

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Construction mécanique

Titre

**Interaction entre fissure et inclusion en
utilisant la méthode des éléments finis (code
calcul Ansys)**

Proposé et encadré par :
MADANI FATEH

réalisé par :
DJOUABRI ABDELHAK

Année universitaire 2019/2020

REMECIMENTS

Je remercie en premier lieu, Dieu tout Puissant, de m'avoir donné la force, le courage et la patience, pour arriver à réaliser ce travail.

Je remercie très sincèrement, monsieur fateh MADANI pour toute l'aide qu'il m'a apporté, l'attention et le soutien moral qu'il m'accordés.

Je remercie très vivement les membres de ma famille pour leur compréhension, encouragement et aide pendant toute la période de préparation de ce mémoire, et surtout mes chers parents.

Et, tous les enseignants et collègues du département de génie mécanique de l'université SAAD DAHLEB.

ملخص

ان فهم ظاهرة كسر المواد تتطلب دراسات تفصيلية لبداية التشققات، والتي تنشأ عادة في مناطق الإجهاد العالي نظرا للأثار هندسية أو المعدنية. إن معرفة توزيع الإجهاد على مقربة من مناطق مختلفة مهم بالنسبة لتحليل تباين معامل شدة الاجهادات على أساس هندستها الخاصة. في هذه الدراسة، حاولنا تطبيق طريقة العناصر المحددة في الأوساط، في التفاعل بين هذه التشققات و الإدراجات وذلك بحساب معامل شدة الاجهادات .

كلمات مفتاحية: مكانيك التشققات/ معامل شدة الاجهادات/ طريقة العناصر المحددة / التفاعل

RESUME

Ce travail de recherche s'intéresse à l'étude de l'interaction entre fissures et inclusions. La méthode des éléments finis a été choisie pour réaliser la simulation numérique. Le code de calcul ANSYS a été utilisé pour le calcul. L'aspect du potentiel critique de la position de la fissure par rapport à l'inclusion est mis en évidence en travaillant sur les propriétés mécaniques des inclusions et de la matrice. Le facteur d'intensité de contrainte est le paramètre utilisé dans ce cas.

Mots clés : méthode élément fini /fissure /facteur d'intensité de

Contrainte /inclusion /interaction

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre I :	4
A propos de la mécanique de la rupture	4
I.1.Introduction :	5
I.2.Modes de rupture :	5
I.3.Etate de contrainte en front de fissure :	7
I.4. Facteur d'intensité de contrainte (FIC) :	9
I.5.Théorie énergétique de la rupture :	9
I.6.Relation entre G et K :	10
Chapitre II :	11
La méthode des éléments finis	11
II.1.Introduction :	12
II.2.Historique de la méthode :	13
II.3.Présentation de la méthode des éléments finis :	13
II.4. Les grandes lignes de la méthode:	14
II.5.Formes classique des éléments :	15
II.6.Discrétation domaine :	16
II.7.Utilisation d'un logiciel élément fini :	16
II.8.Conclusion :	17
Chapitre III :	18
Processus de modéliser sur ANSYS	18
III.1.Introduction :	19
III.2.Procédure sur ANSYS pour modéliser une interaction entre fissure et inclusion :	19
III.2.1.Define élément Type :	20
III.2.2.Définir les propriétés des matériaux :	21
III.2.3.Créer une plaque et inclusion :	22
III.2.4.Pâte une inclusion en plaque :	26
III.2.5.Division de la forme :	26
III.2.6.Appliquer des charges :	27
III.2.7.L'analyse a commencé :	28

III.2.8. Analyse dimensionnelle :	29
III.3. Conclusions :	32
Chapitre III :	33
Exemples, résultats et interprétations	33
III.1. Introduction :	34
III.2. Inclusion dans une plaque sans fissure :	34
III.3. Effet de rigidité pour petite inclusion :	35
III.4. Effet de rigidité pour grosse inclusion :	37
III.5. Effet de la distance entre fissure et l'inclusion :	40
III.6. Inclusion centrée entre deux fissures : ..	41
III.7. Fissure centrée entre une entaille circulaire et une inclusion :	44
III.8. Conclusion :	47
Conclusion générale	48
Références	50

Liste de symbole

K_I, K_{II}, K_{III} : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II, et III

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: Champs de contraintes

r : Rayon au voisinage de la tête de fissure

u, v, w : champs de déplacements

μ : Module de cisaillement

E : Module de Young.

ν : Coefficient de poisson.

θ, r : Les coordonnées polaires d'un point arbitraire

G : Taux de restitution d'énergie

∂w_p : La variation d'énergie potentielle due à l'avance de fissure.

∂a : La variation de surface de l'aire fissure

Y : Facteur de forme.

E_1 : Module de young de la matrice

E_2 : Module de young de l'inclusion

K_{I0} : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I en absence de l'inclusion.

K_{tip} : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I en présence de l'inclusion.

r_0 : La distance r_0 entre l'inclusion et l'extrémité de la fissure.

MEF : Méthode des éléments finis.

FIC : Facteur d'Intensité de Contrainte

Introduction générale

De nombreux matériaux présentent des hétérogénéités microstructurales importantes telles que les inclusions, les cavités et les microfissures, etc. Le comportement élastique des matériaux est très affecté par la présence de défauts qui peuvent entraîner l'affaiblissement de la structure et provoquer sa destruction. Dans les zones à fortes concentrations de contraintes, des microfissures apparaissent. Ces microfissures se développent et coalescent les unes avec les autres jusqu'à ce qu'elles forment une fissure de taille macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine de la structure.

Problème : interaction entre inclusion et fissure

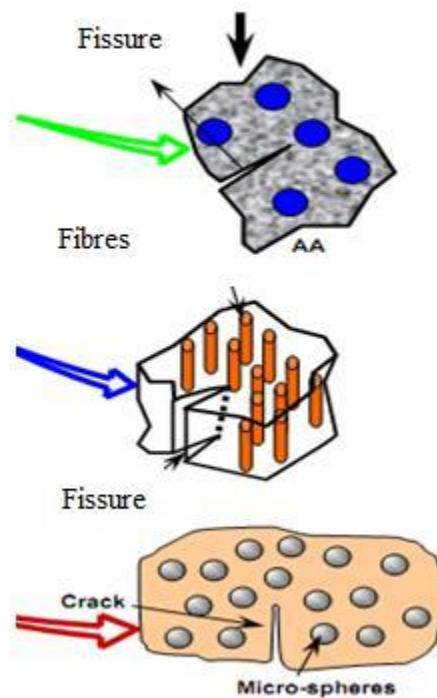


Figure.1 : Types de problèmes d'interaction entre fissure et l'inclusion

Généralement, les composites sont employés dans beaucoup d'applications modernes de technologie telles que l'aviation civile, et les pièces complexes afin de réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage, et soudures sur structure métalliques). Les machines en général en matériaux composites offrent en particulier des solutions dans de telles situations exigeantes. Un matériau composite est l'union d'au moins deux matériaux constituants qui sont différentes sur échelles microscopiques/macrosopiques, et les caractéristiques mécaniques et thermiques pour obtenir le comportement global désiré.

Les défauts sont présents pratiquement dans toutes les structures métalliques, ils apparaissent lors de la fabrication essentiellement. A la solidification, les variations de volume, de température et de composition, induisent des séries de défauts, les soudures augmentent les mêmes phénomènes. L'usinage et les traitements thermiques peuvent être à l'origine de fissurations dans l'état final des

pièces. En présence d'un défaut détecté dans une pièce ou dans un assemblage métallique, il est nécessaire de connaître le danger qu'il peut représenter lors de l'usage normal pour lequel l'objet a été conçu. Divers comportements peuvent apparaître : au cours de la durée de vie pour laquelle la pièce a été définie, le danger peut rester identique à lui-même.

L'inclusion est formée d'un matériau élastique dont le module de Young est différent à celui de la matrice (Fig.2). L'inclusion est modélisée par une forme cylindrique de diamètre d .

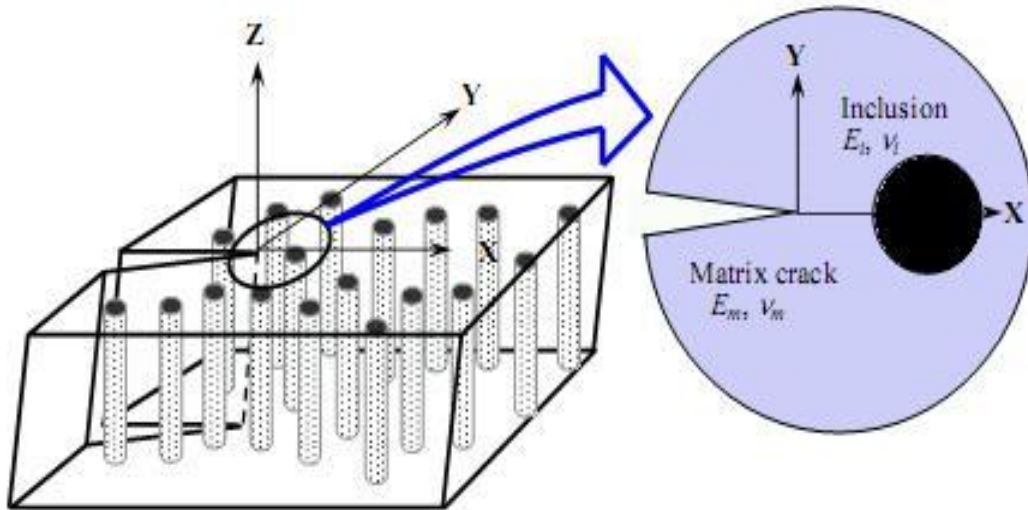


Figure.2 : Inclusion située au voisinage d'une fissure

De plus en plus d'application de la mécanique de la rupture aux dispositifs fonctionnels miniaturisés ont besoin d'intégrité structurale.

En dehors de l'expérimentation, la simulation numérique est une voie pour prendre en charge ce type de problèmes et beaucoup de problèmes de l'ingénierie.

Les principales méthodes numériques qui sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture sont la méthode des éléments finis la FEM et la méthode des éléments de frontière (BEM).

L'objectif de ce travail l'étude de l'interaction entre fissures et inclusions en utilisant la méthode des éléments finis la FEM (code calcul Ansys).

Chapitre I :

A propos de la mécanique de la rupture

I.1.Introduction :

La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente initiée par Griffith au début du vingtième siècle. La naissance de cette discipline a été motivée par l'amélioration constante des techniques de détection des défauts dans les structures. En effet, cette amélioration a mis en évidence la présence de fissures et de défauts impossibles à éliminer. Par conséquent, le besoin de quantifier la nocivité de ces fissures est devenu primordial.

La mécanique de la rupture est donc la quantification de la nocivité des fissures. C'est à dire introduire des quantités permettant d'évaluer le danger que représentent ces fissures, et introduire également des critères de propagation.

Une fissure est modélisée par deux surfaces, appelées faces (ou lèvres), dont la courbe d'intersection est appelée front. En deux dimensions, les deux surfaces se réduisent à deux lignes se joignant en un point appelé pointe (Figure.I.1).

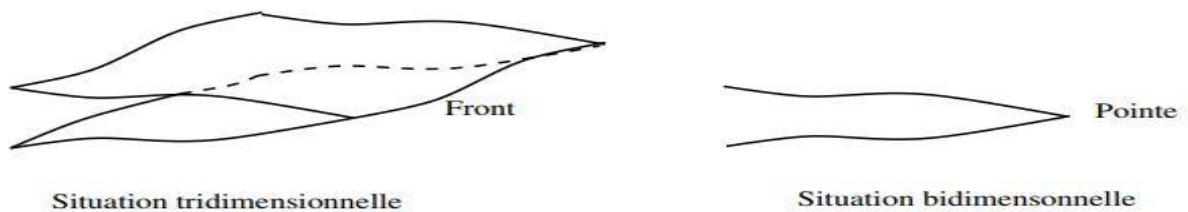


Figure.I.1 : Modèles de fissure

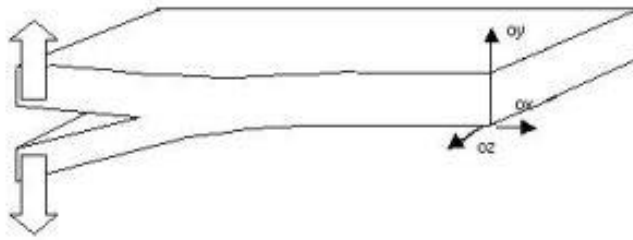
La modélisation complète de la rupture en trois dimensions est très difficile. Certains aspects de cette modélisation sont encore dans le stade de la recherche. Par conséquent, nous nous contenterons d'une étude en deux dimensions, valable dans beaucoup de cas pratiques. Deux cas seront traités : élasticité plane et élasticité anti-plane.

I.2.Modes de rupture :

Trois modes de rupture fondamentaux sont considérés :

Mode I :

« Mode par ouverture » ; Mode d'ouverture de la fissure ou le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure.



·**Figure.I.2** : Mode I : ouverture

Mode II :

« Cisaillement plan » ; mode de cisaillement plan ou le chargement est parallèle au plan et perpendiculaire au front de la fissure.

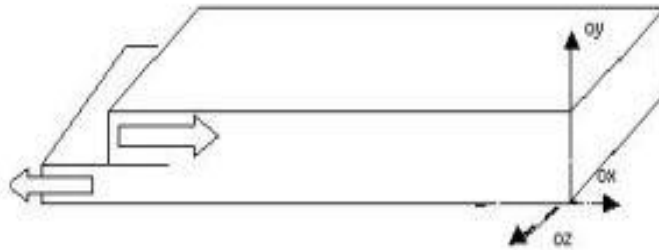


Figure.I.3 : Mode II : glissement dans le plan

Mode III :

« Cisaillement anti-plan » mode de cisaillement anti plan ou le chargement est parallèle au plan et au front de la fissure.

