radial et identique à celui que créerait une charge unique égale à q place au centre O.

b/ A l'interieur de la couche spherique, le champ electrostatique est nul.

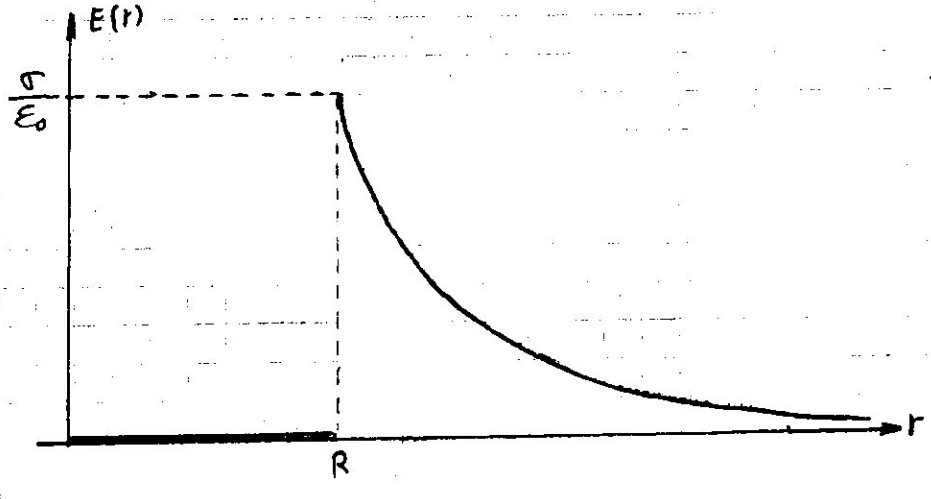
c/ Si $r \to R$ par valeurs inferieures, la limite de $E(r)$ est 0

Si $r \to R$ par valeurs positives : $\lim E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Donc le module de $\vec{E}$

a/ présente une discontinuité $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à la traversée de la couche.

b/ est égal à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ au voisinage exterieur de la couche.



Potentiel Electrostatique

En raison de la symétrie spherique du volume et de la répartition des charges, le potentiel électrique $V(M)$ est une fonction $V(r)$ de la variable r, fonction qui se déduit de $E(r)$ par la relation

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} \qquad \left(\text{car } E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0\right)$$

si $r < R$; $E(r) = 0 \Rightarrow V(r) = C^{te} = V_0$

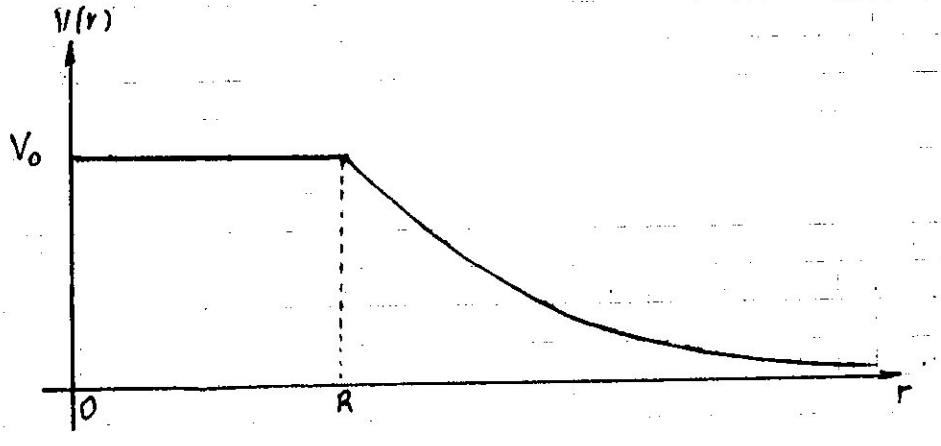
si $r > R$; $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_1$

Nous choisissons $V_1 = 0$ de telle sorte que $V(r)$ a une limite nulle quand $r \to \infty$,

si bien que $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$

En imposant à la fonction potentiel d'être continue sur la sphere, on fixe la valeur de la constante $V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$

Cette expression est celle du potentiel crée en O par la charge q réparte à la distance constante R de O ou encore du potentiel crée à la distance R par une charge ponctuelle q placée en O.



Remarque:

Les lignes de champ appartiennent à l'ensemble des droites passant par O.

Les surfaces équipotentielles forment l'ensemble des spheres de centre O, exterieures à la surface chargée S.

Donc en résumé, pour $r > R$, tout se passe comme si il y avait une charge ponctuelle q en O, aussi bien pour le champ $\vec{E}$ que pour le potentiel V.

Exercice S8

Application du théorème de Gauss. Déterminer le champ $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrostatique d'une sphère chargée avec une densité volumique uniforme ρ. La charge totale $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

SOLUTION :

Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ en tout point M, s'il n'est pas nul est parallèle à $\vec{OM}$. Son module est fonction uniquement de $r = |\vec{OM}|$

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}.$$

Theoreme de Gauss :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$

1°/ Point M à l'interieur de la sphere : $r < R$

$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$; $\vec{E}$ radial $\Rightarrow \Phi = E\,S$ d'où

$$\Phi = E.4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho.4\pi r^2\, dr$$

$$\Phi = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}.\frac{r^3}{3}$$

d'où $4\pi r^2.E = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} \Rightarrow E_1(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r$ ou encore $E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}.r$

$V = -\int E(r).dr \Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + V_0$ ou encore $V_1(r) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r^2 + V_0$

2°/ Point M à l'extérieur de la sphère : $r > R$

$\Phi = \oiint \vec{E_2}.\vec{dS}$; $\vec{E_2}$ toujours radial donc $\Phi = \oiint E.dS$.

Comme E_2 est constant si r est constant (et θ variable) donc $\Phi = E_2\int dS = E_2.4\pi r^2$

$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$; $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ou encore $\Phi = \frac{4\pi R^3}{3\varepsilon_0}\rho$

comparaison $\oiint \vec{E_2}.dS = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$

Potentiel $V = -\int E\,dr$, en intégrant on obtient $V_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + V_0'$

Détermination des constantes V_0 et V_0'. On commence toujours par $V(r=\infty) = 0$

Donc $\lim_{r\to\infty} V_2(r) = 0 \Rightarrow V_0' = 0$.

Condition de continuité $V_1(r=R) = V_2(r=R) \Rightarrow -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}R^2 + V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

d'où $V_0 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$

Resumé :

$$\boxed{\text{si } r<R \begin{cases} E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r \\ V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \end{cases} ; \text{ si } r>R \begin{cases} E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2} \\ V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r} \end{cases}}$$

Exercice S9

Application du theorème de Gauss. Déterminer le champ $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrostatique d'un plan uniformément electrisé avec une densité surfacique égale à σ que l'on supposera positive.

SOLUTION :

Soit M_1 un point de l'espace, O sa projection sur le plan P, les charges étant supposées positives, le champ $\vec{E}$ est toujours sortant. Deux élements P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M_1 un champ élementaire perpendiculaire au plan. Pour l'ensemble des charges, le champ en M_1 est perpendiculaire à P.
Il en est de même en M_2 symétrique de M_1 par rapport à (P).
Les modules sont égaux (par symétrie) et ne dépendent que de la distance z de M_1 (ou M_2) à (P). En outre, les lignes de champ, toutes paralleles s'éloignent de (P).

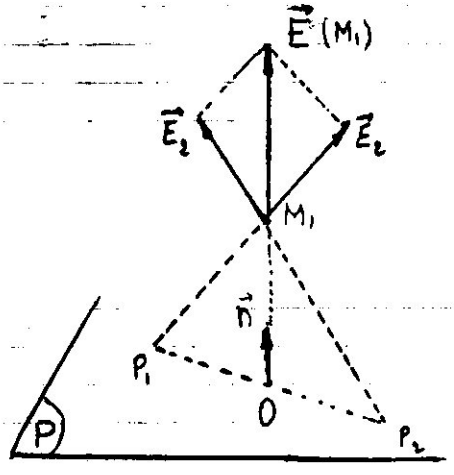


Fig 1.

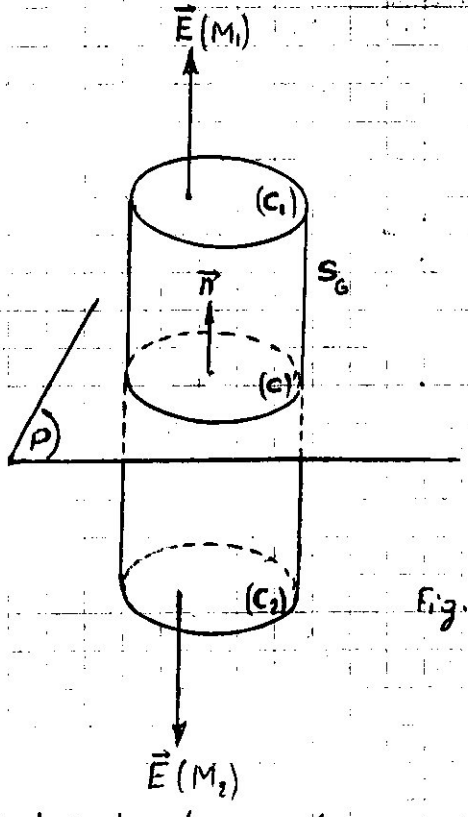


Fig. 2

Prenons comme surface de Gauss S_G un tube (cylindre) de champ s'appuyant sur le contour (C) du plan et limité par deux sections droites (C_1) et (C_2) passant par M_1 et M_2 (fig 2).
Le flux sort de S_G uniquement par les surfaces de contours (C_1) et (C_2) : les bases

$$\Phi = \iint \vec{E}.\vec{dS_G} = \oiint \vec{E}.\vec{dC_1} + \vec{E}.\vec{dC_2} + \vec{E}\, dS_{lateral} \Rightarrow \Phi = \iint \vec{E}.\vec{dC_1} + \vec{E}.\vec{dC_2}$$

$$\Phi = 2\, E(z).\, S$$

S étant (C_1) ou (C_2) ou (C).

