

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
 MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**  
**INSTITUT D'AERONAUTIQUE**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

*Spécialité : Aéronautique*  
*Option : Aérodynamique*



Présentée par : M<sup>r</sup>. Rachid RENANE

**SIMULATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS  
 TRANSSONIQUES COMPRESSIBLES NON VISQUEUX  
 AUTOUR DES GEOMETRIES EXTERNES**

Soutenue le : jeudi 19 septembre 2002

devant le jury suivant :

|                          |  |                   |
|--------------------------|--|-------------------|
| <b>Mr S.BOUKRAA</b>      | Maître de conférences, Université de Blida | <b>Président</b>  |
| <b>Mr Z.YOUBI</b>        | Maître de Conférences, Université de Blida | <b>Rapporteur</b> |
| <b>Mr M.A BELOUHRANI</b> | Maître de conférences à l'E.M.P            | <b>Examineur</b>  |
| <b>Mr M.BOUNEDER</b>     | Chargé de cours IAB, Université de Blida   | <b>Examineur</b>  |

Année universitaire 2001/2002

## REMERCEMENTS

*Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Monsieur Z.YOUBI, Maître de conférence et Recteur de l'Université de Blida pour toute sa confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet. Ses conseils éclairés et sa large expérience scientifique ont permis l'aboutissement de ce travail.*

*J'exprime mes vifs remerciements, à Monsieur J.BOUHRAS Maître de conférence à l'Université de Blida, en me faisant l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*Je tiens à remercier particulièrement Monsieur A.BELOUHRANI Maître de conférence à l'E.M.P, Monsieur M.BOUNEDER Chargé de cours à L'I.A.B de l'Université de Blida pour avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur L.AMTOU de l'I.A.B pour ces aides précieuses et ces conseils éclairés.*

*Je remercie très vivement Monsieur BERGHEUL, Directeur de l'institut d'Aéronautique, ainsi qu'à Monsieur REZOU, Directeur de la Poste Graduation et de la Recherche Scientifique pour leur soutien moral et leur encouragements.*

*Je garde une profonde reconnaissance pour mon ami nadir Bekka qui m'a aidé avec efficacité, gentillesse et dévouement à la rédaction de ce mémoire.*

*Je me dois aussi de remercier tous les enseignants ainsi que tout le personnel de l'institut d'Aéronautique.*

*En fin, que tous ceux ou celles qui m'ont apporté leur soutien et leur amitié tout au long de ce travail; trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.*

REKSELVE Rachid

## Résumé :

Notre sujet consiste à faire une simulation numérique des écoulements régis par les équations d'Euler, ces dernières sont utilisées pour obtenir des solutions des écoulements non visqueux, compressibles et rotationnels. La stratégie numérique de résolution utilisée consiste à discrétiser les équations par la technique de volumes finis, à l'aide d'un maillage à éléments centrés.

Dans cette étude, un schéma robuste a été proposé pour la simulation des écoulements compressibles transsoniques, ainsi pour des écoulements avec discontinuités comme les ondes de choc. Cette méthode est basée sur une technique de volumes finis du deuxième ordre dans l'espace et sur une discrétisation explicite dans le temps, qui utilise des ressources informatiques moins importantes qu'une discrétisation implicite même si l'avancement de la solution dans le temps est moins rapide.

Afin de résoudre les équations physiques gouvernant le problème, on utilise un schéma qui se base sur la méthode de Runge Kutta explicite en introduisant la viscosité artificielle d'ordre élevé pour minimiser les fluctuations qui peuvent se présenter dans les régions de discontinuités (choc) ou de forts gradients. Ainsi ce schéma est appliqué pour un cas test « profil symétrique NACA 0012 ».

**Mots clés :** Equations d'Euler- Runge Kutta -Ecoulement transsonique, Ecoulement stationnaire - Méthodes numériques – Génération de maillage – Méthode des volumes finis – Aérodynamique.

## Abstract

The subject of this work is the numerical simulation of flows governed by the Euler equations. The Euler equations are used to obtain solutions of non-viscous, compressible and rotational flows. The numerical solution strategy consists in the discretisation of the equation by means of finite volume technique using center element of mesh.

In this work, we proposed a robust scheme for compressible and transonic flows with discontinuities such as shock waves. The computational method is based on a finite volumes technique of second order in space solved using an explicit time discretisation. This technique uses low computational resources as compared to the implicit discretisation, but the convergence of the solution in time is not as fast.

The flux across the cell faces is evaluated using a scheme based on Runge Kutta explicit method, with introducing an explicit artificial viscosity of high order to reduce a fluctuation witch can be present in a discontinuities regions or high gradient, also this scheme will be applied for test case « symmetrical aerofoil NACA0012 ».

**Keywords:** Euler Equations - Runge Kutta - Transonic flow - steady flow - Numerical methods –Grid generation – finite volume method– Aerodynamics.

# TABLES DES MATIERES

|   |     |
|---|-----|
| Remerciements .....                     | I   |
| Résumé .....                            | II  |
| Sommaire .....                          | III |
| Nomenclature .....                      | VI  |
| Liste des figures et des tableaux ..... | VII |

## Chapitre I : Introduction

|  |   |
|--|---|
| 1.1 Introduction .....                         | 1 |
| 1.2 Motivation .....                           | 2 |
| 1.3 Les équations d'Euler .....                | 3 |
| 1.4 Schémas numériques de discrétisation ..... | 5 |
| 1.5 Grandes lignes .....                       | 6 |

## Chapitre II : Formulation mathématique du système d'équations d'Euler

|  |    |
|--|----|
| II.1 Introduction .....  | 8  |
| II.2 Hypothèses .....  | 8  |
| II.3 Les équations d'Euler .....   | 9  |
| II.4 La formulation conservative .....   | 9  |
| II.5 Formulation quasi-linéaire .....  | 10 |
| II.5.1 Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives .....                                       | 10 |
| II.5.2 Les matrices jacobiennes pour les variables primitives .....  | 11 |
| II.5.3 Les matrices de passage entre les variables conservatives<br>et les variables non-conservatives ..... | 14 |
| II.6 Formulation caractéristique .....   | 15 |

## Chapitre III : Méthode des volumes finis et les discrétisations conservatives appliquées aux équations d'Euler

|   |    |
|---|----|
| III.1 Introduction .....                    | 19 |
| III.2 Discrétisations conservatives : ..... | 20 |

|   |    |
|---|----|
| III.3 Méthode de volumes finis : .....                              | 23 |
| III.4 Méthode des volumes finis bidimensionnel : .....              | 25 |
| III.5 Evaluation des flux a travers les faces d'une cellule : ..... | 27 |

## **Chapitre IV : Formulation numérique et schémas de Runge Kutta**

|   |    |
|---|----|
| IV.1 Introduction ... ..  | 30 |
| IV.2 Formulation des équations et la discrétisation en espace ..... | 30 |
| IV.3 Les termes dissipatifs .....                                   | 32 |
| IV.4 Schémas à itération en temps .....                             | 34 |
| IV.5 Conditions aux limites .....                                   | 38 |
| IV.5.1 Conditions d'entrer amont .....                              | 41 |
| IV.5.2 Conditions à la sortie avale .....                           | 42 |
| IV.6 Critère de stabilité .....                                     | 43 |
| IV.7 Génération de maillage .....                                   | 43 |
| IV.7.1 Technique algébrique .....                                   | 44 |
| IV.7.1.1 Fonction de condensation « Stretching » .....              | 44 |
| IV.7.1.2 Technique de deux parois .....                             | 45 |
| IV.7.3 Organigramme de génération de maillage.....                  | 47 |
| IV.8 Organigramme du programme Euler 2D.FVM.....                    | 48 |

## **Chapitre V : Analyses des résultats**

|  |    |
|--|----|
| V.1 Introduction .....   | 50 |
| V.2 Génération du maillage .....   | 50 |
| V.3 Nombre de Mach critique .....  | 55 |
| V.4 Influence de l'angle d'attaque sur la distribution de pression.....  | 60 |
| V.5 Influence de nombre de Mach amont sur la distribution de pression .....                                      | 65 |
| V.6 Influence de l'angle d'attaque sur la distribution du nombre de Mach local .....                             | 68 |
| V.7 Influence de nombre de Mach amont avec l'angle d'incidence sur la distribution du nombre de Mach local ..... | 72 |
| V.8 Influence de nombre de Mach amont avec l'angle d'incidence sur la distribution de pression .....             | 74 |
| V.9 Répartition du champ d'écoulement .....  | 78 |
| V.10 Validation des résultats .....  | 79 |
| <b>Conclusion</b> .....  | 80 |

|                            |    |
|----------------------------|----|
| <b>Bibliographie</b> ..... | 82 |
|----------------------------|----|

**Annexe A**

**Adimensionnement**

|  |    |
|--|----|
| A.I Adimensionnement des variables.....        | 85 |
| A.I.1 Le temps.....                            | 85 |
| A.I.2 Abscisse.....                            | 85 |
| A.I.3 Masse volumique.....                     | 85 |
| A.I.4 Vitesse.....                             | 85 |
| A.I.5 Pression .....                           | 86 |
| A.II Adimensionnement des équations .....      | 86 |
| A.II.1 Equation de continuité.....             | 86 |
| A.II.2 Equation de quantité de mouvement ..... | 86 |
| A.II.3 Equation de l'énergie.....              | 87 |

**Annexe B**

|   |    |
|---|----|
| <b>Bilan des flux a travers les cotes de la maille</b> .....                    | 88 |
| B.1 Formulation .....   | 88 |
| B.2 Calcul des composantes<br>de flux net pour chaque surface de la maille..... | 89 |
| B.3 Calcul de dx et de dy des cotes de la maille.....                           | 90 |
| B.4 Flux de vitesse.....  | 90 |
| B.5 Bilan des flux.....   | 90 |

**Annexe C**

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| <b>Les termes dissipatifs</b> ..... | 91 |
|-------------------------------------|----|

## Liste des figures et tableaux

|  |    |
|--|----|
| Figure (1.a) Zones de pression aux alentours du profil d'aile pour un écoulement transsonique .....  | 4  |
| Figure (1.b) Écoulement transsonique non visqueux<br>Autour du profil d'aile.....  | 4  |
| Figure (II.1) Relation entre les trois types de variables,<br>Conservatives U, primitives V et caractéristique W.....                              | 16 |
| Figure( II.2) Les lignes caractéristiques dans le cas mono-<br>Dimensionnel. ....  | 18 |
| Figure (III.1) Lois de conservation pour les subvolumes<br>du volume élémentaire $\Omega$ .....  | 21 |
| Figure (III.2) Subdivision unidimensionnelle de l'espace<br>en éléments de maillage. ....  | 22 |
| Figure(III.3.a) Maillage en volumes finis structuré à<br>maille centrée. ....  | 24 |
| Figure (III.3.b) Maillage en volumes finis structuré à<br>maille vertex ... ..   | 24 |
| Figure( III.4) Maillage en volumes finis structuré à<br>éléments vertex .....  | 25 |
| Figure (III.5) Air du plan arbitraire quadrilatéral .....  | 26 |
| Figure (IV.1) Discrétisation en espace .....   | 32 |
| Figure (IV.2) Conditions aux limites pour un écoulement<br>Uni-dimensionnel non visqueux. ....   | 39 |
| Figure (IV.3) Maille adjacente à la paroi. ....  | 40 |
| Figure (IV.4) Distributions de maillage<br>suivant les paramètres de contrôle.....   | 45 |
| Figure (IV.5) Canal bidimensionnel curviligne. ....  | 46 |
| Figure (V.1) Raffinement de maillage autour du profil<br>NACA0012 (répartition régulière) .....  | 52 |
| Figure(V.2a) Maillage en C 39x20 $P_{ac}=P_{fd}=0.2$ , $P_{af}=P_{cd}=1$ .....   | 53 |
| Figure(V.2b) Maillage en C 39x20 $P_{ac}=0.2$ , $P_{fd}=0.001$ , $P_{af}=P_{cd}=0.1$ .....   | 53 |
| Figure(V.2.c) Maillage en C 29x15 $P_{ac}=p_{fd}=1$ $p_{af}=p_{cd}=0.1$ .....  | 54 |
| Figure(V.2d) Maillage en C 29x15 $P_{ac}=p_{fd}=1$ $p_{af}=p_{cd}=0.5$ .....   | 54 |
| Figure(V. 3a) Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.75 ALPHA=0.DEG .....  | 58 |
| Figure (V. 3b) Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.70 ALPHA=1.25 DEG .....  | 58 |
| Figure(V. 3c) Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.64 ALPHA=3. DEG .....   | 59 |
| Figure (V.4a) Distribution du coefficient de pression sur<br>la surface du profil NACA0012 Mach=0.6<br>Angle d'incidence =0. deg. CFL= 1.5 .....   | 62 |
| Figure (V.4b) Répartition des lignes iso-pression autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.60 ALPHA=0. DEG .....                                       | 63 |
| Figure (V.4c) Distribution du coefficient de pression sur la<br>surface du Profil NACA0012 Mach=0.6<br>Angle d'incidence =1.25 deg. CFL= 1.5 ..... | 63 |

|  |    |
|--|----|
| Figure (V.4d) Répartition des lignes iso-pression autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.60 ALPHA= 1.25 Deg. ....                    | 64 |
| Figure (V.5.a) Répartition des lignes iso-pression autour du profil<br>NACA0012 Mach=0.75 Angle d'incidence =2 Deg. CFL= 1.5 ..... | 66 |
| Figure (V.5.b) Répartition des lignes iso-pression autour du profil<br>NACA0012 Mach=0.75 Angle d'incidence =2 Deg. CFL= 1.5 ..... | 67 |
| Figure (V.6a) Evolution du nombre de Mach local à travers la surface du profil<br>NACA0012 Mach =0.75 Alpha=0.deg CFL=1.5 .....    | 68 |
| Figure V.6b Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA0012 Mach =0.75 Alpha=0.deg CFL=1.5 .....                      | 69 |
| Figure(V.6c) Evolution du nombre de Mach local à travers la surface du profil<br>NACA0012 Mach =0.75 Alpha=1.25 Deg CFL=1.5 .....  | 69 |
| Figure(V.6d) Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA0012 Mach =0.75 Alpha=2.deg CFL=1.5 .....                     | 70 |
| Figure(V.6e) Distribution du nombre de Mach local autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.75 ALPHA=3.Deg .....                        | 70 |
| Figure(V.6f) Répartition des lignes iso-mach autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.Deg .....                              | 71 |
| Figure (V.7) Répartition des lignes ISO-PRESSION autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG .....                          | 73 |
| Figure (V.8a) Répartition des Champs de vitesse autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=0.DEG .....                           | 75 |
| Figure (V.8b) Répartition des Champs de vitesse/x (u) autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG .....                     | 76 |
| Figure (V.8c) Répartition des Champ de vitesse/y (v) autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG .....                      | 77 |
| Figure (V.8d) Répartition des lignes iso-vitesse/y (v) autour du profil<br>NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG .....                    | 77 |
| Figure V.10 Effet du CFL sur le résiduel<br>en fonction de nombre d'itérations.....  | 79 |
|  |    |
| Tableau V.1 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.75 Alpha=0.deg CFL=1 .....      | 56 |
| Tableau V.2 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.70 Alpha=1.25deg CFL=1.5 .....  | 57 |
| Tableau V.3 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.64 Alpha=3.deg CFL=1.5 .....    | 57 |
| Tableau V.4a Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.60 Alpha=0.deg CFL=1.5 .....   | 60 |
| Tableau V.4b Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.60 Alpha=1.25deg.....          | 61 |
| Tableau V.5.1 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique<br>autour du profil NACA0012 Mach =0.75 Alpha=2.deg CFL=1.5 .....  | 65 |



## Nomenclature

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $a_1, b_1$                       | : paramètres de la fonction de condensation S « Stretching »          |
| $c$                              | : Célérité de son.  |
| $C$                              | : Corde de profil   |
| $C_p$                            | : Coefficient de pression.  |
| $CP$                             | : chaleur spécifique à pression constante                             |
| $C_v$                            | : chaleur spécifique à volume constante                               |
| $D$                              | : Opérateur dissipatif  |
| $E$                              | : Energie spécifique totale par unité de volume.                      |
| $e$                              | : Energie interne   |
| $f$                              | : La composante du vecteur de flux suivant x                          |
| $g$                              | : La composante du vecteur de flux suivant y                          |
| $h$                              | : Enthalpie.  |
| $h$                              | : Le volume de la maille  |
| $\text{Log}(R)$                  | : Résiduel  |
| $M_\infty$                       | : Nombre de Mach.   |
| $Q$                              | : L'opérateur de discrétisation spatiale défini par l'équation (IV.7) |
| $P_{ac}, P_{fd}, P_{af}, P_{cd}$ | : Paramètres de control du maillage.                                  |
| $q_n$                            | : La composante de vitesse normale                                    |
| $q_t$                            | : La composante tangentielle de vitesse                               |
| $Q_v$                            | : Source volumique  |
| $r_{AB}, r_{DC}$                 | : Abscisses curvilignes   |
| $R$                              | : Constante des gaz parfait.  |
| $S$                              | : Fonction de condensation S « Stretching »                           |
| $t$                              | : Temps.  |
| $T$                              | : Température statique.   |
| $u$                              | : Composante de la vitesse suivant l'axe x.                           |
| $U_\infty$                       | : Vitesse de l'écoulement à l'infini amont.                           |
| $v$                              | : Composante de la vitesse suivant l'axe y.                           |
| $\nu$                            | : Viscosité artificielle.   |
| $(x, y)$                         | : Coordonnées cartésiennes.   |
| $\rho$                           | : Masse volumique.  |
| $\gamma$                         | : Rapport des chaleurs spécifique.                                    |
| $\alpha$                         | : Angle d'entrée de l'écoulement.                                     |
| $\Delta t$                       | : Pas du temps  |
| $(\xi, \eta)$                    | : Coordonnées du plan transformé.                                     |
| $\xi^*, \eta^*$                  | : Coordonnées normalisées.  |
| $( )_{ij}$                       | : Indices des nœuds dans le maillage.                                 |

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### I.1 Introduction

L'objectif principal de ce mémoire est de développer une méthode numérique efficace afin de simuler l'écoulement transsonique, compressible et non visqueux autour d'une géométrie bidimensionnelle de type profil d'aile.

Cette simulation peut être faite par la résolution de potentiel complet (full potentiel) qui nous permet de réduire le système d'équations d'Euler pour un écoulement de faible rotationalité à une seule équation de la vitesse[1].

Cependant pour un écoulement de forte rotationalité, la méthode du potentiel complet n'est plus valable et par suite, la résolution du système d'équations d'Euler est inévitable pour une simulation correcte, qui est la problématique de notre sujet.

Dans la littérature spécialisée, il existe une variété de schémas numériques pour la résolution du système d'équations d'Euler qui ont la nature convective et hyperbolique par rapport au temps. Différents schémas numériques ont été élaborés selon les différentes méthodes existantes en différences finies, volumes finis et éléments finis, et selon la nature explicite ou implicite du schéma choisi.

Afin de résoudre le système d'équations d'Euler, on a adopté une méthode avec indépendance par rapport au temps « time independante method » basée sur une discrétisation en volume finis et la résolution des équations différentielles ordinaires obtenus par le schéma de Runge Kutta explicite.

Cette dernière, actuellement est largement utilisée par les plus célèbres laboratoires de recherches en CFD (Computational Fluid Dynamics) dans leurs élaborations des codes de calcul pour la simulation des écoulements internes ou externes (PHONIX, TEAM...) autour des géométries complexes, car elle est plus efficace que les méthodes en différences finies du point de vue de sa forme intégrale et de la flexibilité du maillage, contrairement à la forme différentielle et l'exigence d'un maillage rectangulaire pour la méthode des différences finies ainsi la difficulté de numérotation des nœuds exigée par la méthode des éléments finis. [2]

## **I.2 MOTIVATION :**

L'expérience est un moyen indispensable et efficace pour prédire les caractéristiques d'un écoulement, car elle a l'avantage de générer la solution la plus réaliste, ce type de méthode nécessite un coût très élevé du point de vue temps de calcul et moyen d'expérimentations. Par exemple, il a été estimé que près de 20.000 heures de temps des essais en soufflerie sont dépensées dans le développement de la conception de l'avion commercial Boeing 747.

Le régime transsonique, qui se rencontre dans le vol de croisière des avions de transport et dans le vol en manœuvre des avions militaires est caractérisé par un nombre de Mach à l'infini amont inférieur légèrement à l'unité, ce qui va créer une poche d'écoulement supersonique limitée par une ligne sonique autour de la géométrie en question. Cette dernière se termine généralement par une onde de choc qui décélère l'écoulement vers les conditions subsoniques, voir fig.(I.1).

Dans l'expérimentation, la simulation d'un tel écoulement nécessite d'approximer le nombre de Mach du vol à l'intérieur de la soufflerie, cela conduit à la construction d'une soufflerie cryogénique très complexe qui facilite la tâche [1].

Aujourd'hui, en dynamique des fluides et en aérodynamique, les résultats numériques sont obtenus plus rapidement et à un coût moindre que les résultats expérimentaux, Cela fait que les organismes de recherches aéronautiques et spatiales, même les plus grands qui ont les moyens pour obtenir des résultats expérimentaux,

accordent de plus en plus d'importance aux codes numériques afin de réaliser leurs projets [10].

Donc l'approximation par simulation numérique est très utile dans les étapes préliminaires de conception, pour identifier rapidement les formes d'obstacles ou les configurations complexes, afin de réduire le temps consommé par la soufflerie [4].

### **I.3 LES EQUATIONS D'EULER :**

L'étude d'un tel écoulement est reliée au choix du modèle mathématique. La modélisation numérique à partir des équations complètes de Navier-Stokes est assez complexe. Lorsqu'on néglige la dissipation visqueuse, la représentation physique la plus rigoureuse des écoulements est fournie par les équations d'Euler.

Les équations d'Euler constituent dans l'approximation d'un fluide parfait non-conducteur de la chaleur, et qui seront l'objet du deuxième chapitre, le modèle mathématique le plus complet pour la simulation numérique des écoulements transsoniques.

Les équations d'Euler forment un système hyperbolique non linéaire et selon la méthode utilisée pour avancer la solution dans le temps, la résolution demande plus ou moins de ressources informatiques.

En effet, l'approche basée sur les équations d'Euler n'introduit aucune hypothèse limitative sur l'intensité des ondes de choc, comme c'est le cas dans les approches basées sur l'équation du potentiel complet [5-6] ni en outre sur l'épaisseur des profils ou l'amplitude des mouvements comme il est fait dans l'approche classique dite approximation des petites perturbations transsoniques.

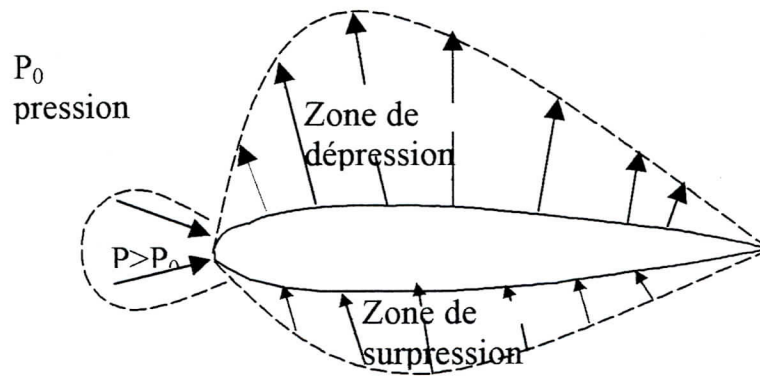


Figure 1.a Zones de pression aux alentours du profil d'aile pour un écoulement transsonique

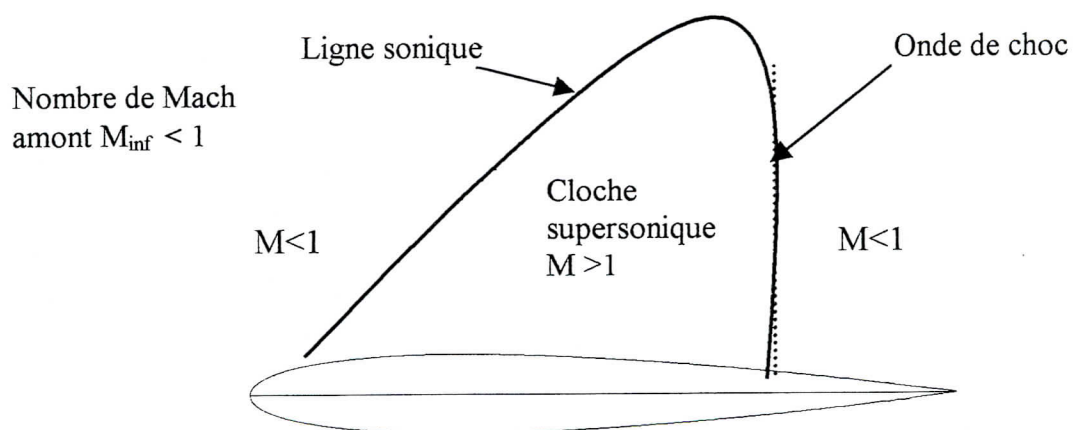


Figure 1.b Ecoulement transsonique non visqueux  
Autour du profil d'aile

**I-4 SCHEMAS NUMERIQUES DE DISCRETISATION :**

On pourrait classer les méthodes en explicites qui sont soumises à des restrictions du pas de temps imposé par le critère CFL ( Courant-Friedrichs-Lewy) de stabilité, et implicites qui résolvent les équations de conservation d'une façon couplée, ce qui fait qu'elles ne sont pas limitées par le critère CFL. Par contre les schémas numériques implicites demandent beaucoup de ressources informatiques parce qu'ils conduisent à la résolution d'une matrice multidimensionnelle [3], la technique employée lors de ce travail est basée sur une discrétisation explicite dans le temps.

Rappelons les schémas numériques de discrétisation les plus connus qui ont été développés par la technique des volumes finis. S.K Godunov (1957) [3-7] a été le premier à résoudre le problème de Riemann qui se manifeste comme une discontinuité entre deux états uniformes de fluide. Il a trouvé un procédé itératif pour résoudre les problèmes de Riemann présents à l'interface de chaque paire d'états adjacents. Cependant, le coût de calcul est très élevé lorsqu'on utilise une solution initiale inadéquate. Toutes les méthodes développées pendant les années (1960-1970) consistent à trouver la solution au problème de Riemann. Ces schémas demandaient de la viscosité artificielle explicite pour satisfaire les critères de stabilité, grâce à l'idée de J. Von Neumann et R.D Richtmyer (1950). Cette méthode consiste à modifier les équations du fluide parfait en introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et donne à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles. [4].

Les schémas proposés après l'année 1970 sont basés sur la théorie des caractéristiques et on peut les classer en deux catégories ; division du vecteur du flux (FVS-flux vector splitting) et division de la différence du flux (FDS-flux différence splitting).

Steger et Warming (1979) [3-9] ont été les premiers qu'ont divisé le flux à un point d'écoulement en deux composantes de flux et chaque composante pouvait être

différencier en amont suivant le signe des valeurs propres correspondantes. Pour les équations d'Euler les valeurs propres représentent les vitesses et les directions d'ondes de propagation de l'information dans l'écoulement.

Faisant suite aux travaux précurseurs de Magnus-Yoshihara [7] pour le calcul d'un profil portant en écoulement stationnaire à partir du schéma explicite de Lax-Wendrof, une importante activité a été consacrée au développement des méthodes numériques de résolution des équations d'Euler par le calcul d'écoulement transsoniques avec chocs.