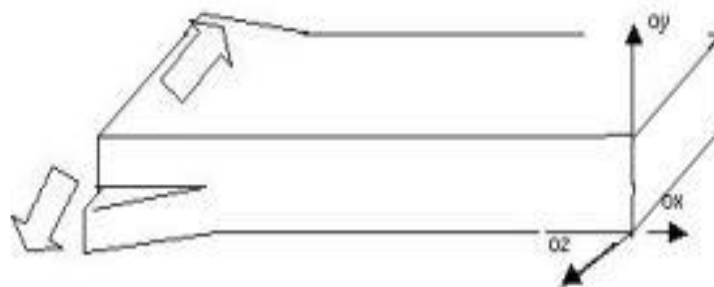


Figure.I.4 : Mode III : glissement anti-plan.

I.3. Etate de contrainte en front de fissure :

On peut distinguer deux approches planes : 'état plan de contrainte et l'état plan de déformation

En état plan de contraintes nous avons :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (I.1)$$

L'état plan de déformation est défini lorsque :

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \quad (I.2)$$

L'état plan de déformation peut avoir lieu au centre d'une pièce épaisse, où le tri axialité des contraintes est important. Dans la suite de l'étude, nous supposons un état de déformation plan.

D'après IRWIN, les champs de contraintes et de déplacements au Voisinage de la pointe de fissure s'exprimant dans le cadre d'élasticité et en déformation plane par les relations suivantes pour les différents modes. Les facteurs K_I, K_{II}, K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{m}$ Ils sont appelés facteurs d'intensités de contraintes. Ces paramètres dépendant uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

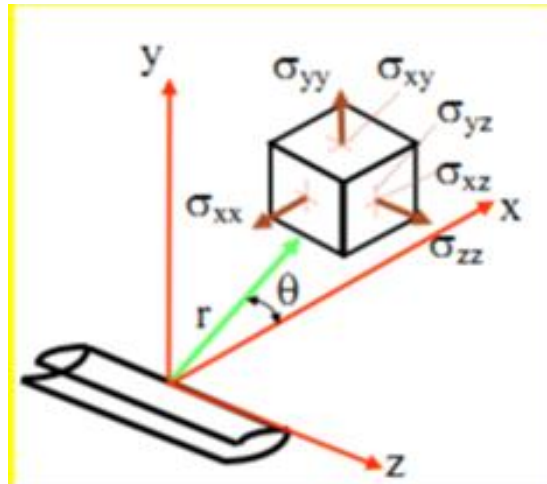


Figure.I.5 : Elément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne

En mode I :

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (I.3)$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0$$

En mode II :

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x - \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (I.4)$$

$$u = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0$$

En mode III :

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (I.5)$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = u = v = 0$$

ν est le coefficient de poisson et μ est le module de cisaillement avec : $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

I.4. Facteur d'intensité de contrainte (FIC) :

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Il permet de déterminer complètement les champs de contraintes ou de déplacement au voisinage de la fissure contenue dans une structure considérée élastique.

D'une manière générale le FIC dépend de la contrainte appliquée σ , de la taille de la fissure a , et de la géométrie :

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (I.6)$$

Y est un facteur adimensionnel tenant compte de la géométrie et appelé facteur de forme.

I.5. Théorie énergétique de la rupture :

Griffith (1920) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique. GRIFFITH constata que, lorsqu'une fissure est introduite dans une plaque de matériaux élastique ou qu'une fissure se propage, deux phénomènes se produisent, en rapport avec la quantité d'énergie dans la plaque.

Relaxation des contraintes autour de la fissure, provoquant une diminution de l'énergie potentielle.

Création de nouvelles surfaces de rupture

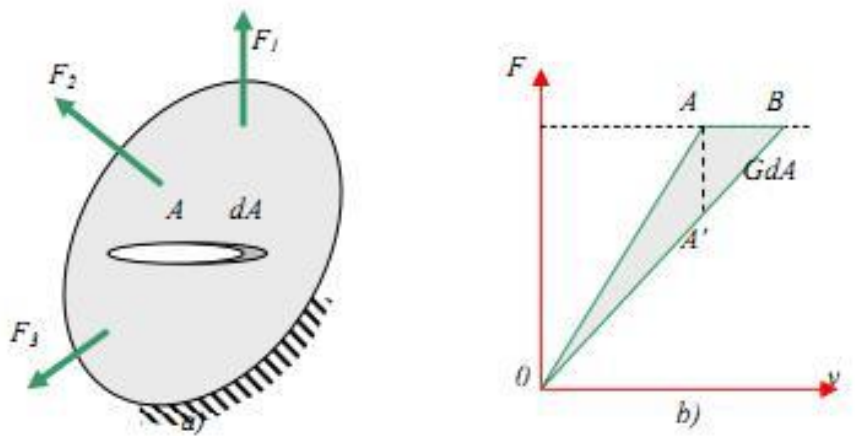


Figure.I.6 : Définition du taux de restitution d'énergie G .

Les méthodes énergétique d'évaluation du facteur d'intensité des contraintes sont basées sur la notion de taux de restitution d'énergie élastique G définie par :

$$G = -\frac{\partial w_p}{\partial A} \quad (I.7)$$

∂w_p : La variation d'énergie potentielle due à l'avance de fissure.

∂A : La variation de surface de l'aire fissure

I.6. Relation entre G et K :

Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie, G, sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes.

On montre que nous allons montrer qu'en fait les deux quantités K et G sont liés.

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donnée par :

$$\text{En déformation plane : } G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (I.8)$$

$$\text{En contrainte plane : } G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (I.9)$$

Chapitre II :

La méthode des éléments finis

II.1.Introduction :

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique utilisée pour résoudre certains des problèmes de la physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

II.2.Historique de la méthode :

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur.

Mathématique : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909).

Sciences de l'ingénieur : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis.

Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsy (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...).

Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode.

Dans les années soixante ; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de

considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF.

En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines.

En mécanique des fluides, la résolution des équations de Navier Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse – pression a commencé dans les années 1970

II. 3.Présentation de la méthode des éléments finis :

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rendent facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes. Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

II.4. Les grandes lignes de la méthode :

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (Figure. II.1)

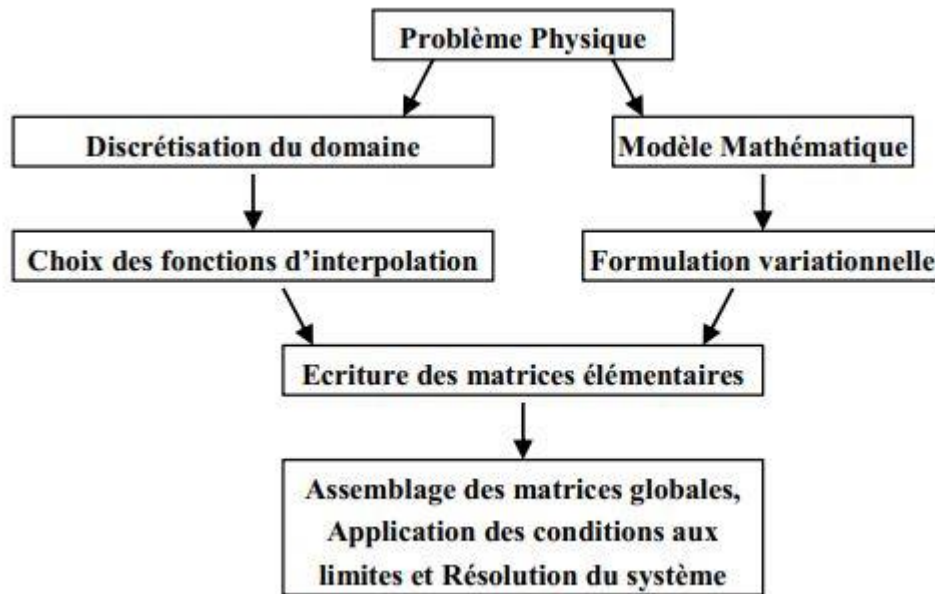


Figure.II.1. Etapes générales de la méthode des éléments finis

Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour.

L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape 2 : Division du domaine en sous domaines.

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Etape 3 : Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global :

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il peut définir soit un problème d'équilibre, de valeurs critiques ou de propagation. Le problème d'équilibre concerne les cas statiques et les cas stationnaires. Dans un problème de valeurs critiques, on s'intéresse aux fréquences et aux modes propres de vibrations du système physique étudié. Les problèmes de propagations, concernent les cas transitoires dans lesquels sont déterminées les variations dans le temps des variables physiques. Les méthodes d'intégration pas à pas conviennent mieux pour ce type de problème. Les plus utilisées sont : méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson

II.5. Formes classique des éléments :

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une deux ou trois dimension. Chaque type d'élément est identifié par un nom précisant sa forme et par le nombre de nœuds géométrique qui le composent.

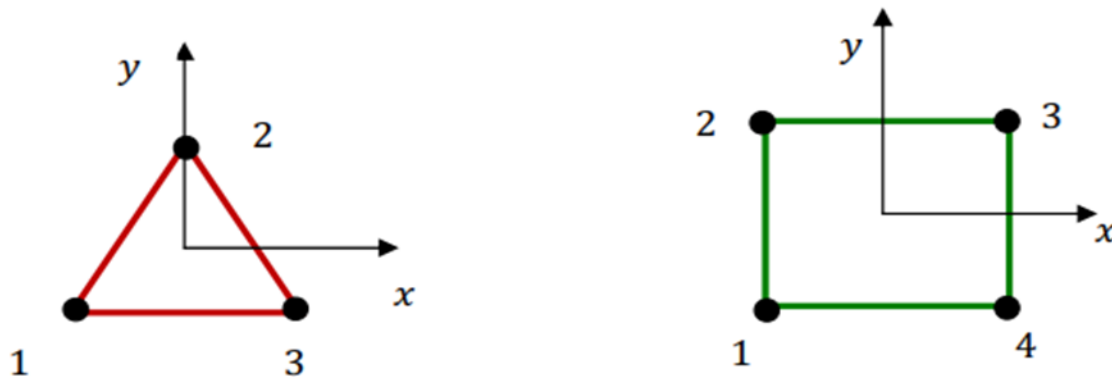


Figure.II.2. Exemples d'élément à deux dimensions

II.6. Discrétation domaine :

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets (figure.II.2)

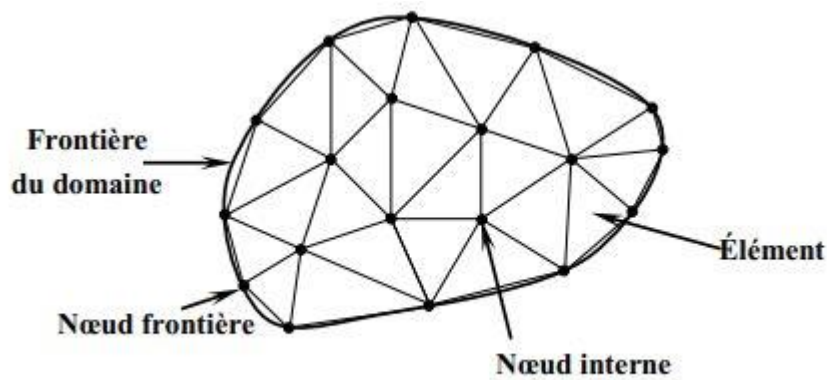


Figure.II.3. Discrétisation du domaine – éléments triangulaires

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type (figure.II.3.a).

Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de 180° ou de 0° (figure.II.3.b).

Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes (figure.II.3.c).

L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus (figure.II.3.d)



Figure.II.4. Règles de discrétisation

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine.

II.7.Utilisation d'un logiciel élément fini :

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- analyse linéaire ou non d'un système physique continu.
- analyse statique ou dynamique.
- prise en compte de lois de comportement complexes.
- prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement. . .) pouvant être couplés.
- problèmes d'optimisation, etc.

II.8.COCCLUSION :

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode des éléments finis. Cette dernière est considérée parmi les méthodes les plus puissantes et les plus utiles dans le calcul numérique, elle peut faciliter la résolution des problèmes assez complexes. Dans le but d'exploiter cette technique pour résoudre le problème de la structure fissurée

Chapitre III :

Processus de modéliser sur ANSYS

III.1.Introduction :

ANSYS est un code éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment : analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique.

Dans ce chapitre on va présenter la Procédure modélisation sur Ansys une interaction entre fissure et inclusion.

III.2.Procédure sur ANSYS pour modéliser une interaction entre fissure et inclusion :

Une plaque carrée avec fissure contenant une inclusion. La plaque est soumise à une traction Uni-axiale $\sigma=100\text{MPa}$.

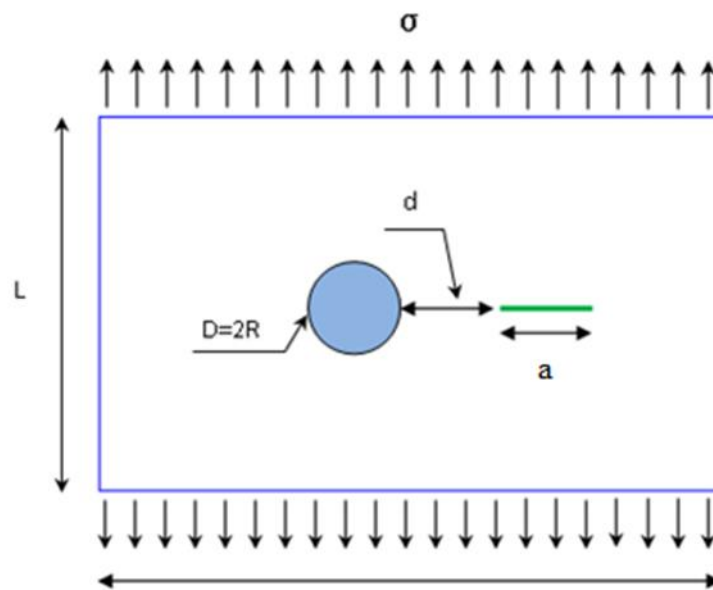


Figure.III.1 : une plaque contenant fissure et une inclusion

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont $E_1 = 21000\text{MPa}$ et $\nu_1 = 0.3$.