D'autre part : theoreme de Gauss $\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$ d'où $\boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Le module du champ a une valeur uniforme en tout point de l'espace, les lignes de champ sont des droites parallèles ; un tel champ est uniforme.
La traversée du plan s'accompagne d'un changement de sens de $\vec{E}$ et d'une discontinuité (d'un saut) $2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Exercice S10

Application du théorème de Gauss. Déterminer le champ et potentiel cré un cylindre de révolution Γ, de très grande longueur, uniformement electri en surface.

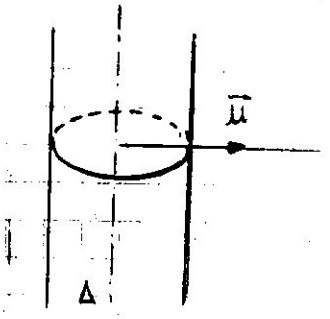
SOLUTION :

1°/ Le champ electrostatique pour $r < R$

L'absence de charges à l'interieur du cylindre fait que le champ est nul dans ce domo
Theoreme de Gauss

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \vec{0}$$

2°/ Champ electrostatique pour $r > R$



Le champ est radial et du type $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}$ où $r = OM$, par suite de la symétrie geometrique et de l'uniformité de la distribution des charges.

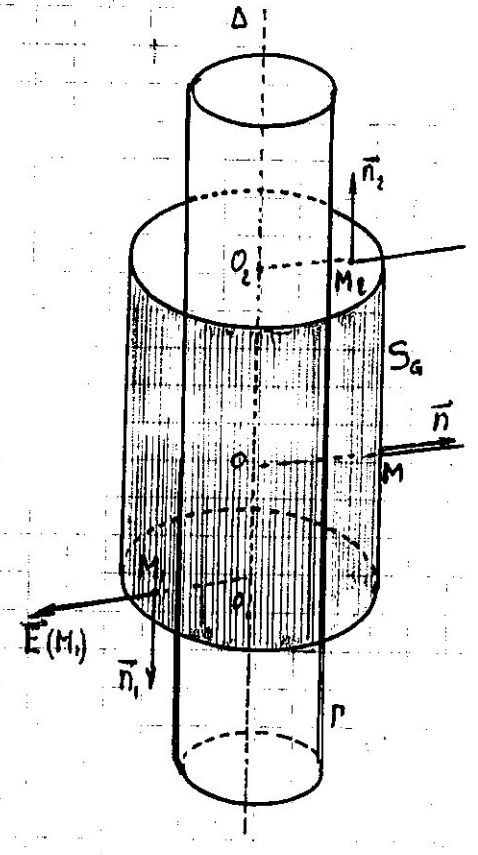
Pour calculer $E(r)$, considérons la surface de Gauss S_G formée par un cylindre coaxial de rayon r, de hauteur h, limité par deux disques plans D_1 et D_2 perpendiculaires à l'axe.

En tout point de D_1, le champ $\vec{E_1}$ est dans le plan du disque ou nul.

Le flux de $\vec{E_1}$ sortant par D_1 est nul.

Il en est de même pour celui sortant par D_2.

Le flux sortant de S_G se réduit à celui sortant par la paroi laterale.



$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad ; \quad \Phi = \oiint \vec{E}\left(\vec{dS_b} + \vec{dS_{lat}} + \vec{dS_b}\right)$$

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS_{lat}} \Rightarrow \Phi = 2\pi r h \, E(r)$$

d'autre part, 2ème partie du Theoreme de Gauss

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi R h \sigma$$

En egalisant ces 2 quantites

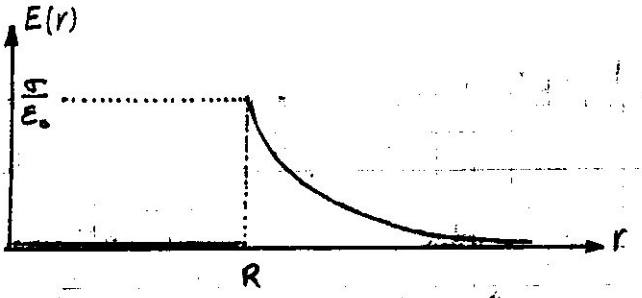
$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_0}$$

c.à.d $\quad 2\pi r h E = \dfrac{2\pi R h \sigma}{\varepsilon_0}$

d'où $\quad E(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{R}{r} \quad$ pour $r > R$

, résumé :

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < R \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{R}{r} & \text{pour } r > R \end{cases}$$



oisinage immédiat de la surface electrisée, le champ exterieur est normal au cylindre, valeur est $E(R) = \sigma/\varepsilon_0$. La traversée de la couche électrisée s'accompagne d'une ontinuité σ/ε_0 sur le module du champ.

ETERMINATION du POTENTIEL

our $r > R$, la fonction du potentiel $V(r)$, telle que $-\dfrac{dV}{dr} = E(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{R}{r}$

t alors $V(r) = -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} \cdot \mathrm{Ln}\, r + C$

l n'est plus possible de choisir C tel que la limite de $V(r)$ soit nulle quand augmente indéfiniment. Cette difficulté se retrouve chaque fois que le modèle athématique utilisé comporte des charges à l'infini, ce qui n'est physiquement as réalisable.

$$V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \mathrm{Ln}\, r + C \quad ; \nexists\, C \text{ tq } V(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

our $r < R$, le champ est nul, donc le potentiel interieur est uniforme. a valeur V_0 est souvent donnée : si l'on impose la continuité du potentiel ur la couche, on peut écrire à la surface.

$$V(R) = V_0 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \mathrm{Ln}\, R + C$$

t l'expression du potentiel exterieur devient :

$$V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \mathrm{Ln} \frac{r}{R} + V_0$$

i le potentiel V_0 n'est pas donné, on ne peut connaître et utiliser que des ifférences de potentiel.

ntre deux points M_1 et M_2 situés à r_1 et à r_2 de l'axe, existe la difference e potentiel.

$$V(M_1) - V(M_2) = V(r_1) - V(r_2) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \mathrm{Ln} \frac{r_1}{r_2}$$

emarque :

Les lignes de champ rencontrent l'axe et lui sont normales, les surfaces quipotentielles sont des cylindres d'axe Δ.

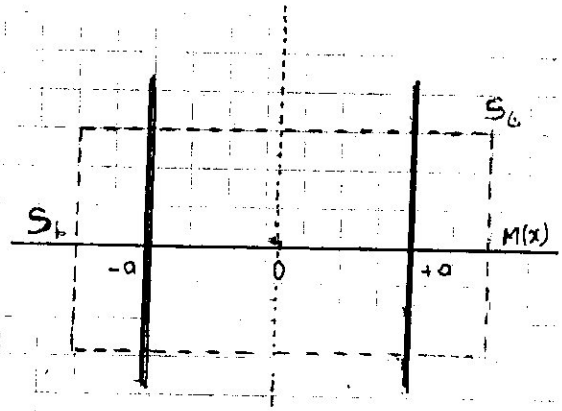
En résumé :

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } r < R \\ -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} \mathrm{Ln} \dfrac{r}{R} + V_0 & \text{pour } r > R \end{cases}}$$

Exercice S 11

Des charges positives sont contenues entre 2 plans : $x = +a$ et $x = -a$ avec une densité volumique ρ uniforme.
Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace. On admet que le plan $x = 0$ est au potentiel V_0.

SOLUTION :



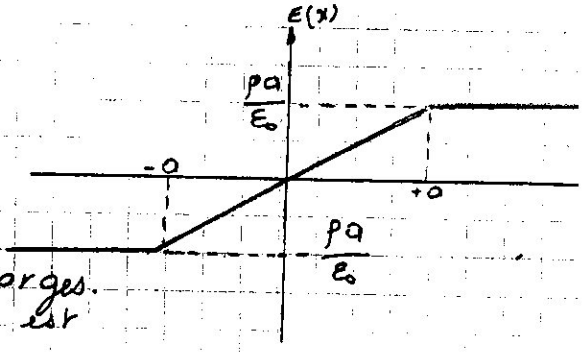
Par raison de symétrie, le champ en tout point M d'abscisse $x > 0$ est parallèle à Ox et s'écrit

$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{i} \text{ avec } E(-x) = -E(x)$$

1°/ M extérieur au domaine des charges.
Prenons $x > a$. Le théorème de Gauss appliqué au cylindre S de génératrices parallèles à Ox, de surface de base S_b et de hauteur $2x$ donne l'égalité

$$2E(x)S_b = \rho \frac{2aS_b}{\varepsilon_0}$$

d'où
$$\begin{cases} E(x) = \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & \text{si } x > a \\ E(x) = -\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & \text{si } x < a \end{cases}$$



2°/ M intérieur au domaine contenant les charges.
La charge contenue dans le cylindre S_G est

$$q = 2\rho x . S_b$$

et selon le théorème de Gauss $2E(x)S_b = \rho \dfrac{2xS_b}{\varepsilon_0}$

d'où
$$\begin{cases} E(x) = \rho \dfrac{x}{\varepsilon_0} & \text{pour } 0 < x < a \\ E(x) = -\rho \dfrac{x}{\varepsilon_0} & \text{pour } -a < x < 0 \end{cases}$$

Les variations de $E(x)$ avec x : A l'extérieur des charges le champ est uniforme et la densité volumique ρ sur une épaisseur $2a$ est équivalente à une répartition surfacique de densité $\sigma = 2a\rho$.

