015/2006
(01)
المكتبة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE

En vue de l'obtention de diplôme d'ingénieur d'état en aéronautique option Installation

sous le thème

Simulation d'un système de navigation hybride

Simulation d'un système de navigation hybride

Présenté par :
KHEDDAR ABDEL MADJID
RAMOU NAIM

Encadré par :
Dr MEGUELATI

PROMOTION 2003

DEDICACE

Ce que j'espère, que ce modeste travail fera une référence à toute personne qui veut entamer le domaine de la navigation inertielle. De ma part je le dédie au souvenir de mes deux parents, ainsi que :

- Mes frères et sœurs à qui je dois tout pour ses sacrifices.

- A mes collègues et en particulier la promotion 2003.

- A mes amis sans exception, Bouchaita, Brahim, mohamed, nounou, khelladi, boudani, a tout ceux qui m'ont aidé de loin ou de prés pour achever ce travail, sans oublier Mr Belkaid, Bilote, Farouk, SidAhmed pour ses quotidiens plaisanteries, Ahmed mensouri pour son soutient et pour son geste que je n'oublierai jamais.

- A mon binôme Mr Ramou qui ma supporté durant toute la période qui nous à rassemblé pour finir cette thèse.

- Spécialement à radia, sabah, salima, hanene, et à celle qui tien mon esprit K. M

Je dédie ce travail en leur honneur, en espérant persévérer d'avantage.

ABD ELMADJID KHEDDAR

DEDICACE

Je dédié ce modeste travail à mes parents, mes frères et mes sœurs spécialement iman que j'aime beaucoup.

A tous mes amis : TAIB, NOUAR, A.KARIM, KARIM, IBRAHIM, MOHAMED, AMINE, SOUFIANE, HAKIM, ISMAIL, TAIB, ZINO le chef de la tribune et tous les amis de la cité 1,2

A tous les amis de RELIZANE

A mon binôme A.MADJID

A mon copain de la chambre FAROUK

A mon copain d'arme OMAR BILOTE

A tous les enseignants

RAMOU NAIM

REMERCIEMENTS

Nous tenons à témoigner notre profonde gratitude envers notre directeur de thèse Monsieur Menguellati, chargé de cours au sein du département d'Aéronautique de l'université de Blida, pour tous ses conseils éclairés et sa large expérience scientifique dans le domaine d'aéronautique, ont permis l'aboutissement de ce travail.

Nous remercierons également tous ceux qui ont contribués de loin ou de prés à l'aboutissement de ce présent travail, sans oublier Djellel pour sa disposition durant la cette année, SidAhmed et aussi Ahmed Mensouri.

Nous tenons à remercier aussi notre directeur Mr Berguel de nous avoirs acceptés au sein de son département et tous les enseignants du département sans oublier les membres du jury.

RESUME

Notre projet de fin d'étude consiste à simuler au travers Simulink du MatLab version 6.5 l'hybridation du système de navigation inertiel « **INS** » avec le système de positionnement global « GPS », ce premier qui va nous servir comme outils pour générer la trajectoire d'un aéronef en vol en calculant dans chaque instant la position de cet aéronef par double intégration de l'accélération donnée à l'entrée de notre modèle.

Ce système est connu par ses erreurs dues aux perturbations extérieures et intérieures qui agissent sur ses gyromètres et accéléromètres en les poussant à fausser leurs indications et donc une fausse position.

Pour corriger ces erreurs, nous avons utiliser un filtre appelé filtre de Kalman. Son rôle est de minimiser l'erreur de l'INS à travers la prédiction de la prochaine position de notre aéronef puis la corrige quand il reçoit une mesure du système GPS.

Pour bien illustrer cet aspect, nous avons créée un modèle représente l'INS parfait, qui en principe ne donne pas des erreurs de position, un autre INS (réel) se diffère du premier par l'injection des perturbations aux gyromètres et accéléromètres pour le faire diverger de sa référence, un autre pour présenter les mesures GPS, et finalement le filtre de Kalman pour corriger les résultats de l'INS réel ainsi l'affichages des résultats.

ملخص

يتلخص هذا المشروع في التمثيل على جهاز الكمبيوتر التهجين بين نظام الملاحة العطالية(INS) و نظام التموقع العام (GPS) عن طريق البرنامج (MatLab), هذا الأول الذي يستخدم كوسيلة لإنتاج خط سير طائرة, بحساب في كل وقت موقع الطائرة عن طريق التكامل المضاعف لتسارعها.

هذا النظام (INS) المعروف بأخطائه الناتجة عن الاختلال الخارجي و الداخلي التي يؤثر على جهاز التسارع(Accéléromètres) و جهاز التسارع الزاوي(gyromètres) مما يغلطه و يدفعه إلى إعطاء نتائج خاطئة.

لتصحيح هذه الأخطاء, استعملنا مرشح يسمى بمرشح "كالمن" (Kalman), دوره تقليل الأخطاء الناتجة عن نظام الملاحة العطالية عن طريق التنبؤ بموقع الطائرة ثم تصحيحه عند استقبال حسابات نظام التموقع العام.

من اجل إجلاء هذا المظهر, قمنا بخلق نموذج يمثل النظام INS المثالي المعصوم من الخطأ و أخر يعطي أخطاء (واقعي), و أخر يمثل حسابات آل GPS و أخيرا مرشح كالمن من اجل تصحيح النتائج المعطاة من طرف INS الواقعي مع إظهار النتائج.

ABSTRACT

Our project consists in simulating through Simulink of the MatLab ver 6.5 the hybridization of the inertial navigation system « INS » with the global positioning system « GPS », this first that used as tools to generate the trajectory of aircraft while calculating in every time the position of this aircraft by double integration of the acceleration given to the entry of our model.

This system is known by its mistakes owed to the outside and interior disruptions that act on him to distort the aircraft position.

To correct these mistakes we have use a filter called Kalman filter. Is used for minimize the mistake of the INS then through the prediction of the next position of the aircraft and corrects it when it receives a GPS measures.

To really illustrate this aspect we created a model represents the perfect INS, another INS (real) defers of the first by the injection of disruptions in to gyrometers and accelerometers to deviate him of the reference trajectory, another to present the GPS measures, and finally the Kalman filter to correct results of the real INS and displays the results.

SOMMAIRE

SOMMAIRE 1

INTRODUCTION GENERALE 3

I- GENERALITES SUR LES SYSTEMES DE NAVIGATION 4

I.1- INTRODUCTION 4
I.2- NAVIGATION AERIENNE 4
I.3- DIFFERENTS METHODES DE NAVIGATION 5
I.3.1 Navigation par points ou par cheminement 5
I.3.2 Navigation à l'estime 5
I.4- EXEMPLES DE METHODE DE NAVIGATION PAR CHEMINEMENT 6
I.4.1 Système radiophare omnidirectionnel VHF (VOR) 6
I.4.2 L'équipement de mesure de distance DME 8
I.4.3 Système de positionnement global GPS 9
I.5- EXEMPLE DE METHODE DE NAVIGATION PAR L'ESTIME : LE NAVIGATEUR INERTIEL 13
I.6- NECESSITE D'HYBRIDATION DU SYSTEME INERTIEL 15
I.6.1 Approche classique de l'hybridation 16
I.6.2 Approche optimale 16

II- LA NAVIGATION INERTIELLE 18

II.1- INTRODUCTION 18
II.2- PRINCIPE DE LA NAVIGATION INERTIELLE 18
II.3- LES DIFFERENTS TYPES DES CENTRALES INERTIELLES 19
II.3.1 Centrales « Strapdown » 19
II.3.2 Centrales inertielles à plate-forme stabilisée 19
II.4- LES GYROSCOPES 21
II.4.1 Gyroscopes de type mécanique 21
II.5- PERFORMANCES DES GYROSCOPES MECANIQUES 24
II.5.1 Performances de gyromètres optiques 27
II.6- LES ACCELEROMETRES 27
II.6.1 Définition 27
II.6.2 Les différents types d'accéléromètres 28
II.7- LES REPERESDE REFERENCE 29
II.7.1 Le repère mobile ou « body » 29
II.7.2 Le repère de navigation 30
II.7.3 Système inertiel 30
II.7.4 Le système lié à la terre ou ECEF (Earth Centered Earth Fixed) 31
II.8- EXEMPLE DE FONCTIONNEMENT D'UNE CENTRALE STABILISEE 33
II.8.1 Composition d'une plateforme stabilisée à trois axes 34
II.8.2 Stabilisation par rapport à l'inertiel 34
II.9- EXEMPLE DE MECANISATION D'UNE CENTRALE « STRAPDOWN » 35
II.9.1 Estimation de l'orientation 36
II.9.2 Estimation de la position 37
II.9.3 L'équation dynamique de la vitesse 38
II.9.4 La mécanisation 38

III- HYBRIDATION 41

III.1- INTRODUCTION 41
III.2- LES DIFFERENTES APPROCHES D'HYBRIDATION 41
III.2.1 Mode non couplé 41
III.2.2 Mode Faiblement « lâchement » Couplé 42
III.2.3 Système fortement couplé 44
III.3- LE FILTRE DE KALMAN 44

III.3.1 Le principe.....44
III.3.2 Formulation mathématique du filtre de Kalman linéaire.....46
III.3.3 Linéarisation des systèmes non linéaires.....49
III.3.4 Filtre de Kalman linéarisé discret.....49
III.3.5 Le Filtre de Kalman Etendu.....52

IV- SIMULATION.....**56**

IV.1- INTRODUCTION.....56
IV.2- LES EQUATIONS DU MODELE D'EVOLUTION : INS SEUL.....56
IV.3- LES EQUATIONS DE FILTRE DE KALMAN.....56
IV.4- LES SCHEMAS BLOC DU SYSTEME.....60
IV.4.1 Système en boucle ouverte / fermé.....60
IV.5- NOTION SUR SIMULINK.....63
IV.6- DESCRIPTION DU SYSTEME.....65
IV.6.1 Système en boucle ouverte.....65
IV.7- LES RESULTATS OBTENUES.....74
IV.7.1 Boucle ouverte 09 variables.....74
IV.7.2 Boucle fermer 9 variables.....86
IV.7.3 Boucle fermer 15 variables.....88

CONCLUSION GENERALE
BIBLIOGRAPHIE
ANNEXES

Chapitre

1

Généralités sur les systèmes de navigation

INTRODUCTION GENERALE

Depuis la fin des années 80, la communauté aviation civile exprime sa volonté de promouvoir et développer à travers le monde des systèmes de navigation uniques qui offrent des services sûrs et efficaces et qui soit compatibles et inter-opérables entre eux. Par ailleurs elle souhaite donner aux opérateurs aériens la liberté de suivre dynamiquement une route privilégiée.

Afin de satisfaire aux exigences définies par l'OACI. Par exemple, d'un point de vue opérationnel, un seul système de navigation exemple INS (Inertiel Navigation System) ne peut être utilisé en tant que moyen unique de navigation. Son intégration avec d'autres système de navigation permet d'améliorer la précision de la solution de navigation, l'INS peut assurer la continuité de la navigation durant la période de COASTING. Mais, sa capacité à assurer cette continuité avec une bonne précision dépend de la qualité de sa re-calibration à l'aide des mesures d'autres systèmes de navigation. Aussi les nettes améliorations dues à l'intégration INS avec d'autres systèmes de navigation dépendent considérablement de la définition d'algorithmes efficaces de contrôle d'intégrité

Le but de l'étude présentée dans ce document est l'évaluation de l'amélioration apportée par l'hybridation de INS avec d'autres systèmes de navigation.

Dans le but de la mise en oeuvre de ce travail, l'étude est subdivisée en quatre (04) chapitres :

- Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les différents systèmes de navigation

Le second chapitre décrit les principes de la navigation inertielle, les équations d'erreurs inertielles ainsi que le calculateur de la plateforme INS.

- Le troisième chapitre propose l'hybridation de l'INS avec le système GPS, un modèle de Filtre utilisée pour l'intégration des données INS et GPS (Filtre de Kalman).

- Le quatrième chapitre quatre simule notre modèle réalisé en MAtLAb 6.5 et présentes les différents résultats trouvés.

En fin, une bibliographie et une annexe sont mises à la disposition du lecteur.

I-GENERALITES SUR LES SYSTEMES DE NAVIGATION

I.1-Introduction

Ne vous êtes vous jamais égaré, avez-vous du mal à trouver votre direction, à mémoriser le chemin qui conduit vers le petit coin du monde qui vous plaît bien, vous vous apercevrez dans cette situation que la localisation est un composant important pour chaque engin mobile en déplacement. Pour avoir ces informations (position, vitesse et direction) nombreux systèmes ont été conçu à cet effet, des systèmes extérieur comme les GPS, GLONASS, des systèmes semi intégrés comme le VOR dans le domaine de l'aéronautique, et enfin des systèmes intégrés comme l'inertiel.

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions de la navigation, ensuite nous décrirons quelques systèmes de navigation et parler de la nécessité de l'hybridation.

I.2-Navigation aérienne

La navigation est un art de conduire un aéronef à une destination donnée. La navigation aérienne est largement héritière de la navigation maritime et la terminologie utilisée est identique. Elle s'en distingue par le fait que l'avion peut survoler aussi bien des zones maritimes que des zones terrestres qui comportent des obstacles pour le vol à basse altitude. La vitesse des avions est bien plus élevée que celle des navires et l'autonomie est limitée ; il en résulte que le calcul de la position, puis de la route à suivre, doit être effectué plus souvent et plus rapidement (figure I.1).

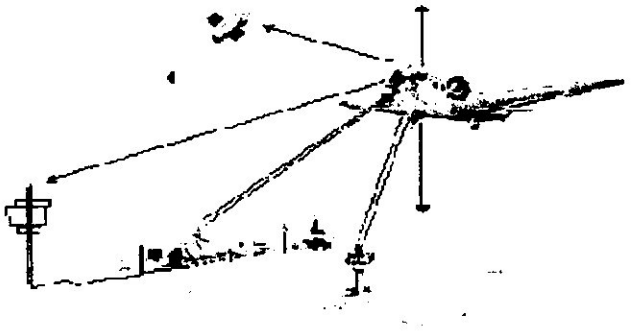


Fig. I.1 Navigation aérienne

La navigation aérienne, au cours de la seconde moitié du XX^{e} siècle, s'est développée grâce à la radionavigation, aidée par le fait que la propagation des ondes radioélectriques est plus facile entre le sol et l'air qu'au niveau du sol. Le développement et la généralisation, au début du XXI^{e} siècle, des moyens satellitaires de navigation tendent à supprimer toute

spécificité à la navigation aérienne. Plusieurs méthodes de navigation peuvent être utilisées. On distingue plusieurs catégories de navigation :

I.3-Différents méthodes de navigation

On distingue deux types de méthodes de navigation :

I.3.1 Navigation par points ou par cheminement

Dans les procédés de cette catégorie, on a en premier lieu la position. La vitesse doit être mesurée par un moyen indépendant.

En radionavigation, la position est toujours donnée par l'intersection de lignes de position (LOP) définies radio électriquement.

Une ligne de position correspond à un signal radioélectrique constant ou à une caractéristique de ce signal qui reste constante (amplitude, phase, taux de modulation etc.). Les lignes de position classique présentée dans la figure I.2 sont :

- Lignes de position circulaires, utilisée dans les radars.
- Lignes de position hyperboliques, utilisée dans le système Omega.
- Lignes de position orthodromiques, utilisée dans les systèmes VOR.

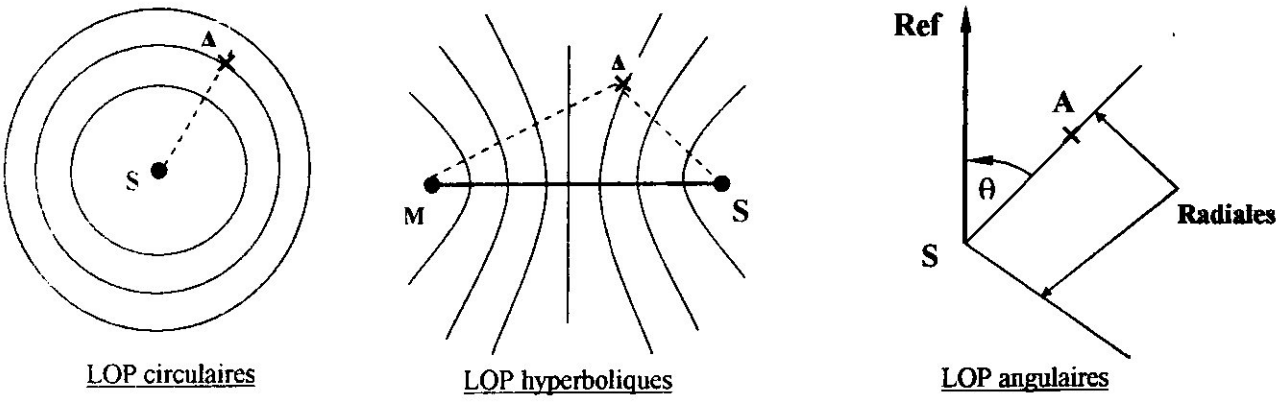


Fig. I.2Lignes de position

I.3.2 Navigation à l'estime

L'estime est la technique de navigation adaptée lorsque vous souhaitez joindre deux points par le trajet le plus direct : la ligne droite.

La navigation à l'estime a été utilisée avant l'apparition des moyens radioélectriques. Elle reste largement utilisée par l'aviation légère dans le vol à vue (VFR) car elle ne nécessite qu'un nombre très restreint d'instruments : anémomètre, compas, montre, carte, règle et crayon. C'est une technique intrinsèquement peu précise mais qui donne de bons résultats en effectuant des recalages fréquents sur des repères sûrs.

La figure I.3 illustre ces deux techniques de navigation.

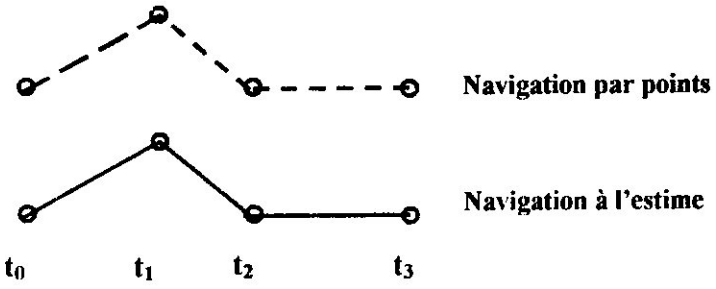


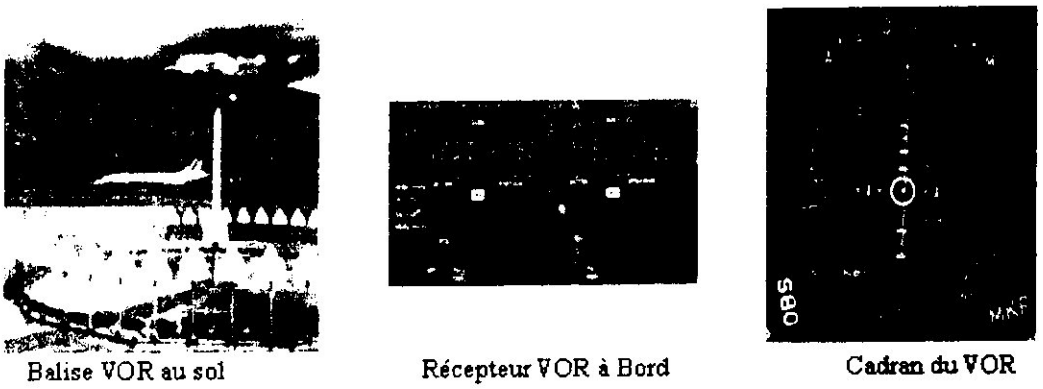
Fig. I.3 Méthodes de navigation

I.4-Exemples de méthode de navigation par cheminement

I.4.1 Système radiophare omnidirectionnel VHF (VOR)

Le but du radiophare omnidirectionnel VOR (figure I.4) est de fournir une information de relèvement magnétique (QDM) d'une station d'émission omnidirectionnelle au sol qui pourra être lue par le pilote sur un indicateur. Le QDM est le cap magnétique qui permet de rejoindre la station VOR sans vent. Les indications à bord sont indépendantes du cap de l'aéronef.

•



Balise VOR au sol — Récepteur VOR à Bord — Cadran du VOR

Fig. I.4 Systèmes de navigation VOR

♦ **Principe du VOR**

Le VOR matérialise dans l'espace les 360 direction (ou radiales) d'une rose centrée sur la station et calé Le VOR rayonne une porteuse VHF modulée de façon à transmettre simultanément et indépendamment deux signaux à 30 HZ (figure I.5).

- Un signal de référence (30 REF) dont la phase est identique quel que soit l'azimut d'émission.
- Un signal variable (30 VAR) dont le déphasage par rapport au précédent est égal à l'azimut de la direction d'émission.

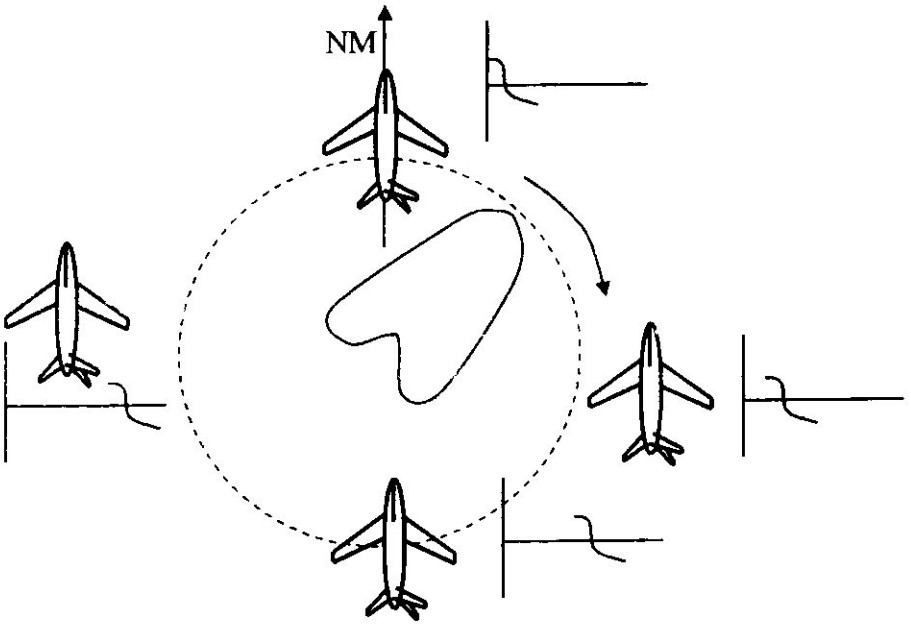


Fig. I.5 Principe du VOR

A bord de l'avion, la comparaison des phases des signaux variable et référence permet de connaître la radiale sur laquelle est situé l'avion.

- **Avantages du VOR**
  - Bonne précision
  - Bonne stabilité
  - Insensible aux perturbations électriques
  - Indications permanentes
  - Utilisables par un nombre d'avion illimité simultanément
  - possibilité de le coupler à un pilote automatique

- **Inconvénients du VOR**
  - Imprécision à la verticale due au cône de silence
  - Imprécision lors d'un passage travers, 10° de part et d'autre du radial travers.
  - Sensible au relief montagneux et obstacles du à la fréquence VHF qui est à portée optique.

- **Erreurs**
  - A la réception : imprécision des instruments eux-mêmes (chaîne automatique ± 1.5° ou manuelle ± 0.5°).
  - A l'émission : erreur de propagation (ou site) due à la réflexion sur les obstacles (montagnes, maisons, etc ...)
  - On obtient en moyenne une précision de ± 2° en chaîne manuelle et de ± 3° en chaîne automatique.

I.4.2 L'équipement de mesure de distance DME

Le système DME est un système travaillant dans le domaine UHF qui permet la mesure à bord de la distance oblique entre un aéronef équipé et le point de référence d'une installation sol.

- **Principe du DME**

La distance est calculée par la mesure du retard pris par l'onde hertzienne émise par l'avion et renvoyée par le "transpondeur sol" (figure I.6). le DME fonctionne sur le principe des interrogations-réponses : l'avion décidant de connaître sa distance oblique par rapport à la station sol DME, émet des impulsions par paires répétées irrégulièrement de 10 à 30 fois par seconde. La station sol réémet ces impulsions qui sont reçues par tous les avions autour de la station. L'avion détecte les réponses qui lui sont destinées et calcule la distance.

- **Précision du DME**

Le DME est un très bon système de navigation, il est souvent associé à un VOR, cela donne un système de référence en coordonnées polaires.

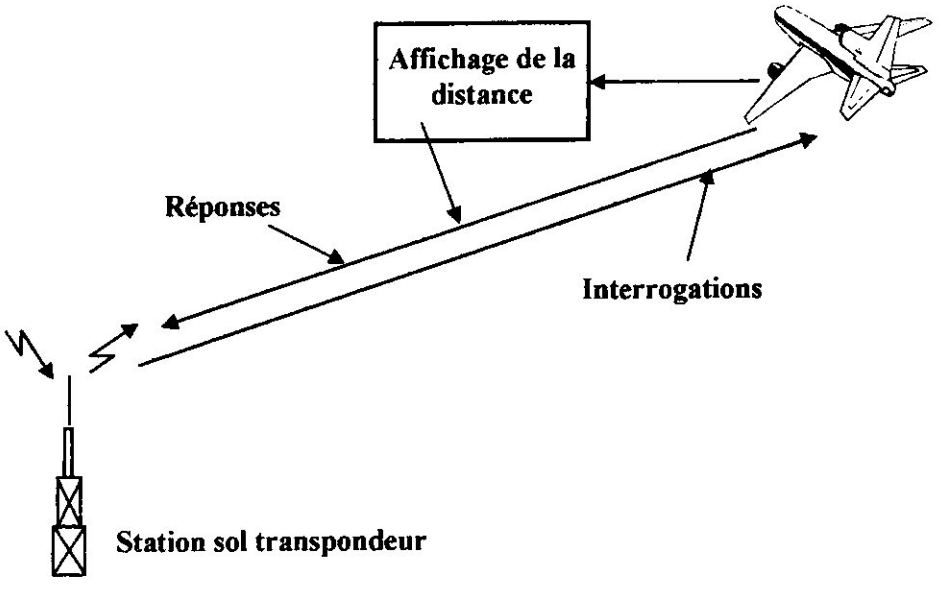


Fig. I.6 Principe de fonctionnement du DME

- **Erreurs**

L'erreur sur la distance est de ± 0,1 NM quelque soit la distance, ce qui fait du DME système assez performant.

- **Utilisation du système combiné VOR / DME**

Systématique sur les voies aériennes, elle implique la coimplantation des stations ; dans ce cas, les fréquences VOR (200) et les canaux DME (17 à 59 et 70 à 126 : codes X et Y) sont appariés d'après un tableau OACI (annex10) : à bord, la sélection VOR qui donne l'azimut ; entraîne celle de DME associé qui donne la distance oblique entre avion et station pour repérer notre avion par rapport à un repère lié à la station.

I.4.3 Système de positionnement global GPS

Le GPS (Global Positioning System) est un système de positionnement par satellites créé par l'armée américaine dans les années 70 comme moyen radioélectrique de navigation / localisation globale assurant une haute disponibilité, une couverture globale, et pouvant fournir à ses utilisateurs des informations de position et de vitesse tridimensionnelles en deux niveaux de précision (PPS et SPS).

- **Architecture du système GPS**

Le GPS est constitué de trois parties distinctes (figure I.7) :

- le segment spatial
- le segment de contrôle
- le segment utilisateur

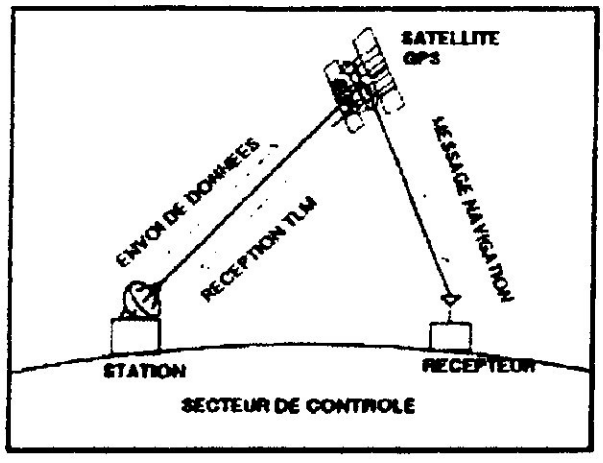


Fig. I.7 Les trois segments du système GPS

- **Segment spatial**

La constellation GPS est constituée de 24 satellites maintenus en orbite, dont 21 sont garantis disponibles en permanence. Le terme « constellation » implique une orbite circulaire inclinée : le satellite est en orbite autour de la terre et maintient un rayon constant par rapport au centre de la terre, ainsi qu'une vitesse constante.

Ces satellites évoluent à une altitude d'environ 20200 km et mettent 12 heures pour effectuer une rotation autour de la terre. Le nombre, l'altitude des satellites et l'inclinaison des plans des orbites sont choisis de telle sorte qu'à tout instant, en tout point de la terre, on puisse voir le nombre de satellites minimal pour l'utilisation envisagée.

Ces satellites défilent par rapport à la terre dans des plans qui font des angles plus ou moins grands avec le plan équatorial terrestre :

- 6 plans orbitaux sont définis.
- On compte 4 satellites par plan.
- Chaque satellite est espacé de 60°, formant un angle de 55° avec l'équateur.

Le même trajet est répété toutes les 24 Heures. Ainsi, sur n'importe quel point de la planète, de 5 à 8 satellites sont toujours visibles alors que seulement 4 satellites sont nécessaires pour avoir un positionnement tridimensionnel et la vitesse d'un récepteur.

- **Segment de contrôle**

Il s'agit de l'ensemble des bases de contrôle au sol qui suivent toutes les secondes la trajectoire des satellites. Elles sont réparties sur différents pays afin qu'au moins une station contrôle un satellite donné. La station principale est située sur la Falcon Air Force Base dans le Colorado. Le rôle de ces stations est d'assurer le suivi des satellites (track), mais aussi de leur envoyer les corrections d'erreurs de positionnement. Ceci permet d'augmenter la fiabilité du système en permettant à tout instant de vérifier que les informations générées par chacun des satellites sont correctes.

Chaque station est capable de :

- Recevoir des données du satellite.
- Calculer des éphémérides (données orbitales).
- Corriger l'horloge.
- Contrôler les satellites.
- Echanger des données avec les autres stations.
- Transmettre au satellite les corrections qu'il doit adopter.

Il existe 5 stations de surveillance (monitor stations) dispersées dans le monde (figure I.8) .

- Hawaï
- Ascension
- Diego Garcia
- Kwajalein
- Colorado Springs

Et 4 stations de réémission (up load stations) : idem sauf Hawaï. Colorado Springs est la station principale (master control station). Elle gère toutes les transmissions ainsi que les calculs (Ephémérides et horloge de chaque satellite).

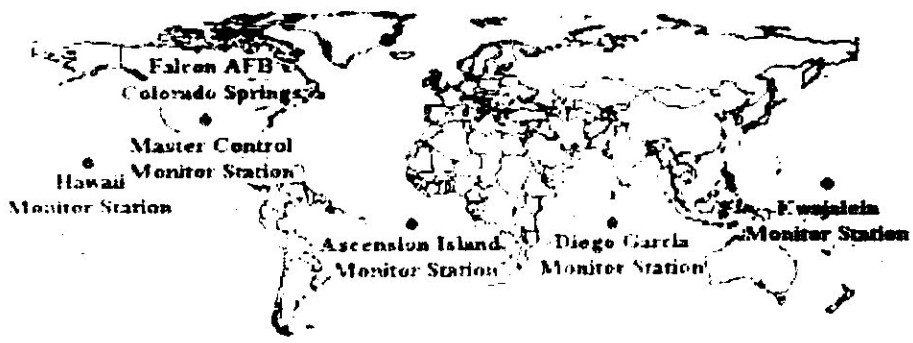


Fig. I.8 GPS Master Control and Monitor Station Network

- **Segment utilisateur**

La partie utilisateur comprend l'ensemble des récepteurs civils et militaires qui ne font que recevoir les informations des satellites et à partir de la lecture du message de navigation et de la mesure du temps de propagation de l'onde électromagnétique envoyée par aux moins 4 satellites peut calculer sa position, vitesse et estimation de temps dans un repère tridimensionnel.