Les caractéristiques mécaniques d'une inclusion $E_2 = 4200\text{MPa}$ et $\nu_2 = 0.3$.

$D=40\text{mm}$, $d= 10\text{mm}$, $L= 0.2\text{mm}$

Les étapes à suivre sont :

III.2.1. Define élément Type :

Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete

Cela ouvre la fenêtre 'Types d'éléments'. Cliquez **Add**

La fenêtre 'Bibliothèque de types d'éléments' apparaît. Mettez en surbrillance "Solid" et "8 node 183", comme illustré. Cliquez sur **OK**.

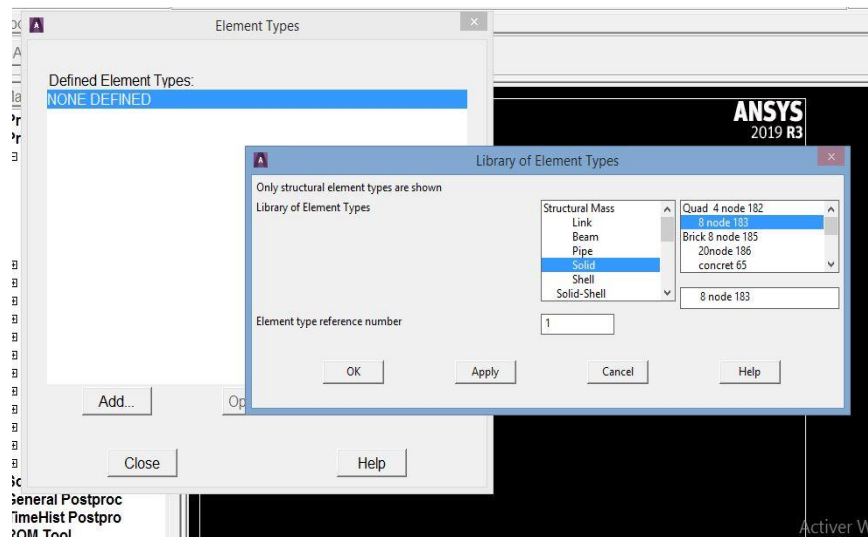


Figure.III.2. Define élément Type

Cliquez sur les options (figure.III.3.)

Sélectionnez 'Plane strain' pour 'Element behavior K3' et cliquez sur OK.

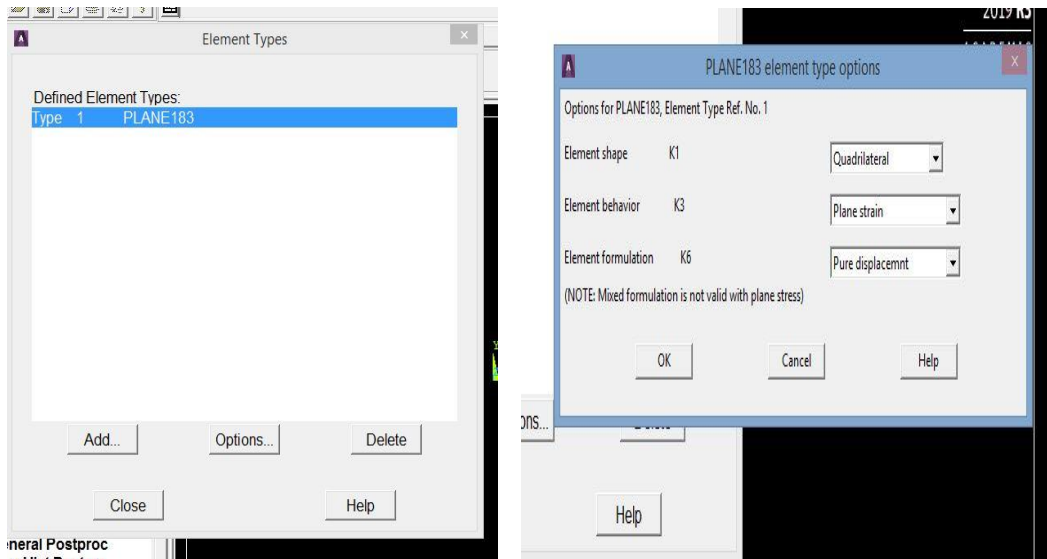


Figure.III.3. les options.

Clique sur le **Close** b dans la fenêtre 'Element Types'.

III.2.2.Définir les propriétés des matériaux :

Preprocessor > Material Props > Material Models

1. Material mode number 1> Structural > Linear > Elastic> Isotropic

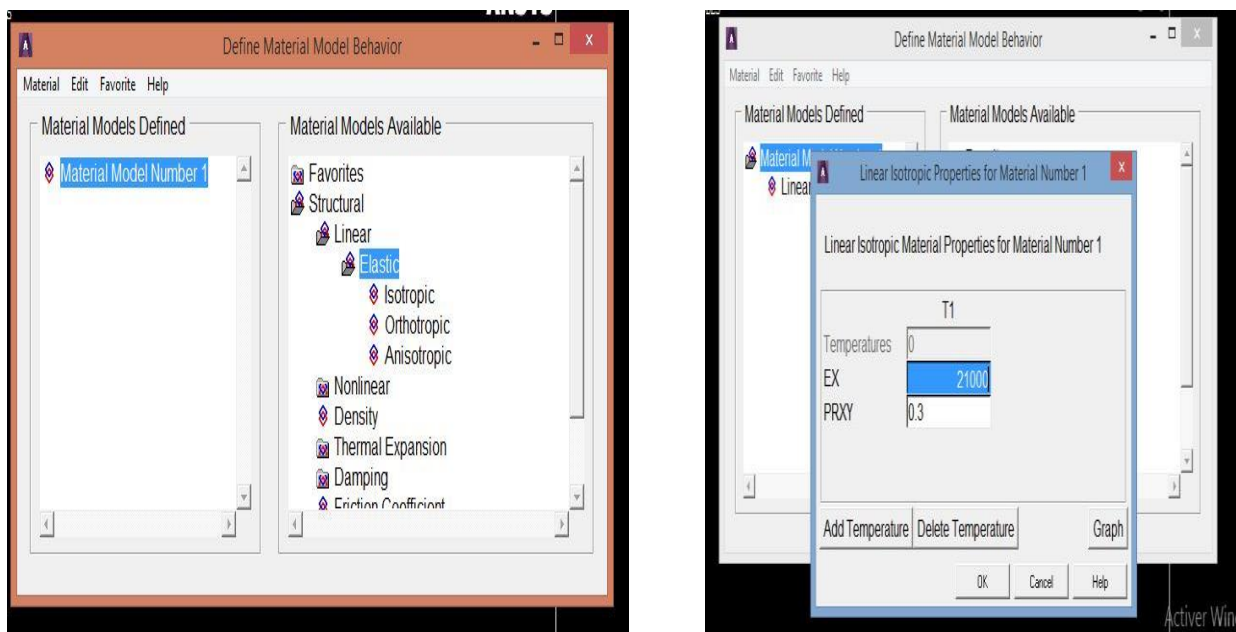


Figure.III.4. Définir les propriétés de plaque

Clique **Material > New Material**

2. Material Model Number 2> Structural > Linear > Elastic> Isotropic

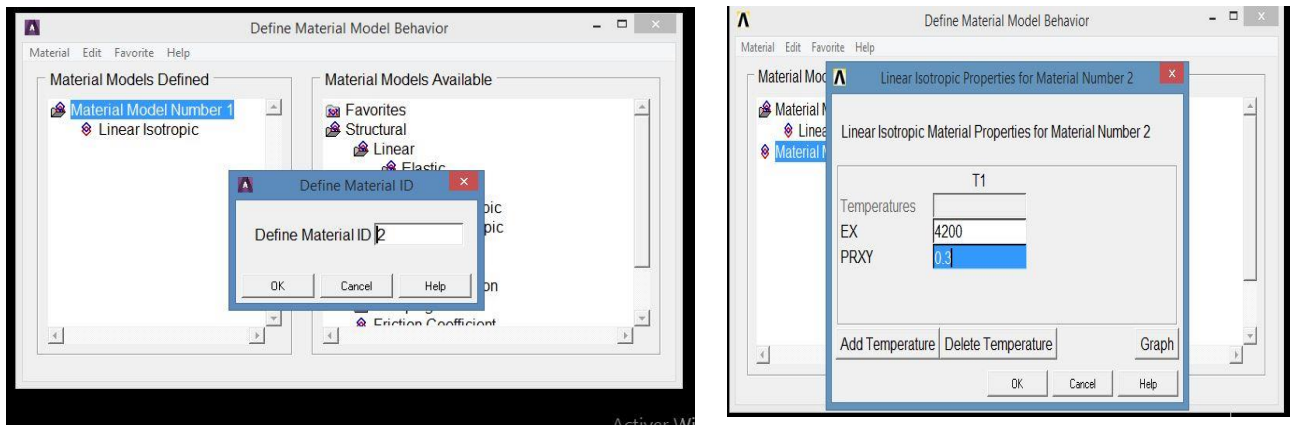


Figure.III.5.Définir les propriétés d'inclusion

III.2.3.Créer une plaque et inclusion :

1. Créer une plaque :

1.1. Définir des points clés :

Preprocessor > Modeling > Create > Keypoints > In Active CS

points	X	Y	Points	X	Y
1	0	0	7	0.17	0.1
2	0	0.1	8	0.165	0.10005
3	0	0.2	9	0.135	0.10005
4	0.2	0.2	10	0.13	0.1
5	0.2	0.1	11	0.165	0.09995
6	0.2	0	12	0.135	0.09995

1.2. Définir des segments de ligne :

Preprocessor > Modeling > Create > Lines > Lines > straight Line

Nous allons créer les 12 segments de ligne suivants (figure.III.6).

1.3. Créer la forme:

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Arbitrary > By Lines

Sélectionnez toutes les lignes en sélectionnant «Loop» dans la fenêtre de sélection, puis en sélectionnant l'une de ces lignes. Cliquez sur **OK**

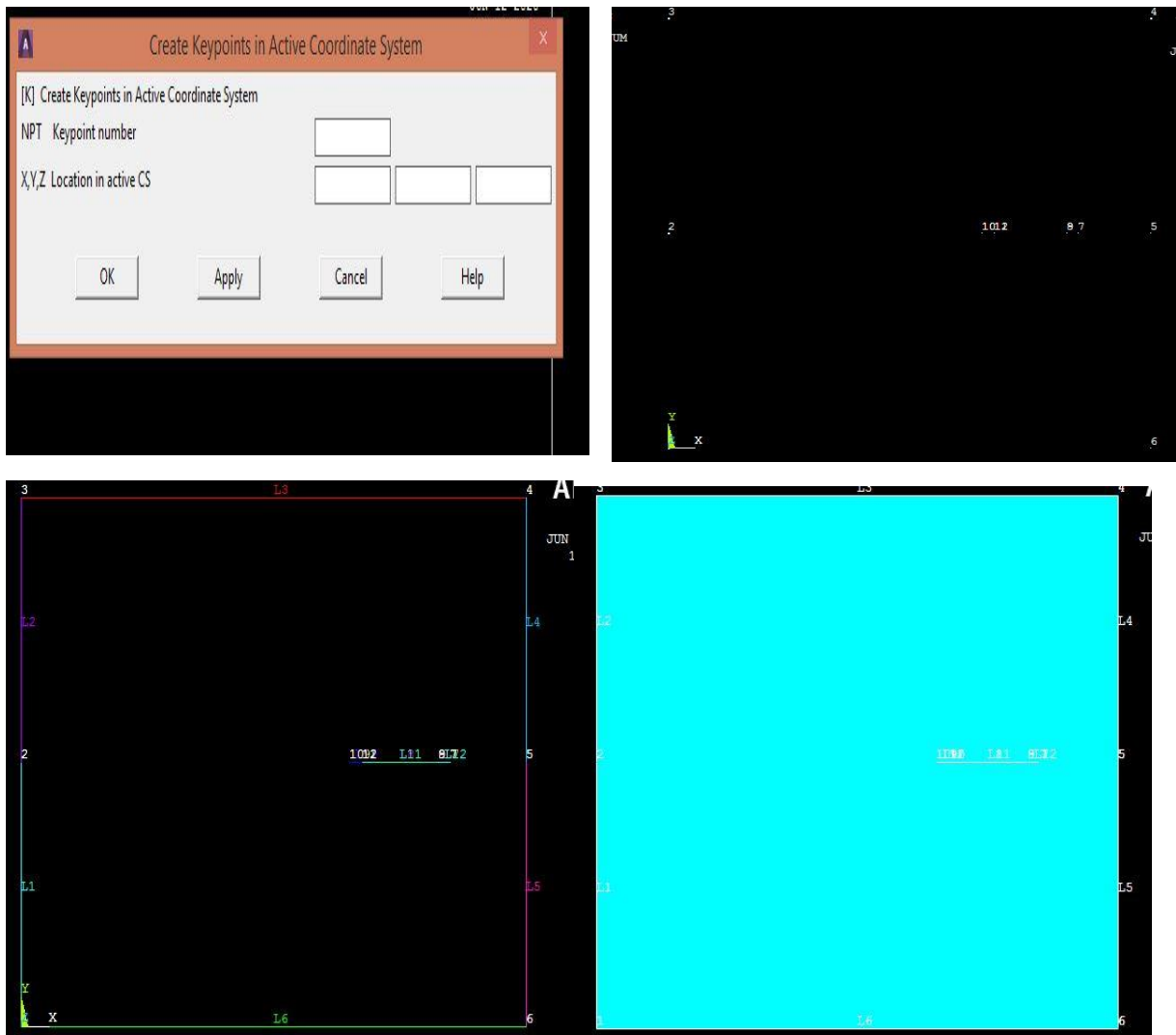


Figure.III.6. Créer une plaque contient fissure

1.4. Tracez un cercle sur la plaque :

Le processus de dessin du cercle se fait selon le chemin suivant indiqué sur la (figure.III.7).