## **I.5 GRANDES LIGNES**

La logique de simulation des écoulements transsoniques autour du profil d'aile gouvernés par les équations d'Euler nous a conduit à suivre le plan de travail suivant :

Dans le premier chapitre d'introduction, nous avons parlé sur les écoulements envisagés et le but de notre travail d'une manière générale alors, que le deuxième chapitre présentera la formulation mathématique du système d'équations d'Euler, où en va rappeler les propriétés mathématiques et algébriques de ces dernières.

Les méthodes de calcul proposées sont basées sur la technique de volumes finis du deuxième ordre dans l'espace, qui sera présentée dans le troisième chapitre.

La discrétisation des équations physiques gouvernant le problème en volumes finis avec une méthode de génération de maillage appropriée, puis les résoudre par un schéma de RUNGE-KUTTA explicite en introduisant la viscosité artificielle d'ordre élevé, pour minimiser les fluctuations qui peuvent se présenter dans les régions de discontinuités ou de forts gradients (chocs), seront développés dans le quatrième chapitre, en particulier, les organigrammes de notre code élaboré représentent la contribution majeure de ce mémoire.

Des confrontations avec d'autres schémas de résolution des équations d'Euler ou avec ceux obtenus en résolvant l'équation du potentiel complet publiés dans la littérature scientifique spécialisée nous permettons de discuter les résultats obtenus, qui font l'objet du cinquième chapitre.

Finalement, une conclusion sera tirée et les perspectives de recherches ultérieures seront présentées.



## CHAPITRE II

# FORMULATION MATHÉMATIQUE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS D'EULER

### II.1 Introduction

La première étape consiste à établir le modèle mathématique de l'écoulement, où on va rappeler les propriétés mathématiques et algébriques d'équations d'EULER qui forment un système hyperbolique non-linéaire, ces dernières sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en posant l'hypothèse d'un fluide non visqueux. Et afin d'exposer un schéma numérique robuste capable de capter les discontinuités (onde de choc) et les régions de fort gradient. La discrétisation spatiale sera effectuée par une technique de volumes finis qui sera présentée dans le troisième chapitre.

### II.2 Hypothèses

Pour étudier le comportement d'un fluide compressible autour d'une géométrie de type profil d'aile, nous allons admettre les hypothèses suivantes :

- Fluide compressible  $\{ \rho \neq \text{constante} \}$
- Fluide non visqueux  $\{ \mu = 0 \}$
- Écoulement bidimensionnel  $\{ 2\text{-D} \}$
- Écoulement stationnaire
- Écoulement adiabatique
- Gaz parfait  $\{ p = \rho \cdot r \cdot T \}$
- Les forces de gravité négligeables

### II.3 Les équations d'Euler

Les équations d'EULER constituent dans l'approximation d'un fluide parfait non-conducteur de la chaleur le modèle mathématique le plus complet [7] en négligeant les termes de dissipation visqueuse dans les équations de NAVIER-STOKES. Les équations d'EULER décrivent les écoulements compressibles non visqueux, dont leur résolution représente un schéma naturel vers la simulation numérique des équations de NAVIER-STOKES [3].

Selon le choix des variables utilisées (conservatives, primitives ou caractéristiques), diverses formulations peuvent être obtenues.

### II.4 Formulation conservative

La forme naturelle des équations d'écoulement est liée aux lois de conservation de masse, de quantités de mouvement et d'énergie totale. La forme conservative des équations d'EULER est nécessaire pour un calcul correct des intensités des discontinuités,[5].

Pour un écoulement bidimensionnel et dans un système de coordonnées cartésiennes, on peut écrire les équations d'EULER d'un écoulement compressible de la façon suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où « U » est le vecteur des quantités conservatives qui possède quatre composantes, écrit sous la forme:

$$U = [ \rho, \rho u, \rho v, \rho E ]^T. \quad (\text{II.2})$$

Les flux convectifs F(U) et G(U) sont les suivants :

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ u(\rho E + P) \end{bmatrix} \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho uv \\ v(\rho E + P) \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Avec :  $\rho$  est la masse volumique.

$u$  et  $v$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse.

$P$  est la pression.

$E$  est l'énergie spécifique totale par unité de volume.

L'énergie interne est reliée à l'énergie totale par :

$$e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{II.4})$$

Le système sera fermé par l'équation d'état pour le gaz parfait :

$$P = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\rho \left[ E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (\text{II.5})$$

Le système (II.1) est hyperbolique non linéaire couplé.

## II.5 Formulation quasi-linéaire

Afin d'illustrer les propriétés mathématiques pour le système d'équation d'EULER, il convient selon Charles Hirsh de réécrire ces équations sous la forme quasi linéaire qui nous permet d'obtenir un système d'équation de premier ordre en terme de vecteur des quantités conservatives  $U$ .

### II.5.1 Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives

En introduisant les deux matrices jacobiennes  $A$  et  $B$ , la formulation quasi-linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\text{avec } A = \frac{\partial F}{\partial U} ; \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \quad (\text{II.7})$$

Les matrices A et B ont les expressions suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 \\ -\rho E + (\gamma-1)\rho u v & \rho E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \rho u \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\rho E + (\gamma-1)\rho v u & -(\gamma-1)uv & \rho E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) & \rho v \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$\vec{u}$  est le vecteur vitesse de composantes  $u, v$  dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ .

### II.5.2 Les matrices jacobiennes pour les variables primitives

Vue l'importance des valeurs propres dans l'étude numérique de système d'équations d'EULER, il est plus commode d'obtenir ces valeurs en partant d'une formulation non conservative basée sur le vecteur des variables primitives  $V$ . Ce dernier est généralement imposé par les conditions aux limites physiques.

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ P \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

En l'absence de la conduction et les sources de chaleur, de plus, les forces extérieures sont négligées, les équations d'EULER peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) E + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \cdot p) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Afin d'obtenir une équation pour la pression, on peut transformer l'équation de la conservation d'énergie [8-10], en introduisant l'hypothèse « d'écoulement isentropique » à travers les relations :

$$\begin{aligned} e &= e(p, s) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s &= c^2 \end{aligned}$$

$c$  : est la célérité du son

$$\delta e = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s \cdot \delta p$$

la dérivée isentropique  $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s$  peut être déduite à partir des relations thermodynamiques :

$$T ds = dh - \frac{\partial p}{\rho} = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

la condition d'isentropie conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s &= \frac{1}{\rho} \\ \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s &= \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s - \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \right) = \frac{p}{\rho^2 c^2} \\ dp &= c^2 d\rho \end{aligned}$$

le système (II.11) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + \rho c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Avec le vecteur de variables primitives  $V$  :

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ (\gamma - 1)\rho[E - 0,5(u^2 + v^2)] \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Ainsi, la formulation quasi-linéaire (II.6) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Les matrices jacobiennes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ont des expressions assez simples que les matrices  $A$  et  $B$  :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & \cdot & \cdot \\ \cdot & u & \cdot & 1/\rho \\ \cdot & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \rho c^2 & \cdot & u \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} v & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & v & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & v & 1/\rho \\ \cdot & \cdot & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

### II.5.3 Les matrices de passage entre les variables conservatives et les variables non-conservatives

La matrice jacobienne de passage de variables conservatives aux variables non-conservatives est définie par :

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (\text{II.17})$$

par suite on trouve :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & \rho & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & \rho & \cdot \\ \vec{u}^2/2 & \rho u & \rho v & 1/\gamma - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

puisque le déterminant de  $M = \frac{\rho}{\gamma - 1} \neq 0 (\gamma > 1)$ , il existe une matrice inverse  $M^{-1}$  tel que :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & \cdot & \cdot \\ -\frac{v}{\rho} & \cdot & \frac{1}{\rho} & \cdot \\ \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) & -(\gamma - 1)u & -(\gamma - 1)v & (\gamma - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

$$\det M^{-1} = \frac{\gamma - 1}{\rho} > 0$$

l'identification entre les deux formulations (II.6) et (II.14) nous donne :

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1}AM \\ \tilde{B} = M^{-1}BM \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A = M\tilde{A}M^{-1} \\ B = M\tilde{B}M^{-1} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

## II.6 Formulation caractéristique

Les schémas numériques et leurs propriétés, ainsi que la formulation mathématique des équations sont dominés par le caractère hyperbolique (par rapport au temps) d'équations d'Euler.

Du fait que les phénomènes de base sont de nature convective ou de propagation, les caractéristiques de système d'équations d'Euler et leurs propriétés jouent un rôle essentiel dans la description mathématique et ainsi dans plusieurs techniques numériques de discrétisation, en particulier dans l'étude des conditions aux limites physiques et numériques. Cependant une telle analyse nécessite la

connaissance des valeurs propres et les vecteurs propres associés. Pour simplifier la présentation, on considère ici le cas mono dimensionnel pour lequel les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.21})$$

Le cas bidimensionnel est traité en détail dans la référence [8].

si  $\lambda_j$  désigne les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  obtenue à partir de :

$$\det|\lambda I - \tilde{A}| = 0$$

ou :

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II.22})$$

un calcul direct donne :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Avec  $\Lambda$  est la matrice diagonale de toutes les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + c \\ \lambda_3 &= u - c \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Du fait du caractère hyperbolique de l'équation (II.21), la matrice  $\tilde{A}$  peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{A} = L\Lambda L^{-1}$$



$L^{-1}$  désigne la matrice de vecteurs propres gauches associés à chaque valeur propre  $\lambda_j$  qui nous permet de définir une nouvelle ensemble des variables dites « variables caractéristiques  $w$  » en partant des variables conservatives  $U$  ou de variables primitives  $V$  à l'aide des matrices de passage  $P$  et  $L$  :

$$\delta w = L^{-1} \delta V$$

$$\delta w = P^{-1} \delta U$$

Où l'indice  $\delta$  indique une variation temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  ou spatiale  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

La figure (II.1) résume les relations mathématiques entre les trois différents groupes de variables :

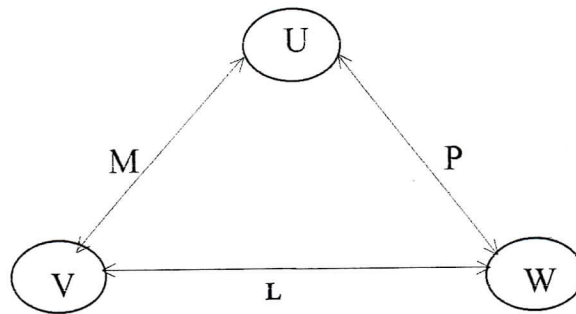


Figure II.1 Relation entre les trois types de variables, conservatives  $U$ , primitives  $V$  et caractéristiques  $W$ .

Ainsi, après développement, on obtient les différentes matrices de passage :

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Les matrices  $P$  et  $P^{-1}$  en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui de  $L$  et  $L^{-1}$  en variables primitives respectivement ; elles diagonalisent la matrice  $A$  ( $A = P\Lambda P^{-1}$ ) :

$$P^{-1} = L^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1) \frac{u}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ \frac{1}{\rho c} \left( \frac{\gamma-1}{2} u^2 - uc \right) & \frac{1}{\rho c} [c - (\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ -\frac{1}{\rho c} \left( \frac{\gamma-1}{2} u^2 + uc \right) & \frac{1}{\rho c} [c + (\gamma-1)u] & -\frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$



$$P = ML = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 4 & \frac{\rho}{2c}(u+c) & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c} \left( \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right) & -\frac{\rho}{2c} \left( \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Le vecteur des variables caractéristiques (ou les variables de Riemann) s'écrit :

$$\delta w = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta u + \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta v - \frac{1}{c^2} \delta p \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Les trois composantes de vecteurs  $\delta w$  (en bidimensionnel, quatre composantes) se propagent respectivement le long de caractéristiques  $C_0, C_+$  et  $C_-$  avec des vitesses de propagation associées  $u, u+c$  et  $u-c$  (sont les valeurs propres du système) figure II.2.

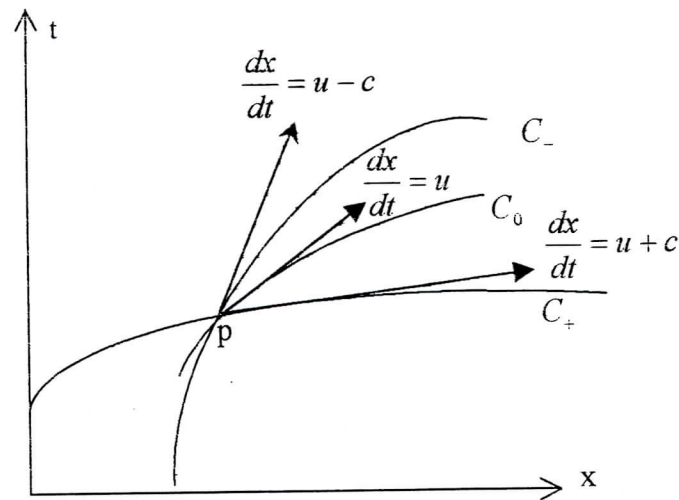


Figure II.2 Les lignes caractéristiques dans le cas mono-dimensionnel.

L'intérêt pratique de variables caractéristiques réside essentiellement dans l'étude des conditions aux limites selon le régime d'écoulement ; subsonique ou supersonique (le nombre de conditions physiques à imposer à l'entrée ou à la sortie du domaine de calcul seront détaillées dans le chapitre IV).

## CHAPITRE III

# METHODE DES VOLUMES FINIS ET LES DISCRETISATIONS CONSERVATIVES APPLIQUÉES AUX EQUATIONS D'EULER

### III.1 Introduction

La méthode des volumes finis a été introduite dans le domaine de la dynamique des fluides numérique par McDonald (1971), Mac Cormack et Paullay (1972) pour la résolution des équations d'Euler bidimensionnelles dans le temps (time dependent ), et étendue par Rizzi et Inouye (1973) pour l'écoulement tridimensionnel. Volumes finis est le nom donné pour la technique par laquelle la forme intégrale des lois de conservation sont discrétisées directement dans l'espace physique. Elle peut être considérée comme une méthode des différences finies appliquée à la forme conservative différentielle pour les lois de conservation [6]. la méthode des volumes finis peut être soit, de type « élément centré », ou de type à « élément vertex », selon les points de calcul représentant les grandeurs physiques de l'écoulement qui sont pris aux centres ou aux sommets des mailles [11].

La méthode à l'avantage d'être applicable directement dans un maillage arbitraire représentant le plan physique sans aucune transformation nécessaire, où un grand nombre des options sont ouvertes pour la définition des volumes de contrôle autour du quels les lois de conservation sont exprimées. Modifiant la forme et la position des volumes de contrôle associés au point de maillage donné, aussi bien qu'en variant efficacement les règles pour l'évaluation du flux à travers les surfaces de contrôle donnent une flexibilité considérable pour la méthode des volumes finis.

En outre, par la description directe de la forme intégrale des lois de conservation, nous pouvons assurer la conservation des quantités fondamentales, quantités de mouvement et d'énergie resteront aussi conservées au niveau discontinu [6]. Ceci est la propriété fondamentale pour les schémas numériques qui seront discutés ultérieurement.

### III.2 Discrétisations conservatives

La méthode des volumes finis consiste à appliquer les lois de conservation intégrale sur chaque cellule élémentaire  $\Omega_{ij}$  d'un maillage construit dans le domaine  $\Omega$ . La forme générale de la quantité scalaire  $U$ , avec les sources volumiques  $Q_v$  sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} Q_v d\Omega \quad (\text{III.1})$$

L'importance de cette formulation réside dans la présence de la surface intégrale, et le fait que la variation de  $U$  par rapport au temps à l'intérieur du volume dépend seulement des valeurs de flux à travers les surfaces.

Donc pour une subdivision arbitraire à l'intérieur du volume  $\Omega$ , disant trois subvolumes, nous pouvons écrire la loi de conservation de chaque subvolume et déduire de la lois de conservation globale par l'addition des lois de conservation des trois subvolumes.

En effet, d'après la figure III.1, l'équation (III.1) appliqué aux trois subvolumes  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_1} U d\Omega + \oint_{ABCA} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Omega_1} Q_v d\Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_2} U d\Omega + \oint_{DEBD} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Omega_2} Q_v d\Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_3} U d\Omega + \oint_{AEDA} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Omega_3} Q_v d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

En sommant les intégrales de surface, la contribution des lignes internes ADB et DE apparaît toujours deux fois mais avec des signes opposés, et seront éliminés avec l'addition des lois de conservation des trois subvolumes.

En effet pour le volume  $\Omega_2$  nous avons une contribution des flux

$$\int_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

tandis que pour  $\Omega_3$  nous avons un terme similaire :

$$\int_{ED} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III.3})$$

Cette propriété essentielle a été satisfaite par la discrétisation numérique des contributions de flux afin que le schéma soit conservatif. Si ce n'est pas le cas, et après la sommation des équations discrétisées autour de certain nombre de cellules adjacentes de maillage, l'équation résultante contient les contributions de flux à partir de l'intérieur de la cellule totale, la discrétisation est dite non-conservative, et les contributions des flux internes apparaissent comme sources volumiques numériques internes.

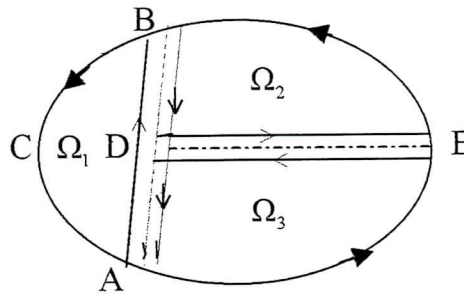


Figure III.1 Lois de conservation pour les sub-volumes du volume  $\Omega$

Nous allons illustrer dans ce qui suit la loi de conservation en forme unidimensionnelle, où  $f$  est la composante du vecteur de flux suivant  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = q \quad (\text{III.4})$$



écoulement discontinu comme l'écoulement transsonique avec onde de choc, ces termes sources numériques peuvent devenir importants à travers la discontinuité et donnent une amplification de l'erreur. [6]

Donc afin d'obtenir un calcul numérique des discontinuités correctes (tel que les relations de Rankine – Hugoniot pour les équations d'Euler ), il a été montré par Lax (1954) qu'il est nécessaire de discrétiser la forme conservative des équations d'écoulement.

L'importance de cette formalisation de la condition de conservativité est donnée par le théorème fondamental de Lax et Wendroff (1960) comme suit :  
Si la solution  $U_i$  de l'équation discrétisée converge aux limites presque partout aux quelques fonctions  $u(x, t)$  quand  $\Delta x, \Delta t$  tendent vers zéro, alors  $u(x,t)$  est la solution faible de l'équation (III.4).

### III.3 Méthode de volumes finis

Les lois de conservation intégrales sont écrites pour un volume discret ,

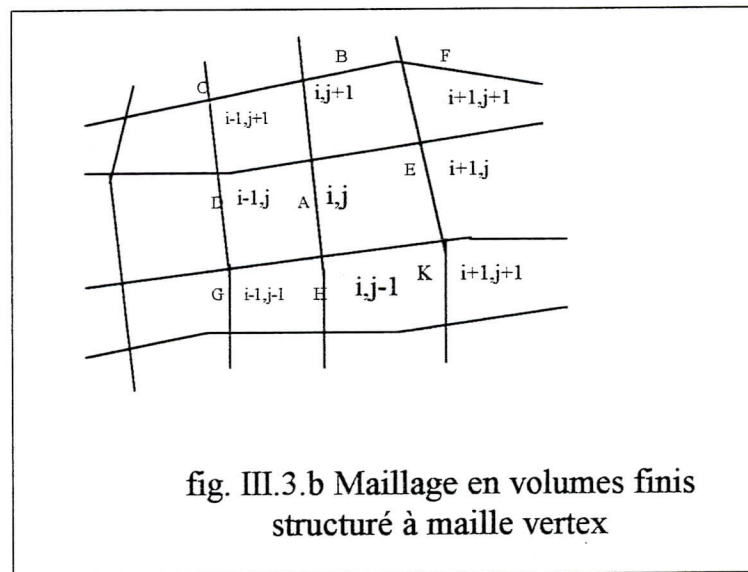
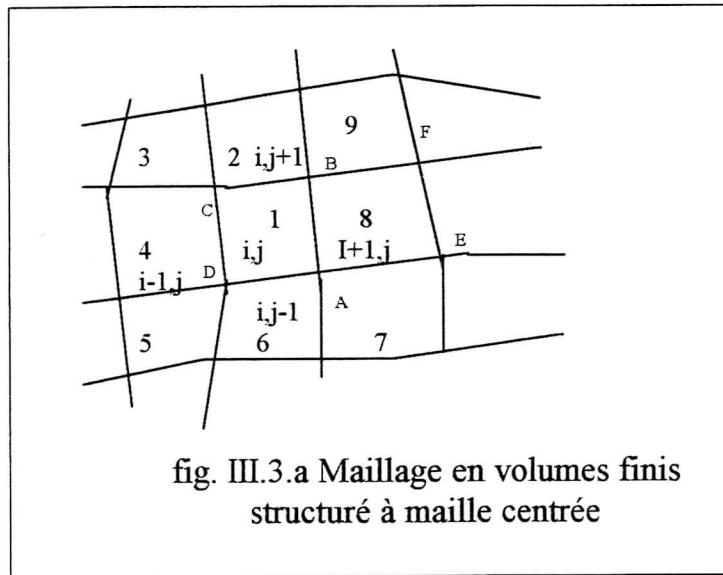
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} Q_v d\Omega \quad (\text{III.10})$$

et appliqués à un volume de contrôle  $\Omega_j$  , quand l'équation discrétisée associée avec  $U_j$  a été définie, l'équation (III.10) est remplacée par la forme discontinue :

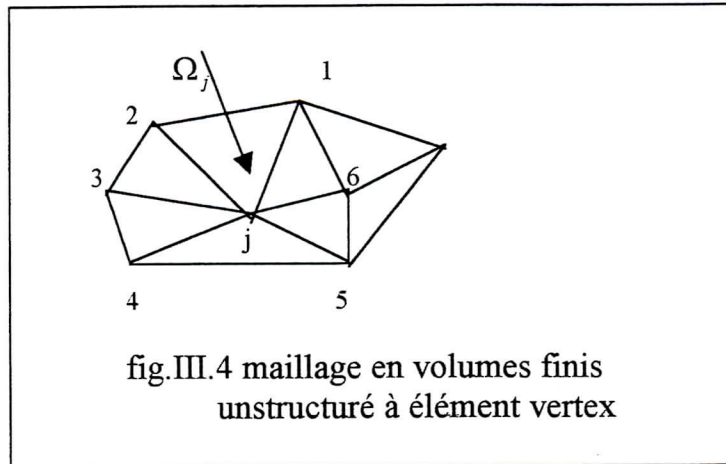
$$\frac{\partial}{\partial t} (U_j \Omega_j) + \sum_{\text{cot } es} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_{vj} \cdot \Omega_j \quad (\text{III.11})$$

où la somme des termes de flux se rapportant à tous les cotés externes de l'élément de contrôle  $\Omega_j$  (voir la fig.III.3(a)) et en cellule  $l(i,j)$ . Nous voulons identifier  $U_j$  avec  $U_{ij}$ ,  $\Omega_j$  avec la surface ABCD, et les termes de flux sont sommés sur les quatre cotés AB, BC, CD, DA.





Sur le maillage de la figure III.4,  $\Omega_j$  est la surface des triangles qui ont le nœud  $j$  en commun, et la sommation des flux étendus au-dessus des six cotés 12, 23, 34, 45, 56, 61. C'est la formulation générale de la méthode de volumes finis et l'usage consiste à définir pour  $\Omega_j$  sélecter, comment estimer le volume et les surfaces de face de la cellule du volume de contrôle  $\Omega_j$ , et comment approximer le flux aux faces, nous discuterons dans ce qui suit quelques options les plus courantes, en deux et trois dimensions.



Les contraintes suivantes sur le choix des volumes  $\Omega_j$  pour la méthode de volumes finis ont été satisfaites:

- \*) Leur somme devra couvrir le domaine  $\Omega$  complet.
- \*)  $\Omega_j$  adjacent peut chevaucher si chaque surface interne  $\Gamma_i$  est commune entre chaque deux volumes.
- \*) Les flux le long de la surface de la maille sont calculés par une formule indépendante de la maille dans laquelle ils sont considérés.

### III.4 Méthode de volumes finis bidimensionnel

L'équation (III.10) considérée pour la cellule de contrôle ABCD de la (fig. III.3.a) peut être écrite comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} U d\Omega + \oint_{ABCD} (f dy - g dx) = \int_{\Omega_{ij}} Q_v d\Omega \quad (\text{III.12})$$

Où  $f$  et  $g$  sont les composantes cartésiennes du vecteur flux  $\vec{F}$ . L'équation (III.12) est la plus adéquate pour une discrétisation directe.

Le vecteur surface pour un coté AB peut être défini comme :

$$\vec{S}_{AB} = \Delta y_{AB} \vec{I}_x - \Delta x_{AB} \vec{I}_y = (y_B - y_A) \vec{I}_x - (x_B - x_A) \vec{I}_y \quad (\text{III.13})$$

et nous obtenons l'équation de volumes finis pour la cellule  $\Omega_{ij}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\Omega)_{ij} + \sum_{ABCD} [f_{AB}(y_B - y_A) - g_{AB}(x_B - x_A)] = (Q_v\Omega)_{ij} \quad (\text{III.14})$$

La somme  $\sum_{ABCD}$  étendue sur les quatre cotés du quadrilatéral ABCD.

Pour un quadrilatéral ABCD général, la surface  $\Omega$  peut être évaluée à partir du produit vectoriel des diagonaux, voir la figure (III.3).

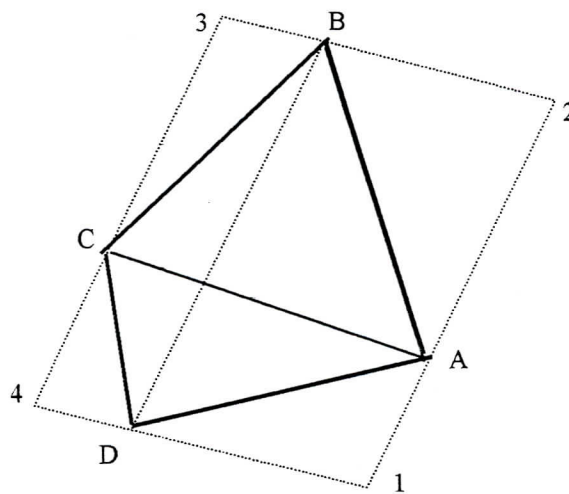


Fig III.3 Aire du plan arbitraire quadrilatéral.

Le parallélogramme 1234 construit sur les diagonales est égal à deux fois la surface du quadrilatéral ABCD.

En effet avec  $\vec{x}_{AB} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$  où  $\vec{x}_A$  est le vecteur position du point A :

$$\begin{aligned} \Omega_{ABCD} &= \frac{1}{2} \left| \vec{x}_{AC} * \vec{x}_{BD} \right| \\ &= \frac{1}{2} [(x_C - x_A)(y_D - y_B) - (y_C - y_A)(x_D - x_B)] \\ &= \frac{1}{2} [\Delta x_{AC} \cdot \Delta y_{BD} - \Delta x_{BD} \cdot \Delta y_{AC}] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Le coté droite de l'équation (III.15) est positif pour la cellule ABCD, ou A,B,C,D sont positionnés dans le sens anti horaire

avec la différence centrale appliquée au maillage de la fig.III.2, l'équation discrétisée suivante est obtenue au point  $i$ .

