REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA
Faculté des Sciences de l'ingénieur
Département d'aéronautique

06/5/07
Ex1

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état
En Aéronautique
Filière : Construction Aéronautique
Spécialités : Propulsion & Structure

Thème

ETUDE VIBRATOIRE DES LIGNES D'ARBRE EN TORSION ET EN FLEXION

Réalisé par :

- LATRECHE Mohamed
- SADEKI Brahim

Encadré par :

- Dr. Allali Abderrazak

Promotion -2007-

ملخص:

إن إهتزاز عمود المحرك أمر حتمي، عندما تبلغ سرعة دوران هذا الأخير مستواها الحرج يكون في حالة إهتزاز قصوى، وهذا ما يسمى بحالة الرنين والتي غالبا ما تكون مخربة. ولحماية المحرك أثناء نشاطه قمنا بدراسة السلوك الإهتزازي للعمود في حالة الإلتواء والإنحناء.

Résumé

La vibration de l'arbre du moteur est inévitable, quand sa rotation atteint la vitesse critique, le rotor soit en état de vibration maximum qu'on appelle *la résonance* qui souvent destructive pour protéger le moteur au cour de son fonctionnement, on a fait un étude qui porte sur le mode de vibration du rotor en flexion et en torsion.

Abstract

The vibration of the engine line is inevitable. When its rotation reaches its critical speed, the rotor gets into a state of maximum vibration called resonance witch is often destructive. To protect the engine during its activity we have made a study consisting on the vibration mode of the engine in both states of flexion and torsion.

TABLE DES MATIERES

NOMENCLATURE

INTRODUCTION

DESCRIPTION GENERALE DU BANC D'ESSAI

Chapitre I

GENERALITES

I.1. Phénomènes vibratoires ... 1

I .2.Les différents types de vibrations ... 2

I.2. 1 Vibration périodique ... 3

I.2 .1 .1 Vibration harmonique ... 3

I. 2.1.2 Somme de vibrations ... 4

I.2.1.3 Représentation des vibrations périodiques ... 5

I.2.2.1 Vibration apériodique ... 5

I.2.2.2 Vibration pseudo-périodique ... 5

I.2.2.3 Vibration transitoire ... 6

I.2.2.4 Vibration aléatoire ... 6

I.3 Caractéristiques d'une vibration ... 7

I.3.1 Amplitude ... 7

I.3.2 Fréquence ... 7

1.3.3 Phase ... 7

I.4 Grandeur de mesure des vibrations mécaniques ... 8

I.4.1 Déplacement vibratoire ... 8

I.4.2 Vitesse vibratoire ... 8

I.4.3 Accélération vibratoire ... 8

I.4.3.1 valeur crête /crête ... 9

I.5 Fréquence Propre ... 9

I.6 Vibration longitudinale d'une barre prismatique : ... 11

I.7 Vibration de torsion d'une pièce cylindrique ... 12

I.8 Vibration de flexion d'une pièce prismatique ... 12

I.9 Excitation permanentes ... 13

I.9.1 Balourd ... 13

I.9.2 Différents balourds ... 14

I.9.2.1 Balourd statique ... 14

I.9.2.2 Couple de balourds ... 14
I.9.2.3 Balourd quasi statique ... 15
I.9.2.4 Balourd dynamique ... 15
I.9.3 Origine des balourds sur les rotors ... 16
I.9.3.1 Déséquilibre massique des rotors. Balourds ... 16
I.9.3.2 Balourd d'origine mécanique ... 16
I.9.4 Le balourd en flexion ... 16
I.9.5 Le balourd en torsion ... 17
I.10 Vitesse critique en flexion ... 18
I.11 Vitesse critique en torsion ... 18
I.12 Vibration d'un rotor rigide sous l'influence d'un balourd ... 18
I.12.1 Vibrations dues à un balourd statique ... 18
I.12.2 Vibrations dues à un balourd dynamique ... 19
I.12.3 Vibrations dues à un balourd complexe ... 19
I.12.4 La précision directe et la précision inverse ... 19
a- la précision inverse ... 19
b- la précision directe ... 20

Chapitre II

DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORTION

II.1 Mise en évidence de la vibration de torsion ... 21
II.2 Les matrices d'inerties ... 24
II.2.1 Première type de distribution (Modélisation) ... 24
II.2.1.1 Les avantages et les inconvénients de cette méthode ... 24
Les avantages ... 24
Les inconvénients ... 25
II.2.1.2 Principe de la modélisation en torsion ... 25
II.3 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique plein de diamètre constant ... 26
II.3.1 Représentation de la raideur répartie ... 26
II.3.2 Représentation de l'inertie répartie ... 26
II.3.3 Précaution prendre dans la modélisation ... 27
II.4 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique de diamètre constant avec alésage centré ... 27

II.5 Modélisation d'un tronçon axisymétrique conique ... 28
II.5.1 Représentation de la raideur et l'inertie réparties ... 28
II.6 Mise en équation ... 29
II.6.1 Equation de mouvement ... 29
II.7 Deuxième type de distribution (linéaire) ... 31
II.7.1 Résolution numérique du système aux valeurs propre ... 33

Chapitre III

DYNAMIQUE DES ROTORS EN FLEXION

III.1Détermination des caractéristiques des éléments de rotor ... 34
III.1.1Disque ... 34
III.1.2 Arbre ... 36
III.1.2.1 Énergie cinétique ... 36
III.1.2.2 Énergie de déformation ... 36
III.1.3 Palier ... 39
III.1.4 Balourd ... 40
III.2 La méthode des éléments finis ... 41
III.2.1 Modélisation par éléments finis ... 41
III.2.1.1 Disque ... 41
III.2.1.2 Arbre ... 42
III.2.1.3 Fonction de forme et les matrices élémentaires ... 43
a). Elément fini (barre libre encastrée) ... 43
b). Elément fini (barre encastrée – encastrée) ... 47
c). Elément finis (barre encastrée – libre) ... 49
III.2.1.4 Paliers ... 50
III.2.2Balourds ... 51
III.2.2.1 Equation de mouvement ... 51
III.3 la méthode de matrice de transfère ... 51
III.3.1 Méthode de calcul de la matrice de transfère ... 52
III.3.2 principe ... 53
III.4 La méthode d'intégration :(la méthode d'Euler) ... 54

Chapitre IV

DYNAMIQUE DES ROTORS

EN TORSION (APPLICATION)

IV.1 Présentation de turboréacteur 55

IV.1.2.1 Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs 57

IV.1.2.2 Moment d'inertie équivalent pour la turbine 59

IV.2 Distribution de l'arbre en trois éléments 60

IV.2.1remière type de discrétisation 60

IV.2.2 Résultats de la première type de modélisation 63

IV.2.3 Deuxième type de discrétisation 63

IV.2.4 Les résultas de la deuxième discrétisation 64

VI.3 Les résultats obtenue par les deux types de modélisation 64

a) Les pulsations propres 64

b) les vecteurs propres 65

IV.4 Distribution de l'arbre en cinq éléments 67

IV.4.1 La modélisation par première type d distribution 67

IV.4.2 La modélisation par la deuxième type de distribution 68

VI.5 Interprétation des résultats 70

Chapitre V

DYNAMIQUE DES ROTORS

EN FLEXION (APPLICATION)

V.1 Dynamique de rotor en flexion application 71

V.1.1 modélisation de rotor à un disque 71

V.1.1.1 La méthode de matrice de transfère 71

V.1.1.2Développements 73

a) Le régime libre 73

b) Le régime forcée 74

V.2 Exemple de calcul 75

V.2.1 Méthode de matrice de transfère 75

a) L'arbre 75

b) Disque ... 76
V.2.1.1 Les pulsations propres ... 76
V.2.1.2 La réponse au Balourd ... 77
V.2.2 La méthode des éléments finis ... 78
a) L'arbre ... 78
b) Disque : ... 79
c) L'assemblage ... 79
V.3 Etude de turboréacteur par la méthode des éléments finis ... 81
V.4 Interprétation des résultats ... 82

Chapitre VI

L'EQUILIBRAGE ACTIF

DES ROTORS

VI. L'équilibrage actif ... 83
VI.1. Principe ... 84
VI.2. Méthode des coefficients d'influence ... 85
VI.2.1. Définition des coefficients d'influence ... 85
VI.2.2. Détermination des coefficients d'influence et des balourds de correction ... 86
VI.2.3. Minimisation par les moindres carrés ... 87
VI.2.4. Prise en compte du faux-rond ... 88
VI.3. Etude du chemin optimal ... 88
VI.3.1. Détermination des positions de correction ... 89
VI.3.2. Critère de déplacement des satellites ... 90
VI.4. Modules de mesure ... 91
VI.4.1. Mesure de la position des satellites et de la vitesse de rotation ... 92
VI.4.2 La vitesse de rotation et les phases des satellites ... 93
VI.5. Stratégie d'équilibrage actif ... 94
VI.5.1. Stratégie de correction ... 94
VI.5. 2.Organisation des phases d'équilibrage ... 96
VI.5.3. Organisation du système actif ... 98
VI.6. Conclusion ... 99

CONCLUSION GENERALE

LES ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES FIGURES

Figure (I.1) : vibration harmonique ... 4

Figure (1.2) : superposition de deux vibration harmoniques ... 4

Figure (I.3) Représentation de vibrations périodiques en fonction du temps et des fréquences ... 5

Figure (I.4) : vibrations pseudo- périodiques ... 6

Figure (I.5) Vibration transitoire ... 6

Figure (I.6) : Vibrations aléatoires ... 7

Figure (I.7) Grandeurs d'une vibration harmonique ... 7

Figure (I.8) : valeurs crête /crête, crête, moyenne et efficace d'une vibration sinusoïdale ... 9

Figure (I .9) système masse ressort amortisseur ... 9

Figure I.10 Barre prismatique : déplacement ... 11

Figure I.11 Torsion pure d'une poutre ... 12

Figure I.12 Flexion pure d'une poutre ... 12

Figure (I.13) : Balourd statique ... 14

Figure (I.14): couple de balourd ... 15

Figure (I.15) : balourd quasi statique ... 15

Figure (I.16) : balourd dynamique ... 15

Figure (I.17) Balourd ... 17

Figure I-18 Orbite du rotor : précision inverse ... 19

Figure (I-19) Orbite du rotor : précision directe ... 20

Figure (II-1) Arbre en torsion ... 21

Figure (II.2) calcul des caractéristique d'un tronçon alésé ... 27

Figure II.3 Géométrie d'un tronçon conique ... 28

Figure II.4 Modèle torsionnelle générique d'une ligne d'arbre ... 29

Figure II.5- structure de la matrice de masse du modèle de la figure II.4 ... 30

Figure II.6 – structure de la matrice de rigidité du modèle de la figure II.4 ... 31

Figure III.1 Repère de référence du disque sur l'arbre flexible ... 37

Figure III.2 Section droite de l'arbre ... 37

Figure III.3 Amortissement et raideur d'un palier ... 39

Figure III.4 – Balourd ... 40

Figure III.5 Degré de liberté ... 42

Figure III.6 les différents éléments finis (barres) ... 43

Figure IV.2 Modélisation d'un réacteur (réalisé par logiciel ''solid works'' 56
Figure IV.3 Calcul du moment d'inertie équivalent pour les compresseurs 57
Figure IV.4 calcul des moments d'inertie équivalent pour la turbine 59
Figure IV.5 Moments d'inerties équivalents et rigidités
équivalents Pour les différents tronçons d'arbre 60
Figure IV.6 Deuxième étape de modélisation 62
Figure VI.7 distribution linéaire d'inertie 63
Figure IV.8 Graphe représente de tableau IV.4 66
Figure IV.8 Discrétisation de ligne en 5 éléments 67
Figure IV.9 Discrétisation de ligne d'arbre en 5 éléments 68
Figure IV.10 Graphe représente les modes propres
de vibration de ligne d'arbre Discrète e 5 éléments 69
Figure V.1 modélisation par la méthode matrice de transfère 71
Figure V.2 Rotor axisymétrique 75
Figure V.3 la repense au balourd par la méthode matrice de transfère 77
Figure V.4 modélisation par éléments finis de rotor
d'un seul disque réalisé avec deux éléments 78
Figure V.5 La réponse au balourd d'un rotor à un disque par éléments finis 80
Figure V.6 Modélisation par méthode éléments finis
du rotor d'un seul disque Réalisé avec 6 éléments 80
Figure (V.7) Modélisation en M E F de modèle simplifié
de ligne d'arbre Du turboréacteur réalisé avec quatre noeuds 81
Figure VI.1 Génération d'un balourd à partir de deux masses 84
Figure VI.2 Schéma de principe de l'équilibrage actif 84
Figure VI.3 : Positions de correction 89
Figure VI.4 : Exemples de configurations de déplacement des satellites 91
Figure VI.5 : Dispositif de mesure de la position des satellites et du top tour 92
Figure VI.6 : Principe de détermination de la phase des satellites et
de la période de rotation 93
Figure VI.7 : Positionnement des vitesses d'équilibrage 95
Figure VI.8: Organisation de la phase d'apprentissage pour NP plans d'équilibrage 97
Figure VI.9 : Organisation de la phase d'exploitation pour NP plans d'équilibrage 98
Figure VI.10 : Schéma synoptique du système d'équilibrage actif 99

NOMENCLATURE

E	*Module d'Young*
f	*Fréquence*
F	*Force*
G	*Module de cisaillement, centre de gravité*
g	*accélération de la pesanteur*
I_0	*Tenseur d'inertie*
I	*Inertie diamétrale*
K	*Rigidité*
L,l	*Longueur*
M,m	*Masses*
N	*Vitesse de rotation, nombre de degré de liberté*
Q_1, Q_2	*Amplitude*
S	*Section*
T	*Energie cinétique*
U	*Energie de déformation*
δW	*Travail virtuel des forces extérieures*

δ	*Facteurs des déplacements nodaux*
υ	*Coefficient de poisson*
ρ	*Masse volumique*
σ	*Contrainte*
ω	*Pulsation, fréquences*
Ω	*Vitesse de rotation*
$[M]$	*Matrice des masses*
$[C]$	*Matrice des amortissements*
$[K]$	*Matrice des raideurs*
a	*Arbre*
b	*Balourd*
c	*Critique*
d	*Disque*

Remerciments

Ce n'est qu'avec le soin et la bienveillance d'Allah

que le présent travail est accompli.

Puis nous remercions notre cher encadreur Dr. Allali abderrazak qui n'a épargné aucun effort pour que ce mémoire soit achevé à l'heure. Dr Zebbiche Toufik est également à remercier ainsi que tous les enseignants nous ont facilité la tâche y compris ceux de l'université de Laghouat.

Nous apprécions beaucoup l'aide et l'encouragement que notre collègue Hanafi Abdelkader nous apporté.

Merci à tous

1.1 Banc d'essai GILKES GT-117 : [1]

Le banc d'essai GT-117 est un réacteur mono corps mono flux de construction anglaise de la maison GILKES, dont le symbole (**GT-117**).

1.2 Désignation :

L'utilisation d'une pièce quelconque exige la connaissance de cette dernière soit ses différentes caractéristiques opérationnelles ou bien le fonctionnement de cette pièce et différents domaines d'utilisation.

GT : turbine à gaz.

117 : classe ou famille ayant approximativement les mêmes dimensions.

2.3 Les principaux organes du moteur :

Dans sa formule la plus simple, le réacteur comprend :

- Un compresseur aspirant l'air extérieur en amont.
- Une chambre de combustion dans laquelle l'air comprimé est brûlée avec un apport de carburant.
- Une turbine qui est mue par le gaz de combustion poursuit leur détente à la sortie de la turbine en produisant la poussée.

Le principe de fonctionnement d'un réacteur se caractérise par le fait que, tout au long du cycle, le fluide de travail est l'objet de transformation de vitesse en pression et inversement.

1.3.1 L'entrée d'air

C'est une conduite de section variable calculée de telle sorte que l'énergie cinétique de l'air incident se transforme en énergie de pression. La forme donner à cette conduite diffère selon que la vitesse de vol est inférieure ou supérieur à la vitesse de son.

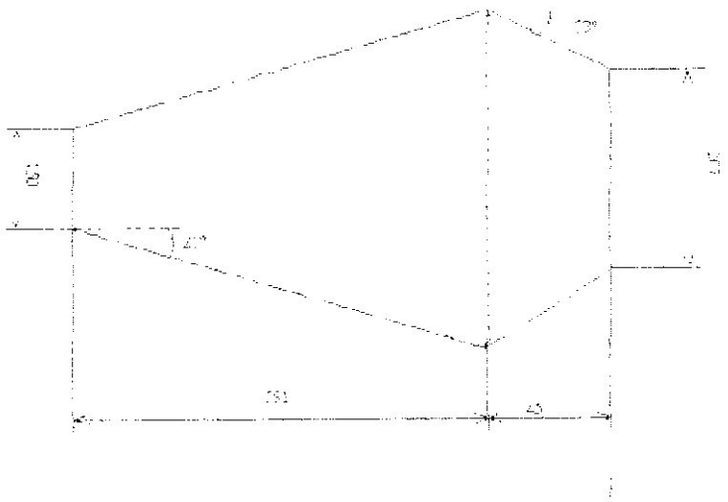


Figure 1.1 Dimension de l'entree

1.2.2 Compresseur :

La station compresseur de GT - 117 est constituée de deux étages axiaux et d'un compresseur centrifuge.

a) compresseur axial

Il se compose de deux étages, dont chacun de eux est constitué de deux grilles d'aubes montées perpendiculairement à la périphérie d'une roue, ces grilles sont alternativement fixes et mobiles et se font face l'une à l'autre (Figure 1.2) . Les grilles fixes sont montées sur le stator et les grilles mobiles sur le rotor.

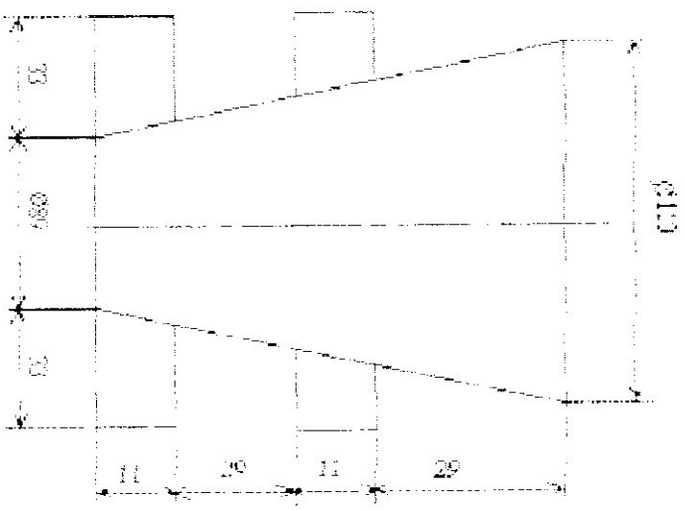


Figure 1.2 dimension des rotors de la partie axiale

1ère étage :

- Rotor : nombre d'aubes = 25
- Stator : nombre d'aubes = 32

2ème étage :

- Rotor : nombre d'aubes = 25
- Stator : nombre d'aubes = 29

Remarque

Toutes les dimensions inscrites sur les schémas sont en millimètre.

b) compresseur centrifuge

Il se compose d'un disque de rotation sur des faces où sont montées des plaques qui canalisent l'air vers la périphérie. Autour du disque se trouve une grille fixe, qui comme dans un étage de compresseur axial, transforme en pression une partie de la vitesse absolue à la périphérie du disque.

Du fait de l'effet centrifuge, un compresseur centrifuge conduit à un rapport de pression plus grand qu'un étage de compresseur axial. Cependant, la possibilité de monter en signe deux étages axiaux permet de multiplier considérablement le rapport de pression unitaire.

1.3.3 Chambre de combustion

Chambre de combustion de type S (flux inversé).

Nombre des injecteurs = 9

1.3.4 La turbine

La turbine de GT-117 est constituée de deux étages axiaux qui sont pratiquement les seuls employés, avec pour but de transformer la pression des gaz en vitesse avec la production d'énergie.

L'étage de la turbine comprend deux composants essentiels :

- distributeur (stator)
- rotor.

1er étage :

- Stator : nombre d'aubes=30
- rotor : nombre d'aubes =31

2ème étage :

- Stator : nombre d'aubes=22
- rotor : nombre d'aubes =31.

Les éléments essentiels qui caractérisent la distributeur du 1ère étage de la turbine sont : le rayon intérieur, et l'angle de profil.

1-3-5 tuyère d'éjection :

Elle a pour d'accélérer les gaz de combustion issus de la turbine jusqu'à ce que la pression statique dans le jet soit égale à la pression atmosphérique externe.

Le type le plus simple consiste en un tronc de cône convergent, le paramètre régissant le fonctionnement des tuyères est le rapport de la pression des gaz de combustion à la sortie de la turbine à la pression dans le plan de sortie de la tuyère.

1.4 Nuances des éléments structuraux :

D'après une analyse des nuances des différents alliages des métaux, effectuée à la base logistique de Beni Marad, on peut déduire les caractéristiques mécaniques différentes pièces et leurs applications :

Tableau 1.1

Nuance	Composition	Traitement thermique	Caractéristiques mécaniques Résistance en Mpa Limite d'élasticité à 0,2% Allongement % KCUj/cm²	Applications
1	2	3	4	5
Acier pour turbine à vapeur				
56 A 28 CDV 5	C 0,28 Cr 1,50 Mo 0,70 V 0,30	Etat recuit. Dureté brinell 170. Trempe huile 1000° revenue 710°	100 17 800 950	Boulonneries à chaud. Pièce de turbine.
56 T.G 20CDV 6	C 0,20 Cr 1,50 Mo 0,60 V 0,20	Etat recuit. Dureté brinell 170. Trempe huile ou eau. Suivant dimension à 980°	150 19 800 900	Boulonneries à chaud. Pièce de turbine. Industrie aéronautique.
56 T 5 Z 20 CDNb11	C 0,20 Cr 11,00 Mo 0,70 Nb 0,40 V 0,30	Trempe huile ou air à 1125° Revenu 675/700°	- 12 800 1000	Industrie aéro Boulonneries à chaud. Rotors et aubages de turbine à gaz.

Suite du tableau 1.1

1	2	3	4	5
X 17 T Z10 CNW 17	C 0,20 Cr 11,00 Ni 0,70 W 0,40 Ti 0,30	Trempe eau à 1125°.	250 50 270 600	Boulonneries à chaud. Ailettes et rotors de turbines.
X 20 T Z 30 CNWS 22 10	C 0,25 Cr 22,00 Ni 10,00 W 2,10 S 1,20	Trempe huile ou eau à 1100°.	100 40 320 750	*Tubes de* compresseurs Peut être utilisé jusqu'à 750°.
X 203 Z 30 CNKDW 20	C 0,12 Cr 20,00 Ni 20,00 Co 20,00 Mo 3,50 W 3,00 Nb 1,00	Trempe huile ou eau à 1100°	- 45 400 850	Boulonneries à température. Tuyères d'éjection.
Aciers inoxydables martensitiques				
A.P.X Z 15 CN 17 03	C 0,16 Cr 17,00 Ni 2,00	Etat recuit. Dureté brinell 250. Trempe huile 1100° Revenue 630°	40 15 750 1000	Industrie aéronautique. Pièces soumises à la corrosion.
X 13 T 5 Z 55 C 14	C 0,16 Cr 14,00 Ni 0,40	Etat recuit. Dureté brinell 225. Trempe huile 1100° Revenue 550°	Dureté Vickers 500	Boulonneries à chaud. Pièces de turbines.

INTRODUCTION

Les machines tournantes telles que les pompes, les turbines (ou turbomachines) et les compresseurs sont devenus depuis de nombreuses années des éléments indispensables pour l'industrie moderne. D'une manière générale, les turbomachines ont pour but d'assurer un échange d'énergie entre un rotor tournant à vitesse constante et un débit permanent de fluide. Dans les centrales électriques, les groupes turboalternateurs permettent la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique. Dans la plupart des industries. Les machines tournantes sont aussi des composants pour la plupart des véhicules : turboréacteur pour un avion, turbocompresseur automobile, turbines de bateaux ou de sous-marins.

Dans ce mémoire on s'intéresse au comportement dynamique des ligne d'arbre en torsion et on flexion, un rappel des notions fondamentales, les phénomènes vibratoires et quelques définitions nécessaires sont introduits dans le premier chapitre, le seconde chapitre concerne l'étude des vibrations en torsion considéré isolément, c'est-à-dire qu'elles sont découplées vis-à-vis des vibrations axiales et transversales. La dynamique des rotors en torsion est étudiée par eux méthodes de modélisation tel que la distribution d'inertie de ligne d'arbre est *constante*, et la distribution *linéaire*, la dynamique des rotors en flexion est étudiée dans le troisième chapitre, deux méthodes numériques utilisées, la méthode de *matrice de transfère (ou de passage)*, afin de permettre le développement analytique, mettant en évidence les relations de base, et la méthode des *éléments finis*, lorsqu'il s'agit de prévoir le comportement vibratoire des machines réelles. Dans les chapitres quatre te cinq on traitent des applications sur la torsion et la flexion respectivement. Le sixième chapitre discuté sur la maintenance des machines tournantes ce que on appelle *l'équilibrage* des rotors. On termine par une conclusion générale suivie par des annexes.

Chapitre I

GENERALITES

I.1. Phénomènes vibratoires :

Avant de définir la notion de vibration, on peut notée que chacun on déjà une idée. La vibration fait on effet partie de la vie de tour les jours.

Elle peut être :

- utile (montre, rasoir électrique, haut parleur,...) :
- agréable (berceau, balançoire, instrument de musique,...) :
- désagréable (marteau-piqueur, mal de mer, ...) ;
- fatigante ou nuisible pour l'homme, les machines, les bâtiment (transport, tremblement de terre,...) :

Une vibration, c'est un mouvement autour d'une position d'équilibre. Vibration avec le temps de la valeur d'une grandeur caractéristique du mouvement ou de la position d'un système mécanique, lorsque la grandeur est alternativement plus grande et plus petite qu'une certaine valeur moyenne ou de référence [2].

Le mouvement vibratoire est le résultat de fonctionnement d'un appareil, ou de l'effet de l'environnement sur cet appareil, il possède par conséquent certaines propriétés. Ainsi, si l'on prend l'exemple du moteur d'un véhicule automobile, les pistons les bielles, les soupapes,... etc. décrivent un mouvement qui se répète exactement à chaque tour.

On dit qu'un ensemble mécanique est le siége de vibrations s'il est animé de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.

Une vibration est définie à l'aide d'une ou de plusieurs fréquences, elle est également caractérisée par son amplitude.

Le plus simple du mouvement périodique est le mouvement sinusoïdal. Dans ce cas, la relation qui lié le déplacement au temps de la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$: la fréquence f est le nombre de fois que le phénomène se reproduit en une seconde :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(I.1)}$$

Où T est appelée *période* de la vibration : l'amplitude est la valeur maximale [4]prise par la fonction sinusoïdale : souvent, ce sont des sommes de plusieurs fonction de ce type ayant chacune une fréquence et une amplitude ces fonctions sinusoïdale sont *les composantes* de la vibration étudiée.

Le problème des vibration d'ensembles mécaniques complexes doit être rattaché à certains schémas simplificateurs : le plus simple d'entre eux est constitué d'une masse et d'un ressort, la vibration de ce modèle peut être *libre* ou *forcée*.

Si la vibration est libre, aucun rapport d'énergie n'est fourni à l'ensemble mécanique au cours de son évolution, et la vibration résulte de perturbation initiale telles que celles qui seront décrites dans les essais élémentaires. Si ce modèle élémentaire n'est l'objet d'aucun *amortissement*.

La vibration est périodique, ce qui constitue un schéma idéal de la réalité (l'échelle moléculaire du phénomène naturel en fournit toutefois quelques exemples). Dans la plupart des ensembles mécaniques concrètement rencontrés. L'amortissement a pour effet une décroissance de l'amplitude de la vibration qui tend, en un délai plus ou moins long vers une valeur nulle ; de telles vibration, qui disparaissent ainsi au bout d'un certain temps, sont dites *vibrations transitoires* [9].

Par opposition aux vibrations libres qui viennent d'être définies, les vibrations forcées se répètent de manière périodique par rapport extérieur d'une énergie qui se substitue dans l'ensemble mécanique à l'énergie dissipée par amortissement. En général, la fréquence de la vibration forcée est liée de manière simple à la fréquence de distribution de l'énergie par le réservoir extérieur.

Le plus souvent, les chocs ou toute autre excitation entraînent des vibrations qui peuvent être considérées comme parasites et qu'il y a donc lieu d'éliminer ou de réduire de manière à les rendre supportables ou non dangereuses. Cette élimination ou cette réductions peut se faire soit à la source même des vibration, soit dans un environnement plus ou moins proche de cette source, le choix de l'emplacement du système antivibratoire étant une question d'opportunité technologique.

I.2.Les différents types de vibrations : [2]

Les vibrations sont classées en général d'après l'évolution d'une variable (de position) considérée dans le temps. Il s'agit en premier de vérifier leur reproductibilité dans le temps (périodicité) et d'observer en second leur forme (trajectoire).

On distingue ainsi les vibrations suivantes :

- périodique :
- apériodique :
- aléatoire :

I.2. 1 Vibration périodique :

C'est un mouvement oscillatoire qui se répète de la même façon à des intervalles de temps réguliers que l'on appelle période T.

On le qualifie de phénomène déterministe, ce mouvement peut être décrit par des équations mathématiques.

I.2 .1 .1 Vibration harmonique :

La forme de base d'une vibration périodique est une vibration harmonique (exemple : balourd d'un rotor) .Ce mouvement peut être décrit par l'équation mathématique suivante.

$$X(t)=x \sin(\omega t+\varphi)$$

Avec: X : amplitude maximale de vibration :

ω: pulsation du mouvement:

φ : la phase de vibration

On peut écrire aussi :

$$X(t) = x(t+T)$$

Avec :

T : la période de vibration (s).

$T = \frac{1}{f}$ Où f : fréquence Hz

X et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales

Le diagramme (figure I.1) espace -temps la représente comme suit.

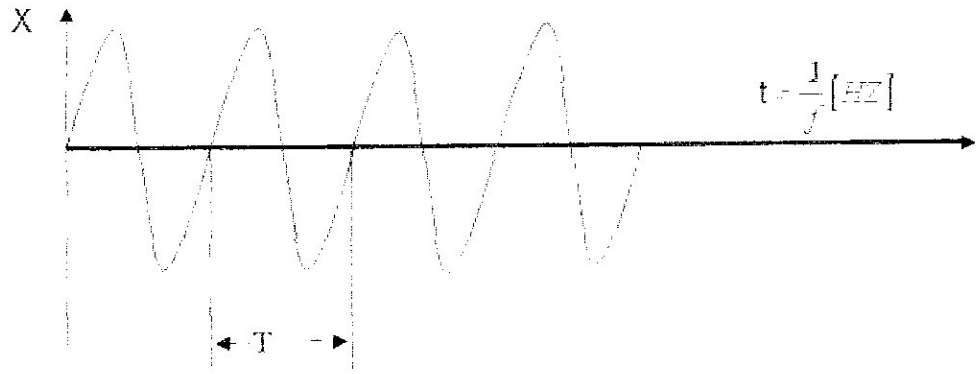


Figure (I.1) vibration harmonique

I. 2.1.2 Somme de vibrations :

Lorsque deux ou plusieurs vibrations harmoniques de fréquences différentes se produisent en même temps; elles se composent et l'on obtient une vibration résultante; elle est périodique puisqu'elle se produit exactement après un certain temps (figure I.2).