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Solid Circle

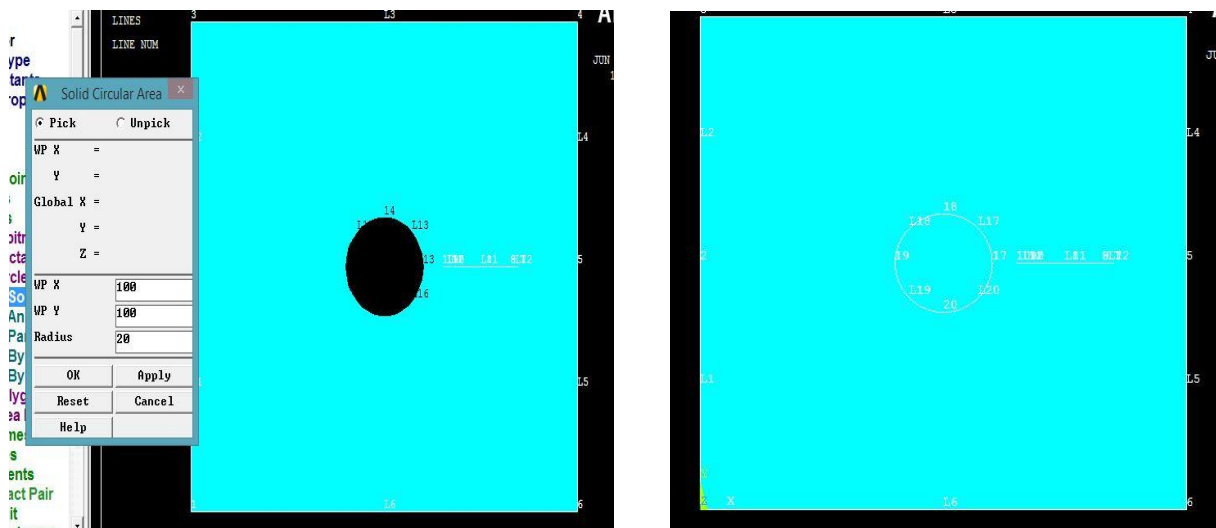


Figure.III.9.Créer une inclusion

III.2.4.Pâte une inclusion en plaque :

Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Glue > Area

Sélectionner une plaque et inclusion .cliquez OK

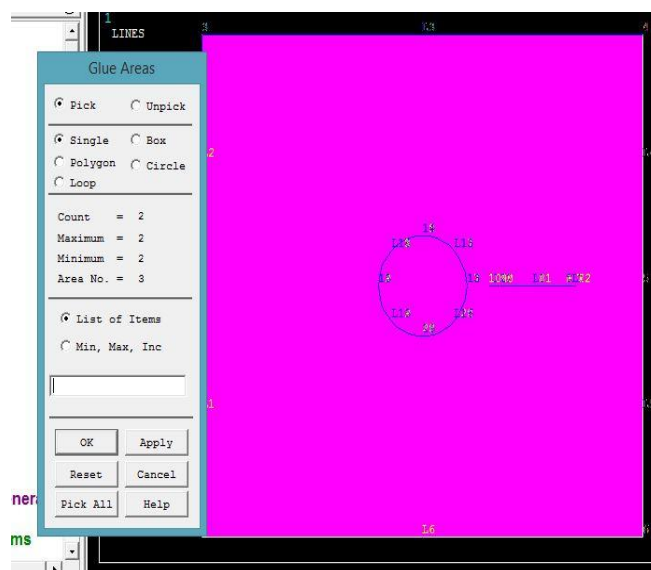


Figure.III.10. pâte une inclusion en plaque

III.2.5.Division de la forme :

1. Créer le point clé de concentration (point fissure) :

Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Concentrat KPs > Create

Choisissez le point 10, cliquez OK.

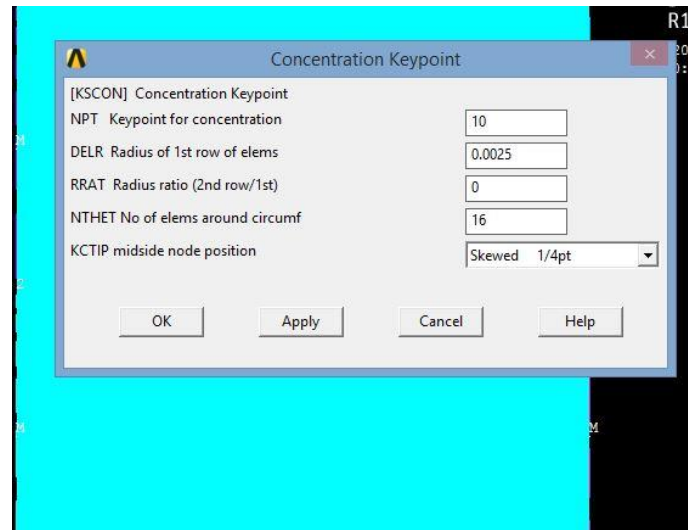


Figure.III.11. Créer le point clé de concentration (point fissure)

2. Identifier le materiau:

Preprocessor > Meshingng > Mesh Attributes > Picked arear

a. Identifier une plaque

Sélectionner une plaque .cliquez OK

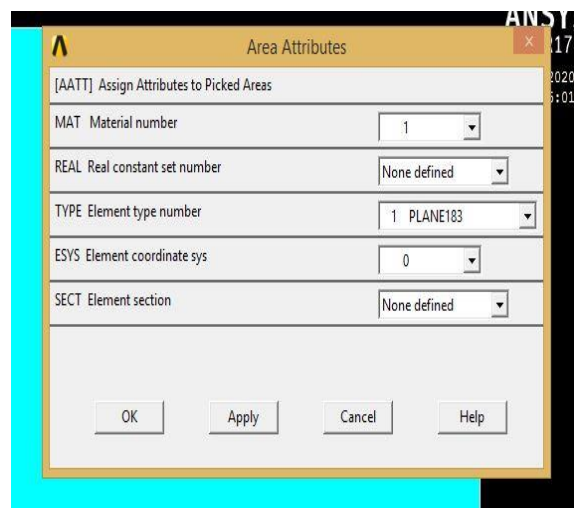
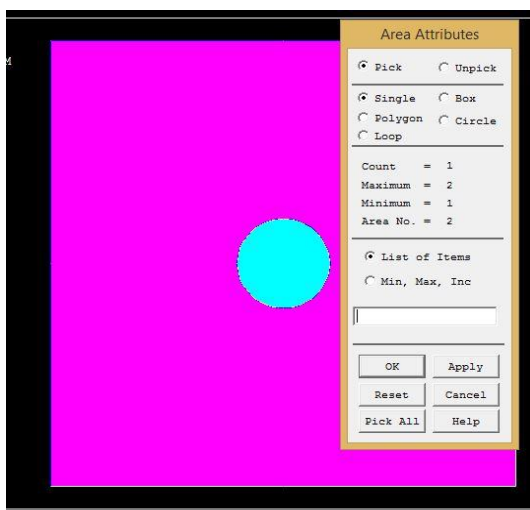


Figure.III.12.Identifier une plaque

B. Identifier une inclusion :

Sélectionne une inclusion .cliquez OK

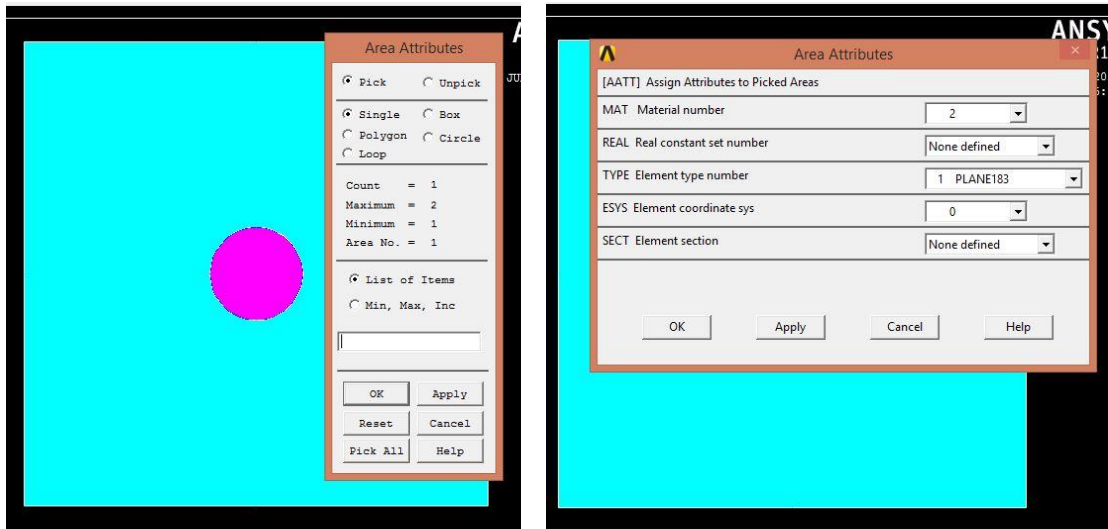


Figure.III.13. Identifier une inclusion

3. Division de la forme

Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > ManualSize > arear > Picked arear

Sélectionne une plaque .cliquez ok. 'Element edge length' 0.009 cliquez OK

Sélectionne une inclusion .cliquez ok. 'Element edge length' 0.002 cliquez OK

Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Free

Sélectionne une plaque et inclusion .cliquez OK

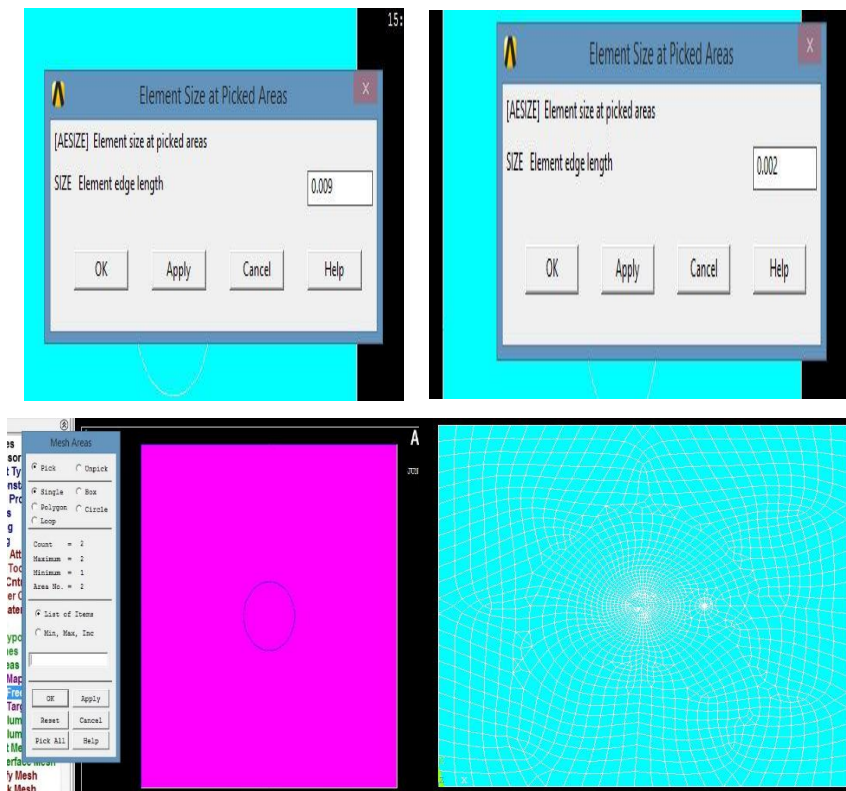


Figure.III.14. Division la forme

III.2.6.Appliquer des charges :

Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Lines

Sélectionnez L3 et L6.cliquy OK

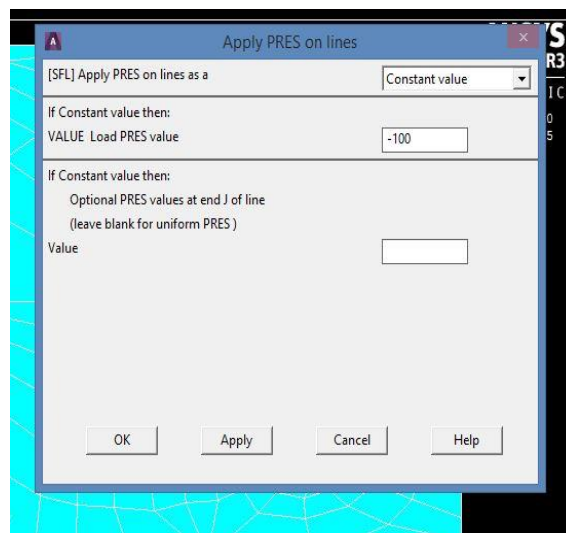


Figure.III.15. Appliquer des charges

III.2.7.L'analyse a commencé :

Solution > Solve > Current LS

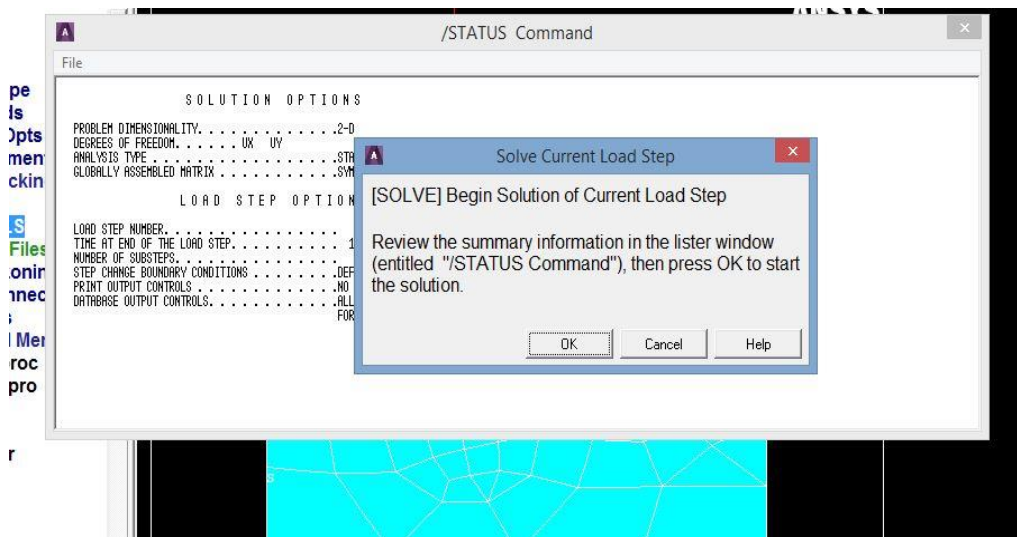


Figure.III.16. l'analyse a commencé

III.2.8.Analyse dimensionnelle :

1. Zoomez sur la zone du fond de fissure.

Activer la numérotation des nœuds.