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} = q_i \quad (III.5)$$

la même discrétisation est appliquée au point  $(i+1)$  donne :

$$\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t} + \frac{f_{i+3/2} - f_{i+1/2}}{\Delta x} = q_{i+1} \quad (III.6)$$

et pour  $(i-1)$  :

$$\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t} + \frac{f_{i-1/2} - f_{i-3/2}}{\Delta x} = q_{i-1} \quad (III.7)$$

La somme de ces trois équations est la discrétisation consistante de la loi de conservation pour l'élément  $AB \equiv (i-3/2, i+3/2)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i + u_{i+1} + u_{i-1}}{3} \right) + \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3\Delta x} = \frac{1}{3} (q_i + q_{i+1} + q_{i-1}) \quad (III.8)$$

Donc les contributions du flux aux points internes sont annulées, ceci est appelé parfois « propriété télescopique » pour les termes de flux (Roach 1972).

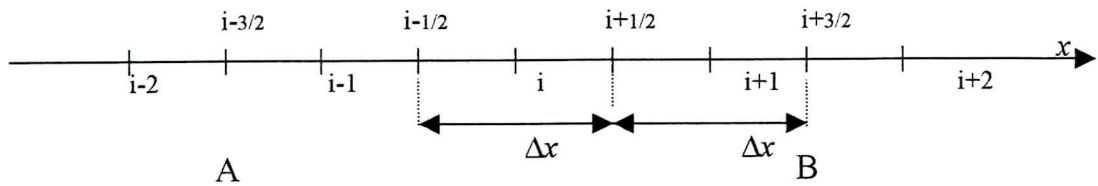


Figure III.2 Subdivision unidimensionnelle de l'espace

d'autre part, la forme non-conservative peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = q \quad (III.9)$$

Cependant, l'expérience numérique et les comparaisons constamment montrent, que les formulations non-conservatives sont généralement moins efficaces que les conservatives, et particulièrement en présence d'un fort gradient. Pour un

écoulement discontinu comme l'écoulement transsonique avec onde de choc, ces termes sources numériques peuvent devenir importants à travers la discontinuité et donnent une amplification de l'erreur. [6]

Donc afin d'obtenir un calcul numérique des discontinuités correctes (tel que les relations de Rankine – Hugoniot pour les équations d'Euler ), il a été montré par Lax (1954) qu'il est nécessaire de discrétiser la forme conservative des équations d'écoulement.

L'importance de cette formalisation de la condition de conservativité est donnée par le théorème fondamental de Lax et Wendroff (1960) comme suit :

Si la solution  $U_i$  de l'équation discrétisée converge aux limites presque partout aux quelques fonctions  $u(x, t)$  quand  $\Delta x, \Delta t$  tendent vers zéro, alors  $u(x,t)$  est la solution faible de l'équation (III.4).

### III.3 Méthode de volumes finis

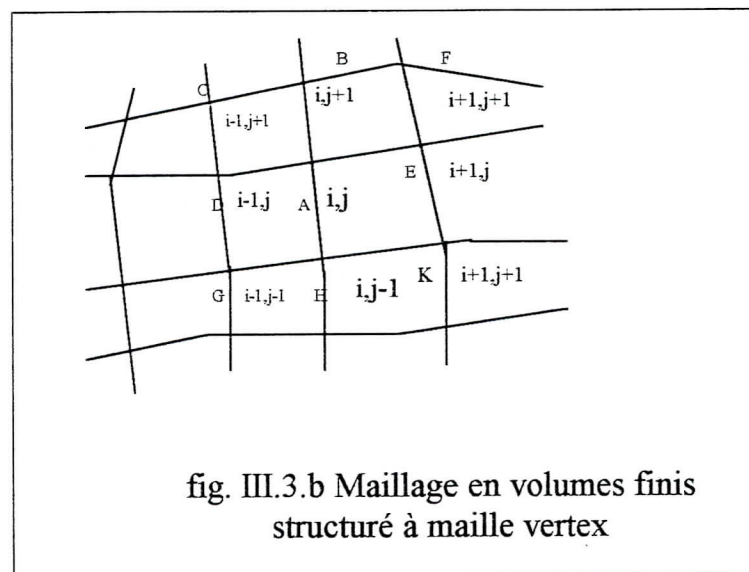
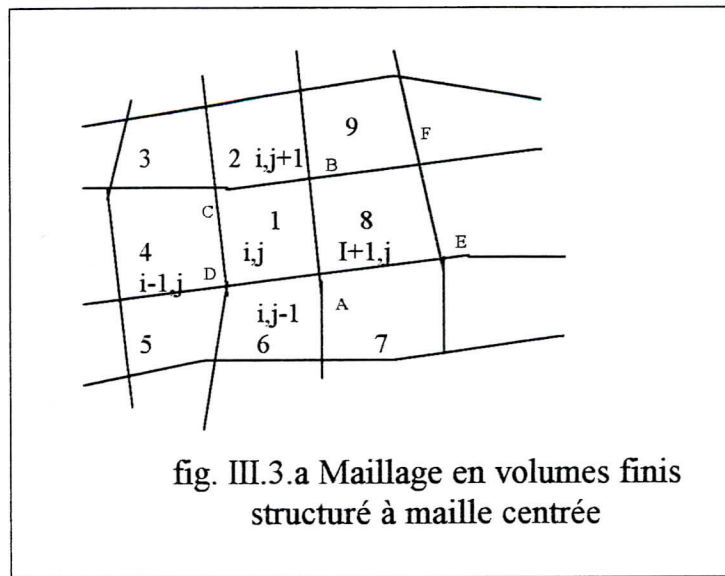
Les lois de conservation intégrales sont écrites pour un volume discret ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} Q_v d\Omega \quad (III.10)$$

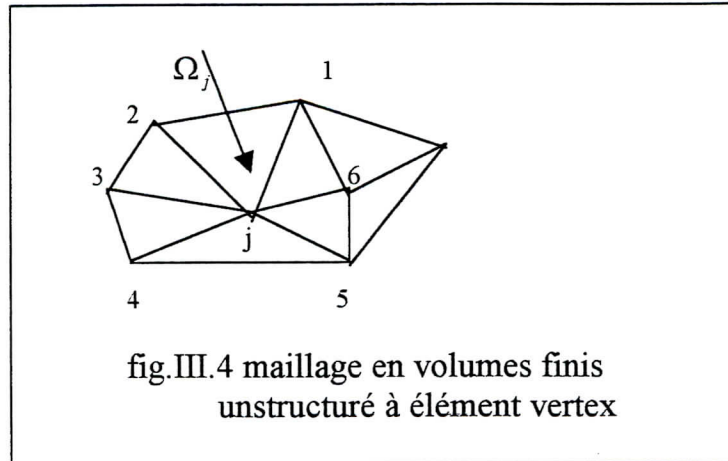
et appliqués à un volume de contrôle  $\Omega_j$  , quand l'équation discrétisée associée avec  $U_j$  a été définie, l'équation (III.10) est remplacée par la forme discontinue :

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_j \Omega_j) + \sum_{\text{côtés}} (\vec{F} \cdot \vec{S}) = Q_{v_j} \cdot \Omega_j \quad (III.11)$$

où la somme des termes de flux se rapportant à tous les cotés externes de l'élément de contrôle  $\Omega_j$  (voir la fig.III.3(a)) et en cellule  $l(i,j)$ . Nous voulons identifier  $U_j$  avec  $U_{ij}$ ,  $\Omega_j$  avec la surface ABCD, et les termes de flux sont sommés sur les quatre cotés AB, BC, CD, DA.



Sur le maillage de la figure III.4,  $\Omega_j$  est la surface des triangles qui ont le nœud  $j$  en commun, et la sommation des flux étendus au-dessus des six cotés 12, 23, 34, 45, 56, 61. C'est la formulation générale de la méthode de volumes finis et l'usage consiste à définir pour  $\Omega_j$  sélectionner, comment estimer le volume et les surfaces de face de la cellule du volume de contrôle  $\Omega_j$ , et comment approximer le flux aux faces, nous discuterons dans ce qui suit quelques options les plus courantes, en deux et trois dimensions.



Les contraintes suivantes sur le choix des volumes  $\Omega_j$  pour la méthode de volumes finis ont été satisfaites:

- \*) Leur somme devra couvrir le domaine  $\Omega$  complet.
- \*)  $\Omega_j$  adjacent peut chevaucher si chaque surface interne  $\Gamma_i$  est commune entre chaque deux volumes.
- \*) Les flux le long de la surface de la maille sont calculés par une formule indépendante de la maille dans laquelle ils sont considérés.

### III.4 Méthode de volumes finis bidimensionnel

L'équation (III.10) considérée pour la cellule de contrôle ABCD de la (fig. III.3.a) peut être écrite comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} U d\Omega + \oint_{ABCD} (f dy - g dx) = \int_{\Omega_{ij}} Q_v d\Omega \quad (\text{III.12})$$

Où  $f$  et  $g$  sont les composantes cartésiennes du vecteur flux  $\vec{F}$ . L'équation (III.12) est la plus adéquate pour une discrétisation directe.

Le vecteur surface pour un coté AB peut être défini comme :

$$\vec{S}_{AB} = \Delta y_{AB} \vec{I}_x - \Delta x_{AB} \vec{I}_y = (y_B - y_A) \vec{I}_x - (x_B - x_A) \vec{I}_y \quad (\text{III.13})$$

et nous obtenons l'équation de volumes finis pour la cellule  $\Omega_{ij}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\Omega)_{ij} + \sum_{ABCD} [f_{AB}(y_B - y_A) - g_{AB}(x_B - x_A)] = (Q_v\Omega)_{ij} \quad (\text{III.14})$$

La somme  $\sum_{ABCD}$  étendue sur les quatre cotés du quadrilatéral ABCD.

Pour un quadrilatéral ABCD général, la surface  $\Omega$  peut être évaluée à partir du produit vectoriel des diagonaux, voir la figure (III.3).

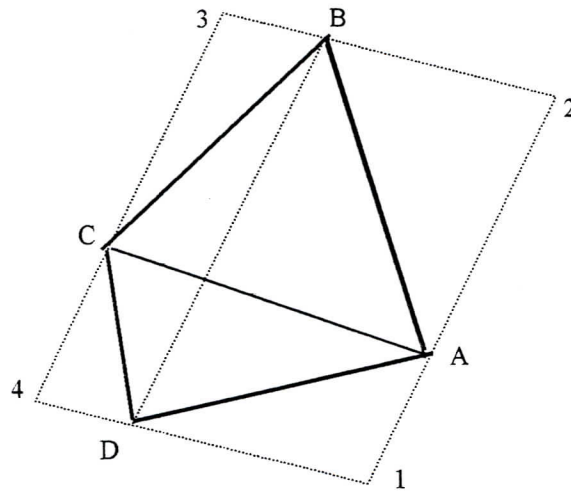


Fig III.3 Aire du plan arbitraire quadrilatéral.

Le parallélogramme 1234 construit sur les diagonales est égal à deux fois la surface du quadrilatéral ABCD.

En effet avec  $\vec{x}_{AB} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$  où  $\vec{x}_A$  est le vecteur position du point A :

$$\begin{aligned} \Omega_{ABCD} &= \frac{1}{2} \left| \vec{x}_{AC} * \vec{x}_{BD} \right| \\ &= \frac{1}{2} [(x_C - x_A)(y_D - y_B) - (y_C - y_A)(x_D - x_B)] \\ &= \frac{1}{2} [\Delta x_{AC} \cdot \Delta y_{BD} - \Delta x_{BD} \cdot \Delta y_{AC}] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Le coté droite de l'équation (III.15) est positif pour la cellule ABCD, ou A,B,C,D sont positionnés dans le sens anti horaire



### III.5 Evaluation des flux à travers les faces d'une cellule

L'évaluation des composantes du flux le long des cotés, tel que  $f_{AB}$ ,  $g_{AB}$  dépend du schéma choisi, et aussi de la position des variables de l'écoulement avec respect du maillage.

Nous pouvons distinguer essentiellement entre les schémas de discrétisation centrés et décentrés. Les schémas centrés sont basés sur les estimations de flux local, tandis que le schéma décentré détermine les flux de face de cellule en accordant à la propagation directe des composantes de l'onde.

Pour le schéma centré et la méthode des volumes finis à cellule centrée, les alternatives suivantes peuvent être considérées :

\*) La moyenne du flux :

$$f_{AB} = \frac{1}{2}(f_{i,j} + f_{i+1,j}) \quad (\text{III.16})$$

$$f_{ij} = f(U_{ij}) \quad (\text{III.17})$$

\*) Comme les composantes du flux sont généralement des fonctions non linéaires de  $U$ , le choix suivant n'est pas identique à l'équation (III.16) :

$$f_{AB} = f\left(\frac{U_{ij} + U_{i+1,j}}{2}\right) \quad (\text{III.18})$$

\*) On prend  $f_{AB}$  comme la moyenne du flux en A et B.

$$f_{AB} = \frac{1}{2}(f_A + f_B) \quad (\text{III.19})$$

où l'un ou l'autre des variables est évaluée en A et B et :

$$U_A = \frac{1}{4}(U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} + U_{i,j-1}) \quad (\text{III.20})$$

$$f_A = f(U_A) \quad (\text{III.21})$$



Avec les flux sont donnés par :

$$f_A = \frac{1}{4}(f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1}) \quad (\text{III.22})$$

pour les schémas centrés et la méthode de volumes finis à maille « vertex », les équations (III.18) et (III.19) sont des approximations directes de flux  $f_{AB}$ .

Le choix de (III.18) correspond à l'application de la formule trapézoïdale pour l'intégrale.

$$\int_{AB} f dy = (f_A + f_B)(y_B - y_A) / 2$$

Par la sommation des contributions de ces intégrales sur les quatre cotés de la cellule ABCD de la figure (III.3.b), nous obtenons les discrétisations et les termes du flux donnés par :

$$\oint_{ABCD} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} [(f_A - f_C)\Delta y_{DB} + (f_B - f_D)\Delta y_{AC} - (g_A - g_C)\Delta x_{DB} - (g_B - g_D)\Delta x_{AC}] = 0 \quad (\text{III.23})$$

Cela aussi montre l'équivalence entre le calcul de flux par l'approche des volumes finis à maille « vertex » avec la méthode de Galerkin des éléments finis aux triangles linéaires ou bilinéaires quadrilatéraux identiques à la formule en différences finies.

En effet, avec ;

$$\begin{aligned} \Delta y_{AB} &= y_{i+1/2, j+1/2} - y_{i+1/2, j-1/2} = \Delta y \\ \Delta x_{AB} &= 0 & \Delta x_{BC} &= -\Delta x \\ \Omega_{ij} &= \Delta x \cdot \Delta y & \Delta y_{BC} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

En écrivant  $f_{AB} = f_{i+1/2, j}$  idem pour d'autres composantes on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{ij} \Delta x \Delta y + (f_{i+1/2, j} - f_{i-1/2, j}) \Delta y + (g_{i, j+1/2} - g_{i, j-1/2}) \Delta x = Q_{vij} \Delta x \Delta y \quad (\text{III.25})$$

Après la division par  $\Delta x \Delta y$  cela se réduit à la forme différentielle centrale.

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{(f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j})}{\Delta x} + \frac{g_{i,j+1/2} - f_{i,j-1/2}}{\Delta y} = Q_{vij} \quad (\text{III.26})$$

Nous allons encore définir comment calculer les composantes de flux aux centres des cotés  $f_{i+1/2,j}$ ,  $g_{i+1/2}$ . Avec le choix appliqué à la figure (III.3.a), l'équation (III.26) devient :

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2\Delta y} = Q_{vij} \quad (\text{III.27})$$

bien que l'équation (III.19) avec l'équation (III.22) conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{4} \left[ 2 \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right] + \\ \frac{1}{4} \left[ 2 \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \frac{g_{i-1,j+1} - g_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right] = Q_{vij} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

La méthode des volumes finis centrale donc conduit aux discrétisations en espace, efficace en 2<sup>eme</sup> ordre en maillage cartésien. On remarque que  $f_{ij}$ ,  $g_{ij}$  n'apparaît pas dans l'équation (III.27), et si  $(i+j)$  est paire, cette équation contient seulement les points avec  $(i+j)$  impair. En effet, les nœuds de nombre pair et impair sont séparés, et cela peut conduire aux oscillations dans le schéma numérique.

## CHAPITRE IV

# FORMULATION NUMERIQUE ET SCHEMAS DE RUNGE-KUTTA

### IV.1 Introduction

Une variété des schémas implicite et explicite en mécanique des fluides ont été récemment développés pour la résolution des équations d'Euler [12].

Le schéma explicite à multi-pas proposé par Jamsson, Schmidt et Turkel pour la résolution des systèmes hyperboliques de lois de conservation a été prouvé comme l'un des schémas les plus efficaces. Ce schéma particulièrement adapté à un traitement précis et efficace des problèmes stationnaires régis par les équations d'Euler, il inclut les termes dissipatifs artificiels qui rendent les résultats précis du premier ordre.

Dans ce chapitre nous allons présenter le schéma à multi-pas de temps de Runge-Kutta avec la conjonction d'une technique algébrique de maillage pour réduire le temps de convergence d'algorithme de calcul vers les solutions de l'état stationnaire des équations d'Euler.

### IV.2 Formulation des équations et la discrétisation en espace

L'idée fondamentale du schéma à multi pas est de séparer les procédures de discrétisation de l'espace et de temps. La discrétisation en espace consiste à obtenir des équations différentielles ordinaires qui peuvent être résolues par un schéma à multi-pas en temps. La reformulation du schéma à pas de temps pour l'utiliser avec maillages multiples préserve la même solution en état stationnaire.

Le schéma de discrétisation en espace est développé en exprimant les équations d'EULER à la forme intégrale où  $p, \rho, u, v, E$  et  $H$  indiquent la pression, la masse volumique, les composantes cartésiennes de la vitesse, énergie totale et l'enthalpie totale pour un gaz parfait.

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{IV.1})$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (\text{IV.2})$$

ou  $\gamma$  est le rapport de la chaleur spécifique.

Les équations d'EULER peuvent être écrites comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S U d\vec{s} + \int_{\partial S} (f \cdot dy - g \cdot dx) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Pour le domaine  $S$  avec la limite  $\partial S$

$U$  représente le vecteur des quantités conservatives.

$f$  et  $g$  sont les flux selon les directions des  $x$  et des  $y$ .

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.4})$$

Le domaine computationnel est divisé en mailles quadrilatérales repérées par les indices  $(i, j)$ . Comme illustré sur la figure.1, les variables dépendantes sont maintenant au centre de chaque maille. Le système des équations différentielles ordinaires est obtenu par l'application de l'équation (IV.3) séparément pour chaque maille [12]. Donc elle a la forme :

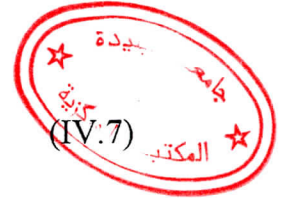
$$\frac{\partial}{\partial t} (S_{i,j}, U_{i,j}) + Q_{i,j} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

Où  $S_{i,j}$  est l'aire de la maille, et  $Q_{i,j}$  est le flux net sortant de la maille. Le flux suivant la direction des  $x$ , est par exemple :

$$\sum_{k=1}^4 Q_k (\rho u)_k + \Delta y_k p_k \tag{IV.6}$$

Avec  $Q_k$  est le flux de vitesse :

$$Q_k = \Delta y_k u_k - \Delta x_k v_k$$



La somme est faite sur les quatre cotés de la maille. Chaque quantité est évaluée comme les valeurs moyennes dans la maille sur l'un ou l'autre coté de profil.

$$(\rho u)_i = \frac{1}{2} \{ (\rho u)_{i,j} + (\rho u)_{i,j-1} \} \tag{IV.8}$$

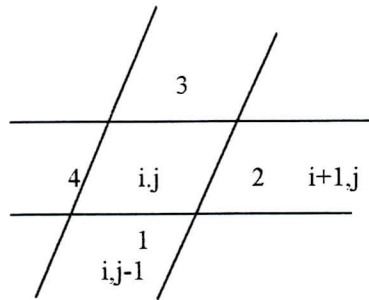


Figure IV.1 Discrétisation en espace

### IV.3 Les termes dissipatifs

L'apparence des dandinements aux régions contenant des forts gradients de pression au voisinage des ondes de choc ou au point d'arrêt pose un problème difficile, A.Jamson a trouvé une solution tout à fait générale grâce à l'idée de la viscosité artificielle du à l'idée de Von Neumann et Richtmyer (1950). Cette méthode consiste à modifier les équations du fluide en introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et à donner à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles.

$$\frac{d}{dt}(hU) + QU - DU = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Où  $Q$  : est l'opérateur de discrétisation spatiale défini par l'équation (IV.7)

$D$  : est l'opérateur dissipatif.

L'expériences numériques montre que la forme effective de  $DU$  est un mélange de deuxième et quatrième différences avec des coefficients qui dépendent du gradient de pression local.

La construction des termes dissipatifs pour chacun des quatre variables conservatives est similaire voir (Appendice C), ainsi :

Pour l'équation de la masse volumique on a :

$$D\rho = D_x\rho + D_y\rho \quad (\text{IV.10})$$

où  $D_x\rho$  et  $D_y\rho$  sont les contributions dissipatives selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Avec :

$$\begin{aligned} D_x\rho &= d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j} \\ D_y\rho &= d_{i,j+1/2} - d_{i,j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Tous les termes sur les membres droits ont une forme similaire.

Par exemple :

$$d_{i+1/2,j} = \frac{h_{i+1/2,j}}{\Delta t} \left\{ \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} (\rho_{i+2,j} - 3\rho_{i+1,j} + 3\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}) \right\} \quad (\text{IV.12})$$

où  $h$  est le volume de la maille.

Les coefficients  $\varepsilon^{(2)}$  et  $\varepsilon^{(4)}$  sont adaptés à l'écoulement, définis comme suit :

$$v_{ij} = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{ij} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j}| + 2|p_{i,j}| + |p_{i-1,j}|} \quad (\text{IV.13})$$



aussi :

$$\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} = R_{\max}^{(2)}(v_{i+1,1}, v_{i,j}) \quad (\text{IV.14})$$

et :

$$\varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} = \max(0, (R^{(4)} - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)})) \quad (\text{IV.15})$$

Les valeurs typiques des constantes  $R^{(2)}$  et  $R^{(4)}$  sont :

$$R^{(2)} = \frac{1}{4}, \quad R^{(4)} = \frac{1}{256}. \quad (\text{IV.16})$$

Les termes dissipatifs pour les équations restantes sont obtenus en remplaçant  $\rho u$ ,  $\rho v$  et  $\rho E$  où  $\rho H$  à la place de  $\rho$  dans cette formule.

Le rapport  $h/\Delta t$  dans l'équation (IV.12) conforme à l'inclusion de l'aire  $h$  de la maille aux variables dépendantes de l'équation (IV.9).

Comme l'équation (IV.12) contient des différences indivisibles, il suit que si  $\varepsilon^{(2)} = \theta(\Delta x^2)$  et  $\varepsilon^{(4)} = \theta(1)$ , les termes ajoutés sont d'ordre  $\Delta x^3$ , cela sera le cas dans la région où l'écoulement est tranquilisé. Au voisinage de l'onde de choc  $\varepsilon^{(2)} = \theta(1)$ , et le schéma se comporte localement comme un schéma précis de premier ordre [12].

#### IV.4 Schémas à itération en temps

Les méthodes à pas de temps stable de l'équation (IV.9) peuvent être un modelés sur des schémas standards des équations différentielles ordinaires. Les schémas multipas à deux niveaux de types Runge-Kutta ont l'avantage qu'ils ne nécessitent aucune procédure de démarrage spéciale, au contraste comme aux méthodes de Adams Bashforth par exemple. Les pas supérieurs peuvent être utilisés pour :

- \* pour améliorer la précision, ou
- \* pour étendre la région de stabilité.

L'avantage de cette approche et que les propriétés de ces schémas ont été largement investiguées, et ils sont disponibles dans la littérature spécialisée, pour les équations différentielles ordinaires.

Considérons le système linéaire d'équations :

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad (\text{IV.17})$$

$A$  : peut être écrite sous l'expression  $A = T\Lambda T^{-1}$  où  $T$  est la matrice de vecteur propre de  $A$ , et  $\Lambda$  le diagonal. Aussi en mettant  $v = T^{-1}U$  rendre les équations séparées.

$$\frac{d}{dt} v_k + \lambda_k v_k = 0 \quad (\text{IV.18})$$

pour chaque variable dépendant  $v_k$ , la région de stabilité est la région du plan complexe contenant les valeurs de  $\lambda dt$  où le schéma est stable. Considérons maintenant, le problème modèle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

Avec un maillage uniforme et un intervalle  $\Delta x$ , et avec les termes dissipatifs d'ordre  $\Delta x$ ,

ce dernier peut être réduit à un système ou à des équations différentielles ordinaires par

l'introduction des approximations de différence centrale pour les dérivées  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  :

$$\frac{dU_i}{dt} + \frac{a}{\Delta x} (U_{i+1} - U_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{\Delta x} (U_{i+1} - 2U_i - U_{i-1}) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

prenant la transformation de Fourier en espace :

$$\hat{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{iwx} dx \quad (\text{IV.21})$$

elle devient :

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + \lambda \hat{u} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{où } \lambda = \frac{1}{\Delta x} (i a \sin w \Delta x - 4\varepsilon \sin^2 w \frac{\Delta x}{2}) \quad (\text{IV.23})$$

on peut voir que la valeur maximale admise de la partie imaginaire de  $\lambda \Delta t$  détermine la valeur maximale du nombre de Courant  $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$  pour que le calcul soit stable, tandis que l'addition du terme dissipatif change la région d'intérêt à la gauche de l'axe imaginaire.

Une fois le maillage est fixe ainsi que le volume de la maille  $h$  est constant, le système d'équations (IV.9) prend la forme :

$$\frac{dU}{dt} + pU = 0 \quad (\text{IV.24})$$

L'opérateur non linéaire est défini comme :

$$pU = \frac{1}{h} (QU - DU) \quad (\text{IV.25})$$

avec :  $Q$  est l'opérateur de discrétisation défini par l'équation (IV.7)

$D$  est l'opérateur dissipatif défini dans le paragraphe (IV.3)

L'investigation est concentrée sur les schémas à deux pas de temps, le premier est le schéma d'ordre trois qui est défini comme suit, où l'indice  $n$  note le niveau de temps, et  $\Delta t$  le pas du temps. Alors au niveau de temps  $n$  on a :

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^{(n)} \\ U^{(1)} &= U^{(0)} - \Delta t P U^{(0)} \\ U^{(2)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} (P U^{(0)} + P U^{(1)}) \\ U^{(3)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} (P U^{(0)} + P U^{(2)}) \\ U^{(n+1)} &= U^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

les variations de ce schéma ont été proposé par Gay, Stetter, Graves et Johnson, il peut être regardé comme le schéma de Crank Nicolson avec itération à pas fixe pour déterminer la solution au niveau de temps  $(n+1)$ , et les itérations se terminent après l'itération trois. Il est de précision de second ordre en temps, et pour

le problème modèle (IV.19) avec  $\varepsilon = 0$ , il est stable lorsque le nombre de Courant

$$\left| a \frac{\Delta t}{x} \right| \leq 2. \quad [12]$$

Cette limite n'augmente plus par des itérations additionnelles. Comparer aux schémas standard de Runge Kutta d'ordre trois, ils donnent une précision plus d'ordre trois en temps pour une limite plus large du nombre de Courant (C.F.L).

L'autre schéma qui a été extensivement étudié et le schéma classique de Runge Kutta d'ordre quatre, défini comme suit au niveau de temps  $n$ .