- **Erreurs du GPS**

Le signal reçu diffère du signal émis pour plusieurs raisons :

- le bruit du canal de transmission;
- le décalage temporel dû au temps de propagation et aux décalages des horloges de l'émetteur et du récepteur;
- le décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler et aux instabilités des horloges d'émission et de réception;

La conception du récepteur doit tenir compte des incertitudes des signaux et de leurs variations. D'autre part, le principe de positionnement GPS étant une triangulation, deux facteurs interviennent directement dans l'erreur sur la position finale (figure I.9) :

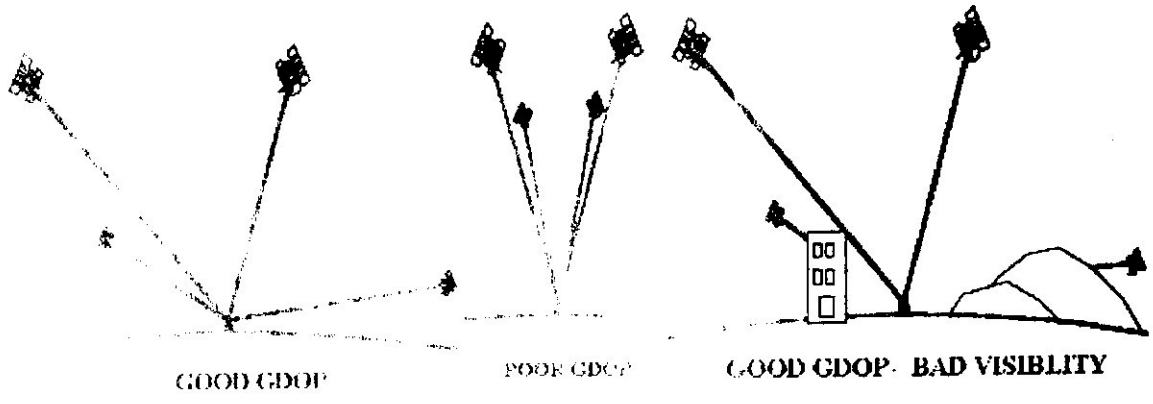


Fig. I.9 Géométrie des satellites

La géométrie des satellites par rapport à l'utilisateur : le facteur représentatif de cette géométrie est le **G.D.O.P** (Geometric Dilution Of Precision). Si les angles entre le récepteur et les satellites sont proches, on a un GDOP pauvre, et inversement. Mais il ne suffit pas de se fixer par rapport aux éphémérides pour sélectionner les meilleurs satellites, car un obstacle peut toujours être présent et fausser les mesures.

La précision de la mesure de distance entre l'utilisateur et chaque satellite : c'est l'erreur de distance équivalente utilisateur **U.E.R.E** (User Equivalent Ranging Error).

La précision finale de localisation peut s'exprimer comme le produit de l'erreur de distance équivalente et du facteur représentatif de la qualité de la géométrie satellites-utilisateur. Le tableau I.1 donne quelques valeurs des erreurs.

Source d'erreur	erreur sur la mesure du temps (nanosecondes)	erreur sur la distance (mètres)
Synchro. Sur l'horloge GPS	3	1
Connaissance position du satellite	4.5	1.5
Traversée de l'ionosphère	9	3
Stabilité horloge utilisateur	3	1
Précision de la résolution équations	3	1
Contributions dynamique utilisateur	4.5	1.5
Total (compensé)	12.6	4.2

Tableau I.1 Erreur de position = (U.E.R.E) * (G.D.O.P)

- **Avantages du GPS**

Le système GPS présente de nombreux avantages :

- Le GPS permet d'obtenir un positionnement précis en n'importe quel point du globe.
- Ce système est totalement indépendant des conditions atmosphériques, de la topographie du terrain ou des déférentes interférences radioélectriques (Le signal de navigation est normalement protégé du brouillage par un très fort étalement du spectre).
- L'utilisation du système est gratuite : seul l'achat du récepteur GPS entre en compte et les prix ne cessent de chuter.
- L'utilisateur est anonyme : les récepteurs étant passifs.
- Le système est robuste : l'altitude des satellites de plus de 20 000 km est une distance qui demande des ressources considérables pour une destruction physique. De plus, l'espacement entre les satellites est optimisé pour éviter une destruction multiple.
- Le système est en constante évolution et de nouvelles applications ne cessent d'apparaître.

- **Inconvénients du GPS**

- Le manque d'intégrité du système GPS : On définit l'intégrité d'un système comme sa capacité à prévenir l'utilisateur en temps opportun lorsque le système ne doit pas être utilisé parce que ses performances sont trop dégradées. Cette incapacité à avertir les utilisateurs d'un dysfonctionnement dans un délai raisonnable est aujourd'hui sa faiblesse la plus critique : en effet, un satellite GPS peut délivrer des

informations erronées pendant plusieurs minutes avant d'être réparé ou neutralisé sans en avertir les utilisateurs. Le segment de contrôle qui analyse l'ensemble des signaux destinés aux utilisateurs détecte un dysfonctionnement avec un délai de 15 à 20 minutes. Cet inconvénient limite l'utilisation du GPS dans certains secteurs. Par exemple, les exigences de la sécurité de l'aviation civile imposent de ramener le délai à moins de 10 secondes.

- Le système GPS, qui appartient aux militaires américains, accentue l'emprise des Etats-Unis sur le monde.
- Les trajets multiples : ceci se produit quand le signal de GPS est reflété par des objets tels que des grands bâtiments ou de grandes surfaces de roche avant qu'il atteigne le récepteur. Ceci augmente le temps de parcours du signal, causant par conséquent une surévaluation du temps de vol et générant par conséquent des erreurs.
- Faible disponibilité : la précision dépend du nombre de satellites visibles par le récepteur (plus un récepteur GPS peut « voir » de satellites, meilleure est la précision). Dans les applications dans le domaine automobile, les conditions de visibilité sont souvent dégradées (les bâtiments, les tunnels, l'interférence électronique, ou parfois même le feuillage dense) ; ceci peut bloquer la réception du signal, entraînant des erreurs de position voir causant un arrêt temporaire du système. Typiquement, les unités de GPS ne fonctionneront pas dans des environnements d'intérieur, sous l'eau ou sous terre !
- Géométrie des satellites/ombre : ceci se rapporte à la position relative des satellites selon l'instant d'observation. La géométrie satellitaire idéale existe quand les satellites sont situés à des angles relativement larges. On dispose d'une géométrie faible quand les satellites sont alignés ou en groupe serré.
- Exactitude variable: pour les mêmes raisons, l'exactitude des mesures de position peut varier considérablement. Tandis que sur une route en pleine campagne l'accès à disons 8 satellites peut donner une précision sub-métrique, les erreurs dans une ville avec ses « gorges de bâtiments » vont être de l'ordre d'une dizaine de mètres.
- Pas d'information d'orientation: a priori, un GPS ne détermine que la position, mais par le changement de la position on peut en déduire la vitesse et l'angle de lacet. Avec un ensemble d'antennes on pourrait même calculer les angles de roulis et de tangage, mais ces systèmes coûtent assez cher.

I.5-Exemple de méthode de navigation par l'estime : le navigateur inertiel

Le but de la navigation par inertie est d'estimer d'une façon autonome la position et la vitesse tridimensionnelles d'un aéronef par rapport à la terre à partir d'une Unité de Mesure Inertielle (UMI) qui comprend des capteurs inertiels, accéléromètres, gyromètres et d'un calculateur de bord qui élabore la solution de navigation. Ceci repose sur l'intégration des forces spécifiques (accélération absolue moins la gravité) mesurées par les accéléromètres (en nombre de 2 ou 3), et projetées dans le repère de navigation à partir des informations fournies par les gyromètres

Ceux-ci (accéléromètres et gyroscopes) peuvent être montés :

- Sur des plates-formes stabilisées par asservissement dans le cas des systèmes à cardan.
- Directement sur le corps du mobile pour les systèmes « Strap-down » ou à composants liés.

La figure I.10 schématise une centrale inertielle de type asservie dans laquelle les blocs A et G désignent le accéléromètres et les gyroscopes, respectivement. Les premiers délivrent la force spécifique mesurée dans les directions de leurs axes d'entrée qui matérialisent un repère (trièdre) de mesure attaché au mobile. La vitesse angulaire de ce trièdre par rapport au repère inertiel est mesurée par les gyroscopes. La position est obtenue par double intégration des forces spécifiques, et doit généralement être délivrée dans un repère exploitable par l'utilisateur.

La navigation inertielle est utilisée dans tous les domaines civils et militaires surtout dans les régions dépourvues d'infrastructure radioélectriques. La dérive des centrales nécessite d'effectuer un recalage de temps en temps lorsqu'on doit effectuer une navigation précise.

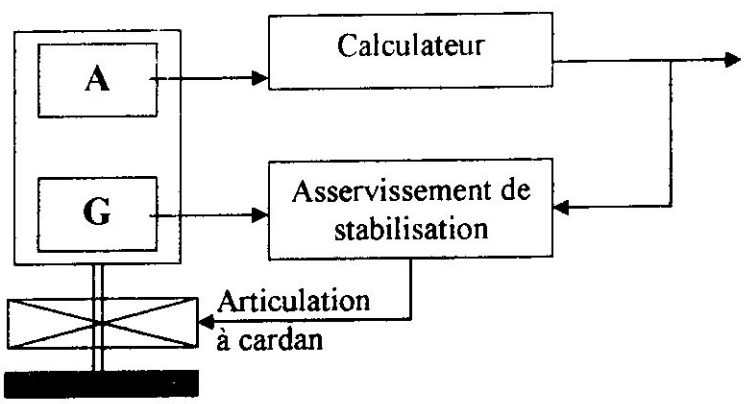


Fig. I.10 Principe de fonctionnement d'une centrale à cardans

- **Les avantages**

- Solution complète: en sortie on obtient position, vitesse, orientation, accélération et rotation.
- Haute précision à court terme: la précision du système est très bonne sur une courte durée, donc avant que les effets de dérive ne commencent à devenir trop forts. Il est évident qu'on suppose le système bien initialisé.
- Haute disponibilité: le système est entièrement autonome, c'est à dire qu'il ne dépend pas de dispositifs extérieurs. En outre, les centrales inertielles sont techniquement très fiables.
- Haut débit de données: Des centrales inertielles ont typiquement une fréquence d'échantillonnage de 100-150 Hz. Compte tenu qu'une voiture roulant à 70 Km/h parcourt une distance de 20 m par seconde, une telle fréquence est particulièrement intéressante pour les systèmes de conduite automatisée.

- Pas d'encombrement : les CI ont une taille raisonnablement réduite pour envisager tout type d'application, leur taille est de plus en plus petite et ne nécessite pas de contrainte de placement spéciale.

♦ **Les inconvénients**

- *Forte dérive: les effets du biais et de la marche aléatoire, bien que relativement* faible dans les accéléromètres et les gyroscopes, mènent à une très forte dérive après la double intégration, comme on va le voir dans les chapitres suivants.
- Pas d'information absolue: étant un système de navigation à l'estime, la position et la vitesse sont toujours calculées à partir des conditions initiales, qui doivent être fournies par un dispositif extérieur. Un INS ne peut pas s'initialiser seul. Un INS peut s'initialiser seul en ce qui concerne l'angle de cap absolu, quand ses gyroscopes sont suffisamment précis pour trouver le nord à partir de la rotation de la terre.
- Sensibilité à la gravité: bien qu'on ait pris des mesures pour compenser les effets de la gravité, il en résulte toutefois encore des erreurs, notamment en conséquence des erreurs d'orientation.

♦ **Erreurs de l'inertiel**

Le tableau I.2 indique à titre d'exemple les valeurs des erreurs por différents types de centrales.

l'erreur de différents types de centrales ainsi que sources d'erreurs des gyroscopes et des accéléromètres.

Degré		navigation	tactique	Automobile	consommateur
Erreur de position		1.9 km/h	1-38 km/h	≈ 2 km/min	≈ 3km/min
Gyro	Biais (deg/h)	0.005-0.01	1-10	180	360
	Facteur d'échelle (ppm)	5-50	200-500		
	Bruit (deg/h/hz)	0.002-0.005	0.2-0.5		
Acc	Biais (deg/h)	5-10	200-500	1200	2400
	Facteur d'échelle (ppm)	10-20	400-1000		
	Bruit (deg/h/hz)	5-10	200-400		

Tableau I.2 Erreurs gyroscopes et accéléromètres

I.6-Nécessité d'hybridation du système inertiel

On a vu que bien qu'ayant en début de fonctionnement une précision excellente, les systèmes à inertie ont des performances qui se dégradent en fonction de la durée écoulée. On est conduit ainsi à chercher un moyen « d'aider » les systèmes à inertie avec des instruments plus grossiers mais dont les erreurs restent bornées avec le temps. Le système global de navigation ainsi réalisé porte le nom de système hybride ou encore de système aidé. On peut concevoir un système hybride comme un système de navigation utilisant les mesures auxiliaires pour recaler certains paramètres de navigation et le système à inertie pour extrapoler entre ces mesures.

I.6.1 Approche classique de l'hybridation

Cette approche est ainsi appelée car elle utilise le langage classique des fonctions de transfert et la théorie classique de fonctions de transfert. L'idée est de chercher à amortir le système en déplaçant les pôles à gauche dans le plan complexe (figure I.11). On cherche à utiliser pour cela des signaux d'erreurs Δ auxiliaires filtrées par une fonction de transfert K et agissant en un ou plusieurs points bien choisis du système.

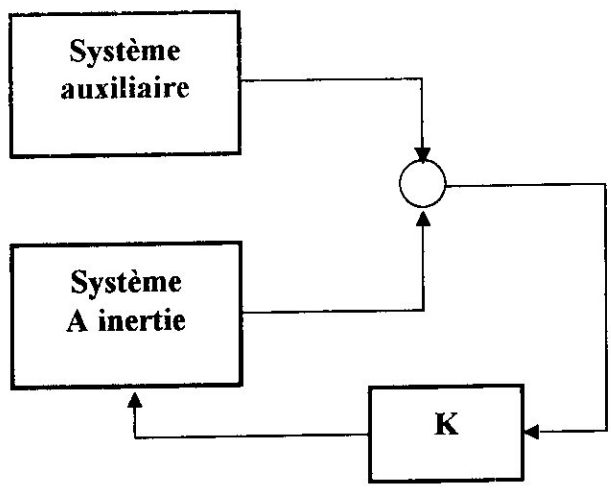
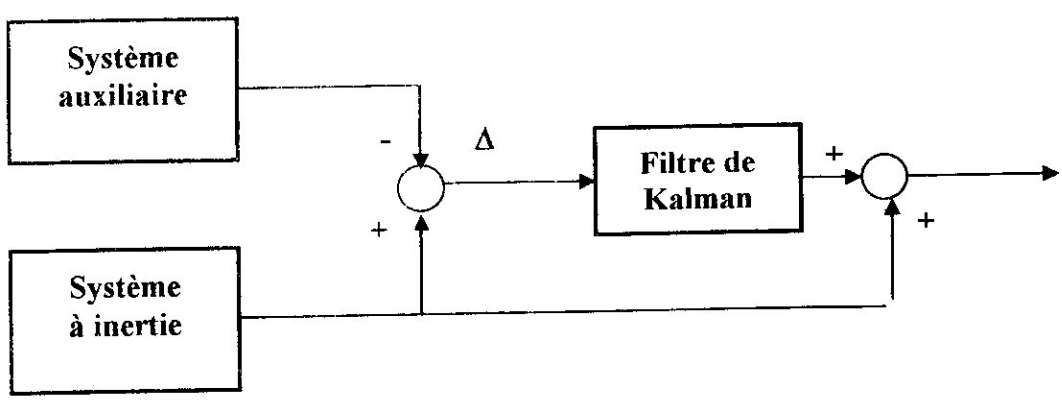


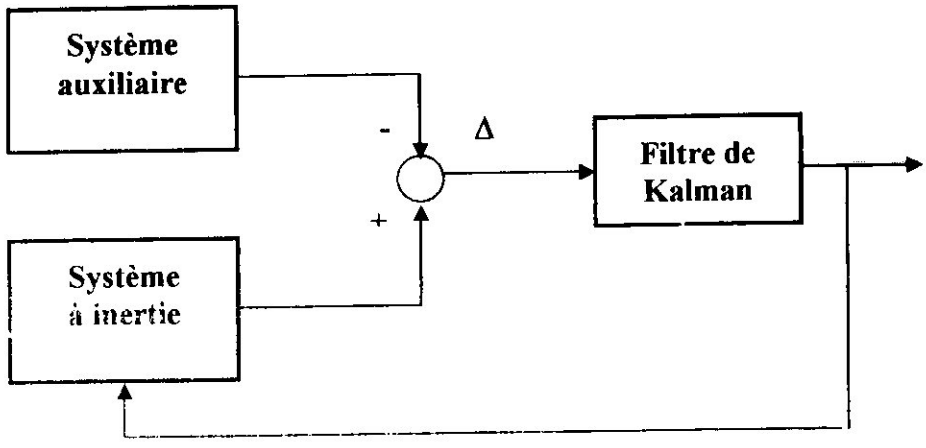
Fig. I.11 Recalage classique

I.6.2 Approche optimale

L'approche optimale (moderne) consiste à représenter les diverses erreurs statistiques intervenant dans le système à l'aide d'un modème markovien et à traite par un filtre de Kalman l'ensemble des signaux d'erreurs interprétés comme des observations sur les erreurs dynamisues du système à inertie. Les estimations obtenues ainsi servent à recaler les paramètres de navigation soit en boucle ouverte soit en boucle fermée (figure I.12)



a) boucle ouverte



a) boucle fermée

Fig. I.12 Système hybride optimal

Chapitre

La navigation inertielle

II- LA NAVIGATION INERTIELLE

II.1-Introduction

La navigation à inertie est basée sur les techniques qui ont été inventées et développées après la deuxième guerre mondiale. Ce chapitre a pour but de présenter les principes de la navigation inertielle, puis de donner le principe de fonctionnement des gyroscopes, des accéléromètres et les centrales inertielles et finalement poser les bases mathématiques à la détermination de l'orientation et de la position à partir des vitesses angulaires et accélérations mesurées.

II.2-Principe de la navigation inertielle

Une centrale inertielle est un dispositif muni de gyroscopes et d'accéléromètres. En ajoutant un calculateur qui permet à un véhicule de connaître sa position et sa vitesse dans l'espace, la centrale devient un système de navigation inertiel (INS)

Les systèmes de navigation inertiels dont le nom est dû au fait qu'ils utilisent les propriétés inertielles de la matière ou de la lumière déterminent une trajectoire par discrétisation (estime ou «dead reckoning»).

- Les lois de la mécanique classique, formulée par Newton, sont à la base du calcul de vitesse par intégration de l'accélération d'où la nécessité d'accéléromètres
- Le positionnement dans un système de référence nécessite la connaissance de l'orientation spatiale ou attitude des accélérations ou vitesses d'où la nécessité de gyroscopes.
- Le processus de calcul est le suivant :

de l'accélération γ $\Rightarrow$ calcul vitesse $\vec{V} = \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{\gamma} dt$ $\Rightarrow$ calcul position $\vec{P} = \vec{P}_0 + \int_0^t \vec{V} dt$

La figure II.1 montre le principe de la double intégration des accélérations dans le calcul des coordonnées en deux dimensions à partie des conditions initiales.

Ce type de navigation présente de nombreux avantages :

- Autonomie totale : Il n'est pas tributaire d'une infrastructure extérieure au mobile, si ce n'est la position initiale.
- Discrétion : Pas de rayonnement électromagnétique (indétectable).
- Insensibilité aux conditions ambiantes : telles que les phénomènes météorologiques, les contre mesures (pas de risque de brouillage).

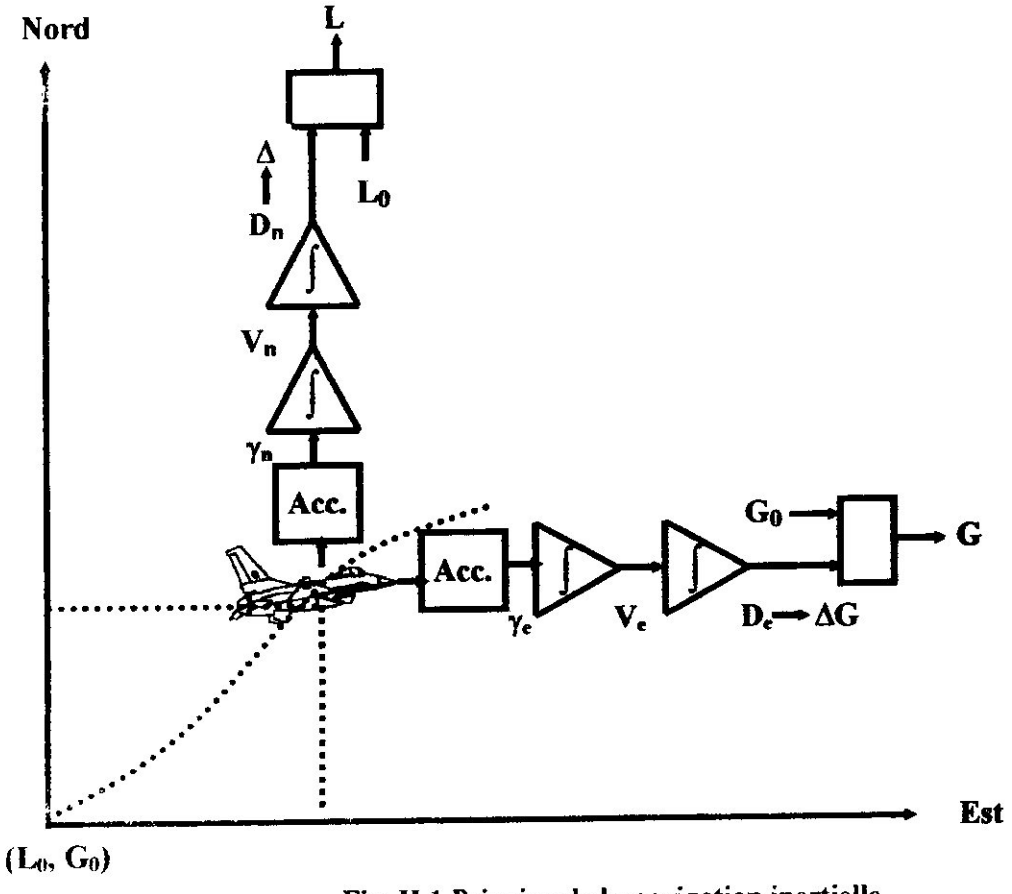


Fig. II.1 Principe de la navigation inertielle

II.3-Les différents types des centrales inertielles

Il y a 2 façons d'utiliser une plate-forme :

II.3.1 Centrales « Strapdown »

La figure II.2 montre le schèma-bloc d'une centrale dite « Strapdown » ou à composants liés. Elle se compose d'un bloc de capteurs lié de façon plus ou moins rigide à la structure du mobile. La partie gyroscopique fournit les composantes de la vitesse de rotation instantanée dans le repère de la centrale, et permet, par intégration d'une équation différentielle, de calculer son attitude dans un repère de référence lié à la configuration initiale. Les composantes de l'accélération sont alors estimées dans ce référentiel. L'accélération du mobile est ensuite séparée de celle de la pesanteur, puis intégrée deux fois pour obtenir la position dans le repère de référence.

II.3.2 Centrales inertielles à plate-forme stabilisée

Ce type de centrale es schématisé dans la figure II.3 Elle se compose d'un bloc capteur suspendu de manière à avoir une grande liberté angulaire vis-à-vis de la structure du mobile Ceci est généralement réalisé grâce à un dispositif mécanique asservi, à base de cardans. La plateforme subit d'abord, en statique, une phase d'alignement qui la place dans l'orientation absolue qu'elle devra conserver par la suite. L'alignement s'effectue de façon autonome par rapport à la verticale locale, en orientant la plate-forme grâce aux moteurs, de façon à annuler les mesures de la gravité dans le plan horizontal. On peut aussi procéder à un

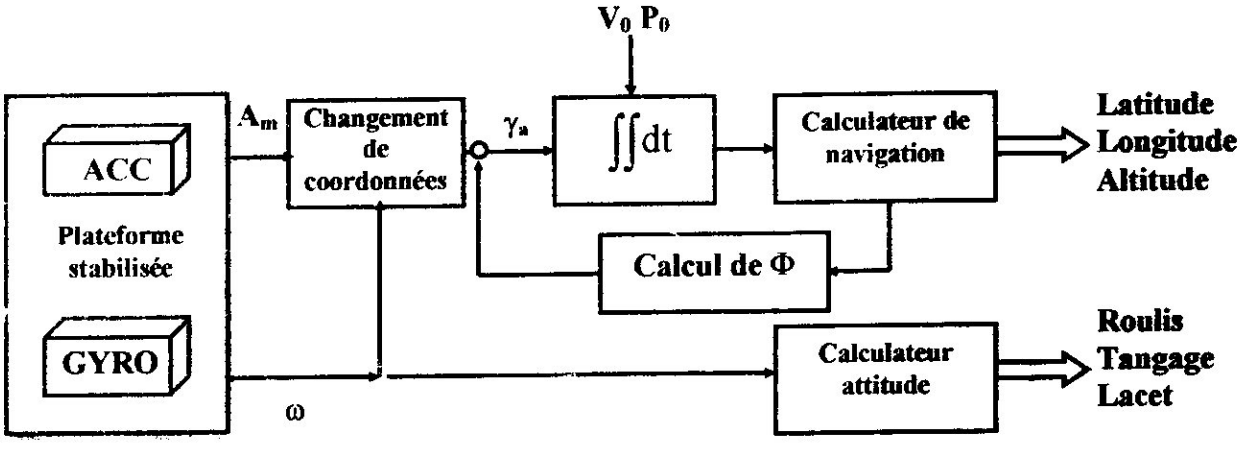


Fig. II.2 Principe d'une centrale inertielle Strapdown

alignement en azimut. Cette orientation initiale est ensuite conservée au cours du mouvement, en commandant les moteurs à partir des mesures des gyroscopes. L'attitude du mobile est déduite des consignes de position angulaire envoyées aux axes de la plate-forme. On obtient la position du mobile par double intégration des accélérations qui sont mesurées directement dans le référentiel lié à la plate-forme.

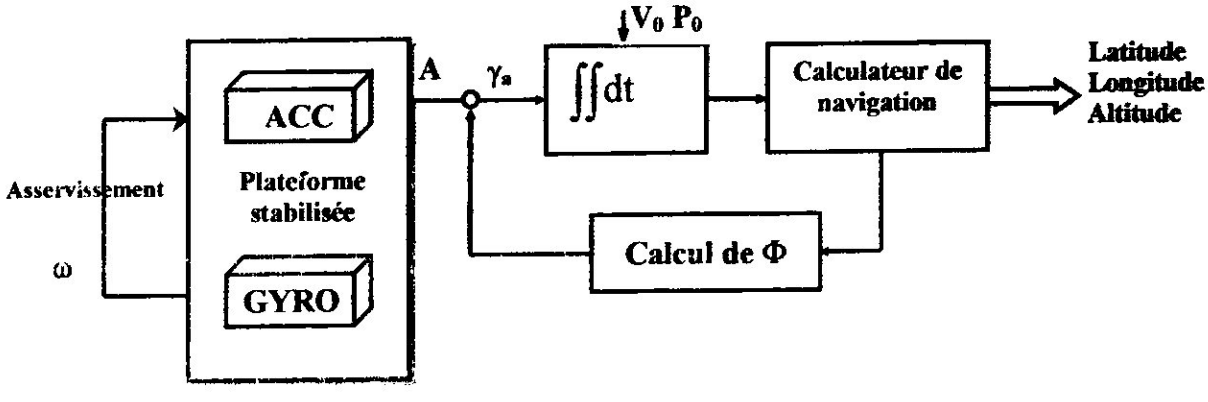


Fig. II.3 Principe d'une centrale inertielle stabilisée

La figure II.4 montre une plateforme stabilisée suspendue à la cardan.

Fig. II.4 Plateforme stabilisée

Les centrales Strapdown présentent les avantages suivants :

- les gyromètres donnent directement la vitesse dans un référentiel lié au mobile ;
- le montage des capteurs est simple, ce qui diminue le coût de fabrication, réduit le poids et l'encombrement et assure une plus grande fiabilité ;
- il est facile de multiplier les capteurs pour gérer les défaillances éventuelles. Cependant, les capteurs étant directement soumis aux vibrations du mobile, ils fournissent des mesures bruitées pour lesquelles un prétraitement s'impose.

Dans les centrales à plate-forme stabilisée, les capteurs ne sont soumis qu'à de faibles oscillations résiduelles de la plate-forme (de l'ordre de 10^{-5} rad). Il s'ensuit une meilleure précision des mesures Par contre, la complexité de la structure mécanique se traduit par un coût beaucoup plus élevé. C'est la raison pour laquelle cette solution n'est pas utilisée en dehors du domaine spatial ou militaire.

II.4-Les gyroscopes

Un gyroscope est un appareil capable de fournir une direction physique de référence et corrélativement, une information de rotation angulaire, sous forme d'un écart angulaire, ou d'un angle total (whole angle en anglais) compris entre 0° et 360°, vis-à-vis d'un référentiel absolu ou « inertiel ».

II.4.1 Gyroscopes de type mécanique

Un gyroscope de type mécanique est principalement constitué d'une toupie tournant à très grande vitesse (figure II.15). Il est capable de fournir une information de vitesse angulaire, vis-à-vis d'un référentiel absolu (c'est-à-dire fixe par rapport aux étoiles).

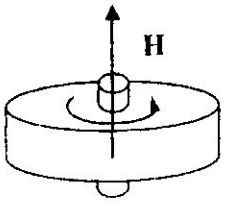


Fig. II.5 Gyroscope mécanique

- **Modes de suspension des gyroscopes**

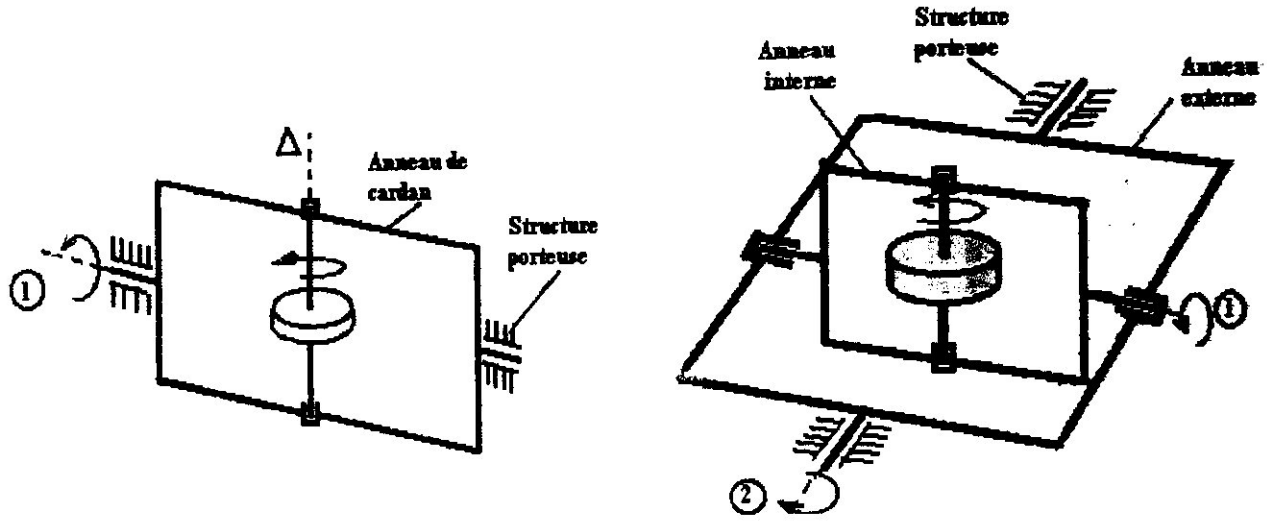
Les toupies des gyroscopes sont généralement montées dans des systèmes d'anneaux de cardan qui les isolent des mouvements de la structure porteuse. Deux configurations sont utilisées :

- Suspension à 1 degré de liberté

La toupie est supportée par un seul anneau de cardan : possibilité de rotation autour d'un seul axe (axe (1)) d'où un degré de liberté. Un tel montage (figure II.6) ne matérialise pas une direction de référence.

- Suspension à 2 degrés de liberté

La toupie est supportée par deux anneaux de cardan : possibilité de rotation autour de deux axes d'où 2 degrés de liberté. Dans cette configuration (figure II.6), l'axe de la toupie peut prendre n'importe quelle direction.