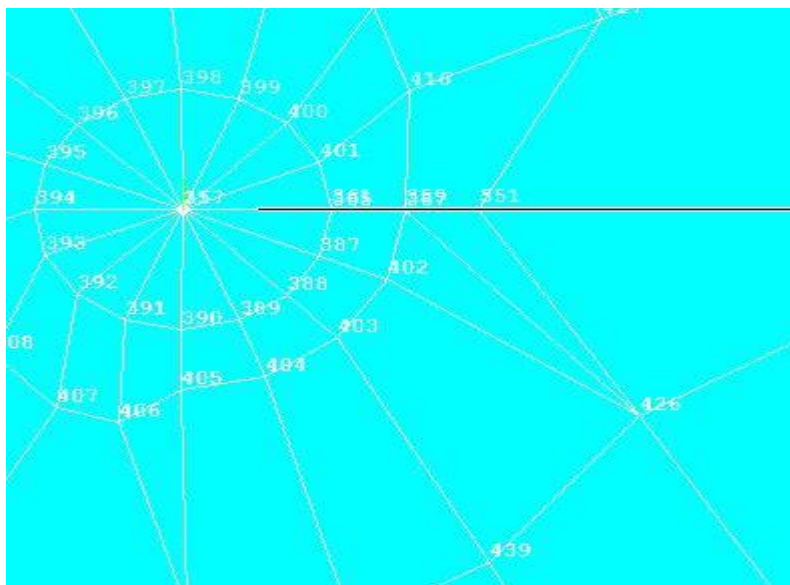


Figure.III.17. zone du fond de fissure

2. Déterminer le chemin de fissure :

General Postproc > Path Operations > Define Path > By Nodes

Choisissez le nœud de fissure (nœud 357), puis 4 nœuds sur les faces de fissure Voir (figure.III.18).

Cliquez **OK**.

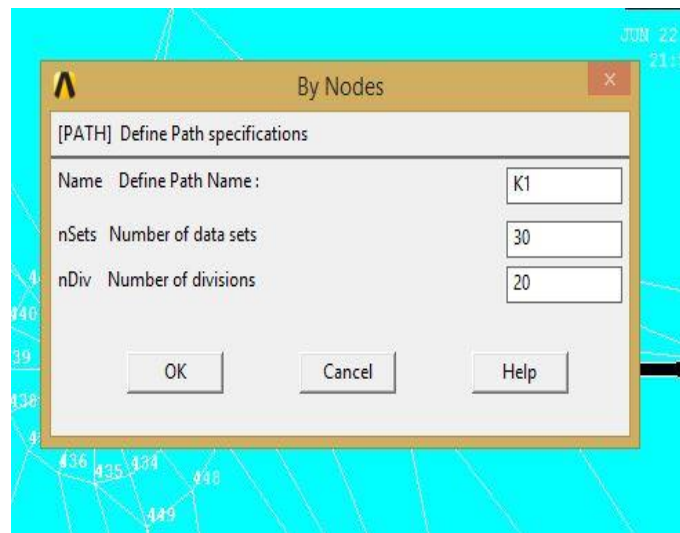


Figure.III.18. définir le nom du chemin

3. Déterminer le système de coordonnées local :

WorkPlane > Local Coordinate Systems > Create Local CS > By 3 Node

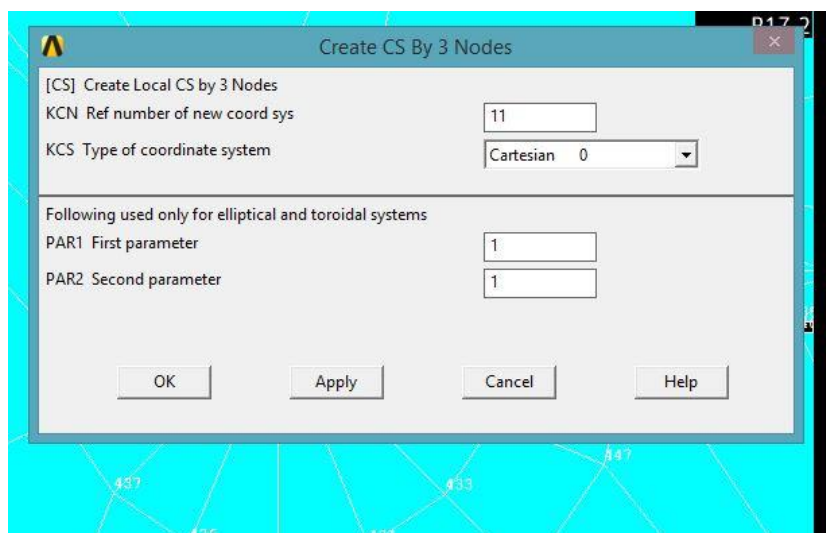


Figure.III.19. déterminer le système de coordonnées local

4. Activer le système de coordonnées local du fond de fissure :

Utility Menu > WorkPlane > Change Active CS to > Specified Coord Sys...

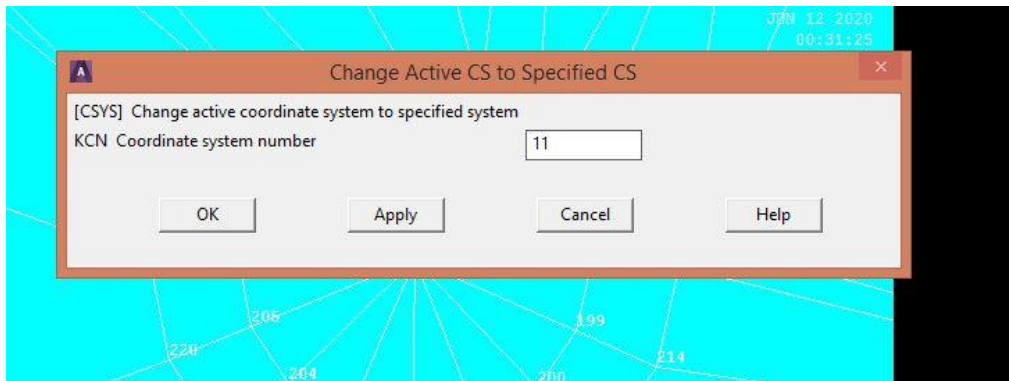


Figure.III.20. Activer le système de coordonnées local du fond de fissure

Pour activer le système de coordonnées du fond de fissure en fonction des résultats du système de coordonnées. Sélectionner **General Postproc > Options for Outp.**

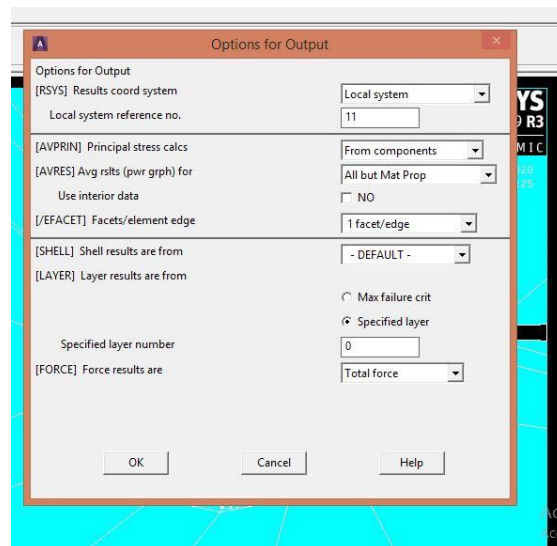


Figure.III.21. activer le système de coordonnées

6. Déterminer le facteur de contrainte Mode I à l'aide de KCALC :

General Postproc > Nodal Calcs > Stress Int Factr

Sélectionnez "Plain strain " pour "Disp extrapolat based on " et "Full-crack model " pour "Model Type " (figure. III.22)

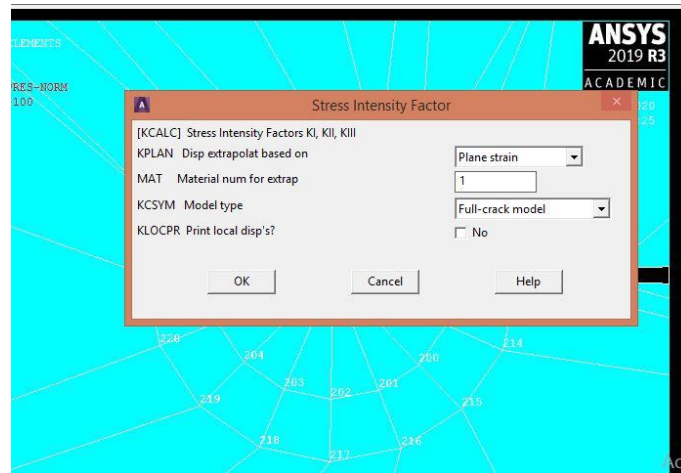


Figure.III.22. Déterminer le facteur de contrainte

Cliquez sur OK. La fenêtre apparaît (figure. III.23)

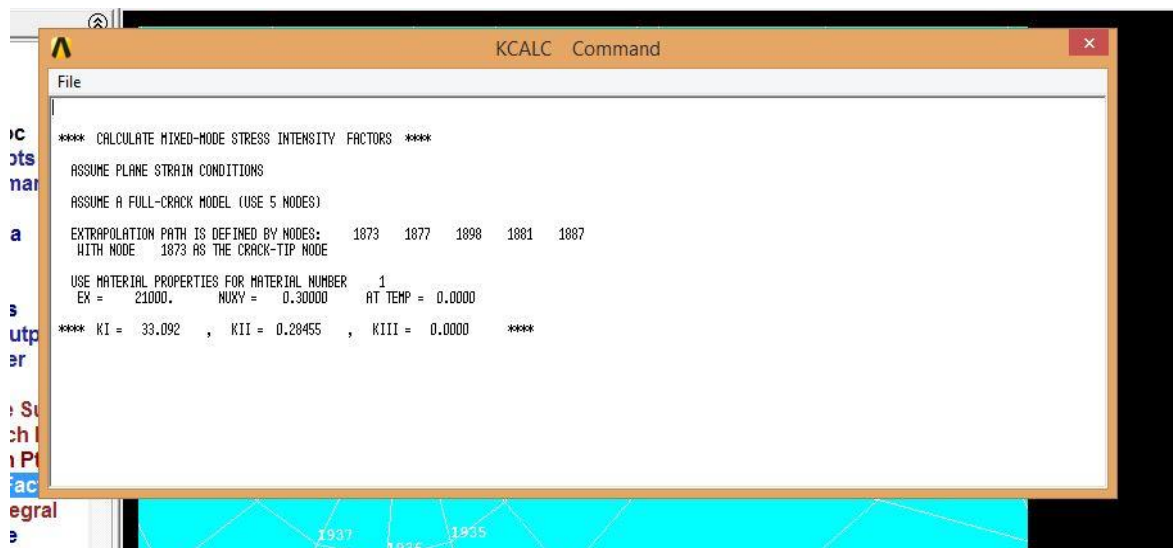


Figure. III.23. Affiche les valeurs KI, KII, KIII au bout de la fissure (nœud 10)

III.3.Conclusions :

Le but de ce travail est de réaliser une modélisation sur ANSYS pour une Interaction entre fissure et inclusion

Chapitre III :

Exemples, résultats et interprétations

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons changer le module de Young, et changer la distance entre fissure et inclusion et changer la longueur de fissure afin d'étudier le changement du facteur d'intensité de contraint.

III.2. Inclusion dans une plaque sans fissure :

Le premier exemple concerne une plaque carrée sans fissure contenant une inclusion en son milieu. Ce test est préliminaire validation du code de calcul. La plaque est soumise à une traction uni-axiale $\sigma=100\text{MPa}$.