CALCUL du POTENTIEL

1°/ M est un point intérieur $-a < x < a$

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i}$; $V(x) = -\int E(x)\,dx = -\int \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}\,dx \Rightarrow V(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho x^2}{\varepsilon_0} + V_0$

ce qui satisfait à la condition imposée $V(0) = V_0$, on en déduit $V(a) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho a^2}{\varepsilon_0} + V_0$

2°/ M est extérieur aux charges : $x > a$ et $x < -a$

$V(x) = -\int E(x)\,dx = -\int \rho \dfrac{a}{\varepsilon_0}\,dx \Rightarrow V(x) = -\rho \dfrac{a}{x} + V_1$

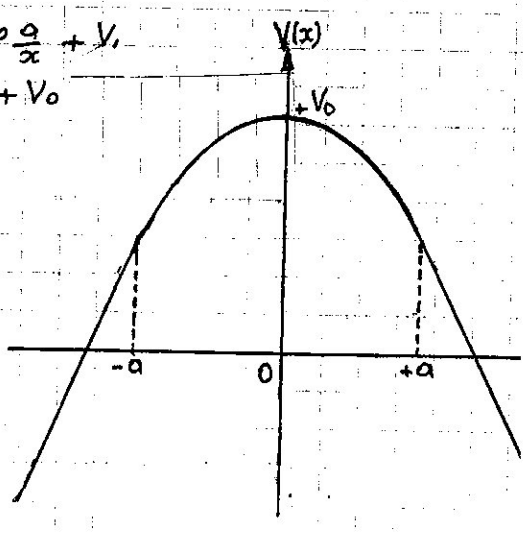
continuité de $V(x)$ en a : $-\rho \dfrac{a^2}{\varepsilon_0} + V_1 = -\dfrac{1}{2}\rho \dfrac{a^2}{\varepsilon_0} + V_0$

d'où $V_1 = V_0 + \dfrac{1}{2}\rho \dfrac{a^2}{\varepsilon_0}$

et $V(x) = \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(-x + \dfrac{a}{2}\right) + V_0$ pour $x > 0$

Par symétrie, pour $x < 0$, on change x en $-x$

$V(x) = \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) + V_0$ pour $x < 0$



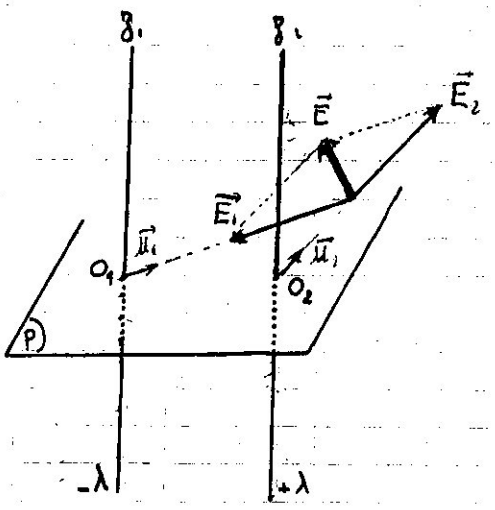
Exercice S12

Soient deux conducteurs cylindriques de rayon r, de longueur l, d'axes parallèles distants de a. On suppose l très grand devant a, lui même très grand devant r. Les fils portent les charges avec une densité lineique $-\lambda$ pour O_1z_1 et $+\lambda$ pour l'autre.

1) Calculer le potentiel en un point M.

2) Déterminer les surfaces équipotentielles et les lignes de champ

SOLUTION :



Le potentiel à l'infini est nul ainsi que celui de tous les points du plan médiateur de O_1O_2.

Considérons les fils comme infiniment longs. Le champ crée en M par les charges du fil O_1z_1 est

$$\vec{E_1}(M) = E_1(r_1)\,\vec{u_1} \quad \text{par raison de symétrie.}$$

Le theoreme de Gauss appliqué à un cylindre de rayon r_1, de hauteur h, d'axe O_1z_1 donne :

$$E_1(r_1)\,2\pi r_1 h = -\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

d'où $$E_1(r_1) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\,\vec{u_1}$$

Le champ crée par les charges du fil O_2 est $\vec{E_2}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_2}\,\vec{u_2}$

et le champ total $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vec{u_2}}{r_2} - \dfrac{\vec{u_1}}{r_1}\right)}$

Potentiels correspondants.

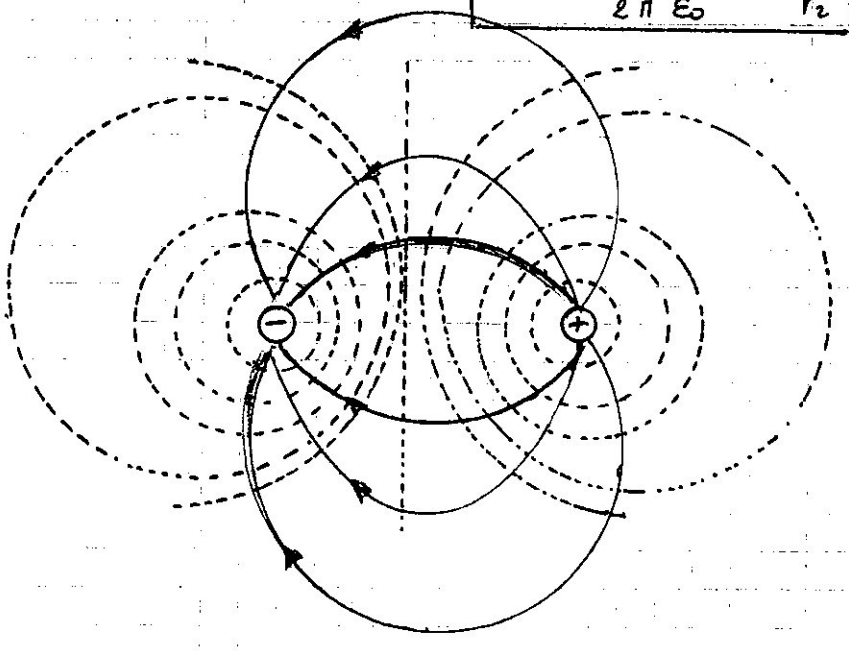
$\vec{E} = -\,\vec{\text{grad}}\,V$; $V_1 = -\int E_1\,dr \Rightarrow V_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\text{Ln}\,r_1 + V_0$

de même pour V_2 ; $V_2 = -\int E_2\,dr \Rightarrow V_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\text{Ln}\,r_2 + V_0'$

Le potentiel total V(M) est donc $V_M = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\text{Ln}\,\dfrac{r_1}{r_2} + V_0 + V_0'$

V(M) étant nul sur le plan médiateur de O_1O_2 ($r_1 = r_2$), on a $V_0 + V_0' = 0$

finalement on aboutit à $\boxed{V(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\text{Ln}\,\dfrac{r_1}{r_2}}$



Les surfaces équipotentielles sont les cylindres d'axes perpendiculaires à (P) ayant pour bases les cercles du faisceau.

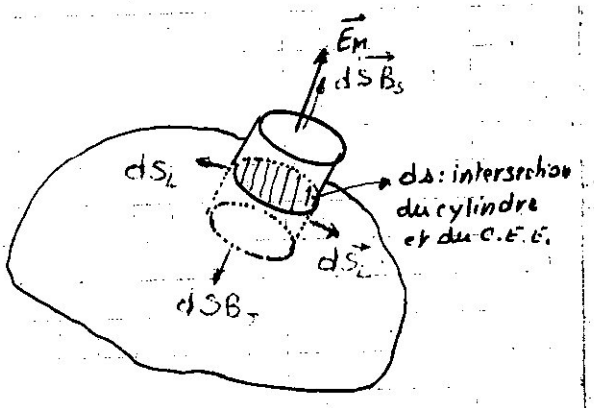
SERIE N°2

LES CONDUCTEURS

ercice N°1

oit un conducteur chargé superficiellement avec une densité de charge σ.
Calculer le champ électrique au voisinage d'un conducteur en un point M.
Quelle est la discontinuité du champ lorsqu'on passe de l'intérieur à l'extérieur du
onducteur.

OLUTION



e conducteur étant chargé en surface, Pour trouver
champ en un point immédiatement à l'extérieur
u conducteur, la surface de Gauss choisie sera
ne surface cylindrique ayant une base, paral-
èle au conducteur, passant par M; et l'autre à
ne profondeur telle que la charge superficielle
oit totalement à l'intérieur du cylindre, où le
hamp est déjà nul.
'est un conducteur en équilibre électrostatique (C.E.E.)