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^{(n)} \\ U^{(1)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} P U^{(0)} \\ U^{(2)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} (P U^{(1)}) \\ U^{(3)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} (P U^{(2)}) \\ U^{(4)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} (P U^{(0)} + 2 P U^{(1)} + 2 P U^{(2)} + P U^{(3)}) \\ U^{(n+1)} &= U^{(4)} \end{aligned} \quad (IV.27)$$

Ce schéma est de précision d'ordre quatre en temps et pour le problème modèle (IV.19) avec  $\varepsilon = 0$ , il est stable pour un nombre de Courant  $\left| a \frac{\Delta t}{x} \right| \leq 2\sqrt{2}$ .

Les deux schémas ont la propriété que si  $P U^{(n)} = 0$  alors  $U^{(1)} = U^{(0)}$ , et ainsi de suite, aussi que  $U^{(n+1)} = U^{(n)}$ , et la solution d'état stationnaire est :  $P U = 0$

Indépendamment au pas de temps  $\Delta t$ , cela permet un pas de temps variable déterminé par la limite sur le nombre local de Courant (C.F.L) utilisé pour accélérer la convergence à l'état stationnaire sans la modifier. Une méthode pour introduire les termes dissipatifs en étape fractionnée séparée après la dernière étape du schéma de Runge Kutta, l'équation (IV.25) est remplacée par :

$$P U \equiv \frac{1}{h} Q U \quad (IV.25^*)$$

et le schéma de Runge Kutta d'ordre quatre défini par (IV.27) est modifié par en mettant:

$$U^{n+1} = U^{(4)} + \Delta t DU^{(4)}$$

Cette méthode a l'avantage que les propriétés de stabilité pour les deux étapes fractionnelles sont indépendantes, aussi que le schéma sera stable si chaque étape fractionnelle est stable.

L'approche alternative qui a été prouvée avec succès en pratique, est de garder les termes dissipatifs à leur valeurs au premier pas de temps. Aussi le schéma de Runge Kutta d'ordre quatre est modifié, il prend la forme :

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^{(n)} \\ U^{(1)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2h} QU^{(0)} + \frac{\Delta t}{2h} DU^{(0)} \\ U^{(2)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{2h} QU^{(1)} + \frac{\Delta t}{2h} DU^{(0)} \\ U^{(3)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{h} (QU^{(2)}) + \frac{\Delta t}{h} DU^{(0)} \\ U^{(4)} &= U^{(0)} - \frac{\Delta t}{6h} (QU^{(0)} + 2QU^{(1)} + 2QU^{(2)} + QU^{(3)}) + \frac{\Delta t}{h} DU \end{aligned} \quad (IV.28)$$

les opérateurs Q et D nécessitent approximativement un temps de calcul égale.

#### IV.5 Conditions aux limites

Le traitement impropre des conditions aux limites peut conduire à des erreurs sérieuses et l'instabilité du schéma choisi. La diversité des conditions aux limites à imposer dépend essentiellement de la nature d'écoulement entrant ou sortant à travers les frontières. La fig.IV.2 nous donne une idée globale et précise sur l'adaptation des conditions aux limites pour un écoulement subsonique unidimensionnel à travers les frontières limitant le domaine de calcul [8]. Les variables caractéristiques et par suite les directions des lignes caractéristiques  $(c_+, c_0, c_-)$  jouent un rôle prépondérant dans l'étude des conditions aux limites. Cependant les directions des lignes caractéristiques sont déterminées par les vitesses d'ondes de propagation.

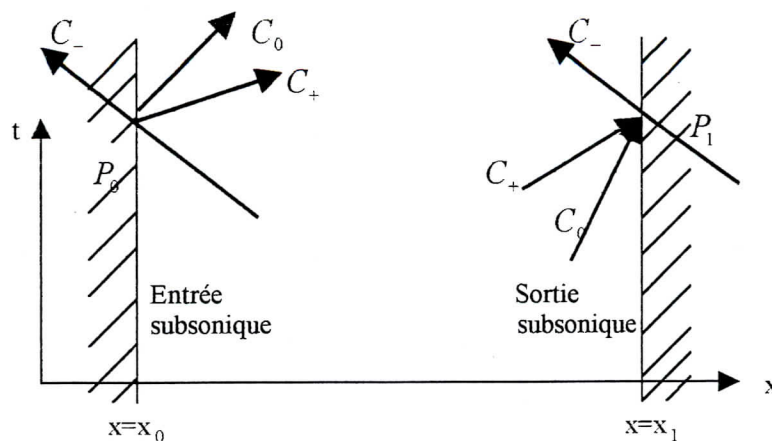


Fig.IV.2 Conditions aux limites pour un écoulement unidimensionnel non visqueux.

Pour traiter l'écoulement extérieur au profil, on doit introduire une limite extérieure artificielle pour produire un domaine limité. Si l'écoulement est subsonique à l'infini, ils seront trois caractéristiques entrantes et une sortante, correspondant à la possibilité des fuites des ondes acoustiques. Sur l'autre coté où l'écoulement est sortant, ils seront trois caractéristiques sortantes et une entrante. Selon la théorie de Kriss [12], trois conditions doivent être spécifiées à l'amont et une en aval, bien que les conditions sortantes sont déterminées par la solution de l'équation différentielle. Il n'est pas correct de spécifier les conditions à l'infini à la limite extérieure.

Pour la formulation des conditions aux limites, il est commode de prendre la transformation locale pour les coordonnées  $X$  et  $Y$  comme la limite coïncide avec la ligne  $Y = \text{constante}$ . utilisant les indices  $X$  et  $Y$  pour dénoter les dérivées, le jacobien sera comme suit:

$$h = x_X \cdot y_Y - x_Y \cdot y_X \tag{IV.29}$$

$h$  correspond à la surface de la maille du schéma de volumes finis. introduisant le vecteur du flux transformé :

$$F = y_Y \cdot f - x_Y \cdot g \quad , \quad G = x_X \cdot g - y_X \cdot f \tag{IV.30}$$

Où  $f$  et  $g$  sont définis par l'équation (IV.4).

La forme différentielle de l'équation (IV.3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hU) + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.31})$$

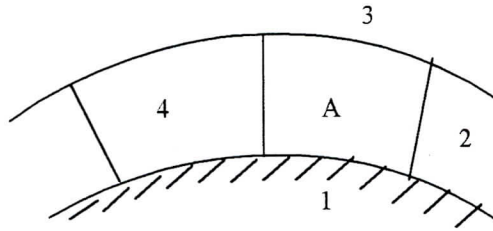


Fig.IV.3 Maille adjacente à la paroi

Premièrement, on considère la condition à la limite au profil à travers le côté (1) de la maille A de figure IV.3, il n'est y a pas un flux convectif puisque :

$$x_x \cdot v - y_x \cdot u = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Mais la  $\Delta xp$  et  $\Delta yp$  ont une contribution aux équations de mouvement, qui nécessitent une estimation de pression à la paroi. Prenant la dérivé par rapport au temps de l'équation (IV.32) multiplie par  $\rho$ , et substituer de  $\frac{\partial}{\partial t}(h\rho u)$  et  $\frac{\partial}{\partial t}(h\rho v)$  de l'équation (IV.31), amené à la relation donnée par Rizzi[4]

$$(x_x^2 + y_x^2)p_Y = (x_x \cdot x_Y + y_x \cdot y_Y)p_X + \rho(y_Y \cdot u - x_Y \cdot v)(v_x \cdot x_{xx} + u \cdot y_{xx}) \quad (\text{IV.33})$$

Ainsi jusqu'ici nous pouvons estimer  $p_Y$  en termes de quantités qui peuvent être déterminer de la solution intérieure. Et nous pouvons utiliser cette valeur de  $p_Y$  pour extrapoler la pression à partir du centre de la maille adjacente à la paroi.

Les conditions aux limites stables ont été données par Gottlieb, Turkel[14] et Gust pour des schémas différents.

Le traitement des conditions aux limites extérieures adopté ici suit des lignes similaires. Les équations sont linéarisées avec des valeurs à la fin du pas de temps président, et les variables caractéristiques correspondantes aux caractéristiques sortantes sont aussi déterminées par extrapolation à partir de l'intérieur bien que les conditions aux limites restantes sont spécifiées de façon qu'elles consistent avec les conditions imposées par le champ lointain soit :

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \quad (\text{IV.34})$$

Puisque la limite est une ligne de  $y=cte$ , les valeurs propres de B déterminent les caractéristiques entrantes et sortantes.

Si  $q_n$  et  $q_t$  sont les composantes de vitesse normale et tangentielle à la limite, et  $c$  est la célérité du son, les valeurs propres  $q_n$ ,  $q_t$ ,  $q_n - c$ , et  $q_n + c$  sont les valeurs aux frontières du pas de temps précédant indiqué par 0. et soit  $T_0$  le vecteur propre de la matrice B.

Alors  $B_0$  se réduit à une forme diagonale par la transformation  $\Lambda_0 = T_0^{-1} B_0 T_0$ , et en mettant  $v = T_0^{-1} U$ , l'équation linéarisée prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hv) + T_0^{-1} A_0 T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \Lambda_0 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Les variables caractéristiques sont les composantes de  $v$ , qui sont :

$$p - C_0^2 \rho, \quad q_t, \quad p - \rho_0 C_0 q_n \quad \text{et} \quad p + \rho_0 C_0 q_n.$$

Soit le vecteur extrapolé de l'intérieur et les vecteurs du champ libre dénotés par les indices 'e' et ' $\infty$ ', alors à la limite d'entrée de l'écoulement nous mettons les conditions suivantes :

#### IV.5.1 Conditions d'entrée amont

$$p - C_0^2 \rho = p_\infty - C_0^2 \rho_\infty \quad (\text{IV.36.a})$$

$$q_t = q_{t\infty} \quad (\text{IV.36.b})$$



$$p - \rho_0 C_0 q_n = p_\infty - \rho_0 C_0 q_{n,\infty} \quad (\text{IV.36.c})$$

$$p + \rho_0 C_0 q_n = p_e + \rho_0 C_0 q_{ne} \quad (\text{IV.36.d})$$

donne :

$$p = \frac{1}{2}(p_e + p_\infty + \rho_0 C_0 (q_{ne} - q_{n,\infty}))$$

$$q_n = q_{n,\infty} + \frac{p - p_\infty}{\rho_0 C_0}$$

La masse volumique peut être déterminé à partir de l'équation (IV.36.a).

Pour les calculs d'état stationnaires, il peut être déterminé alternativement en spécifiant que l'enthalpie totale H a sa valeur au champ libre( $\infty$ ).

#### IV.5.2 Conditions à la sortie aval

A la limite avale, une condition sera spécifier. Si l'écoulement est un champ parallèle alors :  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , donc pour un domaine ouvert :

$$p = p_\infty \quad (\text{IV.37})$$

La condition à la limite de non-réflexion qui fait éliminer les ondes entrant est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(p - \rho_0 C_0 q_n) = 0 \quad (\text{IV.38})$$

cette équation n'assure pas la condition à la limite définie par l'équation (IV.37). Selon Rudy et Sstrickwerda [12], les équations (IV.27) et (IV.28) sont combinées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(p - \rho_0 C_0 q_n) + \alpha(p - p_\infty) = 0 \quad (\text{IV.39})$$

où la valeur typique du paramètre  $\alpha$  est 1/8.

Les composantes de la vitesse et de l'énergie sont extrapolés de l'intérieur.

Différentes autres conditions aux limites sont désignées pour réduire les réflexions à partir de la limite extérieure ont été proposées par d'autres auteurs [16-17].

### IV.6 Critère de stabilité

On dit qu'un processus de calcul itératif est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fûre et à mesure que les calculs progressent. Afin d'éviter toute instabilité, et selon l'analyse de Von Neumann, la stabilité des schémas explicites est déterminée par le nombre C.F.L (Courant – Freiderich - Lewy ) [8,13,18], qui se traduit par le  $\Delta t$  (accroissement du temps).

$$\Delta t \leq \min \left( \frac{\Delta x}{|u| + c}, \frac{\Delta y}{|v| + c} \right)$$

avec  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  est la célérité du son.

D'après Bijan.M [23], le calcul de la solution de l'état stationnaire nécessite toujours l'utilisation du pas de temps local et pour le cas in- stationnaire, le calcul du pas du temps global est nécessaire, car le pas du temps global est le minimum des pas de temps locaux.

### IV.7 Génération de maillage

La procédure de la solution numérique d'équations d'Euler est découplée par la génération du maillage. De nombreux développements des techniques de générations de maillage ont été effectués notamment en ce qui concerne les problèmes bidimensionnels en utilisant des méthodes numériques à savoir : les éléments finis, les volumes finis ou les différences finies.

La génération automatique de maillage consiste à générer un système de cordonnées curvilignes qui détermine le champ de calcul dans lequel seront exprimées toutes les équations de problème physique.

Les différentes techniques de génération de maillage diffèrent les unes des autres par des propriétés que vérifient les maillages générés en relation avec les modèles mathématiques utilisés.

La méthode des techniques algébriques utilisée dans notre étude produit une description fonctionnelle directe de la transformation entre les domaines



computationnel et physique, et ses principales caractéristiques seront présentées dans ce qui suit :

#### IV.7.1 Technique algébrique

Les méthodes algébriques les plus utilisées dans la génération des maillages sont celles qui interpolent les points des frontières pour générer les points internes. L'interpolation explicite peut être en une dimension ou en 'n' dimensions. La qualité demandée est que le maillage généré doit être bien conditionnée en le variant doucement vers un maillage orthogonal.

La distribution des points du maillage à l'intérieur est gouvernée par les fonctions de condensation « stretching functions » aux frontières.

#### IV.7.2 Fonctions de condensation « STRETCHING »

Les fonctions de condensation sont largement utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que les régions spécifiques (à forts gradients) des domaines qui nécessitent un traitement avec une grande précision. Pour les écoulements autour des corps, il est nécessaire d'introduire ces fonctions pour résoudre les problèmes où les gradients des variables physiques sont larges.

Les variables dépendantes et indépendantes dans la fonction de condensation « stretching » sont exprimées sous une forme normalisée, voir la figure (IV.5).

La variable indépendante appropriée est :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \quad (\text{IV. 40})$$

avec  $0 \leq \eta^* \leq 1$  ou  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ .

Une fonction de condensation « stretching » proposée par Rebert (1971) et modifiée par Eisseman (1979) [21], est la suivante :

$$S = a_1 \eta^* + (1 - a_1) \left( 1 - \frac{\tanh[b_1(1 - \eta^*)]}{\tanh(b_1)} \right) \quad (\text{IV.41})$$

Où  $a_1$  et  $b_1$  sont des paramètres de condensation des lignes coordonnées.

$a_1$  : exprime la pente de la distribution  $S \approx a_1 \eta^*$  dans le cas particulier où la valeur de  $\eta^*$  proche de zéro.

$b_1$  : est appelé facteur d'amortissement de EISEMAN qui permet le contrôle de la ligne curviligne S.

les petites valeurs de  $b_1$  avec la variation de  $\eta^*$  causent de petites variations de la linéarité de S. Une fois que S est obtenu, elle est utilisée pour spécifier la distribution de x et y définie par :

$$f(S) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{IV-42}$$

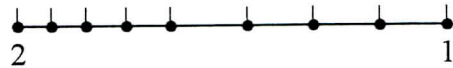
$$g(S) = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

par exemple si on prend  $f(S) = g(S) = S$  , les relations (IV-42) donnent :

$$x = x_1 + S(x_2 - x_1) \tag{IV-43}$$

$$y = y_1 + S(y_2 - y_1) \tag{IV-44}$$

$a_1 = 1.8$  et  $b_1 = 2.$



$a_1 = 0.9$  et  $b_1 = 2.$



$a_1 = 0.1$  et  $b_1 = 2.$

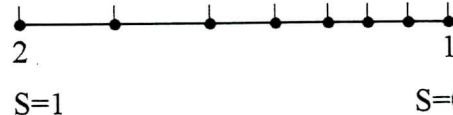


Figure.IV.4 Distributions de maillage suivant les paramètres de contrôle

Les distributions typiques des points sur le segment 1-2 de la figure(IV.4) sont obtenues suivant les formules (IV.43 et IV.44) pour des valeurs de  $a_1$  et  $b_1$  variables.

### IV.7.1.2 Technique de deux parois

Cette méthode est généralement illustrée par un canal bidimensionnel courbé, voir figure (IV.5). Il est souvent nécessaire que les fonctions de condensation

« stretching »  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$  soient définies pour contrôler la distribution des points au-dessus et au-dessous des frontières [ 1-19].

Des équations équivalentes à celles de (IV.41) sont utilisées pour générer  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$ . Pour obtenir la valeur de 'S' entre les surfaces 'AD' et 'BC', une simple interpolation linéaire est recommandée exprimée par :

$$S = S_{AD} + \xi^*(S_{BC} - S_{AD})$$

où :

$$\xi^* = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

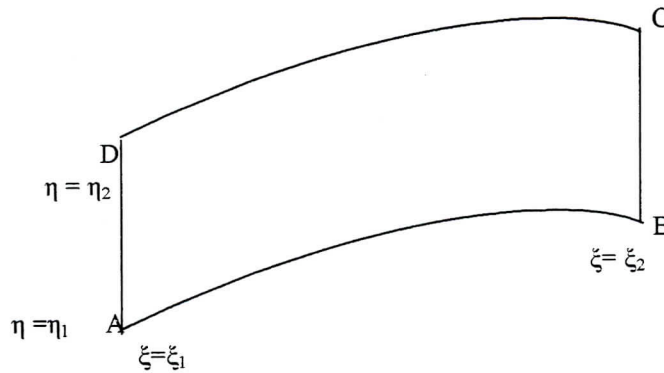


Figure.IV.5 Canal bidimensionnel curviligne.

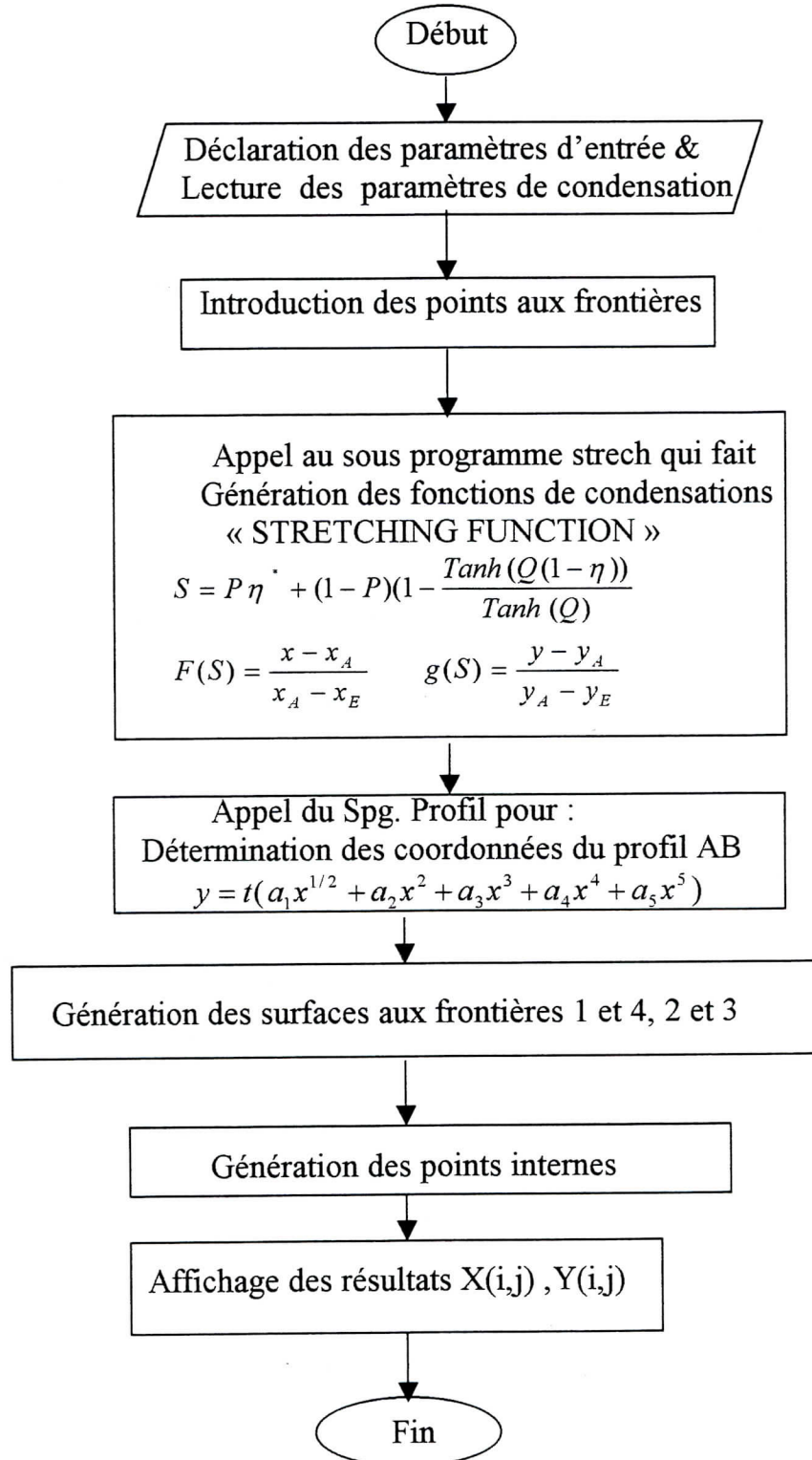
Par une voie similaire, la distribution des points de maillage le long de AB et CD est contrôlée par les fonctions « stretching »  $r_{AB}(\xi^*)$  et  $r_{DC}(\xi^*)$ . Si  $r_{AB}$  et  $r_{DC}$  sont considérées comme étant les coordonnées généralisées le long de la surface, alors  $x_{AB}(r_{AB})$  et  $y_{AB}(r_{AB})$  se suivent directement. Il en est de même pour  $x_{DC}(r_{DC})$  et  $y_{DC}(r_{DC})$ .

La technique des deux parois utilise des moyens d'interpolation pour générer les points intérieurs entre les deux frontières AB et DC. Une simple interpolation linéaire est donnée dans ce qui suit :

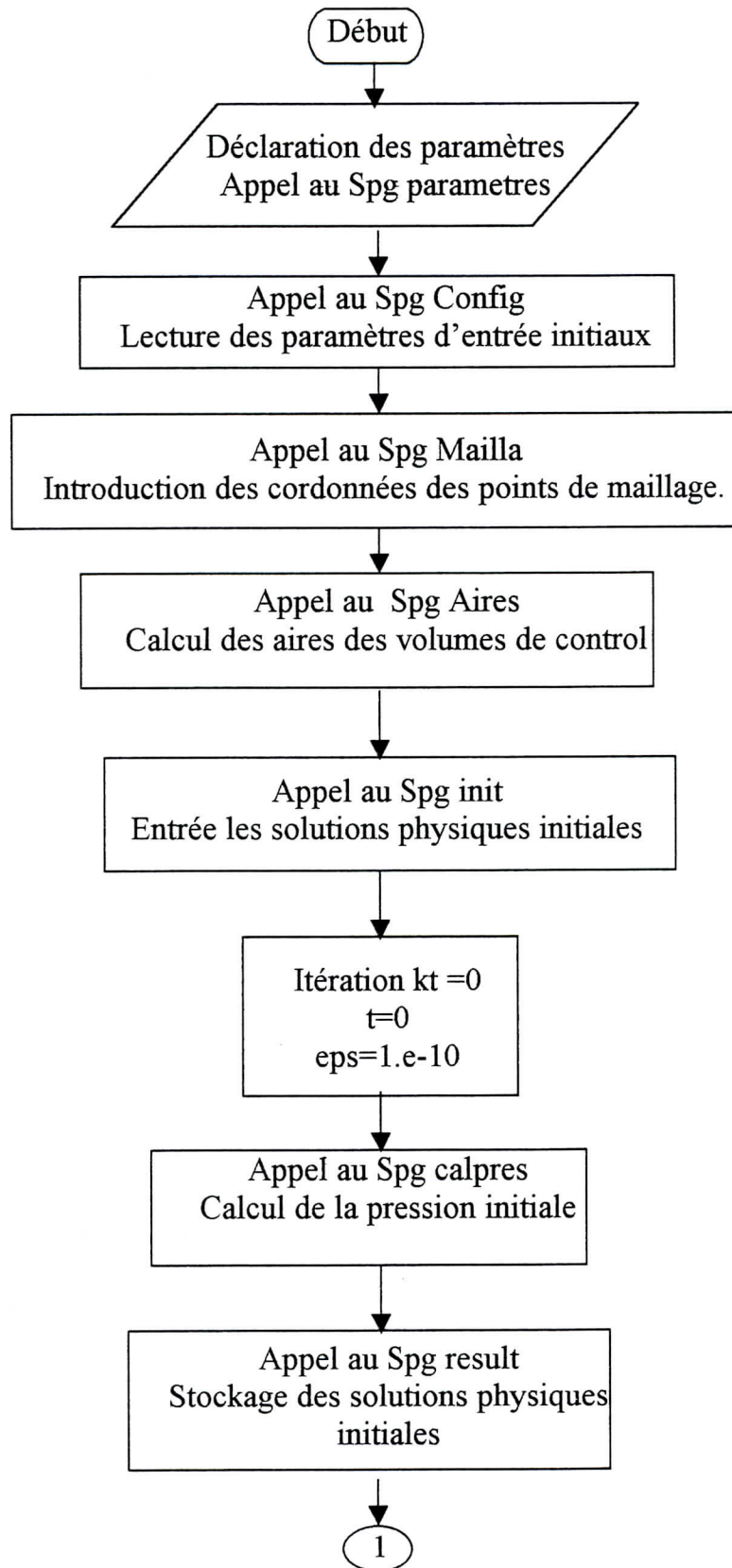
$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= (1-S)x_{AB}(r_{AB}) + S.x_{DC}(r_{DC}) \\ y(\xi, \eta) &= (1-S)y_{AB}(r_{AB}) + S.y_{DC}(r_{DC}) \end{aligned} \quad (IV.45)$$

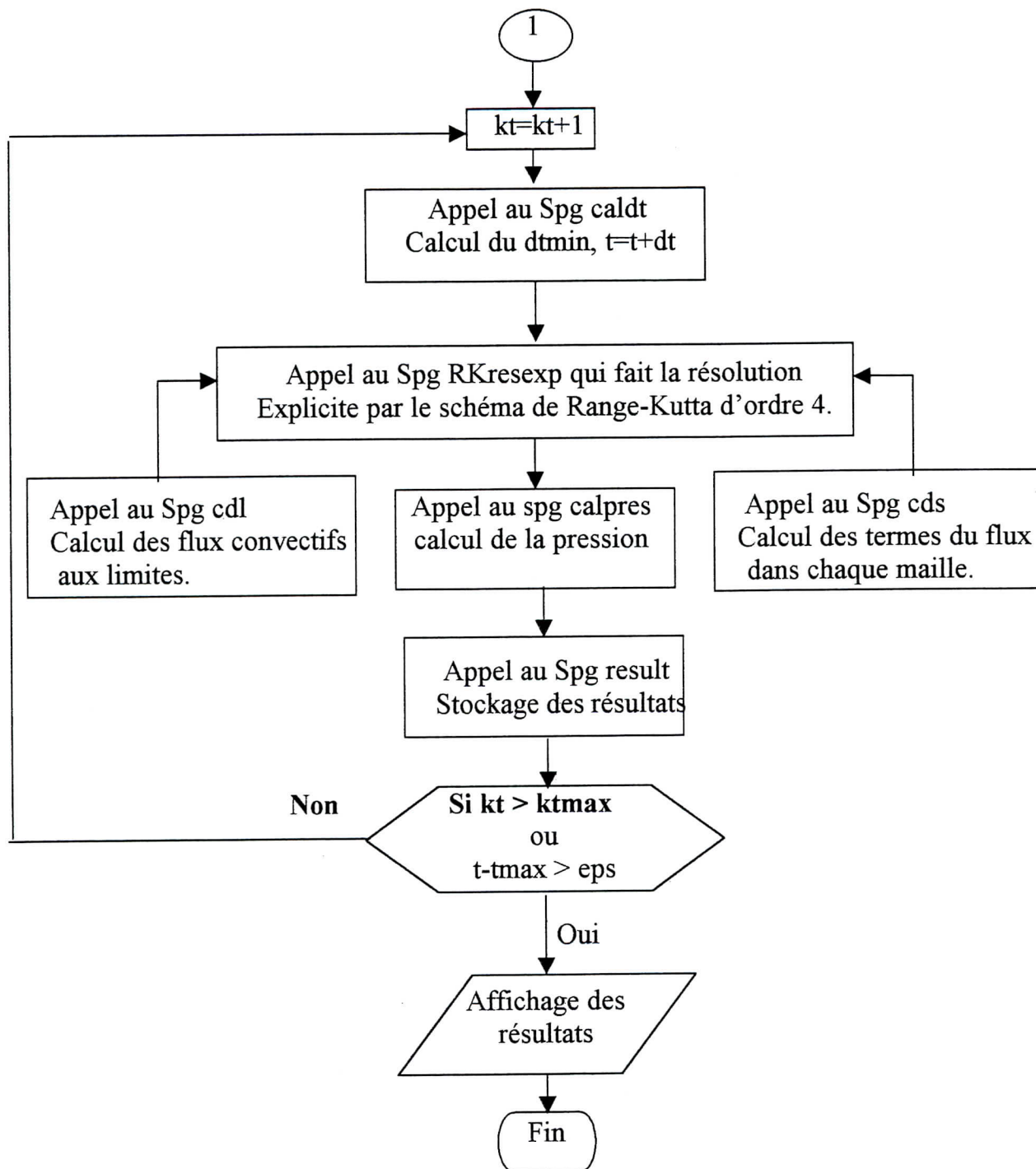
Où S est donnée par (IV.41)

## IV.7.3 Organigramme de génération de maillage



## IV.8 Organigramme du programme Euler 2D.FVM.







## CHAPITRE V

### ANALYSE DES RESULTATS

#### V.1 Introduction

Le code de calcul « EULER-2D.MVF » décrit précédemment a été utilisé pour la simulation numérique du problème d'écoulement transsonique compressible non visqueux autour d'une géométrie bidimensionnel de type profil d'aile NACA0012. On a choisi ce cas d'application (profil symétrique), car ce type de géométrie a été très utilisé dans plusieurs études comme un cas test, ce qui nous permet la confrontation de nos résultats avec ceux publiés dans la littérature spécialisée. Avant d'aborder les différents résultats obtenus par notre code « EULER-2D.MVF », il convient de mettre en évidence la robustesse du programme de génération de maillage « MESH2D », en présentant quelques exemples exécutés.