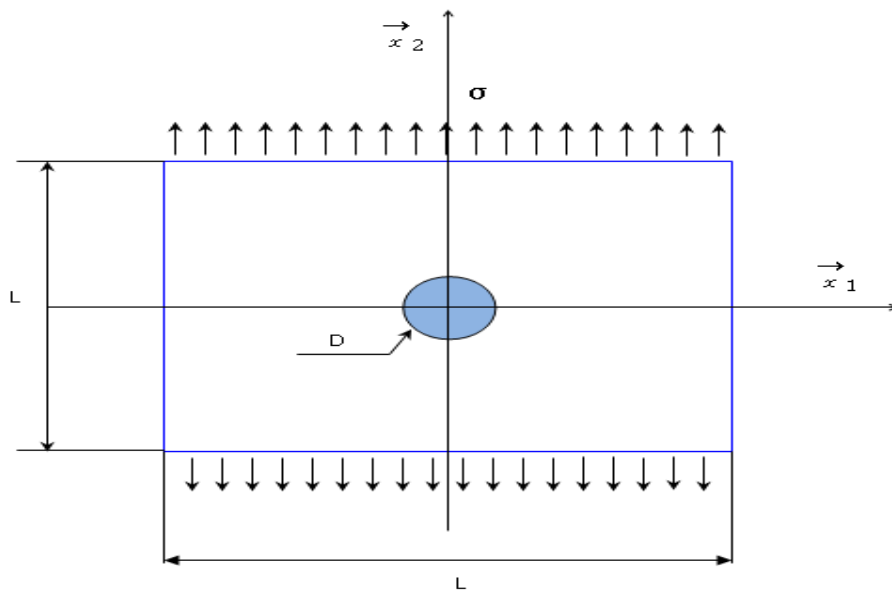


Figure.III.1 : Modèle géométrique d'une plaque sollicitée en traction.

L'inclusion est formée d'un matériau élastique dont le module de Young E_2 est différent de celui de la matrice. L'inclusion est modélisée par une forme cylindrique de diamètre D .

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont $E_1 = 21000\text{MPa}$ et $\nu=0.3$.

Pour le calcul numérique, nous prenons $L=5D$, où D est le diamètre de l'inclusion.

La variation du champ de contraintes est obtenue pour les trois rapports (pour : $E_2/E_1 = 5$, $E_2/E_1 = 1$ et $E_2/E_1 = 0.2$).

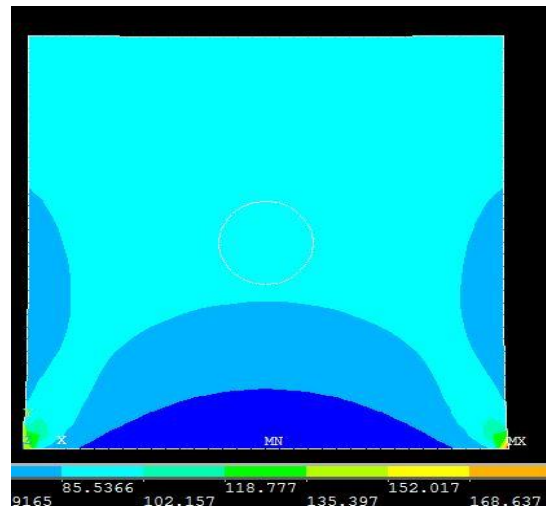


Figure.III.2. Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 = 1$

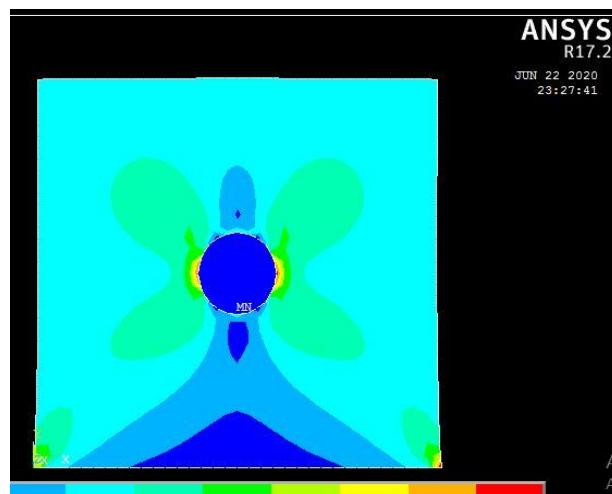


Figure.III.3. Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 = 0.2$

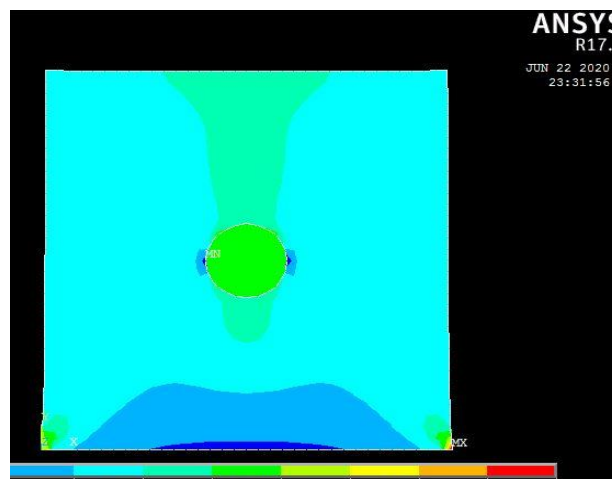


Figure.III.4. Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 = 5$

Nous remarquons que pour un rapport $E_2/E_1 = 0,2$ la contrainte maximale est au niveau de l'interface matrice inclusion. Une inclusion moins dure que la matrice permet l'obtention d'une concentration de contraintes de degré moindre. Un effet contraire est observé pour un rapport ($E_2/E_1=5$). Dans ce cas les contraintes minimales sont au niveau de l'interface matrice-inclusion.

III.3.Effet de rigidité pour petite inclusion :

Pour mener à bien cette étude on ne considère que la plaque carrée d'une longueur de 0.2m de côté, contenant une fissure de 40mm proche d'une inclusion de rayon $R = 2\text{mm}$. La distance r_0 entre l'inclusion et l'extrémité de la fissure est égale à $10R$. Dans ce cas de Figure.III.6, des solutions analytiques sont disponibles.

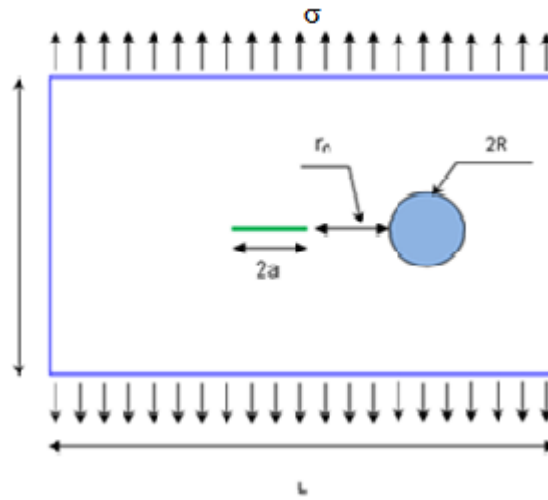


Figure.III.5 : une inclusion située à une certaine distance de la fissure.

La solution analytique en mode I avec un chargement transversale, a été donnée par :

$$\Delta K_{tip} = CK_0 \int_A r_0^{-2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4(1-2\nu)} \sin^2 \theta \cos \theta \right) dA \quad (\text{III.1})$$

Pour $\theta = 0$, ΔK_{tip} peut être exprimé sous forme :

$$\Delta K_{tip} = CK_0 \int_A r_0^{-2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} dA \quad (\text{III.2})$$

Pour une seule petite inclusion avec une section circulaire de rayon R ($R < r_0$). Le FIC est donné

$$\text{par : } \Delta K_{tip} = CK_{I0} \frac{\pi R^2}{2r_0^2} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{Avec : } \Delta K_{tip} = K_{lip} - K_{I0} \text{ et } C = \frac{(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \times \left(\frac{E_m}{E_i} - 1 \right)$$

La solution analytique pour K_{I0} , donnée par :

$$K_{I0} = f\left(\frac{a}{L}\right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Avec : } f\left(\frac{a}{L}\right) = (1 - 0.1\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 0.96\left(\frac{a}{L}\right)^4) \sqrt{\frac{1}{\cos(\pi\left(\frac{a}{L}\right))}}$$

L'équation (III.3) peut être écrite :

$$K_{tip} = \left(C \frac{\pi R^2}{2r_0^2} + 1\right) K_{I0} \quad (\text{III.5})$$

D'après (III.4), on trouve : $K_{I0} = 25.680$

Les résultats analytiques et numériques peuvent être représentés dans le tableau suivant :

Tableau 01 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour petite inclusion

	E_{mat}/E_{inc}	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
$R/r_0=0.1$	$K_{tip}(\text{ANA})$	25.64	25.652	25.656	25.66	25.68	25.78	25.86	26.06
	$K_{tip}(\text{ANS})$	26.436	26.441	26.445	26.453	26.468	26.487	26.513	26.527

Le FIC augmente avec l'augmentation du rapport des modules de Young. Etant donné la faible dimension de l'inclusion ayant permis la formulation de la solution analytique, la variation du FIC n'est pas très sensible.

III.4. Effet de rigidite pour grosse inclusion :

Dans ce cas, nous supposons que la fissure est située dans la matrice et se propage vers l'inclusion distante de $d=10\text{mm}$ et diamètre de l'inclusion $D = 40\text{mm}$.

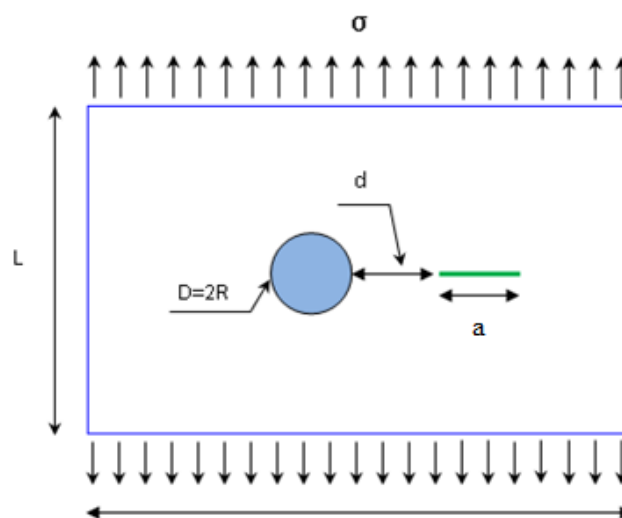


Figure. III.6. une plaque carrée en présence d'une fissure proche d'une inclusion.

Nous considérons le même modèle géométrique (figure 5), avec le même chargement dont les propriétés du matériau constituant la plaque sont : le module de Young E_1 et le coefficient de Poisson ν_1 (figure 5). Nous nous intéressons à la variation du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young inclusion-matrice. Pour différentes longueurs de fissure respectivement $a = 40\text{mm}$ et 60mm .

Tableau 02 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour grosse inclusion.

	E_2/E_1	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2	5	10
$a = 40\text{mm}$	$K_I (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	35.413	33.092	31.465	29.629	27.053	25.058	23.439	22.712
$a = 60\text{mm}$	$K_I (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	64,12	59,97	58,07	54,57	50,13	47,27	43,91	42.00