Suspension à 1 degré de liberté

Suspension à 2 degrés de liberté

Fig. II.6 Modes de suspension des gyroscopes

Les gyroscopes mécaniques sont caractérisés par le moment cinétique H qui est égal au produit du moment cinétique de la toupie par la vitesse de rotation. Ce moment à la propriété importante de conserver une fixité par rapport à l'espace inertiel lorsque le gyroscope n'est soumis à aucun couple

Un gyroscope comporte différents éléments :

- Un moteur synchrone qui entraîne la toupie,
- Des détecteurs d'angle chargés de mesurer les variations angulaires de la toupie autour des axes
- Des moteurs-couples chargés de créer des précessions commandées,
- Des organes de surveillance de vitesse et de température

♦ **Gyroscope à deux degrés de liberté**

Un gyroscope à deux axes (figure II.7) est un gyroscope qui peut pivoter selon les axe XX' et ZZ'. On peut le considérer comme étant équivalent à deux gyromètres superposés, un dont l'entrée est XX', l'autre dont l'entée est ZZ'.

Le gyroscope à deux degrés de liberté a les propriétés suivantes :

- Si on lui applique un couple extérieur, par inertie, il va induire la vitesse de précession nécessaire pour engendrer un couple gyroscopique opposé au couple extérieur.
- Réciproquement, si un gyroscope, à de deux degrés de liberté n'est soumis à aucun couple extérieur, il n'y a aucune précession induite et il indique une direction fixe dans l'espace absolu.

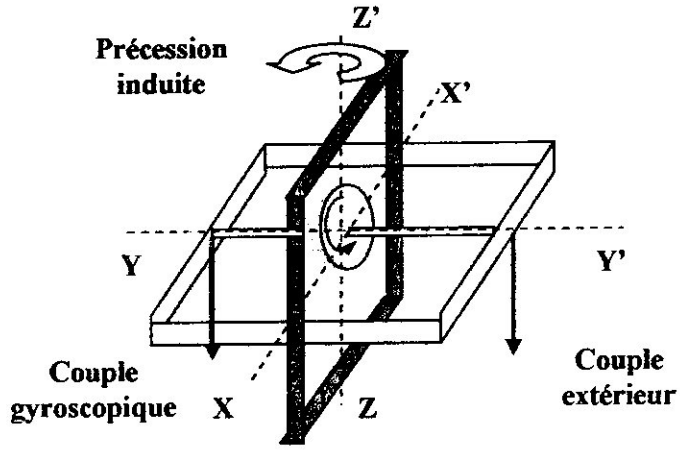


Fig. II.7 Gyroscope à deux degrés de liberté

Les gyroscopes à deux degrés de liberté ont de nombreuses applications : instruments de navigation, stabilisation des plateformes inertielles,...

- **Gyroscope à un degré de liberté**

C'est un gyroscope à un degré de liberté représenté schématiquement dans la figure II.8 avec l'axe XX' fixe et l'axe ZZ' libre (degré de liberté).

Le montage a la propriété suivante : si l'on soumet le gyromètre à une perturbation (rotation), il apparaît un moment d'inertie tel que le vecteur moment cinétique H tourne vers la perturbation par le chemin le plus court.

Ainsi, en mesurant la vitesse de rotation induite du gyromètre selon XX' grâce à des détecteurs d'angles, on mesure la vitesse de rotation imposée autour de l'axe ZZ'. L'axe ZZ' est appelé axe sensible du gyromètre, l'axe XX', l'axe de sortie.

Un gyromètre permet donc de mesurer des vitesses de rotation.

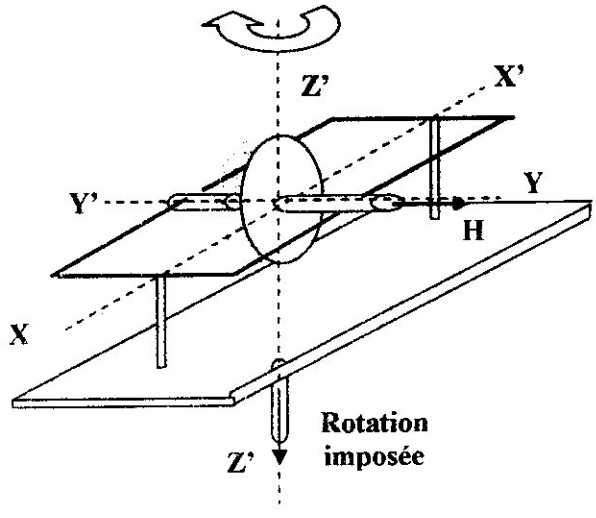


Fig. II.8 Gyroscope à un degré de liberté

II.5-Performances des gyroscopes mécaniques

♦ Dérive des gyroscopes

Lorsque la rotation d'un gyroscope est due à un phénomène aléatoire ou non maîtrisé, on l'appelle dérive gyroscopique. La dérive mesurée en degré/heure caractérise la qualité d'un gyroscope. Elle est donnée par :

Dérive D = couples parasites / Moment cinétique H

Cette dérive est d'autant plus faible que H est grand : on peut augmenter H simplement en augmentant la vitesse de rotation de la toupie. Cette dérive peut être due à un grand nombre de phénomènes.

Les causes des couples parasites ΔC peuvent être classées en 2 catégories importantes :

- les couples fixes : qui ne dépendent pas de l'accélération (par exemple les fils d'amenée du courant d'alimentation du moteur du gyro).
- Les couples de balourd : qui dépendent de l'accélération. Ils sont dus au déplacement du centre de gravité de l'appareil. Leurs origines peuvent être dues par exemple à une variation de la température du liquide de flottaison (variation de la densité), à des vibrations (aniso-élasticité).

♦ Les types de dérive

- Le facteur d'échelle : est le rapport entre le signal électrique émis suite à une rotation du gyroscope et la vitesse de rotation. Ce facteur d'échelle est plus ou moins linéaire en fonction du signal électrique. Il peut être aussi asymétrique par rapport à la rotation nulle. Il faut encore mentionner que le facteur d'échelle peut varier d'un jour à l'autre et qu'il dépend de la température.
- Le biais : est la valeur indiquée par le gyroscope pour une vitesse de rotation nulle. Ce biais varie d'un jour à l'autre et dépend de la température. Il est souvent affecté d'une variation temporelle appelée dérive. La figure II.9 représente les deux types d'erreurs facteur d'échelle et les biais.

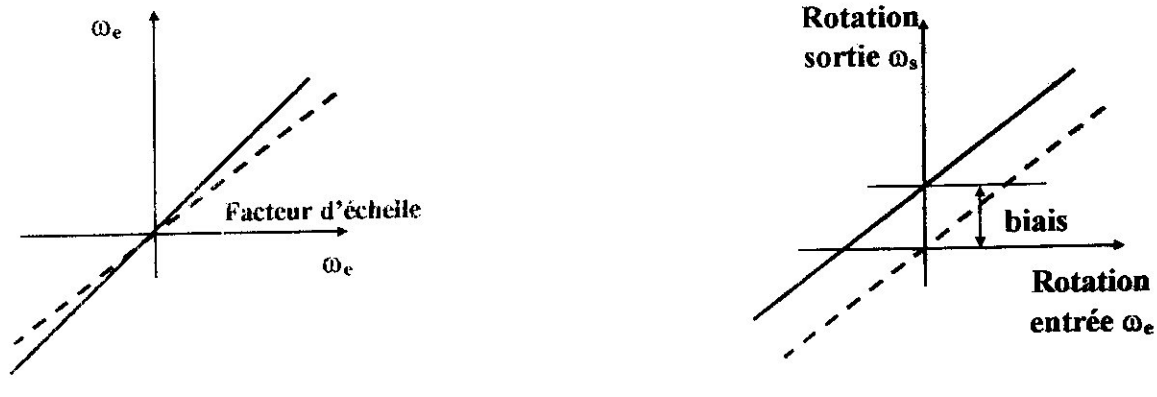


Fig. II.9 Représentation du facteur d'échelle et du biais

Il existe deux méthodes principales de la mesure de la dérive des gyroscopes mécaniques :

- Les méthodes basées sur des mesures continues de la dérive : l'étude harmonique des enregistrements permet d'estimer les causes d'erreur des couples perturbateurs.

– Les méthodes basées sur des mesures « discrètes » successives : le gyros est placé dans des positions différentes. On dispose ainsi après expérimentation, d'une suite de mesures D_k qui permettent d'estimer les couples perturbateurs.

II.1.1.1. Gyromètres optiques

L'effet Sagnac est à la base des gyromètres optiques.

- **L'effet Sagnac**

Sous certaines conditions, le déphasage à la sortie d'un interféromètre (appareil de mesure fondé sur l'interférence d'ondes) peut être sensible à la rotation du repère lié à l'appareil figure II.10. Cet effet est connu sous le nom d'effet Sagnac (1913). En utilisant des ondes lumineuses dans l'interféromètre, l'effet Saganc optique conduit à la réalisation de gyromètres optiques qui constituent des capteurs de haute sensibilité.

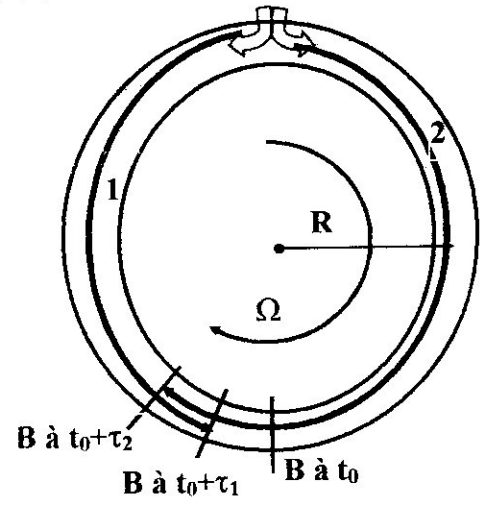


Fig. II.10 Interféromètre en rotation

Considérons un interféromètre optique circulaire de rayon R comme. L'onde lumineuse peut parcourir la boucle dans les deux sens. Cet appareil est posé sur un plateau tournant à la vitesse angulaire Ω par rapport à l'axe (Oz). {R} est un repère non inertiel lié au plateau et $\{R_0\}$ est un repère d'inertie.

On injecte l'onde lumineuse en un point A le long des deux chemins (1) et (2). Après avoir parcouru la moitié de la boucle, les deux ondes sont recombinées en B et interfèrent ensemble.

L'effet SAGNAC est l'apparition, à la sortie de cet interféromètre, d'un déphasage induit par la rotation de l'ensemble du dispositif.

Ce déphasage entre les deux ondes au point B est : $\Delta\varphi = \omega.\Delta\tau = \dfrac{2A\omega}{c^2}\Omega$

où ω est la pulsation du signal, c la vitesse de la lumière et Ω la vitesse de rotation du plateau.

Il existe deux types d'application de l'effet Sagnac

- **Les gyromètres à fibre optique**

Les gyromètres à fibre optique (figure II.11) sont fondés exactement sur l'effet Sagnac La solution choisie pour améliorer la sensibilité du gyromètre est d'augmenter son aire géométrique.

Ceci est réalisé grâce à une fibre optique que l'on enroule en N spires. L'aire totale d'un tel gyromètre est alors :

$A = N\pi R^2 = LR/2$

Dans la plupart des gyromètres optiques le détecteur est en réalité placé en A, tout comme la source. Dans ce cas chaque onde parcourt l'ensemble de la boucle, d'où : $\Delta\varphi == \frac{4A\omega}{c^2}\Omega = \frac{2LR\omega}{c^2}\Omega$

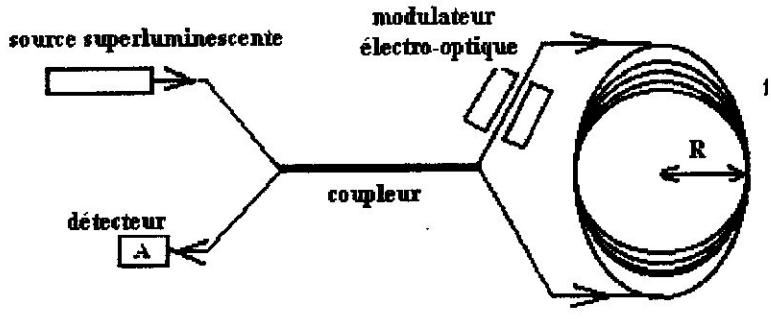


Fig. II.11 Gyromètre à fibre optique

II.1.1.2. Les gyros-lasers

Le gyro-laser (figure II.12) est une autre solution pour augmenter la sensibilité de l'appareil à la rotation. Il se compose d'un milieu amplificateur actif placé à l'intérieur d'une cavité en anneau. Les ondes laser peuvent circuler dans les deux sens à l'intérieur de la cavité et on récupère le battement entre les deux ondes sur un des miroirs de la cavité. Si la cavité ne tourne pas, les deux ondes ont même fréquence et le battement est à fréquence nulle. Si la cavité tourne, les longueurs de cavité vues par chaque onde diffèrent et les fréquences des deux ondes ne sont alors plus égale. On obtient un battement à une fréquence donnée par la relation :

$$\Delta f = \frac{4A}{L\lambda}\Omega$$

où A l'aire du dispositif, L, la longueur du trajet des ondes λ la longueur d'onde du signal et Ω, la vitesse de rotation du plateau.

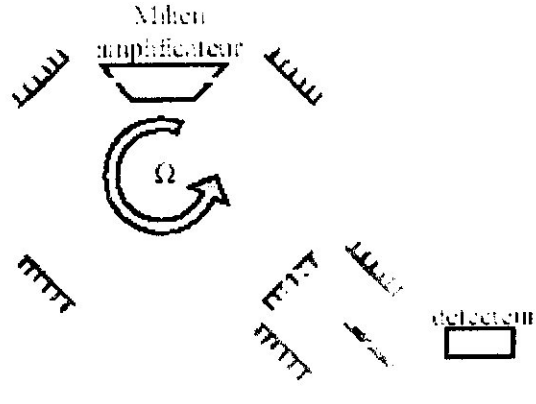


Fig. II.12 Gyro-laser

II.5.1 Performances de gyromètres optiques

Par rapport aux gyromètres mécaniques, les gyromètres laser ont :

- Une meilleure stabilité du facteur d'échelle.
- Une meilleure dynamique (rapport de la plus grande à la plus petite vitesse angulaire mesurée).
- Les accélérations du boîtier n'ont aucune influence sur le phénomène optique, très grande fiabilité (absence de pièces en mouvement). Performances limitées à 10^{-3} °/h.

Le tableau II.1 suivant quelques caractéristiques d'un certain nombre de gyroscopes optiques.

Caractéristique	RLG	FOG	VSG(Céramique)	VSG(Silicon)
g-indépendant biais °/h	0.001-10	0.5-50	360-1800	>2000
g-dépendant biais °/h/g	0	<1	36-180	36-180
Non-linearité du facteur d'échelle %	0.2-0.3	0.05-0.5	5-100	5-100

Tableau II.1 Erreurs des gyrscopes optiques

II.6-Les accéléromètres

II.6.1 Définition

Un appareil permettant de mesurer une ou plusieurs composantes de l'accélération non gravitationnelle $\vec{A} = \vec{\gamma}_a - \vec{\Phi}\vec{A}$ s'appelle accéléromètre. De nombreuses techniques sont utilisées pour mesurer cette accélération : pendulaires, gyroscopiques, à quartz...

Le figure II13 montre le principe d'un accéléromètre simple à ressort. Lors de l'accélération du véhicule, la masse tend à se déplacer dans le sens opposé du véhicule. La lecture ne donne pas la valeur de l'accélération absolue γ mais la différence $\gamma - \Phi$ appelée force spécifique.

Φ représente l'accélération gravitationnelle qui malheureusement dépend de l'endroit de la mesure et peut changer considérablement, surtout dans les applications aéronautiques. Un modèle de gravitation approprié doit donc être développé.

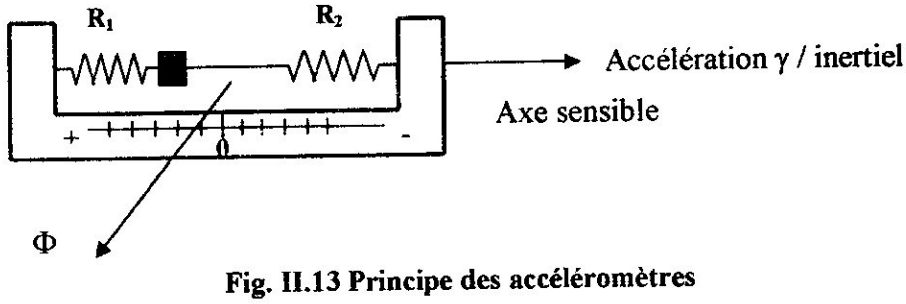


Fig. II.13 Principe des accéléromètres

II.6.2 Les différents types d'accéléromètres

Il existe principalement trois grandes catégories d'accéléromètres.

- **Accéléromètre à quartz**

Une accélération suivant l'axe sensible (figure II.14), va comprimer un des cristaux et dilater l'autre, ce qui modifie leurs propriétés électriques et mécanique (fréquence, résistivité etc.), ces modifications sont exploitées pour mesurer la force spécifique de manière différentielle.

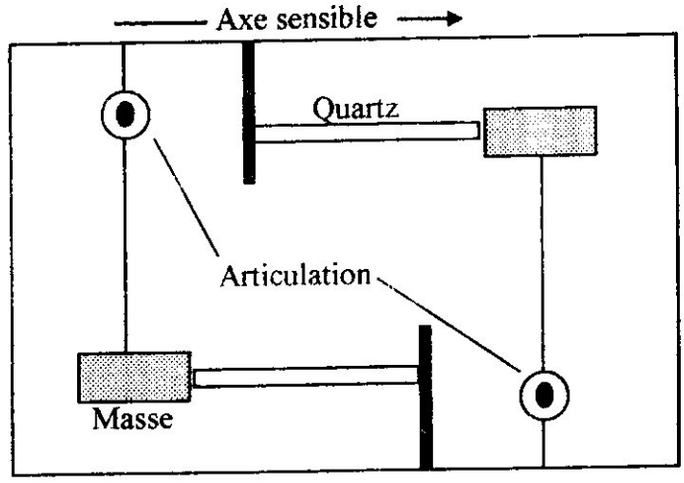


Fig. II.14 Accéléromètres à quartz

- **Accéléromètre à cordes vibrantes**

Le principe est le même qu'en figure II.15: Une accélération suivant l'axe sensible modifie la tension de chaque corde, l'une augmentant, l'autre diminuant de la même quantité. Il en résulte une variation des fréquences de chaque corde, mesurées par des capteurs de fréquence (figure II.15).

On montre que la différence des tensions, proportionnelle à la force spécifique suivant l'axe sensible est aussi proportionnelle à la différence des fréquences.

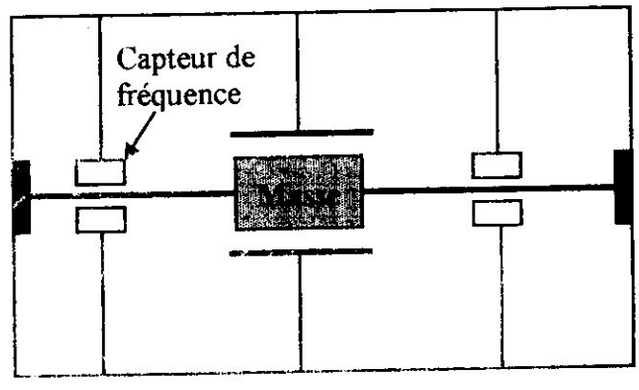


Fig. II.15 Accéléromètre à cordes vibrantes

- **Accéléromètre pendulaire**

On peut résumer les équations de mécanisation par:

1. Calcul de l'orientation en tenant en compte de la vitesse de rotation de la terre.
2. En tenant compte de l'orientation, transformation de la force spécifique dans le repère n.
3. La soustraction (la compensation) de la gravitation de la force spécifique mesurée.
4. Compensation de la force centrifuge
5. Compensation de la force de Coriolis due au mouvement du véhicule sur la surface de la terre
6. Réalisation de deux intégrations -incorporant des conditions initiales - pour obtenir la position et la vitesse

III-HYBRIDATION

III.1-Introduction

Le chapitre précédent a montré les avantages et les inconvénients de chaque système de navigation. En pratique, l'imperfection des capteurs est une forte contrainte pour leur usage. Ceci est particulièrement vrai pour les applications dans le secteur automobile où les coûts du système représentent un enjeu important et primordial.

Dans ce chapitre, nous allons nous focaliser sur l'aspect "localisation précise et permanente" de l'aéronef. Pour cela, il est nécessaire de se pencher sur l'intégration et le traitement de l'information issue de systèmes hétérogènes de navigation, GPS et système de navigation inertielle (INS). La raison de cette intégration est d'exploiter les avantages de chacun des systèmes utilisés. Ils éliminent mutuellement leurs défauts. C'est ce qu'on appelle un système hybride. L'intégration utilise un filtrage numérique pour procéder à une compensation des erreurs en position, vitesse, et en attitude issues de chaque capteur.

Donc dans ce chapitre les équations dynamiques d'erreur du système de navigation inertielle seront obtenues en se basant sur la linéarisation par différenciation (annexe C). Le filtre d'intégration (filtre de Kalman étendu « complémentaire ») sera alors employé en utilisant les équations dynamiques de l'erreur et les observations externes fournies par le GPS.

Les différentes approches d'hybridation (les méthodes d'asservissement) sont exposées. Plusieurs considérations de mise en application du filtre de Kalman sont également discutées en détail : la résolution de la différence des temps de mesure entre le GPS et la CI par la synchronisation en temps réel, le réglage des paramètres du filtre.

III.2-Les différentes approches d'hybridation

Pour les systèmes de navigation inertielle aidée par un capteur extérieur, le composant inertiel peut être une unité inertielle (CI) qui fournit seulement les données brutes (l'accélération et la vitesse angulaire), ou un système de navigation inertiel (INS) fournissant la position, la vitesse et les informations d'attitude. La source d'aide (GPS, etc.) peut être considérée comme un capteur fournissant des informations brutes de capteur (par exemple des pseudo distances), ou comme un système de navigation fournissant la position, la vitesse et/ou les informations d'attitude.

Plusieurs approches d'intégration peuvent être mentionnées :

III.2.1 Mode non couplé

Le mode non couplé est représenté dans la schéma de,la figure.III.1. Dans cette configuration, le GPS et l'INS produisent indépendamment les solutions de navigation sans l'influence de l'une sur l'autre. Les $(PV)_{GPS}$ sont la position et la vitesse du GPS, tandis que $(PVA)_{INS}$ sont la position, vitesse et l'attitude) de l'INS, $(PVA)_{est}$ sont les paramètres estimés des positions, des vitesses et des attitudes. La solution intégrée de navigation est mécanisée par un processus externe d'intégration. Il peut être simplement un « interrupteur », ou alors il peut être aussi complexe qu'un filtre de Kalman.

L'avantage de la méthode d'intégration non-couplée est qu'elle est méthode la plus facile, la plus rapide et la moins chère pour intégrer le GPS et l'INS.

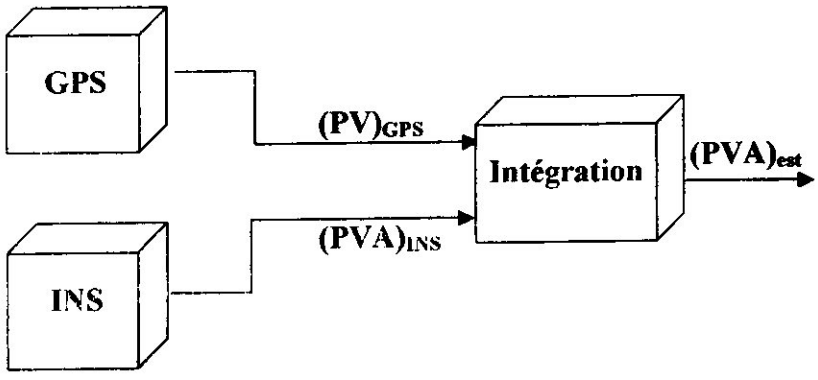


Fig. III.1 Mode non-couplé

III.2.2 Mode Faiblement « lâchement » Couplé

Dans un système faiblement couplé, le récepteur GPS a son propre filtre de Kalman qui traite la pseudo-distance ou les mesures de Doppler qui sont utilisées pour calculer des positions et des vitesses. Les positions et les vitesses du GPS sont ensuite combinées avec les positions et vitesses de l'INS pour former les erreurs résiduelles qui sont envoyées au filtre de Kalman de navigation. Ce filtre corrige l'INS par asservissement (retour d'état). Ainsi, les effets des biais, des dérives, et des erreurs de non alignement, sont sensiblement diminués.

L'observation qui est fournie au filtre est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle, c'est à dire, la différence entre la solution de navigation inertielle et la solution de navigation fournie par la source d'aide (le GPS). Puisque l'observation est l'erreur observée de la solution de navigation inertielle et puisque le filtre estime les erreurs dans la solution de navigation inertielle, alors le modèle de processus doit être sous forme de modèle d'erreur des équations standard de navigation inertielle. Ainsi les équations de navigation inertielle sont linéarisées pour former les équations d'erreur (annexe C). Puisque les équations sont linéarisées, la mise en application du filtre prend une forme linéaire. Le filtre s'appelle dans ce cas un filtre complémentaire.

Selon l'application, un arrangement faiblement couplé peut être mis en œuvre dans différentes configurations. On trouve la configuration en boucle ouverte et en boucle fermée.

- Dans le cas de la boucle ouverte, toutes les mesures GPS (position et vitesse préfiltrées) et INS (position et vitesse) sont traitées dans le filtre de Kalman de navigation. Car il n'y a pas un vrai asservissement (il n'y a aucun), toutes les mesures sont utilisées sans précorrection. L'erreur est soustraite à la sortie. La mise en application de la boucle ouverte est directe et facile à réaliser. Le problème néanmoins est que les états de la CI divergent. Cependant, il est seulement approprié à l'intégration avec un capteur inertiel de bonne précision et aux applications à court terme. Le schéma de figure III.2 montre une configuration d'intégration faiblement couplée sans asservissement (une boucle ouverte).

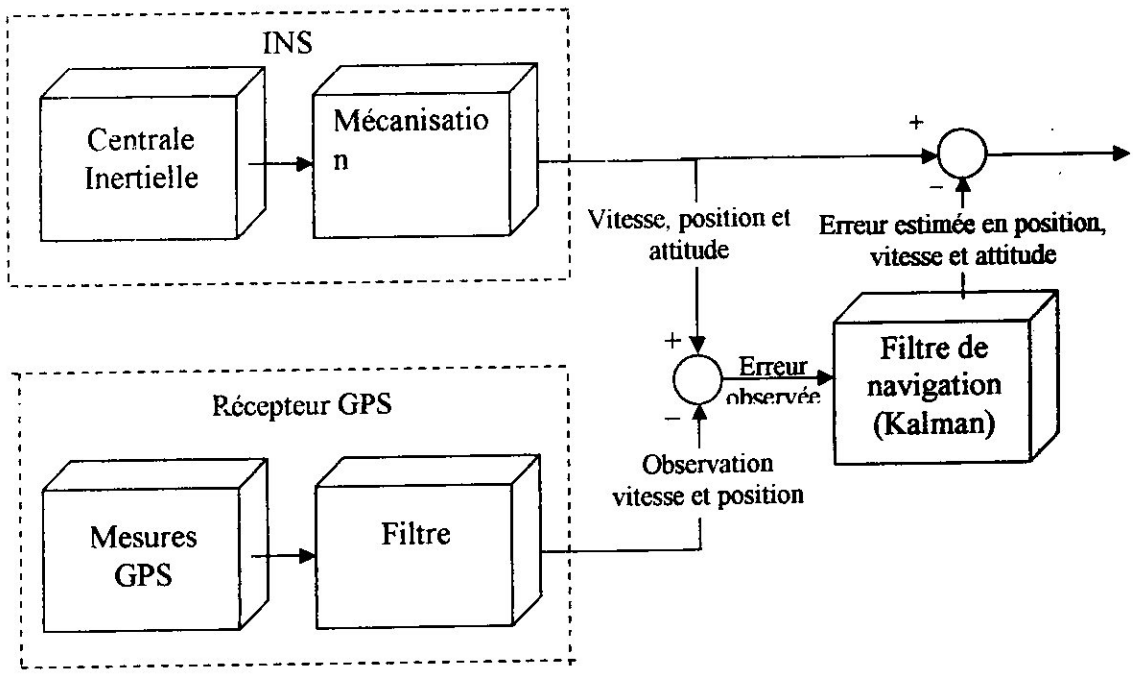


Fig. III.2 Approche d'intégration faiblement couplée (boucle ouverte)

• Pour une configuration en boucle fermée, l'asservissement est appliqué à partir du filtre d'intégration aux capteurs inertiels et/ou aux équations de mécanisation. Les résultats de l'étape précédente sont utilisés pour réduire au minimum l'erreur. Une configuration en boucle fermée est particulièrement utile quand les précisions des capteurs sont faibles. Puisque les capteurs inertiels de précisions moyenne et basse ont habituellement un changement rapide des propriétés d'erreur, l'estimation et la compensation en temps réel ou proches du temps réel de ces erreurs est très importante pour améliorer la précision des solutions de navigation de l'INS. La figure III.3 montre une configuration d'intégration faiblement couplée avec asservissement (une boucle fermée).

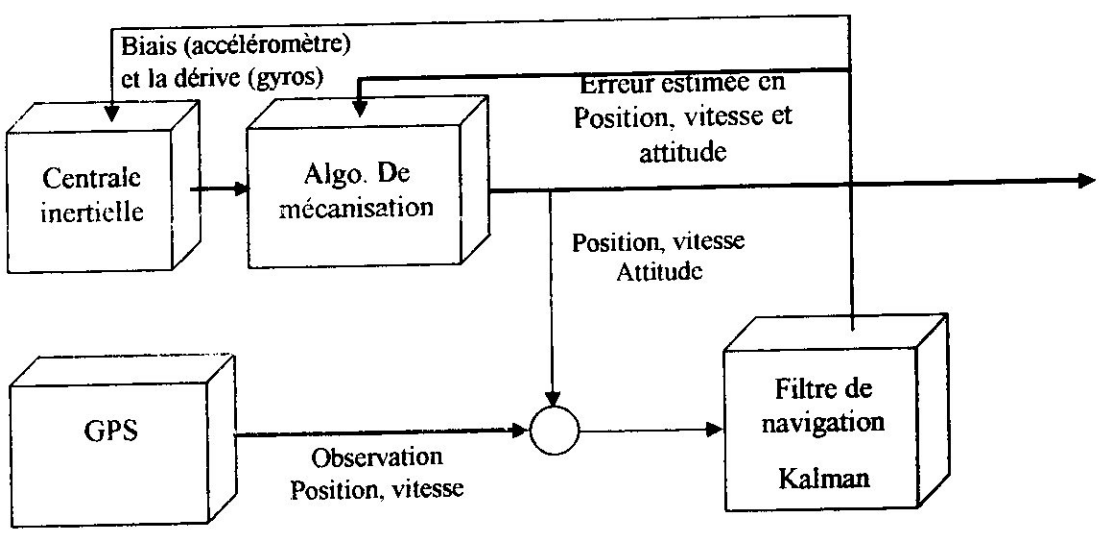


Fig. III.3 Une approche d'intégration faiblement couplée (boucle fermée)

III.2.3 Système fortement couplé

Dans ce système (figure.III.4), les données de pseudodistances et pseudovitesses des satellites ont été utilisées pour aider le filtre de navigation, ainsi que l'accélération et la vitesse angulaire de la CI. La fusion se fait directement au niveau des données brutes. Il y a un asservissement fourni par système externe d'aide (le GPS). On obtient une configuration plus serrée qui améliore l'intégrité du système.

L'inconvenient principal de cette approche est qu'elle exige que les concepteurs du système aient accès au matériel et aux variables utilisées dans le récepteur GPS pour la mettre en application. Par conséquent cette approche n'est pas à la disposition du grand public.