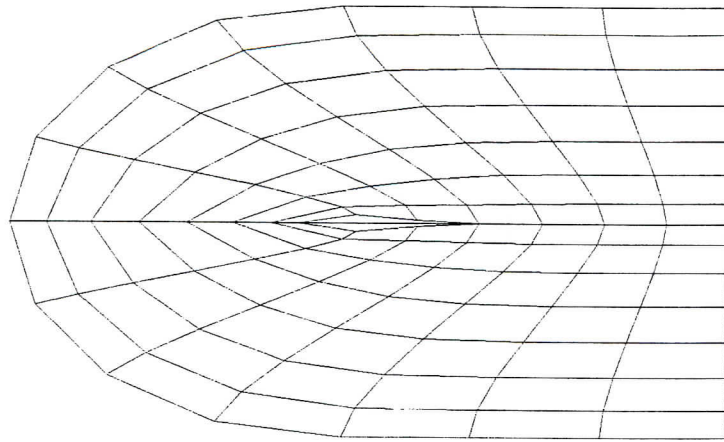
#### V.2 Génération de maillage

Dans le but de résoudre les équations physiques gouvernant le problème, et afin d'exploiter le code « EULER-2D.MVF », un programme de génération de maillage « MESH2D » autour du profil d'aile a été établi. Plusieurs cas peuvent être représentés en exécutant le programme, en jouant sur la diversité des paramètres d'entrée, en se limitant à quelques exemples qui illustrent les performances du programme.

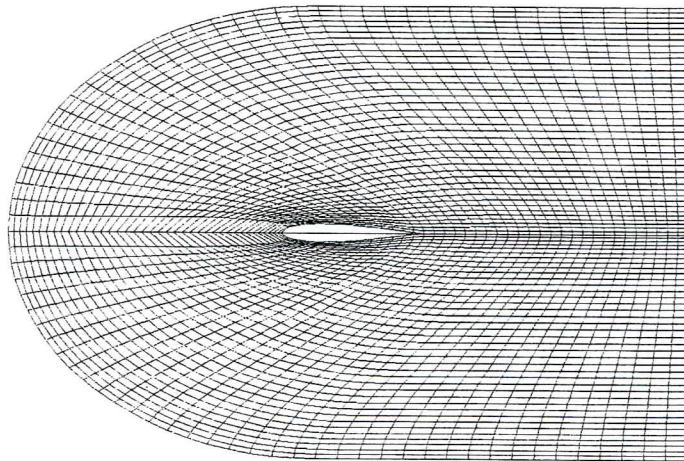
Certains problèmes physiques demandent une grande précision de calcul, où le raffinement de maillage joue un rôle primordial, ainsi l'obtention d'un résultat adéquat du problème est conditionnée par un choix judicieux du raffinement de

maillage utilisé. La figure V.1 montre le raffinement de maillage autour d'un profil d'aile de type NACA 0012 avec une répartition régulière des lignes coordonnées.

Le maillage peut être rendu sensible aux régions de forts gradients grâce aux fonctions de condensation en faisant varier les paramètres de contrôle. Cette sensibilité est traduite par la répartition des lignes coordonnées qui peuvent être condensées dans des zones bien définies et suivant une direction  $\xi$  ou  $\eta$ . La figure V.2. montre un raffinement de maillage au voisinage du bord d'attaque qui représente un point d'arrêt de l'écoulement, aux alentours de la paroi du profil où la ligne sonique sera indiquée sur les figures qui représentent les lignes iso-Mach, et au bord de fuite (à la sortie aval).



(a) Maillage en C 15x8



(b) Maillage en C 79x40

FigureV.1.a , b Raffinement de maillage autour du profil  
NACA0012 (répartition régulière)

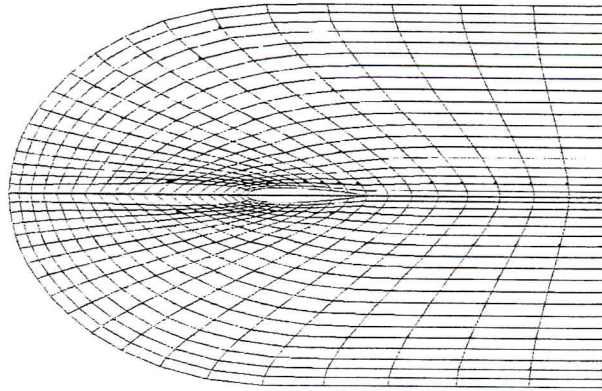


Figure V.2.a. Maillage en C 39x20

$P_{ac}=P_{fd}=0.2$ ,  $P_{af}=P_{cd}=1$

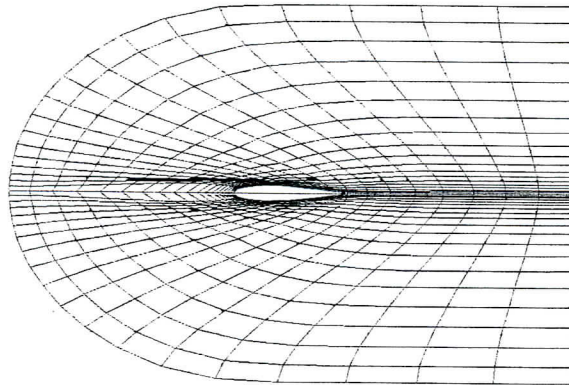


Figure V.2.b. Maillage en C 39x20

$P_{ac}=0.2$ ,  $P_{fd}=0.001$ ,  $P_{af}=P_{cd}=0.1$

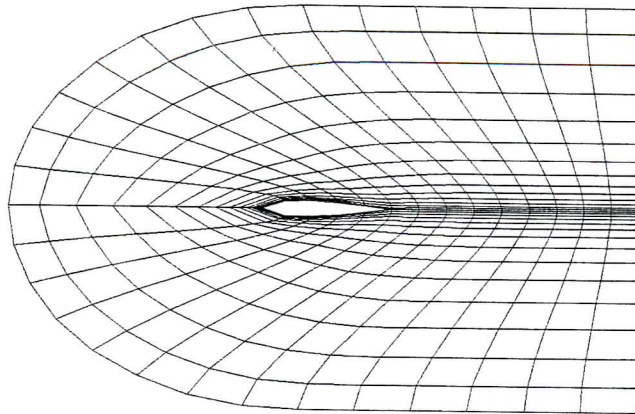


Figure V.2.c Maillage en C 29x15

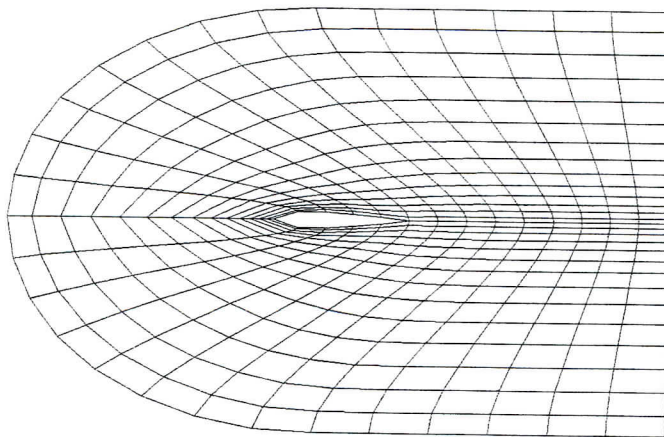
 $P_{ac}=p_{fd}=1$   $p_{af}=p_{cd}=0.1$ 

Figure V.2.d Maillage en C 29x15

 $P_{ac}=p_{fd}=1$   $p_{af}=p_{cd}=0.5$ 

Figure 5.2. Influence des fonctions de condensation sur la répartition des lignes coordonnées autour du profil NACA0012

### V.3 Nombre de Mach critique

Dans l'écoulement transsonique, le nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  est inférieur légèrement à l'unité. Comme l'écoulement est accéléré autour d'un obstacle, il devient localement supersonique. Un champ d'écoulement transsonique consiste en un domaine infini d'écoulement subsonique avec une poche d'écoulement supersonique. Le nombre de Mach limite qui permet l'apparition des premiers points supersoniques, et par la suite la poche supersonique est appelée « le nombre de Mach critique ». La valeur de ce dernier change sous l'effet de l'angle d'incidence de l'écoulement amont. Les résultats obtenus par l'exécution de notre code sont présentés dans les tableaux V.1, V.2 et V.3. Ces derniers montrent quelques cas exemples de l'effet de l'angle d'incidence de l'écoulement amont sur le nombre de Mach critique et sur les paramètres physiques, à savoir le nombre de points supersoniques, le nombre de Mach, la masse volumique, la pression et les vitesses d'écoulement. Ces résultats sont représentés sur les figures V.3a, V.3b et V.3c qui montrent la répartition des lignes iso-Mach d'un écoulement amont subsonique autour du profil NACA 0012.

Le tableau V.1 présente les résultats d'un écoulement transsonique autour du profil NACA0012 avec un angle d'incidence de l'écoulement à l'infini amont nul et un nombre de Mach  $M_\infty=0.75$  et le nombre de points supersoniques égale à deux (02), ce qui nous permet de conclure que le nombre de Mach critique pour un angle d'attaque nul est légèrement inférieur à 0.75.

la représentation graphique de la figure V.3a montre clairement la répartition des lignes iso-Mach autour du profil. Une ligne sonique épouse la paroi du profil avec une très petite poche supersonique qui vient de prendre naissance, ce qui justifie les conditions critiques de l'écoulement.

Les tableaux V.2 et V.3 présentent les résultats des deux exemples d'écoulements transsoniques autour du profil NACA0012 avec les conditions de

Tableau V.1 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique  
autour du profil NACA0012 Mach =0.75 Alpha=0.deg CFL=1.5

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| Nombre de points supersoniques | 2          |
| Nombre de Mach maximum         | 1.00657300 |
| Nombre de Mach minimum         | .05146670  |
| Pression maximum               | 1.85231900 |
| Pression minimum               | .93473190  |
| Densité maximum                | 1.27569100 |
| Densité minimum                | .79746440  |
| Vitesse/x maximum              | 1.28836900 |
| Vitesse/x minimum              | .07337958  |
| Vitesse/y maximum              | .50659320  |
| Vitesse/y minimum              | -.50647380 |

l'écoulement à l'infini amont respectivement,  $\alpha=1.25$  deg. et  $\alpha=3$  deg. pour les angles d'incidences, 0.70 et 0.64 pour le nombre de Mach. Le nombre de points supersoniques égale à un (01) et deux (02) respectivement, ce qui nous permet de conclure que le nombre de Mach critique pour les angles d'attaque cités auparavant est légèrement inférieur aux nombres de Mach à l'infini amont respectivement.

La représentation graphique des figures V.3a,V.3b et V.3c montrent clairement la répartition des lignes iso-Mach autour du profil, qui sont réaffirmés par les résultats des tableaux V.1,V.2 et V.3. Ces répartitions permettent d'avoir un nombre de Mach critique de l'écoulement transsonique pour chaque angle d'attaque et de voir l'effet de variation de l'angle d'attaque sur ce dernier, car ils sont inversement proportionnels.

Tableau V.2 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique  
autour du profil NACA0012 Mach =0.70 Alpha=1.25deg CFL=1.5

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| Nombre de points supersoniques | 1          |
| Nombre de Mach maximum         | 1.00483200 |
| Nombre de Mach minimum         | .11544550  |
| Pression maximum               | 2.00542600 |
| Pression minimum               | .99798470  |
| Densité maximum                | 1.22507300 |
| Densité minimum                | .75402370  |
| Vitesse/x maximum              | 1.35638200 |
| Vitesse/x minimum              | .07545001  |
| Vitesse/y maximum              | .62925110  |
| Vitesse/y minimum              | -.42489760 |

Tableau V.3 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique  
autour du profil NACA0012 Mach =0.64 Alpha=3. deg CFL=1.5

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| nombre de points supersoniques | 2          |
| Nombre de Mach maximum         | 1.00483400 |
| Nombre de Mach minimum         | .11349970  |
| Pression maximum               | 2.36669600 |
| Pression minimum               | 1.10125300 |
| Densité maximum                | 1.21242400 |
| Densité minimum                | .70562050  |
| Vitesse/x maximum              | 1.45534600 |
| Vitesse/x minimum              | .07732598  |
| Vitesse/y maximum              | .80499770  |
| Vitesse/y minimum              | -.31137040 |



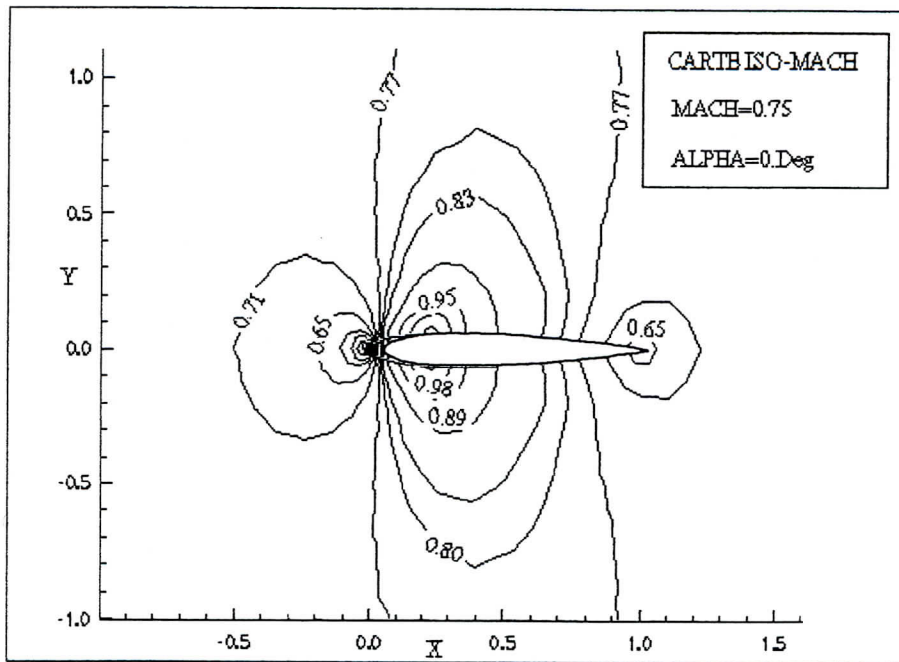


Figure V. 3a Répartition des lignes iso-mach autour du profil NACA 0012 MACH=0.75 ALPHA=0.DEG

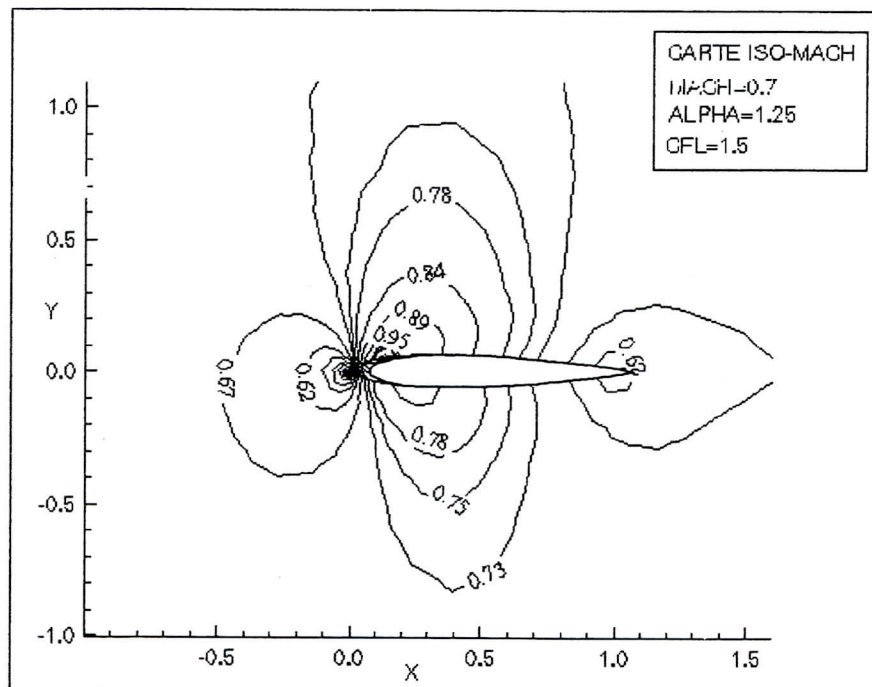


Figure V. 3b Répartition des lignes iso-mach autour du profil NACA 0012 MACH=0.70 ALPHA=1.25 DEG

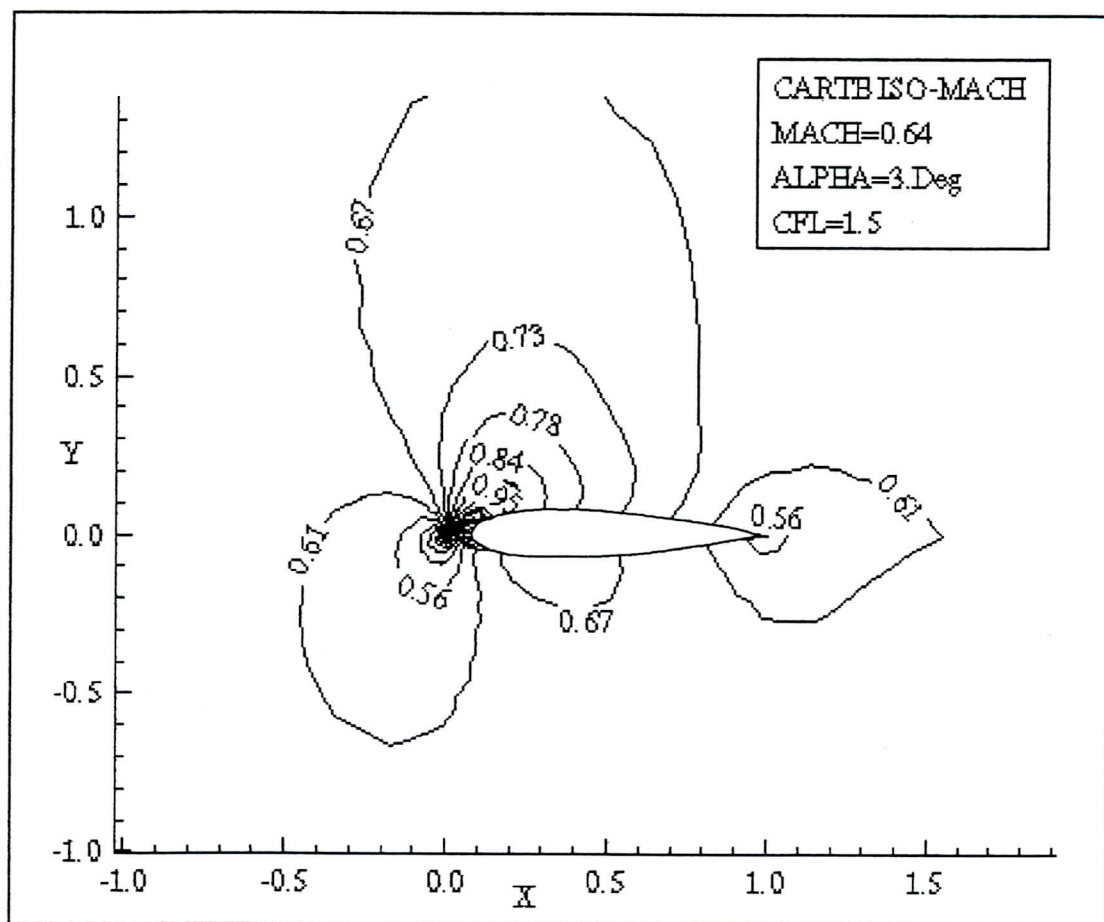


Figure V. 3c Répartition des lignes iso-mach autour du profil  
NACA 0012 MACH=0.64 ALPHA=3. DEG

#### V.4 Influence de l'angle d'attaque sur la distribution de pression

Le coefficient de pression  $C_p$  est un paramètre principal de l'écoulement. La distribution de ce dernier est représentée à travers la paroi du profil NACA 0012 par rapport à sa corde «  $c$  ». Cette représentation surfacique permet de suivre l'évolution du paramètre donné au cours du mouvement et de détecter toute anomalie ou discontinuité dans l'écoulement le long de la surface du profil.

La figure V.4a présente l'évolution du coefficient de pression à travers le profil avec un angle d'incidence nul, ainsi avec un nombre de Mach à l'infini amont  $M_\infty = 0.60$ . Ces résultats ont été obtenus avec un maillage de 59x30 nœuds et pour une configuration externe de type « C ». la figure met en évidence l'évolution des zones de dépression et de surpression le long de la paroi du profil. Cette distribution graphique du coefficient de pression symétrique sur l'extrados et sur l'intrados ne présente aucune discontinuité de l'écoulement qui reste subsonique par tout, cela est justifié par l'absence des points supersoniques, ainsi le nombre de Mach maximum de l'écoulement reste inférieur à l'unité. Ces résultats sont illustrés sur le tableau V.4a, obtenu par l'exécution de notre code de calcul.

Tableau V.4a Paramètres physiques d'un écoulement transsonique  
autour du profil NACA0012 Mach =0.60 Alpha=0.deg CFL=1.5

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| Nombre de points supersoniques | 0          |
| Nombre de Mach maximum         | .72683350  |
| Nombre de Mach minimum         | .04555451  |
| Pression maximum               | 2.57810600 |
| Pression minimum               | 1.74770900 |
| Densité maximum                | 1.17866300 |
| Densité minimum.               | 90674900   |
| Vitesse/x maximum              | 1.19061600 |
| Vitesse/x minimum              | .07971693  |
| Vitesse/y maximum              | .52483310  |
| Vitesse/y minimum              | -.52472580 |

Une représentation bidimensionnelle des lignes iso-pression avec les mêmes conditions amont de l'écoulement ( $M_\infty = 0.60$  avec angle d'incidence nul) permet d'avoir clairement la distribution de pression autour du profil. voir la figure.V.4b.

La figure (V.4c) met en évidence l'effet de l'angle d'incidence sur l'évolution du coefficient de pression, tout en gardant le nombre de Mach de l'écoulement amont constant ( $M_\infty = 0.60$ ) avec un angle d'incidence positif égale à 1.25 degrés. La figure montre clairement le mécanisme de sustentation et les zones de dépression et de surpression et l'écart qui existe entre la courbe de l'intrados et celle de l'extrados du profil. Sur l'extrados, la distribution de pression a été presque conservée comme dans le cas d'un écoulement avec angle d'incidence nul mais avec une plus large zone de dépression. Cependant sur l'intrados la zone de dépression est très petite.

Le comportement de l'écoulement le long du profil reste subsonique partout et ne présente aucune discontinuité, cela est justifié par les résultats du tableau V.4b qui montre que le nombre de Mach maximum est inférieur à l'unité, et le nombre de points supersoniques est nul.

Tableau V.4b Paramètres physiques d'un écoulement transsonique  
autour du profil NACA0012 Mach =0.60 Alpha=1.25deg

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| Nombre de points supersoniques | 0          |
| Nombre de mach maximum         | .76482460  |
| Nombre de mach minimum         | .11482650  |
| Pression maximum               | 2.55530700 |
| Pression minimum               | 1.65354600 |
| Densité maximum                | 1.17567400 |
| Densité minimum                | .86500080  |
| Vitesse/x maximum              | 1.24408900 |
| Vitesse/x minimum              | .08001219  |
| Vitesse/y maximum              | .64281150  |
| Vitesse/y minimum              | -.42341970 |

Une représentation bidimensionnelle de la figure(V.4d) montre la distribution des lignes iso-pression avec les mêmes conditions amont de l'écoulement ( $M_\infty = 0.60$  et un angle d'incidence égale à 1.25 degrés.) et permet de voir clairement l'évolution de la pression autour du profil et la dissymétrie dans la répartition des lignes iso-pression.