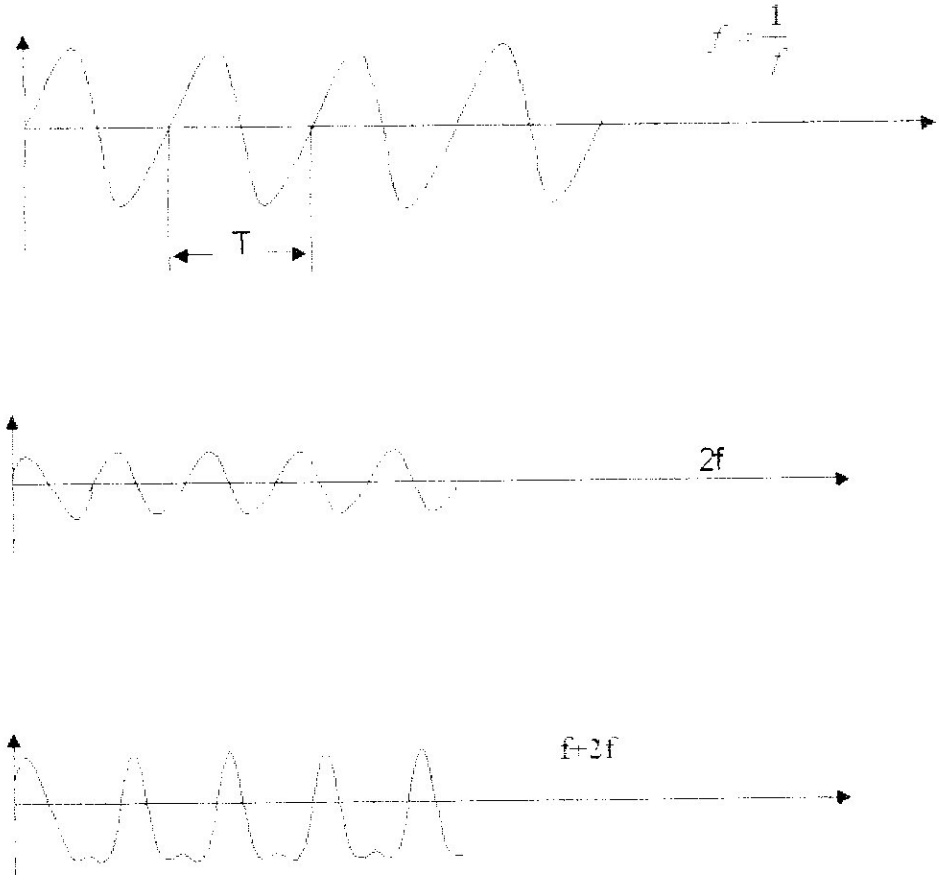


Figure (I.2) : superposition de deux vibration harmoniques

I.2.1.3 Représentation des vibrations périodiques :

Les figures (I.1) et (I.2) représentent des vibrations périodiques par rapport au temps. Dans la pratique c'est la présentation en fonction de la fréquence qui est la plus utilisée, puisqu'elle permet une meilleure vue d'ensemble des différentes composantes vibratoires (figure I.3) .Cette représentation est également appelée " *Spectre de fréquence* "

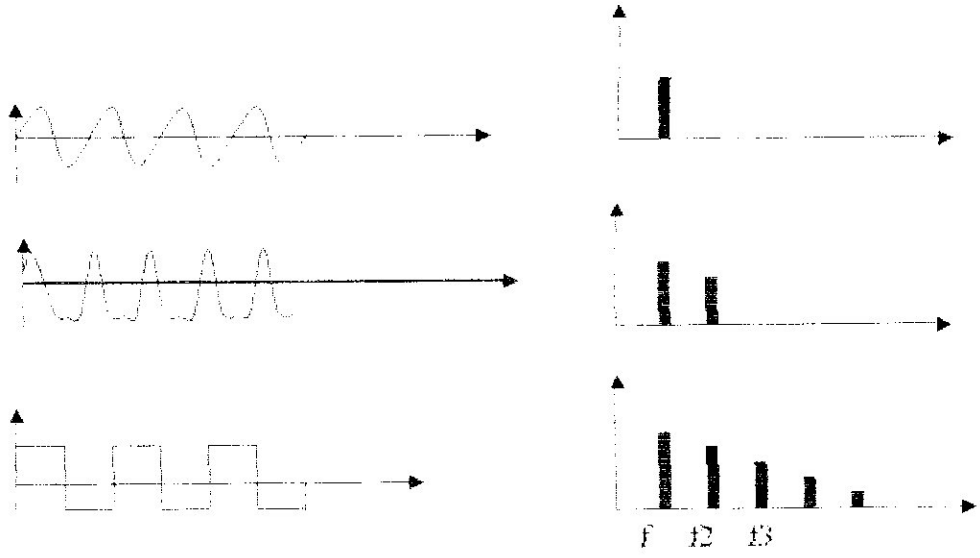


Figure (I.3) Représentation de vibrations periodiques en fonction du temps et des frequences

I.2.2.1 Vibration apériodique :

Une vibration apériodique ne se répète pas .Elle à une périodicité qui est infiniment longue. Dans cette catégorie, on distingue les vibrations pseudo-périodiques et les vibrations transitoires.

I.2.2.2 Vibration pseudo-périodique :

On rencontre le type de vibration en modulation de fréquence: les mélanges de vibrations harmoniques présentent des pseudo- périodiques (figure I.4).

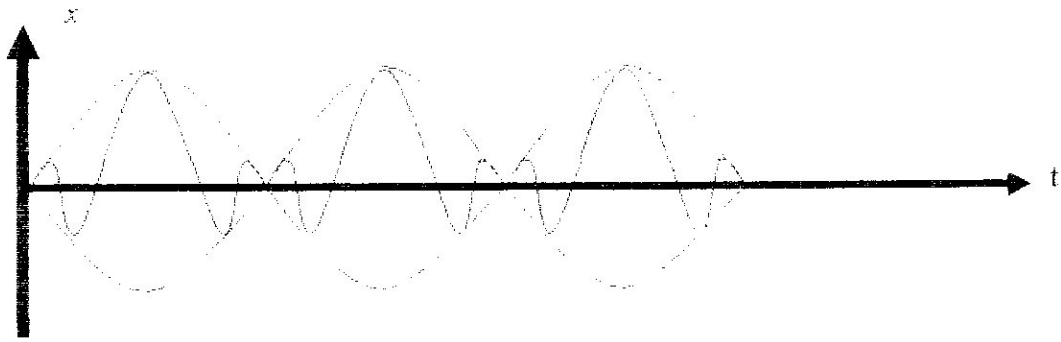


Figure (I.4) : vibrations pseudo périodiques

I.2.2.3 Vibration transitoire :

C'est une vibration non continue observable pendant un bref instant. Ce type se rencontre lors de conditions d'utilisation variées .par exemple. Lors de montées en vitesse de machines .chocs, coups, explosions, etc…

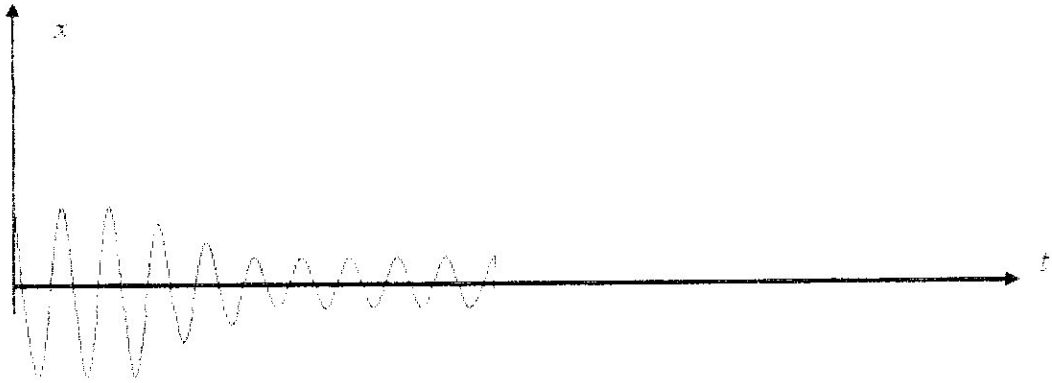


Figure (I.5) Vibration transitoire

I.2.2.4 Vibration aléatoire :

C'est une Vibration continue pour laquelle il est impossible de déterminer une période de répétition. On la qualifie de phénomène non déterministe. Cette vibration ne peut être représentée par une fonction mathématique exacte, d'où l'utilisation des lois de probabilité pour la caractériser. Son spectre de fréquence est continu.

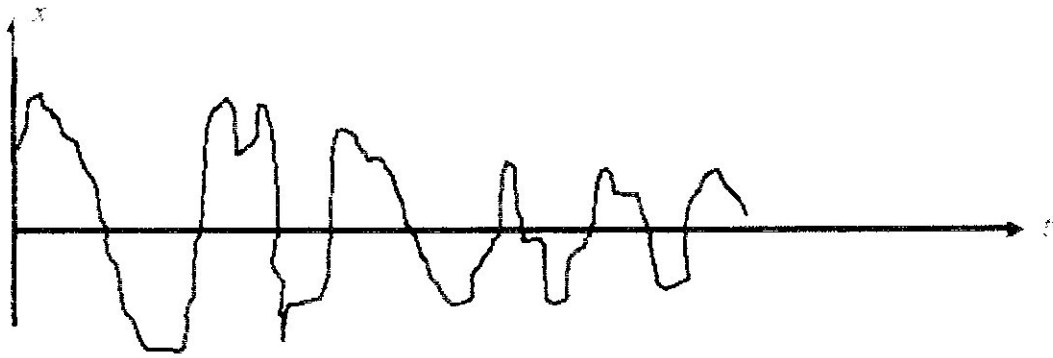


Figure (I.6) : Vibrations aleatoires

I.3 Caractéristiques d'une vibration : [2]

Une vibration est caractérisée par les paramètres suivants :

I.3.1 Amplitude : c'est le déplacement maximal que subit le corps en mouvement

Exemple : Vibration harmonique

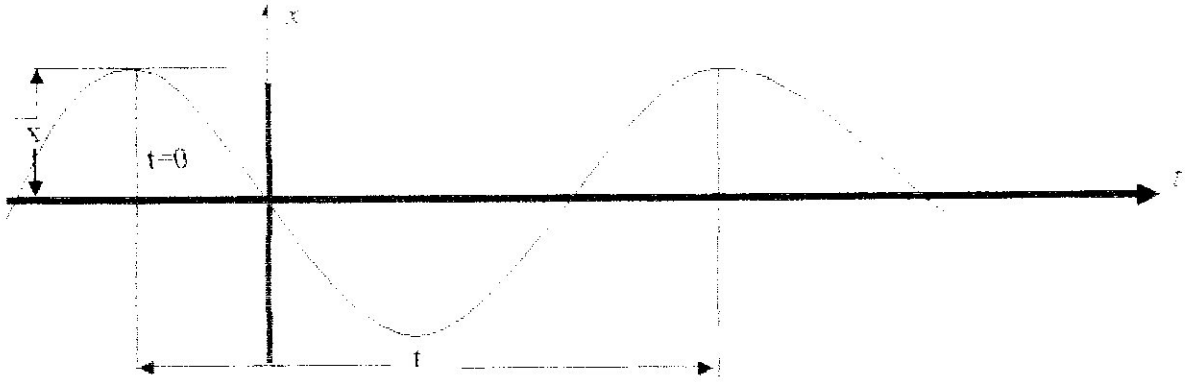


Figure (I.7) Grandeurs d'une vibration harmonique

I.3.2 Fréquence : elle représente le nombre d'oscillations ou de cycles par seconde .c'est aussi l'inverse de la période

$$f = \frac{1}{T}(HZ)$$

I.3.3 Phase : elle permet de déterminer la position d'un corps à instant donné.

I.4 Grandeur de mesure des vibrations mécaniques : [14]

Une vibration mécanique peut être mesurée selon les grandeurs suivantes:

I.4.1 Déplacement vibratoire :

Le déplacement vibratoire x (t) d'une vibration harmonique est décrit par l'équation : x (t) = X sin (at +φ) Les unités couramment utilisées sont le micromètre (μm) et d'inch.

Avec : 1 inch = 25.4 mm

I.4.2 Vitesse vibratoire :

Il s'agit de la vitesse avec laquelle le point de mesure se déplace par rapport à son point de repos.

Avec $v(t) = \frac{dx}{dt} = X\omega\cos(\omega t + \varphi) = V\cos(\omega t + \varphi)$

Les unités couramment utilisées sont le (mm/ s) ou l'inch par seconde (ips). avec:

1 IPS = 25.4 mm/s

I.4.3 Accélération vibratoire :

C'est l'accélération avec laquelle le point de mesure se déplace par rapport à son point de repos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -X\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -a\sin(\omega t + \varphi)$$

Les unités sont : (m/s^2) ou le (g). ($g = 9.81\ m/s^2$)

Pour chacune des trois grandeurs de mesure, quatre valeurs peuvent être déterminées :

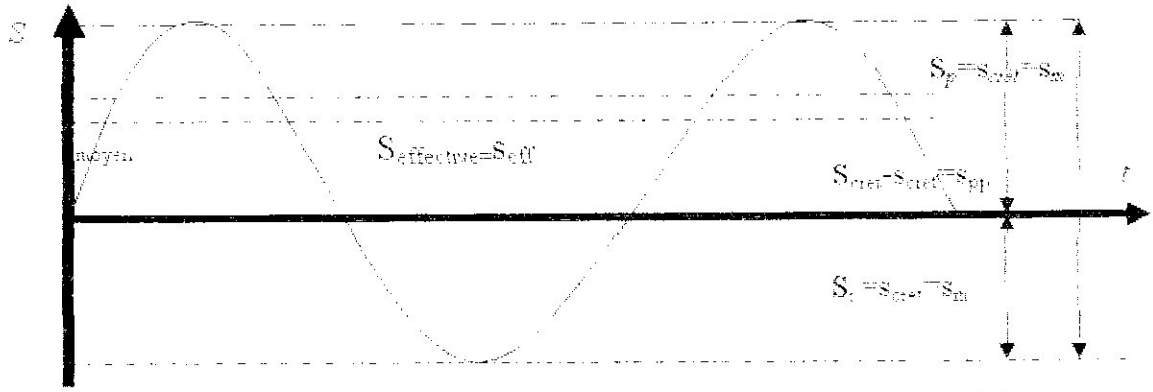


Figure (I.8) : valeurs crête /crête, crête, moyenne et efficace d'une vibration sinusoïdale.

N.B : s = X (amplitude de vibration)

I.4.3.1 valeur crête /crête :

C'est la valeur d'un extrême positive d'un mouvement. Il s'agit ici de la différence entre plus grande valeur Sp et la plus petite valeur Sn de la vibration:

$$Scc = S\,p - (-Sn) = Sp + Sn = 2Sc$$

I.5 Fréquence Propre :

Le système masse –ressort amortisseur représenté ci-dessous permet de modéliser un système en vibration et de calculer sa fréquence propre.

En écartant la masse de sa position d'equilibre selon l'axe x puis en lâchant, elle oscillera à une fréquence donnée, autour de la position de repos, avec une amplitude décroissante de forme exponentielle.

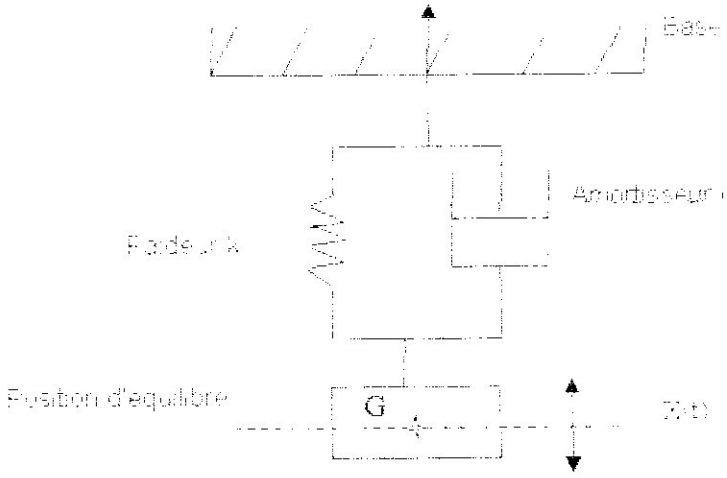


Figure (I.9) systeme masse-ressort amortisseur.

Le bilan des forces en présence permet d'établir l'équation du mouvement de ce système dit " à un degré de liberté"

$$F(t) = k\,x(t) + c\,v(t) + ma(t)$$

Avec: F (t) : force appliquée sur la bas:

K x (t) : force de rappel élastique, exprimée en (n / m)

Cv (t) : force d'amortissement, proportionnelle à la vitesse $\frac{dx}{dt}$

C : est le coefficient d'amortissement visqueux (N/ m/ s)

Ma (t): force due à l'accélération absolue de la masse m

La solution de cette équation différentielle est de type:

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{c}{2m}t}.\cos(\omega t + \phi)$$

En générale, on pose les hypothèses suivantes:

- la masse du ressort ou de l'amortisseur est négligeable par rapport à la masse
- la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse
- la masse est indéformable
- le ressort a un comportement linéaire

Une machine tournante peut être comparée ç ce système simple

- la base est remplacée par les paliers
- le ressort est remplacé par le rotor
- la masse est remplacée par le corps de la turbine ou de la pompe
- l'amortissement est assuré par le fluide passant dans la turbine ou la pompe

Degré de liberté :

Le nombre de degré de liberté d'un système mécanique est égale au le nombre minimale de paramètre indépendant qui sont nécessaire pour défini complètement et à tout instant les coordonnées de tous les points du système [14].

Raideur :

Elle set définie comme le rapport entre la force F_0 appliquée au ressort, et la valeur X_0 de la déformation qui en résulte [12].

$$K = F_0 / X_0$$

Amortissement visqueux :

Il est défini comme le rapport entre la force nécessaire pour déplacer un amortisseur, et la vitesse de mouvement qui en résulte

$$B = F / \dot{X}$$

Oscillation libre :

Elles sont obtenues quand les forces extérieures sont nulles. La résolution de l'équation suivante nous donne les pulsations propres de système

$$M\ddot{X} + K X = 0$$

Oscillation forcée :

Elles sont obtenues quand les forces extérieures non nulles, la résolution de l'équation suivante donne la réponse de système

$$M\ddot{X} + K X = F(t)$$

I.6 Vibration longitudinale d'une barre prismatique :

Le déplacement $u(x, t)$ de la section droite d'une barre prismatique qui a pour abscisse x a' l'équilibre, est régi par l'équation aux dérivées partielles :

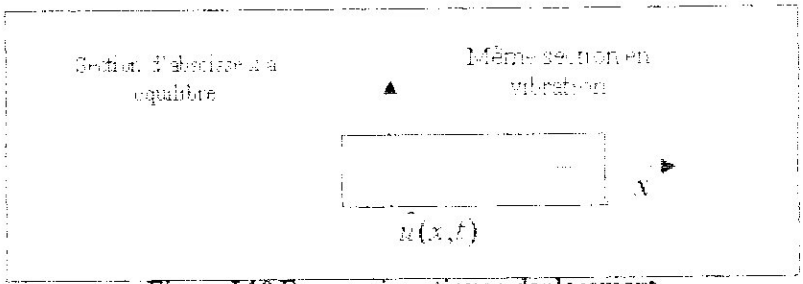


Figure I.10 Barre prismatique : déplacement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (I.2)$$

Le matériau dont la barre est constituée a pour module de Young E et pour masse spécifique volumique ρ.

I.7 Vibration de torsion d'une pièce cylindrique :

Le théorème du moment cinétique appliquée a' un élément de longueur dx entraine :

L'angle α dont tourne une section d'abscisse x au cour des vibrations de torsion d'une pièce cylindrique c'est nue fonction $\alpha(x, t)$ dont les vibrations sont régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \qquad (I.3)$$

Où G=E/2(1+υ)

G : module de Coulomb

υ : le cœfficient de Poisson

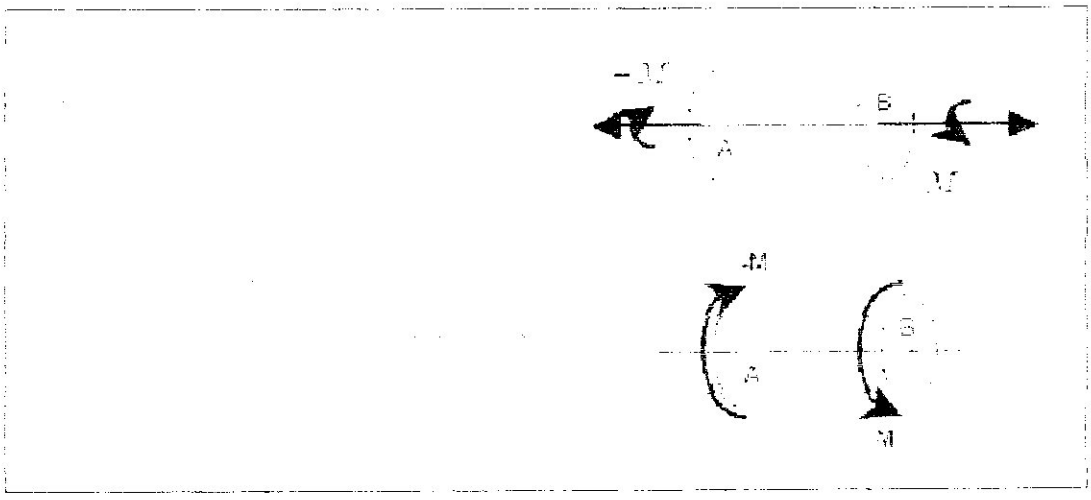


Figure I.11 Torsion pure d'une poutre

I.8 Vibration de flexion d'une pièce prismatique

L'application des théorèmes généraux de la dynamique et d' après simplification

$$EI\frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \rho S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} = 0 \qquad (I.4)$$

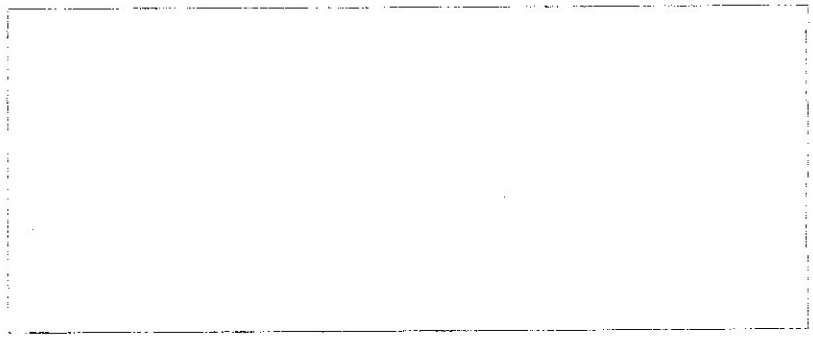


Figure I.12 Flexion pure d'une poutre

I.9 Excitation permanentes :

Il est bon de rappeler l'évidence suivant laquelle, si un système réel vibre de manière permanente, c'est qu'il est excité. Nous nous intéressons dans ce paragraphe, à l'excitation permanente dont la variation au cour de temps est périodique. Par apport à la partie de l'installation modélisée, ces excitations sont extérieures et elles doivent apporter de manière périodique une quantité d'énergie mécanique qui sera dans le même temps, transformée en chaleur par les phénomènes dissipatifs, ces derniers sont toujours présents dans la réalité, aussi fiables soient-ils.

Pour un modèle linéaire, toute excitation peut donc etre représentée par une somme d'excitations sinusoïdaux élémentaires ou harmonique chacune d'elle, noté F_q est défini par sa pulsation Ω_q, son amplitude C_q et sa phase Φ_q mesurée par rapport à une origine des temps donnée.

Elle s'écrit sous la forme :

$$F_q = C_q \cos(\Omega_q + \Phi_q) \qquad (I.5)$$

Avec $\Omega_q = q\Omega$

Ω (rad/s) vitesse de rotation du rotor.

q ordre de l'harmonique.

Parmi ces trois caractéristiques, la pulsation est de loin plus importante dans la pratique. Il est assez facile de l'identifier et, sa valeur sera définie dans chaque cas abordé. [4]

I.9.1 Balourd :

Contrairement à une idée reçue, le balourd est certainement l'un des problèmes vibratoires les plus difficiles à identifier sur une machine tournante. En pratique, il est impossible d'obtenir un centrage parfait de tous les éléments d'un rotor de la machine tournant. Ce déséquilibre va générer une vibration due à la force centrifuge. [3]

$$F = mr\omega 2$$

L'amplitude de cette vibration croit fortement avec la vitesse de rotation. Elle se traduit sur le spectre par la présence d'une composante prépondérante à la fréquence de rotation du rotor. Le défaut de balourd engendre une vibration sinusoïdale qui ne contient que peu d'harmoniques.

$U=mr$ est l'expression du balourd. L'unité employée est [g.mm]

Un problème de balourd ne peut donc être détecté que par un jugement sur le niveau, et non pas sur la présence de manifestations spectrales spécifiques, comme la plupart des autres phénomènes. Ce jugement sur le niveau est affecté par les notions de transfert vibratoire (réponse

de la structure de l'ensemble de la machine à l'effort de balourd), et l'influence des conditions de fonctionnement.

Le balourd se manifeste à la fréquence de rotation ; de nombreux autres phénomènes, différents du balourd (au sens de la résolution du problème par l'équilibrage), se manifestent également à cette fréquence.

I.9.2 Différents balourds : [3]

I.9.2.1 Balourd statique :

Le balourd statique est un vecteur défini par son module égal au balourd et par une phase (position angulaire par rapport à un repère). A vitesse nominale, les deux paliers supportant le rotor vont subir en même en même temps, l'effort centrifuge du au balourd. Il n' y a donc pas de déphasage entre les mesures prises aux mêmes angles sur les deux paliers. Au repos, le rotor aura tendance à se placer dans une position angulaire déterminée par la force de gravitation exercée sur le balourd.

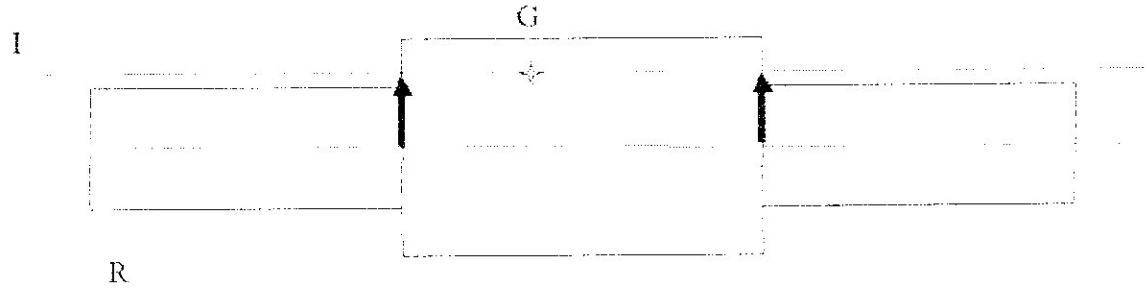


Figure (I.13) : Balourd statique.

I.9.2.2 Couple de balourds :

Le couple de balourds est un ensemble de deux vecteurs de même module et de directions opposées.

Le couple de balourds est caractérisé par un vecteur (module et phase) dont le module est égal au produit du module des deux vecteurs balourds par leur distance. A vitesse nominale, le rotor tangue et les deux paliers supportant le rotor subissent les balourds opposés. Le déphasage proche de 180° observé entre les mesures effectuées au même angle sur les deux paliers est révélateur d'un balourd couple. Au repos, la position angulaire de rotor peut être quelconque, du fait de l'équilibre statique.

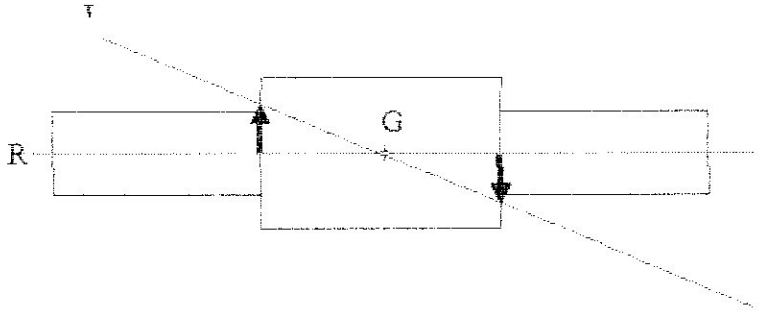


Figure (I.14): couple de balourd

I.9.2.3 Balourd quasi statique :

Le quasi statique agit d'un seul coté, entraîne un déplacement du centre de gravité et incline l'axe principal d'inertie de façon que ce dernier coupe l'axe de l'arbre du rotor. On peut le déterminer par oscillation simple sur deux coteaux. Dans la pratique, on ne différencié pas le balourd statique et le balourd quasi statique.

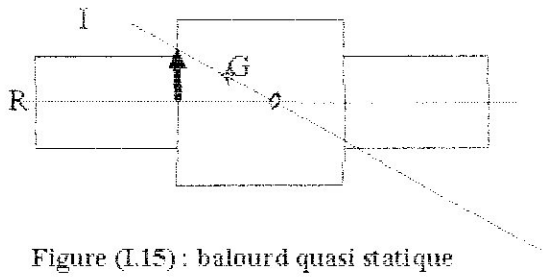


Figure (I.15) : balourd quasi statique

I.9.2.4 Balourd dynamique :

Le balourd dynamique est la combinaison du balourd statique et le couple de balourd. L'axe principale d'inertie et incliné par apport à l'axe du rotor, mais il ne le coupe pas (lorsque l'on équilibre en deux plans, on équilibre en dynamique).

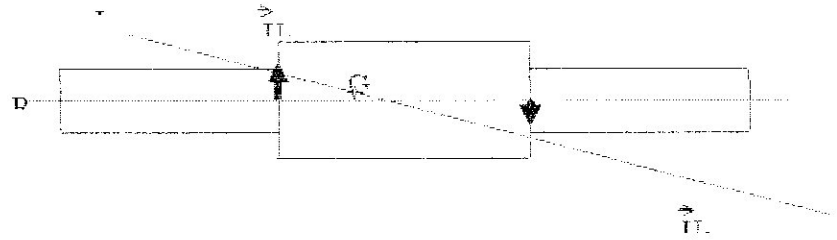


Figure (I.16) : balourd dynamique

I.9.3 Origine des balourds sur les rotors :

La distribution de balourd d'un rotor est liée à la position du centre de masse de chacun des tronçons élémentaires par rapport à la ligne de rotation, elle-même différente de l'axe géométrique passant par les centres des paliers. Les origines des balourds sont multiples. On pense souvent aux inhomogénéités de matériaux, mais d'autres causes, beaucoup plus courantes et plus fondamentales, sont illustrées par quelques exemples typiques.

