

# UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA



FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES  
MEMOIRE DE MASTER

Option :

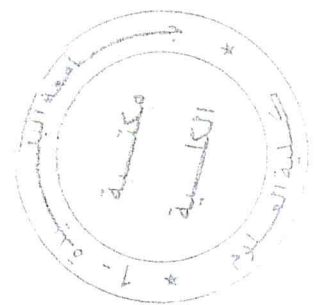
**Recherche Opérationnelle**

Thème

**$\alpha$  2- domination et la domination  
localisatrice dans les grilles**

Par

NAMOUNE MAROUA

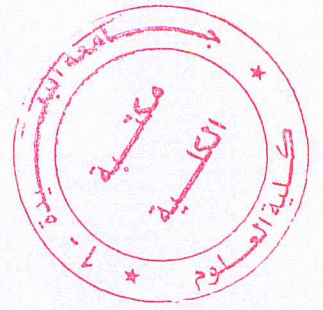


## Composition du Jury

- M.CHELLALI. Docteur, U. de Blida Président.  
M. BLIDIA. Professeur, U. de Blida Promoteur.  
A. BOUCHOU. Maître de Conférences, U. de Medea Examineur.

2016-2017





## Dédicace

*Je dédie ce mémoire à celle qui a sacrifié et veillé des nuits pour que je vive, au symbole de sacrifice et la tendresse, **ma mère**.*

*A celui qui m'a appris que la vie est de valeur, et qu'il n'a pas épargné le moindre effort, pour me pousser à réussir, **mon père**, je lui souhaite une longue vie.*

*A mes chères sœurs : Imane et son cher fils Mohammed Jawad, Fatima, Selma, et Touta.*

*A ma très chère famille, mes oncles et tantes, cousins et cousines.*

*A mes meilleurs amies : Zineb, khadidja, Wissem, Mouna, Hadjira, Safa, Wafaa, Merieme, Saliha, et à tous ceux qui me connaissent.*

*A ma chère amie, Khadidja et sa sœur Amina .*



# Remerciement

Un mémoire nécessite plusieurs mois de travail, voire même des années. Pendant tous ces mois de travail, on rencontre un certain nombre de personnes qui vont nous aider, nous accompagner, nous supporter pour rédiger ce mémoire. Il est normal de commencer par remercier toutes les personnes qui ont compté en début de mémoire.

Nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donné la santé, le courage, la volonté et la patience pour l'élaboration de ce modeste travail.

Comme il n'est pas toujours facile de trouver les bons mots pour remercier toutes les personnes qui ont contribué à la rédaction de notre mémoire, en particulier à Monsieur Mostafa BLIDIA, Professeur à l'université de Blida pour les précieux conseils qu'il m'a donné afin de réaliser ce travail, il a été très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nos remerciements les plus chaleureux s'adressent aussi à mes familles et en particulier à mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Un grand merci également à tous les enseignants du département de mathématique, en particulier à Monsieur M. Chellali, docteur et professeur habilité en mathématiques option Recherche opérationnelle, et à tous ceux qui ont contribué à cette formation.

Enfin, J'adresse mes plus sincère, remerciements à tous nos proches et amies, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

---

# RESUME

Le but de ce travail est l'étude des paramètres de domination dans les graphes en général et en particulier dans les grilles.

Afin d'expliquer la place de nos résultats dans ce domaine, nous avons étudié les notions de base, les définitions, les notations, les résultats et certaines astuces et techniques qui permettent de résoudre des problèmes et qui sont liés à la recherche du nombre de 2-domination et le nombre de domination localisatrice dans une certaine catégorie de graphes à savoir les grille  $G_{m,n}$  (ou le produit cartésien du deux chaine  $P_m$  et  $P_n$ ).

Dans notre travail, nous avons fourni de nouvelles bornes inférieures et supérieures du nombre de 2-domination ( $\gamma_2$ ) de la grille  $G_{5,n}$ . Ensuite nous avons établi des valeurs exactes du nombre de domination localisatrice dans la grille  $G_{m,n}$  pour  $1 \leq m \leq 3$ .



# Abstract

The aim of this work is to study the parameters of domination in graphs in general and more particular in the grids.

In order to explain the place of our results in this field, we have studied the basic notions, definitions, notations, results and certain techniques which solve problems and which are related to the search of the number of 2-domination and the number of locating domination in a certain category of graphs, namely the grid  $G_{m,n}$  (or the Cartesian product of the two chains  $P_m$  and  $P_n$ ).

In our work we have provided new lower and upper bounds of the 2-domination number ( $\gamma_2$ ) of the grid  $G_{5,n}$  and then we have established exact values of the number of locating domination ( $\gamma_L$ ) in the case of the grid  $G_{m,n}$  with  $1 \leq m \leq 3$ .



# ملخص

الغرض من هذا العمل هو دراسة معالم الهيمنة في الرسوم البيانية بصورة عامة ولاسيما في الشبكات.

من أجل شرح مكان النتائج في هذا المجال، درسنا الأساسيات، وتعريفات وتصنيفات ونتائج

وبعض

حيل والتقنيات التي تساعد في حل المشاكل والبحث ذات الصلة عدد الهيمنة الثنائي وعدد محدد موقع الهيمنة في فئة معينة من الأشكال البيانية هي الشبكة  $G_{m,n}$  (أو المنتج الديكارتي للسلسلتين  $P_m$  و  $P_n$ ). .

من خلال هذا العمل قمنا بحصر قيمة عدد الهيمنة الثنائي بين قيمتين واحدة عظمى و الأخرى سفلى، ثم تقديم القيم الدقيقة لعدد محدد موقع الهيمنة في حالة الشبكة  $G_{5,n}$ ، من أجل  $1 \leq m \leq 3$ .



# Table des Matières

<b>Listes des figures</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Introduction générale</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>I NOTIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DES GRAPHS</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1 Définitions et concepts de bases . . . . .	12
1.1.1 Graphes non orientés et graphes simples . . . . .	12
1.1.2 Graphes particuliers . . . . .	13
1.1.3 Chaines, Cycles, Connexité et Diamètre . . . . .	15
1.2 La domination dans les graphes . . . . .	15
1.2.1 Aperçu sur la domination . . . . .	15
1.2.2 Quelques invariants de graphes . . . . .	17
1.2.3 Paramètres de domination . . . . .	18
1.2.4 Quelques applications de la notion de 2-domination et la domination localisatrice . . . . .	20
1.3 Quelques résultats sur la notion de 2-domination et la domination localisatrice . . . . .	22
1.3.1 La 2-domination . . . . .	22
1.3.2 La Domination localisatrice . . . . .	25
<b>II LA 2-DOMINATION ET LA DOMINATION LOCALISATRICE DANS LA GRILLE, QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS</b> . . . . .	<b>30</b>
2.1 La 2-domination dans la grille . . . . .	30



2.1.1	Cas de la grille $G_{2,n}$ .	32
2.1.2	Cas de la grille $G_{3,n}$ .	33
2.1.3	Cas de la grille $G_{4,n}$ .	35
2.2	La domination localisatrice dans la grille infinie	38
<b>III CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA 2-DOMINATION ET LA DOMINATION LOCALISATRICE DANS LA GRILLE</b>		<b>41</b>
3.1	Bornes inférieure et supérieure pour le nombre de 2-domination de la grille $G_{5,n}$ .	41
3.2	Etude de la domination localisatrice dans la grille $G_{m,n}$	46
3.2.1	Cas de la grille $G_{1,n}$ .	46
3.2.2	Cas de la grille $G_{2,n}$ .	46
3.2.3	Cas de la grille $G_{3,n}$ .	49
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>53</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>		<b>54</b>

## Introduction générale

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au 18<sup>ème</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

La théorie des graphes s'est donc développée dans diverses disciplines et elle représente un domaine florissant faisant le lien entre les Mathématiques discrètes, l'informatique et la pratique. Les méthodes développées pour étudier les objets de cette théorie ont de nombreuses applications dans tous les domaines liés à la notion de réseau (réseau social, de téléphone, de microprocesseurs, de télécommunications, etc ...) et dans bien d'autres domaines (par exemples la chimie et la génétique). Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments: réseau de communication, réseaux routiers, circuits électriques, etc.... Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes (d'arcs dans le cas où l'orientation est importante).

La domination dans les graphes est un thème central de la théorie des graphes du fait de sa grande popularité et son utilité pour de nombreuses applications. Cette première notion (Berge, 1958) s'est très vite enrichie et a donné lieu à de nombreux travaux et développements, la bibliographie sur la domination qui compte plus de 2000 articles.

Un sous ensemble  $D$  de sommets dans un graphe  $G = (V, E)$  est dit dominant si tout sommet extérieur à  $D$  a au moins un voisin dans  $D$ . Plusieurs variantes de domination sont dérivées de la domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, on cite par exemple la  $k$ -domination, en imposant la condition que tout sommet extérieur à  $D$  a au moins  $k$  voisins dans  $D$  et la domination localisatrice qui



considère  $D$  comme un dominant avec la condition que toute paire de sommets extérieur à  $D$  ont des voisins distincts dans  $D$ . Ces deux types représentent l'objectif principal de ce mémoire composé de trois chapitres dont voici une description.

Dans le premier chapitre, on rappelle en premier les définitions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce manuscrit. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant en premier un aperçu rapide (un petit historique) sur la domination. On présente par la suite quelques paramètres de domination. Enfin, nous abordons la notion de 2-domination et domination localisatrice dans les graphes et nous présentons quelques exemples d'application et quelques résultats importants sur ces deux types de paramètres étudiés.

Le chapitre deux est composé de deux sections. On étudie dans la première section la notion de 2-domination dans la grille. En effet on abordera une technique de détermination de la valeur du nombre de 2-domination dans la grille  $G_{m,n}$  avec  $1 \leq m \leq 4$ , proposée par You Lu et Jun-Ming Xu dans leur article [11]. Dans la deuxième section on étudie la notion de domination localisatrice, on donne quelques résultats existants et on abordera spécialement l'étude de ce paramètre dans la grille infinie.

Notre contribution dans l'étude de ces deux paramètres dans la grille est présentée dans le troisième et dernier chapitre, en effet on déterminera un encadrement de la valeur du nombre de 2-domination dans la grille  $G_{5,n}$  et on déterminera la valeur du nombre de domination localisatrice dans la grille  $G_{m,n}$  avec  $1 \leq m \leq 3$ .

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés le long de notre projet de recherche et quelques perspectives futures dans ce domaine.

# CHAPITRE I

## NOTIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

### *1.1 Définitions et concepts de bases*

On s'intéresse dans ce chapitre aux notions de base de la théorie des graphes à savoir les graphes et leurs structures, la notion de domination dans les graphes et les différentes variantes de domination dans les graphes, en particulier la 2-domination et la domination localisatrice.

#### **1.1.1 Graphes non orientés et graphes simples**

**Définition 1.1** *Un graphe (non orienté)  $G$  est constitué de deux ensembles: un ensemble fini et non vide  $V(G)$  dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble fini  $E$  dont les éléments sont appelés arêtes. A chaque arête est associée une paire (non ordonnée) de sommets de  $G$  non nécessairement distincts. On note  $G = (V(G), E(G))$ .*

Généralement, étant donné un graphe  $G$ , on notera  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets,  $E(G)$  l'ensemble de ses arêtes,  $n$  le nombre de ses sommets et  $m$  le nombre de ses arêtes.

Si les sommets  $u$  et  $v$  sont associés à l'arête  $e$ , alors on dit que  $e$  relie (ou connecte)  $u$  et  $v$  et que les extrémités de  $e$  sont  $u$  et  $v$ , on dira aussi que  $u$  et  $v$  sont adjacents ou voisins.

Une arête  $e$  est incidente à un sommet  $v$  si  $v$  est une extrémité de  $e$ . Deux arêtes incidentes à un même sommet sont adjacentes.

Une arête  $e$  est dite multiple s'il existe une autre arête  $e' \neq e$  ayant les mêmes extrémités que  $e$ , dans ce cas on dira aussi que  $e$  et  $e'$  sont parallèles.

Un graphe simple est un graphe sans boucle et sans arête multiple. Dans ce cas chaque arête  $e$  est caractérisée par ses deux extrémités distinctes, si les extrémités de  $e$  sont  $u$  et  $v$ , on notera  $e = uv$  ou indifféremment  $e = vu$ .



On peut représenter un graphe par un dessin : à chaque sommet est associé un point et à chaque arête est associée une courbe qui relie ses extrémités et qui ne passe par aucun autre sommet du graphe.

**Remarque 1.2** *Les graphes considérés dans ce mémoire sont des graphes simples.*

- L'ordre  $|G|$  d'un graphe est défini comme étant le nombre de sommets de  $G$ , i.e.  $|G| = |V(G)|$ .
- Un graphe  $G$  est fini si  $V(G)$  et  $E(G)$  sont finis. Autrement, il est infini.
- Deux sommets  $u$  et  $v$  qui sont reliés par une arête sont adjacents et on dit que  $u$  est voisin de  $v$  (et vice versa).
- Le voisinage ouvert (neighbourhood) d'un sommet  $v$  est  $N(v) = \{u \mid uv \in E\}$ , et  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$  est appelé le voisinage fermé de  $v$ .
- Le degré  $d_G(v)$  d'un sommet  $v$  dans un graphe simple  $G$ , est défini comme étant le nombre de voisins de  $v$ , i.e.  $d_G(v) = |N(v)|$ .
- Pour un graphe  $G$  on peut donc définir les paramètres suivants: le degré minimum  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} (d_G(v))$  et le degré maximum  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} (d_G(v))$ .
- Un graphe est  $k$ -régulier si  $d_G(v) = k$  pour tout sommet  $v \in V(G)$ .
- Un sommet de degré nul ( $v$  tel que  $d_G(v) = |N(v)| = 0$ ) est dit sommet isolé et un sommet de degré un ( $v$  tel que  $d_G(v) = |N(v)| = 1$ ) est dit sommet pendant (feuille). On note l'ensemble des sommets pendants de  $G$  par  $L(G)$ . Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support et l'ensemble des sommets supports de  $G$  est noté par  $S(G)$ .