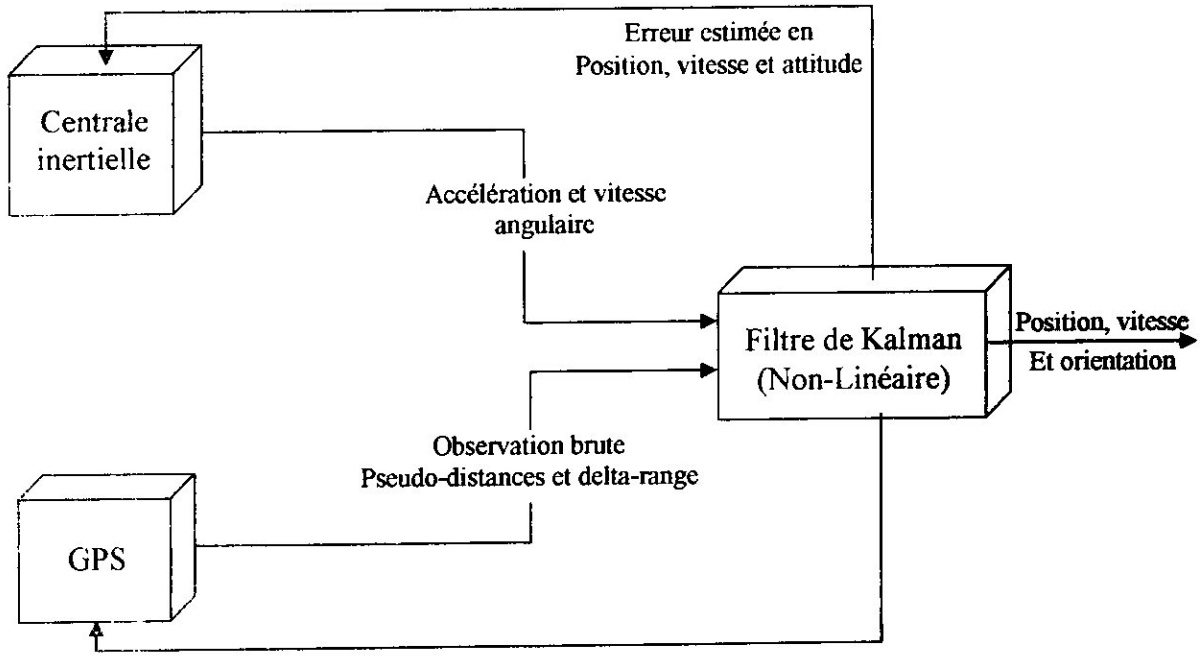


Fig. III.4 Système fortement couplé

Dans notre travail, nous avons choisi la configuration faiblement couplée avec asservissement. Les mesures de chacun des systèmes sont traitées indépendamment, puis l'intégration s'effectue sur la position et la vitesse obtenues à partir des mesures inertielles et GPS.

III.3-Le filtre de Kalman

Le filtrage de Kalman fait appel à la représentation d'état des systèmes. Il découle de certaines approches menées dans le contexte des ordinateurs analogiques (filtre de Wiener) pour la résolution de problèmes d'estimation de processus stochastiques en régime établi.

L'avènement de l'ordinateur digital a permis une simplification et une extension de l'approche du filtre de Kalman. La version classique du filtre de Kalman est optimale pour les problèmes linéaires, avec une approche temporelle discrète ou continue. Nous présenterons la version étendue du filtre, qui traite des problèmes non linéaires, sur un exemple de la navigation inertielle.

III.3.1 Le principe

Le filtre de Kalman est un algorithme récursif approprié pour :

- L'intégration de mesures de types différents, à des fréquences différentes,
- La prise en compte de la cinématique de l'objet étudié, grâce à la modélisation du mouvement du véhicule et des incertitudes sur ce mouvement.

Le filtrage de manière générale, correspond à la résolution de problèmes paramétrés par le temps, pour lesquels l'état du système à la date t est la conséquence à la fois d'observations et de l'état du système aux instants précédents. Il utilise la prédiction, qui est l'estimation d'une inconnue à partir des observations passées. Il se distingue du lissage, qui estime la meilleure solution par l'utilisation des observations passées et futures

Soit t_n l'instant pour lequel on veut estimer les paramètres et t_m l'instant où les mesures sont effectuées, on a :

- prédiction si $t_m < t_n$
- filtrage si $t_m = t_n$
- lissage si $t_m > t_n$

La figure III.5 illustre ces techniques.

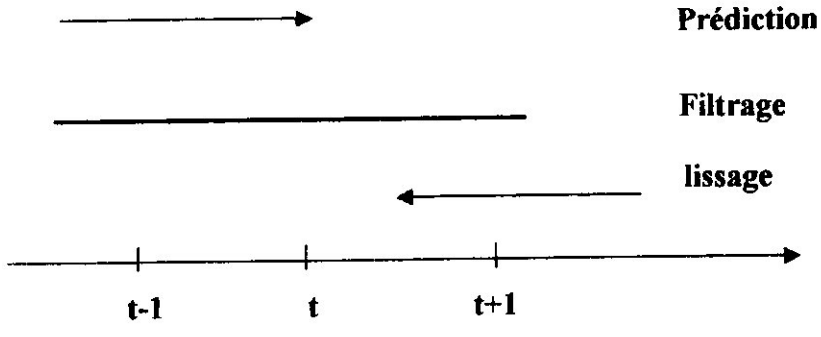


Fig. III.5 Techniques de prédiction et de filtrage

Un exemple simple est celui d'un véhicule en mouvement. Si l'on connaît, à un instant t, sa position, sa vitesse et son accélération, il est possible de prédire sa position, sa vitesse, voire son accélération à l'instant t+1. on est dans le principe de la navigation à l'estime. La compensation prend en compte non seulement les mesures à l'instant t+1 (correction) mais aussi l'évolution dans le temps des paramètres (prédiction), selon le schéma suivant de la figure III. 6.

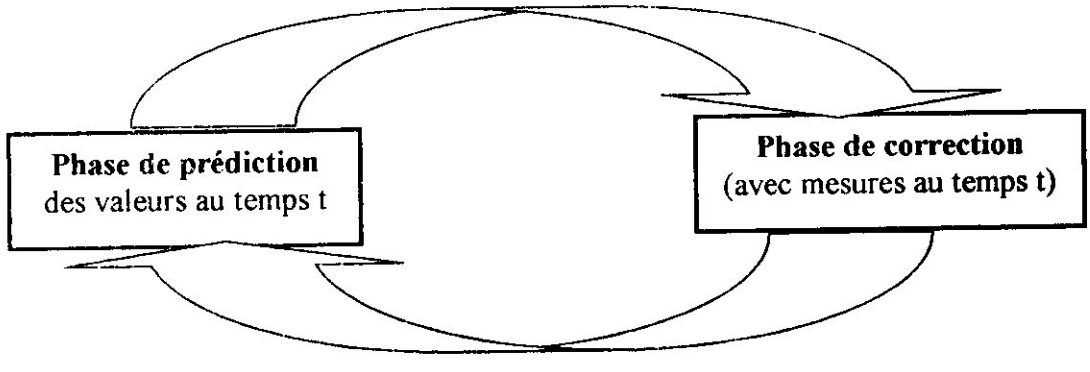


Fig. III.6 Principe du filtre de Kalman

III.3.2 Formulation mathématique du filtre de Kalman linéaire

Une idée centrale dans le filtre de Kalman, est de modéliser le système étudié comme un système dynamique linéaire affecté par des bruits, les capteurs du système sont également soumis à des bruits. En disposant d'une information statistique sur la nature du bruit (ses premiers ordres statistiques), il est possible de construire une estimation optimale de l'état du système bien que les capteurs soient inexacts. C'est l'idée fondamentale de la théorie de l'estimation. Sans connaître les erreurs elles-mêmes, la connaissance de leurs statistiques permet la construction des estimateurs utiles en se basant seulement sur cette information. La méthode de Kalman est une procédure d'estimation dynamique des paramètres qui sont fonctions du temps.

Le système d'équations utilisé dans le filtre de Kalman repose sur la définition de deux modèles que sont le processus et la mesure (les modèles sont la représentation d'états d'un système dynamique). Il est utilisé pour estimer l'état x d'un système dynamique observé. Les deux modèles sont les suivants :

- **Modèle d'évolution**

C'est le modèle qui décrit l'évolution, il est défini par l'équation d'état linéaire suivante :

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

ou la forme discrète :

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k u_k + w_k$$

où

x_k,(1xn) x_{k+1} sont les paramètres du système (vecteur d'état) à l'instant k et k+1,

Φ_k (nxn) est la matrice dynamique du système *(la matrice de transition de k à k+1)*, c'est une matrice qui fait le lien entre les paramètres du système à deux étapes successives

u_k (mx1) est le vecteur de commande, *(vecteur d'entrée)*,

G_k (num) est la matrice de commande *(matrice d'entrée)* qui représente la distribution de l'entrée *(vecteur de commande)* dans le vecteur d'état. Elle fait le lien entre les valeurs optionnelles de contrôle et l'état du système.

w_k (1xn) est le vecteur bruit d'état.

- **Modèle de mesure**

Le modèle de mesure décrit l'information fournie par le ou les capteurs en une équation liant les paramètres de l'état de la mesure et du bruit. L'équation de mesure ou d'observation est donnée par :

$$z_k = H_k . x_k + \nu_k$$

où :

z_k (nx1) est la mesure à l'instant k

H_k (pxn) est la matrice d'observation qui fait le lien entre les paramètres du système et les mesures

v_k (nx1) est le bruit de mesure

Lors de l'utilisation de ce filtre, l'hypothèse est faite que les bruits d'état w et de mesure v sont des variables aléatoires dont les distributions gaussiennes sont connues a priori (doivent être estimées à l'avance), indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système. Cette indépendance des bruits permet de simplifier le formalisme des équations d'évolution et d'observation, donc :

$$P(w_k) \sim N(0,Q_k)$$

$$P(v_k) \sim N(0,R_k)$$

$$E\left[w_j v_i^T\right] = 0, \ \forall j,i$$

où, Q_k et R_k sont les matrices de covariances de processus et des mesures respectivement.

Il y a deux étapes principales pour l'estimation des ces paramètres : l'estimation a priori (la prédiction) et l'estimation a posteriori (la correction). Les paramètres du système sont estimés premièrement à partir des valeurs de l'étape précédente et ensuite ils sont corrigés par des mesures dans l'étape de correction. Les deux étapes tournent d'une façon récursive après une étape d'initialisation

Les étapes constituant le filtrage de Kalman dans un cadre linéaire sont :

- **Initialisation du filtre**

L'état initial est une variable gaussienne, indépendante des bruits du système, de moyenne et de matrice de covariances connues.

$$\hat{x}_{0/0} = E\left(x_0\right)$$

$$P_{0/0} = E\left(\left(x_0 - \hat{x}_{0/0}\right)\left(x_0 - \hat{x}_{0/0}\right)^T\right) = var\left[x_0\right]$$

- **Prédiction temporelle**

Cette étape permet la prédiction de l'état et de sa précision à l'instant k+1 à partir de l'état à l'instant k et du modèle d'évolution du système. On obtient donc l'état $\hat{x}_{k+1/K}$ avec sa matrice de covariances associée $P_{k+1/k}$:

$$\hat{x}_{k+1/k} = \Phi_k \hat{x}_{k/k} + Gu_k$$
$$P_{k+1/k} = \Phi_k P_{k/k} \Phi_{kk}^T + Q_k$$
$$z_{k+1} = H_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}$$

- **Correction et mise à jour des mesures (Innovation)**

Une fois la mesure z_{k+1} disponible, l'état prédit peut alors être corrigé par l'innovation $\hat{S}_{k+1}$ (et sa covariance associée l'équation III.1 pondérée par le gain du filtre K_{k+1}. On en déduit alors l'estimation de l'état $\hat{x}_{k+1/k+1}$ avec sa matrice de covariance $P_{k+1/k+1}$.

Le gain de Kalman a été calculé de façon à minimiser la covariance d'erreur à posteriori $P_{k+1/k+1}$.

On a :

$$\tilde{S}_{k+1/k} = z_{k+1} - \hat{z}_{k+1/k}$$

$$S_{k+1/k} = H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^{T} + R_{k+1}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^{T} \left(S_{k+1/k}\right)^{-1} \qquad \textbf{III.1}$$

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \tilde{S}_{k+1/k}$$

$$P_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}\right) P_{k+1/k}$$

La figure III.7 résume les différentes étapes de l'algorithme du filtre de Kalman linéaire discret.

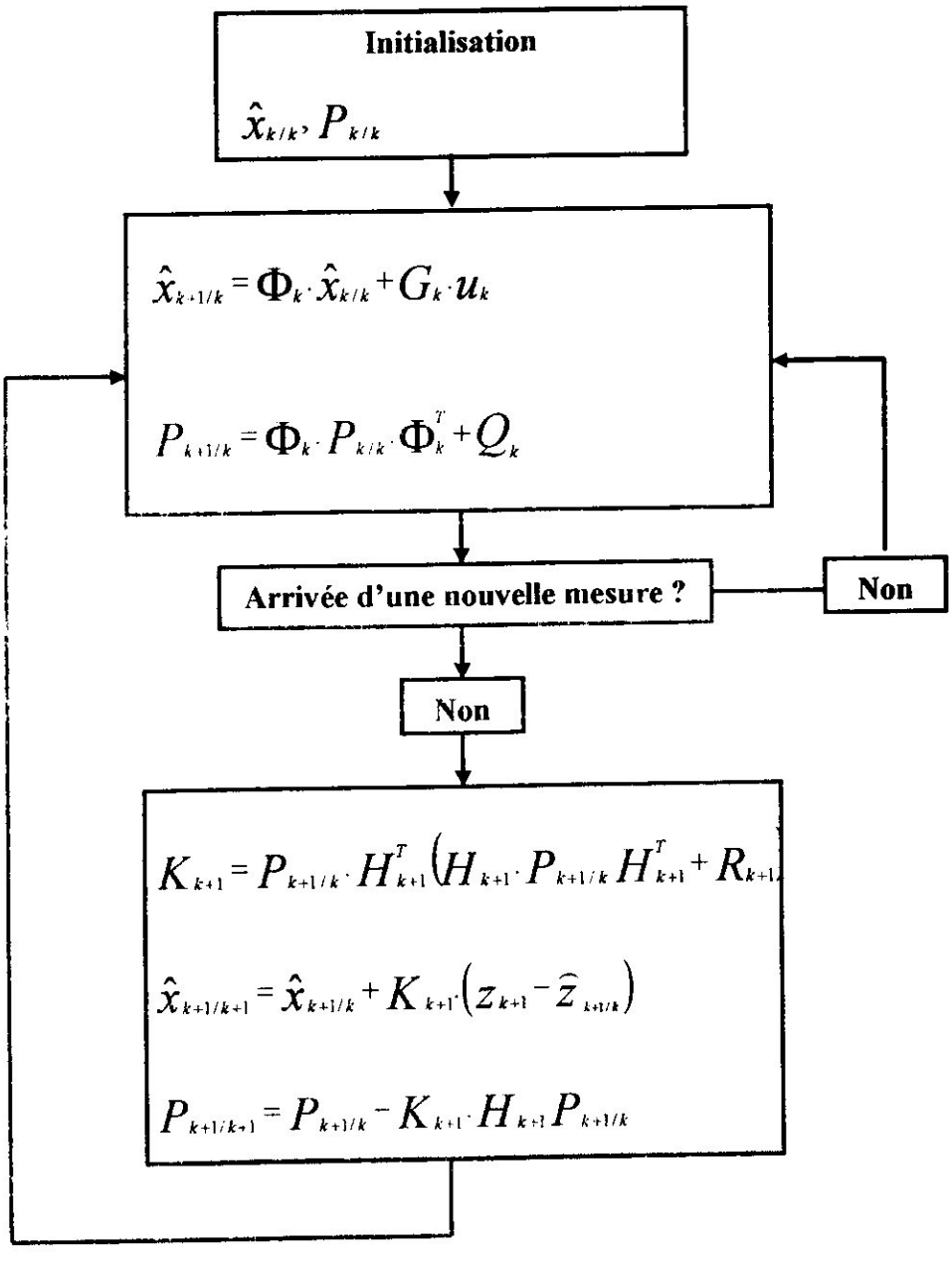


Fig. III.7 Algorithme du filtre de Kalman linéaire discret

♦ **Remarque**

Si la mesure est plus précise que l'erreur de système, alors :

$R_{k+1} << P_{k+1}$ et $K_{k+1} \simeq 1$

Dans ce cas, l'équation $\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}\hat{S}_{k+1/k} \simeq \hat{x}_{k+1/k} + \hat{S}_{k+1/k}$

ce qui donne plus de poids à la mesure dans l'estimation de l'état.

Si en revanche nous connaissons notre erreur de système plus précisément que notre mesure, nous devrions alors rendre la correction due à la mesure très petite.

Dans ce cas, $R_{k+1} >> P_{k+1}$ et $K_{k+1} = P_{k+1}/R_{k+1}$

ainsi la correction sera très faible.

III.3.3 Linéarisation des systèmes non linéaires

La formulation du filtre présentée plus tôt est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons trois de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le *Filtre Linéarisé de Kalman*. La linéarisation autour une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures s'appelle le *Filtre de Kalman Etendu*. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor.

III.3.4 Filtre de Kalman linéarisé discret

Dans le filtre linéarisé de Kalman, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu.

Considérons un modèle non-linéaire d'un système défini par:

- Modèle du processus : $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$
- Modèle de mesure : $z_k = h(x_k) + v_k$

f et h sont des fonctions non-linéaires connues, u_k est la fonction (le vecteur) de commande et w_k et v_k sont des processus de type bruit blanc non corrélés.

Supposons qu'une trajectoire approximative x_k^{nom} (figure III.8) puisse être déterminée par un quelconque moyen; celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) x_k peut être écrite en termes de x_k^{nom} et d'erreur δx_k comme suit:

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k$$

On a alors :

$$x_k^{nom} + \delta x_k = f\left(x_{k-1}^{nom} + \delta x_{k-1}, u_{k-1}\right) + w_{k-1} \qquad \textbf{III.2}$$

$$z_k = h\left(x_k^{nom} + \delta x_k\right) + v_k$$

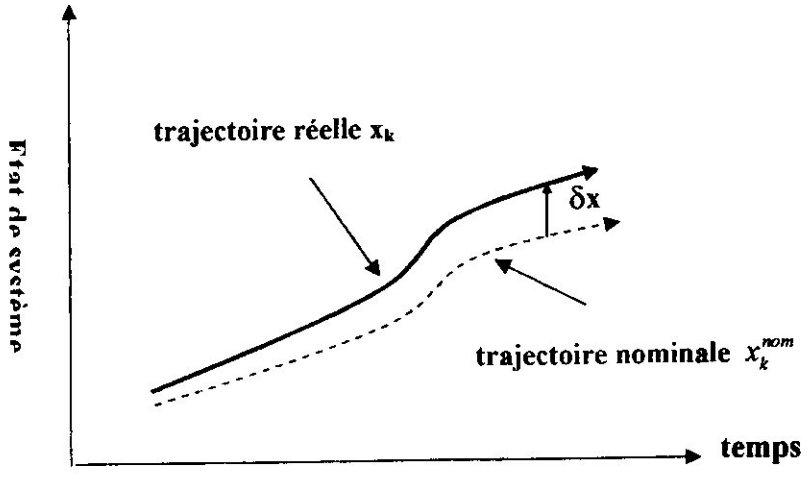


Fig. III.8 Trajectoires nominale et réelle

Par l'application du développement de Taylor de l'équation III.2 autour de x_k^{nom} et en supposant δx_k est petit, on obtient :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k^{nom} = \left(f\left(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X=x_k^{nom}} \cdot \delta x_{k-1} + \text{termes d'ordre élevés} \right) + w_{k-1} \qquad \textbf{III.3}$$

comme : $f\left(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}\right) = x_k^{nom} \Rightarrow$

$\delta x_k \simeq \Phi_{k-1} \delta x_{k-1} + w_{k-1}$ (La dynamique linéarisé)

où

$$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{X=X_k^{nom}} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}\right]_{X=x_k^{nom}} \qquad \text{et } w_K \sim N\left(0, Q_K\right)$$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

De la même, on linéarise l'équation d'observation autour de x_k^{nom} :

$$z_k = \left(h\left(x_k^{nom}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_k^{nom}} \cdot \delta x_k + \text{termes d'ordres élevés} \right) + v_k \qquad \textbf{III.4}$$

ciomme $\delta z_k \approx z_k - h\left(x_k^{nom}\right) \Rightarrow$

$\delta z_k \approx H_k . \delta x_k + v_k$ (équation de mesure linéarisée)

où

$$H_k = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_k^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \frac{\partial h_p}{\partial x_2} & & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X^{nom}} \quad \text{et} \quad v_k \sim N\left(0, R_k\right)$$

Les équations III.3 et III.4 constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. Il est clair que ce modèle de système linéarisé peut être utilisé pour mettre en application un filtre linéarisé de Kalman parce que la relation de la dynamique d'erreur et la relation associée de mesure des erreurs sont devenues linéaires. Ici, nous estimons seulement la valeur d'incrément « l'erreur », ainsi les valeurs réelles de l'état seront l'incrément estimé plus la valeur nominale à l'instant même. Aussi Φ et H sont obtenus en évaluant les matrices de dérivées partielles (les Jacobiennes de *f* et *h*) le long de la trajectoire nominale.

La position nominale (ou le vecteur d'état) peut changer avec chaque étape du processus récursif, ainsi les termes de H et de Φ peuvent être variables avec le temps et doivent être recalculés avec chaque étape récursive. Le problème dans la linéarisation autour de la trajectoire nominale est que la déviation de la trajectoire réelle de la trajectoire nominale tend à augmenter avec le temps. À mesure que la déviation augmente, les poids des termes d'ordres supérieurs dans l'expansion de la série de Taylor de la trajectoire augmentent.

La déviation de la trajectoire de référence est le vecteur d'état et les mesures dans le modèle linéaire sont les vraies mesures moins celles qui ont été prédites par la trajectoire nominale en l'absence du bruit.

Le filtre linéarisé est utilisé dans une configuration de « feedforward » comme montré ci-dessous (figure III.9). Sous cette forme, la trajectoire nominale n'est pas mise à jour pour refléter les estimations d'erreur calculées par le filtre. Le modèle de « feedforward » peut être utilisé pour intégrer un système de navigation inertielle avec un certain nombre d'aides externes de navigation. Nous devons choisir une trajectoire nominale autour de laquelle la linéarisation sera effectuée. L'INS seul est pris comme le modèle du système et ses sorties sont considérées comme la trajectoire de référence (nominale). Cette trajectoire de référence ne sera pas toute parfaite car c'est une combinaison de la trajectoire vraie avec les erreurs d'INS. Notre but est d'estimer les erreurs du système inertiel en

utilisant des systèmes de mesures externes, ces erreurs sont appliquées à la référence (et à la sortie brute du système inertiel) pour produire une sortie correcte et améliorée du système inertiel.

Ici nous supposons que la déviation de la trajectoire de référence de la trajectoire vraie reste petite pendant toute la période d'intérêt. Le point à noter ici est que le filtre de Kalman agit seulement sur les erreurs du système. Ainsi, nous avons besoin d'un modèle de l'espace d'état décrivant ces erreurs-là et il doit être linéaire avec le bruit blanc.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état.. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui donne le filtre de Kalman étendu.

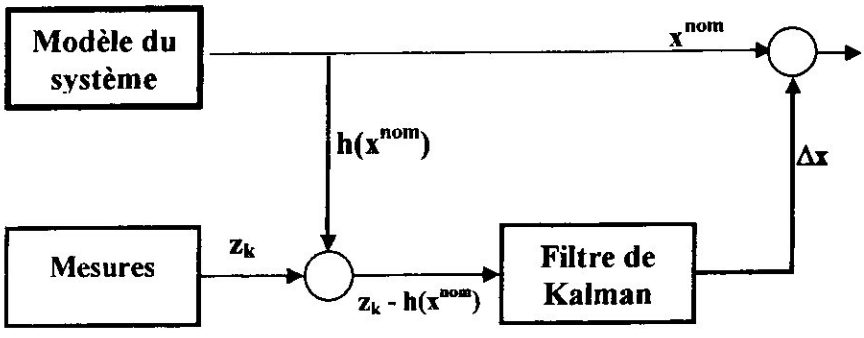


Fig. III.9 Filtre de Kalman linéarisé (Feedforward)

III.3.5 Le Filtre de Kalman Etendu

Le filtre de Kalman étendu (EKF) est similaire à un filtre linéarisé de Kalman sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée (figure III.10) du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée. Ceci signifie que les dérivés partielles sont évaluées le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus.

Modèle non linéaire du processus $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$ **III.5**

Modèle de mesure: $z_k = h(x_k) + v_k$ **III.6**

L'approximation de Taylor de f est faite autour de l'estimation de l'instant précédent $\hat{x}_{k-1}$:

$$\Phi(\hat{x}, k) \approx \left.\frac{\partial f(x,k)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}_{k-1}}$$

L'approximation de Taylor de h est faite à la position (ou à l'état) prédite correspondante :

$$H(\hat{x},k) \approx \left.\frac{\partial h(x,k)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}_{k+1}}$$

Comme dans le cas du filtre linéarisé de Kalman, le développement limité donne cette fois-ci :

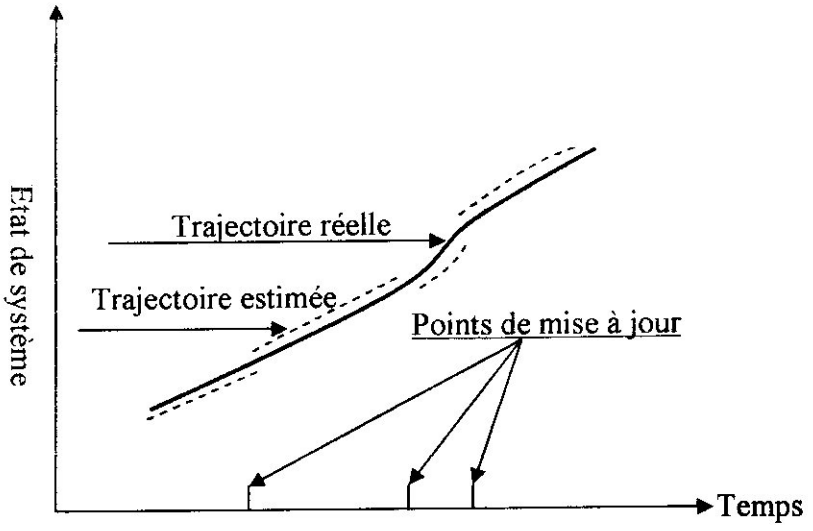


Fig. III.10 Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de Kalman étendu

$$x_k \approx x_{\bar{k}} + \Phi_{K-1}\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + w_{k-1}$$
$$z_k \approx \hat{z}_k + H_k\left(x_k - \hat{x}_{\bar{k}}\right) + v_k$$

Les équations III.5 et III.6 constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. En général, l'EKF est difficile en raison du bouclage (le feedback) de la mesure au modèle du processus, mais il arrive à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation pendant que L'avantage du EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes.

Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de Kalman sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients.

Le filtre étendu peut être visualisé dans une configuration de « feedback » comme montré ci-dessous (figure III.11). Dans un système de navigation inertielle assisté par le GPS, les erreurs du système inertiel sont retournées et les corrections sont faites intérieurement dans le système inertiel, ainsi nous n'avons pas les données inertielles brutes à la sortie du système inertiel.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(\bar{x})$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de *la trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de *la trajectoire nominale* (filtre linéarisé).

Lorsque $h(\bar{x})$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(\bar{x})$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la

durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.

Figure III.12 montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire.

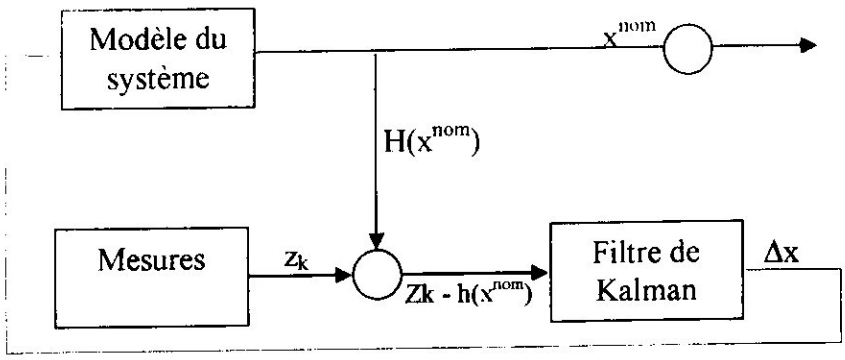


Fig. III.11: Filtre de Kalman étendu

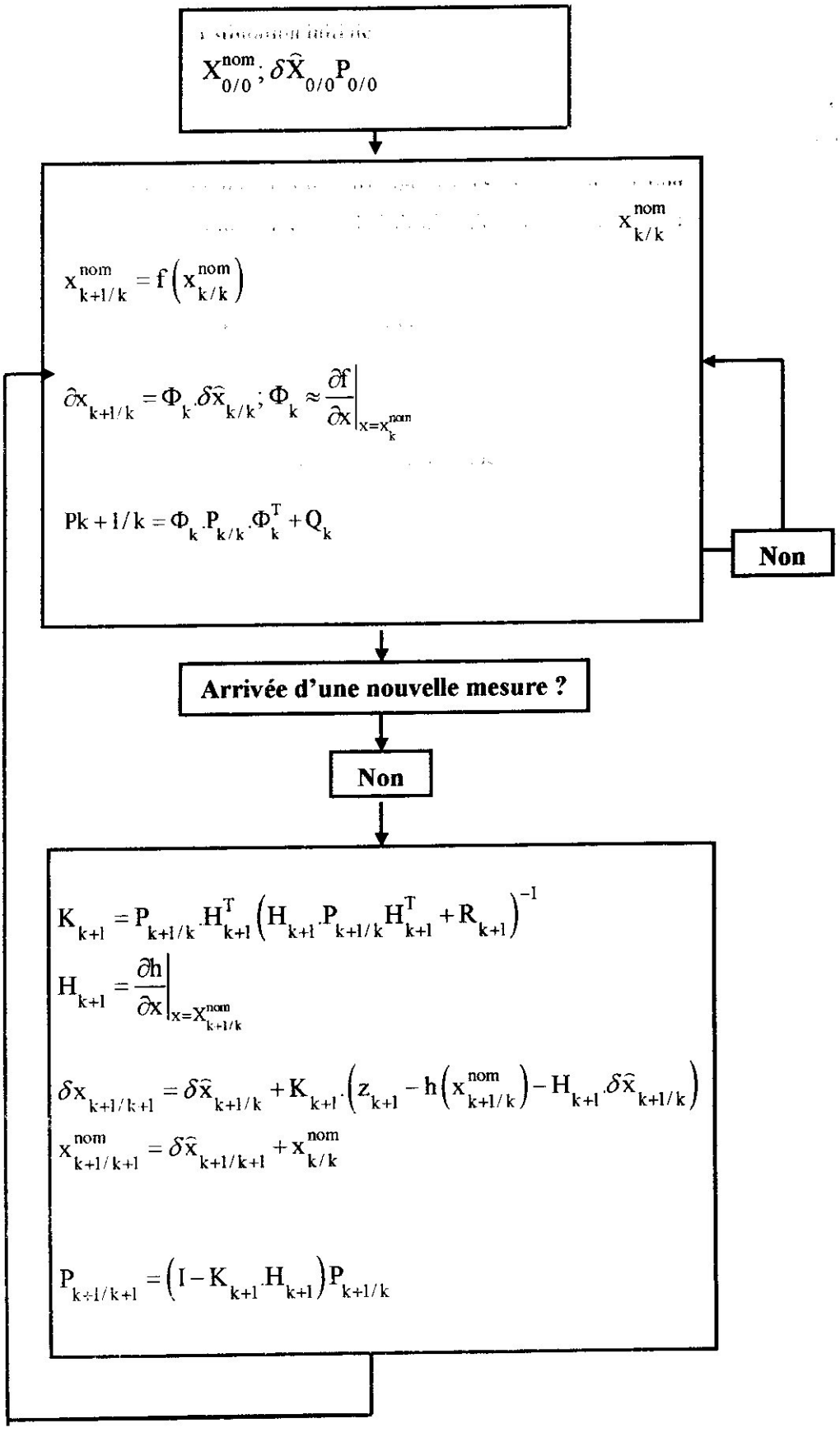


Fig. III.12 Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire

Chapitre

4

Simulation

IV-SIMULATION

IV.1-Introduction

Ce chapitre décrit la simulation à l'aide du module Simulink de Matlab le recalage en position en boucle ouverte et en boucle fermée d'une centrale inertielle de type Strapdown que nous avons présentée dans les chapitres précédents. La mécanisation que nous avons proposée sera simulée à l'aide de trajectoires et de vitesses différentes en tenant compte de l'imperfection des composants gyroscopes et accéléromètres et du bruit de mesure de la position délivrée par une aide extérieure, le GPS. Une analyse commentée des résultas des simulations sera donnée.