I.9.3.1 Déséquilibre massique des rotors. Balourds :

Quel que soit le soin apporté à la construction des machines, il n'est pas possible de faire coïncider l'axe de rotation avec le centre de gravité de chaque tranche élémentaire du rotor, ce qui caractérise le balourd. Il en résulte que l'arbre en rotation est soumis à des efforts centrifuges qui le déforment. Ces efforts se traduisent par des vibrations liées à la fréquence de rotation.

Les déséquilibres proviennent en général de défauts d'usinage, d'assemblage des rotors ou de montage. En fonctionnement, les rotors peuvent alors aussi se déformer sous l'effet d'échauffements dissymétriques

I.9.3.2 Balourd d'origine mécanique : *(Perte d'ailette, rupture d'une aube, etc.)*

Lorsqu'il y a rupture et départ d'un morceau du rotor, comme par exemple d'une ailette, on observe généralement une évolution instantanée des vibrations. Cette évolution est mieux perçue si l'on surveille simultanément l'amplitude et la phase des vibrations dans une représentation vectorielle.

Les pertes d'aubes se traduisent aussi par des perturbations de l'écoulement (présence d'impulsions de pression répérées) qui se verront par des analyses spécifiques de type spectre.

I.9.4 Le balourd en flexion : [15]

Les rotors étant en principe symétriques, leurs centres de gravité devraient être confondus avec leur centre de rotation. Ou du moins, ce serait vrai s'il n'y avait pas de tolérance d'usinage ou de montage. Or, il n'est pas nécessaire, ni économique de réaliser des usinages trop serrés. C'est pourquoi on préférera compenser ce déséquilibre en cours de fabrication de déduire ces défauts.

La figure (I.8) représente, vue en bout, un rotor à l'axe horizontal, fléchi sous l'effets des forces d'inertie centrifuge s'appliquant au centre de gravité G 'un pignon déséquilibré de masse m.

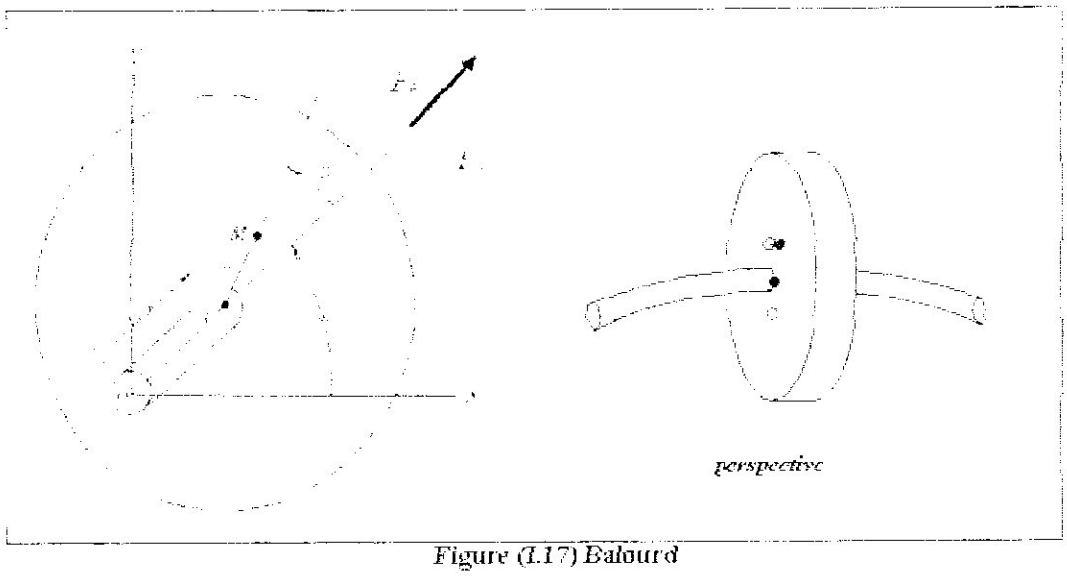


Figure (I.17) Balourd

I.9.5 Le balourd en torsion : [4]

L'équilibrage imparfait des rotors peut être représenté par une excentration de centre de gravité G d'un tronçon de masse, cette excentration de valeur e est mesurée par apport à l'axe géométrique de révolution matérialisé en général par la droite passant par les centres géométriques des deux liaisons supportant le rotor .pour une vitesse de rotation n donnée, les effets d'inerties centrifuge s'appliquant en G font fléchir le rotor. La combinaison de ces effets conduit à une excitation périodique due au moment du poids mg par apport à l'axe de rotation. L'amplitude de ce moment de torsion est maximale quand l'axe du rotor est horizontal, elle est nulle quand il est vertical.

Il n'est pas possible de donner une expression analytique général de cette excitation dans la mesure où l'axe déformé d'un rotor peut tourner (précession) pendant que le rotor tourne lui-même autour de cet axe déformé (rotation propre). Il est conseillé de ce reporter à l'étude des effets gyroscopiques pour les rotors.

Les rotors étant en principe symétriques, leurs centres de gravité devraient être confondus avec leur centre de rotation. Ou du moins, ce serait vrai s'il n'y avait pas de tolérance d'usinage ou de montage. Or, il n'est pas nécessaire, ni économique de réaliser des usinages trop serrés. C'est pourquoi on préférera compenser ces déséquilibres en cours de fabrication de déduire ces défauts.

I.10 Vitesse critique en flexion :

On a vu qu'une vitesse critique correspond à un maximum de l'amplitude des vibrations de flexion. C'est donc pour cette vitesse que les contraintes supportées par le rotor seront maximales.

D'autres part, au niveau de l'analyse de signal vibratoire, on retiendra que l'on dispose de deux critères :

- l'un concernant l'amplitude de la vibration : celle-ci passe par un maximum lorsque la vitesse est égale à la vitesse critique ω_c ;
- l'autre concernant la phase de vibration par rapport à l'effort. Sa variation en fonction de la fréquence devient maximale lorsque la vitesse de rotation devient égale à la pulsation propre ω_0 du système non amorti.

I.11 Vitesse critique en torsion :

Les vitesses critiques de torsion de rotor sont les vitesses de rotation pour lesquelles une fréquence d'excitation se place en sympathie avec une fréquence propre de rotor.

Les déformations et les torsions dans le rotor peuvent être importantes. Les fréquences d'excitation sont en général, liées à la vitesse de rotation.

Vibration aubage

Dans les moteurs aéronautiques, de nombreux développements sont consacrés aux moyens permettant d'apporter un amortissement suffisant par des petites masselottes frottant sous les Plates-formes et limitant les amplitudes vibratoires.

I.12 Vibration d'un rotor rigide sous l'influence d'un balourd : [15]

Nous venons de voir que sous l'effet d'un déséquilibre les paliers d'un mobile en rotation étaient soumis à des forces tournant à la même vitesse que le rotor. L'amplitude de ces forces ayant pour origine des efforts centrifuges varie avec la vitesse de rotation et est fixe pour une vitesse donnée.

Les paliers ne sont pas parfaitement rigides. L'élasticité d'un palier dans une direction donnée autorise des déplacements du mobile dans cette direction.

I.12.1 Vibrations dues à un balourd statique :

La force $\vec{F}$ tourne à la vitesse ω et à une amplitude constante. Elle constitue dans le plan défini par la direction du force sinusoïdale d'excitation. Sous l'action d'un balourd statique un rotor tournant à la vitesse angulaire ω est soumis dans une direction quelconque qui est par

exemple, celle d'un capteur de vibrations, à un mouvement sinusoïde vibratoire de pulsationω, et il existe une vitesse de résonance, qui dépend de la masse du rotor et de l'élasticité des paliers pour laquelle l'amplitude de la vibration est maximale, c'est la vitesse critique.

I.12.2 Vibrations dues à un balourd dynamique :

Dans le cas d'un déséquilibre dynamique, le rotor est soumis à un couple. Les forces de réaction des paliers sont parallèles et opposées, le rotor à tendance à osciller autour du centre de gravité.

On démontre qu'il existe une vitesse critique indépendant non seulement de la masse du rotor et de l'élasticité des paliers, mais encore de la forme même du rotor.

I.12.3 Vibrations dues à un balourd complexe :

Un rotor soumis à un balourd présent au moins deux vitesses critiques, l'une correspondant au balourd statique et l'autre ou les autres, au balourd dynamique.

I.12.4 La précision directe et la précision inverse : [12]

a- la précision inverse :

Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc des cercles. Avec l'ensemble des conditions initiales choisies, l'orbite est décrite, (figure I-18) dans un sens opposé au sens de rotation Ω ; le rotor est dans la situation de précession inverse (Pr. I).

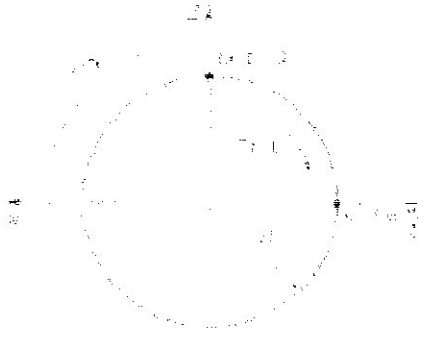


Figure I-18 Orbite du rotor : précision inverse

b- la précision directe :

Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc des cercles .Avec les conditions initiales choisies, l'orbite est décrite (figure I-19) dans le même sens que la vitesse de rotation Ω. Le rotor est dans la situation de précession directe (Pr. D).

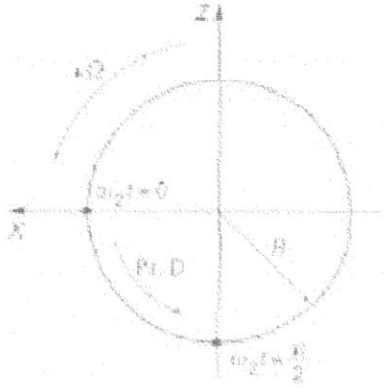


Figure (I-19) Orbite du rotor : précision directe

Chapitre II

DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORSION

Lors de la conception, il est nécessaire de prévoir le comportement vibratoire des structures en cours de fonctionnement afin d'augmenter la fiabilité et prévenir les ruptures L'ensemble mécanique dans l'avion (Moteur Réducteur Hélice) représente un système déformable sous l'action de comptes de torsion. Un tel système admet plusieurs modes de vibration libre. Chaque élément du système est caractérisé par une fréquence propre et des amplitudes relatives.

Les composantes harmoniques du couple moteur peuvent exciter le système (Moteur Réducteur Hélice) sur ses modes fondamentaux. Un résonance peut se produire entre les vibrations provoquées par le couple moteur te la fréquence de vibration propre de torsion de l'arbre ; les vitesses des rotations auxquelles ces phénomènes de résonance se produisent sont dites vitesses critiques de torsion. Dans un tel cas le fonctionnement peut être très dangereux et entraîne la rupture de l'arbre ou l'usure rapide des autres éléments du moteur.

II.1 Mise en évidence de la vibration de torsion : [18]

Concéderons un arbre portant un disque à chaque des ces extrémités (Fig. II-1), si l'on applique sur ces disques deux couples de torsion opposés puis brusquement on les enlève, l'arbre sera soumis à des vibrations de torsion pendant lesquelles les disques tournent toujours en sens contraire.

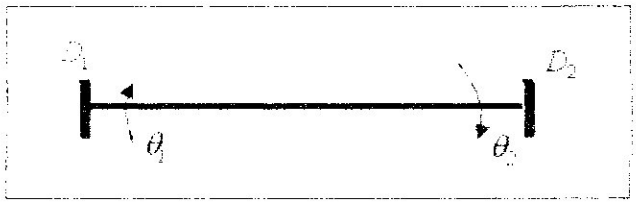


Figure (II-1) Arbre en torsion

Repérons par θ_1 et θ_2 la position angulaire de chaque disque par rapport à sa position de repos, appelons K le couple nécessaire pour produire un angle de torsion de l'arbre égale à 1 rad, et supposant que le matériau composant ce dernier, suit la loi de HOOKE :

Nous avons :

$$Mt = K(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{(II.1)}$$

Posons

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$ Mt : couple de torsion de l'arbre.

En torsion chaque disque, l'application du théorème moment dynamique (ou les équations de *Lagrange*) nous permet d'écrire.

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= -K(\theta_1 - \theta_2) \\ I_2\ddot{\theta}_2 &= -K(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \qquad \text{(II.2)}$$

$\ddot{\theta}_1$: étant l'accélération angulaire du disque « D_1 ».

Soit $\ddot{\alpha} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2$ l'accélération angulaire de déformation de l'arbre par différence des équations (II-2) et (II-3) nous obtenons l'équation différentielle homogène du 2° ordre en α.

$$\begin{aligned} & I_1\ddot{\theta}_1 - I_2\ddot{\theta}_2 = -2K\alpha \\ & I_1\left(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}_2\right) - I_2\ddot{\theta}_2 = -2K\alpha \\ & \ddot{\alpha} + \alpha\left[\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}\right] = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.3)}$$

A pour solution :

$$\alpha = R\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$ ω_0: pulsation propre du système.

R et φ : constant définies par les conditions initiales.

Supposons maintenant le disque D_1 soumis à un couple variable.

$$\vec{C}_1 = (c + h\cos\omega t)\vec{z}$$

Et le disque D_2

$$\vec{C}_2 = -c\vec{z}$$

Les équations (II-2) et (II-3) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= -K(\theta_1-\theta_2)+c+h\cos\omega t \\ I_2\ddot{\theta}_2 &= +K(\theta_1-\theta_2)-c \end{aligned} \qquad \text{(II-4)}$$

Et l'équation (II-4) devient :

$$\ddot{\alpha}+K\alpha\frac{(I_1+I_2)}{I_1I_2}=\frac{(h\cos\omega t)}{I_1}+c\frac{(I_1+I_2)}{I_1I_2} \qquad \text{(II.5)}$$

C'est une équation qui admet pour solution :

$$\alpha=K.\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{c}{K}+\frac{(h\cos\omega t)}{I_1(\omega_0^2-\omega^2)} \qquad \text{(II.6)}$$

Lorsque la valeur de la pulsation se rapproche de celle la pulsation propre de la structure l'amplitude de déformation de l'arbre devient infinie, c'est le phénomène de résonance.

Les disques situés aux deux extrémités en en vibration libre tournent toujours en sens inverses, on en déduit qu'il existe une solution intermédiaire de l'arbre qui reste ; c'est le **Noeud** de vibration.

Pour déterminer le comportement vibratoire d'un système sollicité en torsion par un couple variable, il faut étudier le comportement de ce système en oscillation libre et déduire les pulsations propres de la structure pour les comparer aux pulsations d'excitation.

La connaissance de la position des nœuds permet de connaitre des sections de fortes contraintes. La modélisation envisagée pour calculer les modes propres de torsion de la ligne d'arbre et de discrétiser cette dernière en une ou plusieurs chaines d'inerties séparées par des ressorts en torsion.

II.2 Les matrices d'inerties : [6]

Les paramètres des matrices d'inerties sont définis et déterminés grâce à l'écriture du moment due à l'accélération :

$$I\ddot{\theta} = \int_{zi-\frac{li-1}{2}}^{zi+\frac{li}{2}} \ddot{\theta} dI \qquad \text{(II.7)}$$

Les éléments de la matrice diagonale sont définis en considérant une accélération constante entre z_i et z_{i+1} , une moitié de l' inertie de l'élément sera concentrée en z_i et l'autre moitié en z_{i+1}. L'inertie distribuée qui implique une matrice d'inertie tri diagonale (pleine), utilise une variation linéaire de l'accélération entre z_i et z_{i+1}.

Nous avant évalué les matrices d'inerties avec deux types de discrétisations, Une première avec distribution constante qui permettront l'obtention d'une matrice assemblée Diagonale (appelle *Méthode de Modélisation*) ,et la seconde par distribution linéaire donneront une matrice distribuée tri diagonale.

II.2.1 Première type de distribution (Modélisation) : [4]

La complexité des lignes d'arbre à conduit à la création d'une nouvelle méthode pratique qu'on appelle ***Modélisation*** cette méthode consiste à modélisé des structures réelles par des modèles simplifiés auxquels s'appliquent les loi des la physique.

Les éléments constituent ces modèles doivent satisfaire à des règles bien connus tel que :

- proportionnalité entre effort et déformation.
- Conservation des masses pour que les lois de la mécanique leurs soient applicable et que la résolution numérique des équations conduisent à l'utilisation des schémas mathématique classique.

II.2.1.1 Les avantages et les inconvénients de cette méthode:

Les avantages :

L'avantage majeur de la modélisation est sa généralité, elle permet de déterminer les fréquences de n'importe quelle structure linéaire élastique à travers le modèle correspondant à cette structure.

- le modèle peut prévoir le comportement des structures dans les conditions réelles.
- Les modifications éventuelle de la structure peuvent être effectue sans contrainte dans un délais de temps très court par rapport à celles effectuées sur le prototypes et à moindre coût.

Les inconvénients :

- la modélisation généralement faite selon l'intuition de l'opérateur.
- Le modèle relativement incorrect vis-à-vis de la structure réelle (rigidité plus ou moins grand) , considération de certaine caractéristique physique à la condition aux limites, impossibilité de modélisation de certaine porte de la structure.
- La modélisation est limité par la précision celle-ci augmenter avec le nombre de masse formant le modèle.

II.2.1.2 Principe de la modélisation en torsion : [4]

Une ligne d'arbre est constitue d'un en ensemble de pièce en liaison, soit entre elle liaison rotor-rotor soit, entre le bâtie et un rotor liaison rotor bâti. On représente de manière discrète la répartition réelle de la raideur en torsion et de l'inertie par rapport à l'axe de rotation. *Le modèle est constitue d'une succession de disques indéformable placés aux extrémités de ressorts de torsion sans masse.* La ligne d'arbre est découpée suivant un ensemble de tronçon en nombre te en taille adaptés en fonction de ce que l'on cherche et de la complexité de la géométrie des rotors. Pour chaque tronçon on identifie sa rigidité *torsionnelle équivalent et son moment d'inertie équivalent* par rapport à l'axe de rotation. Le modèle de chaque rotor est obtenu par assemblage des éléments précédents ; *une liaison rotor-rotor* peut être représenté que par un ressort de torsion, son moment d'inertie étant nul, c'est l'exemple d'un compact entre deux roues dentées élastiques (on suppose que le contact est permanent). De manière symétrique, une roue dentée est remplacée par un disque d'inertie seule, sa rigidité en torsion étant très grande par rapport à celle des arbres.

II.3 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique plein de diamètre constant : [4]

II.3.1 Représentation de la raideur répartie

Elle est prise en compte par un ressort de torsion sans masse dont la rigidité est calculée à partir des résultats de la résistance des matériaux qui suppose que toute section reste plane après déformation. Dans la mesure où aucun couple extérieur n'est appliqué en cours de tronçon, le moment de torsion M_t dans le tronçon est constant ainsi que l'angle de torsion unitaire θ. On a :

$$M_t = G \times J \times \theta \quad \text{(II.8)}$$

Où $M_t = G \times J \times \frac{\alpha}{L}$

(Pa) module de cisaillement transversal du matériau du tronçon,

$J = \frac{\pi \times D^4}{32} (m^4)$ Moment quadratique polaire de la section de diamètre D par rapport à l'axe de rotation.

$L\ (m)$ longueur de tronçon,

$\alpha\ (rad)$ angle de rotation relatif entre les deux section limitant le tronçon,

La rigidité équivalente K_{eq} en $N.m/rad$ s'écrit donc :

$$K_{eq} = \frac{G \times J}{L} \quad \text{(II.9)}$$

De sorte que $M_t = K_{eq} \times \alpha$

II.3.2 Représentation de l'inertie répartie :

L'inertie répartie du tronçon est représentée par deux disques indéformables identiques placés aux extrémités du ressort de torsion. Si $\rho\ (kg/m^3)$ est la masse volumique du tronçon et $D(m)$ son diamètre constant, ces inertie ponctuelle I_{eq}, exprimées en $kg.m^2$ ou $N.m.s^2$, se calculent ainsi :

$$I_{eq} = \frac{1}{2}\left(\rho \times \frac{\pi \times D^2}{4} \times L \times \frac{D^2}{8}\right) \quad \text{(II.10)}$$

II.3.3 Précaution prendre dans la modélisation :

Le nombre de tronçons choisi doit permettre une représentation satisfaisante de l'inertie réelle répartie. Un critère pratique applicable impose que la valeur de moment d'inertie concentré modélisé dans l'installation.

En outre, plus le nombre de nœuds de la déformée. module à prendre en compte, est grand, plus la discrétisation sera fine.

Longueur équivalente d'un tronçon

La valeur numérique $K(N.m/rad)$ de la rigidité torsionnelle d'un tronçon peut s'exprimer comme la longueur L_{eq} (m) d'un tronçon cylindrique de diamètre D_{eq} (m) et de module de cisaillement transversal G_{eq} (Pa) qui aurait une rigidité égale. Cette longueur équivalente L_{eq} permet de contrôler plus facilement les ordres de grandeur relatifs aux rigidités trouvées numériquement. Son calcul est aisé et on a :

$$L_{eq} = \frac{G_{eq} \times J_{eq}}{K} \qquad \text{(II.11)}$$

$J_{eq} = \frac{\pi \times D_{eq}^{4}}{32} \left(m^4\right)$ Moment quadratique polaire de torsion de la section circulaire l'équivalente.

II.4 Modélisation d'un tronçon axisymétrique cylindrique de diamètre constant avec alésage centré : [7]

Pour combinaison de section comme le présente la figure (II.2), il est possible de déterminer les caractéristiques cherchées en « retranchant » l'inertie ou la rigidité de l'alésage à l'inertie ou la rigidité du tronçon cylindrique plein.

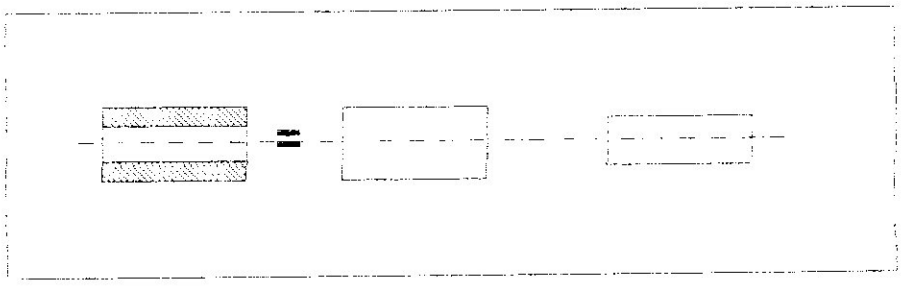


Figure (II.2) calcul des caracteristique d'un tronçon alèse

II.5 Modélisation d'un tronçon axisymétrique conique : [4]

II.5.1 Représentation de la raideur et l'inertie réparties :

De manière usuelle, la discrétisation d'un arbre conique conduit à des tronçons dans la longueur l est choisi pour que la variation relative entre les diamètre limites ne dépasse pas 15% (soit $D_2/D_1 \leq 1.15$) (figure II.3).

La rigidité et l'inertie sont calculées en considérant le tronçon cylindrique de même longueur et le diamètre moyen $D_m = (D_1 + D_2)/2$.

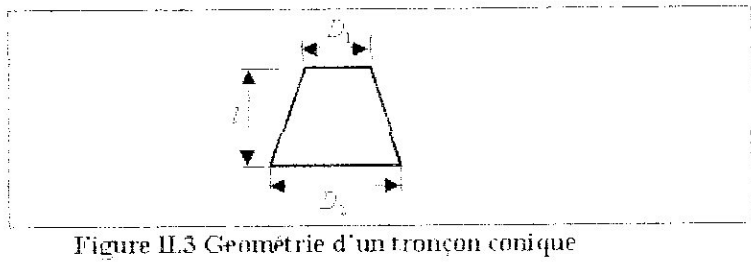


Figure II.3 Géométrie d'un tronçon conique

Remarque

Il est possible de calculer exactement la rigidité torsionnelle d'un arbre conique sans avoir la nécessité de la découper en tronçon. Si l est sa longueur, D_1 et D_2 ses diamètre minimal et maximal, on obtient :

$$l_{eq} = l \cdot \frac{G_{eq}}{G} \cdot \frac{D_{eq}^4}{3(D_1 - D_2)} \left(\frac{1}{D_1^3} - \frac{1}{D_2^3} \right) \qquad \text{(II.12)}$$

La rigidité est exprimée en terme de longueur équivalente l_{eq} d'un tronçon d'arbre cylindrique de diamètre D_{eq} dont le module de cisaillement transversal est G_{eq}. Toute les longueur est exprimée en mètre et les modules de cisaillement en Pascal.

Par contre, la longueur du tronçon considéré doit permettre une représentation satisfaisante de la répartition de l'inertie.

II.6 Mise en équation : [4]

II.6.1 Equation de mouvement :

Dans la majorité des cas le module final obtenu peut être représenté simplement comme l'assemblage de ressorts de torsion sans masse dont en connaît la rigidité K et la connectivité. Les extrémités de chacun d'eux sont liées à des disques d'inertie indéformable dont on a identifie le moment d'inertie I. le paramétrage caractérise la position et la vitesse angulaire de chaque disque du module. A partir des expressions de l'énergie cinétique et de la fonction de la force écrite en fonction des paramètres de vitesse et des déplacements indépendants, le formalisme de Lagrange permet d'obtenir le système différentiel représentant la vibration libre de torsion.

Pour illustrer le propos, on se place dans le cas d'un modèle non ramifie composé de n disque (figure II.4).

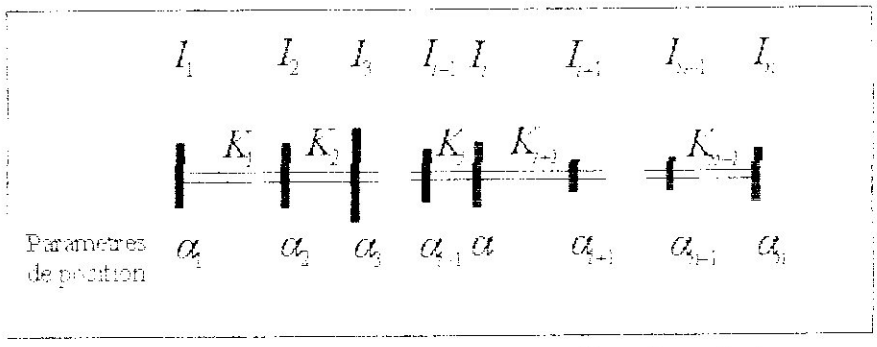


Figure II.4 Modele torsionnelle generique d'une ligne d'arbre

L'énergie cinétique E_c et la onction de force U s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \dot{\alpha}_i^2 \qquad \text{(II.13)}$$

$$U = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} K_i (\alpha_i - \alpha_{i-1})^2 \qquad \text{(II.14)}$$

L'équation différentielle obtenue pour les paramètres α_1 , α_i est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \qquad \text{(II.15)}$$

Si $i=1$

$$I_1\alpha + K_1\alpha_1 - K_1\alpha_2 = 0$$

Si $1<i<n$

$$I_i\alpha + K_{i-1}\alpha_{i-1} - (K_{i-1} + K_i)\alpha_i - K_i\alpha_{i+1} = 0$$

Si $i=n$

$$I_n\alpha_n + K_{n-1}\alpha_{n-1} + K_{n-1}\alpha_n = 0$$

L'écriture du système différentiel sous forme matricielle conduit à :

$$[M]\{\alpha\} + [K]\{\alpha\} = 0 \qquad \text{(II.16)}$$

Avec $\{\ddot{\alpha}\}$ vecteur des accélérations α

$\{\alpha\}$ Vecteur des déplacements α_n

$[M]$ Matrice de masse diagonale (figure II.5)

$[K]$ Matrice de rigidité symétrique (figure II.6)

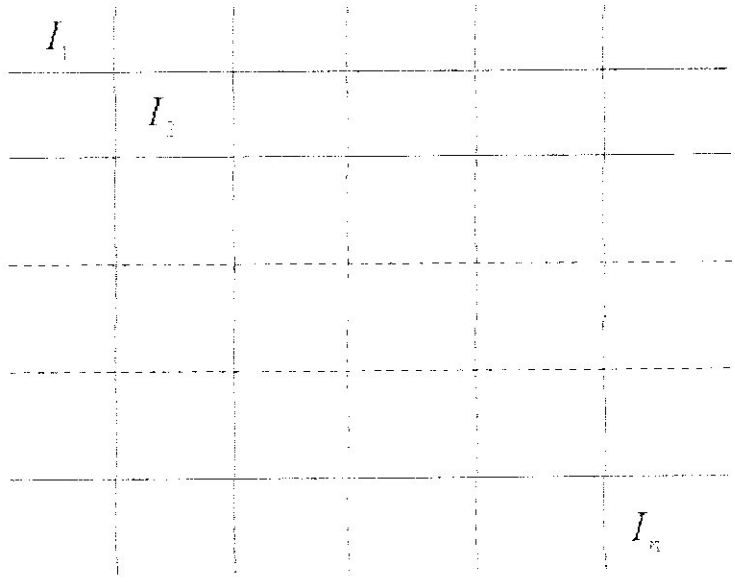


Figure II.5- structure de la matrice de masse du modèle de la figure II.4

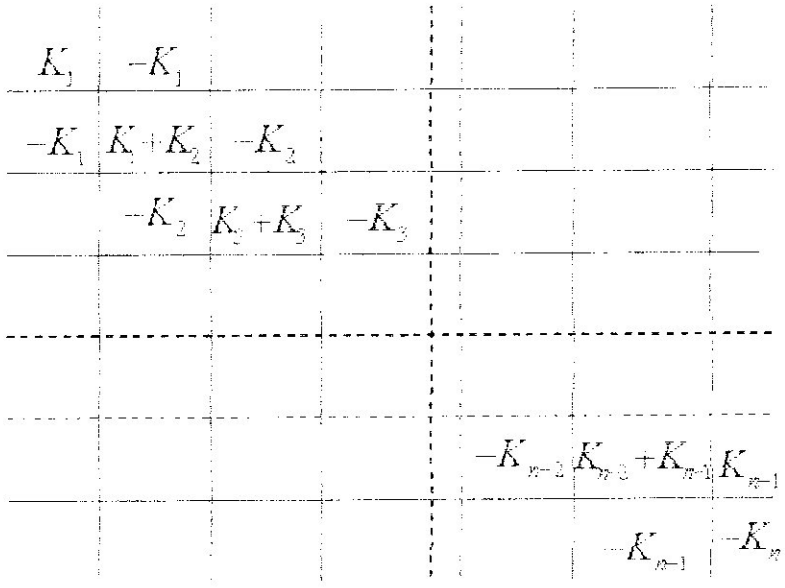


Figure II.6 – structure de la matrice de rigidité du modèle de la figure II.6

Remarque

Dans la mesure où modèle est ramifie, la démarche de mise en équation reste identique. La matrice de rigidité $[K]$ obtenue n'est plus tri diagonal mais, dans tout les cas elle reste symétrique.