### 1.1.2 Graphes particuliers

Soient  $G = (V(G), E(G))$  et  $G' = (V(G'), E(G'))$  deux graphes.

- $G'$  est un graphe partiel (spanning graph) de  $G$  si  $V(G') = V(G)$  et  $E(G') \subseteq E(G)$ .
- On dit que  $G'$  est un sous-graphe induit par  $V'$  (induced subgraph) de  $G$  si  $V' \subseteq V(G)$  et pour tous les couples de sommets  $(u, v) \in V' \times V'$ , on a  $uv \in E(G')$  si  $uv \in E$ . Un sous graphe induit par  $V'$  est noté  $G[V']$ .

- Un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est dit *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq A$  (resp.  $B \supseteq A$ ) tel que le sous graphe  $G[B]$  induit par  $B$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ . Un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq V$  tel que le sous graphe  $G[B]$  induit par  $B$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  et tel que  $|A| > |B|$  (resp.  $|B| > |A|$ ) où  $|A|$  désigne le nombre d'éléments de l'ensemble  $A$ .

- Un graphe  $G$  est dit complet si tous les sommets de  $G$  sont reliés entre eux. Le graphe complet d'ordre  $n$  est noté par  $K_n$ .

- Un graphe  $G$  est dit biparti si l'ensemble des sommets  $V$  peut être partitionner en deux sous ensemble  $V_1$  et  $V_2$  de sorte que les sommets d'un même sous ensemble soient non adjacents.

- Une clique dans un graphe  $G$  est un sous-graphe complet de  $G$ . L'ordre de la plus grande clique dans  $G$  est noté  $\omega(G)$ .

- Un stable dans un graphe  $G$  est un ensemble de sommets non adjacents deux à deux. L'ordre du plus grand stable d'un graphe  $G$  est noté  $\alpha(G)$ .

- Le graphe complémentaire d'un graphe simple  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$ , noté  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  est un graphe ayant le même ensemble de sommets et une arête appartient à  $\overline{E}$  si et elle appartient au graphe complet  $K_n$  et elle n'appartient pas à  $E$ . On a donc  $\overline{G} = (V, E(K_n) \setminus E)$ .

- Le produit cartésien ou carré de  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$  est le graphe, noté  $G \square H$ , dont l'ensemble des sommets est  $V(G) \times V(H)$ . Deux sommets  $(g, h)$  et  $(g', h')$  sont des voisins si et seulement si ou bien on a  $g = g'$  et  $hh' \in E(H)$  ou bien on a  $gg' \in E(G)$  et  $h = h'$ . Il est simple de vérifier que  $|V(G \square H)| = |V(G)| \cdot |V(H)|$ ,  $|E(G \square H)| = |V(G)| |E(H)| + |E(G)| |V(H)|$  et  $d_{(G \square H)}(g, h) = d_G(g) + d_H(h)$ . Le graphe qui résulte du produit cartésien de deux chaînes  $P_m$  et  $P_n$  est appelé Grille et il est noté  $G_{m,n}$ . La grille infinie  $Z \square Z$  est le graphe définie par  $V(Z \square Z) = Z \times Z = \{(i, j) \mid i, j \in Z\}$  avec  $Z = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  et  $N((i, j)) = \{(i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j), (i + 1, j)\}$ . La grille infinie est un graphe régulier de degré 4.

- Un graphe  $G$  est dit planaire si on peut le dessiner dans un plan de telle manière que les arêtes ne se croisent pas.



- Un graphe  $G$  est dit outerplanaire si  $G$  est planaire et ses sommets sont sur la face extérieure.

### 1.1.3 Chaines, Cycles, Connexité et Diamètre

- Une *chaîne* de longueur  $k - 1$  dans un graphe  $G$  est une séquence alternée de sommets et d'arêtes  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$  telle que  $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$  pour  $i = 2, \dots, k$ . Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier  $k \geq 1$  représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par  $k$  sommets, notée  $P_k$ , est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* noté  $C_k$  de longueur  $k$  est une chaîne de longueur  $k \geq 1$  dans lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de  $C_k$  est égal à sa longueur.

- Un graphe  $G$  est dit *connexe*, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets  $u, v \in V(G)$ . Un graphe qui n'est pas connexe est dit *disconnexe* ou *non connexe*. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

- On appelle *distance* de  $x$  à  $y$  notée  $d(x; y)$ ; la longueur d'une plus courte chaîne de  $x$  à  $y$ . Le *diamètre* dans un graphe  $G$  noté  $\text{diam}(G)$  est la distance maximum entre deux sommets de  $G$ ; c-à-d  $\text{diam}(G) = \max_{x, y \in V} (d(x; y))$ . L'*excentricité* de  $v$  est  $\text{exc}(v) = \max\{d(v; w) : w \in V\}$ .

## 1.2 La domination dans les graphes

### 1.2.1 Aperçu sur la domination

Avant d'introduire la définition d'un ensemble dominant, nous donnons un petit aperçu sur la domination. Le concept de domination dans les graphes trouve son origine dans le jeu d'échec, introduit par D. Jaenisch [10], utilisant la reine comme pièce de jeu. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces de jeu. En 1862, D. Jaenisch posa le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un

seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier  $5 \times 5$  le nombre minimum est 3 et pour un échiquier  $8 \times 8$  le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier  $n \times n$  reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [9].

En 1958, la domination est devenue un domaine théorique grâce à Claude Berge (voir [1]). En effet, il a associé un graphe aux différentes situations, dans lequel on cherche un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Dans l'exemple de déplacement du roi dans un échiquier  $n \times n$ , on associe le graphe dont les sommets correspondent aux cases de l'échiquier, il y a  $n^2$  sommets et les arêtes de ce graphe correspondent aux déplacements du roi dans l'échiquier suivant les règles du jeu des échecs, c'est à dire deux sommets sont adjacents dans le graphe si les cases correspondantes de l'échiquier ont un coté ou un coin en commun. En 1962, Ore proposa l'appellation nombre de domination ( voir [12] ). Le concept de domination a connu une véritable expansion après la parution de l'article de Cockayne et d'Hedetniemi paru en 1977 (voir [4]).

L'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est difficile au sens de la complexité algorithmique. Ainsi beaucoup d'axes de recherches ont vu le jour, par exemple: la détermination des bornes supérieures et inférieures, la recherche d'algorithmes polynomiaux, etc...

On peut définir un ensemble *dominant* comme étant un sous ensemble de sommets  $D \subseteq V(G)$  de  $G$  tel que tout sommet  $v \in V(G) - D$  est adjacent à au moins un sommet  $u \in D$ . Un dominant est ainsi un sous ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Un ensemble dominant  $D$  est dit *dominant minimal* si aucun sous ensemble propre de  $D$  n'est un ensemble dominant. Le *nombre de domination inférieur* (souvent appelé nombre de domination),  $\gamma(G)$ , d'un graphe  $G$  représente la cardinalité minimale d'un ensemble dominant minimal de  $G$ . Un ensemble dominant avec une telle cardinalité est appelé  $\gamma(G)$ -ensemble, on note qu'un graphe  $G$  peut avoir plusieurs  $\gamma(G)$ -ensembles, à titre d'exemple dans le graphe de la Figure 1,  $\gamma(G) = 2$  et  $D_1 = \{x_2, x_3\}$  est l'unique  $\gamma(G)$ -ensemble. La cardinalité maximale d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de*



*domination supérieure*, et est noté par  $\Gamma(G)$ . Pour le même graphe de la Figure 1,  $\Gamma(G) = 5$  et  $D_2 = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  est un  $\Gamma(G)$ -ensemble.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes, par exemples:

- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq 1$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v \in V \setminus D$ ,  $N(v) \cap D \neq \emptyset$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si  $N[D] = V$ .

La notion d'*indépendance (stabilité)* dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Ainsi, un sous ensemble de sommets  $S \subseteq V(G)$  du graphe  $G$  est appelé indépendant si tous les sommets de  $S$  sont non adjacents. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal.

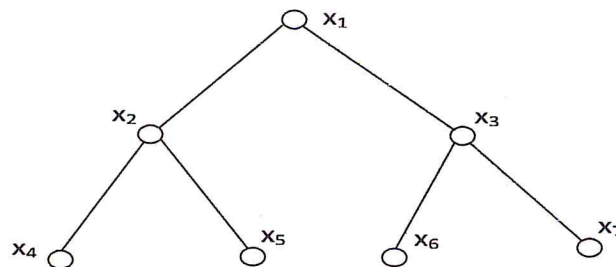


Figure 1

### 1.2.2 Quelques invariants de graphes

Pour un graphe  $G$  d'ordre  $n$ , nous définissons quelques invariants de graphes.

Un *isomorphisme* entre deux graphes  $G$  et  $G'$  désigne toute fonction bijective  $\phi$ , associant à chaque sommet de  $G$  un sommet de  $G'$  telle que  $uv \in E(G)$  si et seulement si  $\phi(u)\phi(v) \in E(G')$ . S'il existe un isomorphisme entre  $G$  et  $G'$ , alors  $G$  et  $G'$  sont dits isomorphes.

Comme défini auparavant, un stable (un indépendant) de  $G$ , noté  $S$ , est un ensemble de sommets deux-à-deux non-adjacents. La cardinalité minimale (resp. maximale) des ensembles indépendants maximaux est appelée *le nombre de domination stable* (resp. *le nombre de stabilité ou d'indépendance*) du graphe  $G$ , noté par  $i(G)$  (resp.  $\beta(G)$ ). Pour le graphe  $G$ , représenté dans la Figure 1, les ensembles de sommets,  $\{x_2, x_3\}$ ,  $\{x_2, x_6, x_7\}$ ,  $\{x_3, x_4, x_5\}$  et  $\{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  sont des ensembles indépendants maximaux. Puisque l'ensemble indépendant  $\{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}$  est l'ensemble indépendant maximal de plus grande cardinalité, il s'ensuit que  $\beta(G) = 5$ , et  $\{x_2, x_3\}$  est l'ensemble indépendant maximal de plus petite cardinalité, donc  $i(G) = 2$ .

Une *coloration propre* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $c$  de  $V$  dans un ensemble  $\{1, 2, \dots\}$  d'entiers positifs, appelées couleurs, telle que si deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes  $c(x) \neq c(y)$ . Ainsi, chaque ensemble de sommets de même couleur est un stable de  $G$ , autrement dit, une coloration est une partition de l'ensemble des sommets  $V(G)$  en stables. Le nombre *chromatique*, noté par  $\chi(G)$ , est la taille minimale d'une partition de  $V(G)$  en stables. D'une autre façon le nombre chromatique  $\chi(G)$  est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration propre de  $G$ .

### 1.2.3 Paramètres de domination

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un ensemble dominant  $D$  de  $G$ . On peut définir plusieurs types de domination, à titre d'exemple on peut citer:

- *La domination  $k$ -multiple* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit *dominant  $k$ -multiple* de  $G$  si tout sommet de  $V$  est dominé par au moins  $k$  sommets de  $D$ , autrement dit, si  $v$  est un sommet de  $V - D$ , alors  $v$  possède au moins  $k$  voisins dans  $D$  et si  $v$  est un sommet de  $D$  alors  $v$  admet au moins  $k - 1$  voisins dans  $D$ . Le *nombre de domination  $k$ -multiple*, noté  $\gamma_{\times k}(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant  $k$ -multiple de  $G$ .
- *La  $k$ -domination* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit  *$k$ -dominant* de  $G$  si tout sommet

de  $V - D$  est dominé par au moins  $k$  sommets de  $D$ , autrement dit, si  $v$  est un sommet de  $V - D$ , alors  $v$  possède au moins  $k$  voisins dans  $D$ . Le *nombre de  $k$ -domination*, noté  $\gamma_k(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ .

- *La domination couplée* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit *dominant couplé* de  $G$  si le sous graphe induit par  $D$ ,  $G[D]$ , contient un *couplage parfait*. Le nombre de domination couplée, noté  $\gamma_{pr}(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé de  $G$ .
- *La domination totale* : Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit *dominant total* de  $G$  si tout sommet de  $V$  possède un voisin dans  $D$ , autrement dit, si  $D$  est un dominant et le sous graphe induit par  $D$ ,  $G[D]$ , ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté  $\gamma_t(G)$ , désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de  $G$ .
- *Le code identifiant*: Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est dit *code identifiant* de  $G$ , si pour tout sommet  $v \in V$ ,  $N[v] \cap D \neq \emptyset$ , et pour toute paire  $u, v$  de sommets de  $V$ ,  $N[v] \cap D \neq N[u] \cap D$ . Le nombre  $M(G)$  désigne la cardinalité minimale d'un code identifiant de  $G$ .

Les paramètres qu'on va étudier dans ce manuscrit sont le nombre de 2-domination qui est un cas particulier de la  $k$ -domination où  $k = 2$  et la domination localisatrice qui est une variante du code identifiant.