IV.2-Les équations du modèle d'évolution : INS seul

Parmi les différents modes de recalage qui existent, nous avons choisi le mode d'intégration lâchement couplé avec une boucle ouverte ou fermée. Ce mode de recalage a été expliqué dans le chapitre III dont l'avantage principal est la simplicité de la mise en œuvre.

L'intégration des équations de mécanisation de la centrale inertielle strapdown que nous avons traités dans le chapitre II permettent de calculer la position et l'attitude du mobile. Ces équations sont les suivantes :

$$r^{LLa}_{k+1} = r^{LLa}_{k} + (DV^{n}) \times \Delta t$$

$$V^{n}_{k+1} = V^{n}_{k} + (a^{n}_{en}) \times \Delta t = V^{n}_{k} + (R^{n}_{b} f^{b}_{ib} - (2\omega^{n}_{ie} + \omega^{n}_{en}) \times V^{n}_{en} - g^{n})_{k} \times \Delta t$$

$$(R^{n}_{b})_{k+1} = (R^{n}_{b})_{k} + (R^{n}_{b}(S(\omega^{b}_{nb})))_{k} \times \Delta t$$

avec

r^{LLa} la position en termes de (Latitude, Longitude, Altitude)

V^{n} la vitesse dans un repère local Nord Est Down.

$S(\omega^{b}_{nb})$ la forme antisymétrique de ω^{b}_{nb}

R^{n}_{b} la matrice de transformation du repère *b* « body » au repère n « navigation »

Δt est la période d'échantillonnage

IV.3-Les équations de filtre de kalman

Il faut faire une linéarisation avant d'appliquer le filtre. La linéarisation est faite autour de la trajectoire estimée donnée par la centrale.

Les équations d'erreur du système peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\dot{\delta x} = F\delta x + Gu \qquad \textbf{IV.1}$$

Cette équation du modèle d'erreur linéarisé sera utilisée dans l'étape de prédiction du filtrage de Kalman.

δx présente le vecteur d'état constitué de 9 variables qui représentent les erreurs respectivement sur la position, la vitesse et l'orientation sur les trois axes :

$$\delta x = \left[\delta r^{LLa} \ \delta V^{LLa} \ \delta \rho^{LLa} \right]^T$$

Ces erreurs sont définies par la différence entre les valeurs réelles et les valeurs calculées, soit : $\delta x = x - \hat{x}$.

F est la matrice de transition du système dont la forme est assez complexe. G est la matrice de commande, u est le vecteur de commande dont les éléments sont les erreurs gyroscopiques et accélérométriques :

$$u = \begin{pmatrix} \delta f_{ib}^{b} \\ \delta \omega_{ib}^{b} \end{pmatrix}$$

Le vecteur u constitué de variables indépendantes gaussiennes sera caractérisé par sa matrice de covariance Q diagonale :

$$Q = \mathrm{diag}\left(\sigma_{ax}^2 \ \sigma_{ay}^2 \ \sigma_{az}^2 \ \sigma_{\omega x}^2 \ \sigma_{\omega y}^2 \ \sigma_{\omega z}^2 \right)$$

σ_a et σ_ω sont les écarts types des accéléromètres et des gyroscopes. Les éléments de Q seront déterminés en fonction de la qualité des accéléromètres et des gyroscopes utilisés.

Dans la pratique, la matrice de transition F est obtenue simplement en considérant que la variation de l'erreur en position est égale à l'erreur de vitesse en tenant compte du changement de coordonnées. De même, la variation de l'erreur en vitesse est égale à l'erreur dans l'accélération plus l'erreur due au non-alignement, soit :

$$\dot{\delta}_r^{LLa} = D\delta V^n$$

$$\delta \dot{V}^n = R_b^n \delta f_{ib}^b + A_n \delta \rho^n$$

$$\delta \dot{\rho}^n = -R_b^n \delta \omega_{ib}^b$$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{r}^{LLa} \\ \delta \dot{V}^n \\ \delta \dot{\rho}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r^{LLa} \\ \delta V^n \\ \delta \rho^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_b^n & 0 \\ 0 & -R_b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta f^b \\ \delta \omega_{ib}^b \end{pmatrix}$$

Les entités ω_{ib}^b et δf_{ib}^b sont les incertitudes dans les accéléromètres et les gyroscopes dans le repère body et qui sont transformées dans le repère de navigation en utilisant la matrice de transformation R_b^n. Ces erreurs représentent le cumul des différentes erreurs qui incluent le biais, les facteurs d'échelle, les non-alignements et les non linéarités. Chacune de ces erreurs peut être placée dans le modèle d'état pour y être estimée

On pourra écrire :

$$\delta \dot{a}_{k+1} = -\beta_a \delta a_k + W_a$$

$$\delta \dot{\omega}_{k+1} = -\beta_\omega \delta \omega_k + W_\omega$$

Puisque les systèmes inertiels de type strapdown sont habituellement mis en application avec une fréquence d'échantillonnage élevée, l'équation .IV.1 peut être ramenée à sa forme discrète :

$$\delta\hat{x}_{k+1/k} = \Phi_k . \delta\hat{x}_{k/k} + w_k$$

Φ_k est la matrice de transition, w_k est un processus aléatoire dont la distribution est gaussienne de matrice de covariance Q_k:

La matrice F peut être convertie en matrice de transition d'état Φ par l'intermédiaire de :

$$\Phi_k \approx I + F\Delta t$$

L'évaluation de la matrice de Q_k peut être faite à l'aide de :

$$Q_k \approx GQG^T \Delta t$$

Le modèle linéarisé final augmenté après le placement des modèles d'erreurs des accéléromètres et des gyroscopes devient :

$$\begin{pmatrix} \delta r^{LLa} \\ \delta V^{LLa} \\ \delta\rho^n \\ \delta a^b \\ \delta\omega_{nb}^b \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} I & D\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & A_n \Delta t & R_b^n \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -R_b^n \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & I - \beta_a \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I - \beta_w \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r^{LLa} \\ \delta V^{LLa} \\ \delta\rho^n \\ \delta a^b \\ \delta\omega_{nb}^b \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} w_r \\ w_V \\ w_\rho \\ w_a \\ w_\omega \end{pmatrix}_k$$

où les w_k sont les erreurs aléatoires et I est une matrice d'identité (3 × 3).

Le modèle d'erreur est alors incorporé dans un filtre de Kalman standard linéaire en mettant en application les étapes de prédiction et de correction :

$$P_{k+1/k} = \Phi_k P_{k/k} \Phi_k^T + Q_k$$

IV.1.1.3.4.3 Les équations d'observation du GPS

Les estimations de la latitude, la longitude, l'altitude et de la vitesse calculées par le GPS constituent l'observation utilisée pour recaler l'INS. Il s'agit d'une configuration lâchement couplée. Les mesures du GPS sont relativement simples à manipuler parce que ce qu'elles sont exprimées dans un système de coordonnées connu. Il suffit de les convertir dans le système de coordonnées de la CI dans le cas où ce dernier n'est pas le même. Le vecteur de mesure est la différence entre les données GPS (position et vitesse) et la solution inertielle résultant de l'étape de prédiction (ou les mesures prédites).

$$\delta z_k = z_k - h\left(\hat{x}_k\right)$$
$$\delta z_k = H_k \delta x_k + v_k \delta z_k$$

Cette équation exprime le vecteur de mesure δz_k à l'instant t_k comme une combinaison linéaire du vecteur d'état δx_k plus une erreur de mesure aléatoire $V_K = h\left(\hat{x}_k\right)$ est la mesure prédite par le système inertiel (équation IV.1) et z_k représente les vrais mesures fournies par le GPS.

Les matrices de covariances pour v_k et w_k sont données par :

$$E[V_k V_i^T] = \begin{cases} R_k \rightarrow i = k \\ 0 \rightarrow i \neq k \end{cases}$$

$$E[W_k V_i^T] = 0, \forall i, k$$

Nous supposons que la position et la vitesse fournies par le GPS et l'INS ont des perturbations non corrélées.

Comme nous l'avons mentionné, après avoir obtenu un modèle linéaire du système, l'exécution du filtre de Kalman peut être divisée en deux étapes : la prédiction présentée dans équation.4.26, et la correction exprimée par les équations suivantes dans le cas où l'observation est disponible.

$$K_{k+1} = P_{K+1/K} H_{K+1}^T \left(H_{K+1} P_{K+1/K} H_{k+1}^T + R_{k+1} \right) - 1$$

$$\delta \hat{x}_{k+1/k+1} = \delta \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \left(Z_{k+1} - h\left(x_{k+1/k}^{nom} \right) - H_{k+1} \delta \hat{x}_{k+1/k} \right)$$

$$P_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1} H_{k+1} \right) P_{k+1/k}$$

Le gain de Kalman K_{k+1} est calculé d'abord, puis l'état et la covariance d'erreur sont mis à jour en utilisant l'estimation antérieure, le $\delta x_{k+1/k}$ et sa covariance d'erreur, $P_{k+1/k}$ Dans l'étape de prédiction, l'estimation et sa covariance d'erreur sont projetées en avant.

Dans l'étape de correction (équation.4.31), on peut utiliser la position et la vitesse du GPS comme observations pour calculer le vecteur de mesure (6 variables) :

$$\delta Z_{k+1} = \left(Z_{k+1} \right)_{GPS} - h\left(x_{k+1}^{nom} \right) = \begin{pmatrix} r_{INS}^{LLa} - r_{GPS}^{LLa} \\ V_{INS}^{n} - V_{GPS}^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{INS} - \varphi_{GPS} \\ \lambda_{INS} - \lambda_{GPS} \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ V_{INS}^{n} - V_{GPS}^{n} \end{pmatrix}$$

La matrice d'observation dans le cas d'un vecteur d'état de 9 variables est :

$$H_{k+1} = H_{GPS}(k+1) == \begin{pmatrix} I_{3X3} & 0_{3X3} & 0_{3X3} \\ 0_{3X3} & I_{3X3} & 0_{3X3} \end{pmatrix}$$

Et dans le cas d'un vecteur d'état de 15 variables :

$$H_{k+1} = H_{GPS}(k+1) = \begin{pmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \end{pmatrix}$$

La matrice de covariances sur les bruits de mesure R_k sera alors :

$$R_{k+1} = \text{diag}\left(\sigma_{\varphi}^2 \quad \sigma_{\lambda}^2 \quad \sigma_{h}^2 \quad \sigma_{vn}^2 \quad \sigma_{ve}^2 \quad \sigma_{vd}^2\right)$$

Ce qui peut être obtenu à partir du traitement des données GPS.

Comme nous l'avons mentionné, le calcul de l'erreur de positionnement obtenue par différenciation des positions respectives du GPS et de l'INS est utilisé pour alimenter un filtre qui estime et corrige les erreurs d'INS. Cependant, il existe deux difficultés :

- Les erreurs sur l'estimation de la position GPS seront corrélées les unes avec les autres (c'est-à-dire, entre les composantes du vecteur estimé à un moment donné ; dans ce cas là R_{k+1} n'est plus diagonale). L'information sur cette covariance n'est pas connue du concepteur du filtre de Kalman complémentaire.
- L'erreur de position GPS n'est pas blanche, mais corrélée avec le temps. Là encore, la structure de la corrélation (corrélation en fonction du temps) est inconnue au concepteur du filtre de Kalman complémentaire.

Toutefois, si nous disposons d'un modèle d'erreur (un modèle du premier ordre n'ai pas suffisant [BON 00]), et sous l'hypothèse que l'erreur est stationnaire (mais ce n'est pas tout à fait vrai) ; il devient facile d'insérer ce modèle d'erreur dans le filtre.

Une fois que nous avons estimé les erreurs du système (le vecteur d'état), nous rebouclons afin de mettre à jour les variables et paramètres physiques (notre trajectoire de référence). S'il n'y a aucune observation obtenue pendant une longue période de temps (absence de données GPS ou si les données du GPS sont rejetées à cause des erreurs), dans ce cas, le filtre restera dans l'étape de prédiction et aucune erreur ne sera estimée pour corriger la CI. En raison des caractéristiques des erreurs de la CI, ceci causera une dérive dans l'état évalué par la CI.

IV.4-Les schémas bloc du système

IV.4.1 Système en boucle ouverte / fermé

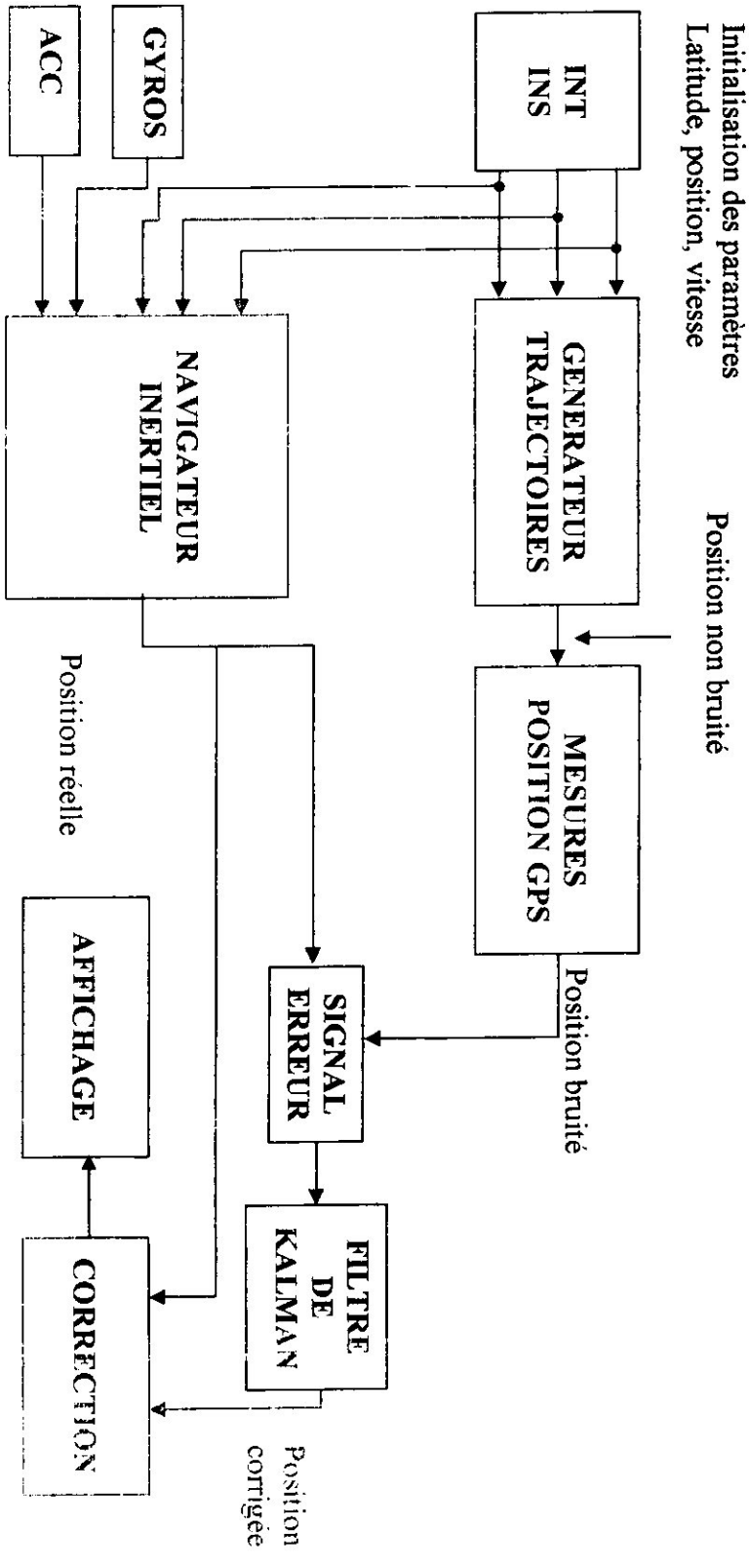


FIG IV.1 Schéma bloc recalage INS en boucle ouverte

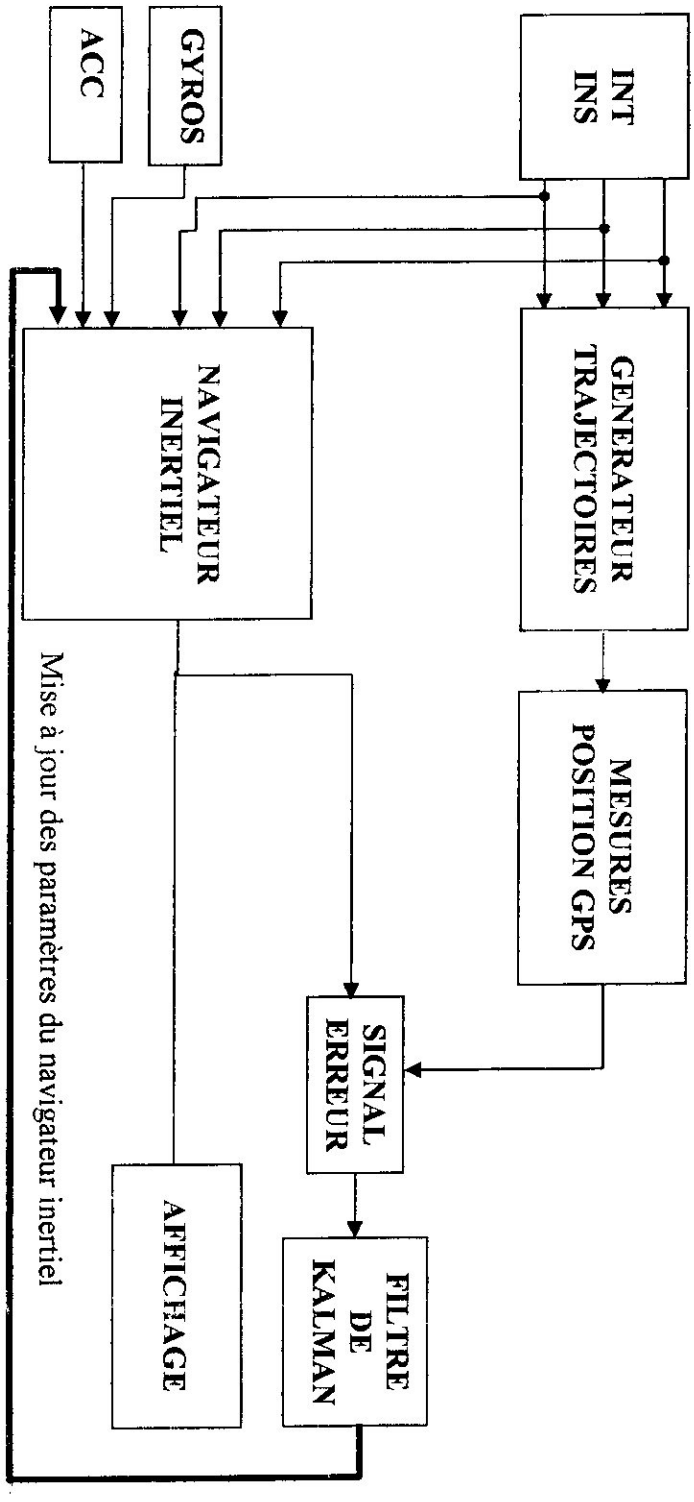


FIG IV.2 Schéma bloc recalage INS en boucle fermé

IV.5-Notion sur simulink

Ce chapitre a pour objectif premier de présenter un support à l'utilisation des outils Matlab/simulink.

L'interpréteur MATLAB (MATrix LABoraty) de la compagnie Mathworks est un programme interactif pour le calcul scientifique qui facilite le calcul matriciel dans différents domaines scientifiques comme le traitement de signal, l'électronique, les commandes de processus et qui permet une visualisation rapide de données.

L'ajout de « boîtes à outils » (Toolboxes) permet d'introduire de nouvelles fonctions mathématiques spécifiques à un domaine d'applications particulier (Signal Processing Toolbox, Control System Toolbox, Neural Network Toolbox, Signal Processing Toolbox, Image Processing Toolbox, etc.) afin de tester rapidement les performances de nouvelles méthodes. Dans cet optique, MATLAB contient de nombreuses fonctionnalités pour :

–l'analyse de données et la visualisation ;
–le calcul numérique et symbolique ;
–la modélisation, la simulation ;
–le développement d'applications et d'interface graphiques ;

SIMULINK est un outil interactif graphique de MATLAB permettant de modéliser, simuler et analyser une large variété de systèmes physiques et mathématiques, y compris ceux avec des éléments non - linéaires et ceux qui se servent du temps continu et discret ou hybride. Il est communément utilisé dans la conception de systèmes automatiques, la conception de systèmes à base de processeurs de traitement du signal et les systèmes de communication. Pour cela, il dispose d'une bibliothèque de blocs de calcul élémentaire, que l'utilisateur peut assembler pour créer ses systèmes sans écrire des lignes de codes.

Dans SIMULINK, la simulation se fait en deux étapes. La première consiste à créer le modèle graphique du système à simuler en utilisant l'éditeur de modèle de SIMULINK. Ensuite, en spécifiant l'étendu temporel, il est possible de simuler le comportement du système.

Une variété des composants est utilisée pour la mise au point de notre système, nous décrirons par la suite les nom et rôle de chaque composant.

Nous avons utilisés 3 principales bibliothèques de Simulink du MatLAb.

- **Math Operations** : elle contienne tous les composant qui traduits les opérations mathématiques comme produit, division, sommation etc.
- **Signal routing** : elle englobe les composants qui effectuent les routines du signal comme stockage du signal, les renvois, sélecteurs, multiplexage, démultiplexage etc.
- **Sinks** : cette unité englobe tous les composants qui ont comme rôle l'affichage et l'exportation des résultats, scope, Display, ToWorkSpace etc.
- **Sources** : comporte tous les composants générateurs des signaux comme constant, Pulse generator, Clock etc.

Les composants du Sumilink utilisées sont :

1. **Constant** : composant de type sortie, peut possède une constante comme il peut possède un vecteur de valeurs ou une matrice de valeurs (unité Sources).
2. **Integrator**: intégrateur en temps continue du signal (unite continuous).
3. **Sum:** Addition ou soustraction des entrées (unité math operations).
4. **Product** : Multiplication ou division des entrées (unité math operations).
5. **Goto / From :** Renvois ou branchement de l'entrée (signal routing).
6. **Mux / Dmux** : multiplexage / démultiplexage des entrées, scalaire, vecteurs ou matrices (unité signal routing).
7. **Reshape :** changer les dimension du signal d'entrée (unité math operations).
8. **Matix concatenation :** concaténation vertical ou horizontale du signal (unité math operations).
9. **OutPut / Input :** représente l'entrée ou sortie d'un block (unité Sink, Sources).
10. **MatLab Fcn :** Passer l'entrée vers une fonction matlab pour l'évaluation (unité user defined functions).
11. **Pulse generator :** générateur à impulsion (unité sources).
12. **Zero-Order Hold :** synchronisation du signal (unité discret).
13. **Selector :** intérepteur commander par l'entrée du milieu.

Ces composants sont représentés dans la figure suivante :

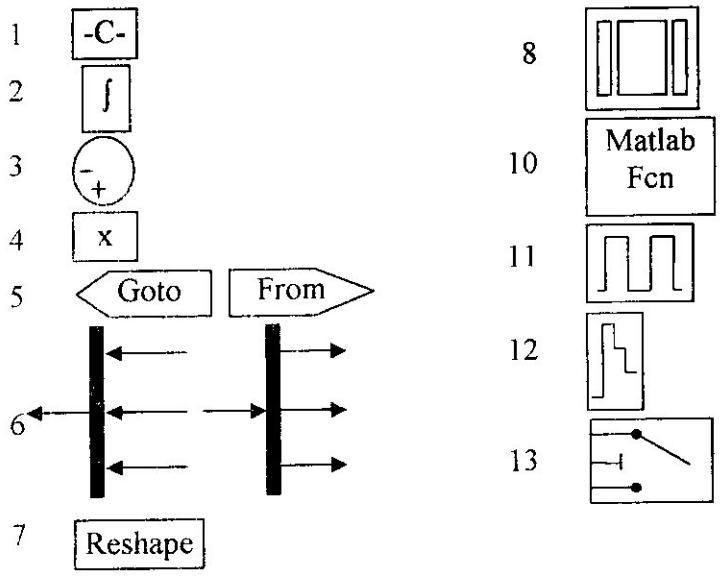


FIG IV.3 Les composants du SIMULINK

IV.6-Description du système

IV.6.1 Système en boucle ouverte :

Notre système réalisé à l'aide de Simulink se compose de plusieurs modules qui travaillent ensemble pour effectuer l'opération de recalage de la centrale inertielle, ce qui suit est la description de chaque module.

- **Le module Affichage :** sert à afficher les résultats obtenus.
- **Le module INI INS** sert à l'initialisation des paramètres de vol, position, orientation et vitesse, ils sont utilisées par les autre modules pour calculer et générer la trajectoire de l'aéronef.

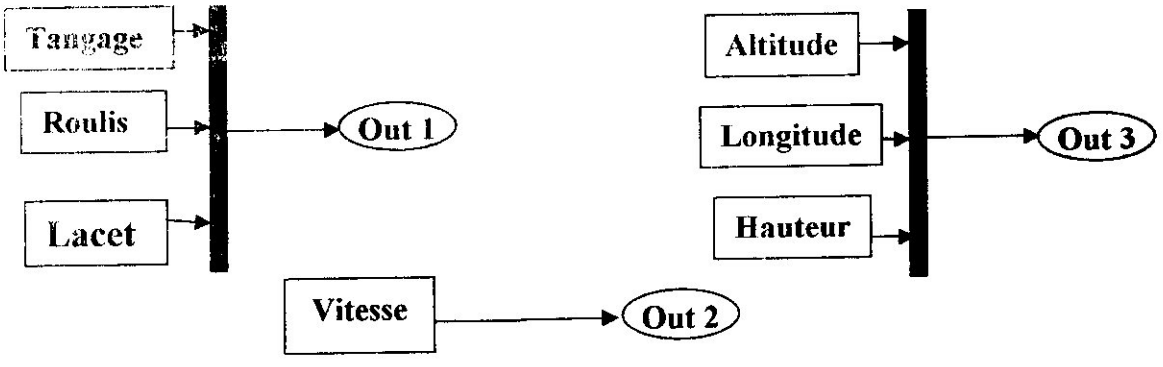


FIG IV.4 Initialisation de l'INS

Comme il est présenté dans la figure IV., le module initialisation de l'INS comporte 03 boites constante pour la saisie des données de la position (Latitude, Longitude, hauteur), 03 boite pour l'orientation (Lacet, roulis, tangage), une autre boite pour la vitesse. Les composants (1), (2) et (3) sont des sorties.

- **Le module GYROS** le rôle de ce composant est de modéliser les gyroscopes qui doits capter les rotations angulaires de l'aéronef.

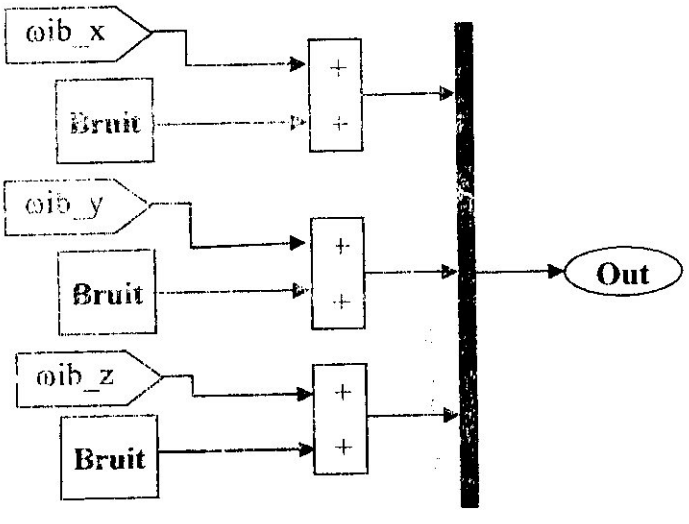


FIG IV.5 Gyromètre

Cette figure comporte 3 boites constant représentent le bruit de chaque gyros aussi les composants de branchement FROM pour l'élaboration les rotation angulaires des gyroscopes, ainsi des boites d'addition pour ajouter les bruits aux rotations correspondants, la barre représente un multiplexeur.

- **Le module ACC** : modéliser accélérateurs qui captent les accélérations de notre avion.

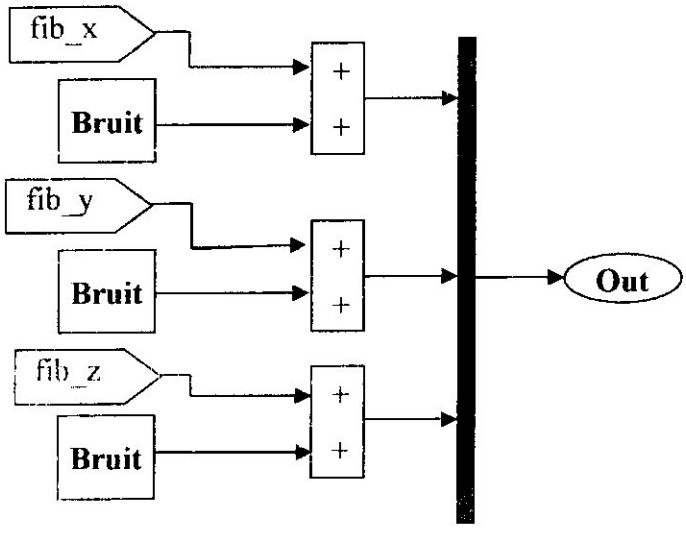


FIG IV.6 Accéléromètre

La figure IV.6 comporte 3 boites constant représentent les bruits des accéléromètres aussi les composants de branchement FROM pour l'élaboration des accélérations des accéléromètres, des boites pour ajouter les bruits aux accélérations correspondants.

- **Le module générateur trajectoires :** est le conteneur de plusieurs modules internes pour but de modéliser une centrale inertielle, cette dernière sera considéré comme parfaite par ce que les bruits n'interviens pas afin de générer une trajectoire de type cercle en annulant les vitesse angulaire et accélérations apparentes.

La figure IV.7 détaille le générateur trajectoire. En premier lieu on trouve les entrées (1), (2), (3) qui présentent respectivement l'orientation initiale, la vitesse initiale et la position initiale. Ces entrées (en degré) doit être convertis en radian pour être utilisés dans les calcule par les blocs de conversion. La vitesse aussi doit être projeter en ses trois composantes dans le repère de navigation Vn, Ve et VD.

La boit entouré avec un cercle présente les accélérations et rotations apparentes nécessaire pour générer une trajectoire de type cercle.

Les boites C, R et D sont des matrices de passages entre les repères.

La boite correction de gravité, est un composant projecteur sur les trois (03) axes de la gravité.

La boite Coriolis présente le produit vectoriel entre les deux vitesses ω_{en}^{n} et la vitesse V_{en}^{n}

L'ensembles des boites de branchement Goto pour exporter les résultas vers l'extérieur.