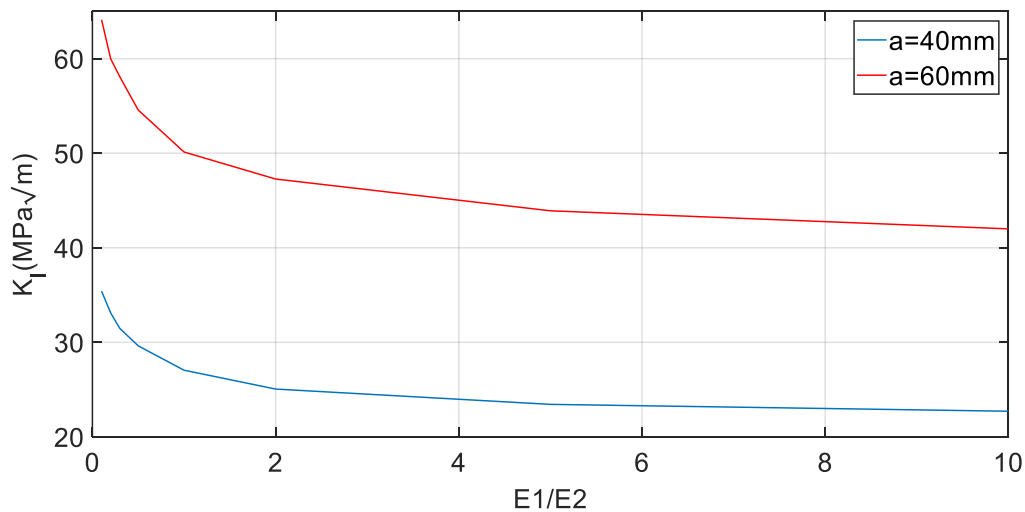


Figure.III.7. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

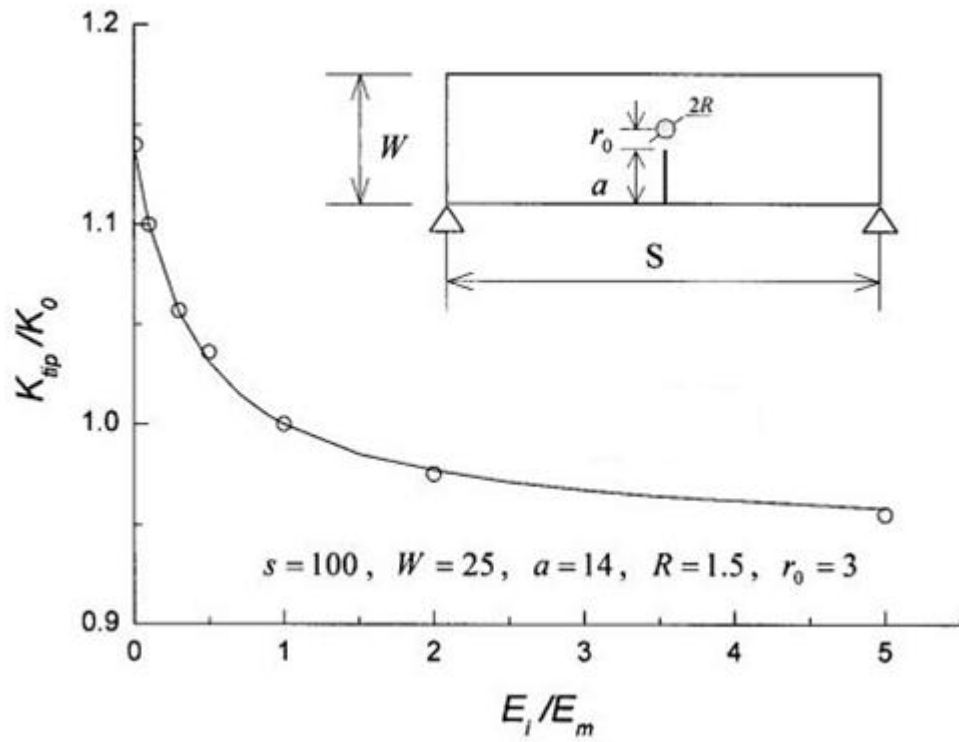
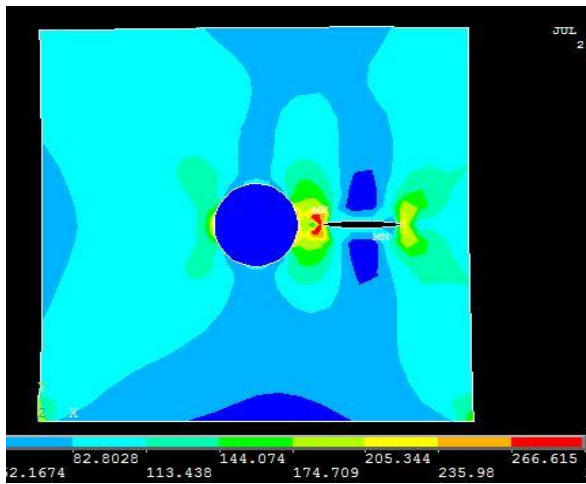
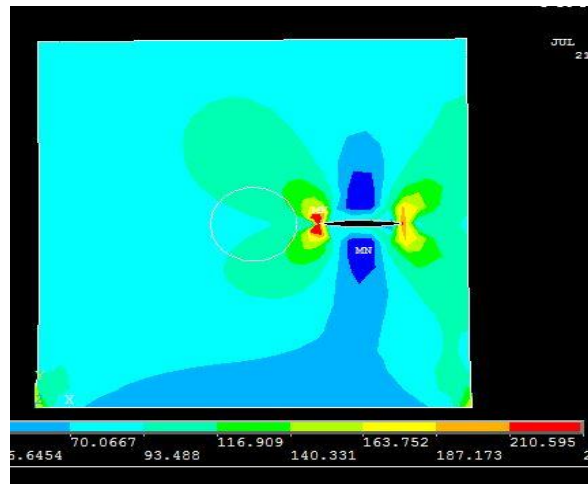


Figure.III.8. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice
ZHONGHUA LI and QIANG CHEN 2002

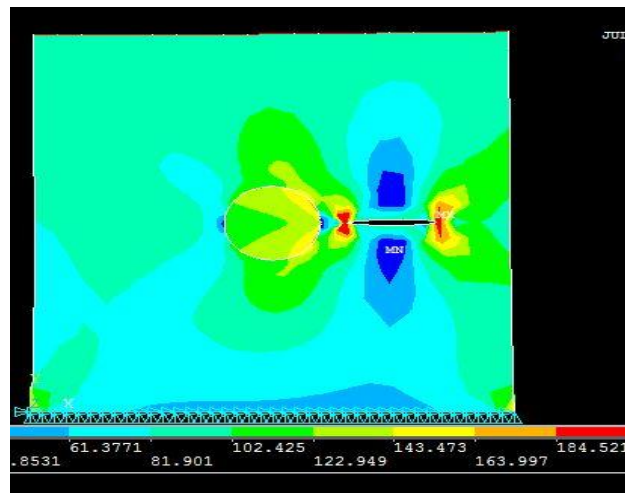
Nous remarquons que le du FIC diminue avec le rapport des valeurs E_2/E_1 , ce qui indique que inclusion rigide ralentit La propagation de fissure.



a) $E2/E1=0.2$



b) $E2/E1=1$



c) $E2/E1=10$

Figure.III.9. Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure

III.5. Effet de la distance entre fissure et l'inclusion :

Nous recherchons un changement de FIC en fonction de la distance séparant l'inclusion du point de rupture de trois valeurs pour le rapport $E2 / E1$.

Tableau 03 : FIC en fonction de la distance entre fissure et l'inclusion

	$d \text{ (mm)}$	10	11	12	15	20	25	30
$E2/E1=0.2$	$K_I(MPa\sqrt{m})$	33.14	32.639	32.27	31.087	30.047	29.422	28.871
$E2/E1=1$	$K_I(MPa\sqrt{m})$	27,053	27.056	27 .299	27.081	27.118	27.205	27.063
$E2/E1=5$	$K_I(MPa\sqrt{m})$	23,439	23.686	24.36	24.703	25.402	25.915	26.041

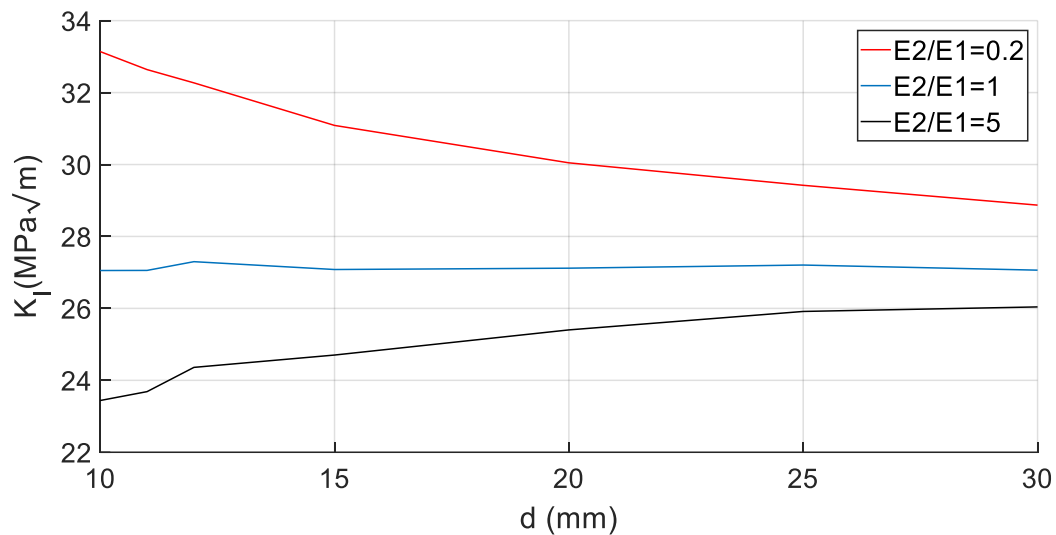


Figure.III.10. Variation du FIC en fonction de la distance de la fissure par rapport à l'inclusion.

On remarque Le FIC diminue en fonction de la distance d pour le rapport des module de Young $E2/E1=0.2$ alors qu'il augmente pour le rapport $E2/E1=5$. et le FIC se stabilise vers la valeur obtenue pour un rapport $E2/E1=1$. Nous retrouvons le cas d'un matériau quasi homogène.

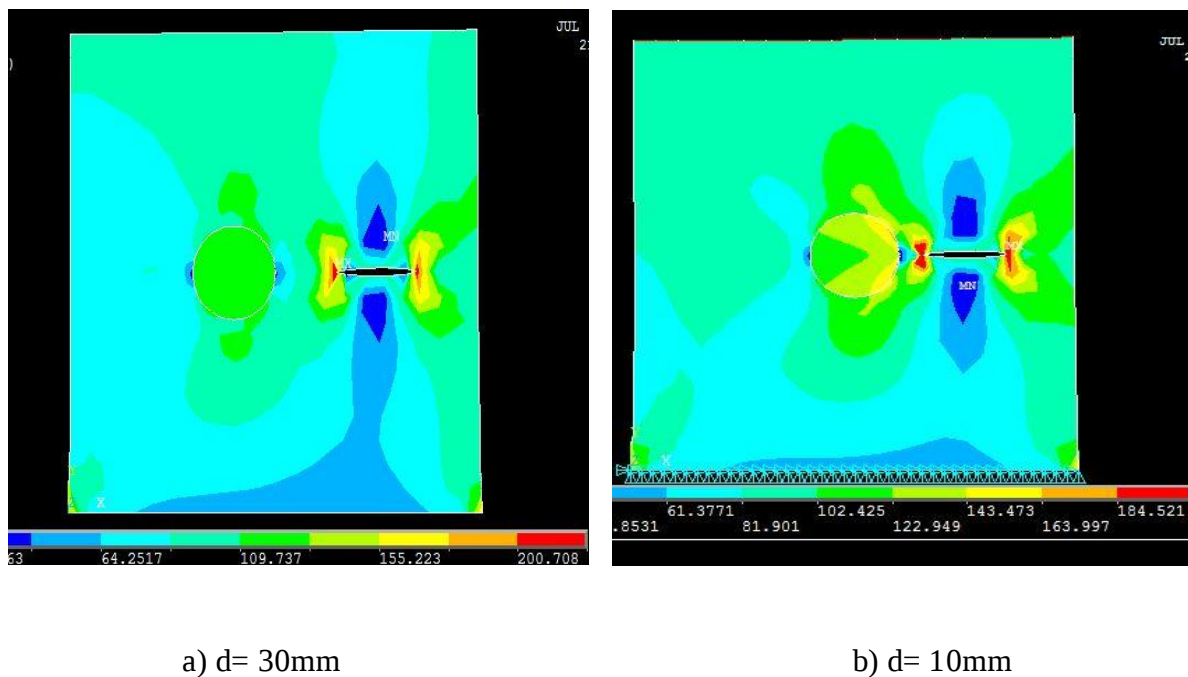


Figure.III.11. Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers l'inclusion pour $E2/E1=0.2$

III.6. Inclusion centré enter deux fissure :

Dans cet exemple, nous considérons une inclusion centrée entre deux fissures. Nous considérons le même modèle géométrique avec le même chargement et la même discrétisation. Les propriétés du matériau constituant la plaque sont le module de Young E_1 et le coefficient de Poisson ν_1 .

La fissure a pour longueur $a = 40\text{mm}$ et l'inclusion $D = 40\text{mm}$ et $d = 10\text{mm}$ (Figure.III.9)

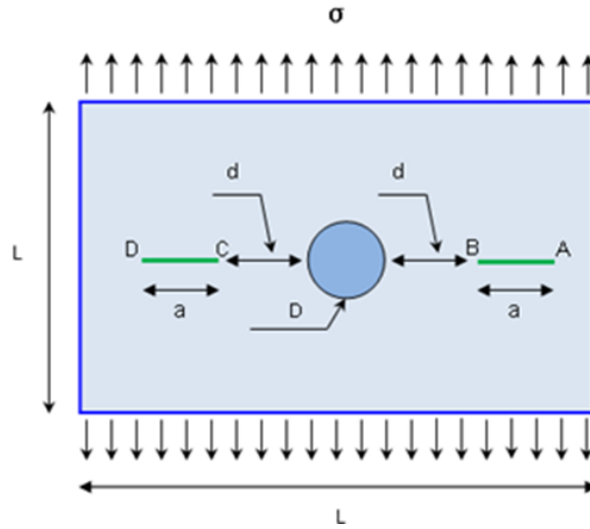


Figure. III.12. Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence de deux fissures émanant d'une inclusion.

Nous nous intéressons au calcul du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young matrice-inclusion.

Tableau 04 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
$K_{IC}(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	35.95	32.99	31.96	30.01	27.15	25.48	23.57	22.09
$K_{ID}(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	31.23	29.15	28.48	27.23	26.92	25.62	24.91	24.37