**Définition 1.3** *Un ensemble de sommets  $S$  est un 2-dominant si et seulement si  $\forall x \in V - S$ , on a  $|N(x) \cap S| \geq 2$ , c-à-d tout sommet à l'extérieur de  $S$  a au moins deux voisins dans  $S$ .*

Soit  $\mathcal{D}_2$  la famille des ensembles 2-dominant minimaux de  $G$ , on définit les paramètres suivants:

le nombre de 2-domination inférieur est  $\gamma_2(G) = \min_{S \in \mathcal{D}_2} (|S|)$ .

le nombre de 2-domination supérieur est  $\Gamma_2(G) = \max_{S \in \mathcal{D}_2} (|S|)$ .

Dans l'exemple de la Figure 1 on a :  $\mathcal{D}_2 = \{\{x_4, x_5, x_6, x_7, x_1\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}\}$ .



D'où on a  $\gamma_2(G) = 5$ ,  $\Gamma_2(G) = 6$ .

**Remarque 1.4** Les sommets pendants appartiennent à tout ensemble 2-dominant.

**Définition 1.5** Un ensemble de sommets  $S$  est un dominant localisateur si  $S$  est un dominant et pour toute paire  $u, v$  de sommets de  $V - S$ , on a  $N[v] \cap S \neq N[u] \cap S$ , c-à-d toute paire de sommets à l'extérieur de  $S$  ont des voisins distincts dans  $S$ .

Soit  $\mathfrak{D}_l$  la famille des dominant localisateurs minimaux de  $G$ . On définit les paramètres suivants:

le nombre de domination localisatrice inférieur est  $\gamma_L(G) = \min_{S \in \mathfrak{D}_l} (|S|)$ .

le nombre de domination localisatrice supérieur est  $\Gamma_L(G) = \max_{S \in \mathfrak{D}_l} (|S|)$ .

Par exemple dans le graphe précédent correspondant à la Figure 1, on a:

$$\mathfrak{D}_L = \{\{x_2, x_5, x_3, x_7\}, \{x_2, x_5, x_3, x_6\}, \{x_2, x_4, x_6, x_3\}, \{x_2, x_4, x_3, x_7\}, \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}\}.$$

D'où on a  $\gamma_L(G) = 4$  et  $\Gamma_L(G) = 5$ .

#### 1.2.4 Quelques applications de la notion de 2-domination et la domination localisatrice

La notion de domination dans les graphes a de nombreuses applications concrètes, cette large variété d'application relative à notre monde réel a sans doute été aussi derrière sa grande popularité et son développement. En effet, beaucoup de situations réelles peuvent être modélisées comme des problèmes étudiés par le concept de domination et en particulier de ses nombreux paramètres, citons par exemple les réseaux informatiques et de communication, les systèmes de surveillance et de localisation, les réseaux électriques, les réseaux biologiques, les réseaux sociaux etc.

Parmi les nombreux exemples d'application, on donne dans ce qui suit deux exemples illustratifs.

##### *Exemple 1: Réseau Informatique*

Prenons par exemple de réseau de micro-ordinateurs dans lequel un groupe de serveurs a l'habitude de communiquer directement avec n'importe quel micro-ordinateur en dehors

du groupe pour lui assurer un service. Le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble dominant minimum du graphe représentant le réseau. Si on impose à ce que tout serveur doit être relié à au moins un autre serveur. Dans ce cas, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un ensemble dominant total minimum du graphe représentant le réseau. Si maintenant on impose à ce que chaque serveur assure 2 services et que tout micro-ordinateur en dehors du groupe peut bénéficier d'un seul service exactement d'un serveur qu'il lui est voisin. Dans ce cas, pour assurer les 2 services pour tous les micro-ordinateurs, le plus petit groupe possible de serveurs avec cette propriété est un 2-dominant minimum du graphe représentant le réseau. Et vu le coût important, il est évident de chercher à minimiser le nombre de serveurs du groupe dans le réseau informatique.

*Exemple 2: Détection d'incendie dans un bâtiment ou un musée*

Une deuxième application consiste à appliquer la notion d'ensembles dominants localisateurs pour la localisation d'incendie dans un bâtiment.

Considérons un bâtiment modélisé par un graphe où les sommets représentent les pièces ou les zones du bâtiment et les arêtes représentent le voisinage de deux pièces.

Le but est de minimiser le nombre de capteurs nécessaires afin de localiser un danger éventuel. La localisation est effectuée en comparant les ensembles identifiants de chaque sommet à l'ensemble des capteurs ayant détecté le danger.

Si les capteurs ont trois états possibles (positions) capables de distinguer entre aucun danger, un danger dans une pièce voisine et un danger dans la même pièce. Dans ce cas un ensemble de capteurs formant un ensemble dominant localisateur suffit pour localiser d'une manière unique la position du danger. Le danger est localisé par la vérification des capteurs qui sont en état alarme, comme cet ensemble est unique pour tout sommet alors la localisation du danger est immédiate.

## 1.3 Quelques résultats sur la notion de 2-dominance et la dominance localisatrice

### 1.3.1 La 2-dominance

Suite à la notion de dominance dans les graphes, Fink and Jacobson [7] ont introduit la  $k$ -dominance. Un ensemble  $D$  est  $k$ -dominant si tout sommet de  $V - D$  a au moins  $k$  voisins dans  $D$ .

Dans cette section, nous donnons quelques résultats récents sur la 2-dominance.

**Théorème 1.6** [7] *Si  $D$  est un  $\gamma$ -ensemble d'un graphe  $G$ , alors au moins un sommet de  $V - D$  est dominé par pas plus de deux sommets en  $D$ .*

**Preuve.** Soit  $D$  est un  $\gamma$ -ensemble de  $G$ . Supposons que tout sommet de  $V - D$  est dominé par trois sommets ou plus. Soit  $u \in V - D$  et soient  $v$  et  $w$  deux sommets de  $D$  qui dominent  $u$ , il résulte de notre hypothèse que chaque sommet en  $V - D$  est dominé par au moins un sommet dans  $D - \{v, w\}$ , par exemple soit  $D' = D - \{v, w\} \cup \{u\}$  est un ensemble dominant, mais puisque  $|D'| < |D|$ , ce qui donne une contradiction avec l'hypothèse. ■

Ce théorème montre que, pour tout  $\gamma$ -ensemble  $D$ . On peut enlever deux arêtes de  $G$  de sorte que  $D$  ne soit plus un dominant.

Si nous voulons un degré plus élevé de dominance, c-à-d un sommet de  $V - D$  est dominé par au moins  $k$  sommets de  $D$ , ie  $|N(v) \cap D| \geq k$ . ou bien chaque sommet en  $V - D$  est  $k$ -dominé, alors  $D$  est dit ensemble  $k$ -dominant, la cardinalité minimale d'un ensemble  $k$ -dominant est appelée le nombre de  $k$ -dominance  $\gamma_k(G)$ . A Noter que si  $k = 1$ , alors  $\gamma_1(G) = \gamma(G)$ . Aussi pour  $1 \leq j \leq k$ , si  $D$  est un ensemble  $k$ -dominant, il est aussi un ensemble  $j$ -dominant, et par conséquent  $\gamma_j(G) \leq \gamma_k(G)$ .

Il est intéressant de mentionner que si  $\Delta(G) \geq 3$  et  $k \geq 3$ , alors par le Théorème 1.6, aucun ensemble  $k$ -dominant dans  $G$  ne peut être minimum, car chaque  $\gamma_k(G)$ -ensemble dominera au moins un sommet au plus deux fois, alors nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 1.7** *Si  $G$  est un graphe avec  $\Delta(G) \geq 3$  et  $k \geq 3$ , alors  $\gamma_k(G) > \gamma(G)$ .*

Ce corollaire découle également de la borne inférieure suivante pour  $\gamma_k(G)$ .



**Théorème 1.8** [7] *Si  $G$  est un graphe avec  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ , alors  $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$ .*

**Preuve.** Soit  $D$  un  $\gamma_k(G)$ -ensemble, soit  $u \in V - D$ , et soient  $v_1, v_2, \dots, v_k$  des sommets distincts dans  $D$  qui dominent  $u$ . Notons que  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ , nous savons que  $V - D \neq \emptyset$  car il y a toujours un ensemble  $k$ -dominant qui ne contient pas de sommet de degré  $\Delta$ . Puisque  $D$  est  $k$ -dominant, chaque sommet de  $V - D$  est dominé par au moins un sommet de  $D - \{v_2, \dots, v_k\}$ , et donc l'ensemble  $D' = (D - \{v_2, \dots, v_k\}) \cup \{u\}$  est un ensemble dominant de  $G$ . Par conséquent,  $\gamma(G) \leq |D'| = \gamma_k(G) - (k - 1) + 1 = \gamma_k(G) - k + 2$ . ■

**Théorème 1.9** [5] *Si  $G$  est un graphe tel que  $k \leq \delta(G)$ , alors  $\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{k+1}$ .*

Remarquons que pour  $k = 1$ , on trouve la borne de Ore  $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$  (où nous devons supposer que  $G$  n'a pas de sommets isolés). Cette dernière a été améliorée par Stracke et Volkmann, qui ont utilisé une preuve plutôt compliquée pour montrer le théorème suivant:

**Théorème 1.10** [15] *Pour tout graphe  $G$ , on a:*

a/  $\gamma_k(G) \leq n(2k - \delta(G))/(2k - \delta(G) - 1)$  Si  $k \leq \delta(G) \leq 2k - 1$

b/  $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{2}$  Si  $\delta(G) \geq 2k - 1$

Fink et Jacobson ont obtenu une autre borne inférieure de  $\gamma_k(G)$  exprimé en fonction du nombre de sommets  $n$  et du nombre d'arêtes  $m$ , dont les corollaires donnent une borne inférieure intéressante et une caractérisation des arbres extrémaux .

**Théorème 1.11** [7] *Pour tout graphe  $G$ , on a:  $\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k}$ .*

**Corollaire 1.12** *Si  $T$  est un arbre avec  $n \geq 2$  sommets, alors  $\gamma_2(T) \geq \frac{n+1}{2}$ .*

**Corollaire 1.13** *Si  $T$  est un arbre avec  $n \geq 2$  sommets, alors  $\gamma_2(T) = \frac{n+1}{2}$  si et seulement si  $T$  est une subdivision d'un arbre  $T'$ .*

Fink et Jacobson ont également fourni une caractérisation intéressante du nombre de  $k$ -domination en termes de graphes partiels. Le graphe biparti  $G$  est dit  $k$ -semiregulier si tout sommet dans l'un des deux parties a un degré  $k$

**Théorème 1.14** [7] Si  $G$  est un graphe avec  $\delta(G) \geq k$ , alors  $\gamma_k(G) = \min\{\gamma_k(H)\}$  où le minimum est pris dans l'ensemble des graphes partiels bipartis  $k$ -semireguliers  $H$  de  $G$ .

**Preuve.** Il est facile de voir que  $\gamma_k(G) \leq \gamma_k(H)$ , pour tout graphe partiel  $H$  de  $G$ . Par conséquent  $\gamma_k(G) \leq \min\{\gamma_k(H)\}$ .

À l'inverse, soit  $D$  un ensemble  $k$ -dominant minimal dans  $G$ . Par définition, chaque sommet de  $V - D$  est dominé par au moins  $k$  de sommets de  $D$ . On construit un graphe partiel  $H$  de  $G$ , comme suit: ajoutez à  $H$  exactement  $k$  arêtes entre  $v$  et  $D$ , et pour chaque  $v \in V - D$ .  $H$  sera un graphe biparti  $k$ -semiregulier de  $G$ , et  $D$  est un ensemble  $k$ -dominant de  $H$ . Donc,  $\gamma_k(G) \geq \gamma_k(H)$  et  $\gamma_k(G) \geq \min\{\gamma_k(H)\}$ . ■

En 1962, Ore a d'abord observé que pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma(G) \leq \beta_0(G)$ . Ce résultat a inspiré Fink et Jacobson pour étudier la relation entre la  $k$ -domination et la notion de  $k$ -indépendance.

Pour  $k \geq 2$ , un sous-ensemble  $S \subseteq V(G)$  est appelé un ensemble  $k$ -indépendent si et seulement si le degré maximal dans le sous-graphe induit par  $S$  est inférieur à  $k$ , ie  $\Delta(\langle S \rangle) < k$ . La cardinalité maximale d'un ensemble  $k$ -indépendent de  $G$  est le nombre de  $k$ -indépendance  $\beta_k(G)$ . Notons que tout ensemble  $k$ -indépendent est également un ensemble  $h$ -indépendent pour tout  $h > k$ .

**Théorème 1.15** [7] Pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma_2(G) \leq \beta_2(G)$ .

**Preuve.** Si  $\Delta(G) \leq 1$ , alors  $\gamma_2(G) = \beta_2(G) = n$ . On peut supposer que  $\Delta(G) \geq 2$ .

Parmi tous les ensembles 2-indépendant maximum, soit  $S$  pour lequel  $\langle S \rangle$  a un nombre minimum d'arêtes. Nous montrons que  $S$  est également un ensemble 2-dominant.