1- Sens et direction de $\vec{E}_M$

M étant au voisinage de la surface du C.E.E $\Rightarrow \vec{E}_M \perp$ à la surface et sortant

2- Module de $\vec{E}_M$

Surface de Gauss : petit cylindre aplati dS_G, où M $\in$ à la surface supérieure de (C).

$$d\Phi = \vec{E}_M . d\vec{S}_G = \vec{E}_M (d\vec{S}_{B_S} + d\vec{S}_L + d\vec{S}_{B_I})$$

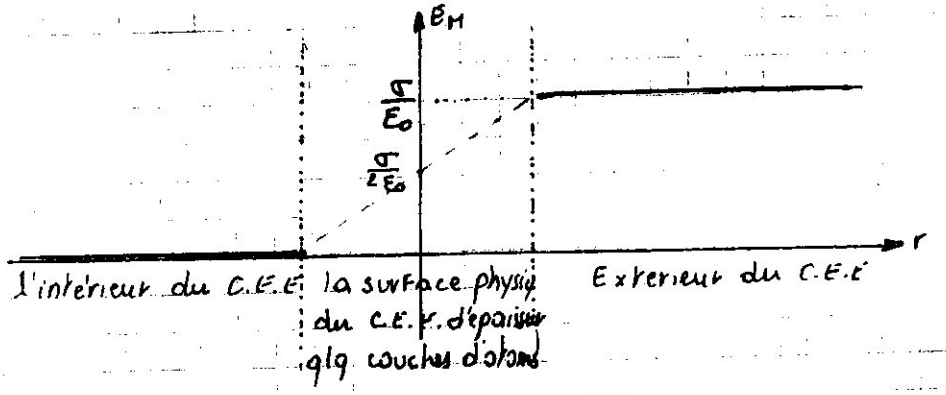
$$d\Phi = E_M . dS_{B_S} \quad \text{car } \vec{E} . d\vec{S}_L = 0 \text{ et } E_{int} = 0 \text{ en } S_{B_I}$$

$$d\Phi = E_M . ds$$

d'autre part

$$d\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma . ds}{\varepsilon_0}$$

comparaison : $E_M . ds = \frac{\sigma . ds}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_M = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$



La discontinuité du champ E_M est $D = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Par conséquent, à la traversée de la surface du conducteur, le champ varie comme ci-dessus.

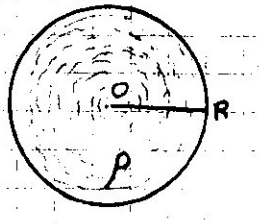
$$E_{surface} = E_{moy} = \frac{E_{int} + E_{ext}}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 2

Calculer l'energie electrostatique d'une sphere de centre et de rayon R, chargée avec une densité de charge volumique ρ.

SOLUTION

C'est un conducteur en état de déséquilibre car sa charge est répartie en volume et non pas en surface. Il est donc dans un régime transitoire.

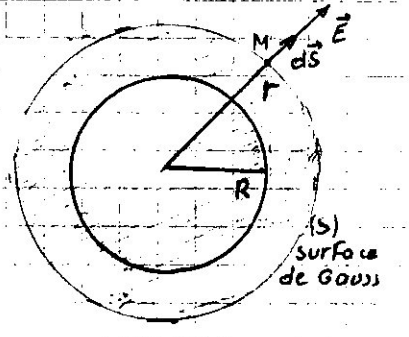


Détermination de l'energie interne W

$$W = \int_0^{\infty} dW = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, dv \quad : (dv : \text{élement de volume} = 4\pi r^2 dr$$

Donc $W = \int_0^R \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{int}^2 . 4\pi r^2 dr + \int_R^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 . E_{ext}^2 . 4\pi r^2 dr$

$\vec{E}_{int}$ et $\vec{E}_{ext}$ seront déterminés en utilisant le theorème de GAUSS.



★ 1er cas : M extérieur à la sphere : $r > R$

$$\Phi = \oiint \vec{E} . d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\Phi = E_{ext} . 4\pi r^2$: car $\vec{E} // d\vec{S}$ et $|\vec{E}| = c^{te}$

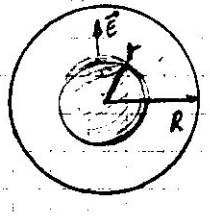
$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho . dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R \rho . 4\pi r^2 dr = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \frac{4\pi R^3}{3}$$

D'où en comparant $E_{ext} . 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$

d'où $E_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

★ 2e cas : M intérieur à la sphere : $r < R$

$$\Phi = \oiint \vec{E} . d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$\Phi = E_{int} . 4\pi r^2$: car $\vec{E} // d\vec{S}$ et $|\vec{E}|$ constant à r fixé

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho . 4\pi r^2 dr = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3}$$

D'où en comparant : $E_{int} . 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \frac{4\pi r^3}{3}$

d'où $E_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

Finalement :

$$W = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} . \frac{\rho^2 r^2}{9\varepsilon_0^2} . 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} . \frac{\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0^2 r^4} . 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{18\varepsilon_0} . \frac{R^5}{5} + \frac{4\pi\rho^2 R^6}{18\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_R^{+\infty}$$

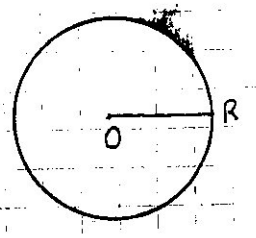
$$W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5} + 1\right)$$

Finalement $W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$

rcice 3

culer l'énergie electrostatique d'une sphere de centre O et de rayon R, chargée c une densité de charge surfacique σ.

UTION :



fois-ci, la sphère étant chargée sur sa surface lement, elle represente un conducteur en equilibre ctrostatique (C.E.E.)

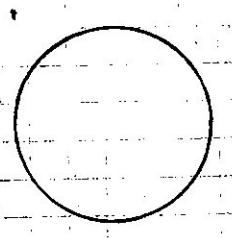
termination de l'energie interne W

$$= \int_0^{\infty} dW = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dv \quad : (dv : \text{élement de volume} = 4\pi r^2)$$

nc $$W = \int_0^R \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{int}^2 \, 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{ext}^2 \, 4\pi r^2 dr$$

r et $\vec{E}_{ext}$ seront déterminés en utilisant le théorème de Gauss.

1er cas : M exterieur à la sphere : $r > R$



$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\Phi = E_{ext} \, 4\pi r^2$ car $\vec{E} // d\vec{S}$ et $|\vec{E}| = c^{te}$ à r fixe

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \sigma \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R \sigma \, ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \, 4\pi R^2$$

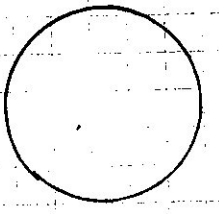
Comparaison

$$E_{ext} \, 4\pi r^2 = \frac{\sigma \, 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

2e cas : M interieur à la sphere : $r < R$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

le champ interne est nul car il n'y a pas de charges à l'interieur de la sphere $\Rightarrow E_{int} = 0$



inalement

$$W = \int_0^R \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{int}^2 \, dv + \int_R^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{ext}^2 \, dv$$

$$W = \int_R^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \sigma^2 R^4}{2 \varepsilon_0^2 r^4} \, 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{4\pi \sigma^2 R^4}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

$$W = \frac{2\pi \sigma^2 R^4}{\varepsilon_0}$$

Exercice 4

Soit une sphere conductrice S isolée, de centre O et de rayon $R = 6$ cm, portant une charge $q = 0{,}5\,\mu C$. On l'entoure d'une autre sphere S' constituée de deux hémispheres initialement neutres, concentriques à S, de rayon $R_1 = 11$ cm et de rayon exterieur $R_2 = 12$ cm. La sphere S' est portée par des supports isolants.

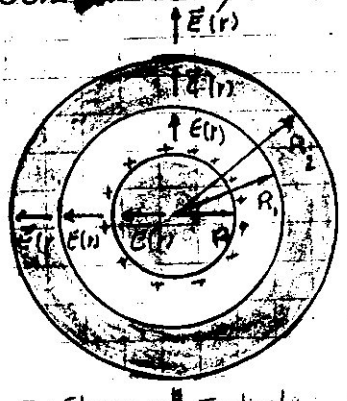
1/ Calculer les potentiels V_1 et V'_1 de S et S' respectivement.

2/ On met ensuite S' au sol. Quel est le nouveau potentiel V_2 de S ?

3/ On isole S' de nouveau et on met S au sol. Calculer la charge q de S ; q' de S et V_3 de S'

SOLUTION

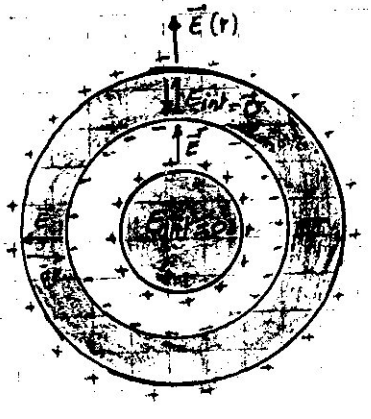
Un conducteur neutre contient des charges libres. Lorsqu'il est placé dans un champ électrique $\vec{E}$, des e^- libres se déplacent en sens inverse de $\vec{E}$. Il apparait donc de part et d'autre du conducteur des charges positives et négatives en quantités égales (s'il est isolé). Donc un nouveau champ $\vec{E}$ apparait dû à la nouvelle repartition et est opposé à $\vec{E}$, il va augmenter au fur et à mesure du transport des e^- jusqu'à compensation de $\vec{E}$. Le conducteur est à nouveau en équilibre dans un état polarisé $\vec{E}'_{int} = \vec{E} + \vec{E} = \vec{0}$.