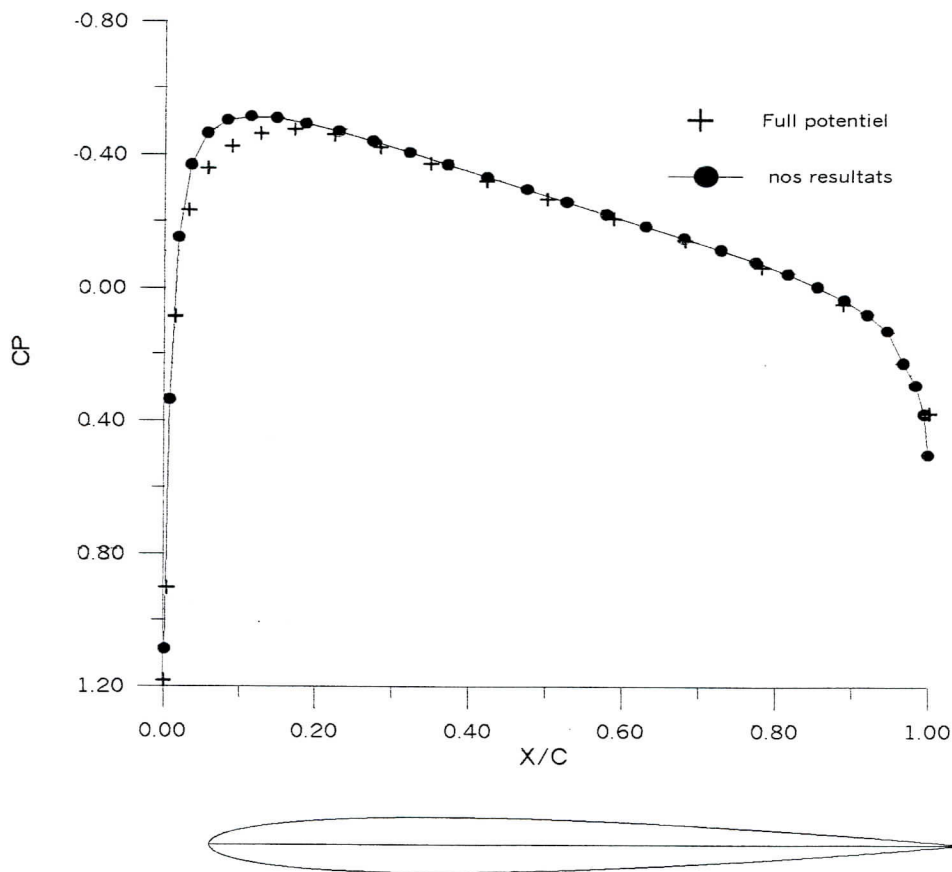


Figure V.4a Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA0012 Mach=0.6 Angle d'incidence =0. deg. CFL= 1.5

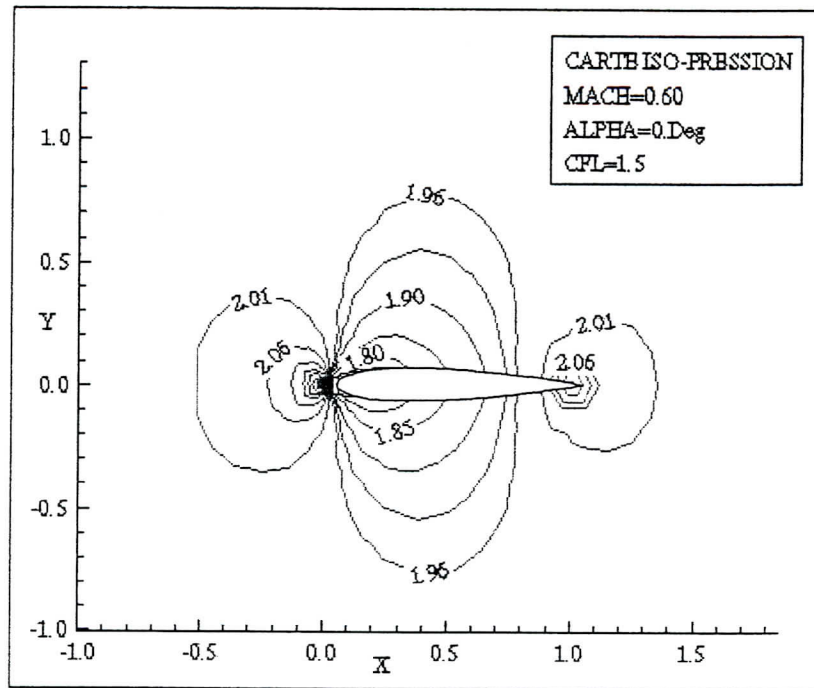


Figure V.4b Répartition des lignes iso-pression autour du profil NACA 0012 MACH=0.60 ALPHA=0. DEG

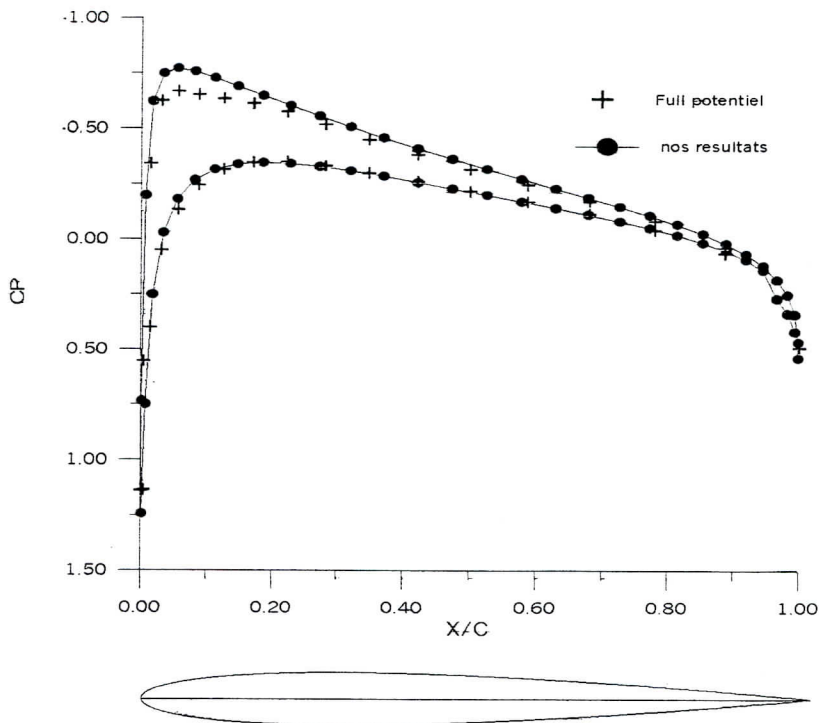


Figure V.4c Distribution du coefficient de pression autour du profil NACA0012 Mach=0.6 Angle d'incidence =1.25 deg. CFL= 1.5

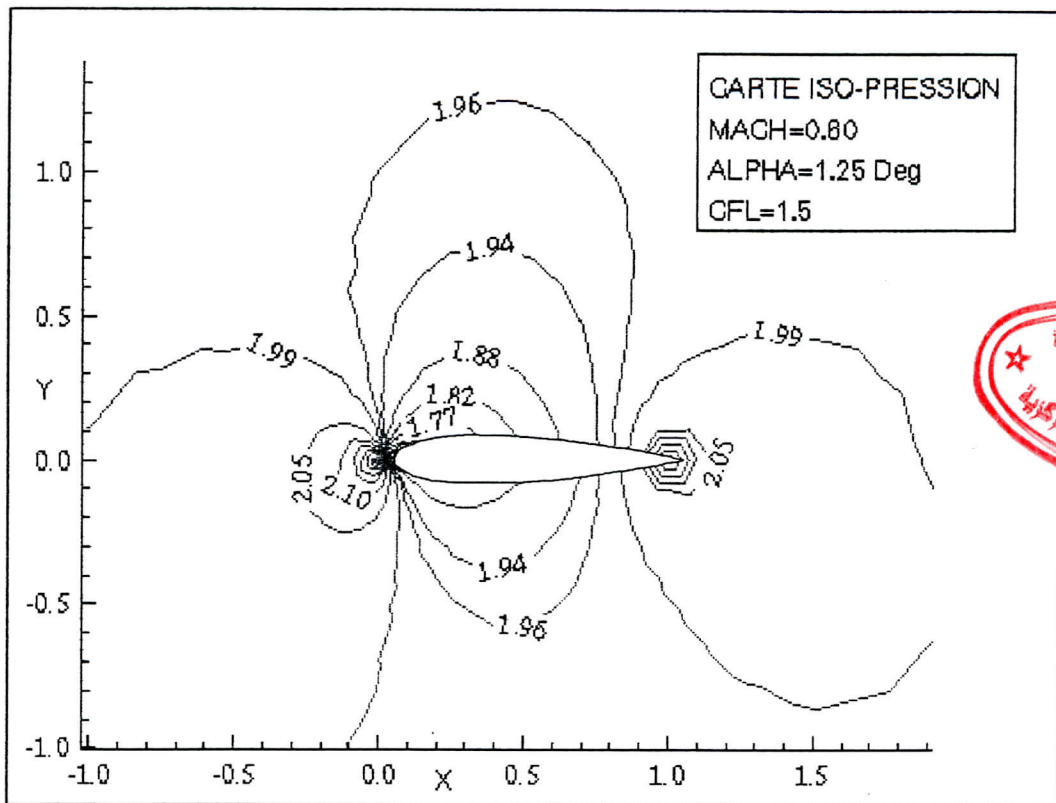


Figure V.4d Répartition des lignes iso-pression autour du profil  
 NACA 0012 MACH=0.60 ALPHA= 1.25 Deg.

### V.5 Influence de nombre de Mach amont sur la distribution de pression

La figure (V.5.a) montre l'effet de l'augmentation du nombre de Mach amont combiné avec l'angle d'incidence sur l'évolution du coefficient de pression autour du profil NACA 0012. Pour un nombre de Mach à l'infini amont de 0.75 ( au-delà du Mach critique) avec un angle d'incidence de 2 degrés, apparaissent des ondes de choc qui modifient les répartitions de pression. Les ondes de choc constituent des recompressions brutales avec forte croissance de la traînée à partir d'un point appelé « mach de divergence de la traînée » et la portance chute pour un nombre de Mach légèrement supérieur appelé « Mach de divergence de portance ». Et d'après les résultats obtenus et présentés sur le tableau V.5.1 en exécutant notre code, l'écoulement passe du régime subsonique au régime supersonique à travers une ligne sonique, cela est justifié par l'augmentation du nombre de points supersoniques et le nombre de Mach de l'écoulement qui a dépassé l'unité. La figure montre aussi le phénomène de sustentation par une large zone de dépression sur l'extrados suivi par une discontinuité de l'écoulement.

Tableau V.5.1 Paramètres physiques d'un écoulement transsonique autour du profil NACA0012 Mach =0.75 Alpha=2.deg CFL=1.5

| PARAMETRES PHYSIQUES           | VALEURS    |
|--------------------------------|------------|
| Nombre de points supersoniques | 26         |
| Nombre de Mach maximum         | 1.32123800 |
| Nombre de Mach minimum         | .15034320  |
| Pression maximum               | 1.83925600 |
| Pression minimum               | .63578340  |
| Densité maximum                | 1.27458600 |
| Densité minimum                | .60780350  |
| Vitesse/x maximum              | 1.59768700 |
| Vitesse/x minimum              | .07261971  |
| Vitesse/y maximum              | .64692280  |
| Vitesse/y minimum              | -.38194740 |



La figure V.5.b est une représentation bidimensionnelle qui montre la distribution des lignes iso-pression avec les même conditions amont de l'écoulement ( $M_\infty = 0.75$  et un angle d'incidence égale à 2 degrés.), elle permet de voir clairement l'évolution de la pression autour du profil et la dissymétrie de la répartition des lignes iso-pression, cela réaffirme la théorie de sustentation qui dit que l'aile est aspirée vers le haut sous l'effet de la dépression.

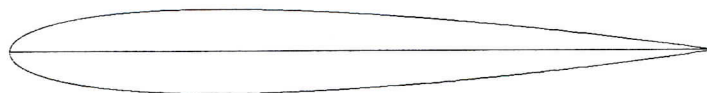
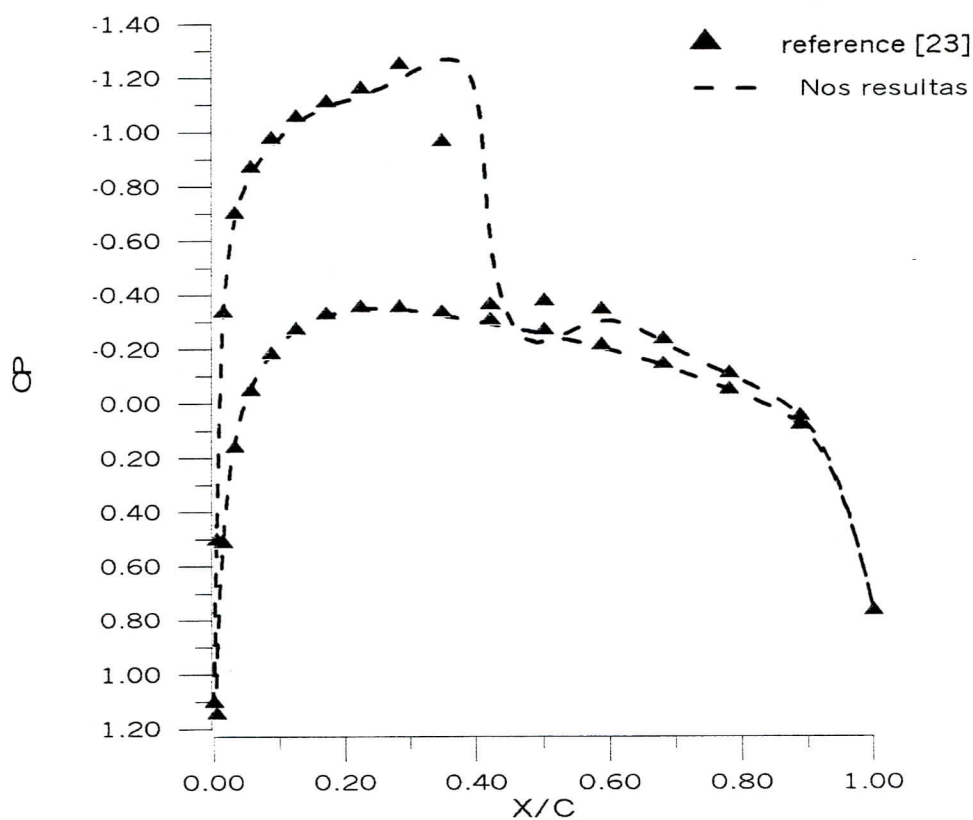


Figure V.5.a Distribution du coefficient de pression sur la surface du Profil NACA0012 Mach=0.75 Angle d'incidence =2 deg. CFL= 1.5

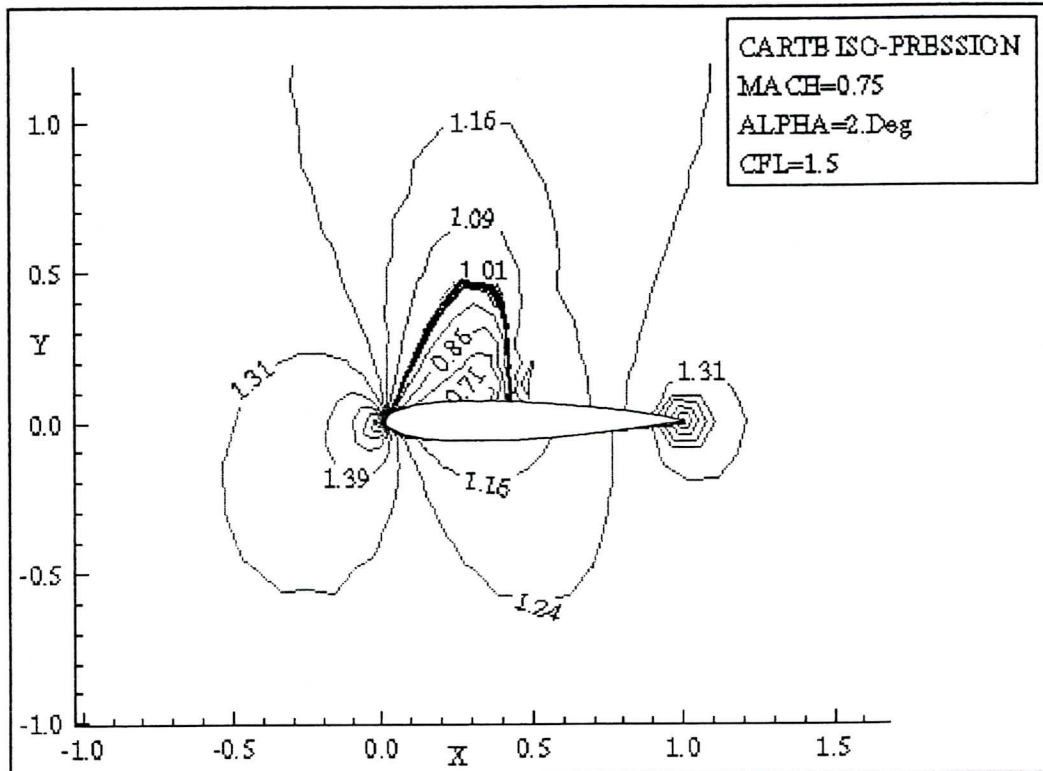


Figure V.5.b Répartition des lignes iso-pression autour du profil NACA0012 Mach=0.75 Angle d'incidence =2 Deg. CFL= 1.5

### V.6 Influence de nombre de Mach amont avec l'angle d'incidence sur la distribution du nombre de Mach local

Les figures(V.6.a, V.6.b, V.6.c, V.6.d, V.6.e, V.6.f ) permettent de conclure que la répartition du nombre de Mach local varie considérablement selon l'incidence du profil et selon le nombre de Mach amont ; ainsi les points d'arrêt se déplacent en fonction des différentes incidences, et la poche supersonique s'élargit, la ligne sonique se rapproche du bord d'attaque, et le nombre de points supersoniques sur l'extrados à l'intérieur de la cloche supersonique augmente et l'onde de choc devient plus intense et se rapproche du bord de fuite.

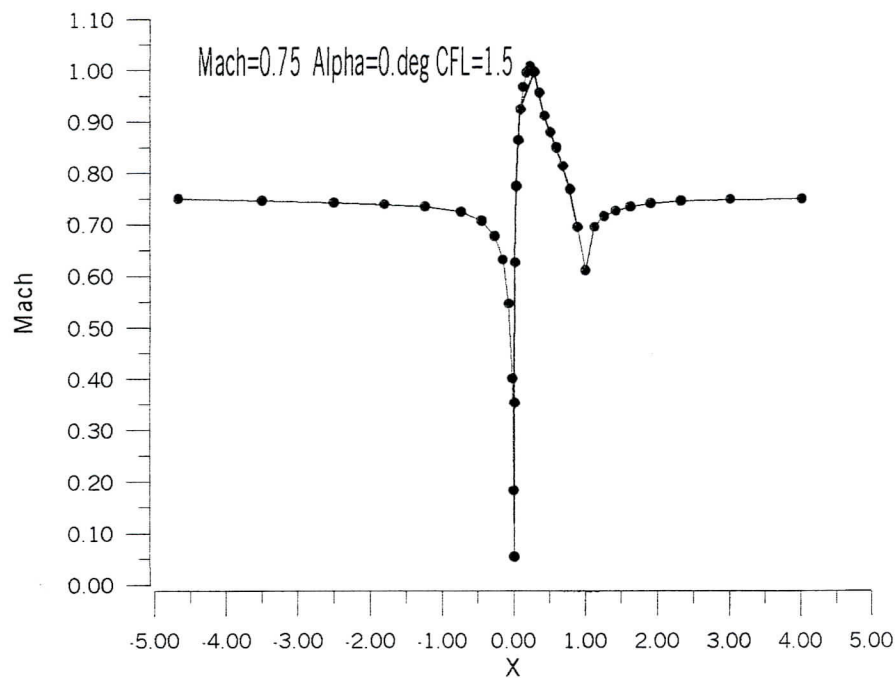


Figure V.6a Evolution du nombre de Mach local à travers la surface du profil  
NACA0012 Mach =0.75 Alpha=0.deg CFL=1.5

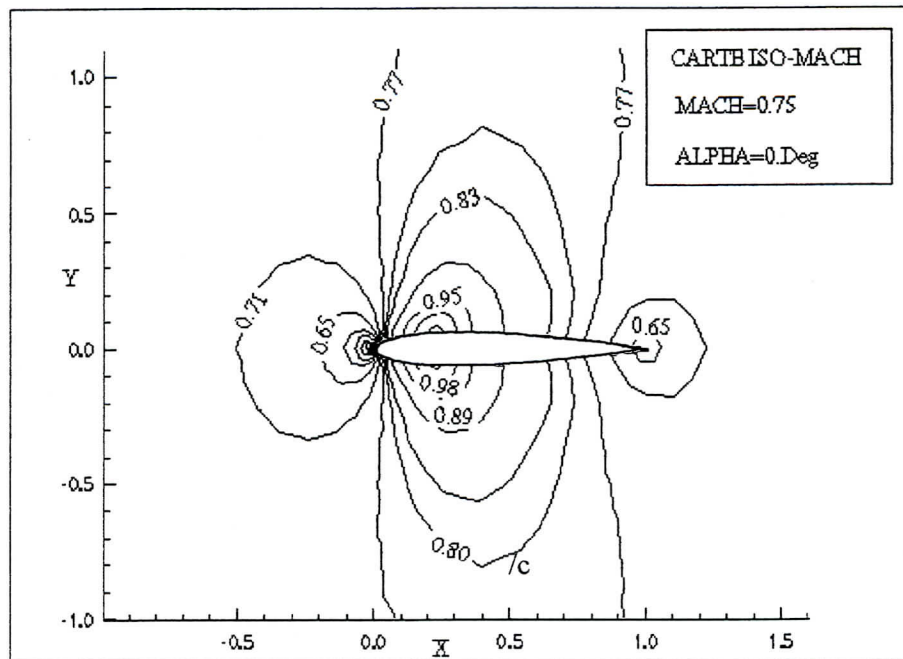


Figure V.6b Répartition des lignes iso-mach autour du profil  
 NACA0012 Mach = 0.75 Alpha = 0. deg CFL = 1.5

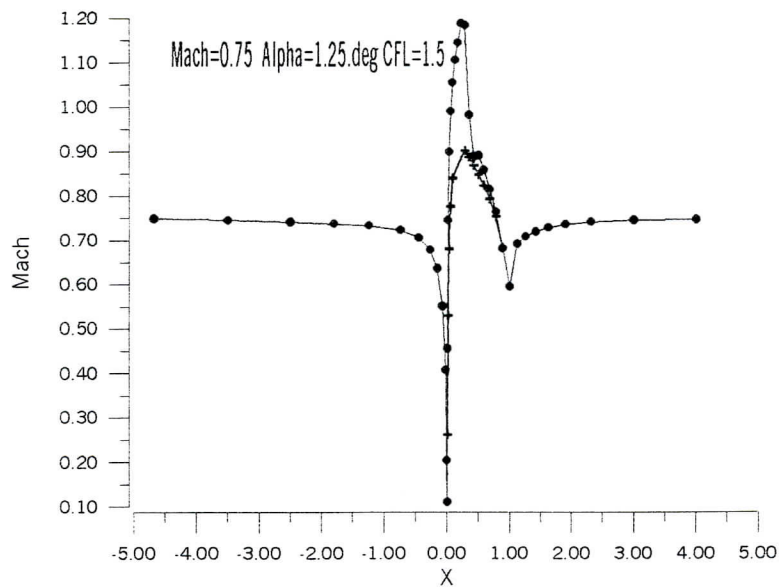


Figure V.6c Evolution du nombre de Mach local à travers la surface du profil  
 NACA0012 Mach = 0.75 Alpha = 1.25 Deg CFL = 1.5

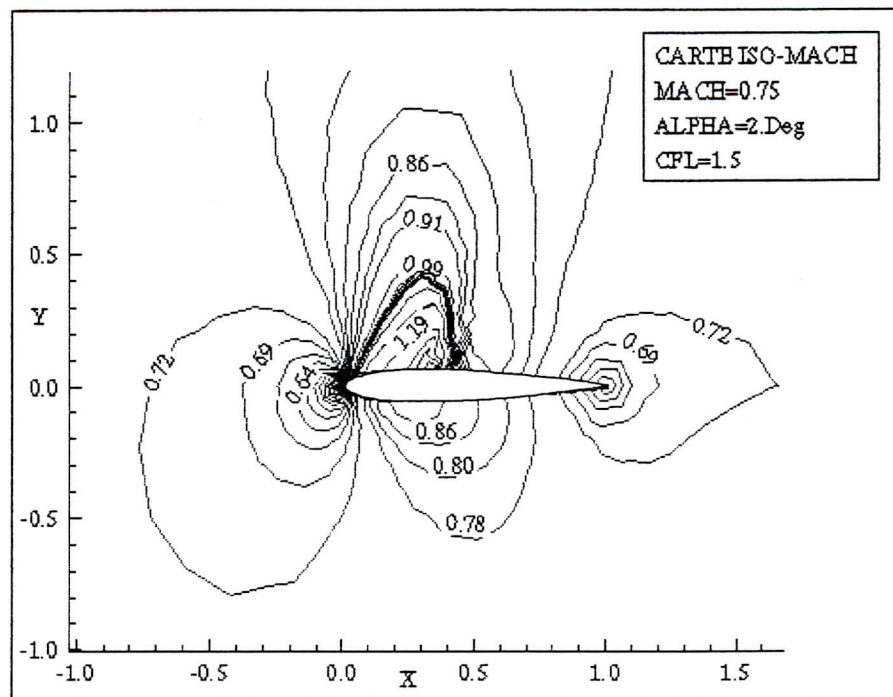


Figure V.6d Répartition des lignes iso-mach autour du profil  
NACA0012 Mach =0.75 Alpha=2.deg CFL=1.5

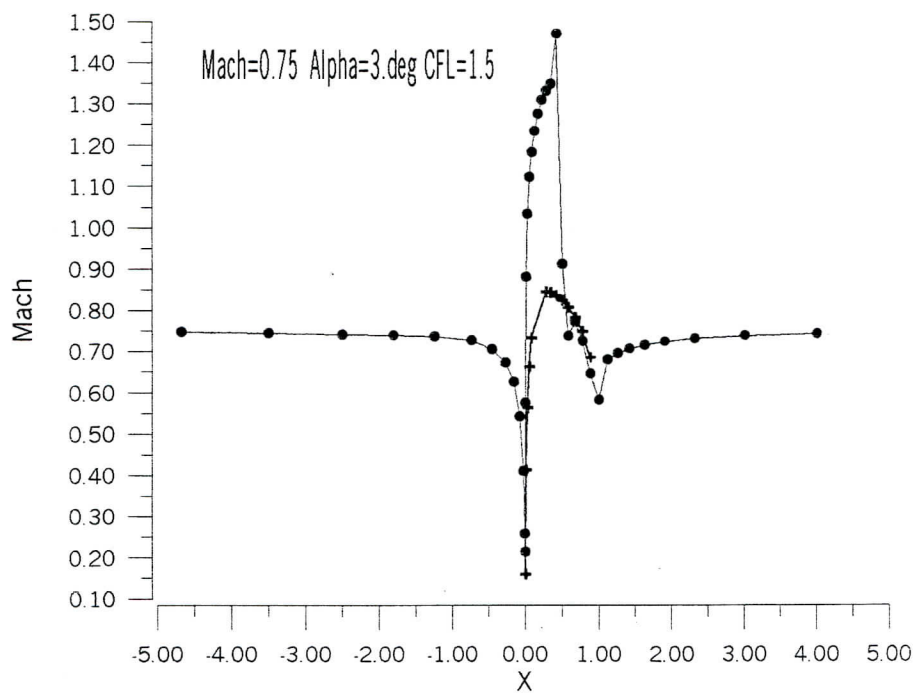


Figure V.6.e Distribution du nombre de Mach local autour du profil  
NACA 0012 MACH=0.75 ALPHA=3.Deg