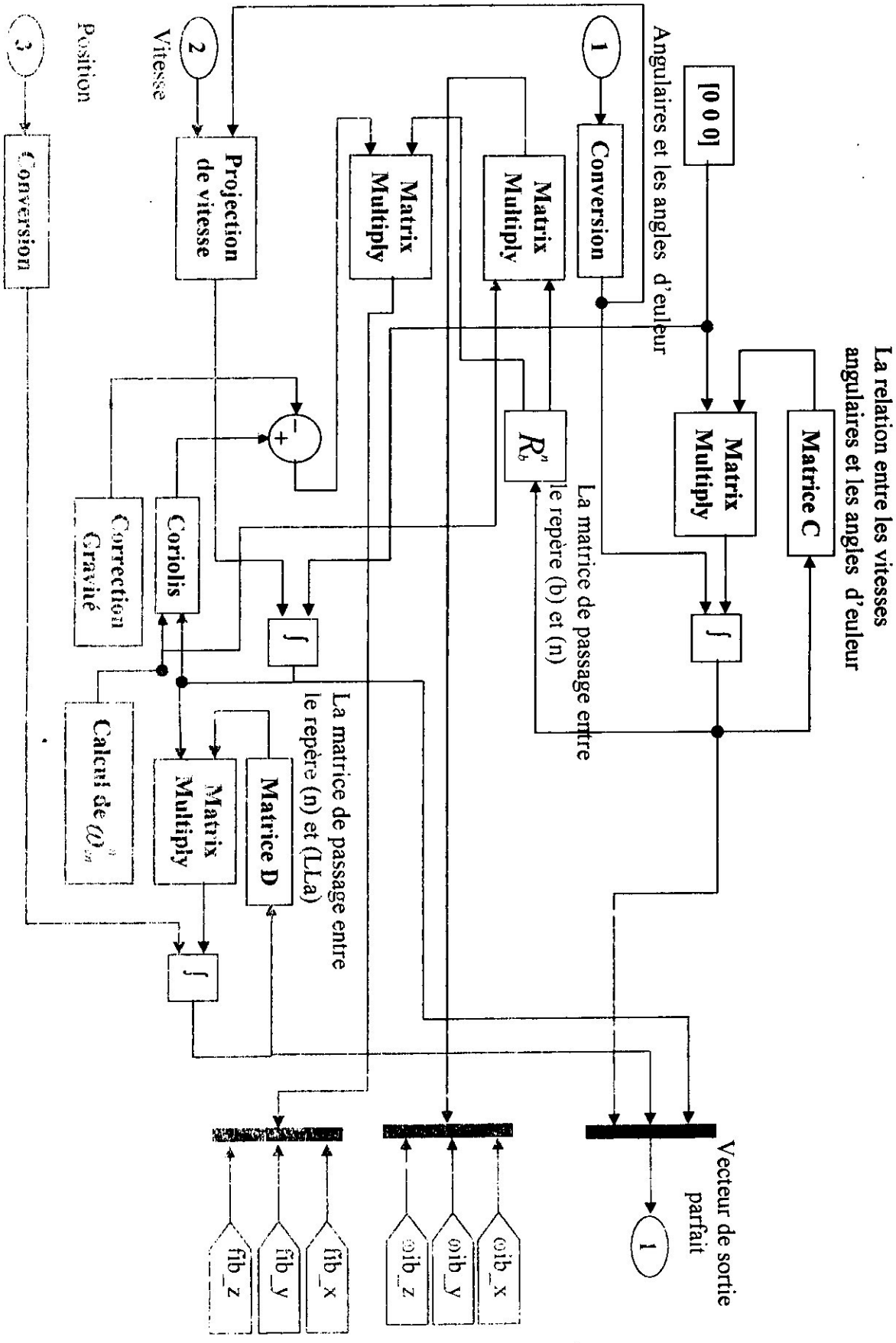


FIG IV.7 Générateur trajectoire

FIG IV.8 Navigateur inertiel

- **Le module Navigateur inertiel :** il est considéré comme centrale inertielle réelle (figure IV.8), calcul la position et l'orientation instantané de l'aéronef en utilisant les mesures des gyros et Accéléros.

Apparemment les mêmes modules se présents dans cette figure sauf une petite différence réside au niveau des entrées (4) et (5), ces entrées représentes respectivement les accélérations et les rotations réelles

Deux sommateurs sont ajoutés au niveau de l'entrée (4) et l'autre (5) afin de mise en place des formules de la mécanization.

- **Le module mesures position GPS** : représente les mesures GPS, ces mesures prisent de notre centrale inertielle parfaite pour être bruité par la suite afin de représenter les mesures GPS utilisées au saine de la centrale inertielle réelle pour le recalage.

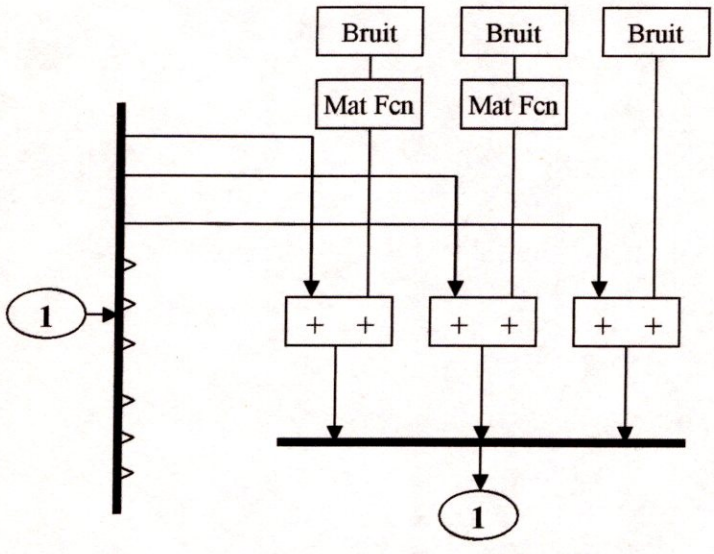


FIG IV.9 Les mesures GPS

- **Le module Signal Erreur :** composant qui donne la différence entre les mesures GPS et les mesures navigateur inertiel, pour être utiliser par le filtre de Kalman.

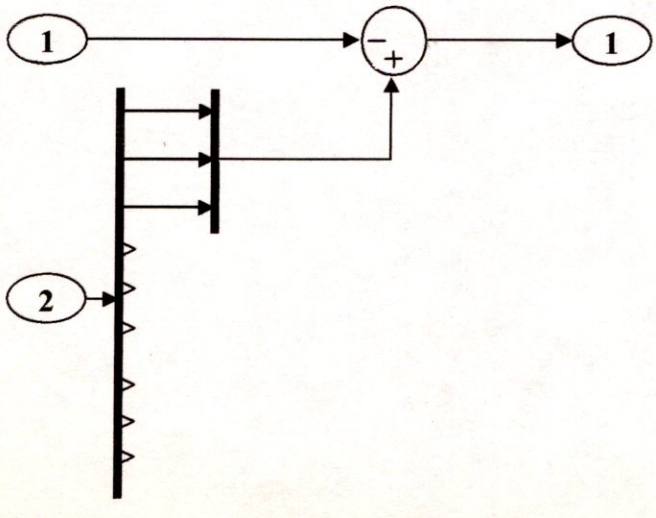


FIG IV.10 Signal Erreur

- **Le module Filtre de Kalman :** le rôle de ce filtre est d'extraire les mesures exactes pour générer une trajectoire optimale de l'aéronef. Il se compose de :

La matrice A est une matrice de transition entre les instants K et K+1 composée par les entrées (matrices) D et Aen_n, afin de construire notre matrice on à utilisé le composant **Matix concatenation.**

La matrice Qk est une matrice diagonale de densité spectrale, utilise Rb_n, Q (matrice des erreurs de gyros) comme entrées, ces entrées sont concaténés afin de construire notre matrice.

Le gain K : est le gain du filtre de Kalman contient l'équation IV.30 réalisée par SIMULINK des liaisons complexe sont faites afin de construire cette fonction. Cette boite à comme entrée (H) la matrice d'observation, (P) la matrice de covariance des erreurs, (R1) la matrice des erreurs de mesures et Tk les instances de mesures.

Le générateur d'impulsion : utilisé pour préciser le temps d'élaboration des mesures GPS.

Le composant Selectore : sont rôle est d'activer l'étape de correction en cas d'existence des mesures.

Le composant 1/z est utilisé comme une mémoire pour mémoriser le vecteur d'état précédent et la matrice de covariance d'erreurs précédente.

Filtre de Kalman

Dans ce stade, deux étape principales à discuter.

L'étape de prédiction :

Le **Matrix Mul(1)** réalise le produit entre la matrice de transition A calculée en utilisant les matrice D et A_{en_n} du navigateur inertiel, et le vecteur d'état précédemment mémorisé **,** afin de calculer Le nouveau vecteur d'état (l'entrée B de Sélecteur 1).

Le **Matrix Mul(2)** réalise le produit entre la matrice A , sa transposé et la matrice P précédente, le résultat est sommé avec la matrice Q_k qui est calculée en utilisant la matrice de covariance des erreurs gyroscopiques et la matrice de passage R_{b_n} (l'entrée B de Sélecteur2), afin de calculer la nouvelle matrice P estimée.

L'étape de correction :

Le **Matrix Mul(5)** fait le produit entre la matrice H du transition d'observation et le gain de Kalman K calculé en utilisant la matrice H , la matrice de covariance des erreurs de mesures et la matrice P , le résultat est sommé avec une matrice identité (9,9) puis le produit avec la matrice P précédente , afin de calculée la matrice P corrigée (l'entrée A électeur 2).

Le **Matrix Mul(4)** fait le produit entre la matrice H et le vecteur d'état précédent ,le résultat est sommé avec le vecteur d'observation , puis multiplié par le gain K et additionné avec le vecteur d'état , le tout est injecté dans l'entrée A de Sélecteur 1.

Les deux sélecteurs « Sélecteur 1, Sélecteur 2 » : basculent entre les états A et B en cas de présence de mesure ou pas, dont l'état A indique qu'il y a une mesure et donc la prendre en considération dans les calcules par contre l'état B laisse évolué la boucle del'éstimation.

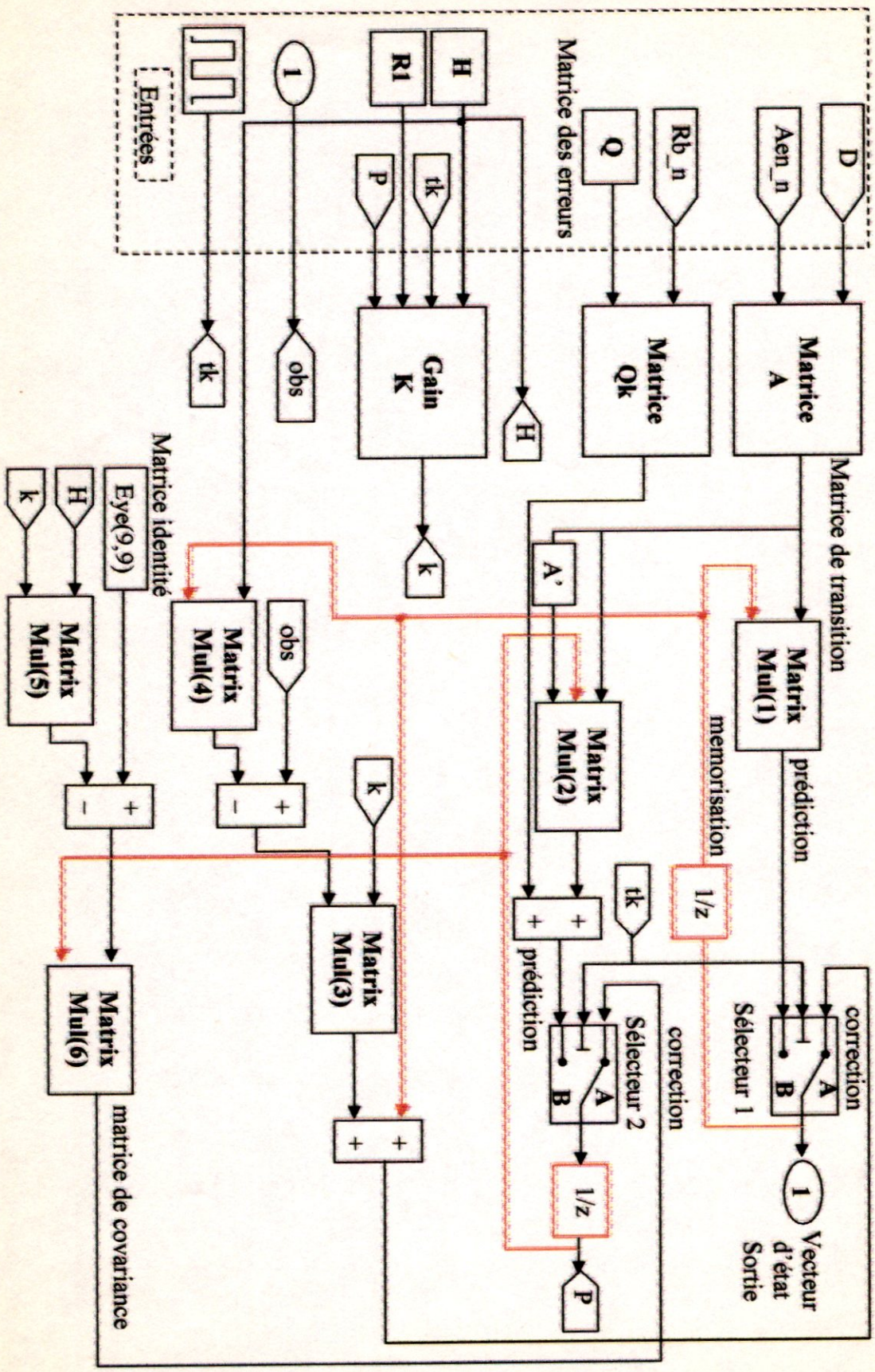


FIG IV.11 Filtre de Kalman en boucle ouverte

IV.1.2. Système en boucle fermée

Dans le système en boucle fermer comme il est représenté dans la figure IV.2, la sortie de filtre de KALMAN est injectée dans le navigateur inertiel, afin de la mise jour des paramètres internes de navigateur inertiel .

Si les erreurs estimées sont retournées à l'INS, les états pour lesquels le feedback a été appliqué doivent être mises à zéro (figue IV.12). Par exemple, si on applique le feedback de position, alors seules les erreurs relatives à la position sont réinitialisées.

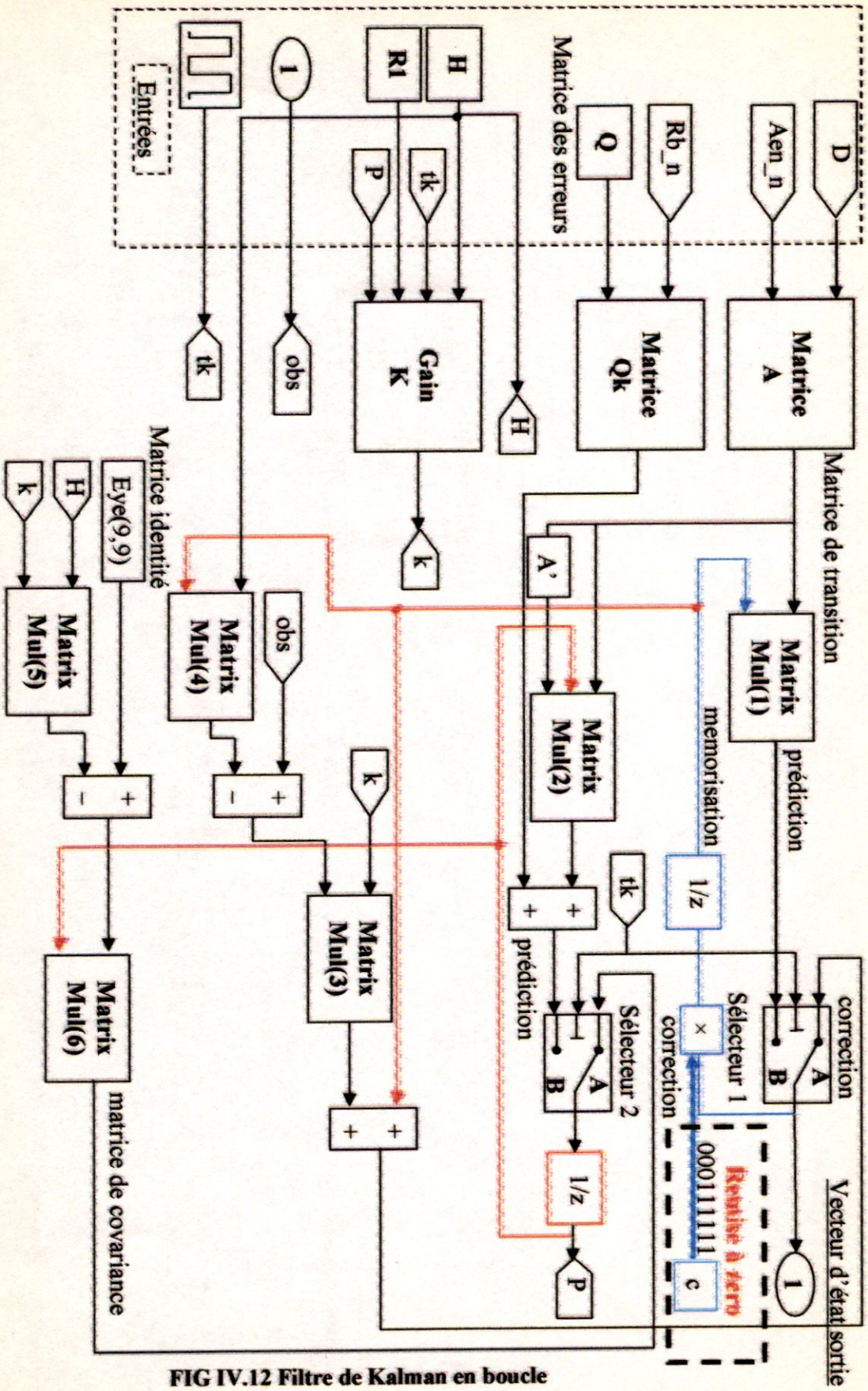


FIG IV.12 Filtre de Kalman en boucle

IV.7-Les résultats obtenues

Pour toutes les trajectoires de références figurées dans les prochains essais une couleur jaune a été choisit pour les représenter, ces trajectoires gardent la même allure pendant tous les essais.

IV.7.1 Boucle ouverte 09 variables

Le tableau suivant montre les différents essais de notre simulation.

	Paramètres de vol			temps	Bruits gyros			Bruits accéléro		
Essais	**Vitesse m/s**	**Position (°)**	**orientation (°)**	**t (s)**	**ω_x rad/s**	**ω_y rad/s**	**ω_ z rad/s**	**f_x m/s^2**	**f_y m/s^2**	**f_z m/s^2**
1	150	0 0 0	0 0 45	500	0.002	0	0	0.2	0.3	0
2	150	0 0 0	0 0 45	500	0.005	0	0	0.2	0.3	0
3	200	0 0 0	0 0 45	500	0.002	0	0	0.2	0.3	0
4	150	0 0 0	0 0 90	500	0.002	0	0	0.2	0.3	0
5	150	0 0 0	0 0 180	500	0.002	0	0	0.2	0.3	0
6	150	20 10 0	0 0 45	500	0.002	0	0	0.2	0.3	0

Tableau IV.1 paramètres de simulation

Les essais

La figure IV.13 se compose de deux sous-figures différentes, celui du dessus présente la variation de la latitude au cours du temps pour les trois composants réel, référence, mesures GPS et Kalman :

D'après la figure, on voit très bien que la trajectoire GPS oscille autours de la trajectoire de référence et cela due à l'effet du bruit injecté.

Il est bien évident que la trajectoire réelle diverge par rapport à celle de référence, cette évidence s'impose a cause de l'accumulation des erreurs à chaque étape de calcule.

La trajectoire de Kalman semble la plus optimale que les autres, elle est caractérisé par le lissage par rapport à la trajectoire GPS, elle est très mince du fait que le filtre de Kalman tend la faire rapprocher vers la trajectoire de référence chaque divergence.

Après environ 278s de simulation en vois que (figure IV.13) la « Latitude » varie de 0° à plus de 0.38° avec une différence d'environ 0.12° à celle de référence. Tant dit que La trajectoire kalman fait une différence de 0.01°, cela fait une erreur de m.ca pour la latitude

Pour longitude, après 278s elle varie de 0° jusqu'à -0.5° avec une différence de 0.7° à celle de référence. tant dit que kalman suit la trajectoire de référence 0.2°

Conclusion générale

Les objectifs principaux de cet travaille est de développer et examiner des méthodes pour améliorer l'exactitude des systèmes de navigation. La recherche menée aux contributions principales suivants:

L'élaboration d'une méthode de recalage, qui peut être employée pour recaler la CI strapdown dans un laboratoire avant de commencer une mission.

Le développement de la mécanisation d'une centrale inertielle et l'intégration du filtre de Kalman dans l'hybridation INS/GPS;

Un filtre de Kalman de (09) et (15) variables dans le vecteur d'état a été employé pour supprimer les biais du vecteur d'état, comme elles peuvent être estimées par la nouvelle méthode de recalage.

Une mécanisation de navigation d'une centrale inertielle a été développée, qui fournit semblable exactitude à l'aide de matlab \simulink.

Beaucoup d'issues, qui doivent être considérés à l'exécution de l'INS/GPS Le filtre de Kalman, ont été discutés, résolvant la différence de temps entre les mesures d'INS et de GPS, et la rétroaction des erreurs estimées.

Au cours de cette année, on put apprendre la méthode adéquate pour la mécanisation de la centrale inertielle décrite dans les chapitres de cette thèse. Beaucoup de difficultés ont été présentes à la réalisation de notre modèle a cause de la complexité de ce domaine, d'une part, au niveau du modèle mathématique très compliqué que nous avons dépensé beaucoup de temps pour le comprendre et l'apprendre et d'autre part, au niveau du logiciel MATLAB précisément le Simulink qui à été considéré comme nouvelle et étrange méthode de programmation. Aussi la modélisation des processus et des erreurs de même que les problèmes de paramétrage (le réglage des paramètres du filtre), d'initialisation et de mise en oeuvre des filtres.

A présent, nous avons bien été familiarisé avec cette méthode et à cause des restrictions en temps, nous avons pus mettre en point que le recalage en position seulement. Finalement nous espérons que le présent document servira pour les futures promotions comme un outil de base de réflexion pour d'autres projets.

Références bibliographiques

[ALF 04] Alfred A,"Atelier d'outils informatiques pour la phisuque (infophys)", "Elément de MATLAB" université de Genève, 2004.

[BRO 97] Robert G. Brown, Patrick Y.C. Hwang, *"Introduction to Random Signals & Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions"*, 3rd edition, John Wiley & Sons, November 1997.

[CAN 99] M.E. Cannon, G. Lachapelle, and H. Sun *"Development and Testing of an Integrated INS/GPS Cross-Linked System for Sub-Meter Positioning of A CF-188 Jet Fighter"*. Institute of Navigation Annual Meeting/Cambridge/June 28-30, 1999.

[CHA 84] Chaleyat - Maurel, M. and Michel, D. « Des résultats de non existence de filtre de dimension finie » in Stochastics, vol. 13, pp. 83 – 102, 1984.

[CLD 92] Claude Alari, "instruments de radionavigation", Département du transport aérien, 6^{m} édition 1992.

[FAR 98] J. A. Farrell, and M. Barth, *"The Global Positioning System & Inertial Navigation"*, McGraw–Hill, 1998.

[JEA 94] Jean jonquiere "Système de navigation par satellites Navstar –GPS", département électronique 1994

[JUL 96] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. (1996) "A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions." Technical report, RRG, Dep. Of Engineering Science, University of Oxford.

[JUL 97] Julier, S. J.; Uhlmann, J. K., "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems", The Robotics Research Group, Dept. of Engineering Science, The University of Oxford.

[KAL 60] Kalman, R. E., "A new approach to linear filtering and prediction problems" vol. 82, pp. 34 – 45, 1960.

[KAL 61] Kalman, R. E. and Bucy, R. "A new approach to linear filtering and prediction problems theory" vol. 83, pp. 95 – 108, 1961.

[KEL 94b] A. Kelly, *"A 3D Space Formulation of a Navigation Kalman Filter for Autonomous Vehicles"*, tech. report CMU-RI-TR-94-19, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, May, 1994.

[OHL 02] E. J. Ohlmeyer, T.R., Pepitone, B. L. Miller, *"GPS-Aided Navigation System Requirements for Smart Munitions and Guided Missiles"*, 37th Annual Gun and Ammunition Symposium. April 15-18, 2002, Panama City, Florida, USA. pp. 1-16.

[PHA 01] Pham, D. T., "Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems" Monthly Weather Review, vol. 129, no. 5, pp. 1194 – 1207, 2001.

[PHI 91] Charles L. Phillips, Royce D. Harpor. *"Feedback control system"*, Prentice Hall Inc.1991.

Références bibliographiques

[SAL 00] O. S. Salychev, V. V. Voronov, M. E. Cannon, Nayak, N., and G. Lachapelle, *"Low cost INS/GPS integration: Concepts and testing"*. In Proceedings of the ION National Technical Meeting, pages 98-105, Anaheim, CA, 2000.

[SPI 96] Jr. Spilker, *"Global Positioning System: Theory and Applications"*. Volume I, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, Washington D. C., USA, 1996.

[SUK 99] S. Sukkarieh, M. Eduardo, *"A High Integrity IMU/GPS Navigation Loop for Autonomous Land Vehicle Applications"*, IEEE Transactions on robotics and automation, Vol. 15, No. 3, June 1999.

[WAN 01] Wan, E. A., and R. van der Merwe. "The Unscented Kalman Filter, In *Kalman Filtering and Neural Networks"*, S. Haykin (ed.), Wiley Publishing, 2001.

[WAN 00a] Wan, E. A., and R. van der Merwe. *"The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation"*. In Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control (AS-SPCC), IEEE Press, 2000.

[WAN 00b] E.Wan, R. van derMerwe, and A. T. Nelson, "Dual Estimation and the Unscented Transformation," in *Neural Information Processing Systems 12*. 2000, pp. 666–672, MIT Press.

[ZHA 03] X. Zhang, *"Integration of GPS with A Medium Accuracy IMU for Metre-Level Positioning"*, UCGE Reports Number 20178 June 2003.

Annexes

ANNEXE A : Probabilité et variables aléatoires

Cette annexe est une introduction de base à la probabilité et aux variables aléatoires et les modèles de bruit utilisés dans le Filtre de Kalman. Pour plus de détails, voir par exemple [MAY 79] et [BRO 97].

La Probabilité

On admet qu'à chaque événement A est associé un nombre p(A) , compris entre 0 et 1 et qui mesure la probabilité de réalisation de A . Intuitivement, p(A) est la fréquence de réalisation de A au cours d'un très grand nombre de mises en oeuvre de l'expérience aléatoire considérée. Formellement, la probabilité qui est les résultats d'un événement discret (par exemple, une chiquenaude de pièce de monnaie) favoriseront un événement particulier sont définis par :

$$p(A) = \frac{\text{Résultats possibles favorisant l'événement A}}{\text{Nombre total des résultats possibles}} = \frac{n_A}{N} \qquad \text{Eq.A.1}$$

Si A et B sont deux événements *incompatibles*, la probabilité des résultats favorisant ces deux événements est donnée par : (Autrement dit, La fréquence de réalisation de $A \cup B$ est la somme des fréquences de réalisation de A et de B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{Eq.A.2}$$

Si la probabilité de deux résultats est *indépendante* (l'un n'affecte pas l'autre) puis la probabilité qui se produisent *de tous les deux* est le produit de leurs différentes probabilités:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{Eq.A.3}$$

Par exemple, si la probabilité de voir "faces" sur une chiquenaude de pièce de monnaie est 1/2, puis la probabilité de voir "faces" sur toutes les deux pièces de monnaie renversées en même temps est 1/4. (Clairement les résultats d'une chiquenaude de pièce de monnaie n'affectent pas l'autre). La *probabilité conditionnelle* : La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier l'idée qu'on se fait de la probabilité d'un évènement. La probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est supérieure si le ciel est nuageux.

Soient A et B deux évènements tels que $P\ [B] \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{Eq.A.4}$$

Les variables aléatoires

Les signaux aléatoires qui ne peuvent pas être décrits avec des fonctions mathématiques explicites telles que des signales sinusoïdaux, des fonctions d'échelon « step functions », etc.Leur description doit être mise en termes probabilistes. La probabilité joue un rôle principal dans la description du bruit comme ces signaux aléatoires.

Dans le cas des variables aléatoires continues, la probabilité de n'importe quel événement discret unique A est en fait 0. C'est-à-dire $p\ (A) = 0$. Au lieu de cela nous pouvons seulement évaluer la probabilité des événements dans un certain intervalle. Une fonction commune représente la probabilité des variables aléatoires est définie comme *fonction de distribution cumulée :*

$$F_X(x) = P(-\infty, x)$$ **Eq.A.5**

Cette fonction représente la probabilité cumulée de la variable aléatoire continue X pour tous les événements jusques et y compris le x. Des propriétés importantes de la fonction de densité cumulative sont :

$F_x(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$

$F_x(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$

$F_x(x)$ est une fonction en x non décroissante

Généralement, c'est la dérivée de l'équation A.5 est utilisée, c'elle la *fonction de densité de probabilité :*

Suivant aux propriétés données ci-dessus de la fonction de probabilité cumulée, la fonction de densité a également les propriétés suivantes:

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$ **Eq.A.6**

1. $f_x(x)$ est une fonction non-négative.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$ **Eq.A.7**

Enfin, notez que la probabilité pendant n'importe quel intervalle $[a, b]$ est définie comme :

$$P_x[a,b] = \int_b^a f_x(x)dx$$ **Eq.A.8**

Ainsi plutôt que de faire la somme des probabilités des événements discrets comme dans l'équation A.2, on intègre la fonction de densité de probabilité pendant l'intervalle d'intérêt pour des variables aléatoires continues

Moyenne et Variance

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n observations d'une variable aléatoire X. Nous voulons mesurer la moyenne de $X_1, X_2, ..., X_n$ Une des statistiques les plus couramment utilisées est l'écart moyen « la moyenne mathématique », μ_x défini par la formule :

$$\mu_x = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ **Eq.A.9**

La valeur prévue « Espérance » de la variable aléatoire discrète a pu être approximée en faisant la moyenne des événements à probabilités pondérées:

$$\overline{X} = \frac{(P_1 N)x_1 + (P_2 N)x_2 + ... + (P_n N)x_N}{N}$$ **Eq.A.10**

Cette notion d'épreuves infinies (échantillons) mène à la définition conventionnelle *de l'espérance* pour des variables aléatoires discrètes. L'espérance de X est :

$$X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$ **Eq.A.11**

De même pour la variable aléatoire continue l'espérance est définie comme :

$$X = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \qquad \text{Eq.A.12}$$

L'espérance d'une variable aléatoire est également connue comme la *moment statistique d'ordre 1*.Mesurons ensuite la variabilité des données ou « la dispersion des données ». Les statistiques les plus souvent utilisées sont les variances σ_x^2 et les écarts types $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ Nous avons

$$\sigma_x = \sqrt{E\left[(X - E(X))^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right\}} = \sqrt{E(X^2) - E\,X^2} \qquad \text{Eq.A.13}$$

Les Fonctions d'autocorrélation

Une caractéristique utile liée à un signal aléatoire est son *autocorrélation*, soit sa corrélation avec lui-même à travers le temps. La corrélation est une manière de penser à la distribution de probabilité d'un processus aléatoire et de son évolution avec le temps. *La fonction d'autocorrélation* $R_{xx}(\Delta t)$. pour une processus ou variable aléatoire) $(x(t)$ est définie comme :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \qquad \text{Eq.A.14}$$

Pour les instants t_1 et t_2. Si le processus est *stationnaire* (la densité est invariable avec le temps) alors l'équation A.13 dépend seulement de la différence $\Delta t = t_2 - t_1$. Dans ce cas l'autocorrélation peut être réécrite comme :

$$R_{xx}(\Delta t) = E[x(t)x(t + \Delta t)] \qquad \text{Eq.A.15}$$

Ainsi, c'est l'espérance du produit de deux variables aléatoires fonction du temps. Le résultat est une fonction des deux temps. Soit $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, alors, la fonction d'autocorrélation est, de par la définition de l'espérance

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) d x_1 d x_2 \qquad \text{Eq.A.16}$$

Où $f(x_1, x_2)$ est la distribution jointe de probabilité. La fonction d'autocorrélation donne la"tendance" d'une fonction d'avoir le mêmes signe et grandeur (c.-à-d. être corrélé) à deux instants différents.

La densité spectrale de puissance (DSP) :

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, ainsi:

$$S_{xx}(j\omega) = \Im[R_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad \text{Eq.A.17}$$

La densité spectrale de puissance est une mesure directe du contenu en fréquence d'un signal, et par conséquent, de son contenu de puissance. Naturellement, la transformée de Fourier inverse retourne l'autocorrélation.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega)e^{J\omega\tau}\,d\omega \qquad \text{Eq.A.18}$$

De même, la fonction spectrale de densités de puissance croisées est :

$$S_{xy}(j\omega) = \Im[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad \text{Eq.A.19}$$

Les processus aléatoires [MOU 99] et les modèles de bruit du Filtre de Kalman:

Avant de se pencher sur le filtre de Kalman expliqué dans le chapitre 3, il est nécessaire d'étudier les modèles d'erreur sur lesquels il est basé. Cette section présente une discussion abrégée des aspects de la théorie des signaux aléatoires qui sont exploités dans le rapport. Des sources de bruit dans le filtre de Kalman sont modélisées en tant que processus aléatoires. Le processus aléatoire peut être considéré pour comme une collection de fonctions de temps appelées un ensemble. D'habitude, la variation statistique de l'ensemble de fonctions à tout moment est connue. [KEL 94b] et [JIM 00, p93].