Influence Totale

Dans notre cas : S' entoure completement S ⇒ on a un phenomene d'influence totale. Explication :

- (S) crée un champ $\vec{E}$ à l'interieur de S' ($Q>0$)
- $\vec{E}$ va provoquer l'immigration des charges ⊕ vers la surface externe de S' ; et l'immigration des charges ⊖ vers la surface interne de S'
- d'où l'apparition d'un 2e champ $\vec{E}$ opposé à $\vec{E}$
- $\vec{E}$ va augmenter avec l'immigration des charges jusqu'à ce que $\vec{E} + \vec{E} = \vec{0}$
- d'où un nouvel état d'équilibre (l'immigration s'arrête)
- Soit X le nombre de charges ⊕ ou ⊖ qui ont immigré
- <u>Déterminons X.</u>



Utilisation du théoreme de GAUSS

<u>$\forall M / OM = r$ et $R_1 < r < R_2$</u>

On choisit comme surface de Gauss la sphere de centre O et de rayon r

$$\Phi = \oiint_{S_0} \vec{E}_{int} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (\text{car } \vec{E}_{int} = \vec{0})$$

d'autre part

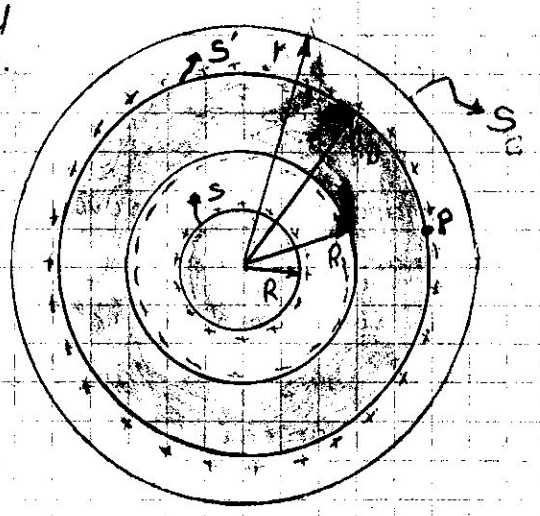
$$\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{-X + Q}{\varepsilon_0}$$

Comparaison : $\frac{-X + Q}{\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \boxed{X = Q}$

Donc en resumé : la petite boule contenait $Q = 0{,}5\,\mu C$. Lorsqu'on la recouverte d'une 2e sphere (noircie) ; après avoir observé le phenomene d'influence totale, on aura $(-Q)$ sur la surface interne de la 2e boule et $(+Q)$ sur la surface externe de la 2e boule (l'anneau noirci).

Calcul des potentiels V_1 de S et V_1' de S'

Après phénomène d'influence totale, déterminons le potentiel de chaque conducteur en utilisant le théorème de Gauss.



a/ $\forall M / OM = r$ tq $r > R_2$

- $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = E.4\pi r^2$
- $\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{+q - q + q_0}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- $E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Kq}{r^2}$

Détermination du potentiel en coord. polaires

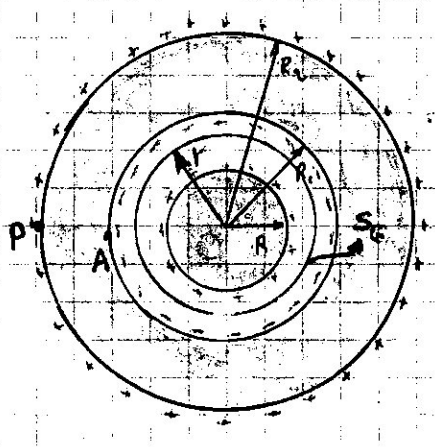
$\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow V = -\int E.dr = \frac{Kq}{r} + C_1$

Comme $V(r) \underset{r \to \infty}{=} 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{Kq}{r}$

Continuité du potentiel en P

$V(P) = V(r = R_2) = \frac{Kq}{R_2}$. Le conducteur S' est un C.E.E donc il constitue un volume équipotentiel $\boxed{V_{S'} = V' = \frac{Kq}{R_2}}$

b/ $\forall N / ON = r$ tq $R_1 > r > R$



- $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \oiint E.dS = E.4\pi r^2$
- $\Phi = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- $E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Kq}{r^2}$

Détermination du potentiel V sur la surface S

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow V = -\int E.dr = \frac{Kq}{r} + C_2$

Détermination de la constante C_2

- $V_A = V(r = R_1) = \frac{Kq}{R_1} + C_2$
- $V_P = V'(r = R_2) = Kq/R_2$

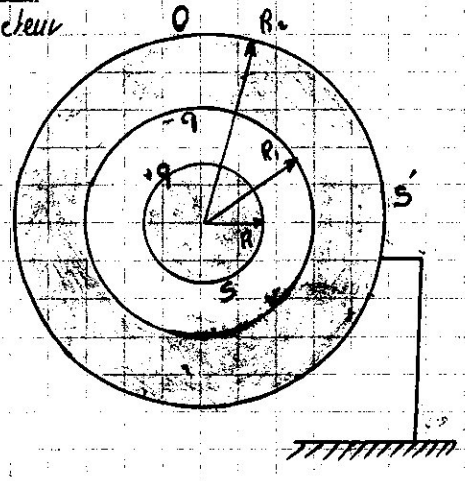
S est un C.E.E $\Rightarrow$ volume équipotentiel $V_A = V_P$

$\frac{Kq}{R_1} + C_2 = \frac{Kq}{R_2} \Rightarrow C_2 = Kq\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow \boxed{V_S = V = Kq\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$

On peut en déduire la capacité du système $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R R_1}{R_1 - R}$ car $\Delta V = V - V'$

On vérifie bien que C ne dépend que de la géométrie du condensateur et non pas de sa charge q.

On connecte S' au sol. Quel est le nouveau potentiel V_2 de S'?



S', le fil et le sol constituent un seul et unique conducteur

La charge +q extérieure s'achemine totalement vers le sol.

Le potentiel de la terre est nul donc $V_2 = V_{S'} = 0$.

Calcul du potentiel V_2 de S : Théorème de Gauss

Comme on l'a fait précédemment, on aura :

$E(r) = \frac{Kq}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{Kq}{r} + C^{te}$ $\quad R < r < R_1$

continuité $V(r = R_1) = \frac{Kq}{R_1} + C^{te} = 0 \Rightarrow C^{te} = -\frac{Kq}{R_1}$

$V_2 = Kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$

donc finalement

$$\boxed{V_{S'} = 0}$$

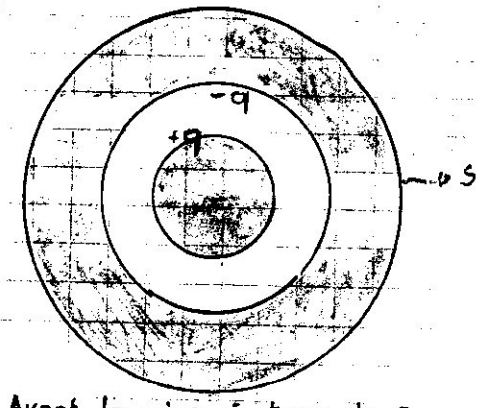
$$\boxed{V_S = Kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

3) On isole S' de nouveau et on met (S) au sol

On isole S' de nouveau et on met (S) au sol

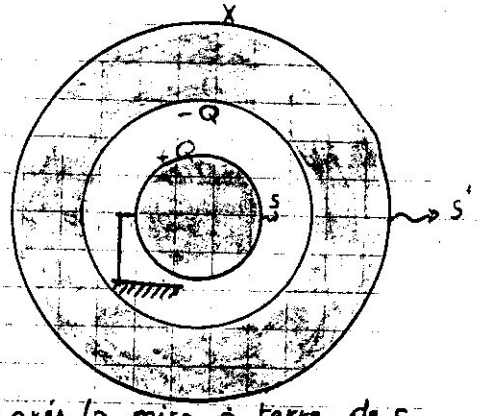
- La charge totale portée par S' est $-q$
- La charge $+q$ se trouvant au sol,
- La charge $+q$ de (S) a tendance à s'acheminer vers le sol d'une part et est en interaction avec la charge S' d'autre part.

Si une charge $(+Q)$ inconnue reste sur S, déterminons-la.



Avant la mise à terre de S

On suppose qu'on aura à l'équilibre la répartition de charges comme le montre la figure ci-contre.



Après la mise à terre de S

$$\underbrace{-Q + X}_{\text{Charge totale de S' après}} = \underbrace{-q + 0}_{\text{charge totale de S' avant}}$$

On nous demande Q, X, V_S et $V_{S'}$

* $V_S = V_{sol} = 0 \Rightarrow V_3 = 0$

* $V_{S'} = ?$ Théorème de GAUSS pour $r > R_2$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi = \dfrac{X}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} E(r) = \frac{KX}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{KX}{r} + c^{te} = \frac{KX}{r} \quad ; V(\infty) = 0$$

$$V_3(S') = \frac{KX}{R_2} = \frac{K(Q-q)}{R_2} \qquad \text{mais } Q = ?$$

Utilisons le principe de la conservation de la capacité C (constante)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{0 - \frac{K(Q-q)}{R_2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 Q}{q - Q} \quad \text{(résultat de ③)}$$

or $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R R_1}{R_1 - R}$ (résultat trouvé à la question ①) : en égalisant

$$Q = \frac{R R_1}{R R_1 - R R_2 + R_1 R_2} q$$

d'où le potentiel $V_3(S') = \dfrac{K}{R_2}(Q - q)$

$$V_3(S') = \frac{K}{R_2}\left(-q + \frac{R R_1 q}{R R_1 - R R_2 + R_1 R_2}\right)$$

Exercice 5

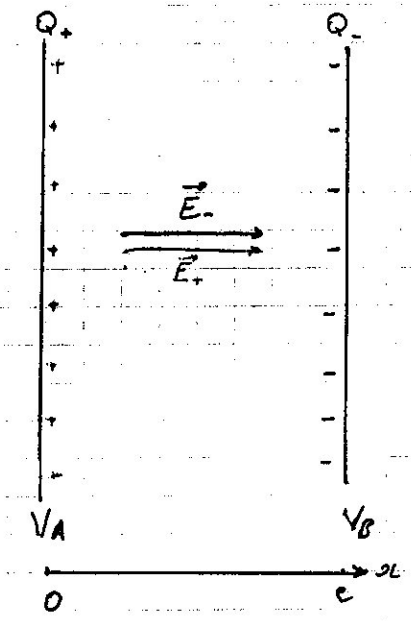
Un condensateur plan est constitué de deux plaques metalliques rectangulaires de même surface $S = 100\ cm^2$, separées par un dielectrique (l'air) d'épaisseur $e = 1m$

1/ Déterminer la capacité en μF du condensateur ainsi formé

2/ On place entre les 2 armatures et parallelement une lame d'ébonite $\varepsilon_r = 3$ et d'épaisseur $e_1 = 0,4\ mm$ et de m̂ surface que les 2 plaques.
Quelle est alors la nouvelle capacité du condensateur

3/ On substitue à la lame d'ébonite, une lame métallique isolée de m̂ epaisseur
Determiner la nouvelle capacité du condensateur

4/ Le diélectrique étant l'air, on établit entre les armatures une d.d.p $V = 3000V$.
Determiner la force attractive qui s'exerce entre les 2 armatures.