Supposons, au contraire, que  $S$  n'est pas un ensemble 2-dominant, c'est-à-dire qu'il existe un sommet  $u \in V - S$  qui n'est pas 2-dominé par  $S$ . Puisque  $S \cup \{u\}$  n'est pas un ensemble 2-indépendant, il doit y avoir deux sommets de  $S$ ,  $v$  et  $w$ , où  $v$  est adjacent à  $u$  et  $w$ . Mais puisque  $v$  est le seul sommet de  $S$  adjacent à  $u$ , l'ensemble  $S' = (S - \{v\}) \cup \{u\}$  est un ensemble 2-indépendant maximum ayant moins d'arêtes dans  $\langle S' \rangle$  que le nombre d'arêtes de  $\langle S \rangle$ , ce qui contredit notre choix de  $S$ . Ainsi,  $S$  doit être un ensemble 2-dominant et  $\gamma_2(G) \leq |S| = \beta_2(G)$ . ■

Ce théorème a conduit Fink et Jacobson à conjecturer que pour tout entier positif  $k$ ,  $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ . Cette conjecture a été montrée par Favaron, qui a donné un résultat plus fort. Soit  $m\langle S \rangle$  le nombre d'arêtes dans le sous graphe induit par un ensemble  $S$  et soit  $\text{deg}_S(u)$ , le degré de  $u$  dans  $S$ , c-à-d, le nombre de sommets voisins de  $u$  et qui sont dans  $S$ .

**Théorème 1.16** [6, Odile Favaron] *Pour tout graphe  $G$ , et pour tout entier  $k \geq 1$ . Tout ensemble  $k$ -indépendent  $D$  pour lequel  $k|D| - m\langle D \rangle$  est maximum, est un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ .*

### 1.3.2 La Domination localisatrice

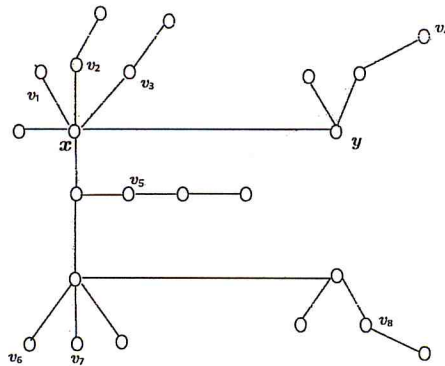
Dans cette section, nous considérons la restriction selon laquelle les ensembles  $N(v) \cap D$  doivent être distincts pour tout  $v$  appartenant à  $V(G) - D$ . Nous décrivons le concept des ensembles de localisation et des ensembles dominants.

Lorsque l'on considère les ensembles de localisation dans les graphes, tel qu'introduit dans [16], on peut penser à choisir un ensemble minimum  $S$  de sommets d'un graphe  $G$  pour atteindre la fonction de localisation. Les stations doivent être établies de sorte que chaque sommet soit déterminé de manière unique par ses distances à l'ensemble localisateur. Pour un  $k$ -tuple donné de sommets  $(v_1, \dots, v_k)$ , attribuer à chaque sommet  $v \in V(G)$  le  $k$ -uple de ces distances à ces sommets,  $f(v) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \dots, d(v, v_k))$ . Soit  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ , le  $k$ -uple  $f(v)$  s'appelle  $S$ -localisateur de  $v$ . Un ensemble  $S$  est un ensemble localisateur de  $G$  si toute paire de sommets de  $V - S$  ont des  $S$ -localisateurs distincts. Le nombre de localisation  $L(G)$  est la cardinalité minimale d'un ensemble localisateur. Par exemple,  $L(G) = 1$  si et seulement si  $G$  est une chaîne. La chaîne  $P_n$  avec  $n \geq 2$  sommets a deux  $L(P_n)$ -ensemble, chacun constitué d'un sommet (extrémité de la chaîne). Pour l'arbre  $T$  dans la figure au dessous du Théorème 1.18, l'ensemble  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  est un  $L(T)$ -ensemble. Par exemple,  $f(v_2) = (2, 0, 2, 4, 3, 4, 4, 5)$ ,  $f(x) = (1, 1, 1, 3, 2, 3, 3, 4)$ , et  $f(y) = (2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5)$ .

Une simple caractérisation des  $L(T)$ -ensembles pour les arbres  $T$  est donné dans le théorème suivant.



$$\gamma_L(P_{5k+3}) = \gamma_L(C_{5k+3}) = \gamma_L(P_{5k+4}) = \gamma_L(C_{5k+4}) = 2k + 2.$$



un arbre avec  $L(T) = 8$

Ainsi, un ensemble dominant localisateur dans une chaîne nécessite au moins 40% des sommets. Le prochain théorème montre que tout ensemble dominant localisateur pour un arbre arbitraire contient plus d'un tiers de ses sommets.

**Théorème 1.19 (Slater)** [18] Pour tout arbre  $T$ ,  $\gamma_L(T) > \frac{n}{3}$ .

**Preuve.** Supposons que  $G$  soit un graphe avec  $n$  sommets et au plus  $n - 1$  arêtes, et soit  $D$  un ensemble de sommets d'ordre  $|D| \leq n/3$ . Si  $D$  est un  $\gamma_L(G)$ -ensemble, alors au plus  $\frac{n}{3}$  sommets  $v$  de  $V - D$  ont  $|N_D(v)| = 1$ . Ainsi, au moins  $\frac{2n}{3}$  sommets de  $V - D$  ont  $|N_D(v)| \geq 2$ . Mais cela implique que  $G$  ait au moins  $n$  arêtes, ce que fait une contradiction.

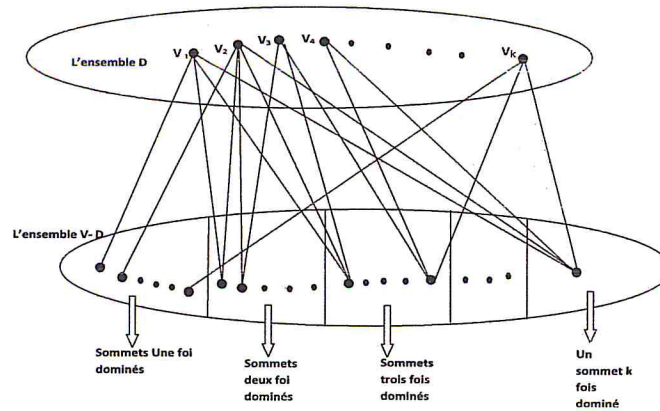
■

Par le Théorème 1.19, si nous disposons de  $k$  dispositifs de détection disponibles et on veut construire un arbre d'ordre  $n$  avec  $\gamma_L(T) = k$ , alors  $n < 3k - 1$ . Pour les graphes arbitraires, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 1.20 (Slater)** [17] Si un graphe  $G$  a  $\gamma_L(G) = k$ , alors  $n \leq k + 2^k - 1$ .

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  avec  $\gamma_L(G) = k$ , soit  $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k\}$  un dominant localisateur avec  $\gamma_L(G) = |D|$ . Si on considère des sommets qui sont à l'extérieure de  $D$ , on a des sommets qui sont dominés une seule fois, des sommets qui sont dominés exactement 2 fois et ainsi de suite jusqu'à peut être des sommets qui sont dominés exactement

$k$  fois, le graphe ci dessous représente ces possibilités:



à partir de ce graphe on peut facilement voir que l'ordre du graphe  $G$  est:

$$n \leq k + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k.$$

$$\leq k + 2^k - 1.$$

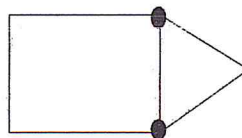
■

L'ordre maximal d'un graphe  $G$  avec  $\gamma_L(G) = k$  a été calculé par Rall et Slater [14] pour plusieurs autres classes de graphes  $G$ , comprenant des graphes planaires et les graphes outerplanaires.

**Théorème 1.21** [14] Soit  $G$  un graphe avec  $\gamma_L(G) = k$ . alors

- (a) Si  $G$  est planaire, alors  $n \leq 7k - 10$  pour  $k \geq 4$ .
- (b) Si  $G$  est outerplanaire, alors  $n \leq \lfloor \frac{7k-3}{2} \rfloor$ , et
- (c) Ces bornes sont atteintes.

Exemple: Soit le graphe outerplanaire suivant:



Un graphe outerplanaire  $G$ .

## CHAPITRE II

### LA 2-DOMINATION ET LA DOMINATION LOCALISATRICE DANS LA GRILLE, QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS

Dans ce chapitre on étudiera les résultats existants sur la 2-domination dans la grille, On donne une technique utilisée par You Lu et Jun-Ming Xu pour le calcul de la valeur exacte du nombre de 2-domination dans la grille  $G_{m,n}$  avec  $1 \leq m \leq 4$ . Ensuite on étudiera la domination localisatrice dans la grille infinie  $Z \square Z$  proposé par Slater dans [13].

#### *2.1 La 2-domination dans la grille*

You Lu et Jun-Ming Xu ont étudié le problème de la recherche de la valeur du nombre de 2-domination dans la grille  $G_{m,n}$  dans leur article [11], Ils ont donné la valeur exacte du paramètre  $\gamma_2(G_{m,n})$  quand  $1 \leq m \leq 4$ .

Dans la suite on développera les techniques de démonstrations utilisées par ces deux Auteurs.

On note par  $[i]$  l'ensemble  $\{1, \dots, i\}$ .

On rappelle que le produit carré de deux chaînes  $P_m$  et  $P_n$  est défini par :

$$G_{m,n} = P_m \square P_n$$

et il est dit Grille où l'ensemble des sommets est  $V(G_{m,n}) = [m] \times [n]$  et deux sommets  $(i, j)$  et  $(i', j')$  sont adjacents si et seulement si  $|i - i'| + |j - j'| = 1$ .

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

Soit  $D$  un ensemble 2-dominant de  $G_{m,n}$ , pour tout  $j \in [n]$ , soit  $C_j = \{(i, j) \mid i \in [m]\}$ ,  $\mathcal{C}_j(D) = D \cap C_j$  et  $c_j(D) = |\mathcal{C}_j(D)|$ .



Les séquences  $(C_1(D), C_2(D), C_3(D), \dots, C_n(D))$  et  $(c_1(D), c_2(D), \dots, c_n(D))$  sont appelées, séquence d'ensemble 2-dominants et séquence de nombres de 2-domination de  $G_{m,n}$  respectivement.

Comme  $0 \leq c_j(D) \leq m; \forall j \in [n]$ , soit

$$N_i(D) = |\{c_j(D) \mid c_j(D) = i \text{ où } j \in [n]\}| \text{ tel que } i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Notons que tout sommet de  $C_2(D)$  domine exactement un sommet de  $C_1$  et donc la colonne  $C_1$  est au moins 1-dominé par  $C_1(D)$ . Par symétrie de  $C_1$  et  $C_n$ , on a le lemme suivant:

**Lemme 2.1** [11] Pour tout  $m, n \geq 1$ ,  $c_1(D) \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$  et  $c_n(D) \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

**Lemme 2.2** [11] Pour  $m, n \geq 3$  et  $2 \leq j \leq n-1$ . Si  $C_j(D) = \{(i, j)\}$  où  $i \in \{1, 2, m-1, m\}$ , alors:

$$c_{j-1}(D) + c_{j+1}(D) \geq 2m - 3$$

**Preuve.** Par symétrie de  $G_{m,n}$ , on a besoin seulement de démontrer le cas  $i = 1$  et 2. Notons que  $C_j$  est 2-dominé par  $C_{j-1}(D), C_j(D), C_{j+1}(D)$  dans  $G_{m,n}$ , alors

$$C_{j-1} - \{(1, j-1), (2, j-1), (3, j-1)\} \subseteq D$$

et

$$C_{j+1} - \{(1, j+1), (2, j+1), (3, j+1)\} \subseteq D.$$

Si  $i = 1$ , alors  $\{(3, j-1), (3, j+1)\} \subseteq D$  et  $|D \cap \{(2, j-1), (2, j+1)\}| \geq 1$ . Donc

$$c_{j-1}(D) + c_{j+1}(D) \geq (m-3) + (m-3) + 2 + 1 = 2m - 3.$$

Si  $i = 2$ , alors pour 2-dominer  $(3, j)$ , on doit avoir  $|D \cap \{(3, j-1), (3, j+1)\}| \geq 1$ . Comme  $(1, j) \notin D$ , alors pour 2-dominer  $(1, j-1)$  et  $(1, j+1)$ , on a

$$|D \cap \{(1, j-1), (2, j-1)\}| \geq 1 \text{ et } |D \cap \{(1, j+1), (2, j+1)\}| \geq 1,$$

et d'où on a :

$$c_{j-1}(D) + c_{j+1}(D) \geq (m-3) + (m-3) + 1 + 1 + 1 = 2m - 3.$$

Par conséquent le lemme est montré. ■

Pour tout ensemble 2-dominant  $D$  de  $G_{m,n}$ , s'il existe  $j \in [n]$  avec  $C_j(D) = 0$ , alors  $c_{j-1}(D) = c_{j+1}(D) = m$ .

Ceux ci implique qu'on a forcément

$$N_0(D) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } N_m(D) = 0. \\ N_m(D) - 1 & \text{si } N_m(D) \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

**Lemme 2.3** [11] Si  $G_{m,n}$  contient un  $\gamma_2(G_{m,n})$ -ensemble  $S$  avec  $N_0(S) \neq 0$ , alors il doit contenir un autre  $\gamma_2(G_{m,n})$ -ensemble  $D$  avec  $N_0(D) = 0$  et  $N_m(D) \neq 0$ .