II.7 Deuxième type de distribution (linéaire) :[6]

En utilise cette fois deux distributions linéaires d'inerties différents:

Pour la première partie :

$$\ddot{\theta}_1 = a_1 z + b_1 \qquad \text{(II.17)}$$

Pour la seconde partie :

$$\ddot{\theta}_2 = a_2 z + b_2 \qquad \text{(II.18)}$$

En $z = z_i - \frac{L_{i+1}}{2}$

On à a_i et b_i sont égale à :

$$a_i = \frac{\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_{i-1}}{l_{i-1}} \qquad \text{(II.19)}$$

$$b_i = \ddot{\theta}_i - \left[\frac{\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_{i-1}}{l_{i-1}}\right] z_i \qquad \text{(II.20)}$$

Donc θ_i s'écrira :

$$\ddot{\theta}_i = \left[\frac{\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_{i-1}}{l_{i-1}}\right] z + \ddot{\theta}_i - \left[\frac{\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_{i-1}}{l_{i-1}}\right] z_i \qquad \text{(II.21)}$$

D'où :

$$\ddot{\theta}_i = \left[\frac{\ddot{\theta}_i - \ddot{\theta}_{i-1}}{l_{i-1}}\right](z - z_i) + \ddot{\theta}_i \qquad \text{(II.22)}$$

De la même manière θ_2 s'écrira :

$$\ddot{\theta}_i = \left[\frac{\ddot{\theta}_{i+1} - \ddot{\theta}_i}{l_i}\right](z - z_i) + \ddot{\theta}_i \qquad \text{(II.23)}$$

On obtiendra après toutes les étapes d'intégration :

$$I\ddot{\theta} = \frac{1}{8} I_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \frac{3}{8}(I_{i-1} - I_i)\ddot{\theta}_i + \frac{1}{8} I_i \ddot{\theta}_{i+1} \qquad \text{(II.24)}$$

Donc la matrice tri diagonale est :

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} I_1 & \frac{1}{8} I_1 & & & \\ \frac{1}{8} I_{i-1} & \frac{3}{8}(I_{i-1} + I_i) & \frac{1}{8} I_i & & \\ & & & & \\ & & & \frac{1}{8} I_n & \frac{3}{8} I_n \end{bmatrix} \qquad \text{(II.25)}$$

Remarque:

Dans les deux types de distributions la matrice de rigidité est la même

II.7.1 Résolution numérique du système aux valeurs propre :

Les valeurs propres. du rotor étudié sont obtenues la résolution de système d'équations obtenues, par le logiciel de MATLAB 6.5 l'application de travail s'est faite sur un modèle de Turboréacteur.

On ne cherche des solutions non identiquement nulles représentant à partir des conditions initiales données les vibrations possibles des disques du modèle soumis à aucune excitation extérieure permanente. Ces solutions sont de la forme :

$$\{a\} = \{a\}cos\omega t \qquad \text{(II.26)}$$

ω *(rad/s)* pulsation du mouvement libre.

En insérant ces solutions **(II.23)** dans le système différentiel **(II.22),** on obtient le système aux valeurs propres suivant :

$$-\omega^2[M]\{a\}+[K]\{a\}=0 \qquad \text{(II.27)}$$

Les solutions obtenues définissent les pulsations propres ω_i telles que :

$$\text{Dét}([K]-\omega_i^2[M])=0 \qquad \text{(II.28)}$$

Pour chaque pulsation propre ω_i , le vecteur propre associe $\{\Phi_i\}$ est déterminer. Il est solution du système linéaire :

$$(-\omega^2[M]+[K])\{a\}=0 \qquad \text{(II.29)}$$

Remarque

La première pulsation propre trouvée est nulle, car elle correspond au mouvement de rotation de corps solide pour les rotors composant la ligne d'arbre.

Chapitre III

DYNAMIQUE DES ROTORS EN FLEXION

Les turbomachines comme les turbines à vapeur, les turbines de détente et les compresseurs centrifuges multi étagés, font partie des machines tournantes où les aspects de dynamique de flexion d'arbre sont très importants, car leur fonctionnement est toujours supercritique.

Pour prédire correctement le comportement vibratoire en flexion, nous avons utilisé deux méthodes numériques : la méthode de ***La méthode de Matrice de Transfère*** afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomène de base et la méthode des éléments finis lorsqu'il s'agit de prévoir le comportement dynamique des machines réelles.

III.1 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor : [5]

Les éléments de base d'un rotor sont : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser disque, arbre et balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. L'expression du travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer les forces généralisées [15]. Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- l'**énergie cinétique** T, l'**énergie de déformation** U et le **travail virtuel des forces extérieures** δW sont calculés pour tous les éléments du système :
- une méthode analytique est choisie : la **méthode de matrice de transfère** pour mettre en évidence les phénomènes ou la **méthode des éléments finis** pour les applications industrielles.
- les **équations de Lagrange** sont appliquées sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \qquad \text{(III.1)}$$

III.1.1 Disque :

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique. $R_0(XYZ)$ est un repère galiléen et R(xyz) un repère fixé au disque (figure III.1). Le système de coordonnées xyz est relié au système de coordonnées XYZ par l'intermédiaire des angles ψ,θ,φ. Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe Z, puis d'un angle θ autour du nouvel axe x, noté x_1 ; enfin d'un angle φ autour de l'axe de rotation propre du disque y.

Le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère xyz est :

$$\overrightarrow{\omega_{R1/R_0}} = \psi^{\cdot} Z + \theta^{\cdot} x_1 + \phi^{\cdot} y \quad \ldots \quad \text{(III.2)}$$

Où Z, x1 et y sont les vecteurs unitaires des axes. L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse $\overrightarrow{Gx}$, $\overrightarrow{Gy}$, $\overrightarrow{Gy}$ est calculée en utilisant le repère R. Dans ce repère, le vecteur rotation instantanée est

$$\overrightarrow{\omega^{R}_{S/R_0}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi^{\cdot} \cos\theta \sin\phi + \theta^{\cdot} \cos\phi \\ \phi^{\cdot} + \psi^{\cdot} \sin\theta \\ \psi^{\cdot} \cos\theta \cos\phi - \theta^{\cdot} \sin\phi \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \text{(III.3)}$$

Soient u et w les coordonnées suivant X,Z de O dans R_0, la coordonnée suivant Y est constante. Par ailleurs, la masse du disque est M_d et sont tenseur d'inertie en G, comme xyz sont les directions principales d'inertie, a comme expression :

$$I_{/0} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \text{(III.4)}$$

L'expression générale de l'énergie cinétique du disques 'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d \left(\dot{u}^2 + \dot{w} \right) + \frac{1}{2} \left(I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2 \right) \quad \ldots \quad \text{(III.5)}$$

Et peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{dx}=I_{dz}$), les angles (θ, ψ) petits et la vitesse angulaire constante ($\psi^{\cdot} = \Omega$).L'équation (III.5) devient alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{1}{2} I_{dx} \left(\dot{\theta}^2 + \psi^2 \right) + \frac{1}{2} I_{dy} \left(\Omega^2 + 2\Omega \psi^{\cdot} \theta \right) \quad \ldots \quad \text{(III.6)}$$

Où le terme , qui est constant, n'a pas d'influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω, dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le dernier terme, $I_{dy} \Omega \psi^{\cdot} \theta$ représente l'effet gyroscopique, (Coriolis).

III.1.2 Arbre :

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire et est caractérisé par l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

III.1.2.1 Énergie cinétique :

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque (6). Pour un élément de longueur L, de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_e = \frac{\rho S}{2}\int_0^L \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2\right)dy + \frac{\rho I}{2}\int_0^L \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\right)dy + \rho IL\Omega^2 - 2\rho I\Omega\int_0^L \dot{\psi}\theta\, dy \qquad \text{(III.7)}$$

Où ρ est la masse par unité de volume, S est l'aire de la section droite de la poutre et I le moment d'inertie diamétral.

La première intégrale de (7) est l'expression classique d'une poutre en flexion ; la seconde intégrale correspond à l'effet secondaire d'inertie de rotation (poutre de Timoshenko) ; le terme ρ IL Ω 2 est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement, enfin la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

III.1.2.2 Énergie de déformation :

Le point C est le centre géométrique de la poutre, $B\,(x, z)$ est un point de la section droite (figure 2), E est le module d'Young, ε et σ sont les déformations et les contraintes, u^*et w^* sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x, z. Si les termes du second ordre ne sont pas pris en compte, la déformation longitudinale du point B s'écrit :

$$\varepsilon = -x\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \qquad \text{(III.8)}$$

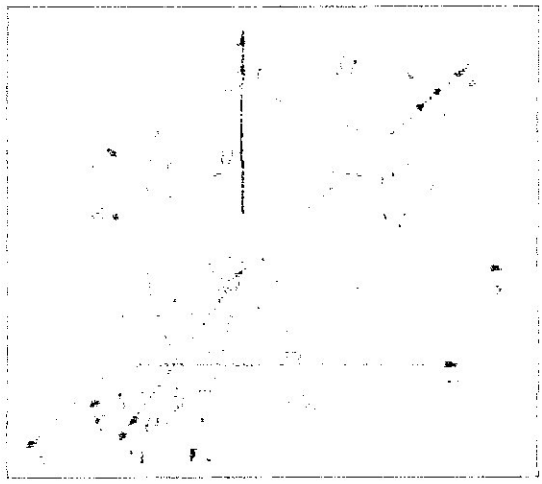


Figure III.1 Repère de reference du disque sur l'arbre flexible

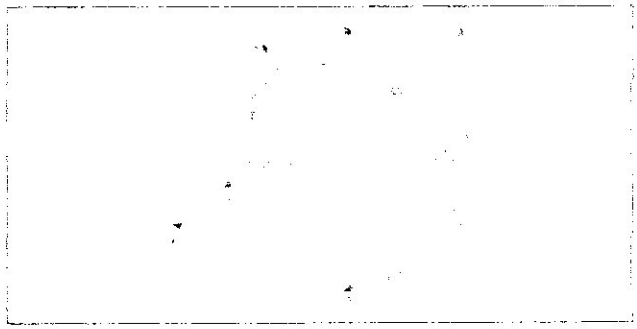


Figure III.2 Section droite de l'arbre

L'énergie de déformation a comme expression :

$$u_a = \frac{1}{2}\int_{\tau} \varepsilon^t \sigma d\tau \qquad \text{(III.9)}$$

Où « t » est le symbole matriciel de transposition. La relation entre contraintes et déformations est :

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad \text{(III.10)}$$

Alors :

$$u_a = \frac{E}{2}\int_{\tau} \varepsilon^t d\tau \qquad \text{(III.11)}$$

Compte tenu de (8) l'énergie de déformation s'écrit :

$$u_a = \frac{1}{2}\int_0^L \iint_S \left(-x\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dx dz dy \qquad \text{(III.12)}$$

$$u_a = \frac{E}{2}\int_0^L\iint_S\left(x^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 + z^2\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2 + 2xz\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)dxdzdy \quad \text{(III.13)}$$

Par suite de la symétrie de la section l'intégrale correspondant au troisième terme de (13) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à x et z on a :

$$I_z = \int_S x^2 dxdz \quad \text{(III.14)}$$

$$I_x = \int_S z^2 dxdz \quad \text{(III.15)}$$

Et l'énergie de déformation a donc comme expression :

$$u_a = \frac{E}{2}\int_0^L\left[I_z\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 + I_x\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2\right]dy \quad \text{(III.16)}$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers (§ 3.1), d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de u et w composantes du déplacement dans R_0. Le passage de u, w à u^*, w^* s'écrit (figure2) :

$$w^* = u\sin\Omega t + w\cos\Omega t \quad \text{(III.17)}$$

$$u^* = u\cos\Omega t - w\sin\Omega t \quad \text{(III.18)}$$

L'équation (16) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2}\int_0^L\left[I_z\left(\cos\Omega t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin\Omega t\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + I_x\left(\sin\Omega t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos\Omega t\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right]dy \quad \text{(III.19)}$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique (où $I=I_x=I_z$), l'énergie de déformations' écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2}\int_0^L\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}\right)^2\right]dy \quad \text{(III.20)}$$

III.1.3 Palier

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées connues. Le travail virtuel δWdes forces extérieures agissantsur l'arbre se met sous la forme (figure3) :

$$\begin{aligned}\delta W = &-k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w \\ &- c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w\end{aligned} \qquad \text{(III.21)}$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \qquad \text{(III.22)}$$

Fu et Fw sont les composantes de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.23)}$$

Fréquemment en particulier dans le cas de palier hydrodynamique: kxx ≠ kzz ; cxx≠czz , et kxz ≠ kzx ; cxz ≠ czx .

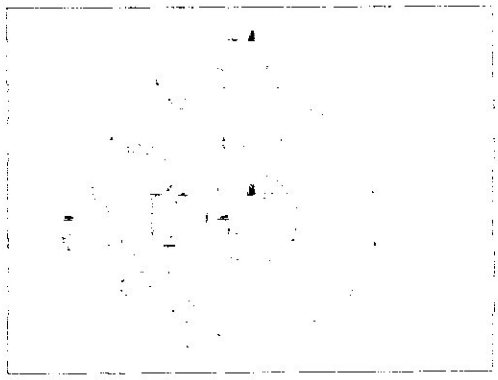


Figure III.3 Amortissement et raideur d'un palier

III.1.4 Balourd :

Le balourd (figure 4) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y et sa coordonnée selon l'axe y est constante. Dans le repère R_0 les coordonnées de la masse sont :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} u + d\sin\Omega t \\ Cte \\ w + d\cos\Omega t \end{vmatrix} \qquad \text{(III.24)}$$

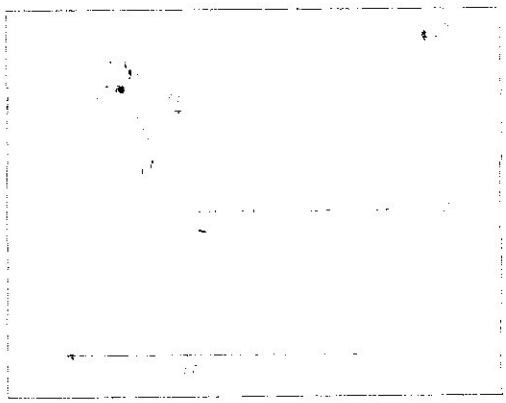


Figure III.4 – Balourd

D'où la vitesse :

$$V = \frac{\overrightarrow{dOD}}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{u} + d\Omega\cos\Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega\sin\Omega t \end{vmatrix} \qquad \text{(III.25)}$$

et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2}\left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d\dot{u}\cos\Omega t - 2\Omega d\dot{w}\sin\Omega t\right) \qquad \text{(III.26)}$$

Le terme mb $\Omega^2 d^2/2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_b = m_b\Omega d\left(\dot{u}\cos\Omega t - \dot{w}\sin\Omega t\right) \qquad \text{(III.27)}$$

l 'application des équations de Lagrange fournit la force tournante due au balourd.

III.2 La méthode des éléments finis : [17]

La méthode des éléments finis, très utilisée pour le calcul des structures complexes, est également efficace en dynamique des rotors. L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées [15].

La détermination du comportement statique ou dynamique de structures réelles ne peut s'effectue que numériquement à cause de la complicité des géométries et de certaines conditions aux limites. Dans ce cas la méthode des éléments finis est très également efficace en dynamique des rotors.

III.2.1 Modélisation par éléments finis : [11]

Il est nécessaire de définir les éléments finis permettant de modéliser les rotors : arbres, disque, paliers et de représenter les forces extérieures, en particulier celles dues aux balourds.

III.2.1.1 Disque : [5]

Chaque nœud possède quatre degrés de liberté : deux déplacements u, w, suivant X et Z, et deux pentes θ et ψ autour de X et Z. le vecteur $\{\delta\}$ déplacements nodaux du centre de disque est :

$$\{\delta\}=\{u, w, \theta, \psi\} \qquad \text{(II.28)}$$

L'application des équations de Lagrange à l'expression (III.6)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \delta}=\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.29)}$$

La première matrice est la matrice de masse est la seconde la matrice gyroscopique.

III.2.1.2 Arbre :

L'arbre est modélisé par des éléments de poutre de section circulaire constante. L'élément fini classique utilisé a 2 nœuds et 4 degré de liberté. Les relations pentes déplacements sont :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{(III.30)}$$

$$\psi = -\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \text{(III.31)}$$

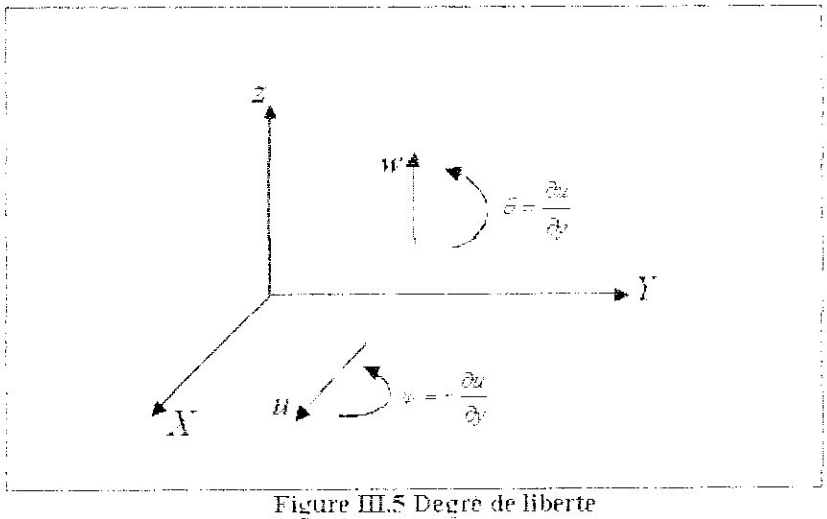


Figure III.5 Degré de liberté

Et le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\{\delta\} = \{u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2\}^t \qquad \text{(III.32)}$$

de plus, on défini les vecteurs δu , δw tels que :

$$\{\delta u\} = \{u_1, \psi_1, u_2, \psi_2\}^t \qquad \text{(III.33)}$$

$$\{\delta w\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\}^t \qquad \text{(III.34)}$$

III.2.1.3 Fonction de forme et les matrices élémentaires : [9]

On présenter les fonctions de forme et les matrices élémentaires pour les différents éléments finis (barres) utilisés dans notre projet.

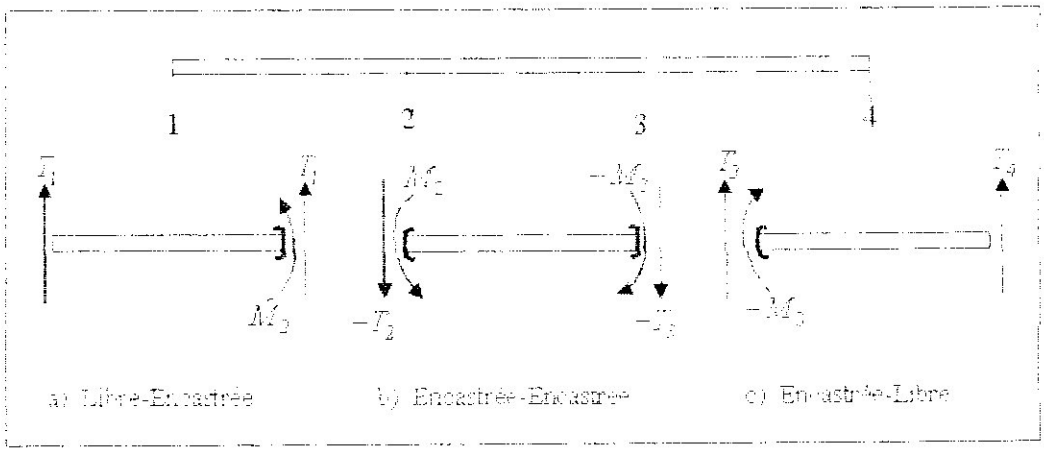


Figure III.6 les differents elements finis (barres)

a). Elément fini (barre libre encastrée)

Comme il y a quatre déplacements nodaux par plan la fonction de déplacement choisi pour w est :

$$w(y)=\alpha_1+\alpha_2 y+\alpha_3 y^2+\alpha_4 y^3 \qquad \text{(III.35)}$$

Et la pente a comme expression :

$$\theta(y)=\frac{\partial w(y)}{\partial y}=\alpha_2+2\alpha_3 y+3\alpha_4 y^2 \qquad \text{(III.36)}$$

Condition aux limites :

$y=0$

$w(0)=\alpha_1=w_1$

$$\text{nœud 1 : } M_f(0)=0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 w(y)}{dy^2}\right|_{y=0}=0$$

$$\Rightarrow \alpha_3=0$$

$y = L$

Nœud 2 : $w(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = w_2$

$\theta(L) = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 = \theta_2$

D'où $w(y) = N_{21}(y)w_1 + N_{22}(y)\theta_1 + N_{23}(y)w_2 + N_{24}(y)\theta_2 = N_2(y)\,\delta w$

Avec

$$N_{21}(y) = 1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3}$$

$$N_{22}(y) = 0$$

$$N_{23}(y) = \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3}$$

$$N_{24} = -\frac{y}{2} + \frac{y^3}{2L^2}$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3};\ 0;\ \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3};\ -\frac{y}{2} + \frac{y^3}{2L^2}\right] \qquad \text{(III.37)}$$

De la même façon on obtient :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y}{2L} + \frac{y^3}{2L^3};\ 0;\ \frac{3y}{2L} - \frac{y^3}{2L^3};\ \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2L^2}\right] \qquad \text{(III.38)}$$

Où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont les fonctions de forme d'une poutre en flexion (libre-encastrée).

L'énergie cinétique est obtenue à partir de l'expression (III.7) qui donne :

$$T_e = \frac{\rho S}{2}\int_0^L \left[\left[\delta u\right]^T N_1^T N_1 \left[\delta u\right] + \left[\delta w\right]^T N_2^T N_2 \left[\delta w\right]\right] dy + \frac{\rho I}{2}\int_0^L \left[\left[\delta u\right]^T \frac{dN_1^T}{dy}\frac{dN_1}{dy}\left[\delta u\right] + \left[\delta w\right]^T \frac{dN_2^T}{dy}\frac{dN_2}{dy}\left[\delta w\right]\right] dy \qquad \text{(III.39)}$$

$$-\rho I\Omega\int_0^L \left[\delta u\right]^T \frac{dN_1^T}{dy}\frac{dN_2}{dy}\left[\delta w\right] dy + \rho I L \Omega^2$$

Et en substituant (III.37) et (III.38) ainsi que leurs dérivées dans (III.39) on aboutit à la forme compacte :

$$T_e = \frac{1}{2}\left[\delta\dot{u}\right]^t M_1\left[\delta\dot{u}\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\dot{w}\right]^t M_2\left[\delta\dot{w}\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\dot{u}\right]^t M_3\left[\delta\dot{u}\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\dot{w}\right]^t M_4\left[\delta\dot{w}\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\dot{u}\right]^t M_5\left[\delta w\right] + \rho I\Omega^2 \quad \text{(III.40)}$$

Où les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$ sont les matrices de masse. $[M_3]$ et $[M_4]$ représentent l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et $[M_5]$ l'effet gyroscopique. Le dernier terme qui est une constante a une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange à (III.40) ; alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{\delta}}\right) - \frac{\partial T_e}{\partial \delta} = \left([M] + [M_s]\right)\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} \quad \text{(III.41)}$$

Où $[M]$ et $[M_s]$ sont déduites respectivement de $[M_1]$ et $[M_3]$ et $[M_2]$ $[M_4]$ et où $[C]$ vient $[M_5]$. Les matrices sont :

$$[C] = \frac{\rho I\Omega}{5L}\begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -L & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & L & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & L \\ L & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & -L & L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.42)}$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{5L}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & L \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -L & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & -L & L^2 & 0 \\ -L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.43)}$$

$$[M]=\frac{\rho SL}{420}\begin{bmatrix} 99 & 0 & 0 & 0 & 58.5 & 0 & 0 & 16.5L \\ 0 & 99 & 0 & 0 & 0 & 58.5 & -16.5L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 58.5 & 0 & 0 & 0 & 204 & 0 & 0 & 36L \\ 0 & 58.5 & 0 & 0 & 0 & 204 & -36L & 0 \\ 0 & -16.5L & 0 & 0 & 0 & -36L & 8L^2 & 0 \\ 16.5L & 0 & 0 & 0 & 36L & 0 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.44)}$$

L'énergie de déformation est obtenue à partir de l'expression **(20)** qui donne :

$$U_e=\frac{EI}{2}\int_0^L\left[\{\delta u\}^T\frac{d^2N_1^T}{dy^2}\frac{d^2N_1}{dy^2}\{\delta u\}+\{\delta w\}^T\frac{d^2N_2^T}{dy^2}\frac{d^2N_2}{dy^2}\{\delta w\}\right]dy \quad \text{(III.45)}$$

Après intégration, on a sous une forme compacte :

$$U_e=\frac{1}{2}\{\delta u\}^T[K_1]\{\delta u\}+\frac{1}{2}\{\delta w\}^T[K_2]\{\delta w\} \quad \text{(III.46)}$$

Où $[K_1]$ et $[K_2]$ sont les matrices classiques de raideur.

Il est fréquemment nécessaire de prendre en compte l'effet de cisaillement qui est caractérisé par la quantité

$$\alpha=\frac{12EI}{GA_sL^2} \quad \text{(III.47)}$$

Où G le module de cisaillement est

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{(III.48)}$$

ν le coefficient de Poisson et $A_s\approx S$ la section réduite.

L'effet de cisaillement modifie évidement la matrice classique qui peut transformée inclure aussi le cisaillement. La matrice de raideur a alors comme expression :

$$[k] = \frac{EI}{(1+\alpha)L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & -3L & (3+\alpha)L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & 0 & (3+\alpha)L^2 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III.49)}$$

Lorsque l'effet de cisaillement n'est pas pris en compte $\alpha = 0$

b). Elément fini (barre encastrée - encastrée)

condition aux limites :

$$y = 0$$

noeud 1 : $w(0) = a_1 = w_1$

$$\theta(0) = a_2 = \theta_1$$

$$y = L$$

noeud 2 : $w(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = w_2$

$$\theta(L) = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 = \theta_2$$

$$N_3(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{2y^3}{L^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{(III.50)}$$

$$N_4(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{2y^3}{L^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{(III.51)}$$

$$[G]=\frac{\rho I\Omega}{30L}\begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.52)}$$

$$[M_a]=\frac{\rho I}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.53)}$$

$$[M]=\frac{\rho AL}{420L}\begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.54)}$$

$$[K]=\frac{EI}{(1+\alpha)L^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+\alpha)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-\alpha)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-\alpha)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-\alpha)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-\alpha)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.55)}$$

c). Elément finis (barre encastrée – libre)

conditions aux limites :

$y = 0$

noeud 1 : $w(0) = a_1 = w_1$

$\theta(0) = a_2 = \theta_1$

$y = L$

$w(L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = w_2$

noeud 2 :

$$M_f(L) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w(y)}{dy^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_3 + 6a_4 L = 0$$

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{2L^2} - \frac{y^3}{2L^3};\ y - \frac{3y^2}{2L} + \frac{y^3}{2L^2};\ \frac{3y^2}{2L^2} - \frac{y^3}{2L^3};\ 0\right] \quad \text{(III.56)}$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{2L^2} + \frac{y^3}{2L^3};\ -y + \frac{3y^2}{2L} - \frac{y^3}{2L^2};\ \frac{3y^2}{2L^2} - \frac{y^3}{2L^3};\ 0\right] \quad \text{(III.57)}$$

$$[C] = \frac{\rho I \Omega}{5L}\begin{bmatrix} 0 & -6 & -L & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -L & -6 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & -L^2 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 \\ 0 & 6 & L & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.58)}$$

$$[M_s]=\frac{\rho I}{5L}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -L & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & L & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 & L^2 & L & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & L & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -L & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.59)}$$

$$[M]=\frac{\rho SL}{420}\begin{bmatrix} 204 & 0 & 0 & -36L & 58.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & 36L & 0 & 0 & 58.5 & 0 & 0 \\ 0 & 36L & 8L^2 & 0 & 0 & 16.5L & 0 & 0 \\ -36L & 0 & 0 & 8L^2 & -16.5L & 0 & 0 & 0 \\ 58.5 & 0 & 0 & -16.5L & 99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 58.5 & 16.5L & 0 & 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.60)}$$

$$K=\frac{EI}{(1+a)L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3L & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3L & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & (3+a)L^2 & 0 & 0 & -3L & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & (3+a)L^2 & 3L & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3L & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3L & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.61)}$$

III.2.1.4 Paliers :

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement relient les forces aux déplacements et vitesses. L'influence des pentes et des moments habituellement négligée et compte tenu de (III.23) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_U \\ F_\psi \\ F_W \\ F_\theta \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.62)}$$

La première matrice est une matrice de raideur , la seconde une matrice d'amortissement visqueux.

III.2.2Balourds :

L'expression générale de l'énergie cinétique due à un balourd est donnée par l'équation (III.27), l'application des équations de Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}}\right)+\left(\frac{\partial T}{\partial \delta}\right)=-m_b e\Omega^2\begin{bmatrix}\sin\Omega t\\ \cos\Omega t\end{bmatrix} \qquad \text{(III.63)}$$

Avec $\{\delta\}^T=\{u, w\}^t$

III.2.2.1 Equation de mouvement :

L'application des équations de Lagrange donne l'équation générale du mouvement :

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C(\Omega)]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{F(t)\} \qquad \text{(III.64)}$$

Où $\{\delta\}$ est le vecteur contenant maintenant tous les déplacements nodaux, $[M]$ est la matrice de masse symétrique, $[C(\Omega)]$ est une matrice non symétrique, fonction de Ω, incluant l'effet gyroscopique (antisymétrique) d'amortissement des paliers fréquemment non symétrique. $[F(t)]$ est le vecteur des forces.

III.3 la méthode de matrice de transfère : [10]

La matrice de transfère (ou de passage) résulte de l'intégration d'un système des équations différentielle par apport à l'espace, d'un autre point de vue on peut associe ces équations différentielle par apport au temps et à l'espace qui caractérisée la dynamique d'un élément indéformable, par intégration obtenir la matrice de passage imprégnée des caractéristique élastique et dynamique.

La force généralisée intérieur est représentée par la matrice colonne

$$F_i=\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_z\\ T_x\\ T_y\\ T_z\end{bmatrix} \qquad \text{(III.65)}$$

Les déplacements généralisés sont représentés par la matrice colonne :

$$D_1 = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \text{(III.66)}$$

On calcul la relation qui associe F_2, D_2 à F_1 ,D_1 c'est-à-dire on utilisant la notation matricielle, de calcul τ_{12} ,telle que :

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \tau_{1,2} \begin{bmatrix} F_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad \text{(III.67)}$$

τ_{12} est la matrice de passage où (de transfère) de nœud 1 à nœud 2.