Il est possible de définir et de comprendre le modèle de bruit du filtre de Kalman. Les bruits modélisés dans un filtre de Kalman doivent être:

- Gaussiens (ayant une distribution gaussienne)
- Centrées (non biaisés) (ayant un moyenne nulle)
- Blancs (contient toutes les fréquences)

Ce modèle est une idéalisation mathématique puisque le bruit blanc ne peut pas se produire dans la nature parce qu'il exige une énergie infinie. Les formules de la section suivante permettent d'exprimer ces processus de bruit blancs sous forme de variances et de covariances qui sont plus facile d'assimiler.

Les modèles stochastiques normalement utilisés par les concepteurs du filtre de Kalman pour décrire des variables aléatoires sont des modèles linéaires simples tels que : biais (constante) aléatoire, un bruit blanc, une marche aléatoire et un processus de Markov, ou un processus périodique. Ceux-ci sont suffisamment décrits dans [GEL 74] et [BRO 97] et sont habituellement distingués par leurs fonctions d'autocorrélation distinctes

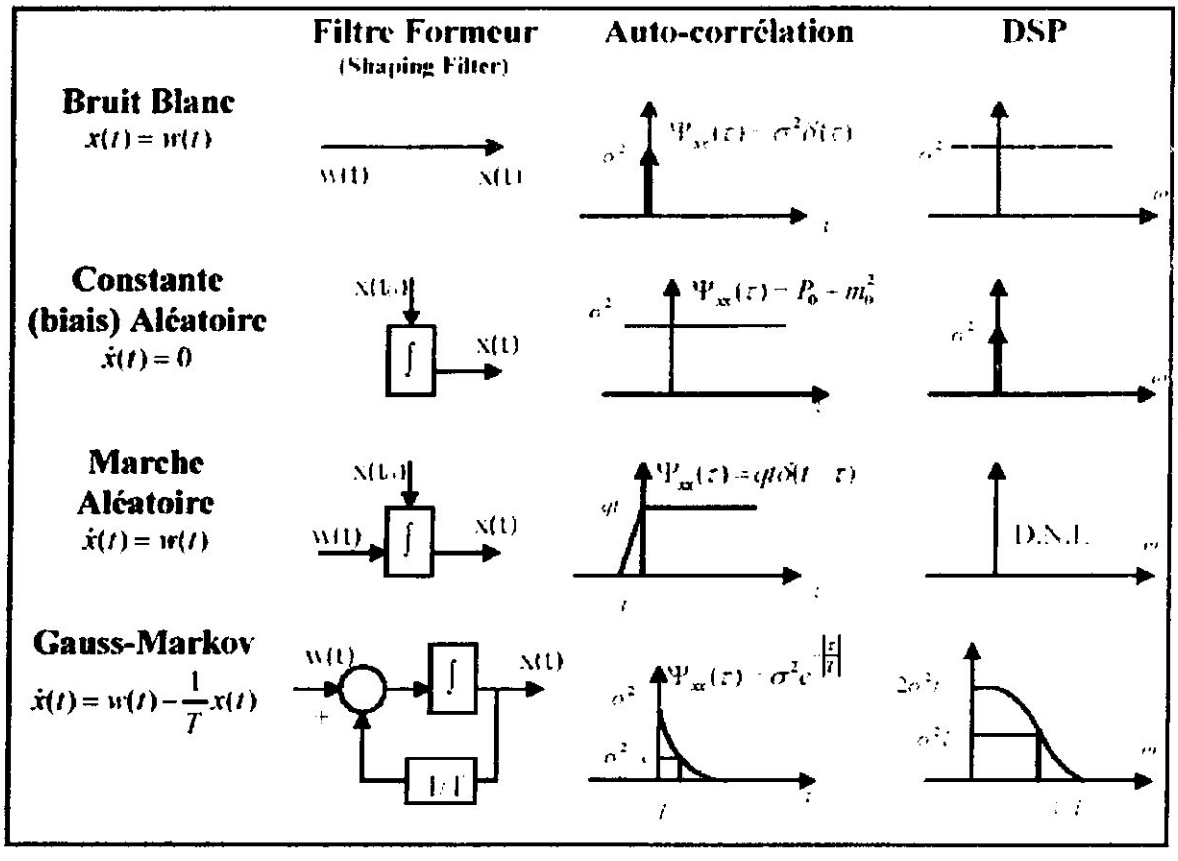


Fig.1 : Les fonctions (filtres) formeurs (Gelb 1974 et [JIM00]et[May97]

Bruit Blanc (« white noise », noté w)

Le bruit blanc est défini comme un processus aléatoire stationnaire dont la fonction de densité spectrale de puissance (PSD) est constante, cela signifie que le bruit blanc est un processus aléatoire centré dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences et qu'il contient toutes les fréquences d'amplitudes égales. Si l'amplitude spectrale constante est A , alors la fonction d'autocorrélation correspondante est donnée par la transformée inverse de Fourier d'une constante, qui est le delta de Dirac $\delta(\tau)$ « La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est une impulsion de Dirac ». C'est à dire que la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire gaussien blanc zéro centré

$x(t)$ est :

$$R(\tau) = A\delta(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \qquad \text{Eq.A.20}$$

La variance d'un processus d'un bruit blanc est égale à son amplitude spectrale. La valeur d'un signal de bruit blanc à un certain instant ne dit absolument rien au sujet de sa valeur à n'importe quelle autre instant

Constante aléatoire (random bias (constant))

Une constante aléatoire satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = 0, y(0) = a_0 \qquad \text{Eq.A.21}$$

L'état initial $_0a$ est une variable aléatoire dont la distribution est présumée connue. L'équation de déférence aura la forme suivant :

$$y(t+1) = y(t) + a_0$$ **Eq.A.22**

Marche Aléatoire ("Winner process" ou "Brownian-motion process" ou "random walk" [BRO 97 p100 p196])

Le processus de Winner est défini comme l'intégrale d'un bruit blanc gaussien avec un état initial égal à zéro (l'intégration d'un bruit blanc gaussien mène à un effet appelé marche aléatoire). Ainsi le modèle approprié d'état est sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = ku(t); y(0) = 0$$ **Eq.A.23**

là où $u(t)$ est l'unité d'un bruit blanc gaussien et k est un facteur d'échelle.
L'équation de déférence aura la forme,

$$y(t+1) = (I + kdt)y(t)$$ **Eq.A.24**

où dt est la fréquence d'échantillonnage.

Ainsi la variance de l'intégrale du bruit blanc croît linéairement avec le temps. En outre, l'écart type croît avec la racine carrée du temps.

Processus Aléatoire Gaussien

La distribution normale ou gaussienne est très populaire et sert souvent à modéliser les systèmes aléatoires, beaucoup de processus aléatoires se produisant dans la nature semblent réellement être normalement distribués, ou très proche d'être normalement distribués.

Un processus aléatoire est un processus gaussien si pour tout ensemble d'instants $\{t_i\}$, le vecteur aléatoire correspondant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $x_i = x_i(t)$, possède une densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussienne. Chaque x_i possède une densité de probabilité marginale :

$$p_{xi} = \frac{1}{\sigma_{xi}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_{xi})^2}{2\sigma_{xi}^2}\right]$$ **Eq.A.25**

Où σ_{xi} et μ_{xi} sont des constantes. Le paramètre μ_{xi} est la moyenne de la population, et l'écart type est égale à σ_{xi}. La loi normale (ou la loi de Gauss) de moyenne m et d'écart type σ sera représentée simplement par le symbole :N (m, σ)

Processus aléatoire de Gauss-Markov (Markov process)

Un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ s'appelle un processus de Gauss-Markov si sa fonction d'autocorrélation est de la forme (Tableau 1):

$$R_{xx}(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{-\beta|\tau|}$$ **Eq.A.26**

On remarque qu'elle est décrite par deux paramètres: son RMS σ et sa constante de temps $T = 1/\beta$ La fonction exponentielle d'autocorrélation indique que les valeurs d'échantillon du processus

deviennent graduellement de moins en moins corrélées au fur et à mesure que le temps de séparation τ entre les échantillons augmente [BRO 97 p.95].

Ce processus simple de Gauss-Markov dont la fonction d'autocorrélation est exponentielle est parfois mentionné comme processus de Gauss-Markov du premier ordre. C'est parce que la version discrète de temps du processus est décrite par l'équation suivante de premier ordre de la forme :

$$X(t_{K+1}) = e^{-\beta\Delta t} X(t_K) + W(t_K) \qquad \text{Eq.A.27}$$

Ou par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 + w_1 \qquad \text{Eq.A.28}$$

là où $W(t_k)$, $w_1$est une séquence non-corrélée de distribution gaussienne de moyenne nulle (bruit blanc) [BRO 97 p.96].

Eq.A.29

Le processus de Markov de premier ordre est probablement le modèle stochastique le plus utile, puisque le biais (constant) aléatoire et le bruit blanc sont tous les deux, dans un certain sens, des cas particuliers du processus de Markov. Nous déduisons qu'il y a une représentation générale pour le biais aléatoire et le bruit blanc, dépendant de la valeur de β.

$$\sigma^2 e^{-\beta\tau} \approx \sigma^2 (1 - \beta\tau) \qquad \text{Eq.A.30}$$

En équation B.24, si $T = 1/\beta$ est très grand, ce processus de Markov se comportera essentiellement comme biais aléatoire (corrélé), et si $T = 1/\beta$ est très petit, elle se comportera comme un bruit blanc (non corrélé, mais forte corrélation à zéro !). L'équation B.24 fournit donc un "modèle" idéal à utiliser en extrayant les paramètres du modèle d'erreur (σ et $T = 1/\beta$) à partir d'une fonction d'autocorrélation.

Maintenant en utilisant la définition donnée ci-dessus, nous pouvons obtenir "une fonction d'autocorrélation" du $x(t)$ mesuré (dans ce cas-ci, par exemple les erreurs systématiques (biais) de la CI). Alors, en appariant la tracé de cette fonction d'autocorrélation R_{xx} au modèle de l'équation B.24, les paramètres modèles σ et $T = 1/\beta$ peuvent être facilement extraits comme suit. La valeur initiale est σ^2:

$$\sigma^2 = R_{xx}(0) \qquad \text{Eq.A.31}$$

et le poit ou R_{xx} baisseà σ^2/e et $T = 1/\beta$:

$$R_{xx}(T) = \sigma^2 e^{-1} \qquad \text{Eq.A.32}$$

Stationnarité et Ergodicité [BRO 97 p.78]
Stationnarité :

Un processus aléatoire est dit stationnaire si les paramètres statistiques (moyenne et écart type) du processus ne changent pas avec le temps, (le système est supposé avoir des paramètres fixes) (Challis et Kitney novembre 1991).

Un processus *faiblement* stationnaire a une moyenne et une fonction d'auto-corrélation (donc une variance) constantes.

Un processus est véritablement stationnaire (ou fortement stationnaire) lorsque tous les moments sont constants (y compris la variance et la moyenne).

Ergodicité :

Un processus aléatoire est *ergodique* si ses moments peuvent être obtenus comme des moyennes à partir d'une seule de ses réalisations (réalisation □ß ensemble d'échantillons). De même, un signal aléatoire serait ergodique si la moyenne instantanée est équivalente à la moyenne d'ensemble. Dans le sens qualitatif ceci implique qu'un échantillon de signal du processus contient toutes les variations statistiques possibles du processus.

Ainsi, aucune information additionnelle ne doit être gagnée en observant un ensemble de signaux témoin en plus de l'information obtenue à partir d'un seul échantillon.On peu donc affirmer que pour qu'un processus soit érgodique, il doit nécessairement être stationnaire. L'inverse n'est pas vrai.

ANNEXE B : Linéarisation par différenciation

L'analyse de l'erreur utilise la différenciation pour linéariser les équations différentielles de notre système Eq.2-44. L'expansion par série de Taylor utilisée pour la linéarisation d'une fonction $f(x)$ est évaluée autour d'un certain point nominal connu $f(x_0)$, [GRE 01b] et [BRI]

L'état (ou la trajectoire) réelle $\widetilde{x}^n$, peut être écrit en termes de x^n et d'erreur δx^n comme suit :

$$\widetilde{x}^n = x^n + \delta x^n \qquad \textbf{Eq.B.1}$$

Par exemple, les perturbations de la position, la vitesse, l'attitude, et de la gravité peuvent être exprimées comme :

$$\widetilde{r}^n = r^n + \delta r^n \qquad \textbf{Eq.B.2}$$

$$\widetilde{v}^n = v^n + \delta v^n \qquad \textbf{Eq.B.3}$$

$$\widetilde{R}_b^n = (I - E^n) R_b^n \qquad \textbf{Eq.B.4}$$

$$\gamma^n = g^n + \delta g^n \qquad \textbf{Eq.B.5}$$

Où γ^n signifie le vecteur normal de gravité sur l'ellipsoïde. Le $\wedge$ et δ indiquent les valeurs d'état calculées et les erreurs, respectivement. E^n est la matrice antisymétrique représentant les erreurs d'orientation.

$$E^n = S(\delta\rho^n) = (\xi^n\times)\begin{pmatrix} 0 & -\xi_D & \xi_E \\ \xi_D & 0 & \xi_N \\ -\xi_E & \xi_N & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.6}$$

La dérivation de l'équation B.4 est expliquée en [BRI 71]

Modèles dynamiques de l'erreur inertielle (position, vitesse, attitude) :
Le modèle dynamique de l'erreur en position

On peut obtenir le modèle dynamique linéarisée de l'erreur en position par la différenciation de l'équation Eq.3-38 (les équations dynamiques pour la position géodésique). Puisque les équations dynamiques de la position sont des fonctions de la position et de la vitesse, les équations dynamiques d'erreur en position peuvent être obtenues en utilisant les dérivées partielles :

$$\delta\dot{r}^n = F_{rr}\delta r^n + F_{rv}\delta v^n \qquad \textbf{Eq.B.7}$$

$$F_{rr} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial h} \\ \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial\dot{h}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ \frac{v_E \sin\varphi}{(r_T + h)\cos^2\varphi} & 0 & \frac{v_E}{(r_T + h)\cos\varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.8}$$

$$F_{rv}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_D}\\ \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_D}\\ \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r_M+h} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(r_T+h)\cos\varphi} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.9}$$

Et r_M, r_T sont les rayons de courbure Méridional (nord - sud) et Transversal (est-ouest).

Le modèle dynamique de l'erreur en vitesse :

L'équation dynamique de la vitesse peut être exprimée comme :

$$\dot{\hat{v}}^n=\hat{\Re}_b^n\tilde{f}_{ib}^b-(2\hat{\omega}_{ie}^n+\hat{\omega}_{en}^n)\times\hat{v}_{en}^n+\gamma^n \qquad \textbf{Eq.B.10}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$\dot{v}^n+\delta\dot{v}^n=(I-E^n)\Re_b^n(f_{ib}^b+\delta f_{ib}^b)-(2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n+2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n)\times(v_{en}^n+\delta v_{en}^n)+g^n+\delta g^n \qquad \textbf{Eq.B.11}$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$\begin{aligned}\delta\dot{v}^n&=-(2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n)\times(v_{en}^n)+\delta g^n-(2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n)\times(\delta v_{en}^n)-\varepsilon^n\times f_{ib}^n+\Re_b^n\delta f_{ib}^b \qquad \textbf{Eq.B.12}\\ &=v_{en}^n\times(2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n)+\delta g^n-(2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n)\times\delta v_{en}^n+f_{ib}^n\times\varepsilon^n+\Re_b^n\delta f_{ib}^b\end{aligned}$$

les premier et deuxième termes peuvent être développées en fonction des erreurs de position et de vitesse.

$$2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n=\begin{pmatrix}2\omega_e\cos\varphi+v_E/(r_T+h)\\ -v_N/(r_M+h)\\ -2\omega_e\sin\varphi-v_E\tan\varphi/(r_T+h)\end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.13}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n=\delta\Omega_r\delta r^n+\delta\Omega_v\delta v^n \qquad \textbf{Eq.B.14}$$

$$\delta\Omega_r=\begin{pmatrix}-2\omega_e\sin\varphi & 0 & \frac{-v_E}{(r_T+h)^2}\\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(r_M+h)^2}\\ -2\omega_e\cos\varphi-\frac{v_E}{(r_T+h)\cos^2\varphi} & 0 & \frac{v_E\tan\varphi}{(r_T+h)^2}\end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.15}$$

$$\delta\Omega_v = \begin{pmatrix} 0 & 1/(r_T + h) & 0 \\ -1/(r_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan\varphi/(r_T + h) & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.16}$$

En utilisant l'éq. B.14, le premier terme du côté droit de l'éq. B.12, peut être développé en fonctions des erreurs de position et de vitesse :

$$\upsilon_{en}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (\upsilon_{en}^n \times)(\delta\Omega_r \delta r^n + \delta\Omega_v \delta v) = (\upsilon_{en}^n \times)\delta\Omega_r \delta r^n + (\upsilon_{en}^n \times)\delta\Omega_v \delta v \qquad \textbf{Eq.B.17}$$

En poursuivant la dérivation, nous obtenons :

$$(\upsilon_{en}^n \times)\delta\Omega_r = \begin{pmatrix} -2\upsilon_E\omega_e\cos\varphi & \dfrac{\upsilon_E^2}{(r_T + h)\cos^2\varphi} & 0 & \dfrac{-\upsilon_N\upsilon_D}{(r_M + h)^2} + \dfrac{\upsilon_E^2\tan\varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\omega_e(\upsilon_N\cos\varphi - \upsilon_D\sin\varphi) + \dfrac{\upsilon_E\upsilon_N}{(r_T + h)\cos^2\varphi} & 0 & \dfrac{\upsilon_E\upsilon_D}{(r_T + h)^2} & \dfrac{\upsilon_N\upsilon_E\tan\varphi}{(r_T + h)^2} \\ 2\upsilon_E\omega_e\sin\varphi & 0 & \dfrac{\upsilon_E^2}{(r_T + h)^2} & \dfrac{\upsilon_N^2}{(r_M + h)^2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.18}$$

$$(\upsilon_{en}^n \times)\delta\Omega_v = \begin{pmatrix} \dfrac{\upsilon_D}{r_M + h} & \dfrac{\upsilon_E\tan\varphi}{r_T + h} & 0 \\ 0 & \dfrac{\upsilon_D}{r_T + h} + \dfrac{\upsilon_N\tan\varphi}{r_T + h} & 0 \\ \dfrac{-\upsilon_N}{r_M + h} & \dfrac{\upsilon_E}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.19}$$

Le vecteur de pesanteur dans le repère de navigation, g_n est approximé par le vecteur normal de pesanteur $(0\ 0\ \gamma)^T$, et γ change avec l'altitude. Supposons un modèle sphérique de la terre et le modèle simplifié suivant de la pesanteur [ROG 00] :

$$\gamma = \gamma_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \qquad \textbf{Eq.B.20}$$

Là où γ_0 est la pesanteur normale à $h = 0$, et $R = r_T r_M$. Par la différenciation de la dernière équation on obtient :

$$\delta\gamma = -2\left(\frac{\gamma}{R+h}\right)\delta h \qquad \textbf{Eq.B.21}$$

En utilisant l'équations de B.13 à B.20, l'équation dynamique d'erreur dans la vitesse

peut être réécrite comme suit :

$$\delta\dot{\upsilon}^n = F_{\upsilon r}\delta r^n + F_{\upsilon\upsilon}\delta\upsilon^n + (f^n\times)\varepsilon^n + \Re_b^n\delta f^b \qquad \textbf{Eq.B.22}$$

$$F_{\upsilon r} = \begin{bmatrix} -2\upsilon_E\omega_e\cos\varphi - \dfrac{\upsilon_E^2}{(r_T+h)\cos^2\varphi} & 0 & \dfrac{\upsilon_N\upsilon_D}{(r_M+h)^2} + \dfrac{\upsilon_E^2\tan\varphi}{(r_T+h)^2} \\ 2\omega_e(\upsilon_N\cos\varphi - \upsilon_D\sin\varphi) + \dfrac{\upsilon_E\upsilon_N}{(r_T+h)\cos^2\varphi} & 0 & \dfrac{\upsilon_E\upsilon_D}{(r_T+h)^2} - \dfrac{\upsilon_N\upsilon_E\tan\varphi}{(r_T+h)^2} \\ -2\upsilon_E\omega_e\sin\varphi & 0 & \dfrac{\upsilon_E^2}{(r_T+h)^2} + \dfrac{\upsilon_N^2}{(r_M+h)^2} - \dfrac{2g}{(R+h)^2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.24}$$

$$F_{\upsilon\upsilon} = \begin{bmatrix} \dfrac{\upsilon_D}{r_M+h} & -2\omega_e\sin\varphi - \dfrac{2\upsilon_E\tan\varphi}{r_T+h} & \dfrac{\upsilon_N}{r_M+h} \\ 2\omega_e\sin\varphi + \dfrac{\upsilon_E\tan\varphi}{r_T+h} & \dfrac{\upsilon_D + \upsilon_N\tan\varphi}{r_T+h} & 2\omega_e\cos\varphi + \dfrac{\upsilon_E}{r_T+h} \\ -2\dfrac{\upsilon_N}{r_M+h} & 2\omega_e\cos\varphi + \dfrac{2\upsilon_E}{r_T+h} & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.23}$$

Le modèle dynamique de l'erreur sur l'orientation

Le résultat calculé de la mécanisation sur l'orientation fournie par l'équation Eq.3.38 peut être exprimé par :

$$\hat{\dot{R}}_b^n = \hat{R}_b^n(S(\hat{\omega}_{nb}^b)) = R_b^n(S(\hat{\omega}_{ib}^b) - S(\hat{\omega}_{in}^b)) = \hat{R}_b^n(\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{in}^b) \qquad \textbf{Eq.B.25}$$

En comparant la dérivée de l'équation B.4 à l'équation B.25, ceci donne :

$$\begin{aligned} -\dot{E}^n R_b^n + (I - E^n)\dot{R}_b^n &= (I - E^n)R_b^n(\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b + \delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ &= (I - E^n)R_b^n(\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) + (I - E^n)R_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \\ &= (I - E^n)R_b^n(\Omega_{nb}^b) + (I - E^n)R_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \end{aligned} \qquad \textbf{Eq.B.26}$$

par conséquent, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$-\dot{E}^n R_b^n = (I - E^n)R_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \qquad \textbf{Eq.B.27}$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation B.26 peut être réduite à :

$$\dot{E}^n = -R_b^n(\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b)R_n^b \qquad \textbf{Eq.B.28}$$

ou sous la forme vectorielle :

$$\dot{\varepsilon}^n = -R_b^n(\delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_{in}^b) \qquad \textbf{Eq.B.29}$$

Pour obtenir l'équation d'erreur pour $\delta\omega_{in}^{b}$ commençons , commençons par $\omega_{in}^{b} = R_n^b \omega_{in}^n$.

$$\omega_{in}^{b} + \delta\omega_{in}^{b} = R_n^b (I + E^n)(\omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n)$$

qui peut être développé a En écrivant les termes de premières d'ordre,

$$\delta\omega_{in}^{b} = R_n^b (\delta\omega_{in}^{b} + E^n \omega_{in}^n) = R_n^b \left[\delta\omega_{in}^n + (\varepsilon^n \times)\omega_{in}^n \right]$$

En utilisant les équations B.30 et B.28

$$\dot{\varepsilon}^n = \delta\dot{\omega}_{in}^n + (\varepsilon^n \times)\omega_{in}^n - R_b^n \delta\omega_{ib}^b) = \delta\dot{\omega}_{in}^n + (\omega_{in}^n \times)\varepsilon^n \quad R_b^n \delta\omega_{ib}^b)$$

En remplaçant le premier terme du côté droit par les termes d'erreur de position et de vitesse explicitement, les équations dynamiques d'erreur sur l'orientation peuvent être récrites comme :

Eq.B.30

$$\dot{\varepsilon}^n = F_{er}\delta r + F_{ev}\delta v^n - \omega_{in}^n \varepsilon^n \quad \Re_b^n \delta\omega_{ib}^b$$

$$F_{er} = \begin{pmatrix} -\omega_e \sin\varphi & 0 & \dfrac{v_E}{(r_T + h)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{v_N}{(r_M + h)^2} \\ -\omega_e \cos\varphi - \dfrac{v_E}{(r_T + h)\cos^2\varphi} & 0 & \dfrac{v_E \tan\varphi}{(r_T + h)^2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.31}$$

$$F_{ev} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{r_T + h} & 0 \\ \dfrac{-1}{r_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\tan\varphi}{r_T + h} & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Eq.B.32}$$

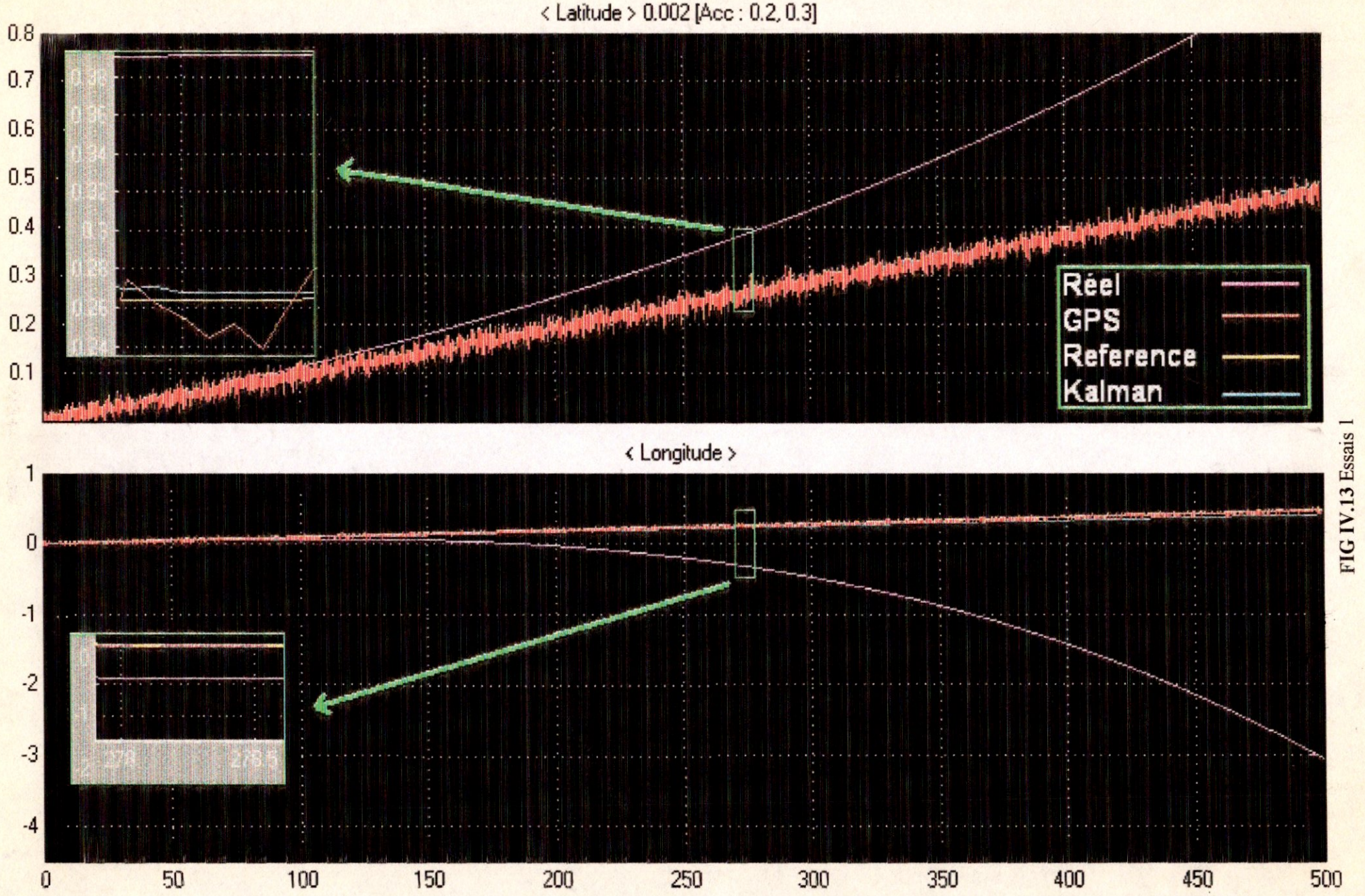


FIG IV.13 Essais 1

Pour la figure IV.14 on a utilisé un gyros de qualité mauvaise, on remarque que la trajectoire réelle diverge jusqu'à 1.1°pour la latitude et -7° pour longitude, donc la qualité de gyro à une grande importance sur le navigateur inertiel. Concernant la trajectoire de kalman se converge toujours vers la trajectoire de référence.