**Preuve.** De l'inégalité de la formule 1 et  $N_0(S) \neq 0$ , on sait que  $N_m(S) - N_0(S) \geq 1$ . On pose  $\min\{j \mid c_j(S) = 0, j \in [n]\} = t$ . Pour 2-dominer  $C_t$ , on a  $c_{t-1} = m$  et  $c_{t+1} = m$ , donc  $t \geq 2$ . Avec le choix de  $t$ , on doit avoir  $C_{t-2} \neq 0$  (si  $t \geq 3$ ), et soit  $(i, t-2) \in C_{t-2}$ . Il est clair que le sous ensemble  $S_1 = (S \setminus \{(i, j-1)\}) \cup \{(i, t)\}$  est un  $\gamma_2(G_{m,n})$ -ensemble avec  $N_0(S_1) = N_0(S) - 1$  et  $N_m(S_1) = N_m(S) - 1$ . En utilisant récursivement l'opération précédente  $N_0(S) - 1$  fois, on peut obtenir un  $\gamma_2(G_{m,n})$ -ensemble  $D$  à partir de  $S_1$ , qui satisfait:

$$N_0(D) = N_0(S) - N_0(S) = 0 \text{ et } N_m(D) = N_m(S) - N_0(S) \geq 1.$$

D'où on obtient le résultat. ■

### 2.1.1 Cas de la grille $G_{2,n}$ .

En appliquant les lemmes précédents, on obtient les valeurs de  $\gamma_2(G_{2,n})$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

**Théorème 2.4** [11] Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_2(G_{2,n}) = n$ .

**Preuve.** Notons que l'ensemble

$$S = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^k \{(2i-1, 1), (2i, 2)\} & \text{si } n = 2k \\ \bigcup_{i=1}^k \{(2i-1, 1), (2i, 2)\} \cup \{(n, 1)\} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

est un ensemble 2-dominant de  $G_{2,n}$ . Donc  $\gamma_2(G_{2,n}) \leq |S| = n$ .

Soit  $D$  un  $\gamma_2(G_{2,n})$ -ensemble, alors  $N_1(D) + 2N_2(D) = |D| = \gamma_2(G_{2,n}) \leq n$  et  $N_0(D) + N_1(D) + N_2(D) = n$ , ceux ci forcent  $N_2(D) \leq N_0(D)$ . Par la formule 1 on a  $N_2(D) = N_0(D) = 0$  et alors la séquence de 2-domination de  $G_{2,n}$  est

$$(c_1(D), c_2(D), \dots, c_n(D)) = (1, 1, \dots, 1).$$

Par conséquent on a  $\gamma_2(G_{2,n}) = N_1(D) = n$  et on peut dire que toutes les séquences de nombre de 2-domination de  $G_{2,n}$  valent  $(1, 1, \dots, 1)$ . ■

### 2.1.2 Cas de la grille $G_{3,n}$ .

Dans cette partie on va donner la valeur exacte de  $\gamma_2(G_{3,n})$ . Pour cela on utilise un procédé introduit par Chang et al. [2, 3] à savoir le concept de concaténation. En effet on détermine un ensemble 2-dominant de  $G_{3,n}$  à partir de la concaténation des blocs  $A_1, A_2$  et  $A_3$  définies dans la Figure 2.

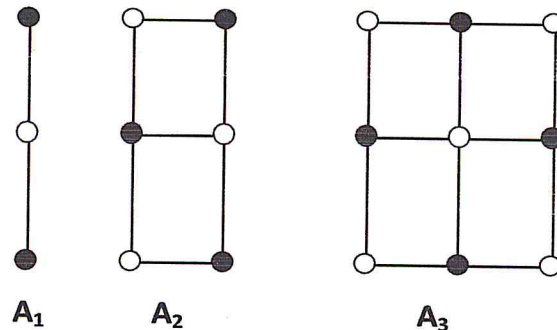


Figure 2: Blocs  $A_1, A_2$ , et  $A_3$  pour construire un ensemble de 2-dominant de  $G_{3,n}$ .

On explique la concaténation sur un exemple, si on concatène un  $3 \times 3$  bloc  $A_3$  et un  $3 \times 2$  bloc  $A_2$ , alors on obtient le  $3 \times 5$  bloc  $A_3A_2$  de la Figure 3. Pour  $t \geq 0$ , on utilise la notation

$$(A_3A_2)^t = (A_3A_2)(A_3A_2) \dots (A_3A_2)$$

pour la concaténation de  $(A_3A_2)$  avec lui même  $t$  fois.



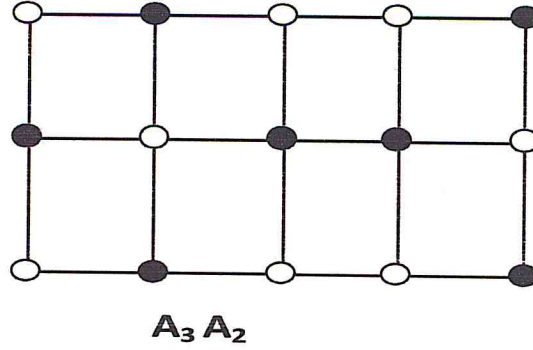


Figure 3:  $A_3 A_2 = G_{3,5}$

Clairement les  $r + 1$  sommets en noir foncé dans  $A_r$  forment un ensemble 2-dominant de  $G_{3,r}$  pour  $r \in \{1, 2, 3\}$ . Donc l'ensemble des sommets en noir foncé dans  $(A_3 A_2)$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{3,5}$  (voir Figur 3).

**Théorème 2.5** [11] Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $\gamma_2(G_{3,n}) = \lceil \frac{4n}{3} \rceil$ .

**Preuve.** Si  $n = 1, 2, 3$ , alors on a le résultat trivialement. Pour la suite supposons que  $n \geq 4$ . Soit  $n = 3k + r$ , avec  $1 \leq r \leq 3$ . L'ensemble des sommets en noir foncé de  $(A_3)^k A_r$  est un ensemble 2-dominant de  $G_{3,n}$ . Donc  $\gamma_2(G_{3,n}) \leq 4k + (r + 1) = 4 \left( \frac{n-r}{3} \right) + r + 1 = \lceil \frac{4n}{3} \rceil$ ;  $1 \leq r \leq 3$ . Soit  $D$  un  $\gamma_2(G_{3,n})$ -ensemble. On considère deux cas :

**Cas 1:**  $N_0(D) = 0$ , alors

$$N_1(D) + N_2(D) + N_3(D) = n \quad (2)$$

et

$$N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) = |D| = \gamma_2(G_{3,n}) \leq \lceil \frac{4n}{3} \rceil \quad (3)$$

et donc on a  $N_1(D) \geq 1$ . Soit  $j \in [n]$  un entier avec  $c_j(D) = 1$ , on a: si  $j = 1$ , alors pour 2-dominer  $C_1$ , on a  $c_2(D) \geq 2$ . Si  $j = n$ , alors  $c_{n-1}(D) \geq 2$  par symétrie de  $C_1$  et  $C_n$ . Si  $2 \leq j \leq n - 1$ , alors par le lemme 2.2, au moins on a un, parmi  $c_{j-1}(D) \geq 2$  ou  $c_{j+1}(D) \geq 2$  est vrai, c-à-d il y a au plus deux éléments de valeur 1 entre deux éléments consécutifs  $a$  et  $b$  dans la séquence du nombre de 2-domination avec  $a \in \{2, 3\}$  et  $b \in \{2, 3\}$ , donc

$$\begin{aligned} N_1(D) &\leq 1 + 2[(N_2(D) + N_3(D) - 1)] + 1 \\ &= 2[(N_2(D) + N_3(D))]. \end{aligned} \quad (4)$$

En combinant avec (2), (3) et (4), on doit avoir:

$$\begin{aligned}
 \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil &\geq \gamma_2(G_{3,n}) = N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) \\
 &= n + \frac{1}{3}[2(N_2(D) + N_3(D)) + N_2(D) + N_3(D)] + N_3(D) \\
 &\geq n + \frac{1}{3}(N_1(D) + N_2(D) + N_3(D)) + N_3(D) \\
 &= \frac{4n}{3} + N_3(D),
 \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\gamma_2(G_{3,n}) = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$ , et  $N_3(D) = 0$ .

**Cas 2:**  $N_0(D) \neq 0$ . Par le lemme 2.3,  $G_{3,n}$  contient un  $\gamma_2(G_{3,n})$ -ensemble  $S$  tel que  $N_0(S) = 0$  et  $N_3(S) \neq 0$ . Par le fait que  $N_0(S) = 0$  et le cas 1, on a  $N_3(S) = 0$ , ce qui contredit  $N_3(S) \neq 0$ , ce cas ne peut avoir lieu, ce qui complète la démonstration. ■

A partir de la preuve du théorème 2.5, on peut dire que pour  $D$  un  $\gamma_2$ -ensemble de  $G_{3,n}$ , on a  $N_0(D) = N_3(D) = 0$ , c-à-d  $\forall j \in [n]$  on a  $c_j(D) = 1$  ou  $2$ .

### 2.1.3 Cas de la grille $G_{4,n}$ .

Dans cette partie on donne la valeur de  $\gamma_2(G_{4,n})$ . Pour cela on utilisera les quatre blocs  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$  de la Figure 4.

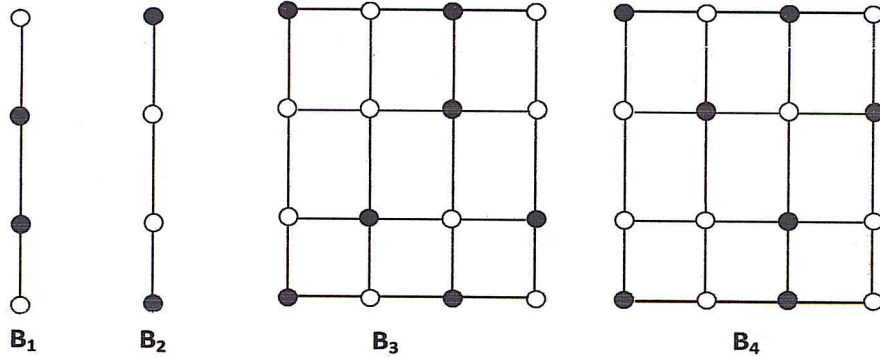


Figure 4: Blocs  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$  pour construire un ensemble de 2-dominant de  $G_{4,n}$ .

Pour tout  $i \in [4]$ , il est clair que les sommets qui sont représentés par des cercles en blancs sont 1-dominé par l'ensemble des sommets en noir foncé dans  $B_i$  (voir Figure 4). Donc il est facile de voir que l'ensemble des sommets en noir foncé désigné par  $D_n$ , dans le bloc  $T_n$  est un 2-dominant de  $G_{4,n}$  où les blocs sont:

**Fait**  $c_1(D) = c_2(D) = c_{n-1}(D) = c_n(D) = 2$ .

**Preuve du Fait.** Par symétrie, il suffit de montrer que  $c_1(D) = c_2(D) = 2$ . Supposons que  $c_1(D) \neq 2$  ou  $c_2(D) \neq 2$ , alors on a ou bien  $c_1(D) = 3$  et  $c_2(D) = 1$  car  $c_1(D) \geq 2$  par le lemme 2.1 ou  $c_1(D) + c_2(D) \geq 5$ .

- Si  $c_1(D) = 3$  et  $c_2(D) = 1$ , alors on remplace un sommet de  $\mathcal{C}_1(D)$  par un sommet de  $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_2(D)$  et on obtient un nouveau  $\gamma_2(G_{4,n})$ -ensemble  $S_1$  qui satisfait  $N_0(S_1) = 0$  et  $N_2(S_1) \geq N_2(D) + 2$ , ce qui contredit le choix de  $D$ .

- Si  $c_1(D) + c_2(D) \geq 5$  et  $c_3(D) = 1$ , même raisonnement on aboutit à une contradiction .

- Si  $c_1(D) + c_2(D) \geq 5$  et  $c_3(D) \geq 2$ , même raisonnement on aboutit à une contradiction avec  $D$  minimum. **Fin de la preuve du fait.**  $\square$

Enlevant 2 de la séquence  $(c_1(D), c_2(D), \dots, c_n(D))$ , on obtient des sous séquences  $\rho_1, \dots, \rho_h$ , chacun contient 1, 3 ou 4. Par définition, il existe au moins une colonne de 2 entre les sous séquences. Par le **Fait**, on a :

$$N_2(D) \geq 2 + (h - 1) + 2 = h + 3 \quad (7)$$

Pour  $i \in [h]$ , on utilise  $\ell_i^1, \ell_i^3, \ell_i^4$  le nombre de 1,3,4 dans  $\rho_i$ . Par le lemme 3, on doit avoir  $\ell_i^3 + \ell_i^4 \geq 1$  et  $\ell_i^1 \leq \ell_i^3 + \ell_i^4 + 1$ . Donc:

$$N_1(D) = \sum_{i=1}^h \ell_i^1 \leq \sum_{i=1}^h (\ell_i^3 + \ell_i^4 + 1) = N_3(D) + N_4(D) + h \quad (8)$$

et

$$N_3(D) + N_4(D) = \sum_{i=1}^h (\ell_i^3 + \ell_i^4) \geq h \quad (9)$$

(5) et (9) donne :

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil &\geq N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) + 4N_4(D) \\ &= n + N_2(D) + 2(N_3(D) + N_4(D)) + N_4(D) \\ &\geq n + (h + 3) + 2h + N_4(D) \end{aligned}$$

ceci implique:

$$h \leq \frac{1}{3} \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil - 1 - \frac{1}{3} N_4(D)$$



et :

$$\begin{aligned}
\left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil &\geq \gamma_2(G_{4,n}) = N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) + 4N_4(D) \\
&= 2n + (N_3(D) + N_4(D) - N_1(D)) + N_4(D) \\
&\geq 2n - h + N_4(D) \\
&\geq 2n + \frac{1}{3} \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil + 1 + \frac{4}{3} N_4(D) \\
&\geq \left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil + \frac{4}{3} N_4(D) - \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ \frac{2}{3} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 1 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci force  $N_4(D) = 0$  et  $\left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil - 1 \leq \gamma_2(G_{4,n}) \leq \left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil$ . Supposons que  $\gamma_2(G_{4,n}) = \left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil - 1$ , alors  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ ,  $N_3(D) - N_1(D) = -h$  et  $h = \frac{1}{3} \left\lceil \frac{3n+3}{4} \right\rceil - 1$  ce qui force  $N_2(D) = h+3$  et  $N_3(D) = h$ , mais  $n = N_1(D) + N_2(D) + N_3(D) = 2h + (h+3) + h = 4h+3$ , ce qui contredit le fait que  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ , donc on a  $\gamma_2(G_{4,n}) = \left\lceil \frac{7n+3}{4} \right\rceil$ . ■

## 2.2 La domination localisatrice dans la grille infinie

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, pour un sommet  $v \in V$  et  $S \subseteq V$ , on pose  $S(v) = S \cap N[v]$ . Si

$S$  est un ensemble dominant et  $v \in S$ , on définit  $\gamma(v; S) = \sum_{w \in N[v]} \frac{1}{|S(w)|}$ .