III.3.1 Méthode de calcul de la matrice de transfère :

Deux théorème domine la description dynamique du solide indéformable.

Pour une vue globale, d'un peut loin : la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures.

Il s'applique au barycentre massique G et s'exprime par

$$\frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{V_G}\right) = \overrightarrow{F_e}$$

$\overrightarrow{V_G}$: Vitesse absolue de G.

Pour une vue locale,la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment résultant des forces extérieures.

Il s'applique autour d'un axe et s'exprime par

$$\frac{d}{dt}\left(I\overrightarrow{\Omega}\right) = \overrightarrow{M_e}$$

I : inertie massique par rapport à un axe porté le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$.

L'expression vectorielle des relations de base est simple, mais elle ne permet pas une description fine des comportements ; pratiquement, il faut considérer des bases et dans ces bases des composantes- celles définies au paragraphe

III.3.2 principe :

On à le système des équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dF_f}{ds} = P_f F_f - F_{ef} & \text{(équilibre)} \\ F = E_e D_e & \text{(élasticité)} \\ D_e = R_f D_f + \dfrac{dF_f}{ds} & \text{(déformation - deplacement)} \\ V = CV_f & \text{(changement de base)} \end{cases} \quad \text{(III.68)}$$

A partir du système (III.67) nous définirons la méthode de calcul qui permet de former la relation matricielle (III.66) donc la matrice de passage est $v_{1,2}$:

Transformons les première et troisième relations de système (III.67) pour utilisée la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{F})$:

$$\begin{cases} \dfrac{dCF_F}{ds} = CP_f C^{-1} CF_f - CF_{ef} \\ CD_{ef} = CR_f C^{-1} CD_f + \dfrac{dCF_f}{dS} \end{cases} \quad \text{(III.69)}$$

On posant :

$$\begin{cases} CP_f C^{-1} = P \\ CR_f C^{-1} = R \end{cases} \quad \text{(III.70)}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{ds} = PF - F_e & \text{(équilibre)} \\ F = E_e D_e & \text{(élasticité)} \\ D_e = R_f D_f + \dfrac{dF_f}{dS} & \text{(déformation - deplacement)} \end{cases} \quad \text{(III.71)}$$

Notons que si C n'est pas constante dans le domaine de variation de s (elle peut être par secteur ,ce qui ,compte tenu de la méthode d'intégration utilisée permet l'écriture $\frac{\Delta F}{F_0}$), il faut rester dans la base de Frenet en écrivant :

$$C^{-1}F = C^{-1}E_c C C^{-1} D_0$$

où

$$F_j = E_{cj} D_{0j}$$

Pour l'étude des déplacements, la matrice colonne D_0 des déformations doit être éliminée

$$D_0 = E_c^{-1} F$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{dF}{ds} = PF - F \\ \frac{dD}{ds} = E_c^{-1} F - RD \end{cases} \qquad \text{(III.72)}$$

C'est à partir de ce système d'équations différentielles du premier ordre qu'après intégration nous pourrons dégager la matrice de passage (où de transfère)

Finalement, on pourra calculer la force F_2 et le déplacement D_2 généralisés au point g_2 en fonction de F_1 et D_1 au point g_1 c'est à dire former la relation :

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = T_{1,2} \begin{bmatrix} F_1 \\ D_1 \end{bmatrix}$$

III.4 La méthode d'intégration *(la méthode d'Euler)*

Les méthodes d'intégrations numériques sorte du cadre de cette présentation, notons qu'elles ont leurs difficultés propres pour ce qui concerne la précision et la convergence.

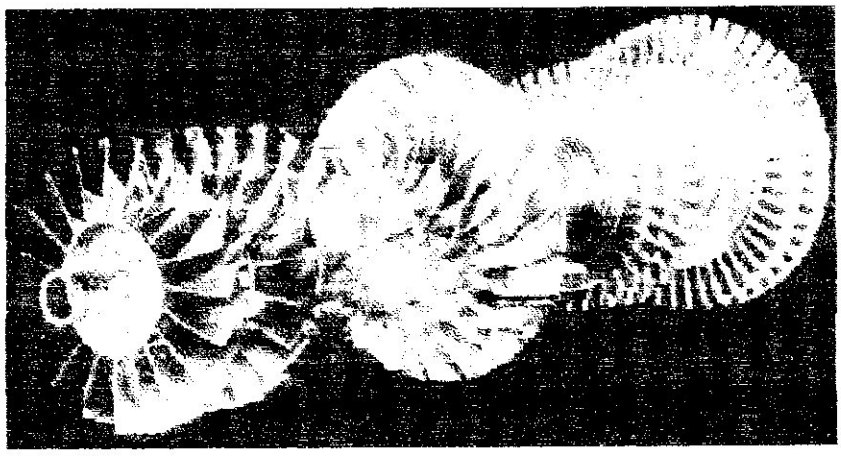
Si le pas n'est pas trop grand (5% à 10% de la longueur de la poutre), on peut espérer que la méthode d'Eleur permette une intégration correcte.

Chapitre IV

DYNAMIQUE DES ROTORS EN TORSION (APPLICATION)

IV.1 Présentation de turboréacteur :

La ligne d'arbre (figure IV.1) est celle d'un point petit turboréacteur prototype d'origine anglais, qui existe dans notre atelier de propulsion, conçu pour prélèvement de puissance, il est composé de deux compresseurs, le premier axial de deux étages, le deuxième centrifuge, et d'une turbine axiale de deux étages aussi.



Dans ce chapitre on calcule les comportements vibratoires en torsion de la ligne d'arbre Avec les types de distributions des inerties qui sont définies dans le deuxième chapitre

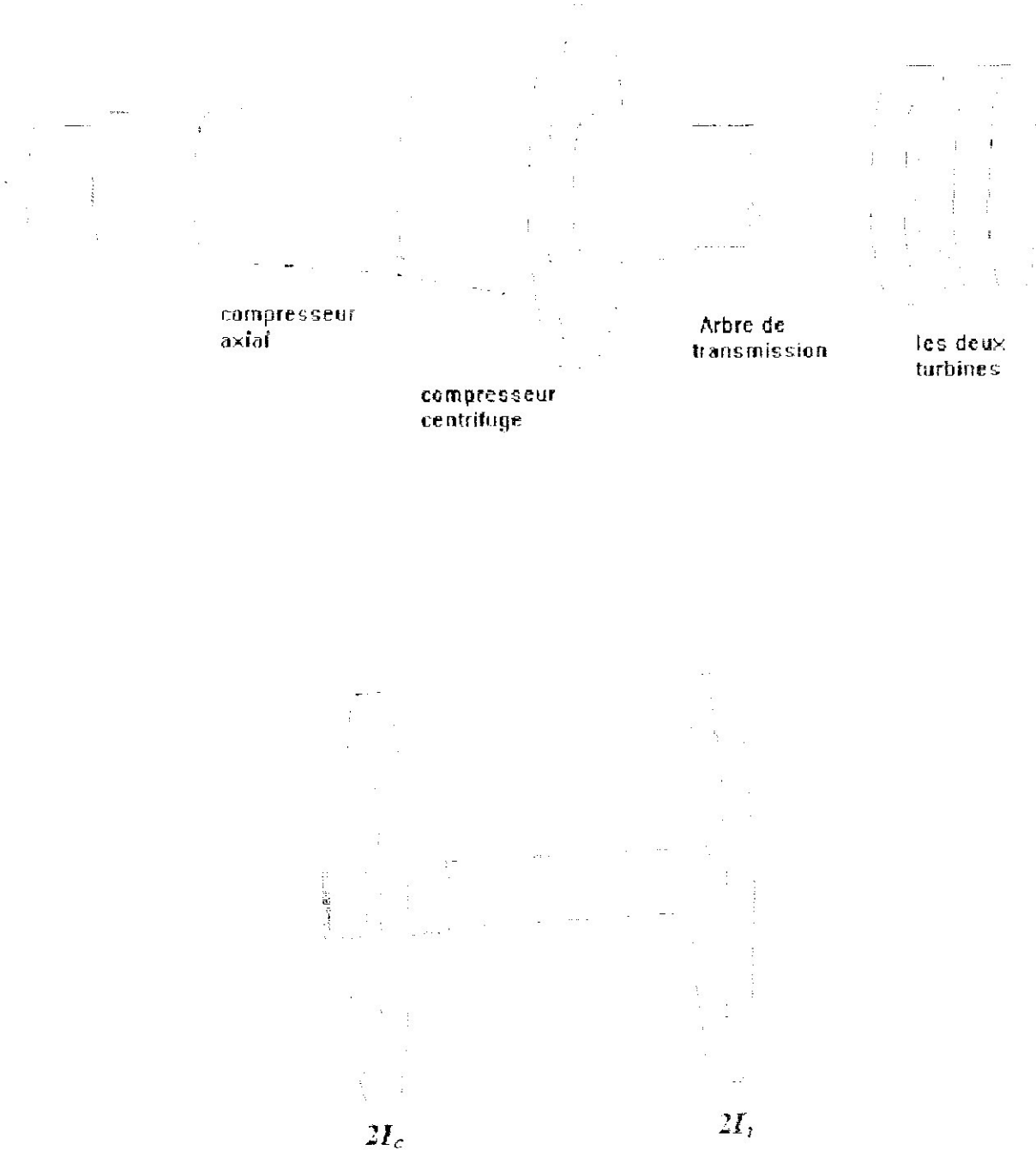


Figure IV.2 Modelisation d'un reacteur (realise par logiciel ''solid works''

IV.1.2.1 Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs : [7]

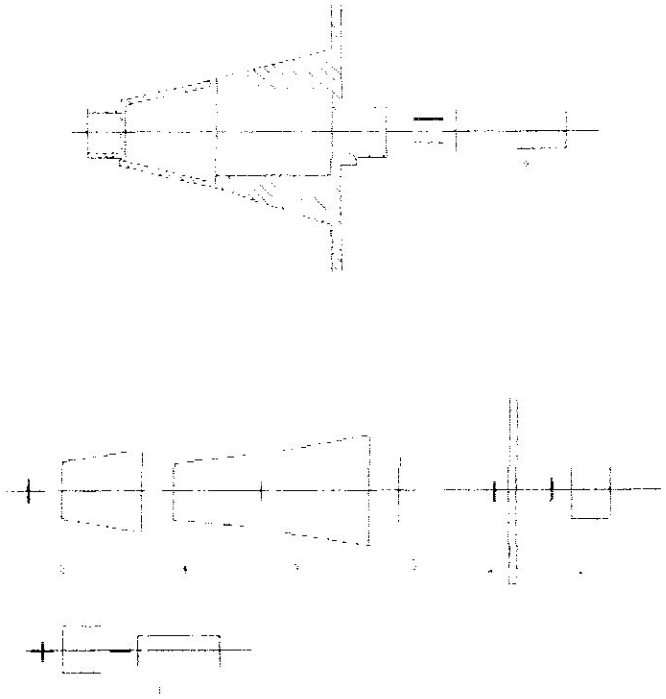


Figure IV.3 Calcul du moment d'inertie equivalent pour les compresseurs

La masse volumique de matériau de compresseur :

$\rho = 7800\ kg/m^3$

$$I_{eq}=(I_{C1}-I_{C2})+(I_{C3}-I_{C4})+(I_{C5}-I_{C6})+(I_{C7}+I_{C8}+I_{C9}-I_{C10}) \quad \text{(IV.1)}$$

$$I_{C1}=\left(\rho\cdot\frac{\pi\times D_{C1}^2}{4}\cdot L_{C1}\cdot\frac{D_{C1}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\cdot\frac{3.14\cdot 0.055^2}{4}\cdot 0.03\cdot\frac{0.055^2}{8}\right)=1.10\times10^{-4}\,N.m.s^2$$

$$I_{C2}=\left(\rho\cdot\frac{\pi\cdot D_{C2}^2}{4}\cdot L_{C2}\cdot\frac{D_{C2}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\cdot\frac{3.14\times0.04^2}{4}\cdot 0.03\cdot\frac{0.04^2}{8}\right)=5.88\ \ 10^{-}N.m.s^2$$

$$D_{mC3}=(D_{1C3}+D_{2C3})/2=5^{\circ}(76+100)/2=88mm$$

$$I_{C3}=\left(\rho\times\frac{\pi\cdot D_{mC3}^4}{4}\times L_{C3}\cdot\frac{D_{mC3}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times0.088^4}{4}\times0.094\cdot\frac{0.088^2}{8}\right)=4.315\times10^{-2}\,N.m.s^2$$

$$D_{mC4} = (D_{1C4} + D_{2C4})/2 = (65+80)/2 = 72.5mm$$

$$I_{C4} = \left(\rho \frac{\pi D_{mC4}^2}{4} \times L_{C4} \times \frac{D_{mC4}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.072^2}{4} \times 0.094 \times \frac{0.072^2}{8}\right) = 1.933 \times 10^{-4} N.m.s^2$$

$$D_{mC5} = (D_{1C5} + D_{2C5})/2 = (80+128)/2 = 104mm$$

$$I_{C5} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{mC5}^2}{4} \times L_{C5} \times \frac{D_{mC5}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.0104^2}{4} \times 0.075 \times \frac{0.104^2}{8}\right) = 6.715 \times 10^{-3} N.m.s^2$$

$$I_{C6} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C6}^2}{4} \times L_{C6} \times \frac{D_{C6}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.08^2}{4} \times 0.075 \times \frac{0.08^2}{8}\right) = 2.351 \times 10^{-3} N.m.s^2$$

$$I_{C7} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C7}^2}{4} \times L_{C7} \times \frac{D_{C7}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.232^2}{4} \times 0.004 \times \frac{0.232^2}{8}\right) = 8.869 \times 10^{-3} N.m.s^2$$

$$I_{C8} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C8}^2}{4} \times L_{C8} \times \frac{D_{C8}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.054^2}{4} \times 0.024 \times \frac{0.054^2}{8}\right) = 1.56 \times 10^{-4} N.m.s^2$$

$$I_{C9} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C9}^2}{4} \times L_{C9} \times \frac{D_{C9}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.045^2}{4} \times 0.031 \times \frac{0.045^2}{8}\right) = 9.73 \times 10^{-5} N.m.s^2$$

$$I_{C10} = \left(\rho \times \frac{\pi \times D_{C10}^2}{4} \times L_{C10} \times \frac{D_{C10}^2}{8}\right)$$

$$= \left(7800 \times \frac{3.14 \times 0.038^2}{4} \times 0.059 \times \frac{0.038^2}{8}\right) = 9.42 \times 10^{-5} N.m.s^2$$

Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs :

I_{eC}=1.757.10^{-3}Nms

IV.1.2.2 Moment d'inertie équivalent pour la turbine : [7]

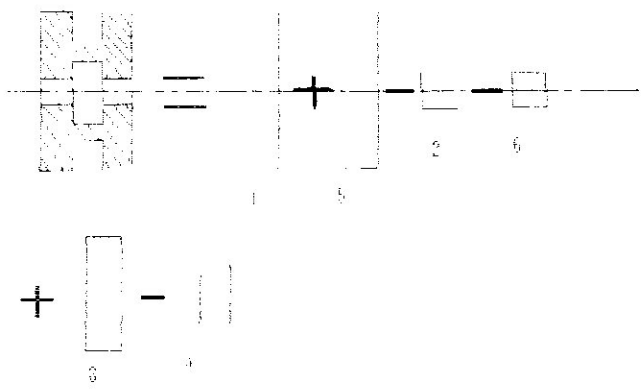


Figure IV.4 calcul des moments d'inertie equivalent pour la turbine

La masse volumique du matériau de la turbine : $\rho=7800\ (kg/m^3)$

$$I_T=(I_{T1}+I_{T2})+(I_{T3}-I_{T4})+(I_{T5}-I_{T6}) \qquad \text{(IV.2)}$$

$D_{mT1}=(D_{1T1}+D_{2T1})/2=(123+136)/2=134.5\ mm$

$$I_{T1}=\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{mT1}^2}{4}\times L_{T1}\times\frac{D_{mT1}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times 0.1345^2}{4}\times 0.02\times\frac{0.1345^2}{8}\right)=5.01\times 10^{-3}\ N.m.s^2$$

$$I_{T2}=\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{T2}^2}{4}\times L_{T2}\times\frac{D_{T2}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times 0.2^2}{4}\times 0.02\times\frac{0.02^2}{8}\right)=2.45\times 10^{-6}\ N.m.s^2$$

$$I_{T3}=\left(\rho\times\frac{\pi}{4}\times\frac{D_{T3}^2}{4}\times L_{T3}\times\frac{D_{T3}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times 0.062^2}{4}\times 0.029\times\frac{0.062^2}{8}\right)=3.28\times 10^{-6}\ N.m.s^2$$

$$I_{T4}=\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{T4}^2}{4}\times L_{T4}\times\frac{D_{T4}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times0.045^2}{4}\times0.029\times\frac{0.045^2}{8}\right)=9.1\times10^{-5}\,N.m.s^2$$

$D_{moy}=(D_{T2}+D_{T5})/2=(153+133)/2=135\ mm$

$$I_{T5}=\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{T5}^2}{4}\times L_{T5}\times\frac{D_{T5}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times0.132^2}{4}\times0.02\times\frac{0.132^2}{8}\right)=4.647\times10^{-3}\,N.m.s^2$$

$$I_{T6}=\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{T6}^2}{4}\times L_{T6}\times\frac{D_{T6}^2}{8}\right)$$

$$=\left(7800\times\frac{3.14\times0.02^2}{4}\times0.02\times\frac{0.02^2}{8}\right)=2.45\times10^{-6}\,N.m.s^2$$

Moment d'inertie équivalent pour la turbine est :

$$\boldsymbol{I_T=9.889\cdot10^{-3}N.m.s^2}$$

IV.2 Distribution de l'arbre en trois éléments :

IV.2.1 Premier type de discrétisation :

On discrétisée l'arbre par trois éléments :

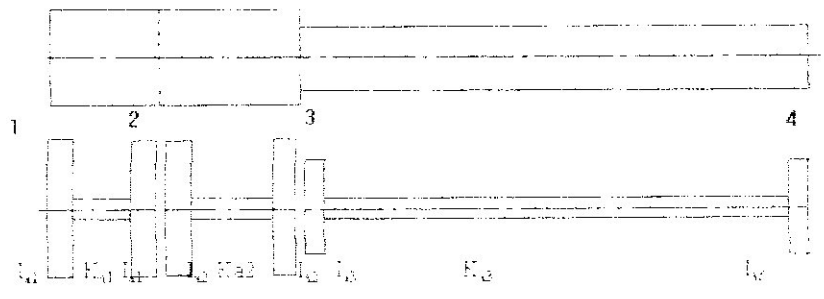


Figure IV.5 Moments d'inerties équivalents et rigidites equivalents Pour les differents tronçons d'arbre

La masse volumique du matériau de l'arbre :

$\rho = 7800\ kg/m^3$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\rho\pi\frac{d^2}{4}\cdot l_1\cdot\frac{d^2}{8}\right)$$

$l_1 = 0.04m$

$d = 0.039m$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\rho\pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot l_2\cdot\frac{d^2}{8}\right)$$

$l_2 = 0.06m$

$A.N:$

$$I_3 = I_4 = I_5 = \frac{1}{2}\left(\rho\pi\frac{d^2}{4}\cdot l_3\cdot\frac{d^2}{8}\right)$$

$l_3 = 0.008m \qquad d = 0.039m$

Le module de cisaillement transversal du matériau de l'arbre :

$G = 8\times10^4\ (N/mm^2)$

$$I_{a1} = \frac{1}{2}\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{a1}^2}{4}\times L_{a1}\times\frac{D_{a1}^2}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7800\times\frac{3.14\times0.039^2}{4}\times0.04\times\frac{0.039^2}{8}\right) = 3.54\times10^{-5}\ N.m.s^2$$

$$I_{a2} = \frac{1}{2}\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{a2}^2}{4}\times L_{a2}\times\frac{D_{a1}^2}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7800\times\frac{3.14}{4}\times\frac{0.039^2}{4}\times0.06\times\frac{0.039^2}{8}\right) = 5.31\times10^{-5}\ N.m.s^2$$

$$I_{a3} = \frac{1}{2}\left(\rho\times\frac{\pi\times D_{a2}^2}{4}\times L_{a2}\times\frac{D_{a3}^2}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7800\times\frac{3.14\times0.033^2}{4}\times0.24\times\frac{0.033^2}{8}\right) = 1.09\times10^{-5}\ N.m.s^2$$

$$K_{a1} = \frac{G \times J_{a1}}{L_{a1}}$$

$$J_{a1} = \frac{\pi \times D_{a1}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.039^4}{32} = 2.27 \times 10^{-7}\ m^4$$

$$K_{a1} = \frac{8 \times 10^4 \times 2.27 \times 10^{-7}}{0.04} = 5.54 \times 10^{-1}\ N.m/rd$$

$$K_{a2} = \frac{G \times J_{a2}}{L_{a2}}$$

$$J_{a2} = \frac{\pi \times D_{a2}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.039^4}{32} = 2.27 \times 10^{-7}\ m^4$$

$$K_{a2} = \frac{8 \times 10^4 \times 2.27 \times 10^{-7}}{0.06} = 3.03 \times 10^{-1}\ N.m/rd$$

$$K_{a3} = \frac{G \times J_{a3}}{L_{a3}}$$

$$J_{a3} = \frac{\pi \times D_{a3}^4}{32} = \frac{3.14 \times 0.033^4}{32} = 1.16 \times 10^{-7}\ m^4$$

$$K_{a3} = \frac{8 \times 10^4 \times 1.16 \times 10^{-7}}{0.24} = 3.88 \times 10^{-1}\ N.m/rd$$

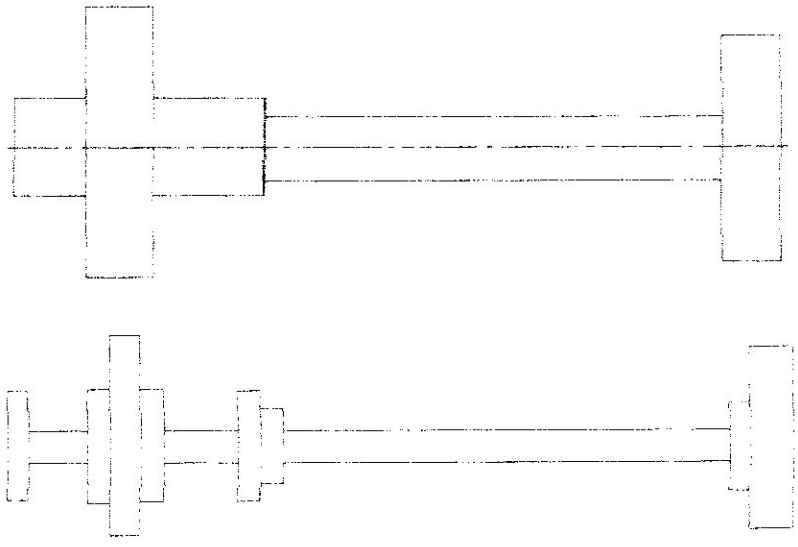


Figure IV.6 Deuxieme etape de modelisation

IV.2.2 Résultats du premier type de modélisation :

Tableau IV.1

Les éléments du rotor	Moment d'inertie équivalent ($N.m.s^2$)	Rigidité torsionnelle ($N.m/rd$)
compresseur	J_c=1.757.10^{-2}	/
turbine	J_t=9.889.10^{-3}	/
Tronçon d'arbre n° 1	$2I_{a1}$=2(3.54.10^{-4})	K_{a1}=4.54.10^{1}
Tronçon d'arbre n° 2	$2I_{a2}$=2(5.31.10^{-4})	K_{a2}=3.03.10^{1}
Tronçon d'arbre n° 3	$2I_{a3}$=2(1.09.10^{-4})	K_{a3}=3.88.10^{1}

IV.2.3 Deuxième type de discrétisation :

On discrétiseront l'arbre on trois éléments comme le première type

Figure VI.7 distribution lineaire d'inertie

Telle que $I_i = \rho J_i L_i J_i$

$$J_i = \frac{\pi d_i^4}{32}$$

$I_1 = \rho J_1 l_1$ l_1=0.04m

$I_2 = \rho J_2 l_2$ l_2=0.06m

$I_3 = I_4 = I_5 = \rho J_3 l_3$ l_3=0.08m

IV.2.4 Les résultas du deuxième discrétisation

Tableau IV.2

Les éléments du rotor	Moment d'inertie équivalent ($N.m.s^2$)	Rigidité torsionnelle ($N.m/rd$)
compresseur	$I_{2c}=1.757.10^{-2}$	/
turbine	$I_t=9.889.10^{-3}$	/
Tronçon d'arbre n° 1	$I_{a1}=7.08.10^{-5}$	$K_{a1}=4.54.10^{-1}$
Tronçon d'arbre n° 2	$I_{a2}=10.62.10^{-5}$	$K_{a2}=3.03.10^{-1}$
Tronçon d'arbre n° 3	$I_{a3}=2.18.10^{-4}$	$K_{a3}=3.88.10^{-1}$

VI.3 Les résultats obtenues par les deux types de modélisation :

a) Les pulsations propres :

Les valeurs propres pour l'arbre discrétiser par 3 éléments

Tableau IV.3

N° de mode	1ère type de discrétisation	2ème type de discrétisation
1	130,875271189	130,875271189
2	53,223666581	46,074817149
3	0	0
4	2,322092162	2,318171670

b) les vecteurs propres :

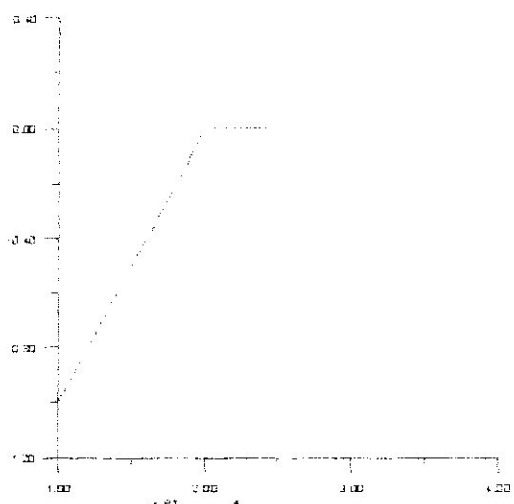
Tableau IV.4

N° de mode	1er type de discrétisation	2ème type de discrétisation
1er mode	0.99999884995646	0.99999779228099
	0.00150501158905	0.00201002321378
	-0.00018715199398	-0.00000181238279
	0.00000004240159	0.00061256553309
2ème mode	0.00965572134787	0.00864079588533
	0.00812043098369	0.00683151006509
	-0.99991873364145	0.00410973177016
	0.00183078091884	-0.99993088622238
3ème mode	-0.50000000000000	0.50000000000000
	-0.50000000000000	0.50000000000000
	-0.50000000000000	0.50000000000000
	-0.50000000000000	0.50000000000000
4ème mode	-0.42114954412084	-0.42120271505994
	0.74970221528100	-0.42102558225177
	-0.28872366881102	-0.28834331814075
	-0.42097303115267	0.74978921224520

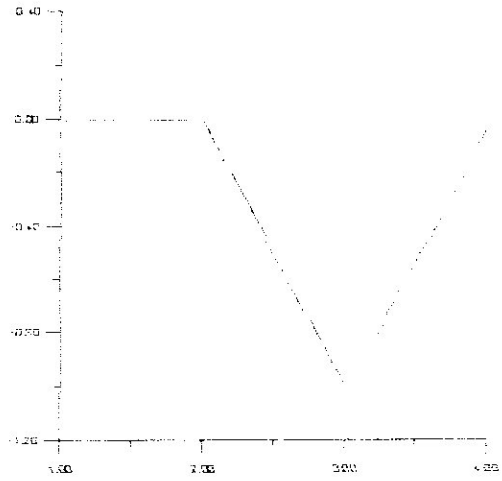
Distribution de l'arbre en 3 éléments :

Première type de discrétisation

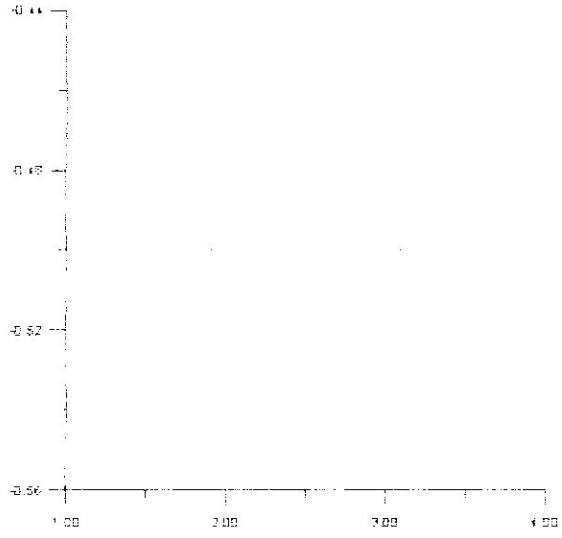
Deuxième type de discrétisation



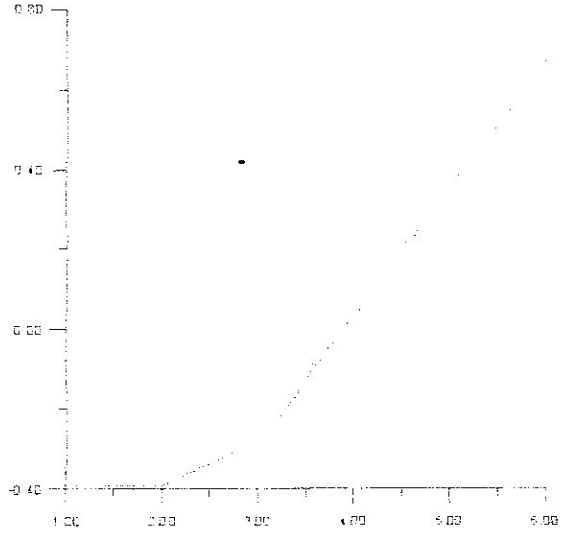
1er mode



2ème mode



3ème mode



4ème mode

Figure IV.8 Graphe représente de tableau IV.4

IV.4 Distribution de l'arbre en cinq éléments :

Calcul de rigidités et des inerties

Elément N°1 : -la longueur l_1=0.04 m

-le diamètre d_1=0.039 m

Elément N°2 : -la longueur l_2=0.06 m

-le diamètre d_2=0.039 m

Les élément 3 ,4 et 5 : - la longueur l=0.08 m

- le diamètre d=0.033 m

$$k_1 = \frac{GJ}{l_1}$$

$$AN: \qquad k = \frac{8.10^4 \cdot \frac{\pi \times (0.039)^4}{32}}{0.04} = 0,4548225006 \ N.m/rad$$

$$k_1 = \frac{GJ}{l_2}$$

$$AN: \qquad k = \frac{8.10^4 \cdot \frac{\pi \times (0.039)^4}{32}}{0.06} = 0,3032150004 \ N.m/rad$$

$$k_3 = k_4 = k_5 = \frac{GJ}{l_3}$$

$$AN: \qquad k_3 = \frac{8.10^4 \cdot \frac{\pi \times (0.039)^4}{32}}{0.08} = 0,2274112503 \ N.m/rad$$