SOLUTION

Déterminons la capacité de ce condensateur

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

Pour déterminer C, on doit d'abord déterminer $V_A - V_B$ mais pour cela, on détermine d'abord E.

$\vec{E} = ?$

Nous avons 2 plans //; $\forall M$ entre les 2 plans

$$\vec{E}_M = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \text{avec } E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}_M| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E_M = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

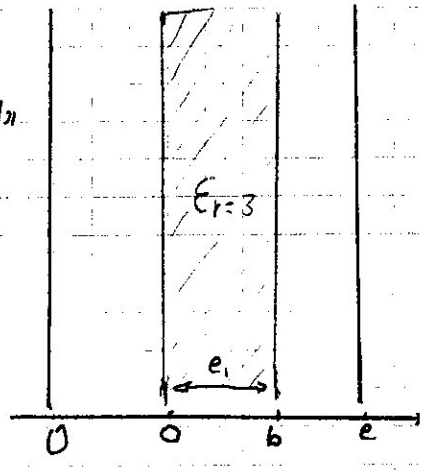
Comme $\vec{E}_M = -\,\text{grad}\,V \Rightarrow V_M = -\int E\,dx$

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = V_B - V_A = \int_0^e -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,e$$

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0} \\ Q = \sigma S \end{array}\right\} \Rightarrow C = \frac{Q}{V_A - V_B} \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{e}$$

2/ On place parallèlement entre les 2 armatures une plaque d'ébonite $\varepsilon_r = 3$ d'ép. e_1

Calculons la nouvelle capacité



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{x} \quad ; \quad dV = -\int_0^e E\,dx$$

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_0^e -\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\,dx \Rightarrow V_B - V_A = -\left[\int_0^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \int_a^b \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} + \int_b^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right]dx$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,a + \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}(b - a) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e - b)$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}\,e_1 + \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} + \underbrace{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,a - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,b\right)}_{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e_1}$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{2e_1}{3}\right)$$

d'où $C = \dfrac{Q}{V_A - V_B} = \dfrac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(e - \frac{2e_1}{3}\right)} \Rightarrow C = \dfrac{S\varepsilon_0}{e - \frac{2e_1}{3}}$; C ↗ car denom ↘

) remplace la plaque d'ébonite par une plaque métallique de e_1 epaisseur.

erminons la nouvelle capacité :
plaque métallique est un conducteur $\Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$
méthode

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \vec{i} \quad ; \quad \int_{V_A}^{V_B} dV = \int_0^e -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dx$$

$$- V_B = \int_0^a -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx + 0 + \int_b^e -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx$$

$$- V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e-b) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e-e_1)$$

ori $\quad C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e-e_1)} \Longrightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{e-e_1}$

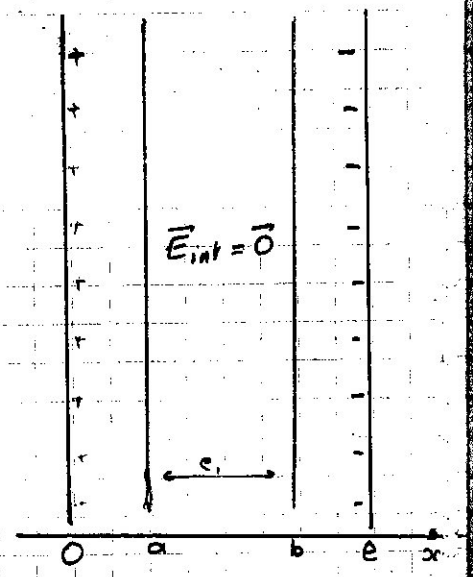


fig ①

capacité a augmenté encore par rapport à ①

méthode

chema ① est équivalent au schéma ② : 2 condensateurs
t C_2 en série.

fig ②

$$= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \longrightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{S\varepsilon_0}{a} \quad ; \quad C_2 = \frac{S\varepsilon_0}{e-b} \Longrightarrow C_{eq} = \frac{S\varepsilon_0}{e-e_1}$$

xercice N° 1

or le circuit de la figure ci-dessous, montrer que $U_{CB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{AB}$

ercice N° 2

le circuit de la figure ci-dessous, établir la loi du diviseur de courant

Exercice 3

Soit le montage electrique, ci-dessus. En utilisant les lois de KIRCHOFF déterminer les courants I_1, I_2 et I_3

Soit le circuit électrique ci-dessous, formé R_1, R_2, R_3, R_4 et R, et le générateur E.
Calculer les potentiels aux points A et B et calculer la d.d.p aux bornes de R.
On donne $R_3 = R_4 = 40\ \Omega$; $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$; $R = 100\ \Omega$ et $E = 10\ V$.

Exercice 5

Le montage de cette figure, sert à mesurer une F.E.M. (e) inconnue par la méthode d'opposition où G est un galvanomètre de résistance g, E est un générateur, AB est un fil homogène de section constante S, de longueur L et de résistance R ; C étant un curseur mobile ; AC est une portion de fil de longueur ℓ et de résistance r ; e étant la f.e.m à déterminer.

1) Ecrire la loi des nœuds au point A et la loi des 2 mailles
2) En déduire le courant I_g traversant le galvanomètre
3) En déplaçant le curseur C, on peut trouver une position C_0 qui permet d'annuler I_g. En déduire (e) en fonction de E, L et ℓ.

Exercice 6

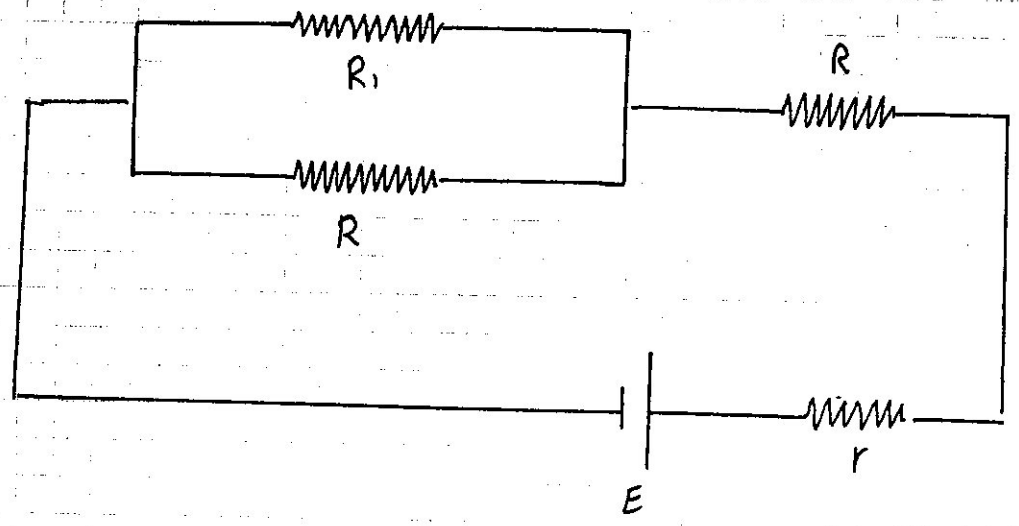
On considère le circuit de la Figure 6. On donne $E_1 = 8\,V$; $E_2 = 4\,V$; $r_1 = 0{,}5\,\Omega$ $r_2 = 0{,}4\,\Omega$; $R_1 = R_2 = 30\,\Omega$; $R_3 = 50\,\Omega$; $R_4 = 20\,\Omega$.

1) Calculer l'intensité des courants dans chacune des branches

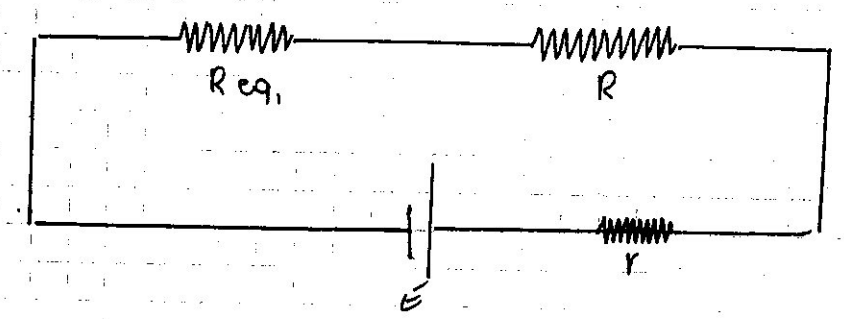
2) On place en série avec R_3 et R_4 une résistance R. Pour quelle valeur de R, le courant qui circule dans R_2 est le triple de celui qui circule dans R_4 ?

Exercice 7

Pour le montage de la figure ci-dessous, déterminer R, pour que le courant I soit maximal ?