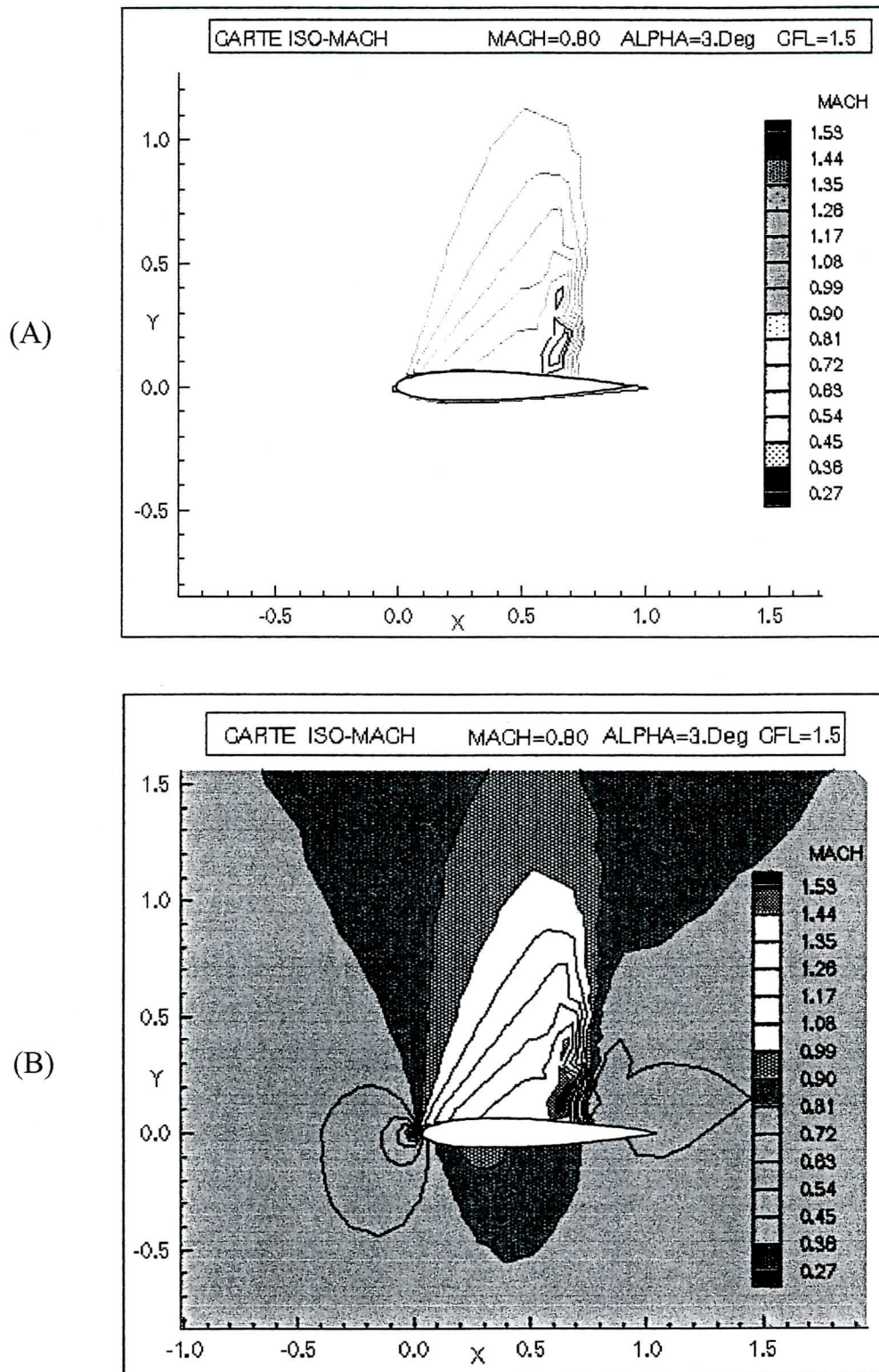


Figure V.6.f (A)&(B) Répartition des lignes iso-mach autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.Deg

### **V.7 Influence de nombre de Mach amont avec l'angle d'incidence sur la distribution de pression**

la figure V.7 nous donne la répartition des pressions autour du profil et comment se matérialise la sustentation pour un nombre de Mach amont de 0.8 et un angle d'incidence de l'écoulement de 3degré. L'écoulement de l'air est arrêté à un point appelé « point d'arrêt » situé au milieu d'un champ de surpressions fortes déplacé légèrement vers l'intrados, à ce point l'énergie cinétique est transformée en énergie de pression, la vitesse est nulle et la pression est maximale appelée « pression d'impact ou pression totale ». Au-delà de ce point la vitesse augmente et la surpression diminue, et d'après la figure 5.6.f une ligne sonique apparaît en conséquence de l'augmentation de la vitesse sous l'effet d'une dépression qui règne à l'intérieur d'une cloche supersonique. Cette dépression se termine par une onde de choc qui modifie l'écoulement brusquement. Une surpression est créée et l'écoulement rejoint les conditions amont. Sur l'intrados un divergent faible provoque une zone de surpression. Le champ de dépression à l'extrados et le champ de surpression de l'intrados qui agissent dans le même sens ont tendance à monter l'aile.

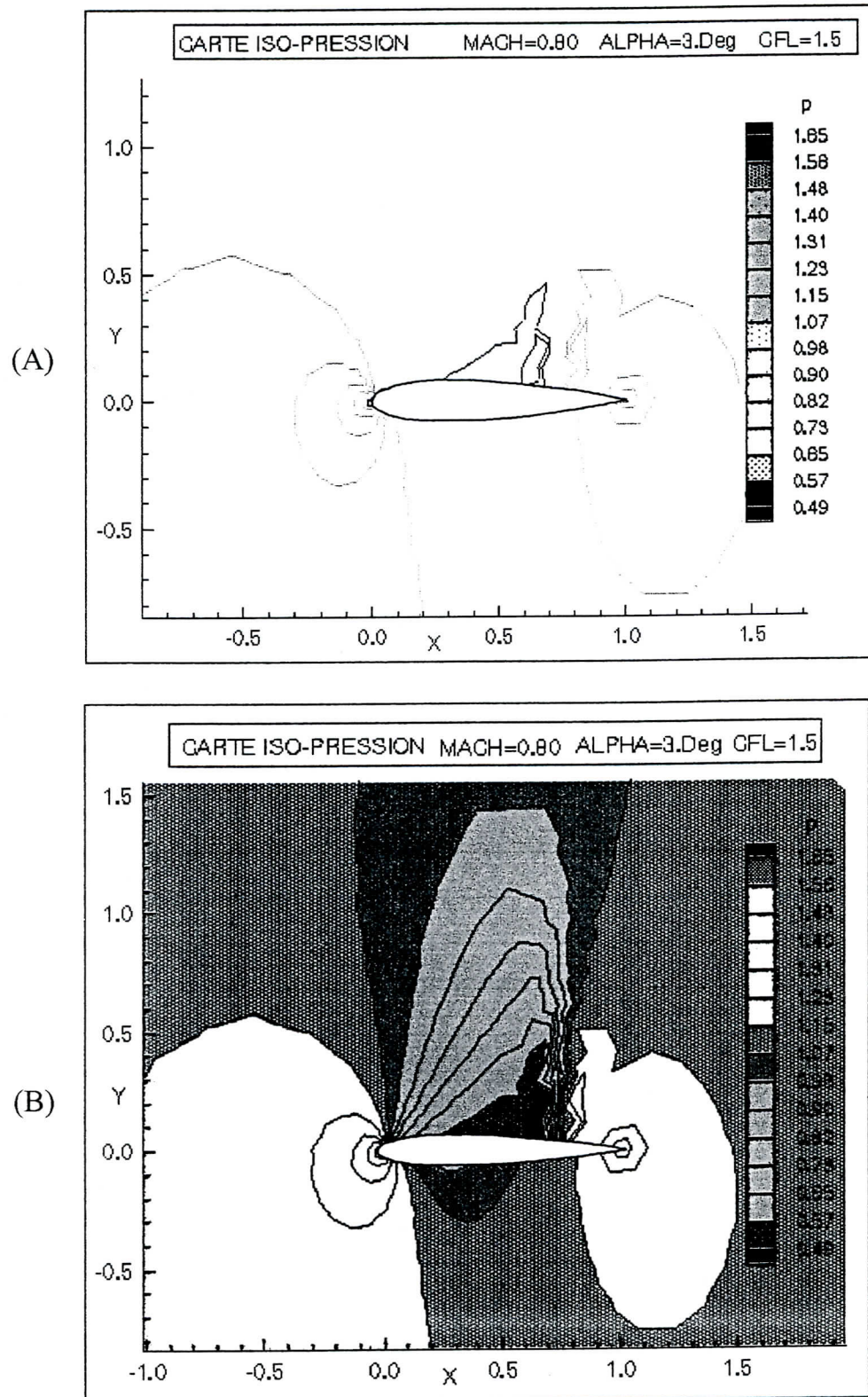


Figure V.7 (A)&(B) Répartition des lignes ISO-PRESSION autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG



### V.8 Répartition du champ d'écoulement

La figure (V.8.a) montre la répartition des Champs de vitesse d'un écoulement laminaire autour du profil NACA 0012 avec un nombre de Mach amont de 0.8 et un angle d'incidence nul. Les filets d'air glissent les uns contre les autres parallèlement à eux-mêmes et s'écartent insensiblement du profil à contourner. Les particules d'air voient leur vitesse et leur trajectoire se modifient très progressivement, pratiquement sans frottement dû à l'hypothèse de non-viscosité de l'air (condition de glissement) : les filets d'air épousent la forme du profil ; c'est ce que l'on observe légèrement en avant du bord d'attaque, ainsi qu'au-dessus et au-dessous du profil. La figure V.8.b montre l'effet de l'augmentation de l'angle d'incidence sur la répartition des lignes de l'écoulement. Les filets d'air se mettent à onduler de façon plus ou moins désordonnée : leur ligne générale suit le profil, mais chaque filet d'air voit sa vitesse évoluer rapidement après son passage dans une zone dans la quel l'écoulement est accéléré, puis elle décélère progressivement à la sortie, avant de rejoindre les conditions amont; cela est affirmé par la figure V.8.c qui montre le champ de vitesse d'écoulement selon l'axe y où on observe les sens des vecteurs vitesses et les zones de perturbation. ce qui est réaffirmé par la figure V.8.d ; qui présente les lignes iso-vitesses et les zones d'accélération et de décélération de l'écoulement autour du profil avec ordre de grandeur.

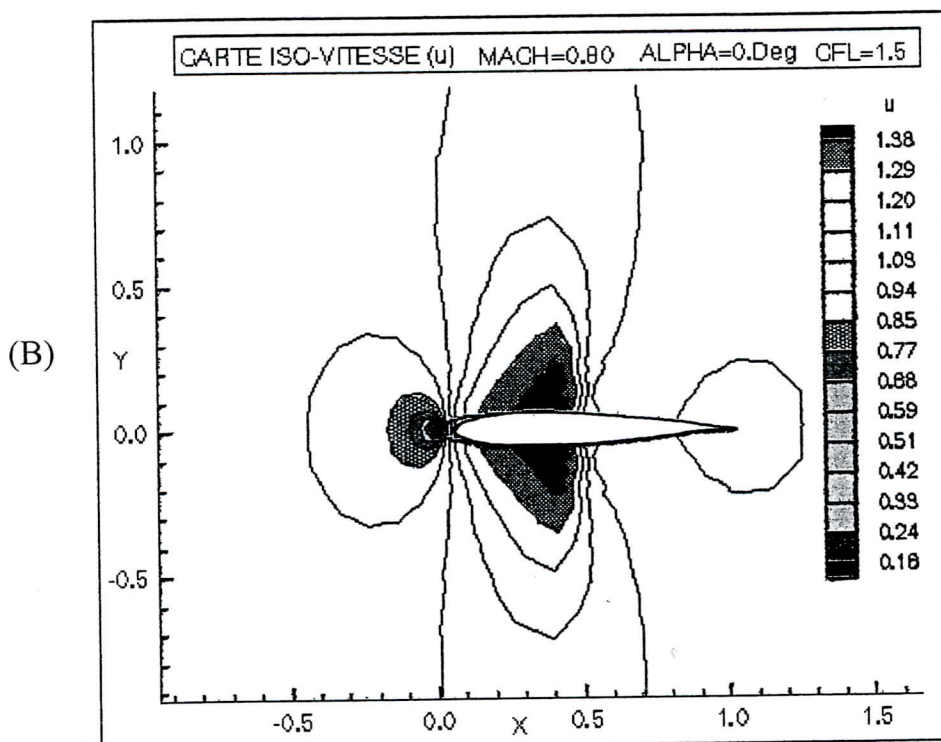
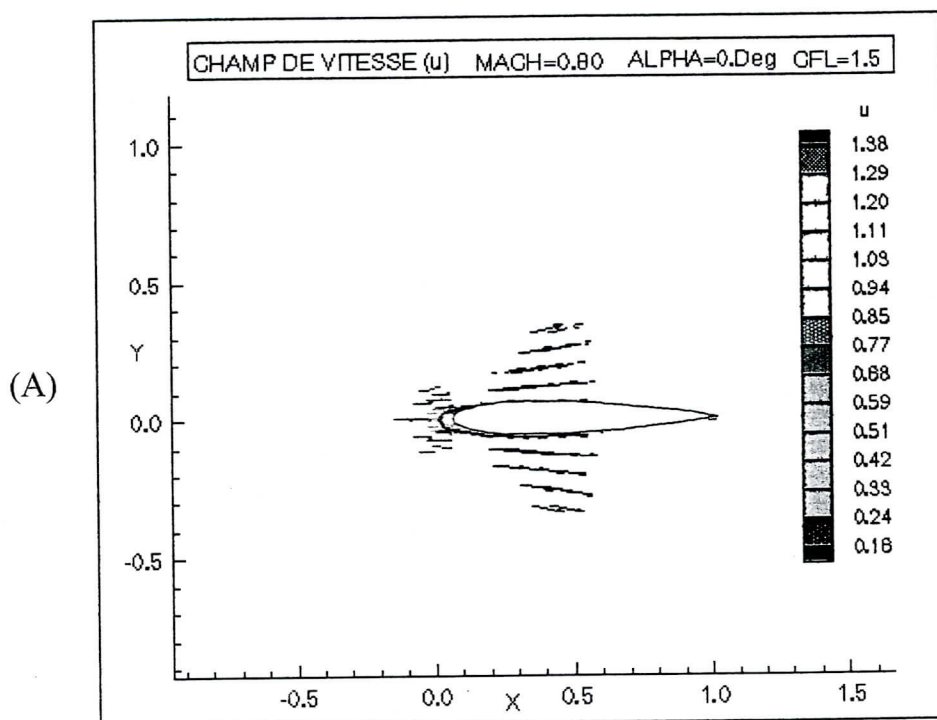


Figure V.8.a (A)&(B) Répartition des Champs de vitesse autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=0.DEG

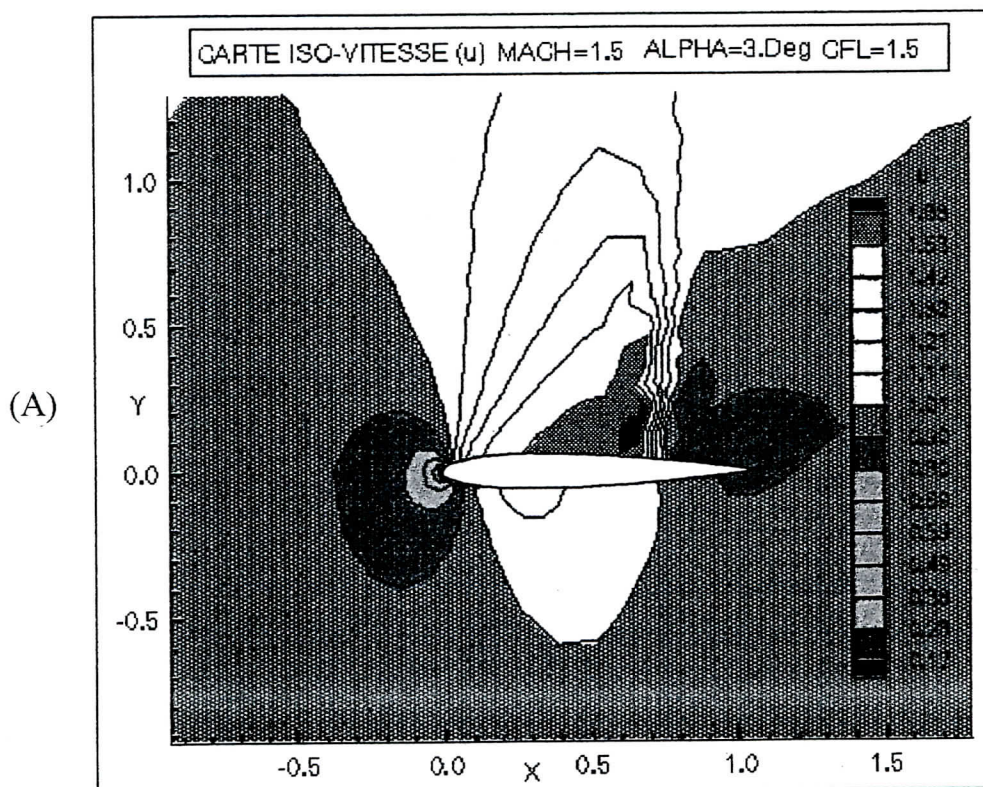
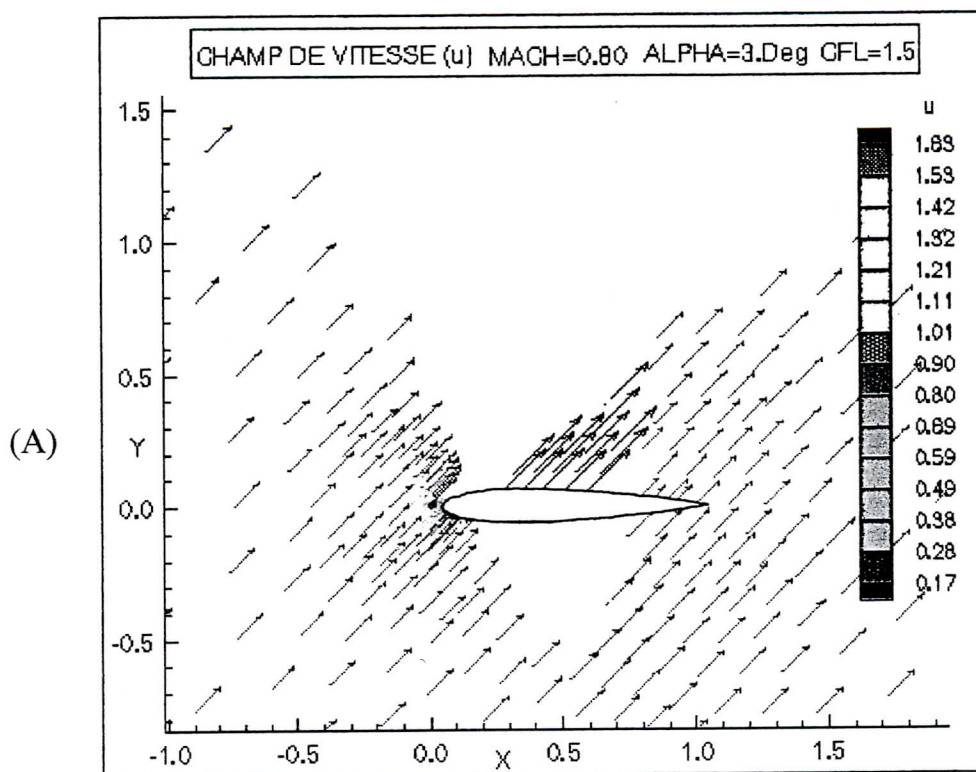


Figure V.8.b (A)&(B) Répartition des Champs de vitesse/x (u) autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG CFL=1.5

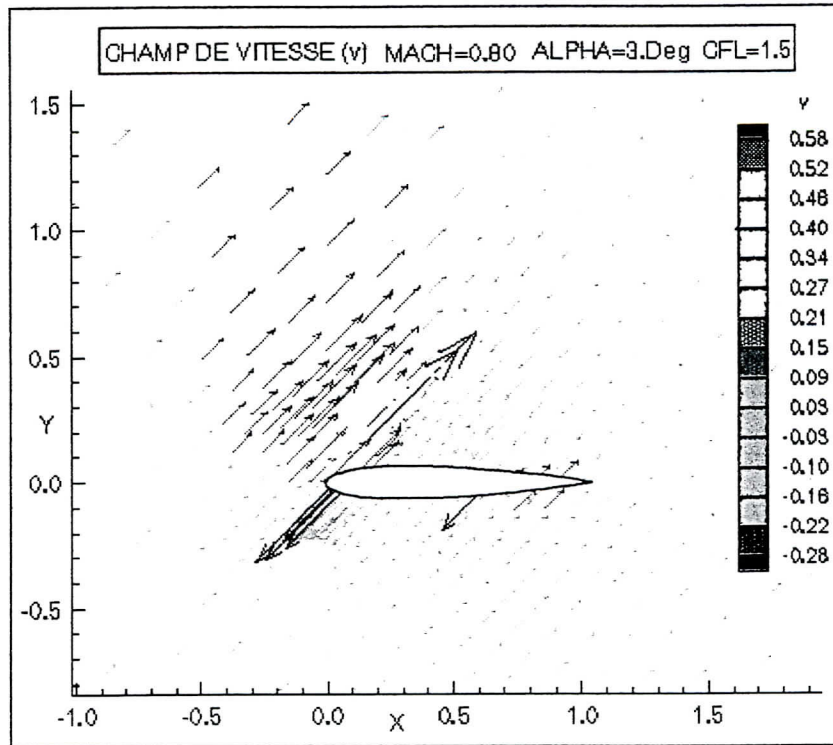


Figure V.8.c Répartition du Champ de vitesse/y (v) autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG

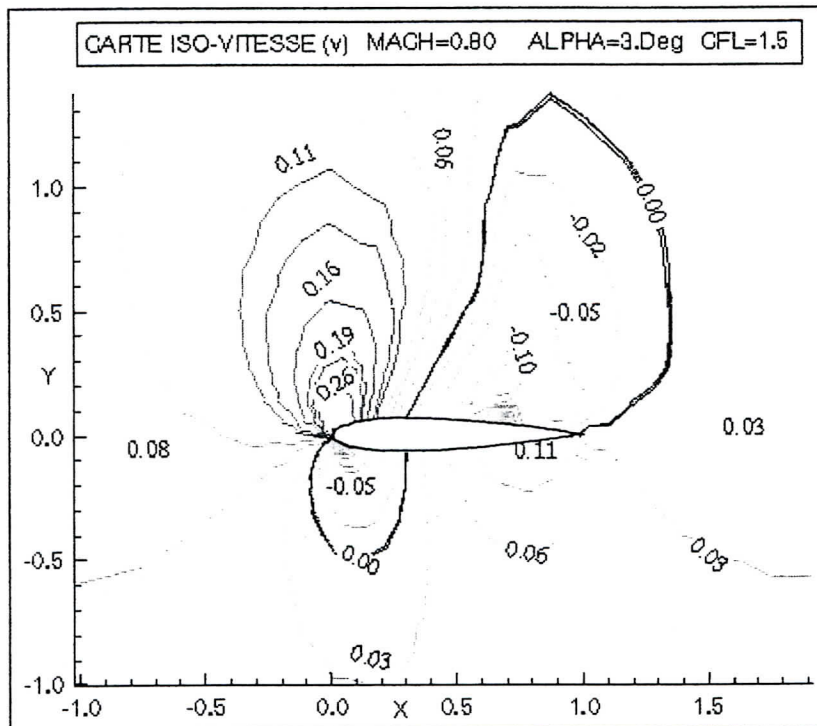


Figure V.8.d Répartition des lignes iso-vitesse/y (v) autour du profil NACA 0012 MACH=0.8 ALPHA=3.DEG

**V.9 Validation des résultats:**

Les paramètres principaux de l'écoulement sont le coefficient de pression, le nombre de Mach et le champ de vitesse de l'écoulement. Ces derniers sont représentés en fonction de la position  $x/c$  sur le profil. Des représentations surfaciques unidimensionnelles et bidimensionnelles le long de la paroi et autour du profil permettent de suivre l'évolution des paramètres donnés au cours du mouvement, ainsi de détecter toute anomalie ou discontinuité dans l'écoulement autour du profil.

La représentation de la distribution du coefficient de pression autour du profil d'aile NACA 0012, est l'une des conséquences physiques de l'application de ces résultats. Pour des nombres de Mach et angles d'incidences différents et pour un nombre  $CFL=1.5$ , les figures V.4a, V.4c et V.5.1 montrent une bonne concordance avec les résultats donnés par les références [8, 9,31], et par le schéma de Roe de la référence [23]. Une représentation surfacique des résultats est donnée par les figures V.4b et V.4d à l'aide d'un logiciel appelé « Tecplot ». Les courbes obtenues ont l'allure suivante: à partir de la chute de pression le long de la surface du profil par rapport à sa valeur de stagnation au bord d'attaque, nous déduisons que l'écoulement est accéléré et devient supersonique. Cette zone supersonique se termine par une onde de choc qui ramène l'écoulement aux conditions subsoniques amont.

Le nombre de Mach joue un rôle primordial dans la définition de l'écoulement, la comparaison de la répartition des lignes iso-Mach autour du profil NACA 0012 des figures V.6d et V.6.f avec les résultats donnés par les références [8,33,36] montre que les courbes ont les mêmes allures, presque sur tout le profil et se coïncident à un certain écart près. Divers exemples ont été exécutés, mais pour des raisons de clarté on a pas représenté tous les cas possibles qui peuvent être traités par notre code « EULER-2D.MVF ».

### V.10 Effet de nombre C.F.L sur la convergence

Afin de montrer l'effet du nombre C.F.L sur la convergence on a présenté sur la figure V.10 la variation de résiduel en fonction du nombre d'itérations pour différents nombres de C.F.L.

La figure montre que pour un résiduel élevé, le nombre C.F.L n'a pas une influence majeure sur le nombre d'itérations nécessaire à la convergence, car le schéma converge pratiquement dans la première centaine d'itérations.

Cependant, l'effet du nombre C.F.L devient de plus en plus important en diminuant le résiduel ; par exemple pour avoir un résiduel de (-4) on remarque d'après la figure que la convergence atteint aux alentours de 800 itérations pour un C.F.L= 0.8, tandis que ce même résiduel peut être obtenu avec un coût moindre de 50% (environ 400 itérations) en prenant un C.F.L=1.5.

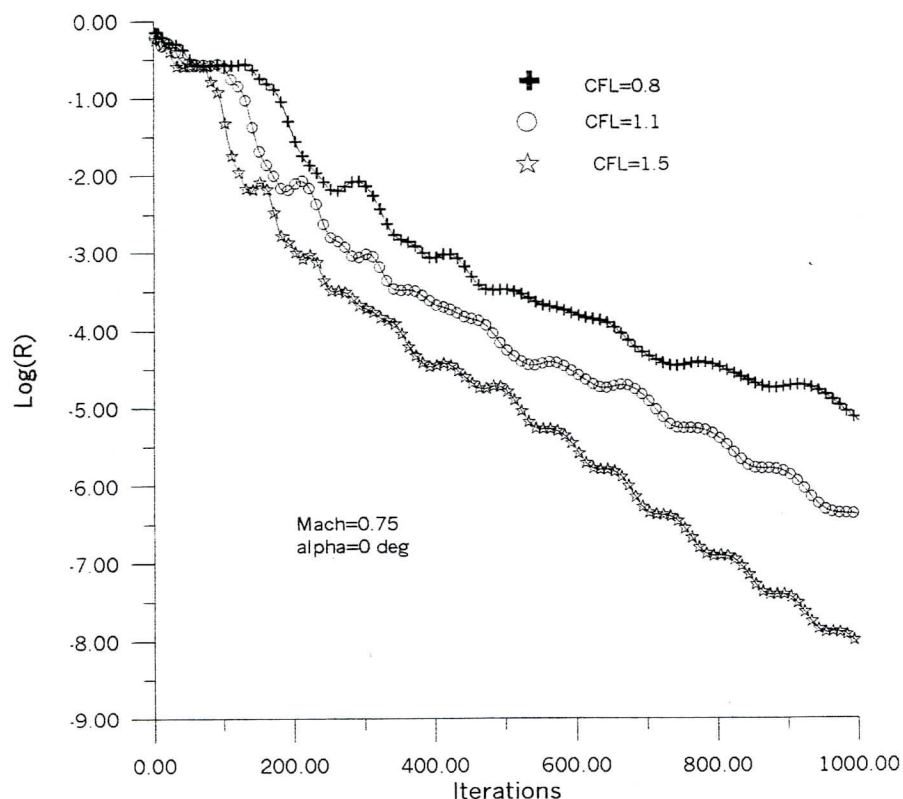


Figure V.10 Effet du CFL sur le résiduel en fonction de nombre d'itérations

## CONCLUSION

L'objectif principal de cette étude était la simulation numérique des écoulements transsoniques, compressibles, rotationnels, non visqueux régis par les équations d'Euler. La stratégie numérique de la résolution utilisée consiste à discrétiser les équations d'Euler qui forment un système hyperbolique non linéaire par la méthode des volumes finis à l'aide d'un maillage pseudorthogonal à éléments centrés, et la résolution des équations différentielles ordinaires obtenues par le schéma de Runge Kutta explicite.