IV.4.1 La modélisation par le premier type de distribution :

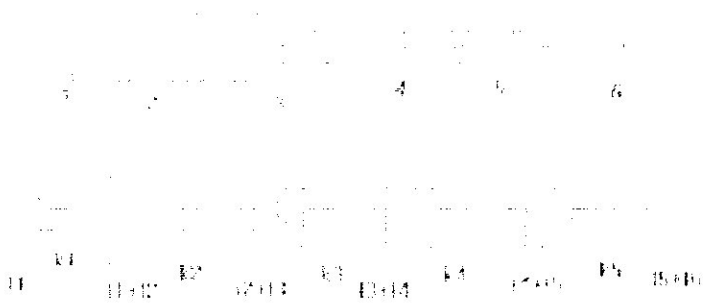


Figure IV.9 Discrétisation de ligne en 5 éléments

IV.4.2 La modélisation par le deuxième type de distribution :

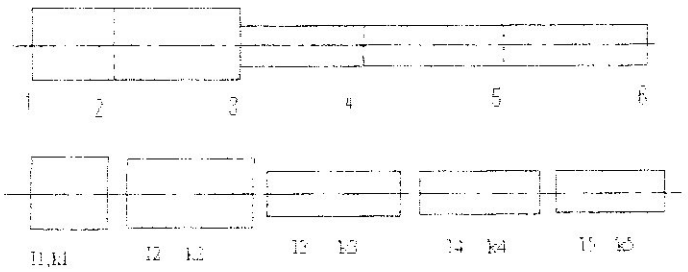
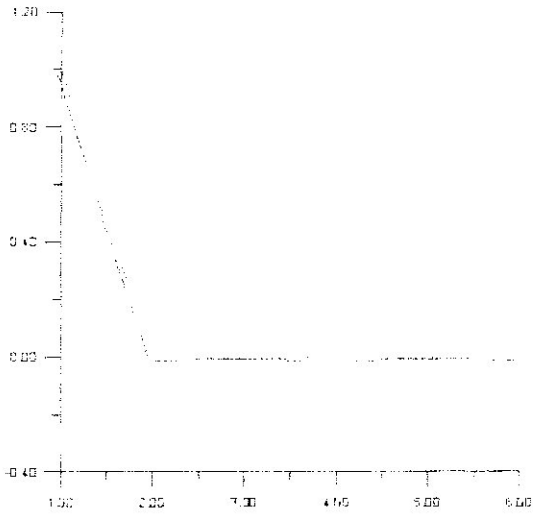


Figure IV.10 Discretisation de ligne d'arbre en 5 elements

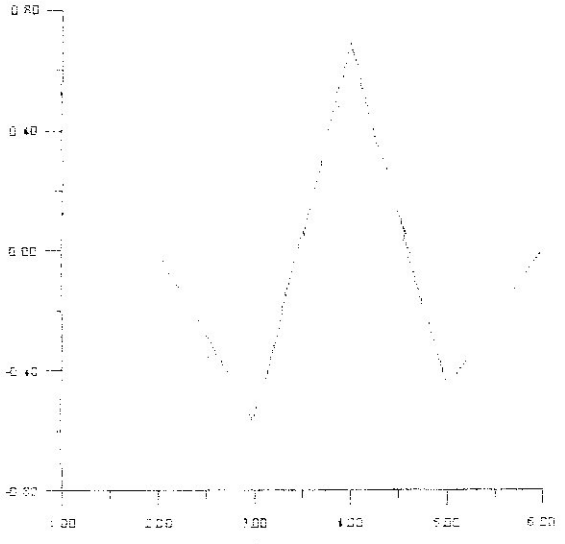
Distribution de l'arbre en 5 éléments :

Première type de discrétisation

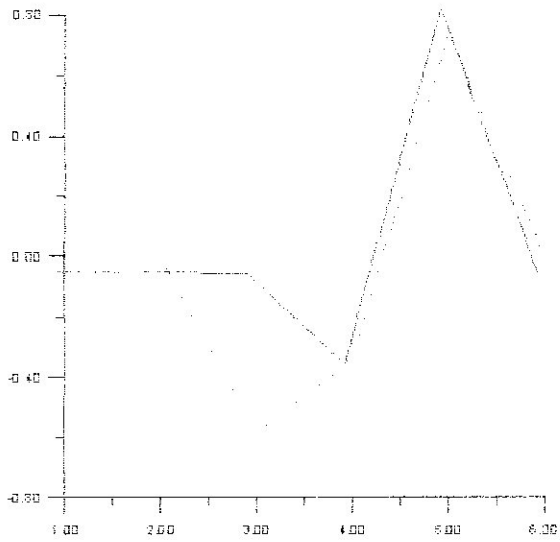
Deuxième type de discrétisation



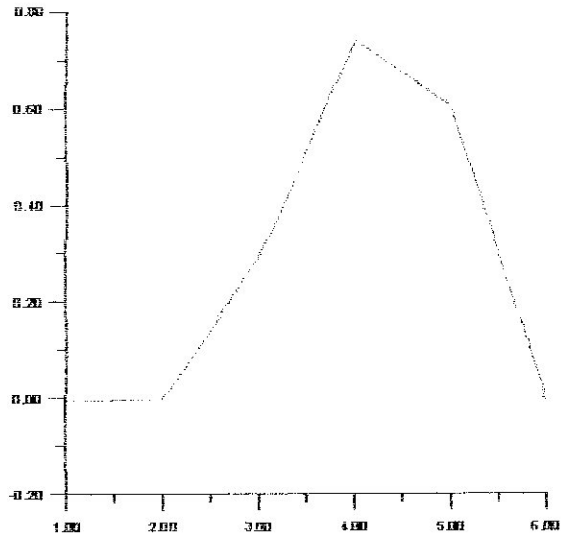
1er mode



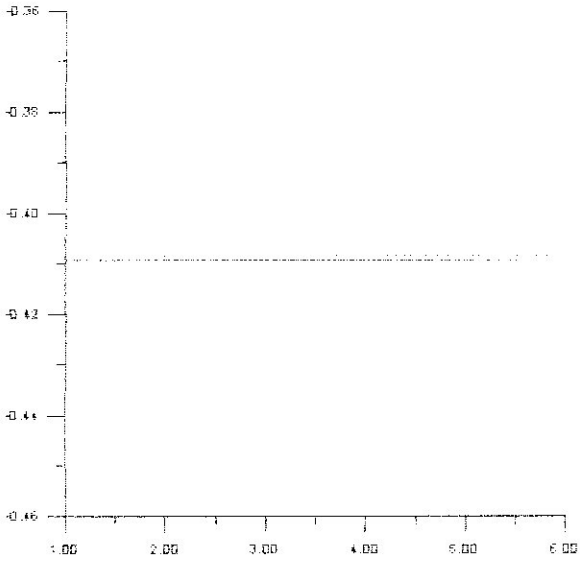
2ème mode



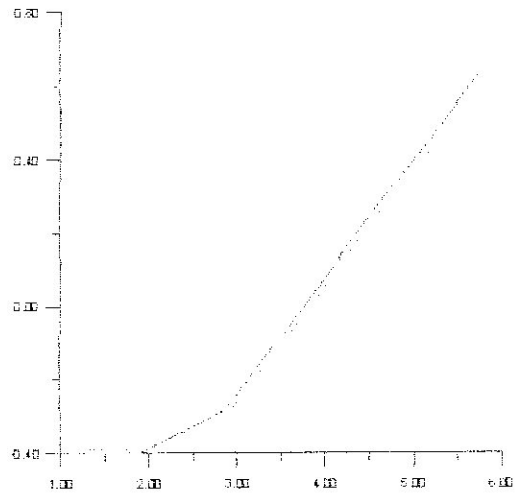
3ème mode



4ème mode



5ème mode



6ème mode

Figure IV.11 Graphe représente les modes propres de vibration de ligne d'arbre Discrète en 5 éléments

VI.5 Interprétation des résultats :

- Tableau (VI.1) représente les résultats de la modélisation par le premier type de discrétisation de ligne d'arbre du modèle simplifier du turboréacteur en trois éléments de la figure (VI.6).
- Tableau (VI.2) représente les résultats de la modélisation par deuxième type de discrétisation de ligne d'arbre du modèle simplifier du turboréacteur en trois éléments de la figure (VI.7).

On remarque que les valeurs numériques des inerties et des rigidités des tronçons d'arbre sont très proche l'une de l'autre pour les deux types de discrétisations, on peut considérer comme un bonne modélisation.

Le calcul des résultats de modélisations en cinq éléments ce fait comme le calcul de modélisation en trois éléments.

- Tableau (VI.3) représente les pulsations propres du deux types de modéfisations, on remarque que les résultats obtenues par les deux méthodes sont très proche, on dit que les méthodes nous donne bonne résultats avec la première méthode est plus simple que l'autre, car la première méthode (ou premier type de discrétisation) nous donne une matrice d'inertie diagonale, par contre l'autre méthode donne une matrice d'inertie tri diagonale.
- Tableau (VI.4) représente les amplitudes de ligne d'arbre discrète en trois éléments.

- les graphes (VI.1) représente les amplitudes de ligne d'arbre avec 4 nœuds on remarque que les résultats trouvées par premier type de modélisation est très proche à les résultats obtenues par deuxième type de modélisation .
- les graphes (VI.2) représente les amplitudes de ligne d'arbre avec 6 nœuds on remarque que les résultats trouvées par premier type de modélisation est très proche à les résultats obtenues par deuxième type de modélisation .
- La section dangereuse est comprise entre les nœuds où la différence entre leurs amplitudes est maximale.

Chapitre V

dynamique de rotor en flexion

application

Dans ce chapitre on calcul les comportements vibratoire de rotor à un disque en flexion par deux méthodes la première méthode est la méthode de *Matrice de Transfère*, la seconde est la méthode des éléments finis.

V.1 Dynamique de rotor en flexion application : [10]

V.1.1 modélisation de rotor à un disque :

V.1.1.1 La méthode de matrice de transfère :

Le système est défini par la figure (V.1)

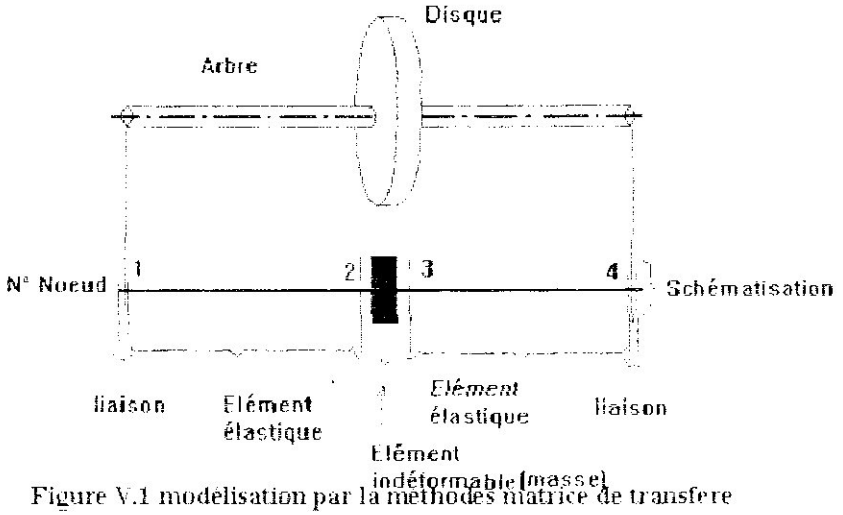


Figure V.1 modélisation par la méthodes matrice de transfere

Le passage de nœud 1 à 2 est donné par la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} M_{y2} \\ T_{y2} \\ \phi_{z2} \\ U_{y2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & j\omega^2 M_e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j\omega^2 T_e & 0 \\ l_1 / EI & -l_1^2 / 2EI & 1 & 0 & 0 \\ l_1^2 / 2EI & \frac{\alpha l_1}{GA} - \frac{l_1^3}{6EI} & l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y1} \\ T_{y1} \\ \phi_{z1} \\ U_{y1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.1)}$$

Le passage de nœud 2 à 3 :

$$\begin{bmatrix} M_{y3} \\ T_{y3} \\ \phi_{z3} \\ U_{z3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & J\left(p^2+\Omega^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m\left(p^2-\Omega^2\right) & -m\Omega^2 e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y2} \\ T_{y2} \\ \phi_{z2} \\ U_{z2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.2)}$$

Le passage de nœud 3 à 4 :

$$\begin{bmatrix} M_{y4} \\ T_{y4} \\ \phi_{y4} \\ U_{y4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 & f^{sM_y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f^{sT_y} & 0 \\ l_2/EI & -l_2^2/2EI & 1 & 0 & 0 \\ l_2^2/2EI & \frac{\alpha l_2}{GA} - \frac{l_2^3}{6EI} & l_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y3} \\ T_{y3} \\ \phi_{y3} \\ U_{y3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (V.3)$$

Le passage global de nœud 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} M_{y4} \\ T_{y4} \\ \phi_{y4} \\ U_{y4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l_2 & f^{sM_y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f^{sT_y} & 0 \\ l_2/EI & -l_2^2/2EI & 1 & 0 & 0 \\ l_2^2/2EI & \frac{\alpha l_2}{GA} - \frac{l_2^3}{6EI} & l_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & J(p^2+\Omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m(p^2-\Omega^2) & -m\Omega^2 e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_1 & f^{sM_y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f^{sT_y} & 0 \\ l_1/EI & l_1^2/2EI & 1 & 0 & 0 \\ l_1^2/2EI & \frac{\alpha l_1}{GA} - \frac{l_1^3}{6EI} & l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y1} \\ T_{y1} \\ \phi_{y1} \\ U_{y1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons posé : Φ

l_1 : longueur de l'élément de nœud 1 à 2

l_2 : longueur de l'élément de nœud 3 à 4

I : inertie diamétrale de l'arbre.

J : inertie diamétrale massique de disque

f^{sM_y}, f^{sT_y} : les coefficients des amortissements internes .

- nous avons négligé l'amortissement externe et interne qui exigerait que l'on considère les mouvements dans deux plans.
- dans les matrices colonnes correspondant aux nœuds 1à 4, nous avons porté les conditions aux limites (moment et déplacement nuls).
- Nous nous proposons de calculer les grandeurs M , T, Φ ,U et en particulier U_{y12} .

V.1.1.2 Développements :

De la relation de passage de nœud 1 à4 on peut dégager un système de quatre équations à quatre inconnues avec second membre.

Soit τ_{14} la matrice de passage du nœud 1 à noeud 4 :

Après les conditions aux limites on à :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ T_4 \\ \phi_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t_{14} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.4)}$$

En développant on obtient :

$$\begin{cases} 0 = t_{12}T_1 + t_{13}\phi_1 + t_{15} \\ T_4 = t_{22}T_1 + t_{23}\phi_1 + t_{25} \\ \phi_4 = t_{32}T_1 + t_{33}\phi_1 + t_{35} \\ 0 = t_{42}T_1 + t_{43}\phi_1 + t_{45} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.5)}$$

a) Le régime libre :

D' après la première et la quatrième équations, les pulsation propres sont les racines de :

$$det\begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.6)}$$

Soit :

$$t_{12}t_{43} - t_{13}t_{42} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(V.7)}$$

b) Le régime forcée :

par l'excentration *e* s'étudie en calculant T_1 et Φ_1 (la pente et la force tranchant appliquée au liaison 1)

$$\begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} t_{15} \\ t_{45} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{15} \\ t_{45} \end{bmatrix}$$

On peut aussi calculer T_4 et Φ_4 par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{15} \\ t_{45} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{25} \\ t_{35} \end{bmatrix}$$

Les grandeurs au nœud 2, en particulier le déplacement U_2 et la rotation Φ_2 peuvent se calculer par la relation :

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ T_2 \\ \phi_2 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & f^{M_F} \\ 1 & 0 \\ \dfrac{-l_1^2}{2EI} & 1 \\ \dfrac{\alpha l_1}{GA} - \dfrac{l_1^3}{6EI} & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{15} \\ t_{45} \end{bmatrix}$$

Le déplacement U_2 est donnée par :

$$U_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha l_1}{GA} - \dfrac{l_1^3}{6EI} & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{42} & t_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{15} \\ t_{45} \end{bmatrix} \qquad \text{(V.8)}$$

Calculons t_{12}, t_{13}, t_{42}, t_{43}, t_{15} et t_{45}. Apartire les trois matrices carrées de (passage g)

V.2 Exemple de calcul

V.2.1 Méthode de matrice de transfère :

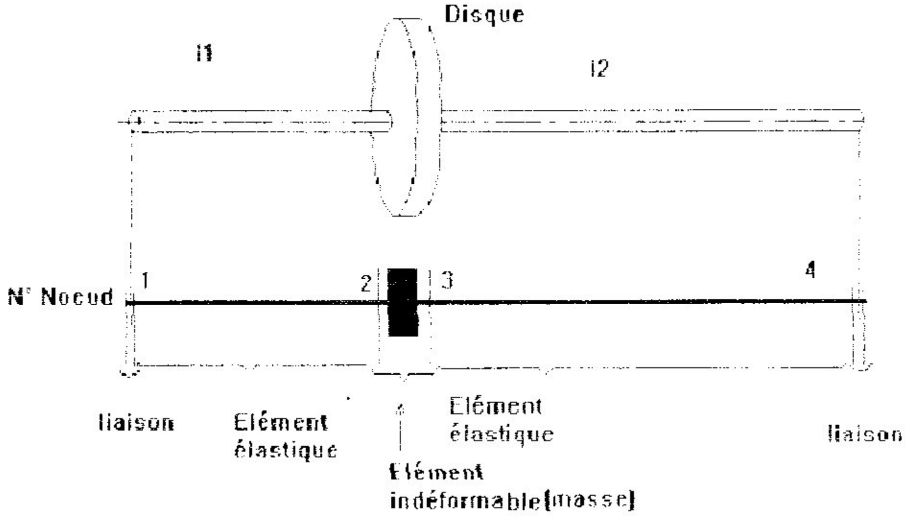


Figure V.2 Rotor axisymetrique

Les donnes :

a) L'arbre :

La longueur de l'arbre est L=0.4m

Rayon de section droite R=0.01m

La masse volumique ρ=7800 kg/m^3

Module de Young $E=2.10^{11}$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie diamétral sont :

$$s = \pi \times R^2 = 3.142 \times 10^{-4} m^2 \qquad \text{(V.9)}$$

$$I = \frac{\pi \times R^4}{4} = 7.854 \times 10^{-9} m^4 \qquad \text{(V.10)}$$

b) Disque :

La masse de disque M=16.47 Kg

Les moments d'inerties massique $I_x = I_z$ =9.247.10^{-2} $Kg.m^2$

Le moment d'inertie longitudinal I_y =1.861.10^{-1} $Kg.m^2$

La longueur l_1=$L/3$ m

Balourd m_b=10^{-4} Kg

Distance d=0.15m

Application numérique :

On négligeant les amortissements internes

V.2.1.1 Les pulsations propres : (Ω=0)

Le passage de nœud 1 à 4 est :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ T_4 \\ \phi_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tau_{14} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.11)}$$

Telle que :

$$\tau_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2666 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6976.10^{-4} & -2.263.10^{-3} & 1 & 0 & 0 \\ 2.263.10^{-3} & -3.039.10^{-3} & 0.2666 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1061p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16.47p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.1333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3.4282.10^{-3} & -5.6588.10^{-3} & 1 & 0 & 0 \\ 5.6588.10^{-3} & -2.515.10^{-3} & 0.1333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On prend la première et la quatrième équation :

$$\begin{cases} 0 = 0.3999\bar{T}_1 + 0.1849p^2\bar{q}_1 + 0 \\ 0 = -3.7726.10_{-6}\bar{T}_1 + (1,046.10^{-6}p^2 + 0.4004473)\bar{q}_1 + t_{43} \end{cases} \quad \ldots \quad (V.12)$$

Donc

t_{12}=0.3999, t_{13}=0.1849p^2, t_{41}=-3.7726.10^{-6}, et t_{43}=1,046.$10^{-6}p^2$+0.4000473

Détermination de la pulsation propre :

Apartire de la relation (5) on à :

$$det\begin{bmatrix} t_{12} & t_{13} \\ t_{41} & t_{43} \end{bmatrix} = 0 = det\begin{bmatrix} 0.3999 & .1849p^2 \\ -3.7726.10^{-6} & 1,046.10^{-6}p^2 + 0.4004473 \end{bmatrix} = 0 \quad \ldots (V.13)$$

Avec $p=i\omega$

Donc

ω_1=291.039 *rad/sec*

V.2.1.2 La réponse au Balourd : ($\Omega \neq 0$)

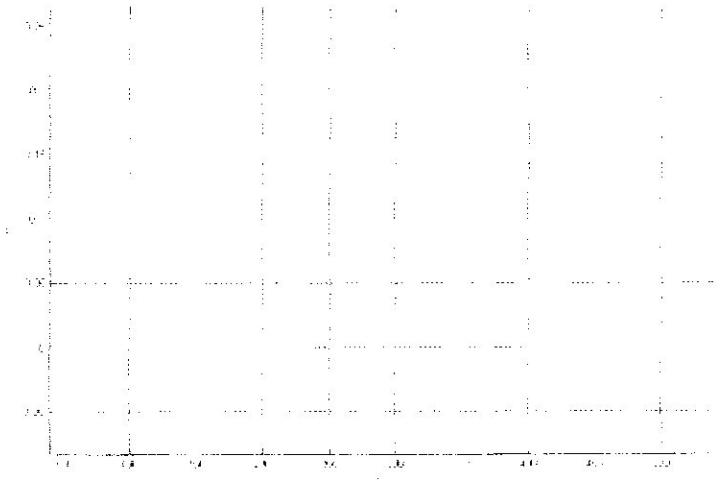


Figure V.3 la repense au balourd par la méthode matrice de transfère

V.2.2 La méthode des éléments finis : [17]

En étude même exemple par la méthode des éléments finis :

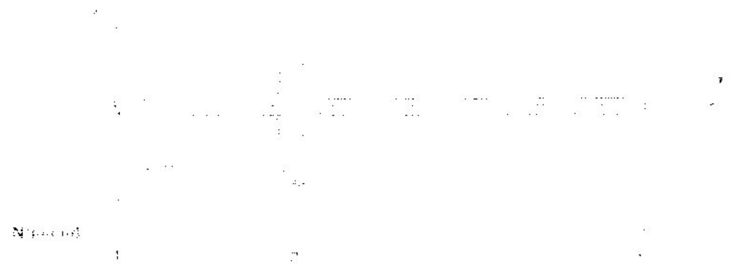
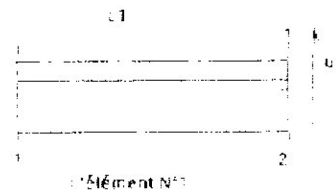


Figure V.4 modélisation par éléments finis de rotor d'un seul disque réalisé avec deux éléments

a) L'arbre :

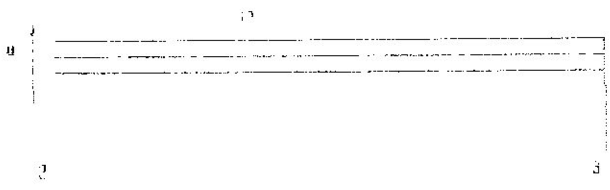
L'énergie de déformation :

Pour élément N° 1 :



$$V_1 = \frac{EI}{2l_1^3}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & -3l_1 \\ -3l_1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(V.14)}$$

Pour élément N°2 :



$$V_2 = \frac{EI}{2l_2^3}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 3l_2 \\ 3l_2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(V.15)}$$

L'énergie cinétique :

Pour l élément N° 1

$$T_1 = \frac{m_1}{2\times 420}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}204 & 36l_1\\ 36l_1 & 8l_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}$$

Pour l'élément N°2

$$T_2 = \frac{m_2}{2\times 420}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}204 & 36l_2\\ 36l_2 & 8l_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}$$

Telle que $m_1 = \int_0^l \rho s dx$

b) Disque :

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{U}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 \qquad \text{(V.16)}$$

L'énergie potentielle :

$V=0$

c) L'assemblage :

La matrice de masse :

$$[M] = \frac{1}{2.420}\begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & 0\\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2\\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2\end{bmatrix} \qquad \text{(V.17)}$$

La matrice de rigidité :

$$[K] = \frac{EJ}{2}\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(V.18)}$$

L'équation de mouvement :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \qquad \text{(V.19)}$$

La réponse au balourd :

Figure V.5 La reponse au balourd d'un rotor à un disque par elements finis

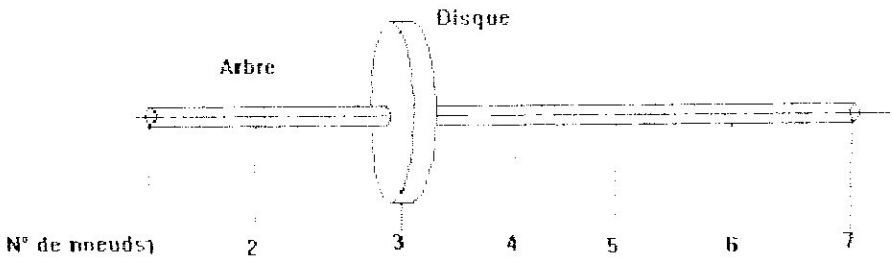


Figure V.6 Modélisation par methode elements finis du rotor d'un seul disque
Realise avec 6 elements.

Tableau (V.7)

La méthode utilisé	La première fréquence propre (H_z)
La méthode de matrice de passage	46.34378
La méthode des éléments finis (2 éléments)	39.8854
La méthode des éléments finis (6 éléments)	46.095

V.3 Etude du turboréacteur par la méthode des éléments finis :

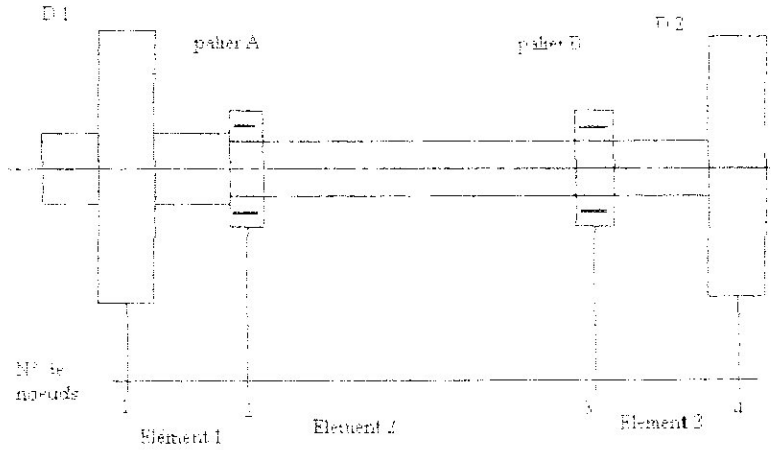


Figure (V.7) Modélisation en M E F de modele simplifie de ligne d'arbre
Du turboreacteur realise avec quatre noeuds

Les fréquences de vibration :

D'après la méthodes des éléments finis on a calculer les matrices masse et rigidités et intégrer les dans l'équation de mouvement sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}$$

Les pulsations propres sont déterminer par le programme en *MATLAB 6.5* et représentée dans le tableau (V.8) suivant :

N° de mode	1	2	3	4
Pulsation propre	36110	54531,33	77251,65	219098,73

V.4. Interprétation des résultats :

- Graphe (V.3) : représente la réponse au balourd par la méthode de *la matrice de transfère*, pour le rotor d'un seul disque de la figure (V.2), on remarque que l'amplitude de vibration atteint son maximum pour un pulsation de vibration proche de la pulsation propre de rotor, c'est l'état de résonance.
- La figure (V.5) représente la réponse au balourd par la méthode des éléments finis d'un rotor d'un seul disque réalisé avec deux éléments de la figure (V.4), on remarque l'amplitude de vibration du nœud située au centre de gravité du disque est maximum lorsque la vitesse de rotation proche de la vitesse critique, c'est défini exactement la phénomène de résonance.

- Tableau (V.7) représente le premier fréquence propre obtenu pour déférentes méthodes de modélisations telle que la méthode de *matrice de transfère* , la méthode des éléments finis réalisé à la fois par trois éléments (figure (V.4)) ,et d'autre fois par six éléments (figure (V.6)) , on remarque que les résultats obtenus par les méthodes sont proches , aussi on remarque que lorsque le nombre des nœuds augmentes , la résultat est plus proche à la résultat obtenue par la méthode de matrice de transfère.
- Tableau (V.9) représente les quatre fréquences propres du turboréacteur réalisé avec trois éléments (figure (V.8)), on remarque qu'il y a deux vitesses critiques dans l'intervalle [35000-56000] implique que le régime permanant de notre moteur doit être supérieur de cet intervalle.

Chapitre VI

L'EQUILIBRAGE ACTIF DES ROTORS

L'équilibrage veut dire améliorer la répartition des masses de rotor de telle manière que les forces centrifuges libres autour de l'axe de rotation imposé par construction, ne dépassant pas les tolérances admises, de façon générale, réunissent sous le terme *équilibrage*, deux opérations partielles :

- Mesure de balourd.
- Compensation de balourd.

Un rotor est parfaitement équilibré, si son axe d'inertie principale se confond avec son axe de rotation, dans les cas l'équilibrage dynamique du rotor est perturbé et le rotor est affecté d'un balourd. Suivant la répartition de balourd le long de rotor, on distingue sur le rotor de genres de balourd qui sont définis dans le premier chapitre.

Rotor en état rigide :

Un rotor est en état rigide si on peut déterminer des vecteurs des balourds correcteurs disposés dans "un" ou "deux" plans d'équilibrage quelconque.

Rotor en état flexible :

Un rotor en état flexible, si on peut déterminer des vecteurs balourds correcteurs disposés dans au moins trois plans d'équilibrages, l'équilibrage est multi plans.

Parmi les méthodes d'équilibrage utilisé on discuté à la méthode d'équilibrage actif.

VI. L'équilibrage actif

Le contrôle actif modifie le comportement d'une structure à l'aide d'actionneurs pilotés à partir de mesures en temps réel. Ces actionneurs apportent une énergie opérative qui se combine à celle du mouvement vibratoire de la structure pour le maîtriser. L'équilibrage actif ne nécessite qu'une énergie de commande pour modifier en temps réel la distribution de masse du rotor en certains plans.