Par exemple, si  $S(x) = \{v_1, v_2, v_3\}$ , alors  $x$  contribue  $\frac{1}{3}$  dans chaque  $\gamma(v_i; S)$ , donc on peut dire que  $\gamma(v; S)$  représente la quantité de domination fourni par  $v$  dans  $S$ . Pour  $S$  un ensemble dominant, il est simple de voir que  $\sum_{v \in S} \gamma(v; S) = |V| = n$  car  $\forall v \in V$ , on a  $v \in N[S]$ .

On définit la densité de domination localisatrice de  $S$  dans  $G$  par  $RD(S) = \frac{|S|}{|V|}$  et le plus petit pourcentage de sommet dans un dominant localisateur est:

$$RD\%(G) = \min_{S \text{ dominant localisateur de } G} \left( \frac{|S|}{|V|} \right).$$

Notons dans la suite la grille infinie  $Z \square Z$  par  $G_\infty$ .

Pour  $v \in V(G_\infty)$ ,  $N^k[v] = \{w \in V(G_\infty) : d(v, w) \leq k\}$  l'ensemble des sommets qui sont à distances au plus  $k$  de  $v$ . On peut aussi définir le plus petit pourcentage de domination

localisatrice dans la grille infinie par:

$$RD\%(G_\infty) = \min_{v \in V} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup \left( \frac{|S \cap N^k[v]|}{|N^k[v]|} \right) \right) \right)$$

où  $S$  est un dominant localisateur.

Supposons que  $S$  est un dominant localisateur d'un graphe  $G$ . Peut être  $S(v) = \{v\}$  et  $S(w) = \{v\}$  pour au plus un sommet  $w \in V - S$  car  $S$  est un dominant localisateur. Alors on a  $\gamma(v; S) \leq 1 + 1 + \frac{|N[v]-2|}{2} = \frac{d(v)+3}{2}$  ;  $\forall v \in S$ .

**Théorème 2.7 (Slater [13])** *Si  $G$  est un graphe régulier de degré  $r$ , alors  $RD\%(G) \geq \frac{2}{r+3}$ .*

**Preuve.** Pour tout  $S$  dominant localisateur on a d'après ce qui précède:

$$\gamma(v; S) \leq \frac{r+3}{2}.$$

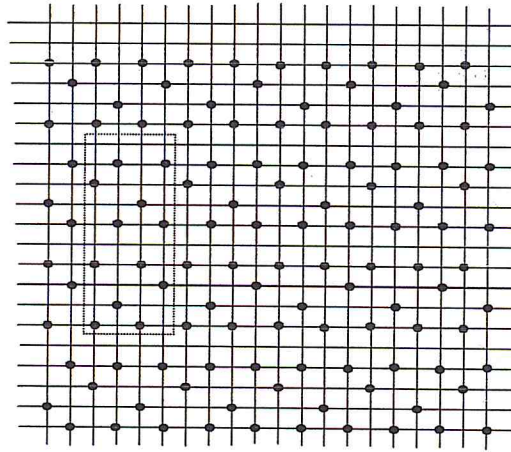
Comme  $\sum_{v \in S} \gamma(v; S) = |V| \leq |S| \frac{r+3}{2}$ , on a  $\frac{|S|}{|V|} \geq \frac{2}{r+3}$ . Donc  $RD\%(G) \geq \frac{2}{r+3}$ . ■

Pour la grille infinie, le théorème précédent donne  $RD\%(G_\infty) \geq \frac{2}{7}$  car le degré de la grille infinie est  $r = 4$ . Mais par surprise, cette borne ne peut être atteinte. La figure (5) montre qu'on peut utiliser des motifs de  $10 \times 4$  rectangle pour couvrir la grille avec un ensemble dominant localisateur  $S$  qui vérifie: pour tout sommet  $v$  de  $S$  on a  $\gamma(v; S) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$  et donc  $RD\%(S) = \frac{3}{10}$ . D'où on peut déduire que  $RD\%(G_\infty) \leq \frac{3}{10}$ . Pour avoir l'égalité il suffit de montrer que  $RD\%(G_\infty) \geq \frac{3}{10}$ . Pour cela Slater a donné une preuve en fournissant un argument assez compliqué qui considère les valeurs prises par  $\gamma(v; S)$ , en effet il montre qu'en moyenne on peut toujours avoir  $\gamma(v; S) \leq \frac{10}{3}$  pour n'importe quel  $S$  dominant localisateur de  $G_\infty$  et donc  $\sum_{v \in S} \gamma(v; S) = |V| \leq |S| \frac{10}{3}$  d'où  $RD\%(G_\infty) \geq \frac{3}{10}$ . Le seul cas où  $\gamma(v; S) > \frac{10}{3}$  est  $\gamma(v; S) = \frac{7}{2}$  et dans ce cas on peut affecter à  $v$  un ou deux sommets de  $S$  et à distance 2 à partir de  $v$  tel que la valeur moyenne de  $\gamma(v; S)$  pour ces sommets ne dépasse pas  $\frac{10}{3}$ .

**Théorème 2.8 (Slater [13])**  $RD\%(G_\infty) = \frac{3}{10}$ .

Soit  $G_{k,\infty} = P_k \times P_\infty$ .

**Problème 2.9** Déterminer  $RD\%(G_{k,\infty})$  pour  $k \geq 1$ .



*Figure 5 : un ensemble dominant  
localisateur optimal de  $Z \square Z$ .*



## CHAPITRE III

# CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA 2-DOMINATION ET LA DOMINATION LOCALISATRICE DANS LA GRILLE

Dans ce chapitre, on a essayé dans la première partie de déterminer la valeur exact du nombre de 2-dominance dans la Grille  $G_{5,n}$ , en utilisant les techniques de démonstration utilisées par You Lu et Jun-Ming Xu, vue dans le chapitre précédent. Ces techniques nous ont permis seulement d'encadrer le paramètre  $\gamma_2(G_{5,n})$ . Dans la seconde partie, on donnera les valeurs exactes du nombre de domination localisatrice de la grille  $G_{m,n}$  pour  $2 \leq m \leq 3$ , en utilisant les mêmes techniques de démonstration.

### 3.1 Bornes inférieure et supérieure pour le nombre de 2-dominance de la grille $G_{5,n}$ .

Dans cette partie on donne des bornes inférieure et supérieure pour le nombre de 2-dominance de la grille  $G_{5,n}$ . Pour la borne supérieure on utilisera les sept blocs de la Figure 6.

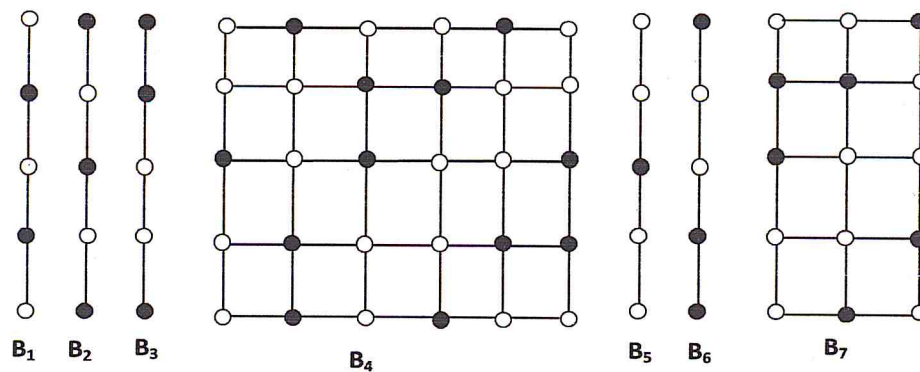


Figure 6: Construction de l'ensemble de 2-dominant à partir des blocs  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  et  $B_7$ .

$$T_n = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_3 (B_4 B_3)^k. n = 7k + 2. k \geq 1 \\ B_1 B_3. k = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_1. n = 7k + 3. k \geq 1 \\ B_1 B_2 B_1. k = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_1 B_2. n = 7k + 4. k \geq 1 \\ B_1 B_2 B_1 B_2. k = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_5 B_6 B_1. n = 7k + 5. k \geq 1 \\ B_1 B_3 B_5 B_6 B_1. k = 0 \end{array} \right. \\ B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_5 B_6 B_1 B_2. \text{si } n = 7k + 6. k \geq 0 \\ B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_5 B_6 B_1 B_2 B_1. \text{si } n = 7k + 7. k \geq 0 \\ B_1 B_3 (B_4 B_3)^k B_5 B_6 B_7 B_2 \text{ si } n = 7k + 8. k \geq 0 \end{array} \right.$$

et

$$|D_n| = \left\{ \begin{array}{l} 5 + 15k = \frac{15}{7}(7k + 2) + \frac{5}{7} = \frac{15n+5}{7} \text{ pour } n = 7k + 2 \forall k \\ 5 + 15k + 2 = 7 + 15k = \frac{15}{7}(7k + 3) + \frac{4}{7} = \frac{15n+4}{7} \text{ pour } n = 7k + 3 \forall k \\ 5 + 15k + 5 = 15k + 10 = \frac{15}{7}(7k + 4) + \frac{10}{7} = \frac{15n+10}{7} \text{ pour } n = 7k + 4 \forall k \\ 5 + 15k + 1 + 3 + 2 = 15k + 11 = \frac{15}{7}(7k + 5) + \frac{2}{7} = \frac{15n+2}{7} \text{ pour } n = 7k + 5 \forall k \\ 5 + 15k + 1 + 3 + 2 + 3 = 15k + 14 = \frac{15}{7}(7k + 6) + \frac{8}{7} = \frac{15n+8}{7} \text{ pour } n = 7k + 6 \forall k \\ 5 + 15k + 1 + 3 + 2 + 3 + 2 = 15k + 16 = \frac{15}{7}(7k + 7) + \frac{7}{7} = \frac{15n+7}{7} \text{ pour } n = 7k + 7 \forall k \\ 5 + 15k + 1 + 3 + 6 + 3 = 15k + 18 = \frac{15}{7}(7k + 8) + \frac{6}{7} = \frac{15n+6}{7} \text{ pour } n = 7k + 8 \forall k \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \lfloor \frac{15n+4}{7} \rfloor \text{ si } n \equiv 5[7] \\ \lceil \frac{15n+4}{7} \rceil \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Donc on a  $\gamma_2(G_{5,n}) \leq |D_n| = \lceil \frac{15n+4}{7} \rceil$ .

**Théorème 3.1** [7] Soit  $G$  un graphe d'ordre  $N$  et de degré maximum  $\Delta(G)$ . Alors pour tout entier  $k \geq 1$ , on a  $\gamma_k(G) \geq \frac{kN}{k + \Delta(G)}$

**Preuve.** Soit  $S$  un ensemble  $k$  dominant du graphe  $G$  donné dans la Figure 7 suivante:

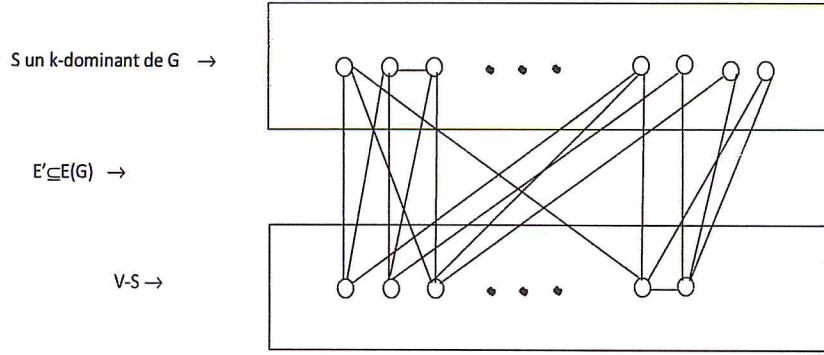


Figure 7

Soient  $E$  : l'ensemble des arêtes d'un graphe  $G$ ,  $S$  : l'ensemble de sommets d'un ensemble  $k$ -dominant de  $G$ ,  $\Delta(G)$  : le degré maximum de  $G$  et  $N$  : le nombre du sommets du graphe  $G$ , alors on a:

$$\begin{aligned}
 k|V - S| &\leq |E| \leq \Delta(G)|S| \\
 k(N - |S|) &\leq |E| \leq \Delta(G)|S| \\
 &\Rightarrow k(N - |S|) \leq \Delta(G)|S| \\
 &\Rightarrow kN \leq |S|(\Delta(G) + k) \\
 &\Rightarrow |S| \geq \frac{kN}{\Delta(G) + k} \\
 &\Rightarrow \gamma_k(G) \geq \frac{kN}{\Delta(G) + k}
 \end{aligned}$$

Dans notre cas on a:  $k = 2$ ,  $N = 5 \times n$ , et  $\Delta(G) = 4$

$$\gamma_2(G_{5,n}) \geq \frac{2(5n)}{4 + 2} = \frac{5n}{3}$$

■

En utilisant le procédé de You Lu et Jun-Ming Xu, on donne une borne inférieure meilleure que celle de Fink et Jacobson.