La latitude réelle atteint après 313s 0.47° avec une différence de 0.17 par rapport au trajectoire de référence (0.29°), en même temp Kalman atteint 0.32°.donc on peut remarque le rôle du fiktre de kalman de tel façon a suivre le référence malgré l'augmentation de bruit

Longitude réel après 313s atteint -1.6° avec une différence d'environ 2° par rapport à la trajectoire de référence .tant dit que kalman atteint 0.3°

Latitude

La trajectoire réel atteint après 313s 0.47°
La trajectoire référence après 313s 0.291°
La trajectoire mesures après 313s0.33°
La trajectoire kalman après313s 0.32

Longitude

La trajectoire réelle atteint après 313s -1.6°
La trajectoire référence après 313s 0.4 °
La trajectoire mesures après 313s0.4°

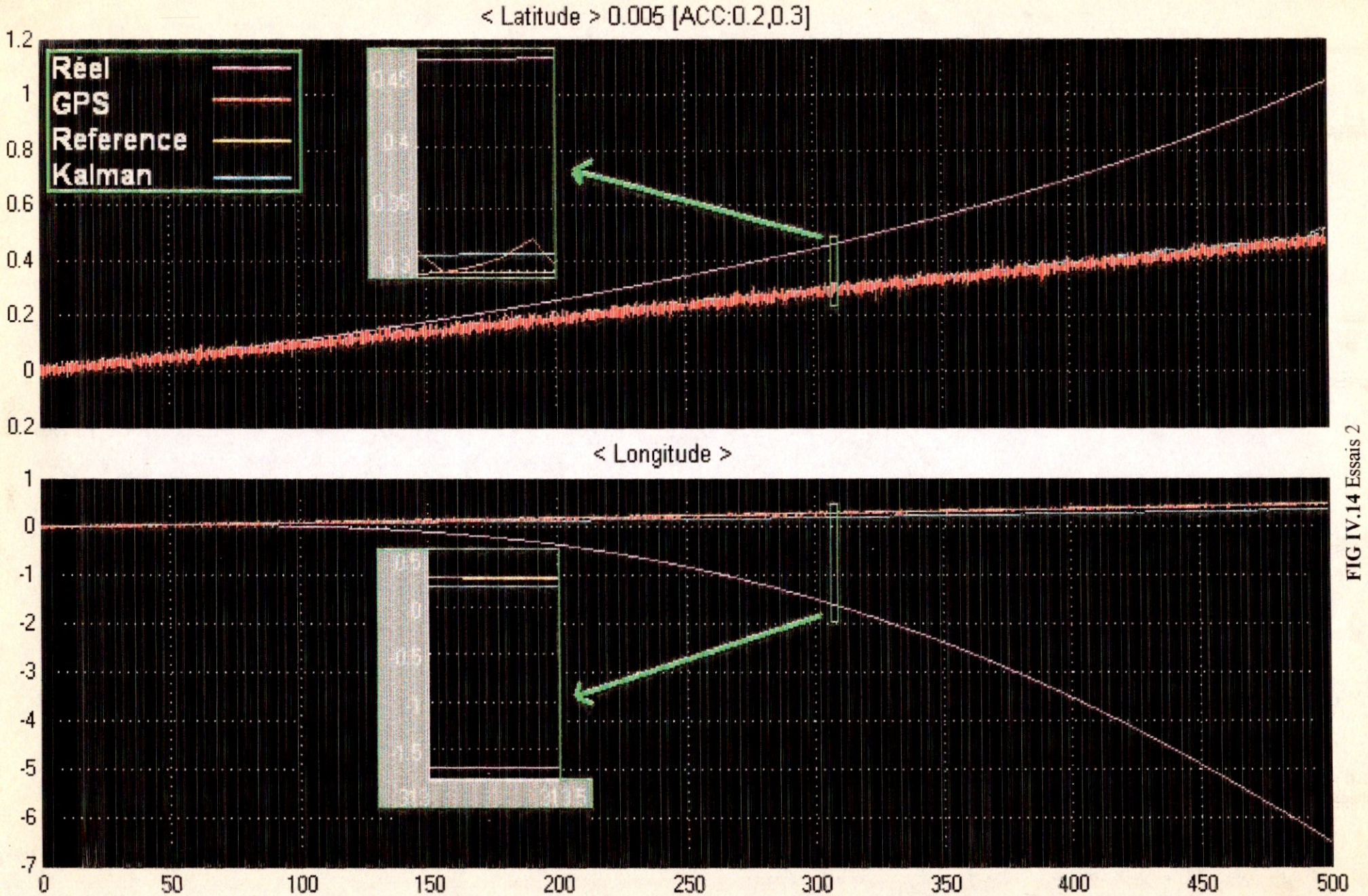


FIG IV.14 Essais 2

La figure VI.15 ci-dessous montre l'essai en cas de changement de vitesse, on a conclus que la variation de la vitesse n'a pas d'influence sur l'exactitude de notre calculateur , parce que la vitesse c'est une donnée de notre système ;et pas une erreur qui a une influence sur l'intégration numérique

Avec une vitesse de 200m/s la trajectoire réel atteint 1.2° comme latitude et -3° longitude

L'erreur à l'instant 275s est de 0.03° entre la trajectoire réelle et la trajectoire de référence, a ce instant kalman a la même valeur que le référence

Latitude

La trajectoire réel atteint après 275 0.42°
La trajectoire référence après 275s 0.39°
La trajectoire mesures après 275s0395°
La trajectoire kalman après 275s 0.39°

Longitude

La trajectoire réelle atteint après 275s -0.2°
La trajectoire référence après 275s 0.4°
La trajectoire mesures après 275s0.4°
La trajectoire kalman après 275s 0.39°

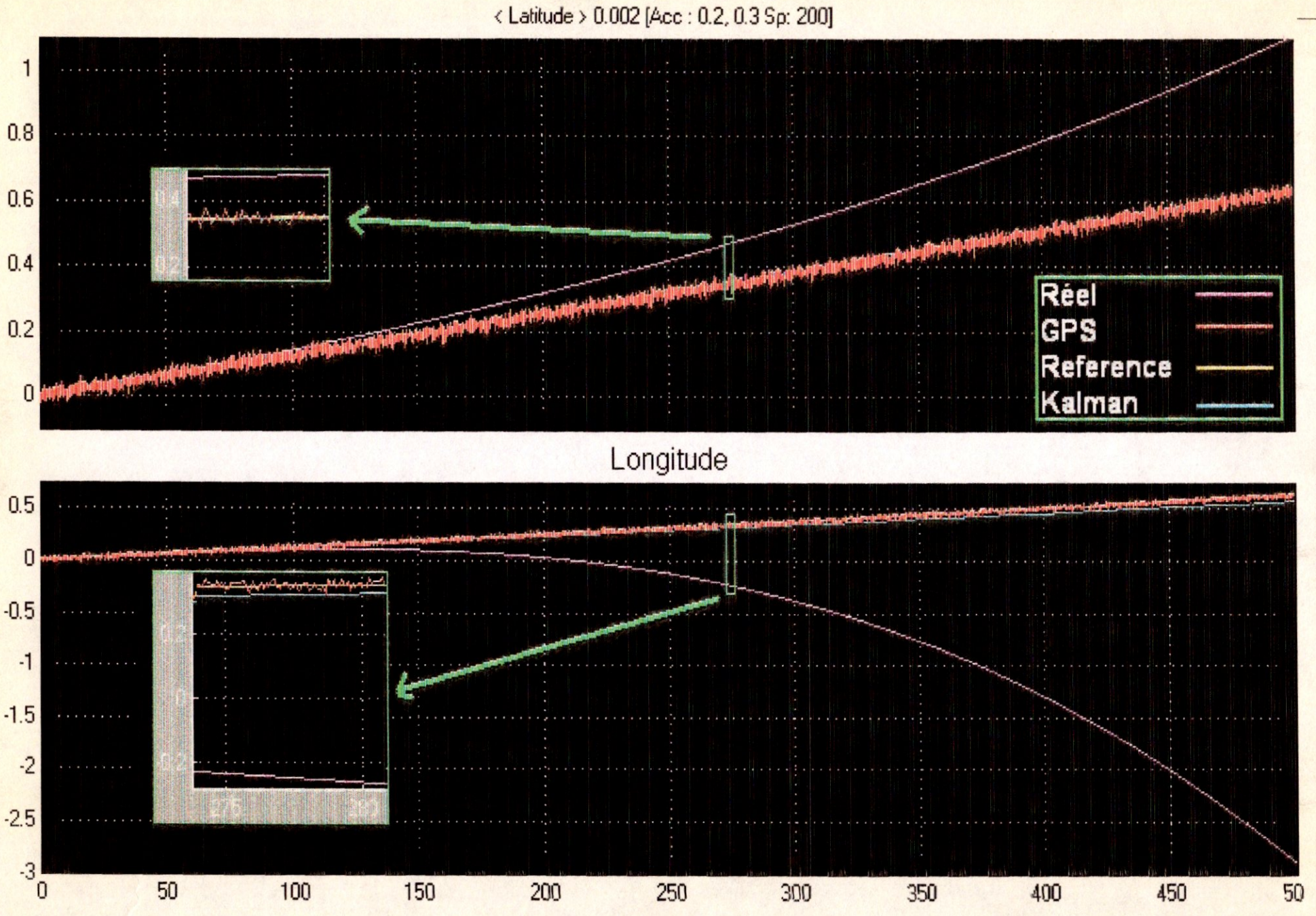


FIG IV.15Essais 3

Pour un cap 90°, la trajectoire de référence, mesures et Kalman gardent une latitude 0° mais la trajectoire réel diverge jusqu'à 0.35° .le longitude augment avec le temps jusqu'à -2.6° (réel) et 0.6° pour les autres

On remarque dans cette figure que kalman et la trajectoire de référence sont presque superposés

Latitude

La trajectoire réel atteint après 161s 0.05°
La trajectoire référence après 161s 0°
La trajectoire mesures après 161s0°
La trajectoire kalman après 161s 0°

Longitude

La trajectoire réel atteint après 161s 0.05°
La trajectoire référence après 161s 0.23°
La trajectoire mesures après 161s0.22°
La trajectoire kalman après 161s 0.22°

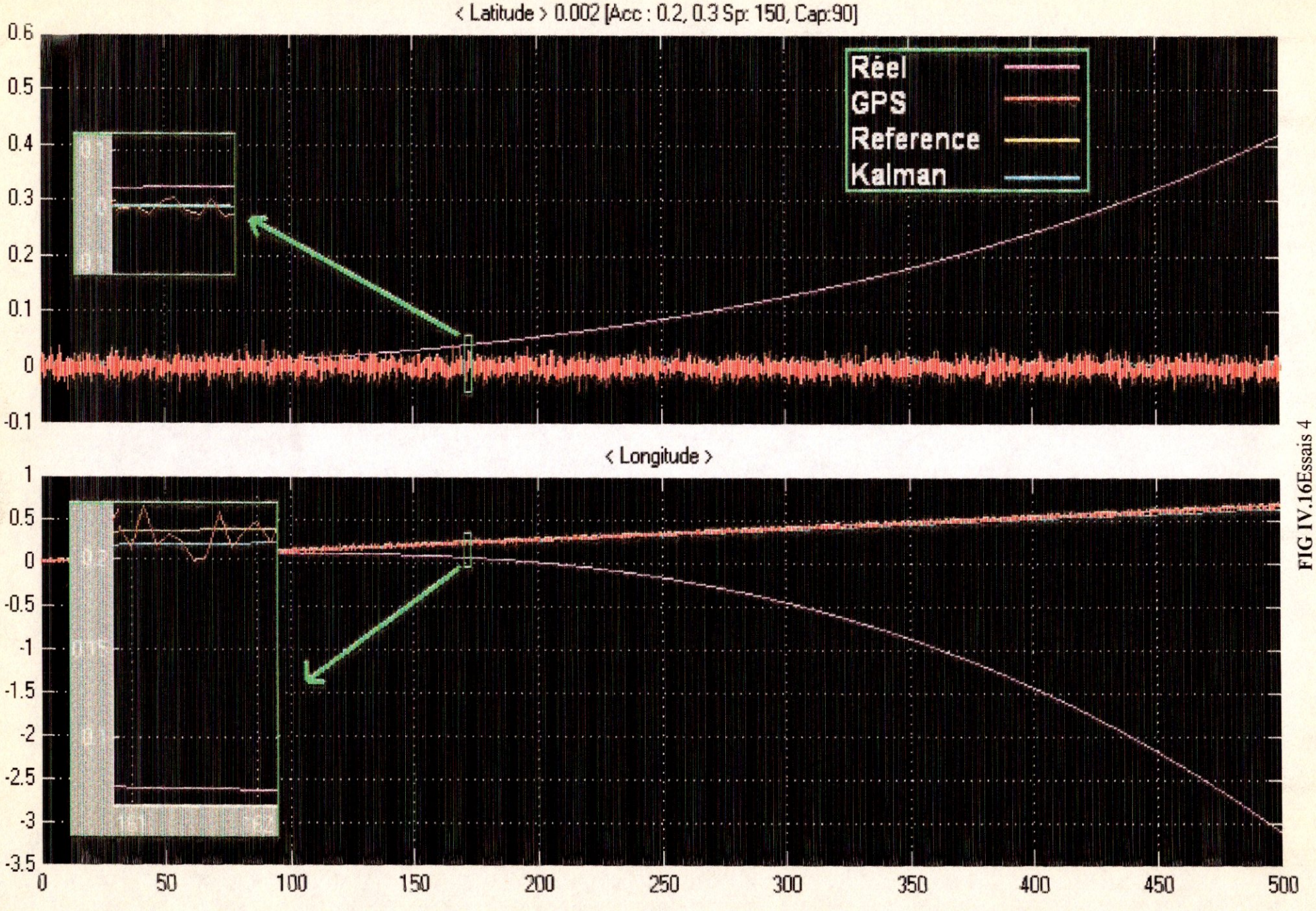


FIG IV.16Essais 4

Pour un cap 180°, la trajectoire de référence, mesures et Kalman gardent une longitude 0° mais la trajectoire réel diverge jusqu'à -3° .la latitude diminué avec le temps jusqu'à -0.8° (réel) et 0.6° pour les autres

On veut vérifier la valeur de latitude atteint par le trajectoire de référence par la méthode suivante :

Calcul de la projection de la vitesse :

V=150cos(180)=-150m/s

La distance parcourus par l'aéronef :-150*500=-75000m

En degrés : -75000/1852= – 40.49Nm= – 0.67°

D'après la figure VI.17 latitude à l'instant 500s est – 0.65°

Latitude

La trajectoire réelle atteint après 106s -0.15°
La trajectoire référence après 106s -0.14°
La trajectoire mesures après 106s-0.12°
La trajectoire kalman après 106s -0.14°

Longitude

La trajectoire réel atteint après 106s -0.05°
La trajectoire référence après 106s 0°
La trajectoire mesures après 106s0°
La trajectoire kalman après 106s 0°

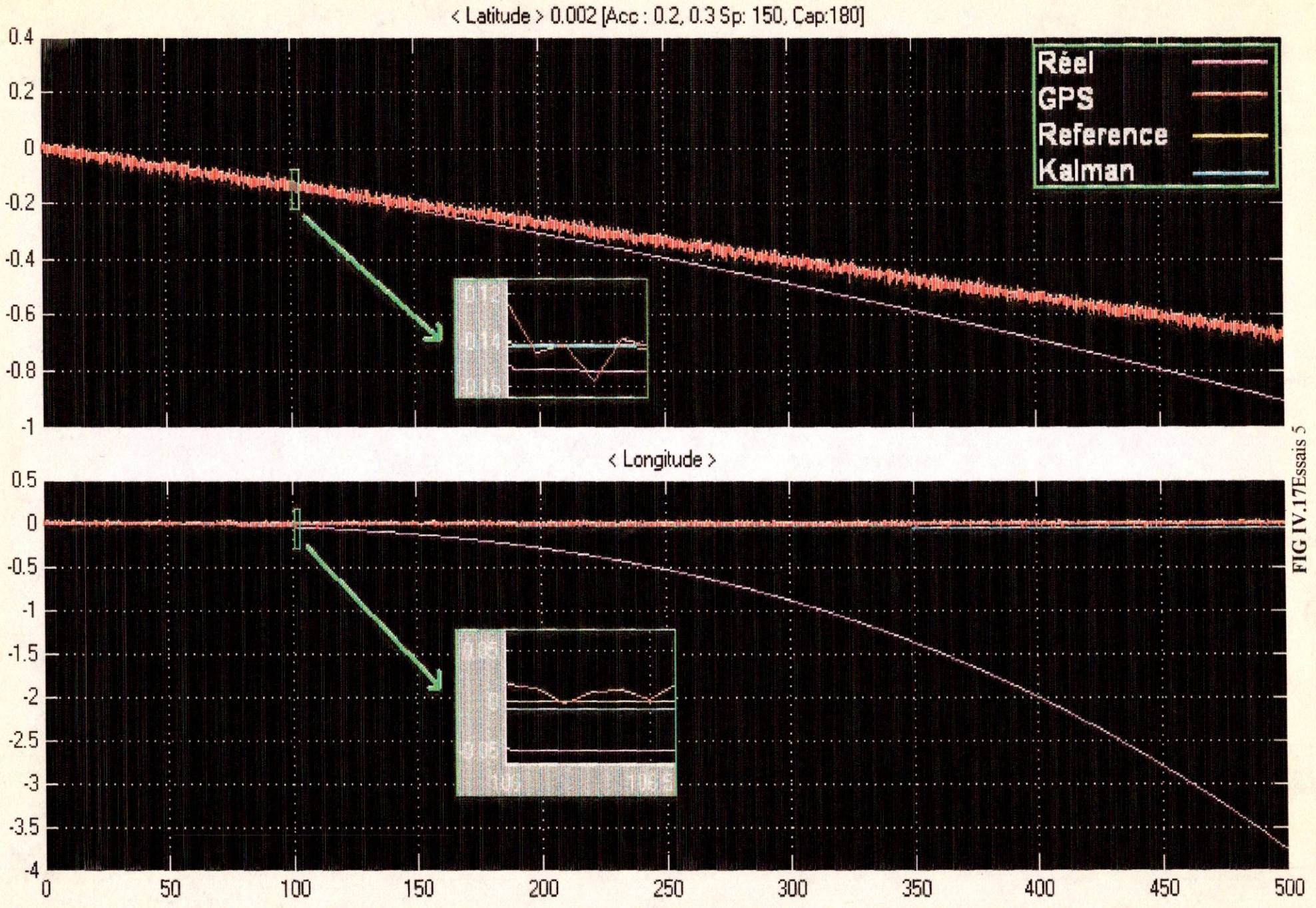


FIG IV.17Essais 5

Comme il est présenté sur la figure VI.18 la latitude commence de20° et la longitude de 10°

Calcul de la projection de la vitesse :

V=150cos(45)=106m/s

La distance parcouris par l'aeronef 106*500=53000m

En degrée :53000/1852=28.61Nm=0.47°

Plus la latitude initiale 20+0.47=20.47°

D'après la figure latitude à l'instant 500s est 20.45°

Latitude

La trajectoire réel atteint après 112s 20.1°
La trajectoire référence après 112s 20.09°
La trajectoire mesures après 112s 20.09°
La trajectoire kalman après 112s 20.09°

Longitude

La trajectoire réel atteint après 112s 10.07°
La trajectoire référence après 112s 10.11°
La trajectoire mesures après 112s 10.13°
La trajectoire kalman après 112s 10.09°

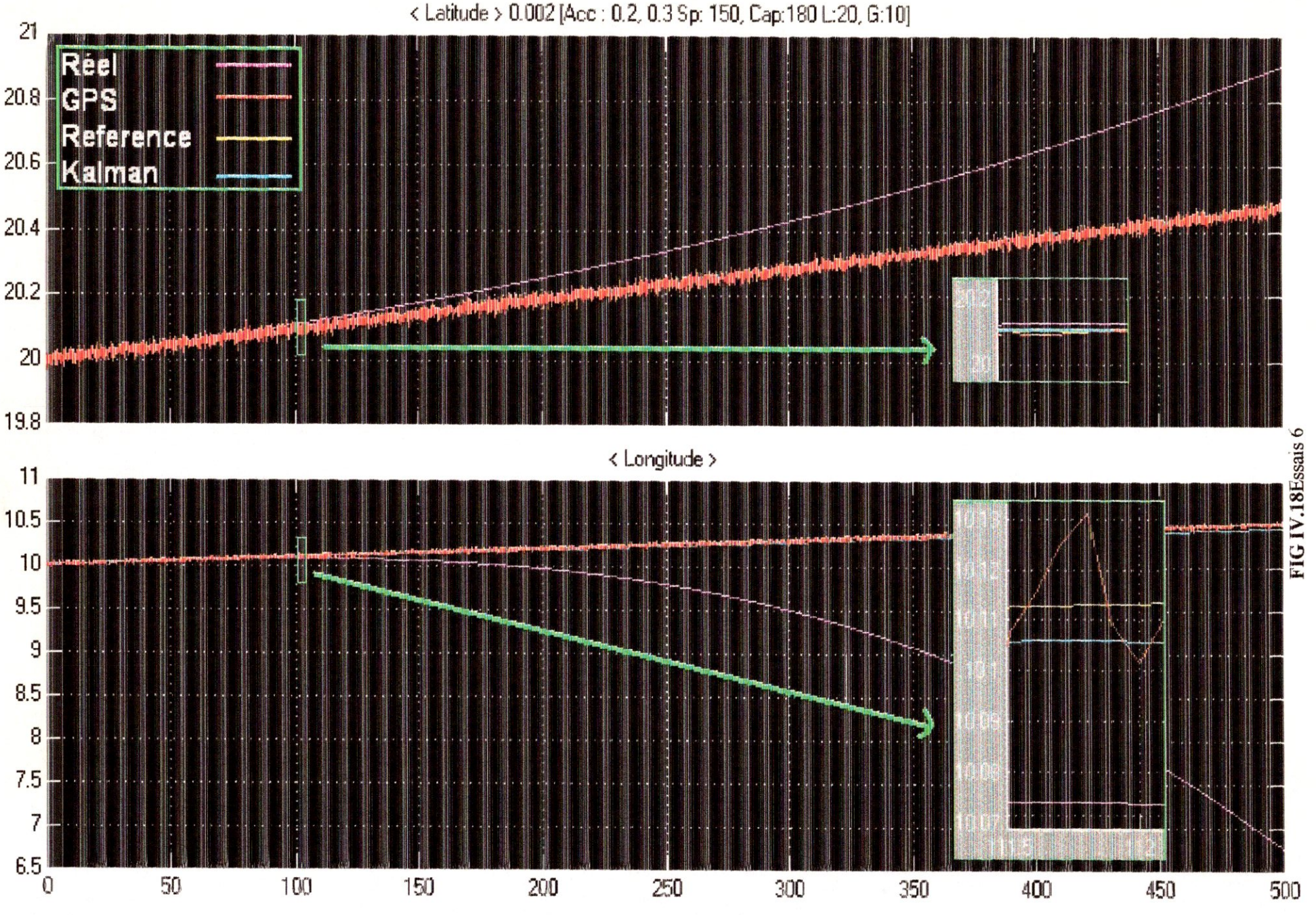


FIG IV.18Essais 6

IV.7.2 Boucle fermer 9 variables

Essais

- La vitesse : 150 km/h
- La position : 20° 10° 0°
- L'orientation : 0° 0° 45°
- Temp. de simulation : 500s

Bruits gyros

- ω_x : 0.002 rad/s
- ω_y : 0 rad/s
- ω_z : 0 rad/s

Bruits accéléros

- f_x : 0.2 m/s^2
- f_y :0.3 m/s^2
- f_z : 0 m/s^2

Latitude

La trajectoire référence après 166s 0.159°
La trajectoire mesures après 166s0.16°
La trajectoire kalman après 166s 0.159°

Longitude

La trajectoire référence après 166s 0.15°
La trajectoire mesures après 166s0.15°
La trajectoire kalman après 166s 0.15°

Pour la figure VI.19 boucle ouverte à 15 variable, on remarque que les erreurs de 03 trajectoires diminué jusqu'à 350°, puis le trajectoire réel se diverge

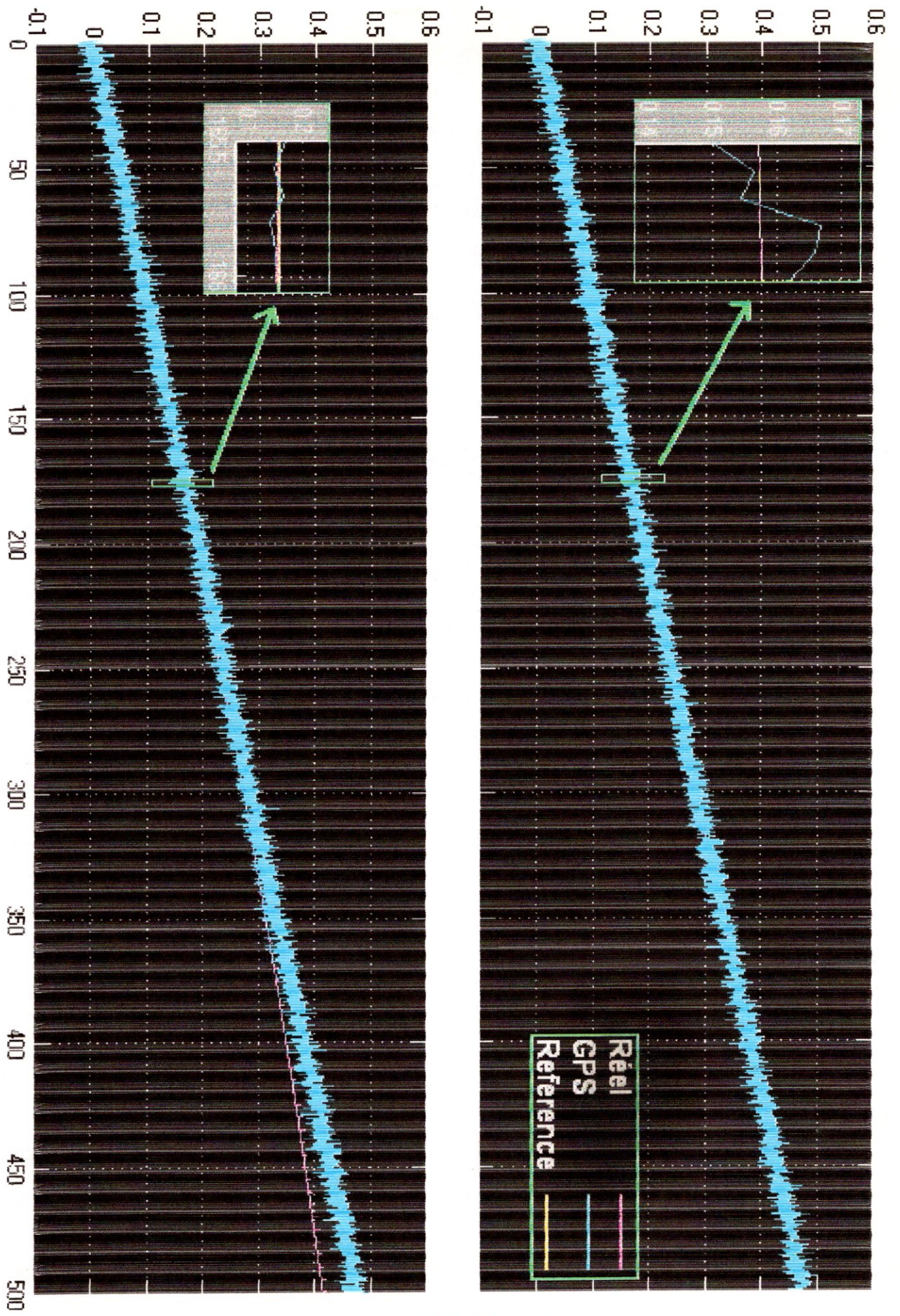


FIG IV.19 Essais 7

IV.7.3 Boucle fermer 15 variables

Essais

- La vitesse : 150 km/h
- La position : 20° 10° 0°
- L'orientation : 0° 0° 45°
- Temp. de simulation : 500s

Bruits gyros

- ω_x : 0.002 rad/s
- ω_y : 0 rad/s
- ω_z : 0 rad/s

Bruits accéléros

- f_x : 0.2 m/s^2
- f_y :0.3 m/s^2
- f_z : 0 m/s^2

Latitude

La trajectoire référence après 222s 0.2°
La trajectoire mesures après 222s0.2°
La trajectoire kalman après 222s 0.2°

Longitude

La trajectoire référence après 222s 0.21°
La trajectoire mesures après 222s0.21°
La trajectoire kalman après 222s 0.21°

Pour cette figure VI.20 jusqu'à 500s la trajectoire réelle suit la trajectoire de référence

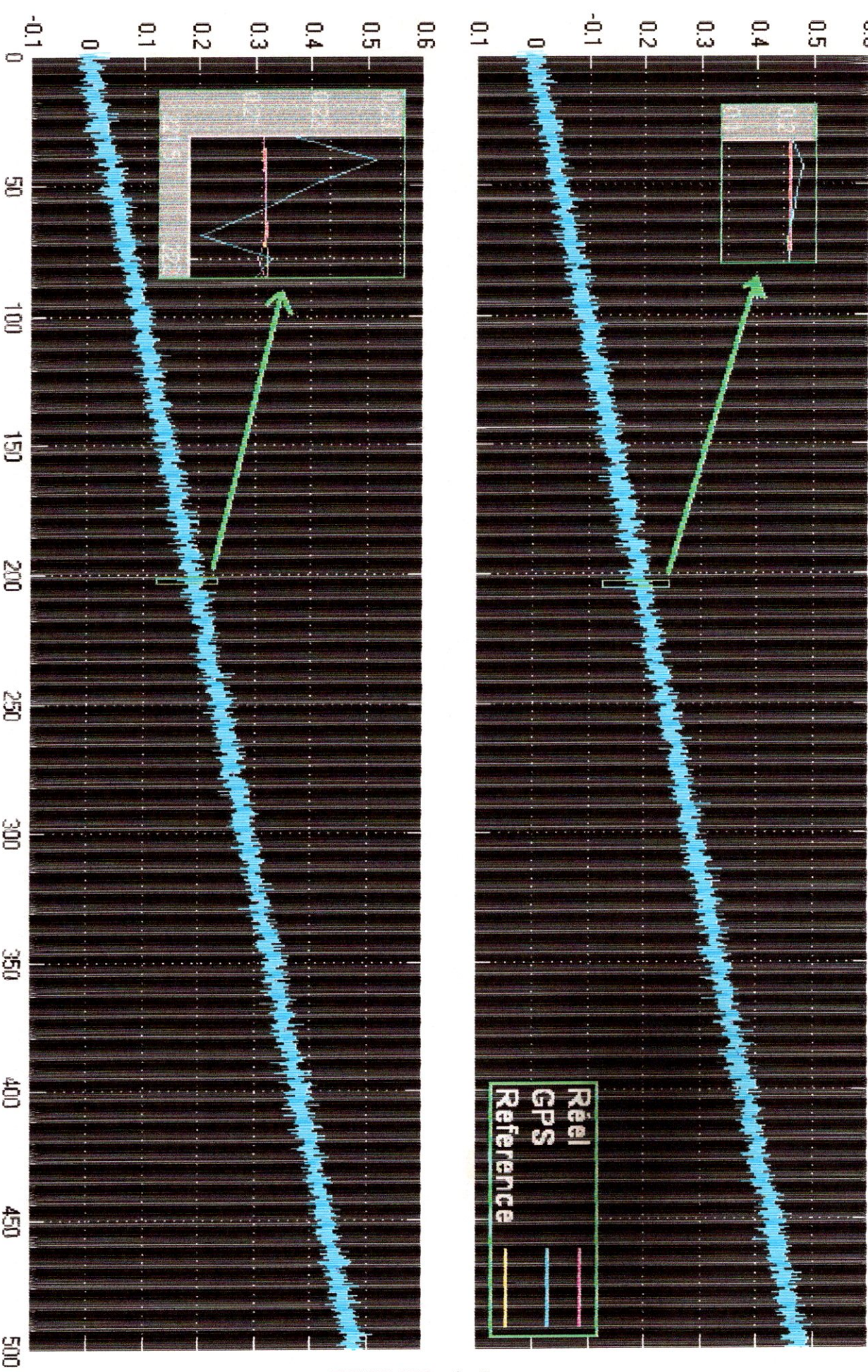


FIG IV.20 Essais 8

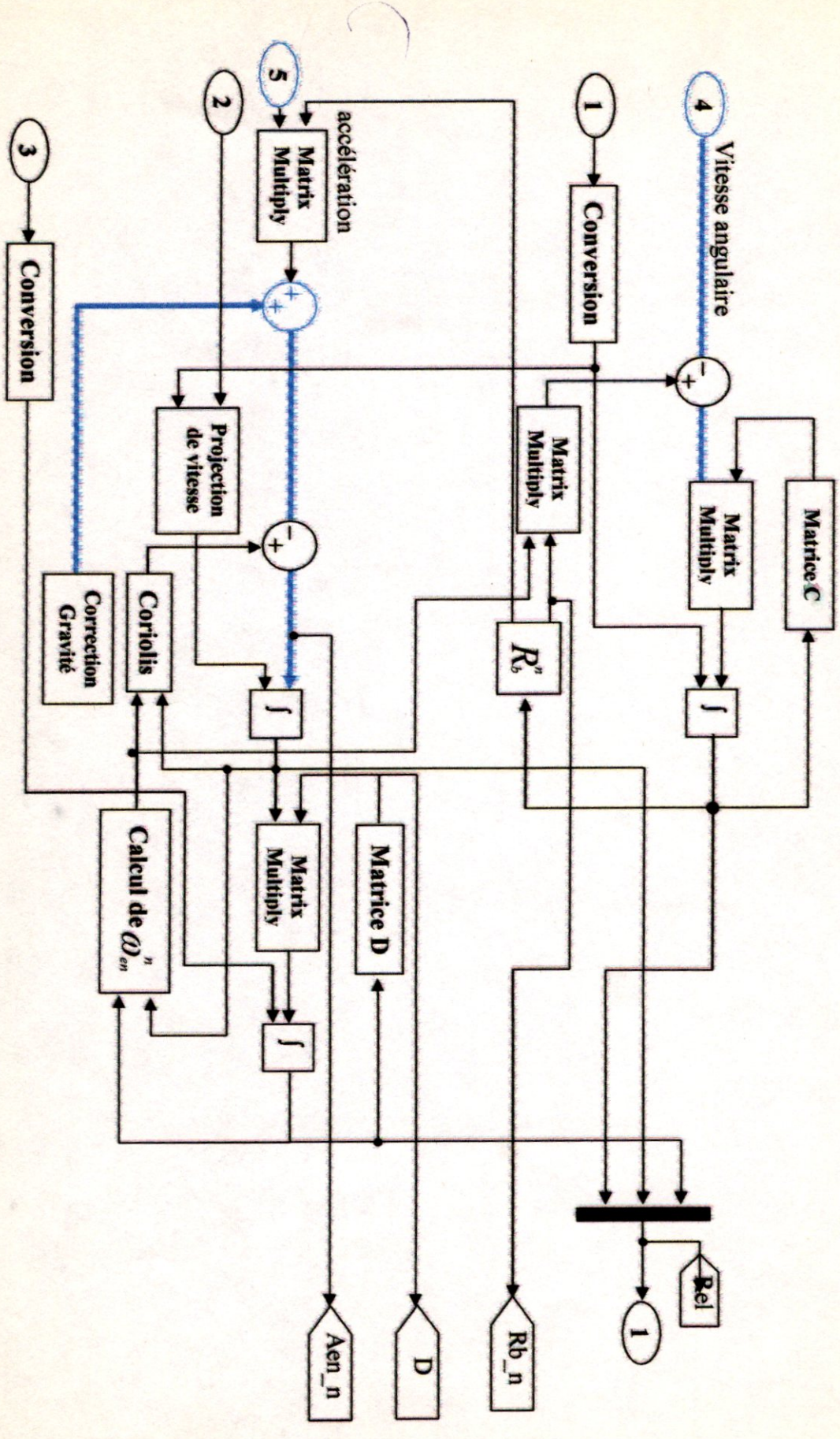


FIG IV.8 Navigateur inertiel