VI.1. Principe

L'équilibrage actif consiste à engendrer et contrôler des forces de balourd sur un arbre en rotation. Le principe de fonctionnement choisi est celui de deux mobiles de même masse appelés satellites, astreints à se déplacer dans un même plan à une distance constante de l'axe du rotor. Ils génèrent ainsi une force de balourd d'amplitude et de phase variable

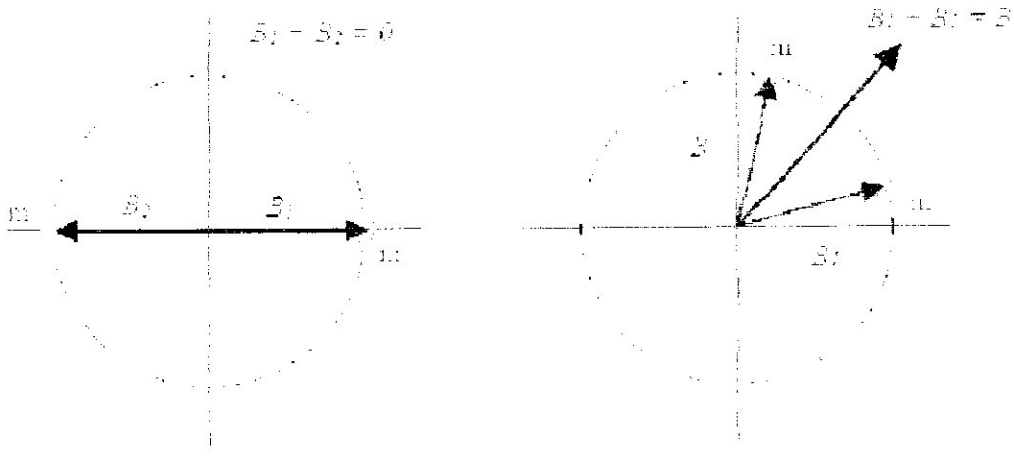


Figure VI.1 Generation d'un balourd a partir de deux masses

Comme l'indique la figure (VI.1), les effets des deux satellites s'annulent lorsqu'ils sont situés en opposition de phase. Dans les autres cas, les balourds générés par chaque satellite s'ajoutent vectoriellement. Leur position relative permet alors de contrôler l'amplitude et la phase du balourd résultant.

Le schéma de principe de l'équilibrage actif est résumé par la figure (VI.2)

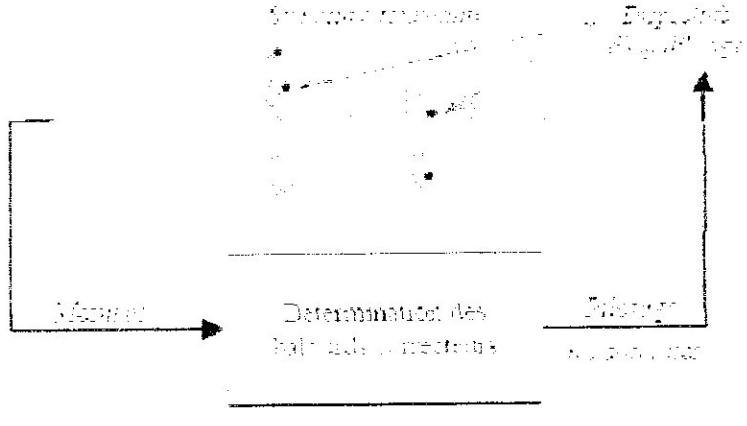


Figure VI.2 Schema de principe de l'equilibrage actif

L'équilibrage qui s'inscrit dans la boucle ci-dessus nécessite de :

- Connaître l'état vibratoire de la machine. Il faut donc mesurer l'amplitude et la phase des vibrations synchrones de la vitesse de rotation.
- Déterminer les balourds de correction correspondant à l'état de la machine à partir d'une méthode d'équilibrage,
- Piloter les satellites de leur position initiale mesurée vers les positions de correction, sans augmenter les niveaux vibratoires.

Le système va donc accomplir un certain nombre de tâches qui font appel aux procédures choisies suivantes :

- L'équilibrage par la méthode des coefficients d'influence.
- Le mode de déplacement des satellites vers les positions de correction de type chemin optimal.
- La mesure de la position des satellites et de la vitesse de rotation.
- Le traitement des signaux vibratoires pour déterminer l'amplitude et la phase des vibrations synchrones.

VI.2. Méthode des coefficients d'influence

La méthode des coefficients d'influence est une méthode de type inverse : la construction d'un modèle matriciel de la structure est réalisée à partir de mesures de sensibilité au balourd expérimentales. Elle s'applique à l'équilibrage de rotors supposés linéaires, rigides ou flexibles, amortis ou non amortis.

Son objectif est d'annuler les vibrations en un certain nombre de points de mesure, en décomposant le balourd à corriger en un certain nombre de plans d'équilibrage. Ces vibrations peuvent être annulées pour une ou plusieurs vitesses de fonctionnement, appelées vitesses d'équilibrage.

VI.2.1. Définition des coefficients d'influence

La méthode s'appuie sur l'hypothèse de linéarité du système qui se traduit par la relation (VI.1).

$$\{V\} = [C]\{B\} \qquad \text{(VI.1)}$$

Avec : {B}, le vecteur des balourds initiaux inconnus de dimension NP,

{V}, le vecteur des vibrations initiales de dimension NM×NV,

[C], la matrice des coefficients d'influence de dimension (NM×NV)× NP,

NP, nombre de plans d'équilibrage,

NM, nombre de points de mesure de vibrations,

NV, nombre de vitesses d'équilibrage.

Afin de tenir compte de la phase et de l'amplitude des variables, des grandeurs complexes sont utilisées.

La matrice [C] est de la forme :

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11}^{(\Omega_1)} & C_{12}^{(\Omega_1)} & \cdots & C_{1NP}^{(\Omega_1)} \\ C_{21}^{(\Omega_1)} & C_{22}^{(\Omega_1)} & \cdots & C_{2NP}^{(\Omega_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ C_{NM1}^{(\Omega_1)} & \cdots & \cdots & \vdots \\ C_{11}^{(\Omega_2)} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ C_{NM1}^{(\Omega_{NV})} & \cdots & \cdots & C_{NMNP}^{(\Omega_{NV})} \end{bmatrix} \quad \text{(VI.2)}$$

Le coefficient $C_{ij}^{(\Omega_k)}$ est défini par le rapport de la vibration résultante au point de mesure i *et du* balourd situé dans le plan d'équilibrage j, *à une vitesse de rotation* Ω_k.

L'amplitude des balourds sera exprimée en kg.m. Les vibrations mesurées peuvent être des déplacements ou des accélérations exprimés respectivement en μm ou en m/s^2.

VI.2.2. Détermination des coefficients d'influence et des balourds de correction

Les coefficients de la colonne j de la matrice [C] sont déterminés en effectuant le rapport des vibrations {Ve} résultantes à l'ajout d'un balourd d'essai Be_j dans les plans d'équilibrage j, et du balourd d'essai.

$$C_{i,j}=\frac{Ve_i - V_i}{Be_j} \quad \text{(VI.3)}$$

Trois cas se présentent alors :

- NP = NM×NV : La matrice [C] est inversible : la solution est donc unique.

  Equilibrer revient alors à résoudre :

  $$\{B_c\} = -\{B\} = [C]^{-1}\{V\} \quad \text{(VI.4)}$$

  Avec B_c, le vecteur des balourds de correction recherché.

- NP > NM×NV : Ce cas ne se rencontre pas dans la pratique car les plans accessibles

  Pour l'équilibrage sont plus rares que les plans accessibles pour la mesure.

- NP < NM×NV : La matrice [C] est rectangulaire et n'est donc pas inversible. Il faut utiliser une méthode spécifique permettant de minimiser les vibrations résiduelles.

VI.2.3. Minimisation par les moindres carrés

La méthode des moindres carrés permet de minimiser les vibrations en des points discrets lorsque la matrice [C] est rectangulaire.

Le vecteur des vibrations résiduelles $\{\varepsilon\}$ est tel que :

$$\{\varepsilon\} = [C]\{B_c\} + \{V\} \quad \text{(VI.5)}$$

La norme quadratique des vibrations résiduelles s'exprime par la relation :

$$y = \sum_{i=1}^{NM \times NV} \varepsilon_i^2 \quad \text{(VI.6)}$$

La relation (VI.6) est développée à partir de (VI.5) :

$$y = \{B_c\}^t [C^*]^t [C]\{B_c\} + 2\{V^*\}^t [C]\{B_c\} + \{V^*\}^t \{V\} \quad \text{(VI.7)}$$

Où le symbole * est celui du conjugué.

La recherche du vecteur $\{B_c\}$ qui minimise y est réalisée à partir de la relation :

$$\frac{\partial J}{\partial B_j} = 0 \qquad \text{(VI.8)}$$

Le balourd correcteur obtenu est :

$$\{B_c\} = -\left[[\alpha^*][\alpha]\right]^{-1}[\alpha^*]\{V\} \qquad \text{(VI.9)}$$

L'application des balourds $\{B_c\}$ dans les plans d'équilibrage diminue les vibrations dans les plans de mesure.

VI.2.4. Prise en compte du faux-rond

Le comportement du système est mesuré par des accéléromètres ou des capteurs de déplacement.

Dans le cas des accéléromètres, la mesure représente effectivement l'accélération de la structure alors que celle qui provient des capteurs de déplacements à courant de Foucault n'est pas forcément l'image du déplacement de la structure. En effet ces capteurs sont sensibles à l'hétérogénéité du matériau ainsi qu'à la déformation initiale du rotor. Le faux-round $\{D\}$ qui en résulte est alors le déplacement mesuré à une vitesse suffisamment basse pour que le rotor puisse être considéré comme rigide. Il est soustrait vectoriellement aux déplacements à minimiser. Le balourd de correction s'exprime alors par la relation (VI.10).

$$\{B_c\} = -\left[[\alpha^*][\alpha]\right]^{-1}[\alpha^*]\{V - D\} \qquad \text{(VI.10)}$$

VI.3. Etude du chemin optimal

Lors des phases transitoires, le rotor équipé du système d'équilibrage actif est soumis à des sollicitations dues à la présence des balourds que l'on veut compenser ainsi qu'à la présence des deux satellites. Quelles que soient leurs positions initiales, les satellites doivent être amenés en position de correction le plus rapidement possible, sans augmenter le niveau vibratoire.

VI.3.1. Détermination des positions de correction

Suite à l'application de la méthode des coefficients d'influence, le système d'équilibrage actif doit générer le balourd B_c d'amplitude B_c et de phase θ dans un plan d'équilibrage. Si B_1 est le balourd généré par le satellite 1, B_2, le balourd généré par le satellite 2, leurs amplitudes respectives B_1 et B_2, et leurs phases respectives , θ_1 et θ_2, la relation liant ces six paramètres s'exprime en notation complexe par :

$$B_c e^{j\theta} = B_1 e^{j\theta_1} + B_2 e^{j\theta_2} \qquad \text{(VI.11)}$$

Les deux satellites ont une masse identique m_{sat} et se situent sur le même rayon, r. Les amplitudes des balourds générés par les satellites sont donc identiques :

$$B_1 = B_2 = m_{sat} \cdot r = b \qquad \text{(VI.12)}$$

La position angulaire de chaque satellite peut alors être exprimée en fonction de l'amplitude et de la phase du balourd B_c à générer (figure VI.3).

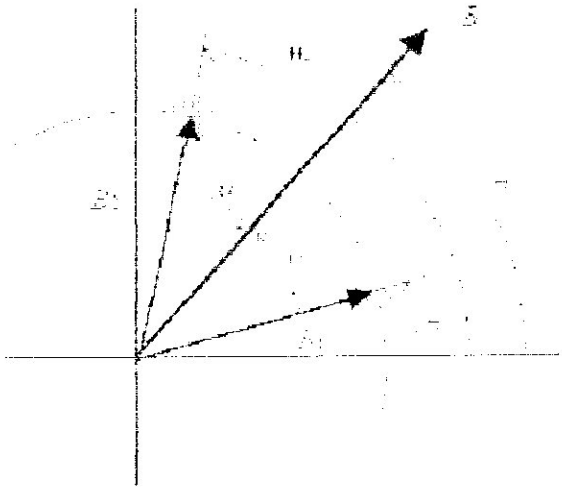


Figure VI.3 : Positions de correction

Soit $0 < \alpha < \pi/2$, un angle non orienté tel que :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta - \alpha \\ \theta_2 &= \theta + \alpha \end{aligned} \qquad \text{(VI.13)}$$

L'équation (VI.11) devient :

$$B_c e^{j\theta} = b_1 e^{j(\theta-\alpha)} + b_2 e^{j(\theta+\alpha)} \qquad \text{(VI.14)}$$

L'expression de l'angle α l'équation (VI.15) permet de positionner les satellites en fonction du balourd à générer.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{B_c}{2b}\right) \qquad \text{(VI.15)}$$

Le balourd B_c qui a été calculé par une méthode d'équilibrage est défini par son amplitude et sa phase. Les relations (VI.13) et (VI.15) donnent alors la position des satellites qui minimisent les vibrations.

VI.3.2. Critère de déplacement des satellites

Il s'agit de déterminer le mode de déplacement des satellites de leurs positions initiales vers les positions de correction avec les contraintes suivantes :

- assurer une mise en place rapide de la correction,

- minimiser les perturbations durant cette phase transitoire.

Plusieurs stratégies de pilotage des satellites sont envisageables. La première consiste à modifier la phase des satellites en les maintenant en opposition de phase, pour ensuite ajuster l'amplitude du balourd résultant. Une deuxième possibilité est de modifier simultanément la phase et l'amplitude du balourd. La deuxième solution est plus adaptée à une correction rapide.

Minimiser les perturbations subies par le rotor équivaut à assurer la diminution des amplitudes vibratoires dès le démarrage des satellites. Le critère choisi est le suivant : les satellites ne doivent jamais se rapprocher de la position angulaire qui correspond à celle du balourd perturbateur. Si la méthode des coefficients d'influence détermine un balourd de correction de phase θ dans le plan d'équilibrage étudié, la position angulaire interdite est $\theta+\pi$.

Ce critère géométrique garantit la diminution du balourd dans le plan d'équilibrage. Compte tenu de l'hypothèse de linéarité du système, il garantit ainsi la diminution des vibrations.

La figure VI.4 illustre deux configurations de déplacements qui sont prises en compte dans l'algorithme du chemin optimal.

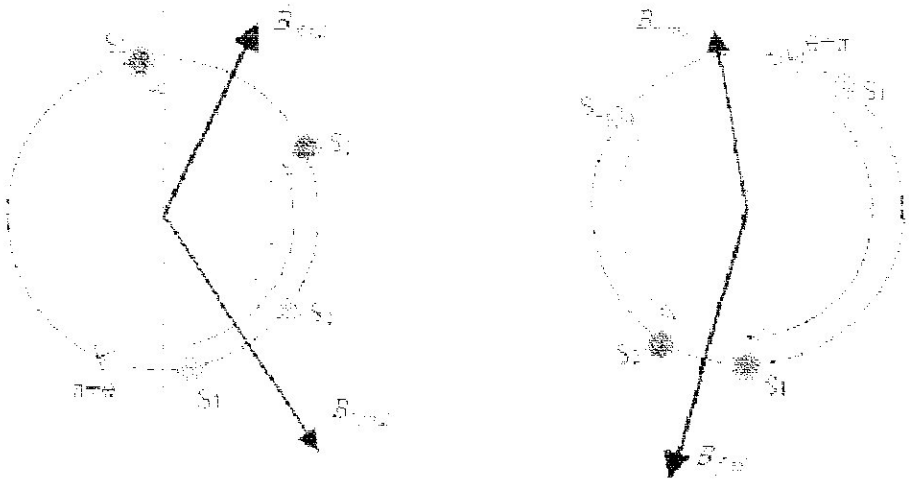


Figure VI.4 : Exemples de configurations de déplacement des satellites

Les satellites peuvent être pilotés avec des lois de vitesses de déplacements variées : avec des vitesses constantes et identiques, avec des temps de déplacements égaux ou encore de manière à faire évoluer linéairement le balourd résultant. Ces lois ayant peu d'influence sur l'efficacité de l'équilibrage c'est pourquoi les vitesses sont choisies identiques pour une raison de simplicité et donc d'efficacité du pilotage.

VI.4. Modules de mesure

La détermination des balourds de correction par la méthode des coefficients d'influence nécessite la connaissance précise de la vitesse de rotation et de l'état vibratoire de la structure. Pour piloter les satellites vers les positions de correction, leur position angulaire doit être connue. Ces informations sont obtenues à partir de mesures en temps réel réalisées sur le rotor. Les modules développés à cet effet sont présentés dans ce qui suit

VI.4.1. Mesure de la position des satellites et de la vitesse de rotation

L'objectif est de déterminer la position angulaire des satellites par rapport à un repère de référence. La technique utilisée consiste à détecter le passage de sur-épaisseurs placées sur chaque satellite, à l'aide d'un capteur de déplacement sans contact comme l'indique la figure VI.5.

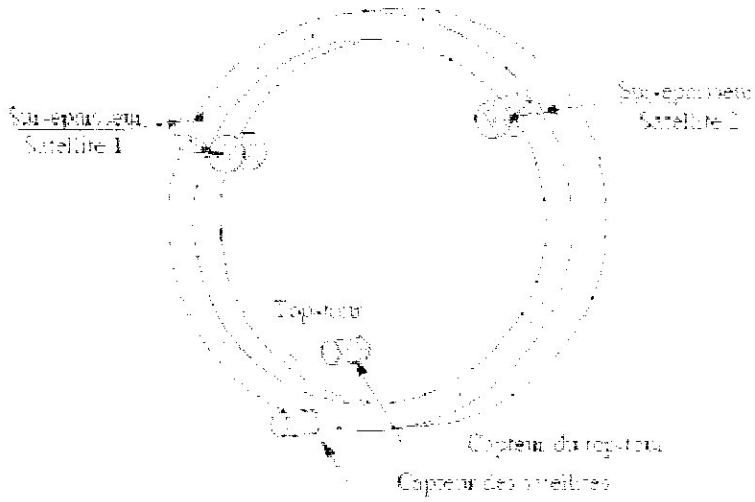


Figure VI.5 : Dispositif de mesure de la position des satellites et du top tour

Le capteur de déplacement est placé en regard de la piste où circulent les satellites. Chaque satellite est muni d'une sur-épaisseur différente. Le capteur génère alors un pic de tension d'amplitude correspondante au passage des satellites. La référence de phase ou top-tour est repérée par une sur-épaisseur ou une encoche, elle peut se situer sur le rotor lui-même ou sur la piste et nécessite un second capteur.

Le principe de détermination des phases des satellites et de la vitesse de rotation à partir des signaux délivrés par les capteurs est illustré sur la figure VI.6. τ_1 est le temps écoulé entre deux passages de la référence de phase, il s'agit donc de la période de rotation du système. τ_1 et τ_2 sont les temps écoulés entre le passage de la référence de phase et des sur-épaisseurs respectives des satellites 1 et 2.

La mesure des temps τ_r, τ_1 et τ_2 permet la détermination des positions angulaires θ_1, θ_2 et de la vitesse de rotation Ω à partir des relations suivantes :

$$\Omega = \frac{60}{\tau_r}(\text{tr/min}) \qquad \text{(VI.16)}$$

$$\theta_i = 360 \cdot \left(1 - \frac{\tau_{i1}}{\tau_r}\right) \quad \text{(deg)} \qquad \text{(VI.17)}$$

$$\theta_j = 360 \cdot \left(1 - \frac{\tau_{j1}}{\tau_r}\right) \quad \text{(deg)} \qquad \text{(VI.18)}$$

Le sens de rotation a été choisi comme sens positif pour toute l'étude.

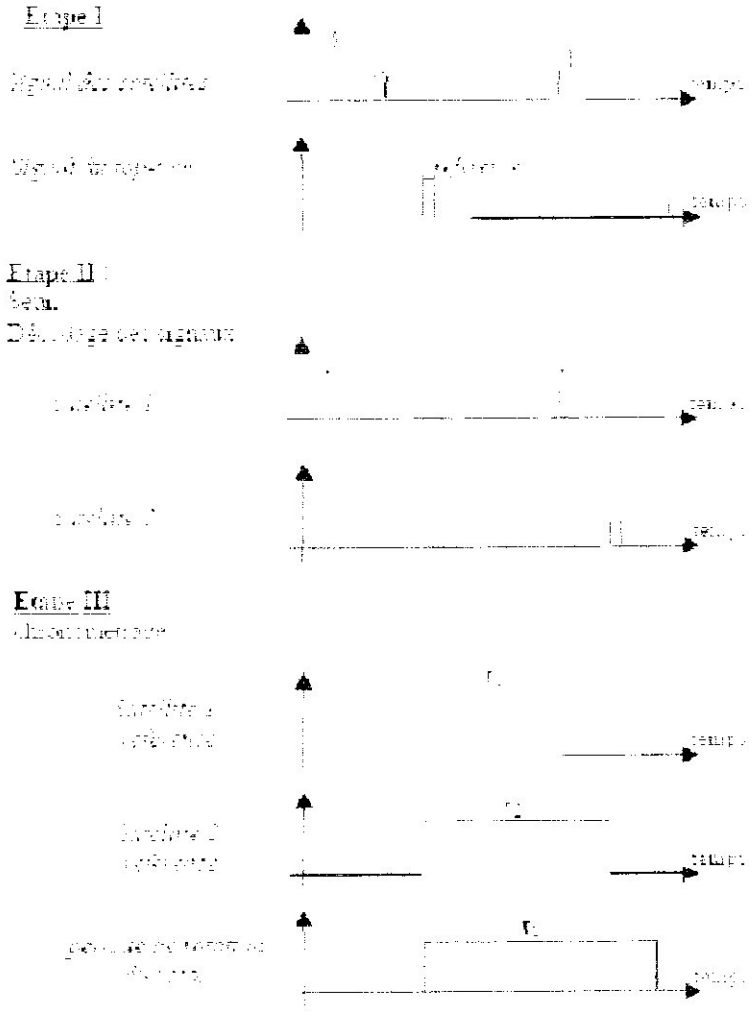


Figure VI.6 : Principe de détermination de la phase des satellites et de la période de rotation

VI.4.2 La vitesse de rotation et les phases des satellites :

La vitesse de rotation et les phases des satellites ainsi déterminés sont des grandeurs instantanées qui sont sensibles aux incertitudes et aux bruits de mesure. Pour améliorer la précision de mesure, une moyenne arithmétique est réalisée sur la mesure de la vitesse de rotation. Pour la phase des satellites, des moyennes linéaires sur nb_{moy} tours sont effectuées. L'expression de la position moyenne du satellite i, θ_{moy_i} est déterminé avec la relation (VI.19).

$$\begin{cases} \sin(\theta_i)_{moy} = \dfrac{\sin(\theta_i) + (nb_{moy} - 1) \cdot \sin(\theta_i)_{moy}}{nb_{moy}} \\ \cos(\theta_i)_{moy} = \dfrac{\cos(\theta_i) + (nb_{moy} - 1) \cdot \cos(\theta_i)_{moy}}{nb_{moy}} \end{cases} \quad \text{(VI.19)}$$

Cette moyenne qui privilégie les dernières mesures est réalisée sur le cosinus et le sinus de la position instantanée afin d'éliminer la discontinuité au passage de 0 à 360 degrés.

• ***Moyenne***

Comme pour la mesure de phases des satellites, des moyennes sont utilisées dans le traitement des signaux vibratoires afin d'améliorer le rapport signal sur bruit des mesures et donc la précision de mesure .Une moyenne arithmétique sur quatre mesures est réalisée.

VI.5. Stratégie d'équilibrage actif

Il convient désormais d'élaborer une stratégie d'équilibrage qui permette la mise en oeuvre des principes. L'équilibrage actif doit améliorer le comportement des machines tournantes sans modifier leur mode de fonctionnement. C''est pourquoi les montées en vitesse et les ralentissements ne peuvent pas être réalisés par paliers de vitesse mais suivant une loi de montée en vitesse ou ralentissement réelle. Ce chapitre présente les méthodes et stratégies qui ont été choisies afin de réaliser un équilibrage automatique efficace en respectant cette condition.

VI.5.1. Stratégie de correction

L'équilibrage actif a jusqu'à présent été défini comme une correction automatique des balourds pour améliorer le comportement vibratoire des machines tournantes. Son action doit cependant être précisée : s'agit-il de concevoir un système en boucle fermée susceptible d'équilibrer quelle que soit la vitesse de rotation, ou un système en boucle ouverte destiné à équilibrer pour le passage de vitesses prédéfinies comme les vitesses critiques ?

Equilibrer quelque soit la vitesse de rotation équivaut à déclencher un équilibrage dès le dépassement d'un niveau vibratoire choisi. Cela impose soit la connaissance en continu des matrices des coefficients d'influence sur toute la plage de vitesse, soit la possibilité de les déterminer par interpolation. Une interpolation nécessite cependant un grand nombre de vitesses de caractérisation des matrices de sensibilité, principalement autour des vitesses critiques où l'amplitude et la phase des vibrations varient fortement. Cette technique est donc difficile à

mettre en oeuvre dans le système temps réel utilisé. Il semble par conséquent préférable d'envisager la deuxième stratégie qui limite les vitesses d'équilibrage.

Equilibrer au passage de vitesses prédéfinies implique un choix judicieux de ces vitesses. Une machine est caractérisée par sa vitesse nominale de fonctionnement mais aussi par ses vitesses critiques lors des phases transitoires. Une vitesse critique est identifiée par un maximum d'amplitude. Les déplacements du rotor sont caractéristiques d'un mode prépondérant et la sensibilité au balourd est particulièrement importante. Le déclenchement de la correction n'est pas commandé par le dépassement d'un niveau vibratoire, mais par l'approche d'une vitesse critique afin de limiter ces maxima d'amplitude. La figure VI.8 présente les vitesses d'équilibrage à situer en fonction de l'amplitude des vibrations mesurées sur le rotor pour le passage d'une vitesse critique.

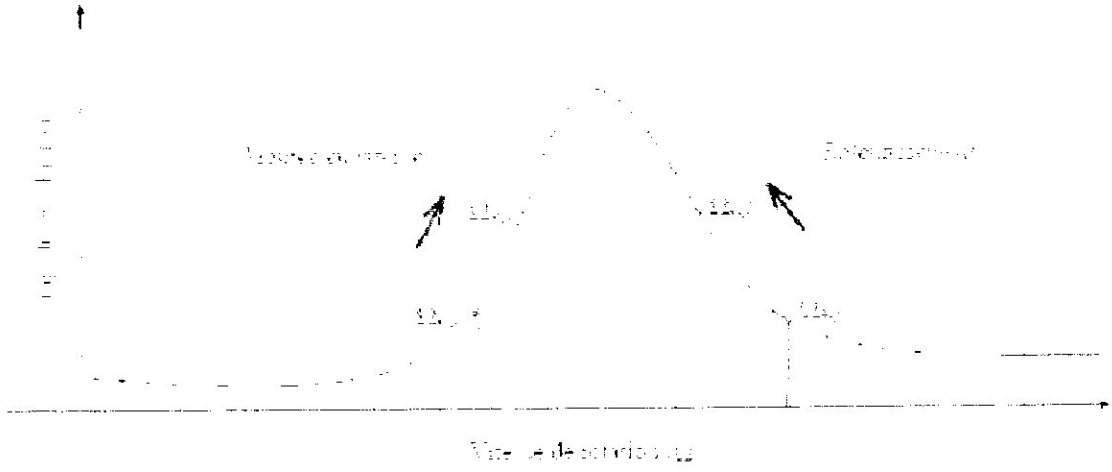


Figure VI.7 : Positionnement des vitesses d'equilibrage

Dans le cas du ralentissement, une procédure d'équilibrage est lancée au passage de la vitesse Ω_{eq4} puis un affinage de la correction est effectué au passage de la vitesse Ω_{eq2}. Les temps de calcul des corrections et le temps de positionnement des satellites sont des paramètres primordiaux pour le choix de Ω_{eq3} par rapport à Ω_{eq4} et pour le choix de Ω_{eq2} par rapport à Ω_{eq1} dans le cas de la montée en vitesse. En plus des vitesses d'équilibrage situées en amont de chaque vitesse critique, une autre est placée à la vitesse nominale de fonctionnement. Cette approche d'équilibrage actif présente une mise en oeuvre facile. Le nombre de vitesses d'équilibrage est généralement limité à quatre autour de chaque vitesse critique situées dans la gamme de fonctionnement, et une à la vitesse nominale. L'efficacité de la correction dépend de la détermination précise des vitesses de rotation et du positionnement optimal des vitesses d'équilibrage qui nécessite une bonne connaissance de la machine. Cette approche présente tout

de même un inconvénient qui est dû à son action limitée à des vitesses prédéterminées. Mais il constitue en même temps la garantie d'une bonne efficacité de l'équilibrage.

VI.5. 2.Organisation des phases d'équilibrage :

La méthode des coefficients d'influence qui a été choisie nécessite une phase de caractérisation de la machine qui précède celle de correction. Afin de respecter les conditions réelles de montée en vitesse et de ralentissement, l'équilibrage actif est réalisé en deux étapes :

- Une phase de caractérisation, dite d'apprentissage, où la matrice des coefficients d'influence est déterminée pour un certain nombre de vitesses de rotation. Cette phase nécessite des paliers de vitesse. Toutes les actions peuvent donc être réalisées séquentiellement. Pour chaque vitesse d'équilibrage, les satellites sont initialement placés en opposition de phase.
- une phase d'exploitation où la machine est en fonctionnement normal et où l'équilibrage actif est mis en oeuvre. Cette phase utilise les matrices déterminées précédemment. Le temps de mise en place des balourds de correction doit être le plus court possible.

Cette organisation permet de réaliser l'équilibrage actif lors du fonctionnement normal de la machine. Si ses caractéristiques évoluent, les coefficients d'influence devront être réactualisés lors d'une nouvelle phase d'apprentissage. Les organigrammes des figures VI.9 et VI.10 présentent le déroulement des opérations pour les deux phases de fonctionnement du système actif.