La construction de maillage bien adapté est un élément important pour la précision et l'efficacité du traitement numérique du problème. Une méthode de génération de maillage basée sur les techniques algébriques est utilisée dans notre étude, elle donne une description fonctionnelle directe de la transformation entre les domaines computationnels et physiques.

Dans cette étude, une méthode robuste de prédiction a été proposée pour des écoulements compressibles transsoniques, ainsi pour des écoulements avec discontinuités comme les ondes de choc. Cette méthode est basée sur une technique de volumes finis du deuxième ordre dans l'espace et sur une discrétisation explicite dans le temps, qui utilise des ressources informatiques moins importantes qu'une discrétisation implicite même si l'avancement de la solution dans le temps est moins rapide.

Afin de résoudre les équations physiques gouvernant le problème, on a utilisé un schéma qui se base sur la méthode de Runge Kutta explicite en introduisant la viscosité artificielle d'ordre élevé pour minimiser les fluctuations qui peuvent se présenter dans les régions de discontinuités (choc) ou de forts gradients.

Les méthodes explicites qui sont soumises à la restriction du pas de temps imposé par le critère de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) consistent à trouver la solution au problème de Riemann. Ces schémas demandent de la viscosité artificielle explicite pour satisfaire les critères de stabilité, grâce à l'idée de J. Von Neumann et R.D Richtmyer. Cette méthode consiste à modifier les équations du

fluide parfait en introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et donne à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles.

Finalement on a simulé un écoulement autour du profil NACA 0012 pour différentes valeurs des paramètres physiques à savoir le nombre de Mach à l'infini amont, l'angle d'incidence de l'écoulement et le critère de stabilité CFL. Ce dernier influe avec le raffinement de maillage sur le taux de convergence de la méthode.

La procédure de calcul a été validée sur quelques tests pour lesquels on disposait des résultats d'autres méthodes ou schémas à savoir la méthode intégrale ( méthode de panneaux ), méthode de potentiel complet et avec d'autres travaux récemment publiés. En générale une bonne concordance a été observée entre nos prédictions et ces travaux.

En effet l'approche basée sur les équations d'Euler n'introduit aucune hypothèse limitative sur l'intensité des ondes de choc ou la rotationnelité de l'écoulement comme c'est le cas dans les approches basées sur l'équation du potentiel complet ni en outre sur l'épaisseur des profils. Elle donne des meilleurs résultats même aux régions où l'entropie et les gradients de vorticité sont importants.

En conclusion, l'approche basée sur le système d'équations d'Euler avec un maillage structuré en utilisant le schéma de Runge Kutta représente un schéma robuste vers une bonne prédiction de simulation numérique des écoulements transsoniques, compressibles, rotationnels et non-visqueux au tour du profil d'aile.

A la suite de ce travail, des extensions de l'approche sont envisageables. L'une de ces extensions est l'utilisation de la méthode pour des maillages multi-grilles ou pour des géométries complexes. Du point de vue numérique, il serait intéressant d'introduire la méthode de maillage adapté en utilisant un maillage triangulaire instructure. Du point de vue physique, cette étude pourra être étendue au cas d'écoulements visqueux en introduisant les modèles de turbulence afin de simuler l'effet de la couche limite laminaire ou turbulente.



### BIBLIOGRAPHIE

- [1] **T.EL AICHI** « *Application des techniques de generation de maillages pour le calcul d'écoulements potentiels transsoniques stationnaires* ». Thèse de magister 1997 I.A.B.
- [2] **A.Ecer, E. Citipitioglu, and B.A.Bhutta** « *Design of finite element grids for the comptation of the three dimensional transonic flow around a wing* »  
American institute of Aeronautics and astronautics, Inc 1982, p1-10.
- [3] **Cristian Ilinca**. « *Développement d'estimateurs d'erreur pour la méthode de volumes finis appliquée aux équations d'Euler* ». Thèse d'Etat NOVEMBRE 1996
- [4] **Bernard Monnerie, W.Barnes, Mc Cornik**. « *Aerodynamics Aeronautic and flight mechanic* » New York,1979.
- [5] **Osama A.Kandil & Honghu**. « *Full-potential integral solution for transonic flows with and without embided Euler domains* ».  
ALAA JOURNAL, VOL, 26, NO. 9,SEPTEMBER 1988, p1079-1086.
- [6] **C.Hirsch**. « *Finite volume method and conservative discretisation* ».  
Vol1, John Wiley et Sonc, 1990,p237-262.
- [7] **J.SIDES** – « *Calculs d'écoulement transsonique a l'aide d'une méthode numérique implicite de résolution des équations d'Euler* ».  
*RECH AEROSP-N° 1985.MARS.AVRIL. p89 à 111.*
- [8] **Charles Hirsh**. « *Numerical computation of internal and external flows* »  
Vol 2 ; JOHN WILEY & SONS 1990.
- [9] **Neal T.Frink** NASA Langley research center, Paresh Parikh , Shahyar.P « *A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes* ».  
VIGYAN, Inc. Hamilton, Verginia. AIAA-91-0102 1991.
- [10] **Nadir Bekka**. « *Approchè numerique des couches limites hypersoniques* »  
THESE DE MAGISTER 2000. IAB .
- [11] **S.K.Chakrabartty, K.Dhanalakshmi, and J.S.Mathur**, Bangalore, India  
« *Computation of three-dimensional transonic flow using a cell vertex finite volume méthode for the Euler equations* ». Acta Mechanica 115, 1996,p161-177.
- [12] **Antony Jamson**. « *Solution of the Euler equations for two-dimensional transonic flow by a multi-grid method* »  
Applied Mathematics and Computation 13: 1983, p327-355

## Bibliographie

---

- [13] **A.Jamesson.** "Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes."  
Office of Naval Research contract N00014-81-K-0379 and NASA Contract NAC2-96 1983, p1-11.
- [14] **P.Wang and R.D.Ferraro** « *Parallel multigrid finite volume computation of three dimensional thermal convection* ».  
Jet propulsion laboratory CALIFORNIA institut of technology U.S.A1998.
- [15] **J.B.Malone and N.L. Sankar** « *Numerical solution of two dimensional unsteady transonic flow using the full-potential equations.* »  
AIAA JOURNAL vol. 22, No.8, AUGUST 1984,p1035-1041.
- [16] **Ron-Ho Ni.** « *A multiple-grid scheme for solving the Euler equations* »  
AIAA JOURNAL,vol. 26, No 9,SEPTEMBER 1988, p1565-1571.
- [17] **Christopher A, Kennedy. and Mark.H.carpenter** « *Comparison of several numerical methods for simulation of compressible shear layers* ».  
NASA, Technical paper 3484 Dec. 1997. Hampton Virginia. University of California
- [18] **Nawal El Kahina khelalfa.** « *Application d'une procédure numérique et génération de maillage adapté pour les écoulements supersoniques internes* ».  
THESE DE MAGISTER SEPTEMBRE 1993. Institut de Mécanique de BLIDA.
- [19] **C.A.J. FLETCHER** « *Computational techniques in fluid dynamics* »  
Volume 1, Springer-Varlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [20] **D.A.Caughey** « *Diagonal implicit multigrid algorithm for the Euler equations* »  
AIAA JOURNAL vol.26, No 7, july 1988, p841-851.
- [21] **D.Cauvin** « *Aérodynamique & Mécanique de vol* »  
*Institut d'Aéronautique JEAN MERMOZ edition 1983.*
- [22] **P.Dumaitre** « *Aérodynamique & Mécanique de vol* » *Ecole nationale de l'aviation civile 1990.*
- [23] **BIJAN Mohammadi** « *Fluid dynamics computation with NSC2KE an user-guide* ».  
Release 1.0 No -RT-0164 Institut national de recherché en informatique et en automatique mai 1994.
- [24] **A.Kanarachos and I.Vournas.** « *Multigrid technique applied to the compressible Euler equations* ». Athens, Greece Acta Mechanica 97, (1993), p23-40.

## Bibliographie

---

- [25] **Patrick Strating et René Van Buuren** « *Fast computation of stationary inviscid flow around an airfoil* »  
*Journal of Mathematics* 35: 437-453, Université of Twente 1999
- [26] **David A. Caughey**. « *Diagonal Implicit Multigrid Algorithm for the Euler equations* » . *ALAA JOURNAL, VOL.26, NO.7, JULY 1988, p841-850.*
- [27] **D.Stanescu and w.g.habashi**. « *Essentially Nonoscillatory Euler solutions on Unstructured Meshes Using Extrapolation*”.  
*AIAA JOURNAL, VOL .36, NO.8, AUGUST 1998, p1413,1424.*
- [28] **Andrea Dadone**. « *Fast Euler Solver for Transonic Airfoils, Part II: Applications* »  
*ALAA JOURNAL, VOL. 26, NO. 4, APRIL 1988, p417,423.*
- [29] **A.Verhoff, D.Stookesberry, and S.Agrawal**. « *Far-field computational boundary conditions for two-dimentional external flow problems* »  
*McDonnell Aircraft company, st. Louis, Missouri 631666, AIAA JOURNAL Vol 30, No.11 November1992, p2585-2593.*
- [30] **KLAUS A.HOFFMANN** « *Computational fluid dynamics for engineers* »  
University of Texas at Austin 1989.
- [31] **M.J.Berger and A.Jameson** « *Automatic adaptive grid refinement for the Euler equations* »  
*AIAA JOURNAL* vol.23, No 4, April 1985, p561-568.
- [32] **V.Venkatakrishnan & A. Jameson**. « *Computation of unsteady transonic flow by the solution of the Euler Equations* »  
*ALAA JOURNAL VOL. 26, NO. 8, AUGUST 1988, p974-981.*
- [33] **William A. wood**. « *Equivalence of fluctuation splitting and finite volume for one-dimensional gas dynamics* » Hampton Virginia NASA /TM-97-20627/.
- [34] **N.T.Frink and S.Z Pirzadeh**. « *Tetrahedral finite volume solutions to the Navier-stokes equations on complex configurations* ».  
NASA Langley research center, Hampton Virginia .Tenth international conference on finite elements in fluids. Tucson Arizona January 5-8 1998.
- [35] **R.Swanson, R.Radespiel, E Turkel**. « *On some numerical dissipation schemes* »  
ICASE, NASA LANGLEY 1997.
- [36] **Charles L.ladson, darrel W.Sproles**. « *Computer program to obtain ordinates for NACA Airfoils* »  
Hampton Virginia NASA technical memorandum 4741 december 1996.

## ANNEXE A

## ADIMENSIONNEMENT

## I. Adimensionnement des variables

Les grandeurs physiques sont repérées par une barre «  $\bar{\quad}$  » et rendues sans dimension afin de les utiliser pour la représentation des résultats numériques. En outre, selon [18], on peut adimensionner les grandeurs physiques en posant :

$$\overline{U_\infty} = \overline{\rho_\infty} = \overline{CP} = \overline{p_\infty} = 1$$

à partir de celles-ci on définit les grandeurs adimensionnées :

## I.1 Le temps :

$$\boxed{\bar{t} = t / (C / U_\infty)} \quad (\text{A-1})$$

$C$  : corde du profil

$U_\infty$  : vitesse de l'écoulement à l'infini

$\bar{t}$  : temps adimensionné

## I.2 Abscisse :

$$\boxed{\bar{x} = x / C} \quad (\text{A-2})$$

$\bar{x}$  : Abscisse adimensionnée

## I.3 Masse volumique :

$$\boxed{\bar{\rho} = \rho / \rho_\infty} \quad (\text{A-3})$$

$\rho_\infty$  : masse volumique à l'infini

$\bar{\rho}$  : masse volumique a-dimensionnée

## I.4 Vitesse :

$$\boxed{\bar{u} = u / U_\infty} \quad (\text{A-4})$$

$\bar{u}$  : vitesse a-dimensionnée

**Pression :**

$$\bar{p} = \frac{P}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \frac{\gamma P}{\gamma \rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \frac{\gamma P}{\rho_{\infty} \gamma U_{\infty}^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{c^2}{U_{\infty}^2} = \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \quad (\text{A-5})$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2}} \quad (\text{A-6})$$

$\bar{p}$  : pression a-dimensionné

$M_{\infty}$  : nombre de Mach à l'infini

$\gamma$  : rapport des chaleurs spécifiques CP/Cv

CP : chaleur spécifique à pression constante

Cv : chaleur spécifique à volume constant

c : célérité de son

## II Adimensionnement des équations :

### II.1 Equation de continuité : (1D)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-7})$$

En remplaçant les variables physiques par les variables adimensionnées, on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \rho_{\infty})}{\partial(\bar{t} \cdot C / U_{\infty})} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \rho_{\infty} U_{\infty} \bar{u})}{\partial(x \cdot C)} = 0 \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{U_{\infty} \rho_{\infty}}{C} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_{\infty} \rho_{\infty}}{C} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0} \quad (\text{A-9})$$

### II.2 Equation de quantité de mouvement : (1D)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial(x)} (\rho u^2 + p) = 0 \quad (\text{A-10})$$

substitution des variables adimensionnées

$$\frac{U_\infty}{C} (\rho_\infty U_\infty) \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial(\bar{x}C)} (\rho_\infty U_\infty^2 \overline{\rho u^2} + \bar{p} \rho_\infty U_\infty^2) = 0$$

après la simplification  $\Rightarrow$  
$$\frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial(\bar{x})} (\overline{\rho u^2} + \bar{p}) = 0 \quad (\text{A-11})$$

### II.3 Equation de l'énergie (1D)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(\rho E + p)] &= 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

avec :

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2} u^2$$

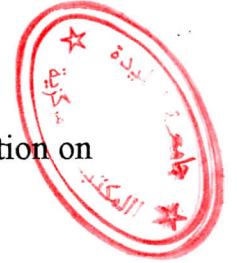
$$H = E + \frac{p}{\rho}$$

Après la substitution des variables adimensionnées et la simplification on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left( \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \overline{\rho u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \bar{u} \left( \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \overline{\rho u^2} + \bar{p} \right) \right] = 0 \quad (\text{A-13})$$

En substituant  $\bar{p}$ , l'équation de l'énergie devient comme suit :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left( \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2} + \frac{1}{2} \overline{\rho u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \bar{u} \left( \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2} + \frac{1}{2} \overline{\rho u^2} + \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right) \right]} = 0 \quad (\text{A-14})$$



## ANNEXE B

### BILAN DES FLUX A TRAVERS LES COTES DE LA MAILLE

#### B.1 Formulation

Le schéma de discrétisation en espace est développé par l'expression des équations d'EULER sous la forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S U d\vec{s} + \int_{\partial S} (f.dy - g.dx) = 0 \quad (\text{B-1})$$

Pour le domaine S avec la limite  $\partial S$

U représente les quantités conservées.

f et g sont les flux en direction des x et des y.

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Le domaine computationnel est divisé en maille quadrilatérale, noté par les indices  $(i, j)$ . Le système des équations différentielles ordinaires est obtenu par l'application des équations séparément de chaque maille. Le flux suivant la direction des x, est donné par :

$$\sum_{k=1}^4 Q_k (\rho u)_k + \Delta y_k p_k \quad (\text{B.3})$$

Où  $Q_k$  est le flux de vitesse :

$$Q_k = \Delta y_k u_k - \Delta x_k v_k \quad (\text{B.4})$$

La somme est sur les quatre cotés de la maille. Chaque quantité est évaluée comme les valeurs moyennes dans la maille sur l'un ou l'autre coté de profil.

$$(\rho u)_1 = \frac{1}{2} \{ (\rho u)_{i,j} + (\rho u)_{i+1,j} \} \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Calcul des composantes de flux net pour chaque surface de la maille

### SURFACE 1

$$\rho u_1 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} * u_{(I,J)} + \rho_{(I+1,J)} * u_{(I+1,J)})$$

$$u_1 = 0.5 * (u_{(I,J)} + u_{(I+1,j)})$$

$$v_1 = 0.5 * (v_{(I,J)} + v_{(I+1,j)})$$

$$p_1 = 0.5 * (p_{(I,J)} + p_{(I+1,j)})$$

$$\rho_1 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} + \rho_{(I+1,j)})$$

$$\rho v_1 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} * v_{(I,J)} + \rho_{(I+1,j)} * v_{(I+1,J)})$$

### SURFACE 2

$$\rho u_2 = 0.5 * (\rho_{(I+1,J)} * u_{(I+1,J)} + \rho_{(I+1,J+1)} * u_{(I+1,J+1)})$$

$$u_2 = 0.5 * (u_{(I+1,J)} + u_{(I+1,j+1)})$$

$$v_2 = 0.5 * (v_{(I+1,J)} + v_{(I+1,j+1)})$$

$$P_2 = 0.5 * (P_{(I+1,J)} + P_{(I+1,j+1)})$$

$$\rho_2 = 0.5 * (\rho_{(I+1,J)} + \rho_{(I+1,j+1)})$$

$$\rho v_2 = 0.5 * (\rho_{(I+1,J)} * v_{(I+1,J)} + \rho_{(I+1,j+1)} * v_{(I+1,J+1)})$$

### SURFACE 3

$$\rho u_3 = 0.5 * (\rho_{(I,J+1)} * u_{(I,J+1)} + \rho_{(I+1,J+1)} * u_{(I+1,J+1)})$$

$$u_3 = 0.5 * (u_{(I,J+1)} + u_{(I+1,j+1)})$$

$$v_3 = 0.5 * (v_{(I,J+1)} + v_{(I+1,j+1)})$$

$$P_3 = 0.5 * (P_{(I,J+1)} + P_{(I+1,j+1)})$$

$$\rho_3 = 0.5 * (\rho_{(I,J+1)} + \rho_{(I+1,j+1)})$$

$$\rho v_3 = 0.5 * (\rho_{(I,J+1)} * v_{(I,J+1)} + \rho_{(I+1,j+1)} * v_{(I+1,J+1)})$$



**SURFACE 4**

$$\rho u_4 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} * u_{(I,J)} + \rho_{(I,J+1)} * u_{(I,J+1)})$$

$$u_4 = 0.5 * (u_{(I,J)} + u_{(I,J+1)})$$

$$v_4 = 0.5 * (v_{(I,J)} + v_{(I,J+1)})$$

$$P_4 = 0.5 * (P_{(I,J)} + P_{(I,J+1)})$$

$$\rho_4 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} + \rho_{(I,J+1)})$$

$$\rho v_4 = 0.5 * (\rho_{(I,J)} * v_{(I,J)} + \rho_{(I,J+1)} * v_{(I,J+1)})$$

**B.3 Calcul de dx et de dy des cotés de la maille.**

$$DX1 = (X_{(I+1,J)} - X_{(I,J)})$$

$$DY1 = (Y_{(I+1,J)} - Y_{(I,J)})$$

$$DX2 = (X_{(I+1,J+1)} - X_{(I+1,J)})$$

$$DY2 = (Y_{(I+1,J+1)} - Y_{(I+1,J)})$$

$$DX3 = (X_{(I+1,J+1)} - X_{(I,J+1)})$$

$$DY3 = (Y_{(I+1,J+1)} - Y_{(I,J+1)})$$

$$DX4 = (X_{(I,J+1)} - X_{(I,J)})$$

$$DY4 = (Y_{(I,J+1)} - Y_{(I,J)})$$

**B.4 Flux de vitesse**

D'après l'équation (B.4) on déduit les flux de vitesse :

$$Q1 = (DY1 * u1 - DX1 * v1)$$

$$Q2 = (DY2 * u2 - DX2 * v2)$$

$$Q3 = (DY3 * u3 - DX3 * v3)$$

$$Q4 = (DY4 * u4 - DX4 * v4)$$

**B.5 Bilan des flux :**

D'après l'équation (B.3) les flux à travers les surfaces de la maille sont évalués comme suit :

$$\mathbf{FLUX1} = \rho_1 * Q_1 + \rho_2 * Q_2 + \rho_3 * Q_3 + \rho_4 * Q_4$$

$$\mathbf{FLUX2} = Q_1 * \rho u_1 + DY_1 * P_1 + Q_2 * \rho u_2 + DY_2 * P_2 + Q_3 * \rho u_3 + DY_3 * P_3 \\ + Q_4 * \rho u_4 + DY_4 * P_4$$

$$\mathbf{FLUX3} = Q_1 * \rho v_1 - DX_1 * P_1 + Q_2 * \rho v_2 - DX_2 * P_2 + Q_3 * \rho v_3 - \\ DX_3 * P_3 + Q_4 * \rho v_4 - DX_4 * P_4$$

$$\mathbf{FLUX4} = [(P_1 / (\gamma - 1) + 0.5 * \rho_1 * (u_1^{**2} + v_1^{**2})) + P_1] * Q_1 + \\ + [(P_2 / (\gamma - 1) + 0.5 * \rho_2 * (u_2^{**2} + v_2^{**2})) + P_2] * Q_2 + \\ + [(P_3 / (\gamma - 1) + 0.5 * \rho_3 * (u_3^{**2} + v_3^{**2})) + P_3] * Q_3 + \\ + [(P_4 / (\gamma - 1) + 0.5 * \rho_4 * (u_4^{**2} + v_4^{**2})) + P_4] * Q_4$$

Où  $p, \rho, u, v, E$  et  $H$  indiquent la pression, la densité, les composants cartésiens de la vitesse, énergie totale et l'enthalpie totale pour un gaz parfait.

## ANNEXE C

## LES TERMES DISSIPATIFS.

Suite à la définition de la viscosité artificielle donnée par le paragraphe IV.3 et le rôle des termes dissipatifs introduit aux équations de l'écoulement (Eq. IV.9 )

$$\frac{d}{dt}(hU) + QU - DU = 0 \quad (\text{C.1})$$

Où Q : est l'opérateur de discrétisation spatiale défini par l'équation (IV.7)

D : est l'opérateur dissipatif

DU :est un mélange de deuxièmes et quatrièmes différences avec coefficient qui dépend de gradient de pression local.

La construction des termes dissipatives pour chacun des quatre variables conservatives est similaire.

Pour l'équation de la densité on a :

$$D\rho = D_x\rho + D_y\rho \quad (\text{C.2})$$

ou  $D_x\rho$  et  $D_y\rho$  sont les contributions correspondent au deux coordonnés de direction, écrit en forme conservative :

$$\begin{aligned} D_x\rho &= d1_{i+1/2,j} - d1_{i-1/2,j} \\ D_y\rho &= d1_{i,j+1/2} - d1_{i,j-1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

les termes sur la droite tous ont une forme similaire :

$$\begin{aligned} d1_{i+1/2,j} &= \frac{h_{i+1/2,j}}{\Delta t} \left\{ \varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} (\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} (\rho_{i+2,j} - 3\rho_{i+1,j} + 3\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}) \right\} \\ d1_{i-1/2,j} &= \frac{h_{i-1/2,j}}{\Delta t} \left\{ \varepsilon_{i-1/2,j}^{(2)} (\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}) - \varepsilon_{i-1/2,j}^{(4)} (\rho_{i+1,j} - 3\rho_{i,j} + 3\rho_{i-1,j} - \rho_{i-2,j}) \right\} \\ d1_{i,j+1/2} &= \frac{h_{i,j+1/2}}{\Delta t} \left\{ \varepsilon_{i,j+1/2}^{(2)} (\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j}) - \varepsilon_{i,j+1/2}^{(4)} (\rho_{i,j+2} - 3\rho_{i,j+1} + 3\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}) \right\} \\ d1_{i,j-1/2} &= \frac{h_{i,j-1/2}}{\Delta t} \left\{ \varepsilon_{i,j-1/2}^{(2)} (\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}) - \varepsilon_{i,j-1/2}^{(4)} (\rho_{i,j+1} - 3\rho_{i,j} + 3\rho_{i,j-1} - \rho_{i,j-2}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Pour l'équation de la quantité de mouvement on a :

$$D\rho u = D_x \rho u + D_y \rho u \quad (C.5)$$

$$D_x \rho u = d2_{i+1/2,j} - d2_{i-1/2,j} \quad (C.6)$$

$$D_y \rho u = d2_{i,j+1/2} - d2_{i,j-1/2}$$

$$d2_{i+1/2,j} = \frac{h_{i+1/2,j}}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{i+1/2,j}^{(2)} (\rho_{i+1,j} * u_{i+1,j} - \rho_{i,j} * u_{i,j}) - \varepsilon_{i+1/2,j}^{(4)} (\rho_{i+2,j} * u_{i+2,j}) \\ &- 3\rho_{i+1,j} * u_{i+1,j} + 3\rho_{i,j} * u_{i,j} - \rho_{i-1,j} * u_{i-1,j} \end{aligned} \right\}$$

$$d2_{i-1/2,j} = \frac{h_{i-1/2,j}}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{i-1/2,j}^{(2)} (\rho_{i,j} * u_{i,j} - \rho_{i-1,j} * u_{i-1,j}) - \varepsilon_{i-1/2,j}^{(4)} (\rho_{i+1,j} * u_{i+1,j}) \\ &- 3\rho_{i,j} * u_{i,j} + 3\rho_{i-1,j} * u_{i-1,j} - \rho_{i-2,j} * u_{i-2,j} \end{aligned} \right\} \quad (C.7)$$

$$d2_{i,j+1/2} = \frac{h_{i,j+1/2}}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{i,j+1/2}^{(2)} (\rho_{i,j+1} * u_{i,j+1} - \rho_{i,j} * u_{i,j}) - \varepsilon_{i,j+1/2}^{(4)} (\rho_{i,j+2} * u_{i,j+2}) \\ &- 3\rho_{i,j+1} * u_{i,j+1} + 3\rho_{i,j} * u_{i,j} - \rho_{i,j-1} * u_{i,j-1} \end{aligned} \right\}$$

$$d2_{i,j-1/2} = \frac{h_{i,j-1/2}}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{i,j-1/2}^{(2)} (\rho_{i,j} * u_{i,j} - \rho_{i,j-1} * u_{i,j-1}) - \varepsilon_{i,j-1/2}^{(4)} (\rho_{i,j+1} * u_{i,j+1}) \\ &- 3\rho_{i,j} * u_{i,j} + 3\rho_{i,j-1} * u_{i,j-1} - \rho_{i,j-2} * u_{i,j-2} \end{aligned} \right\}$$

ou  $h$  est le volume de la maille, et les coefficients  $\varepsilon^{(2)}$  et  $\varepsilon^{(4)}$  sont donnés par les équations (IV.14), (IV.15).

Les termes dissipatifs pour les équations restantes sont obtenus en remplaçant  $\rho v$  et  $\rho E$  où  $\rho H$  à la place de  $\rho u$  dans la formule (C.5).