Déterminons R pour que I soit max :



$$R_{eq_1} = \frac{R * R_1}{R + R_1}$$

$$R_{eq} = R_{eq_1} + R + r$$

$$R_{eq} \cdot I = E \Longrightarrow I = \frac{E}{R_{eq}} \Rightarrow I(R) = \frac{E}{\frac{R R_1}{R + R_1} + R + r}$$

ou $$I(R) = \frac{E R + E R_1}{R^2 + R(2R_1 + r) + r R_1}$$

$$\frac{d\, I(R)}{R} = \frac{- \cdots}{(\qquad\qquad)^2} < 0$$ toujours négatif

Tableau de variation

R	0	$+\infty$
$\frac{dI}{dR}$	$-$	
I	I_{max} ↘	0

I_{max} est donc obtenu pour $R = 0$; $I_{max} = \frac{E}{r}$

xercice 8

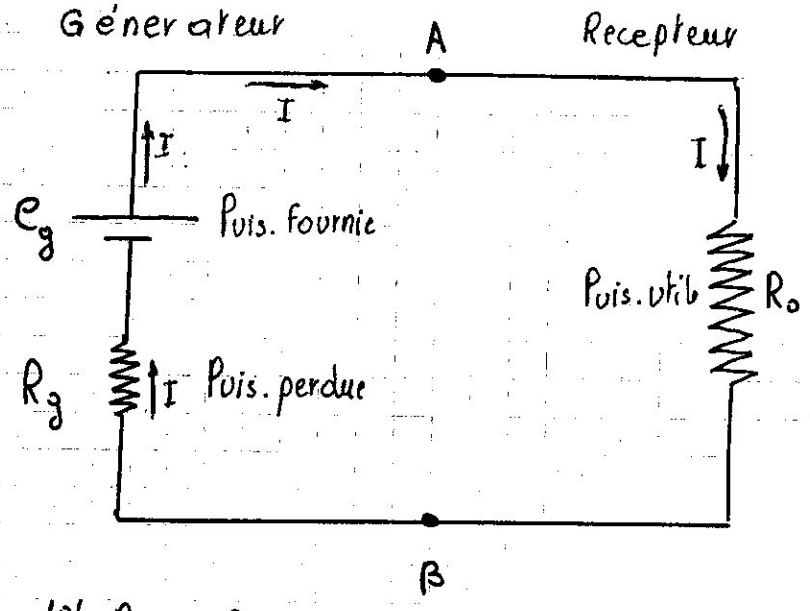
erminer les intensités des courants dans les différentes branches du circuit ci-dessous.
donne $R_1 = 10\,\Omega$; $R_2 = 20\,\Omega$; $R_3 = 30\,\Omega$; $R_4 = 40\,\Omega$; $R_5 = 50\,\Omega$; $R_6 = 60\,\Omega$
$= 70\,\Omega$; $E_1 = 10\,V$; $E_2 = 20\,V$; $E_3 = 30\,V$.

Exercice 9

Pour le circuit ci-dessous, calculer :

1) La valeur qu'il faut donner à R_0 pour que le rendement électrique de e_g soit égal à $\eta = 0,8$

2) La valeur qu'il faut donner à R_0 pour que la puissance dissipée dans R_0 soit maximale. Tracer $P(R_0)$



$$P.\,four = e_g\, I$$
$$P.\,perd = R_g\, I^2$$
$$P_{utile} = R_0\, I^2$$

$$P_{utile} = P_f - P_{pe}$$
$$R_0 I^2 = e_g I - R_g I^2$$

1°/ $R_0 = ?$ pour que $\eta = 0,8$

$$\eta = \frac{P_{uti}}{P_{fo}} = \frac{R_0 I^2}{e_g I} = \frac{R_0 I}{e_g} = 0,8$$

d'autre part $R_0 I - e_g + R_g I = 0 \Rightarrow I = \dfrac{e_g}{R_g + R_0}$

d'où $\eta = \dfrac{R_0 I}{R_g} = \dfrac{R_0}{e_g} \cdot \dfrac{e_g}{R_g + R_0} = 0,8 \Longrightarrow R_0 = 4 R_g$

2°/ $R_0 = ?$ pour que $P_{utile} = max$

$$P_{utile} = P(R_0) = R_0 I^2 = R_0 \frac{e_g^2}{(R_g + R_0)^2}$$

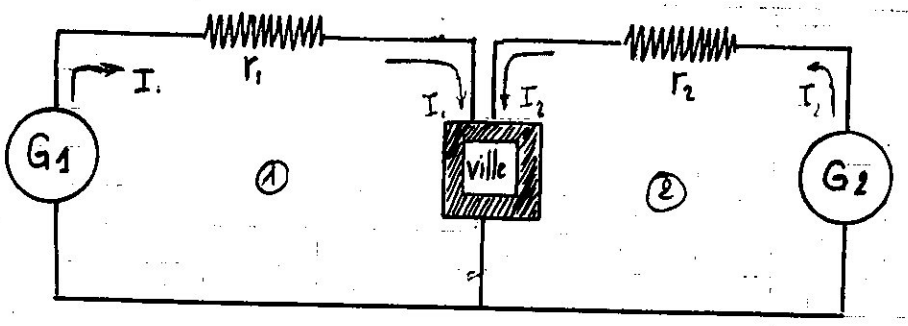
$$\frac{d P(R_0)}{d R_0} = \frac{e_g^2 (R_0 + R_g)^2 - 2 (R_0 + R_g) R_0 e_g^2}{(R_0 + R_g)^4} = 0$$

$$= \frac{e_g^2 (R_g + R_0)}{(R_0 + R_g)^4} \cdot (R_0 + R_g - 2 R_0) = 0 \Rightarrow R_0 = R_g$$

Exercice 10

Deux groupes de generateurs [redacted]ent une ville (V) ; l'un d'eux produit 2,4 MW et son reseau de distribution [redacted] resistance interne $r_1 = 1\,\Omega$. L'autre produit 2,2 MW pour une resistance de son reseau $r_2 = 0{,}4\,\Omega$. La ville est alimentée en 2 K volts.

1) Quel est le courant débité par chaque generateur
2) Quelle est la tension aux bornes de chacun.
3) Quelle puissance la ville consomme-t-elle?



$$\begin{cases} \text{maille ①} : e_{g1} - r_1 I_1 - V = 0 \\ \text{maille ②} : e_{g2} - r_2 I_2 - V = 0 \end{cases}$$

V étant $V_{ville} = 2000$ volts

en multipliant respectivement les équations ① et ② par I_1 et I_2, on obtient

$$\begin{cases} e_{g1} I_1 - r_1 I_1^2 - V I_1 = 0 \\ e_{g2} I_2 - r_2 I_2^2 - V I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 I_1^2 + V I_1 - P_1 = 0 \\ r_2 I_2^2 + V I_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

avec $P_1 = 2{,}4 \cdot 10^6$ Watt ; $P_2 = 2{,}2 \cdot 10^6$ Watt ; $V = 2000$ Vol ; $r_1 = 1\,\Omega$ et $r_2 = 0{,}4\,\Omega$.

d'où I_1 et I_2 (bien sûr on garde les valeurs positives seulement)

Une fois les valeurs de I_1 et I_2 determinées numeriquement,

$$e_{g1} = r_1 I_1 + V$$

et

$$e_{g2} = r_2 I_2 + V$$

Enfin, la puissance consommée par la ville est

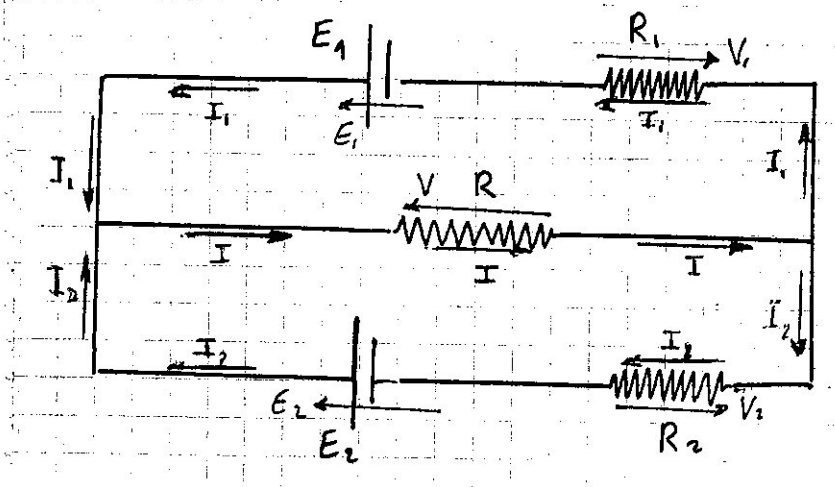
$$P_{ville} = V_{ville} \cdot I_{total}$$

$$P_V = V (I_1 + I_2)$$

d'où application numerique.