Par le Lemme 2.3,  $G_{5,n}$  contient au moins un  $\gamma_2(G_{5,n})$  ensemble avec  $N_0(D) = 0$ , on choisit un  $\gamma_2(G_{5,n})$ -ensemble  $D$  telle que  $N_0(D) = 0$ ,  $N_1(D)$ ,  $N_2(D)$  et  $N_3(D)$  sont plus grands possibles respectivement et dans cet ordre.

$$N_1(D) + N_2(D) + N_3(D) + N_4(D) + N_5(D) = n$$



et

$$N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) + 4N_4(D) + 5N_5(D) = |D| = \gamma_2(G_{5,n}) \leq \left\lceil \frac{15n+4}{7} \right\rceil$$

**Fait 1**  $2 \leq c_1(D) \leq 3$

**Preuve du Fait 1.** Par le Lemme 2.1 [11] et la définition du  $\gamma_2(G_{5,n})$ -ensemble  $D$ .  
Supposons qu'au contraire  $c_1(D) \geq 4$ .

**Cas 1.**  $c_1(D) = 5$  (voir Figure 8).

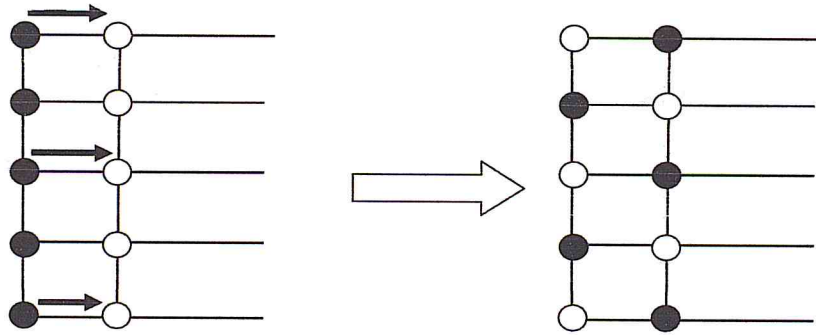


Figure 8

En faisant un petit changement ou remplacement, on a un  $\gamma_2(G_{5,n})$ -ensemble  $D'$  avec  $c_1(D') = 2$  ce qui contredit le choix de  $D$ .

**Cas 2.**  $c_1(D) = 4$ . (voir Figure 9). On a les possibilités suivantes.

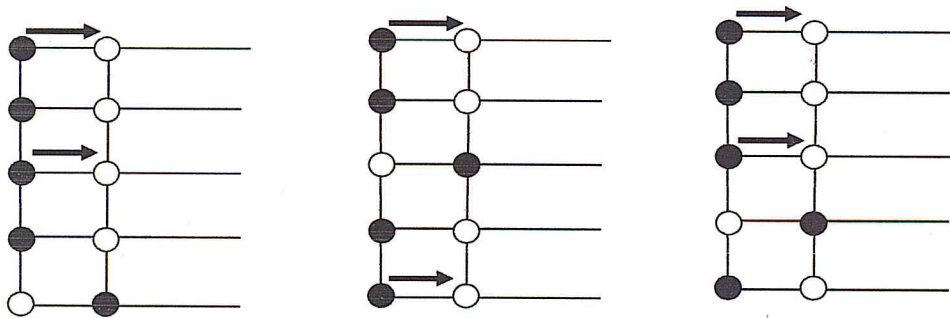


Figure 9

Il est simple de voir qu'on peut toujours trouver par remplacement des sommets un  $\gamma_2(G_{5,n})$ -ensemble  $D'$  avec  $c_1(D') = 2$  ce qui contredit le choix de  $D$ . ■

Par conséquent, si  $c_1(D) = 2$ , alors pour dominer cette colonne il faut que  $c_2(D) = 3$  de même pour  $c_n(D)$  avec  $c_{n-1}(D)$ . Si  $c_1(D) = 3$  pour dominer cette colonne il faut que

$c_2(D) = 2$  de même pour  $c_n(D)$  avec  $c_{n-1}(D)$ . Ce qui implique:

$$c_1(D) + c_2(D) = c_{n-1}(D) + c_n(D) \geq 5$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{15n+4}{7} \right\rceil &\geq |D| = \gamma_2(G_{5,n}) = N_1(D) + 2N_2(D) + 3N_3(D) + 4N_4(D) + 5N_5(D) \\ &= 2n + N_3(D) + 2N_4(D) + 3N_5(D) - N_1(D) \end{aligned}$$

et aussi on peut vérifier que:

$$N_3(D) + 2N_4(D) + 3N_5(D) - N_1(D) \geq 1$$

car une colonne  $N_1(D)$  est toujours situé entre au moins deux colonne de  $N_3(D)$  et  $N_2(D)$ .

Ce qui implique

$$2n + 1 \leq \gamma_2(G_{5,n}) \leq \left\lceil \frac{15n+4}{7} \right\rceil$$

Au vu des exemples traités, on pense que la borne supérieure est la valeur exacte de  $\gamma_2(G_{5,n})$ .

**Conjecture 3.2**  $\gamma_2(G_{5,n}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{15n+4}{7} \right\rceil & \text{si } n \equiv 5[7] \\ \left\lceil \frac{15n+4}{7} \right\rceil & \text{sinon} \end{cases}$

### 3.2 Etude de la domination localisatrice dans la grille $G_{m,n}$

Dans ce paragraphe, en utilisant les techniques de démonstration utilisées par You Lu et Jun-Ming Xu, on détermine les valeurs exactes de  $\gamma_L(G_{m,n})$  avec  $1 \leq m \leq 3$ .

Soit  $S$  un ensemble dominant localisateur de  $G_{m,n}$ . Pour tout  $j \in [n]$ , soit  $C_j = \{(i, j) \mid i \in [m]\}$ ,  $C_j(S) = S \cap C_j$  and  $c_j(S) = |C_j(S)|$ .

Les séquences  $(C_1(S), C_2(S), C_3(S), \dots, C_n(S))$  et  $(c_1(S), c_2(S), \dots, c_n(S))$  sont appelées, séquence d'ensemble dominants localisateurs et séquence de nombres de domination localisatrice de  $G_{m,n}$  respectivement.

Comme  $0 \leq c_j(S) \leq m; \forall j \in [n]$ , soit

$$L_i(S) = |\{c_j(S) \mid c_j(S) = i \text{ où } j \in [n]\}| \text{ tel que } i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

#### 3.2.1 Cas de la grille $G_{1,n}$ .

L'item b du théorème 1.18 de Stater est équivalent à:  $\gamma_L(G_{1,n}) = \gamma_L(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$ .

#### 3.2.2 Cas de la grille $G_{2,n}$ .

Dans cette partie on calcule la valeur du nombre de domination localisatrice  $\gamma_L$  de la grille  $G_{2,n}$ , Pour cela on utilisera tout d'abord les quatre blocs de la Figure 10.

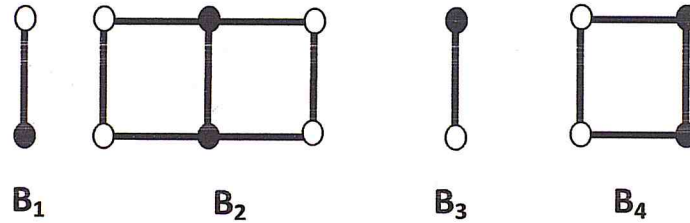


Figure 10: Construction de l'ensemble de dominant localisateur à partir des blocs  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  et  $B_4$ .

Il est facile de voir que l'ensemble des sommets en noir foncé désigné par  $D_n$ , dans le bloc  $T_n$  est un dominant localisateur de  $G_{2,n}$  où les blocs sont:



$$T_n = \begin{cases} (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k}{2}} B_1 & \text{si } n = 4k + 1 \text{ } k \text{ est pair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k}{2}} B_1^2 & \text{si } n = 4k + 2 \text{ } k \text{ est pair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k}{2}} B_1 B_4 & \text{si } n = 4k + 3 \text{ } k \text{ est pair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k}{2}} B_1 B_4 B_3 & \text{si } n = 4k + 4 \text{ } k \text{ est pair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k-1}{2}} B_1 B_2 B_3 & \text{si } n = 4k + 1 \text{ } k \text{ est impair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k-1}{2}} B_1 B_2 B_3^2 & \text{si } n = 4k + 2 \text{ } k \text{ est impair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k-1}{2}} B_1 B_2 B_3 B_4 & \text{si } n = 4k + 3 \text{ } k \text{ est impair} \\ (B_1 B_2 B_3 B_2)^{\frac{k-1}{2}} B_1 B_2 B_3 B_4 B_1 & \text{si } n = 4k + 4 \text{ } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$|D_n| = \begin{cases} \frac{k}{2} (1 + 2 + 1 + 2) + 1 = 3k + 1 = 3 \left(\frac{n-1}{4}\right) + 1 = \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} & \text{Si } n = 4k + 1 \text{ } k \text{ est pair} \\ \frac{k}{2} (1 + 2 + 1 + 2) + 2 = 3k + 2 = 3 \left(\frac{n-2}{4}\right) + 2 = \frac{3n}{4} + \frac{2}{4} & \text{Si } n = 4k + 2 \text{ } k \text{ est pair} \\ \frac{k}{2} (1 + 2 + 1 + 2) + 3 = 3k + 3 = 3 \left(\frac{n-3}{4}\right) + 3 = \frac{3n}{4} + \frac{3}{4} & \text{Si } n = 4k + 3 \text{ } k \text{ est pair} \\ \frac{k}{2} (1 + 2 + 1 + 2) + 4 = 3k + 4 = 3 \left(\frac{n-4}{4}\right) + 4 = \frac{3n}{4} + 1 & \text{Si } n = 4k + 4 \text{ } k \text{ est pair} \\ \left(\frac{k-1}{2}\right) (1 + 2 + 1 + 2) + 1 + 2 + 1 = 3k + 1 = \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} & \text{Si } n = 4k + 1 \text{ } k \text{ est impair} \\ 6 \left(\frac{k-1}{2}\right) + 1 + 2 + 2 = 3k + 2 = \frac{3n}{4} + \frac{2}{4} & \text{Si } n = 4k + 2 \text{ } k \text{ est impair} \\ 6 \left(\frac{k-1}{2}\right) + 1 + 2 + 1 + 2 = 3k + 3 = \frac{3n}{4} + \frac{3}{4} & \text{Si } n = 4k + 3 \text{ } k \text{ est impair} \\ 6 \left(\frac{k-1}{2}\right) + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 3k + 4 = \frac{3n}{4} + 1 & \text{Si } n = 4k + 4 \text{ } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$$

Donc on a  $\gamma_L(G_{2,n}) \leq |D_n| = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$

**Théorème 3.3** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a:  $\gamma_L(G_{2,n}) = \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$

**Preuve.** D'après ce qui précède, on a  $\gamma_L(G_{2,n}) \leq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$ . Il suffit de montrer que  $\gamma_L(G_{2,n}) \geq \left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$ . Tout d'abord on montre que  $\gamma_L(G_{2,n}) \geq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$ . Soit  $D$  un  $\gamma_L(G_{2,n})$ -ensemble, il est clair que tout bloc de  $G_{2,n}$  de quatre colonnes successives contient au moins deux sommets de  $D$ , sinon on aura des sommets de ce bloc qui ne sont pas dominés par  $D$ . Si tout bloc de  $G_{2,n}$  de quatre colonnes successives contient au moins trois sommets de  $D$ , alors on a  $|D| \geq \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$ . Sinon il existe des blocs de quatre colonnes successives qui

contiennent exactement deux sommets de  $D$ . On montre qu'un tel bloc déficitaire peut récupérer un sommet des bloc suivants ayant un excédent de sommets dans  $D$ . Il est clair que le premier et le dernier bloc de quatre colonnes successives de  $G_{2,n}$  contiennent au moins chacun trois sommets de  $D$ , sinon des sommets de ce bloc ne seront pas dominés ou ne seront pas localisés. Prenons un bloc intermédiaire de quatre colonnes successives de  $G_{2,n}$ , voir Figure 11 et supposons qu'il contient deux sommets de  $D$ .