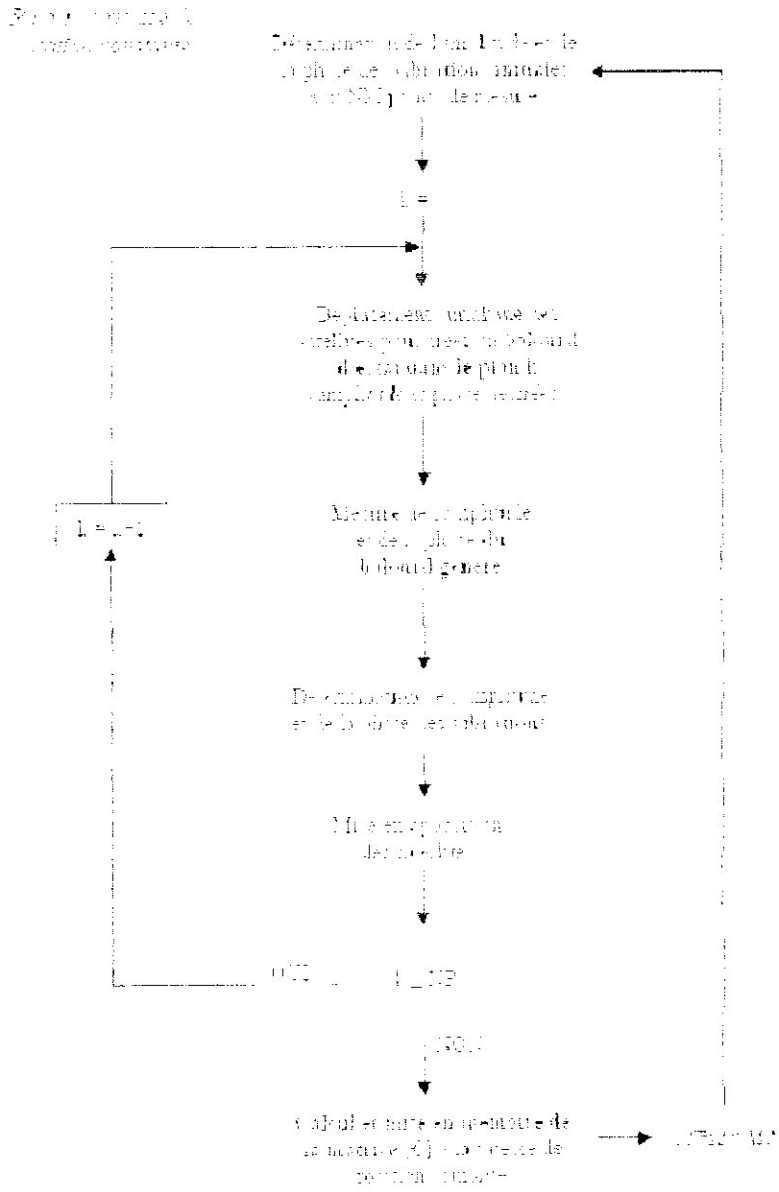


Figure VI.8: Organisation de la phase d'apprentissage pour NP plans d'équilibrage

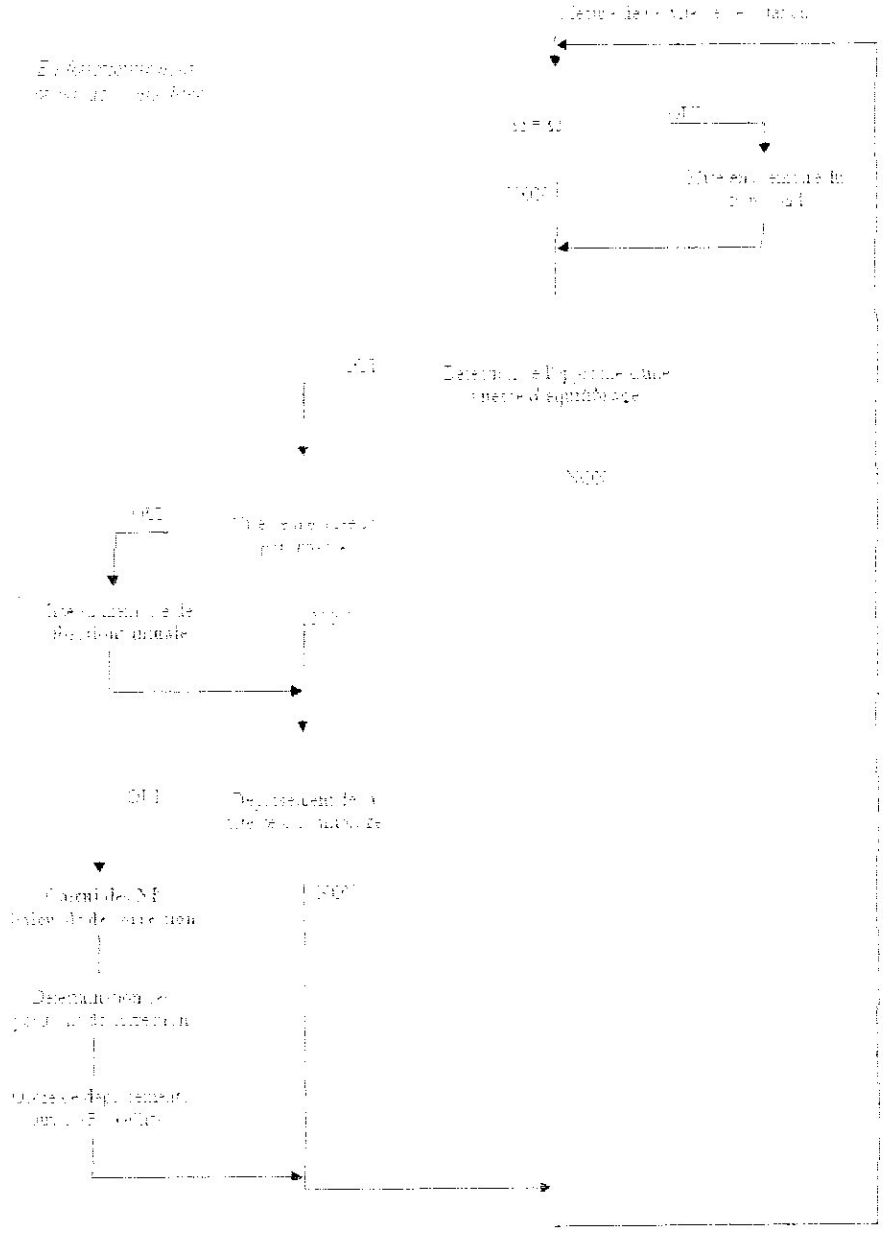


Figure VI.9 : Organisation de la phase d'exploitation pour NP plans d'equilibrage

VI.5.3. Organisation du système actif

Le schéma synoptique de l'équilibrage actif (figure VI.2) peut être complété par les différents modules qui ont été présentés dans les parties (VI.1) et (VI.5) La figure VI.10 présente les tâches effectuées par le système d'équilibrage actif. Ces différentes tâches sont agencées afin de répondre à la stratégie élaborée.

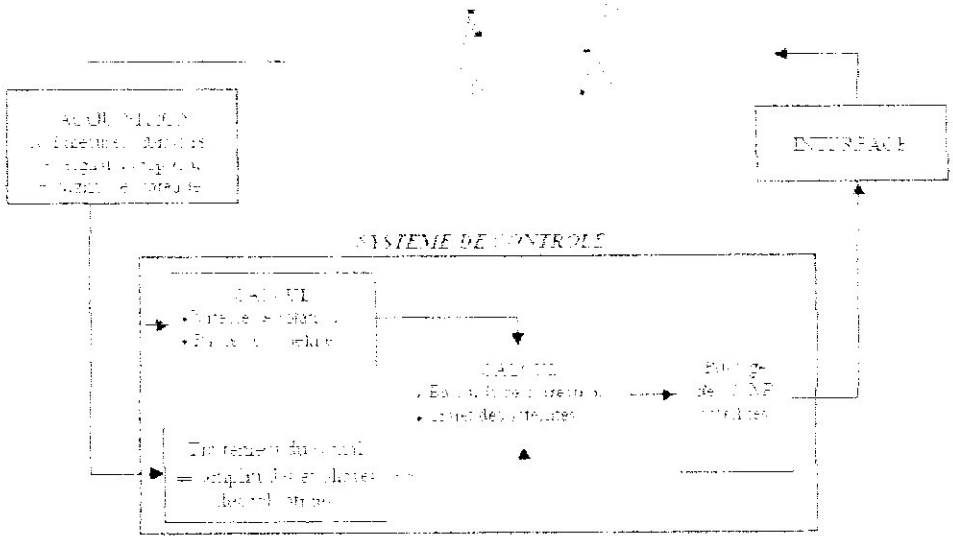


Figure VI.10 : Schéma synoptique du système d'equilibrage actif

Une machine donnée comporte NP dispositifs d'équilibrage et les vibrations sont mesurées sur NM voies de mesure. Les valeurs de NP et NM dépendent du type de machine à équilibrer.

Les entrées du système de contrôle sont :

- NM mesures des vibrations.
- le signal du top-tour (référence de phase),
- le signal du capteur des satellites.

Les mesures de vibrations peuvent être réalisées par des capteurs de déplacement ou d'accélération. Ces capteurs sont généralement placés au niveau des paliers où les mesures sont plus accessibles.

Les sorties du système de contrôle sont : 2 NP commandes aux satellites.

Les NP dispositifs d'équilibrage doivent être installés dans des plans accessibles de la machine.

Leur nombre dépend du nombre de plans accessibles mais aussi du nombre de rotors de la ligne d'arbre. Si une ligne d'arbre comporte deux rotors, un équilibrage efficace nécessite au moins deux dispositifs.

VI.6. Conclusion

Les principes et stratégies présentés permettent de mettre en oeuvre l'équilibrage actif. Une technologie adaptée au type de machine étudié doit être conçue. Une technologie particulière, adapté aux machines de grandes dimensions est présentée dans ce travail. La faisabilité et l'efficacité du concept proposé sont ensuite étudiées sous formes expérimentale et numérique.

CONCLUSION

Les comportements vibratoires des machines sont extrêmement variés. Ils sont typiques de la machine envisagée. Chaque machine est le siège d'excitations dynamiques extrêmement diverses et spécifiques de son fonctionnement. Les organes fixes et mobiles sont des structures vibrantes. L'ensemble vit et répond en fonction de ses caractéristiques modales et de ses capacités d'amortissement.

Chaque régime vibratoire génère des contraintes dynamiques qui sollicitent les pièces en fatigue. Il est impossible qu'une machine, dont la conception devient de plus en plus poussée sous l'aspect énergétique, ne vibre pas, mais tout le savoir-faire du constructeur s'attache à ce que les capacités de résistance en fatigue puissent admettre ces contraintes alternées.

La présente étude nous a permis d' avoir une bonne connaissance de comportements vibratoire de rotor en torsion et en flexion, et d'exercer l'outil numériques avec la quel nous avons élaboré des programmes du calcul basé sur les modélisations en torsion qui donne les pulsations et les modes propres du vibration pour connaitre les vitesses dangereuses, la méthode des éléments finis et la méthode matrice de transfère qui sont utilisées en flexion , afin nous fournir les pulsations et les vecteurs propres en flexion de ligne d'arbre du turboréacteur par la méthode des éléments finis, a repense au balourd en flexion pour les mono rotor et les multi rotors .

Il y à plusieurs méthode d'équilibrage utilisé pour amélioré la répartition des masses d'un rotor et diminues les vibrations, nous discutant sur l'équilibrage actif des machines tournantes comme un exemple d'équilibrage.

BIBLIOGRAPHIE

1- Etude de performance hors adaptation du moteur prototype de laboratoire.

2-Modélidation des structures par les éléments finis.

3- *Jacque Morel* . Vibration des machines et diagnostiques de leur état mécanique.
Edition *Eyrolles* 1992.

4- HENRI. CAMAGNA Cours balourd.
Equilibrage des rotors des machines tournantes 2003.

5- *Henri BLANC*. Dynamique des rotors en torsion.
(*Technique de l'ingénieur*) 2000 BM179.

6- *Michel LALANNE*. Dynamique des rotors en flexion.
(*Technique de l'ingénieur*) 2005 BM 5110

7- Analyse dynamique de la torsion et de la fatigue.
Thèse magistère Mme Sammar.
Promo 1995 institue mécanique Blida.

8- La prédiction du comportement vibratoire des lignes d'arbre en torsion et en flexion.
Promo : 2003
Promoteur : Bader-eddine
Etudiant : Baila Faouzi

9- Logiciel de MATLAB 6.5.

10- *B.Drouin, J.M. Senicourt, F. lavaste et G. ezans.* De la mécanique classique à la méthode des éléments finis 1993. volume 1 et 2.

11- Vibrations des machines tournantes (les quatre tomes).

12-Calcul des structures par la méthode des éléments finis.

13-Modélisation des systèmes mécaniques.

14- Vibration des systèmes linéaires.

15- LALANNE (M.) ET FERRARIS (G.). – Rotordynamics Prediction in Engineering. J. Wiley (G.B.), 198 p. (1990).

16- *O. ramani S. Kebdani.* Introduction de la méthode des éléments finis pour les ingénieurs 1994.

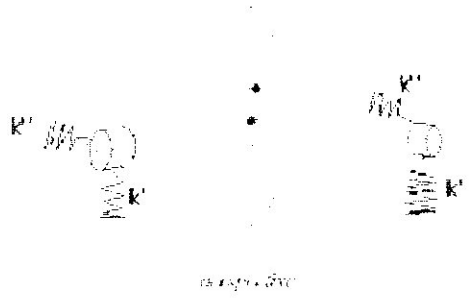
17- Mécanique vibratoire à la méthode des éléments finis.

18- Vibration de système mécanique.

LES ANNEXES

ANNEXES N° 1

Analyse dynamique par la méthode énergétique : [10]



- ***Arbre*** élément déformable de masse négligeable de raideur $K_a=(48EI)/L^3$ *(calcul par RDM)*

E : Module de Young

I : Moment d'inertie quadratique

L : Longueur de l'arbre

- ***Disque*** élément indéformable de masse m
- ***Balourd***
- ***Paliers***

L'équation de mouvement

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y-y_0-e\cos\Omega t \\ z-z_0-e\sin\Omega t \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

au droite de paliers à l'équilibre conduit à :

$$\begin{cases} k(y-y_0-e\cos\Omega t)-2k'y_0=0 \\ k(z-z_0-e\sin\Omega t)-2k'z_0=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y_0=f(y) \\ z_0=g(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m\ddot{y}+k_1y=k_1e\cos\Omega t \\ m\ddot{z}+k_2z=k_2e\sin\Omega t \end{cases}$$

Avec $k_1 = \frac{2k'^2 k}{2k'+k}$; $k_2 = \frac{2k'k}{2k'+k}$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y/e}{\partial t^2} + \omega_1^2 y/e = \omega_1^2 \, \mathrm{R} \, \exp(j\Omega t) \\ \frac{\partial^2 z/e}{\partial t^2} + \omega_2^2 z/e = \omega_2^2 \, \mathrm{R} \, \exp(j\Omega t) \end{cases}$$

Les pulsations propres sont :

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ suivant la direction y

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ suivant la direction z

La réponse au balourd de système est :

$$\begin{cases} \frac{y}{e} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}} \cos \Omega t \\ \frac{z}{e} = -\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}} \sin \Omega t \end{cases}$$

ANNEXE N° 2

Détermination de pulsation propre d'une poutre chargée sur deux appuis par la méthode de matrice de transfère

vibration de poutre en flexion

Le passage de nœud 1 à 4 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ M_4 \\ \Phi_4 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & 1 & 0 & 0 \\ A & B & 1 & 0 \\ C & A & l_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m\omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 \\ A & B & 1 & 0 \\ C & A & L_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ \Phi_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

Avec $A = l^2/2EI$; $B = l/EI$; $C = l^3/6EI$

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ M_4 \\ \Phi_4 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \tau_{14} \begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ \Phi_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

τ_{14} *est la matrice de transfère*

Le déterminant de 2ème ordre nous donne $\omega^2 = \dfrac{6EI}{ml^3}$

$$1 = \frac{1}{m\omega^2 l^3/6EI} \quad ; \quad \eta = \frac{1}{m\omega^2 l^3/6EI}$$

$\eta - 1 = 0$

Avec $I_1 \neq I_2$; $EI_1 \neq EI_2$ $\eta = \dfrac{1}{m\omega^2 \dfrac{l^3}{6EI_1}}$

Dans ce cas

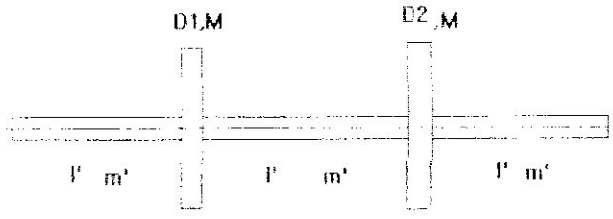
$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{6EI}{ml^3} & \text{Mode de translation} \\ \omega_2^2 = \dfrac{6EI}{Jl} F & \text{Mode de rotation} \end{cases}$$

On note que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho}{l}$$

ANNEXE N° 3

Exemple de calcul par deux méthodes *(Rayleigh et E.F)* [9]



rotor à deux disques

Premier pulsation par la méthode de *Rayleigh*

Arbre

L'équation de déformation statistique pour un arbre de longueur $L = 3l$ et de masse $m' = 3m$ s'écrit :

$$v(x) = \frac{Fl'^3}{48EI}\left(\frac{3x}{l'} - \frac{4x^3}{L^3}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Fl'^2}{48EI}\left(\frac{3}{l'} - \frac{12x^2}{l'^3}\right)$$

On a aussi : $v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Fl'^3}{48EI} = q$

q étant choisi comme paramètre cinématique

Donc $v(x,t) = q\left(\frac{3x}{l'} - \frac{4x^3}{l'^3}\right)$

pour la poutre, alors :

$$v = 24\frac{E}{l'^3}q^2 \quad ; \qquad T = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{35}m'\dot{q}^2$$

Disque les deux disques sont écrire aussi : $v(x) = \dot{v}(x)$

$$v\left(\frac{l'}{3}\right) = \frac{23}{27}q \quad ; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{l'}{3}\right) = \frac{5}{9}\cdot\frac{q}{l'}$$

D'où : $T = M\left(\frac{23}{27}\right)^2 \dot{q}^2 + J\dot{q}^2 \frac{15}{9l^2}$

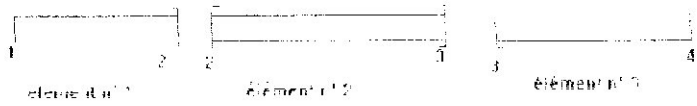
Au total $T = M\left(\frac{23}{27}\right)^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{51}{35} m\dot{q}^2 + J\frac{15}{81L^2}\dot{q}^2 = m_{eq}\dot{q}^2$

Et $\quad v = \frac{9}{8}\cdot\frac{EI}{l^3} q^2 = K_{eq} q^2$

donc AN $\omega_{n1} = 274.3$ rad/s $\quad f = 43.75$ Hz

Calcul par éléments finis :

L'énergie potentielle



$$\sum M_{ext} = J\ddot{\theta}$$

Flexion

$$v_1 = \frac{1}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} v \\ \beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 3l \\ 3l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \beta \end{bmatrix}$$

Pour les disques $I=0$

$$v = \frac{1}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 15 & 3l & -12 & 6l \\ 3l & 7l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 15 & -3l \\ 6l & 2l^2 & -3l & 7l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \alpha \\ v \\ \beta \end{bmatrix}$$

1.L'énergie cinétique

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m}{420}\begin{bmatrix}\dot{u} & \dot{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}204 & -36l\\ -36l & 8l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{m}{420}\begin{bmatrix}\dot{u} & \dot{\alpha} & \dot{v} & \dot{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{v}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{m}{420}\begin{bmatrix}\dot{v} & \dot{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}204 & 36l\\ 36l & 8l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{v}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}$$

Au total

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{v}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{360m}{420}+M & \frac{-14ml}{420} & \frac{54m}{420} & \frac{-13ml}{420}\\ \frac{-14ml}{420} & \frac{12ml^2}{420}+J & \frac{13ml}{420} & \frac{-3ml^2}{420}\\ \frac{54m}{420} & \frac{13ml}{420} & \frac{360m}{420}+M & \frac{14ml}{420}\\ \frac{-13ml}{420} & \frac{-3ml^2}{420} & \frac{14ml}{420} & \frac{12ml^2}{420}+J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{v}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}$$

Equation de Lagrange

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=[0]$$

Tant que les deux disque identique et les distances entre eux sont égaux donc $u=v$, $\beta=-\alpha$

Donc $\begin{bmatrix}u\\ \alpha\\ v\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \alpha\end{bmatrix}$

Energie potentielle

$$v = \frac{1}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}u & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -6l\\ -6l & 10l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \alpha\end{bmatrix}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix} \frac{828}{420}m + 2M & \frac{-2ml}{420} \\ \frac{-2ml}{420} & \frac{30ml^2}{420} + 2J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Flexion

Equation de Lagrange

$$\begin{bmatrix} \frac{828}{420}m + 2M & \frac{-2ml}{420} \\ \frac{-2ml}{420} & \frac{30ml^2}{420} + 2J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{10EI}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A.N :

$$\begin{bmatrix} 1.538 & -4\times10^{-4} \\ -4\times10^{-4} & 2.072\times10^{-4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 291.66\times10^{3} & -35\times10^{3} \\ -35\times10^{2} & 7\times10^{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [M]^{-1}[K]$$

Les valeurs propres de cette matrice

$\omega_1 = 270.8$ *rad/s* $\omega_2 = 1869.1$ *rad/s*

$f_1 = 43.1$ *Hz* $f_2 = 297.5$ *Hz*

Erreur $E = \frac{\left|\omega_1^{th} - \omega_1^{EF}\right|}{\left|\omega_1^{th}\right|} = 1.455\%$

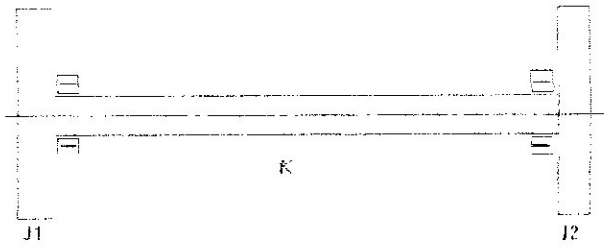
Par la méthode des éléments finis les vecteurs propres

$U_1 = [0.196\ 1 \qquad 0.196\ -1]$

$U_2 = [-0.0069 \quad 1 \qquad -0.0069\ -1]$

ANNEXE N°4

Dynamique de rotor en torsion : [16]



Vibration de rotor en torsion

La méthode énergétique :

$$\sum M_{/\Delta} = J\ddot{\theta} \quad , \qquad (1)$$

Donne :

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 + \theta_1) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Avec $K = \frac{GJ}{L}$

La méthode directe nous donne :

$$\begin{matrix} \theta_1 = A\sin(\omega t + \varphi) \\ \theta_2 = B\sin(\omega t + \varphi) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\theta_2 \end{matrix} \qquad (3)$$

On remplace dans le système (2) :

$$\begin{cases} (K - J_1\omega^2)A + KB = 0 \\ KA + (K - J_2\omega^2)B = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

La forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (K - J_1\omega^2) & K \\ K & (K - J_2\omega^2) \end{bmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Le déterminant :

$$((K - J_1\omega^2)(K - J_2\omega^2) - K^2) = 0 \qquad (6)$$

$$\omega_1 = 0 \ , \omega_2 = \sqrt{\frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \qquad (7)$$

ANNEXE N° 5

```
% VIBRATION EN TORSION DE LIGNE D'ARBRE DESCRETISEE EN 03 ELEMENTS DE TURBOREACTEUR %

% CALCUL DES MATRICE RIGIDITE ET INERTIE ET LEURS VALEURS ET VECTEURS PROPRES %

Format long
% r:masse volumique [kg/m^3]
% G:module de cisaillement
% l : longueur de l'élément [m]
% d : diamètre de l'élément [m]
% j : moment d'inertie polaire [m^4]
% Ic : Moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs [kg*m^2]
% It : Moment d'inertie équivalent pour la turbine [kg*m^2]
Ic=1.757e-002;
It=9.889e-003;
r=7800;
G=8e004;
l=[0.04;0.06;0.24];
d=[0.039;0.039;0.033];
j=3.14.*(d.^4)./32;
% matrice de rigidité
k=G.*j./l;
% matrice d'inertie
I=j.*l.*r;
% matrice de rigidité globale
kg=[k(1),-k(1),0.0
-k(1),k(1)+k(2),-k(2),0
0,-k(2),k(2)+k(3),-k(3)
0,0,-k(3),k(3)];
% matrice d'inertie globale pour premier type de distribution ou discrétisation
Ig1=[(3/8)*I(1),(1/8)*I(1),0.0
   0,(1/2)*(I(1)+I(2))+Ic,0.0
```

```
   0,0,(1/2)*(I(2)+I(3)),0
   0,0,0,(1/2)*I(3)+It];
% matrice d'inertie globale pour deuxième type de distribution ou discrétisation

Ig2=[(3/8)*I(1),(1/8)*I(1),0,0
   (1/8)*I(1),(3/8)*(I(1)+I(2))+Ic,(1/8)*I(2),0
   0,(1/8)*I(2),(3/8)*(I(2)+I(3)),(1/8)*I(3)
   0,0,(1/8)*I(3),(3/8)*I(3)+It];
% les valeurs et vecteurs propres (les valeurs et vecteurs propres)
p1=inv(Ig1)*kg;
% les valeurs et vecteurs propres(deuxième type de distribution ou discrétisation)
p2=inv(Ig2)*kg;
```

```
% VIBRATION EN TORSION DE LIGNE D'ARBRE DESCRETISEE EN 05 ELEMENTS DE TURBOREACTEUR%

% CALCUL DES MATRICE RIGIDITE ET INERTIE ET LEURS VALEURS ET VECTEURS PROPRES %

format long
% r:masse volumique [kg/m^3]
% G:module de cisaillement
% l : longueur de l'élément [m]
% d : diamètre de l'élément [m]
% j : moment d'inertie polaire [m^4]
% Ic : moment d'inertie équivalent pour les deux compresseurs [kg*m^2]
% It : moment d'inertie équivalent pour la turbine [kg*m^2]
Ic=1.757e-002;
It=9.889e-003;
r=7800;
G=8e004;
l=[0.04;0.06;0.08;0.08;0.08];
d=[0.039;0.039;0.033;0.033;0.033];
j=3.14.*(d.^4)./32;
% matrice de rigidité
k=G.*j./l;
% matrice d'inertie
I=j.*l.*r;
% matrice de rigidité globale
kg=[k(1),-k(1),0,0,0,0
-k(1),k(1)+k(2),-k(2),0,0,0
0,-k(2),k(2)+k(3),-k(3),0,0
0,0,-k(3),k(3)+k(4),-k(4),0
0,0,0,-k(4),k(4)+k(5),-k(5)
0,0,0,0,-k(5),k(5)];
% matrice d'inertie globale pour premier type de distribution ou discrétisation
```

```
Ig1=[(3/8)*I(1),(1/8)*I(1),0,0,0,0
   0,(1/2)*(I(1)+I(2))+Ic,0,0,0,0
   0,0,(1/2)*(I(2)+I(3)),0,0,0
   0,0,0,(1/2)*(I(3)+I(4)),0,0
   0,0,0,0,(1/2)*(I(4)+I(5)),0
   0,0,0,0,0,(1/2)*I(5)+It];
% matrice d'inertie globale pour deuxième type de distribution ou discrétisation

Ig2=[(3/8)*I(1),(1/8)*I(1),0,0,0,0
   (1/8)*I(1),(3/8)*(I(1)+I(2))+Ic,(1/8)*I(2),0,0,0
   0,(1/8)*I(2),(3/8)*(I(2)+I(3)),(1/8)*I(3),0,0
   0,0,(1/8)*I(3),(3/8)*(I(3)+I(4)),(1/8)*I(4),0
   0,0,0,(1/8)*I(4),(3/8)*(I(4)+I(5)),(1/8)*I(5
   0,0,0,0,(1/8)*I(5),(3/8)*I(5)+It];
% les valeurs et vecteurs propres (les valeurs et vecteurs propres)
p1=inv(Ig1)*kg;
% les valeurs et vecteurs propres(deuxième type de distribution ou discrétisation)
p2=inv(Ig2)*kg;
```

```
% calcul de fréquence propre de ligne d'arbre en flexion (turboréacteur) %
% M:la matrice de masse
% K:la matrice de rigidité
a=315446582;
b=18926794.92;
c=335161993;
d=4731700;
e=19715411.38;
f=473169.78;
g=21765815;
h=16560945;
i=1987312;
j=1642950.948;
k=2365849;
l=19764601;
m=2362898;
n=49190.62;
o=94633.97;
p=473405;
r=2951.437;
v1=[a;zeros(1,1);-a;zeros(2,1);-b;zeros(8,1)];
v2=[0;a;zeros(1,1);-a;b;zeros(9,1)];
% v3=zeros(14,1);
% v4=zeros(14,1);
v5=[-a;zeros(1,1);c;zeros(2,1);-d;-e;zeros(2,1);-f;zeros(4,1)];
v6=[0;-a;zeros(1,1);c;g;zeros(2,1);-e;f;zeros(5,1)];
v7=[0;b;zeros(1,1);-h;i;zeros(2,1);-f;j;zeros(5,1)];
v8=[-b;zeros(1,1);h;zeros(2,1);f;f;zeros(2,1);j;zeros(4,1)];
v9=[zeros(2,1);-e;zeros(2,1);k;l;zeros(2,1);m;-n;zeros(3,1)];
v10=[zeros(3,1);e;-k;zeros(2,1);l;-m;zeros(2,1);-n;zeros(2,1)];
v11=[zeros(3,1);n;o;zeros(2,1);-m;p;zeros(2,1);-r;zeros(2,1)];
v12=[zeros(2,1);-m;zeros(2,1);o;m;zeros(2,1);p;r;zeros(3,1)];
v13=[zeros(6,1);-n;zeros(2,1);r;n;zeros(3,1)];
```

```
v14=[zeros(7,1);-n;-r;zeros(2,1);n;zeros(2,1)];
v15=zeros(14,1);
v16=zeros(14,1);
K=[v1,v2,v5,v6,v7,v8,v9,v10,v11,v12,v13,v14,v15,v16];
% ------------------------------------------------------------------------------------------
m1=5.429;
m2=4.491;
I1=9.889e-003;
I2=1.757e-002;
p1=[0.08785+m1;zeros(1,1);0.05191;zeros(2,1);0.0008758;zeros(8,1)];
p2=[0;0.08785+I1;zeros(1,1);0.05191;-0.0008758;zeros(9,1)];
p5=[0.05191;zeros(1,1);0.078653;zeros(2,1);-
0.018574;0.05030;zeros(2,1);0.01211;zeros(4,1)];
p6=[zeros(1,1);0.05191;zeros(1,1);0.78653;0.018574;zeros(2,1);0.05030;-
0.01211;zeros(5,1)];
p7=[0;-0.0008758;zeros(1,1);0.018574;0.00091955;zeros(2,1);0.0121;-
0.00067;zeros(5,1)];
p8=[0.0008758;zeros(1,1);-0.018574;zeros(2,1);0.0009195;-0.01211;zeros(2,1);-
0.00067;zeros(4,1)];
p9=[zeros(2,1);0.2096;zeros(2,1);-
0.01211;0.79992;zeros(2,1);0.01844;0.003345;zeros(3,1)];
p10=[zeros(3,1);0.2096;0.01211;zeros(2,1);0.79992;-
0.018432;zeros(2,1);0.003345;zeros(2,1)];
p11=[zeros(3,1);-0.01211;-0.00067;zeros(2,1);-
0.018432;0.0009214;zeros(2,1);0.0009435;zeros(2,1)];
p12=[zeros(2,1);0.01211;zeros(2,1);-0.00067;0.018432;zeros(2,1);0.0009214;-
0.0009435;zeros(3,1)];
p13=[zeros(6,1);0.05575;zeros(2,1);-0.0009435;0.09435;zeros(3,1)];
p14=[zeros(8,1);0.0009435;zeros(2,1);0.09435;zeros(2,1)];
p15=[zeros(7,1);0.05575;zeros(4,1);m2;0];
p16=[zeros(13,1);I2];
M=[p1,p2,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11,p12,p13,p14,p15,p16];
p=inv(M)*K;
```