Exercice 11

Pour le circuit de la figure ci-dessous, [redacted] l'intensité du courant et la quantité de chaleur dégagée dans la résistance R par unité de temps. Pour quelle valeur de R (exprimée en fonction de E_1, E_2, R_1 et R_2) le dégagement de chaleur est-il maximum ?



nœud A : $I = I_1 + I_2$

maille 1 : $E_1 - RI - R_1 I_1 = 0$

maille 2 : $E_2 - RI - R_2 I_2 = 0$

on cherche $P(R) = RI^2$ donc I

$$\begin{aligned} RI + R_1(I - I_2) &= E_1 \\ RI + R_2 I_2 &= E_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (R + R_1) I - R_1 I_2 = E_1 \\ R\ I + R_2 I_2 = E_2 \end{cases} \quad \text{méthode de Cramer}$$

$$\text{d'où} \quad I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_2(R + R_1) + R R_1}$$

$$\text{d'où} \quad P(R) = R I^2 = R \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2)^2}$$

$$\frac{dP(R)}{dR} = \frac{(E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 (RR_1 + RR_2 + R_1 R_2)^2 - 2(R_1 + R_2)(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2) R (E_1 R_2 + E_2 R_1)^2}{(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2)^4}$$

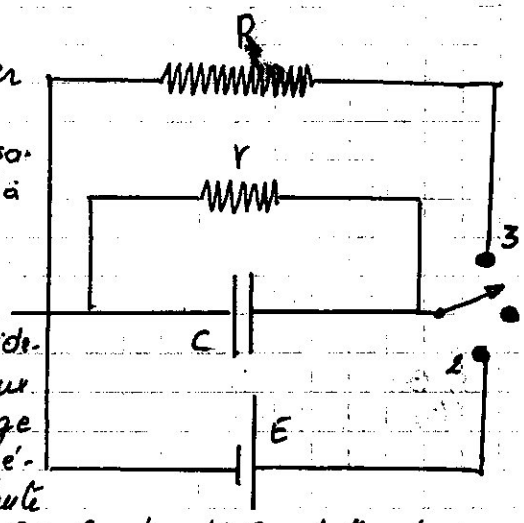
$$\frac{dP(R)}{dR} = 0 \Rightarrow (E_1 R_2 + E_2 R_1)^2 \left[(RR_1 + RR_2 + R_1 R_2) - 2R(R_1 + R_2)\right] = 0$$

$$\text{d'où} \quad RR_1 + RR_2 + R_1 R_2 - 2RR_1 - 2RR_2 = 0$$

$$R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$$

$$\text{ou} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Exercice 12 : Mesure des grandes résistances.



On considere le circuit ci-contre, permettant de mesurer des resistances R très élevées.
La resistance du generateur G est négligeable ; un condensateur C, dont les fuites sont representées par une resistance r // à C, est lui-même parallèle à R.
On peut mesurer la tension aux bornes de C à l'aide d'un electrometre qui ne perturbe pas la mesure.
Le condensateur étant chargé (position 2), on amene rapidement l'interrupteur sur 1. On constate que la tension aux bornes de C chute de moitié en un temps t_1. On recharge le condensateur (2) puis l'interrupteur est porté instantanément sur la position (3). On constate que la tension chute de moitié en un temps t_2. Calculer r et R pour $C = 0{,}1\,nF$; $t_1 = 10{,}5\,s$ et $t_2 = 4\,s$

SOLUTION :

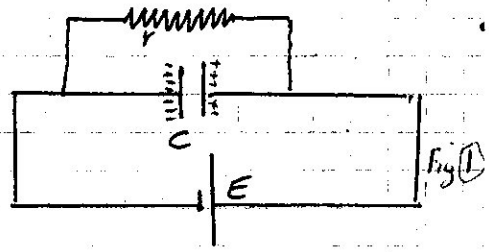


Fig 1

1°/ C étant chargé K sur la position 1
$U_c = E$
(C chargé totalement) voir Fig 1

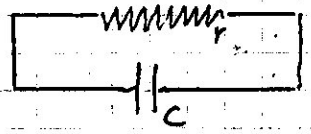


Fig 2

2° On ramene rapidement K sur la position 2
avec à $t = 0 \Rightarrow U_c = E$ voir fig 2

On constate qui à $t = t_1 \Rightarrow U_c = \frac{E}{2}$

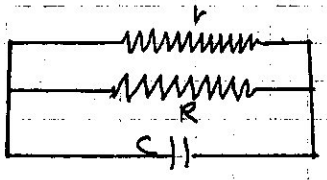


Fig 3

3° On recharge C (K sur la position 1) $\Rightarrow U_c = E$
4° On amene K sur la position 3
avec à $t = 0 \Rightarrow U_c = E$
à $t = t_2 \Rightarrow U_c = E/2$

Cherchons R et r

Dans la fig 2, C va se décharger à travers r $\Rightarrow U_c(t) = E\,e^{-t/\tau_1}$ $(\tau_1 = rC)$

à $t = t_1$; $U_c(t_1) = E\,e^{-t_1/rC} = \frac{E}{2}$; $e^{-t_1/rC} = 1/2 \Rightarrow r = \frac{t_1}{C\,\mathrm{Log}\,2} = 1{,}5.10^{11}\,\Omega$

Dans la fig 3, C va se decharger sur $R_{eq} = r//R$

$U_c(t) = E\,e^{-t/\tau_2}$ $(\tau_2 = R_{eq}C)$, à $t = t_2$; $U_c(t_2) = E/2$

$U_c(t_2) = E\,e^{-t_2/\tau_2} = \frac{E}{2} \Rightarrow e^{-\frac{t_2}{R_{eq}C}} = 1/2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{t_2}{C\,\mathrm{Log}\,2} = 5{,}7.10^{10}\,\Omega$

$r = 1{,}5.10^{11}\,\Omega$; $R_{eq} = 5{,}7.10^{10}\,\Omega \Rightarrow \frac{R\,r}{R+r} = 5{,}7.10^{10}\,\Omega$

d'ou $\boxed{R = 9{,}3.10^{10}\,\Omega}$

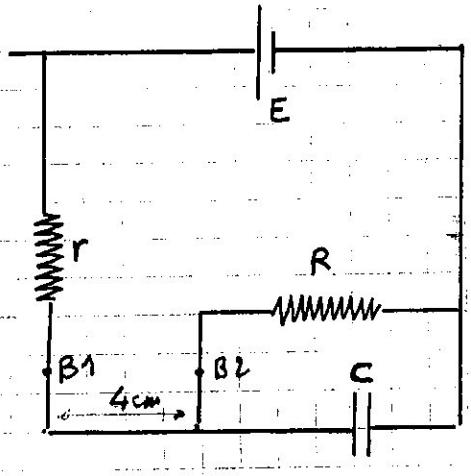
Exercice 13 Mesure de la vitesse d'un projectile.

On considère le circuit ci-contre dans lequel E est un générateur continu de f.e.m 300V, $r = 5K\Omega$ et $R = 10K\Omega$ et C condensateur de $0,3\mu F$. B1 et B2 sont 2 points séparés par une distance de 4 cm. A $t=0$ C totalement chargée.

1/ Calculer la d.d.p et la charge aux bornes de C.

2/ Un projectile coupe successivement les 2 fils en B1 et B2, la d.d.p aux bornes de C diminue de 12 V. Quelle est en m/s la vitesse du projectile entre B1 et B2?

3/ On réalise la mesure de B1B2 à ± 1mm et celles des tensions finales et initiales aux bornes de C à ± 0,1V. Déterminer l'incertitude relative du calcul de V ($\Delta C = 0$)



SOLUTION :

1°/ A $t=0$; C est totalement chargé donc il se comporte comme un circuit ouvert. Calculons la d.d.p $U_c(t)$ et la charge $q_c(t)$ aux bornes de C

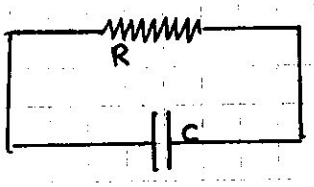
Équation de la maille $E - rI - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R+r}$

d.d.p aux bornes de C = d.d.p de R $\Rightarrow U_c = U_R = RI = \frac{RE}{R+r}$

$$U_c = R\frac{E}{R+r} \quad \text{et} \quad q_c = U_c \cdot C = \frac{RCE}{R+r}$$

2°/ Une balle, ayant une vitesse v, coupe le circuit en B_1 puis en B_2 : U_c diminue de 12V. Déterminons alors v.

Dès que la balle coupe le circuit en B_1 (à $t=0$) C commence à se décharger à travers R. Fig ①



$$U_c(t) = \frac{ER}{r+R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

à $t = T$, la balle coupe le circuit en B_2, la décharge s'arrête

$$U_c(t=T) = \frac{ER}{r+R} e^{-T/RC}$$

la d.d.p a alors diminué de 12 V

$$U_c(t=T) = \frac{ER}{R+r} e^{-T/RC} = \frac{ER}{R+r} - 12$$

de cette équation, on en déduit T

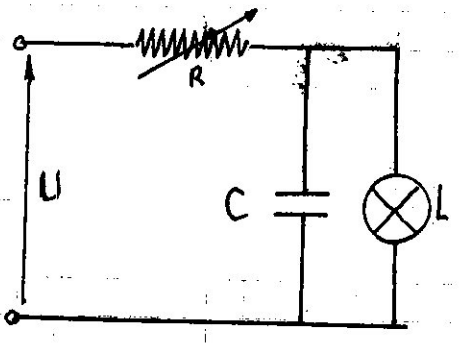
$$\frac{300 \cdot 10 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3} e^{-\frac{T}{10^4 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}} = \frac{300 \cdot 10^4}{15 \cdot 10^3} - 12$$

$$T = 1,85 \cdot 10^{-3} s$$

Comme $x = vT \Rightarrow v = \frac{x}{T}$, d'où $\boxed{v = 216,2 \text{ m/s}}$

Exercice 14

On réalise le montage ci-contre où L représente une lampe au néon : celle-ci ne laisse passer aucun courant tant que la tension à ses bornes est inférieure à la tension dite d'allumage $V_a = 90V$. Au delà de cette tension elle devient conductrice et oppose une résistance négligeable au passage du courant. Cette lampe s'éteint lorsque la tension aux bornes de la lampe est inférieure à la tension dite d'extinction $V_e = 70$ Volts ; R est réglable entre $10 K\Omega$ et $1 M\Omega$; C a une capacité de $0,1 \mu F$; U est une tension continue constante de 130V.



Sachant que la décharge C dans la lampe se fait en un temps négligeable, quelles sont les valeurs extrêmes de la fréquence des éclairs (allumage de L) émis par la lampe lorsque R varie. Donner la représentation graphique de la tension aux bornes de la lampe en fonction du temps.

SOLUTION