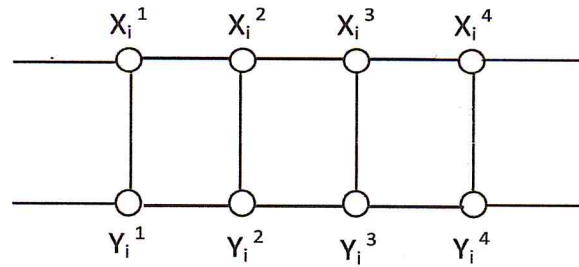


Figure 11: Bloc  $i$  intermédiaire de quatre colonnes successives

Sans perte de généralité on peut supposer que  $\{X_i^2, X_i^3\} \in D$ . Quelque soit le cas de la figure, on peut montrer qu'il a au moins un bloc de 4 colonnes successives qui a 4 sommets dans  $D$ , ou un dernier bloc qui a moins de 4 colonne et qui contient au moins un sommet dans  $D$ , que le bloc initial récupère. On peut voir que  $X_{i+1}^1$  et  $Y_{i+1}^1$  appartiennent à  $D$  et donc pour dominer et localiser les sommets  $X_{i+1}^3$  et  $Y_{i+1}^3$ , il nous faut au moins un sommet en plus de  $D$  dans le bloc de quatre colonnes successives  $i + 1$ . On peut déduire le même résultat pour tous les blocs suivants. En supposons que tous les blocs suivant le bloc  $i$  contiennent exactement 3 sommets dans  $D$ . Le bloc final contiendrait forcément 4 sommets de  $D$  si c'est un bloc quatre colonnes successives sinon le dernier bloc de  $G_{2,n}$  n'est pas un bloc de quatre colonnes successives et dans ce cas il contient au moins un sommet de  $D$ . Dans tous les cas le dernier bloc contient un excédent d'au moins un sommet que le bloc de quatre colonnes successives  $i$  récupère. Par conséquent on a  $|D| \geq \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ .

Alors on a  $\lceil \frac{3n}{4} \rceil \leq |D| \leq \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil$ . Si  $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$ , on  $\lceil \frac{3n}{4} \rceil = \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil = |D|$ . Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  il est facile de voir que  $\lceil \frac{3n}{4} \rceil < |D| = \lceil \frac{3n+1}{4} \rceil$ . ■

### 3.2.3 Cas de la grille $G_{3,n}$

Dans cette partie on calcule la valeur du nombre de domination localisatrice  $\gamma_L$  de la grille  $G_{3,n}$ , on utilisera les trois blocs de la figure 12.

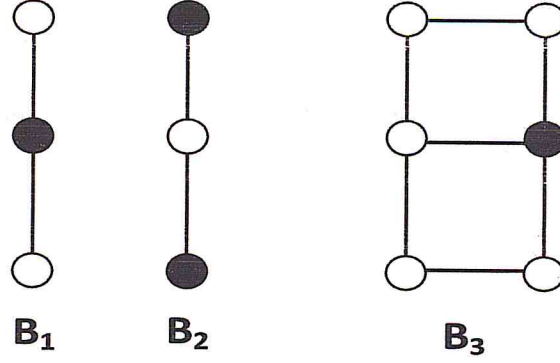


Figure 12: Construction de l'ensemble de dominant localisateur à partir des blocs  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ .

$$T_n = \begin{cases} B_2(B_3B_2)^k & \text{Si } n = 3k + 1. \ k \geq 0 \\ B_2(B_3B_2)^k B_1 & \text{Si } n = 3k + 2. \ k \geq 0 \\ B_1B_2(B_3B_2)^k B_1 & \text{Si } n = 3k + 3. \ k \geq 0 \end{cases}$$

$$|D_n| = \begin{cases} 2 + 3k = n + 1 & \text{Si } n = 3k + 1 \quad k \geq 0 \\ 2 + 3k + 1 = 3 + 3k = n + 1 & \text{Si } n = 3k + 2 \quad k \geq 0 \\ 3 + 3k + 1 = 4 + 3k = n + 1 & \text{Si } n = 3k + 3 \quad k \geq 0 \end{cases}$$

$$= n + 1$$

Donc on a

$$\gamma_L(G_{3,n}) \leq |D_n| = n + 1.$$

**Théorème 3.4** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a:  $\gamma_L(G_{3,n}) = n + 1$

**Preuve.** Pour voir que le résultat est vrai, il suffit de montrer que  $\gamma_L(G_{3,n}) \geq n + 1$ . On choisit un  $\gamma_L(G_{3,n})$ -ensemble  $D$  tel que  $L_3(D)$  est le plus petit possible, on montre au fait que  $L_3(D) = 0$ . En effet supposons que  $L_3(D) \neq 0$ . On note  $C_j = (X^j, Y^j, Z^j)$  pour



tout  $j \in [n]$  et soit  $l \in [n]$  tel que  $|C_l \cap D| = 3$ .

- Si  $l = 1$ , on considère  $D' = D \cup \{Y^{l+1}\} - \{Y^l\}$ . Il est facile de voir que  $D'$  est un  $\gamma_L(G_{3,n})$ -ensemble qui contredit le choix effectué.

- Si  $l \neq 1$ , on considère les 3 possibilités suivantes: ■

**Cas 3.5** Si  $\{X^{l-2}, Y^{l+2}, Z^{l-2}\} \in D$ , la figure (13) représente ce cas:

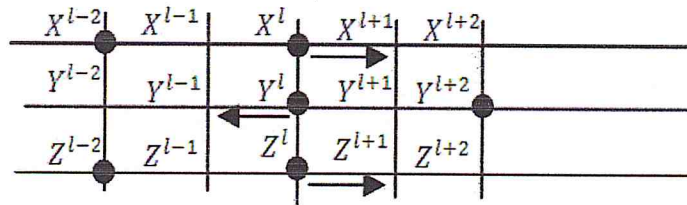


Figure 13

alors  $D' = D \cup \{X^{l+1}, Y^{l-1}, Z^{l+1}\} - \{X^l, Y^l, Z^l\}$ . Il est clair que  $D'$  est un  $\gamma_L(G_{3,n})$ -ensemble qui contredit le choix effectué.

**Cas 3.6** Si  $\{X^{l-2}, Y^{l-2}, Z^{l-2}, X^{l+3}, Y^{l+3}, Z^{l+3}\} \in D$  la figure (14) représente ce cas:

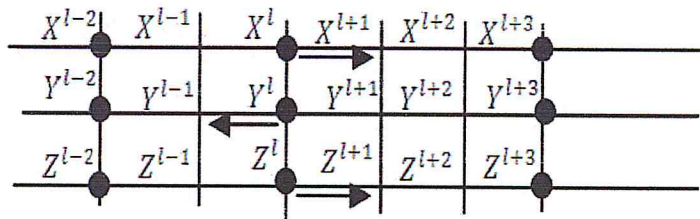
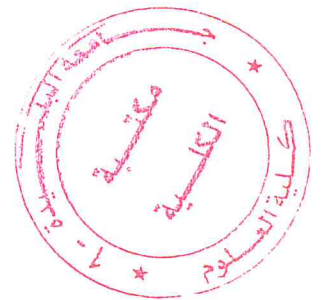


Figure 14



alors  $D' = D \cup \{X^{l+1}, Y^{l-1}, Z^{l+1}\} - \{X^l, Y^l, Z^l\}$ . Il est clair que  $D'$  est un  $\gamma_L(G_{3,n})$ -ensemble qui contredit le choix effectué.

Dans les deux cas précédent, Si on a le cas symétrie alors

$$D' = D \cup \{X^{l-1}, Y^{l+1}, Z^{l-1}\} - \{X^l, Y^l, Z^l\}.$$

**Cas 3.7** Si  $\{X^{l-2}, Y^{l-2}, Z^{l+2}\} \in D$ , la figure (15) représente ce cas:

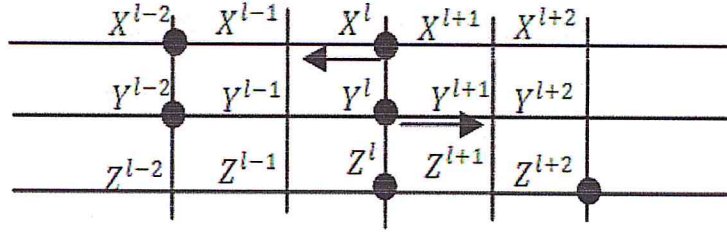


Figure15

Alors  $D' = D \cup \{X^{l-1}, Y^{l+1}\} - \{X^l, Y^l\}$ . Il est clair que  $D'$  est un  $\gamma_L(G_{3,n})$ -ensemble ce qui contredit le choix effectué.

Donc on a :

$$L_0(D) + L_1(D) + L_2(D) = n \quad (10)$$

et

$$L_1(D) + 2L_2(D) = |D| = \gamma_L(G_{2,n}) \leq n + 1 \quad (11)$$

Comme

$$n + 1 \geq \gamma_L(G_{3,n}) = L_1(D) + 2L_2(D) = n + (L_2(D) - L_0(D))$$

D'autre part on peut facilement voir qu'on a au plus un élément de valeur 0 entre deux éléments consécutifs  $a$  et  $b$  dans la séquence du nombre de domination localisatrice avec  $a, b \in \{2\}$ . D'où on a

$$L_2(D) - L_0(D) \geq 1.$$

et alors

$$n + 1 \geq \gamma_L(G_{3,n}) = L_1(D) + 2L_2(D) = n + (L_2(D) - L_0(D)) \geq n + 1.$$

Par conséquent, on a pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\gamma_L(G_{3,n}) = n + 1$ .

**Remarque 3.8** *En général les deux paramètres étudiés à savoir le nombre de 2-dominance ( $\gamma_2$ ) et le nombre de domination localisatrice ( $\gamma_L$ ) sont incomparables. Cependant pour la classe des arbres  $T$ , on a toujours  $\gamma_L(T) \leq \gamma_2(T)$  car tout  $\gamma_2$ -ensemble est un dominant localisateur. Aussi pour la classe particulière à savoir la grille  $G_{m,n}$ , on a pour  $m = 1, 2, 3$ ,  $\gamma_L(G_{m,n}) \leq \gamma_2(G_{m,n}), \forall n$ . Il est intéressant de faire une comparaison des deux paramètres pour le reste des valeurs prises par  $m$ .*



## CONCLUSION GENERALE

On a étudié dans ce mémoire deux notions de recherche de la théorie des graphes qui sont la 2-domination et la domination localisatrice dans la grille, qui est le produit cartésien de deux chaînes  $P_m$  et  $P_n$ .

Nous nous sommes intéressés au départ aux définitions et aux résultats récents liés à ces deux paramètres dans le cas des graphes et de la grille. Pour montrer l'utilité de ces deux paramètres nous avons fourni des exemples concrets de notre monde réel. Le côté pratique lié à ces deux paramètres nous a motivé à chercher à résoudre certains problèmes ouverts liés à ces deux paramètres.

Ainsi nous avons établi des valeurs exactes, des bornes, et des relations concernant ces deux paramètres dans le cas de la grille  $G_{m,n}$  pour des petites valeurs de  $m$ . Le problème général pour n'importe quelle valeur de  $m$  reste un problème ouvert et peut faire l'objet des travaux futurs.

Enfin, nous espérons que ce modeste travail contribuera à l'avancement de la recherche dans ce domaine et aidera les futurs chercheurs dans leurs travaux.

## REFERENCES

- [1] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, deuxième édition, 1970.
- [2] T .Y.Change ,and W.E.Clark, *The domination number of  $5 \times n$  and  $6 \times n$  grids graphs* .J.Graph Theory 17(1993), 81 – 108.
- [3] T .Y.Change ,and W.E.Clark, *The domination number of complete grid graphs*. I.Ars Combin. 38(1994), 97 – 111.
- [4] E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*. Networks. 7(1977), 247 – 261.
- [5] E. J. Cockayne, B. Gamble, and B.Shepherd. *An upper bound for the  $k$ -domination number of a graph*. J. Graph Theory, 9(1985), 533 – 534.
- [6] O. Favaron. *on a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence*. J. combin. Theory Ser. B, 39(1985), 101 – 102.
- [7] J.F.Fink, M.S. Jacobson:  *$n$ -domination in graphs*. In Y. Alavi and A. J. Schwenk, editors, *Graph Theory with Application to Algorithms and Computer Science*, Pages 283 – 300, (Kalamazoo, MI 1984), 1985. Wiley.
- [8] J.F. Fink et M.S. Jacobson, *On  $n$ -domination,  $n$ -dependence and for bidden subgraphs*. In: *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, Wiley, New York, 301 – 311 (1985).
- [9] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards: A brief survey*, dans *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 507 – 528 (1995).

- [10] C.F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématiques au jeu d'échecs*. Petrograd, 1962.
- [11] You Lu et Jun-Ming X The 2-Domination and 2\_Bondage Numbers of Grid Graphs .arxiv:1204.4514v1[math .CO] 20 Apr 2012.
- [12] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. colloq. Publ. 38 (1962).
- [13] Peter J. Slater, Fault-tolerant locating-dominating sets, *Discrete Mathematics* 249, 179-189, 2002.
- [14] D. F. Rall and P. J. Slater. On location-domination numbers for certain classes of graphs. *Congr. Numer.*, 45 : 97 – 106, 1984.
- [15] C. Stracke and L. Volkmann. A new domination conception. *J. Graph Theory*, 17 : 315 – 323, 1993.
- [16] P. J. Slater, Leaves of tree . *Congr. Numer.*, 14 : 549 – 559, 1975.
- [17] P. J. Slater, Dominating and reference sets in a graph. *J. Math. Phys. Sci.*, 22 : 445 – 455, 1988.
- [18] P. J. Slater, Dominating and reference sets in acyclic graphs. *Networks*, 17 : 55 – 64, 1987.