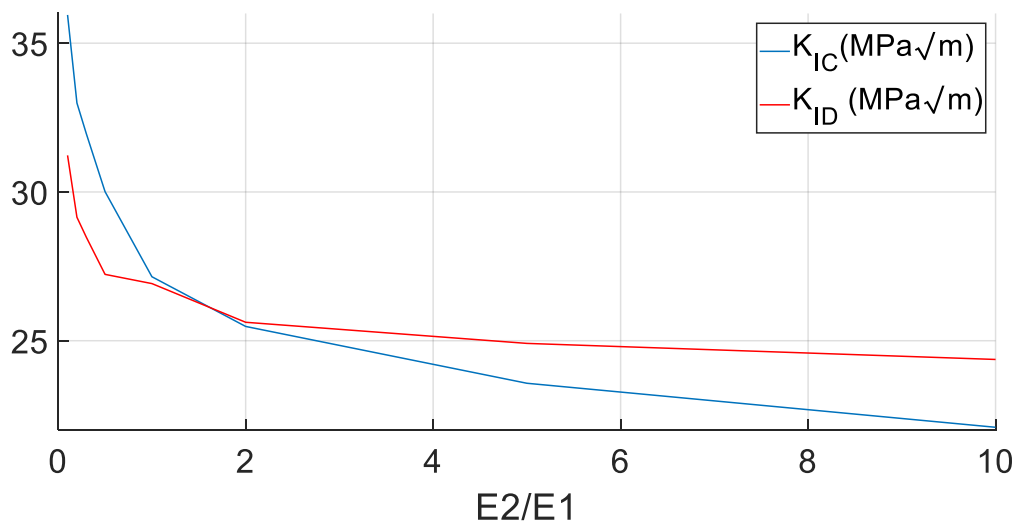


Figure.III.13. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

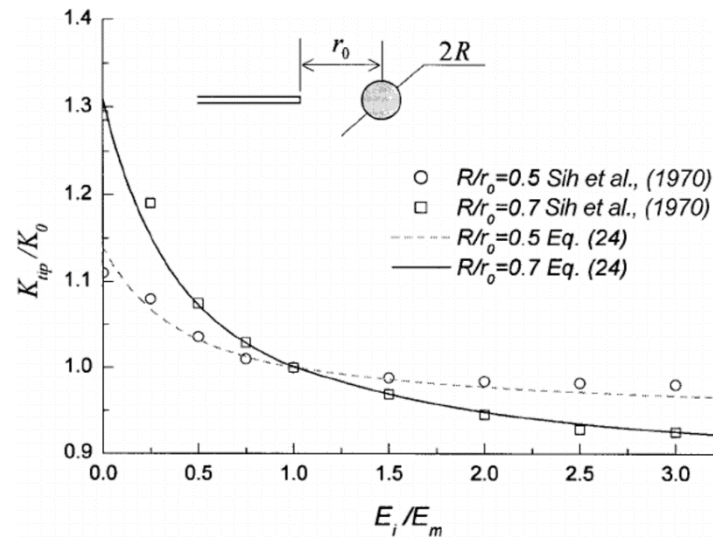
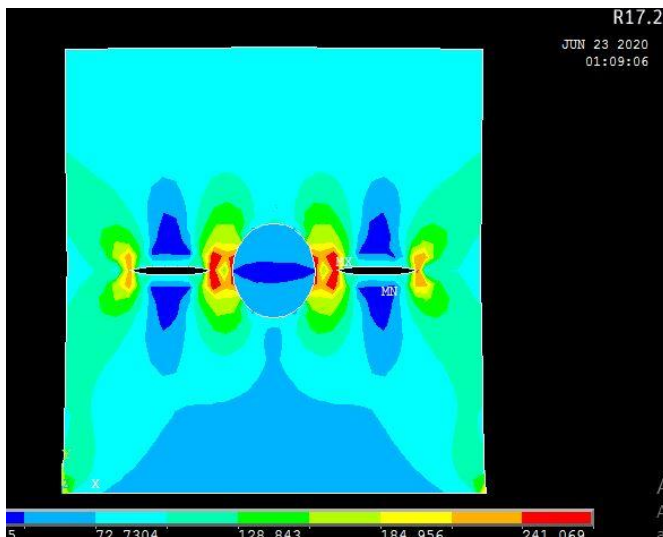
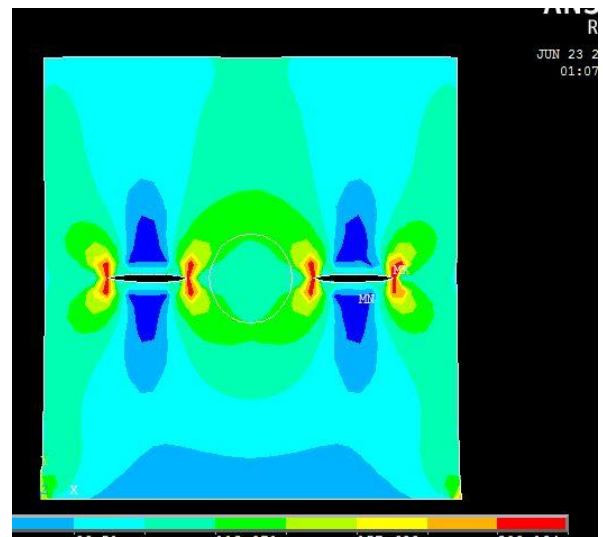


Figure.III.14. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice
ZHONGHUA LI and QIANG CHEN 2002

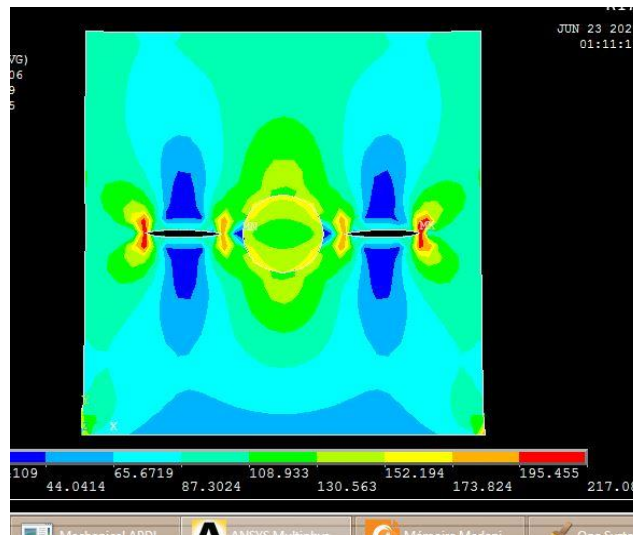
Les deux courbes montrent dans ce cas que le FIC diminue avec le rapport des modules de Young inclusion/matrice. Le point $E_2/E_1=1$ constitue un point d'inversion du point critique. La pointe de la fissure la plus critique devient celle la plus éloignée de l'inclusion.



a) $E2/E1=0.2$



b) $E2/E1=1$



c) $E2/E1=5$

Figure.III.15. Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure

III.7.Fissure centré entre une entaille circulaire et une inclusion :

Dans cet exemple, nous considérons une plaque carrée fissurée de longueur $L = 0.2\text{m}$. Présente une lacune circulaire centrée dans la moitié gauche de la plaque de rayon $R = 0.02\text{m}$ et une inclusion de même rayon sur la moitié droite de la plaque. Nous considérons le même chargement que l'exemple précédent. Le module de Young $E1$ est égal à 21000MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

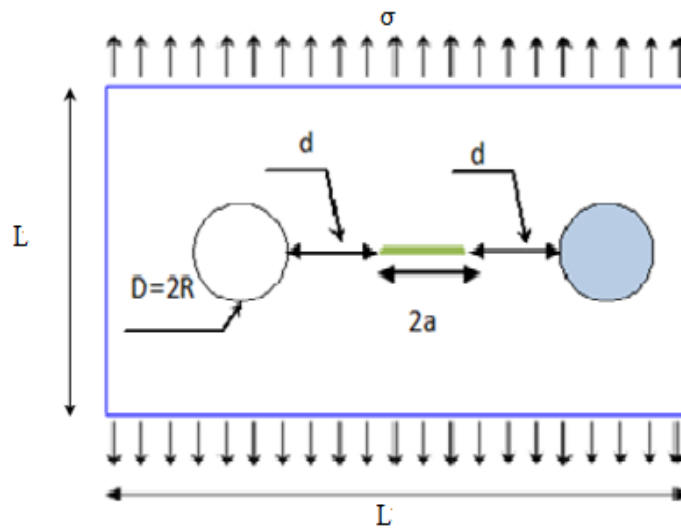


Figure.III.16. une fissure centrée entre une entaille -inclusion.

Nous calculons la variation du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young inclusion-matrice. Les résultats obtenus correspondent à une longueur fissure $a = 20\text{mm}$

Tableau 05 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
$K_{I\text{inclu}} (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	34.154	32.932	32.075	30.95	29.563	28.526	27.708	27.386
$K_{I\text{entail}} (\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$	35.009	34.486	34.089	33.593	32.983	32.529	32.171	32.03

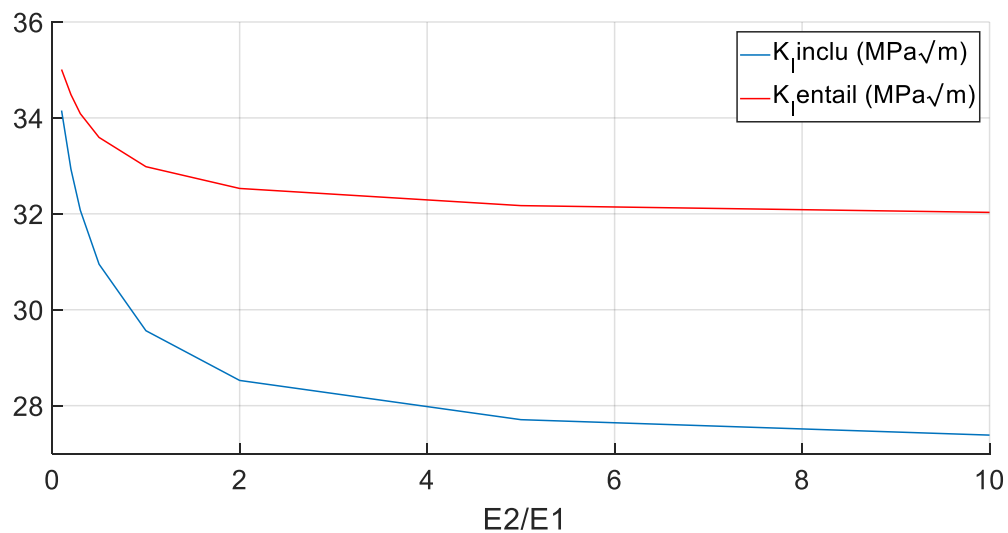


Figure.III.17. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

Le FIC diminue avec le rapport E_2/E_1 pour les deux têtes de fissure. Le FIC côté entaille est plus grand que le FIC côté inclusion. Une inclusion plus dure que la matrice permet le ralentissement de

la propagation de la fissure. Ceci est relevé dans les travaux de [Don-2003] présentés sur la figure 29.

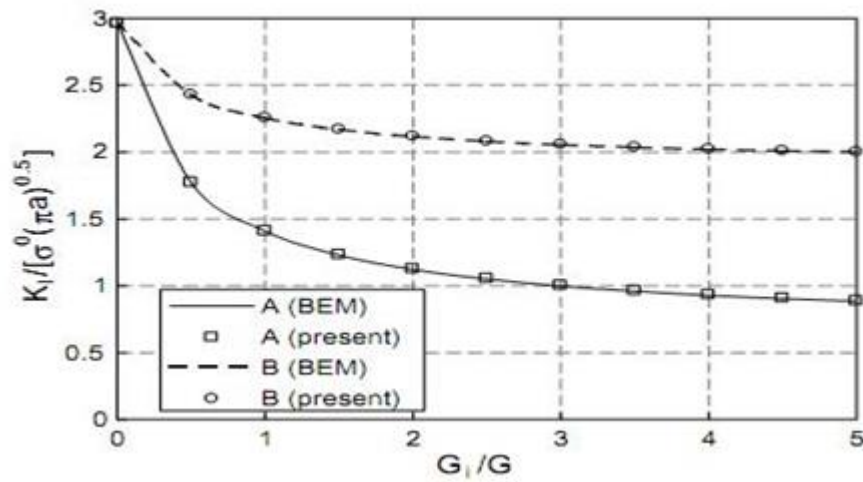
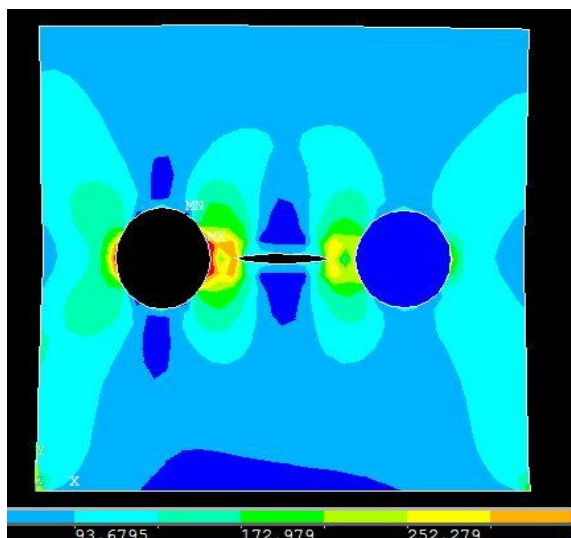
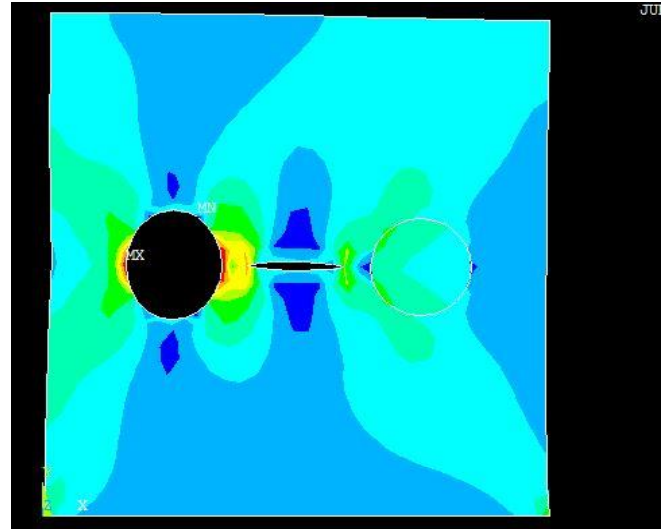


Figure.III.18. Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice. ([Don-2003])



a) E2/E1=0.2



b) E2/E1=5

Figure.III.19. Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure

III.8.Conclusion :

Cette étude a été menée dans le but d'étudier le comportement d'une structure fissurée en présence d'une inclusion près de la fissure. L'analyse des résultats donnés par la méthode des éléments finis (calculs sur ANSYS), a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Pour une fissure dans la matrice et pour le rapport des modules de Young inclusion/matrice E_2/E_1 inférieur à 1, c'est-à-dire une inclusion plus souple que la matrice.
- Pour une configuration de fissure sur l'axe de l'inclusion, la position la plus critique correspond à la tête de fissure la plus proche de l'inclusion. Cette situation s'inverse lorsque ce rapport est supérieur à 1, inclusion très souple que la matrice. et la position plus critique correspond à la tête de fissure la plus éloignée de l'inclusion.

Conclusion générale

Dans cette étude, La méthode des éléments finis (calculs sur ANSYS) est adopté pour la simulation du problème d'interaction inclusion fissure. L'étude montre l'efficacité de cette méthode.

Les résultats montrent particulièrement l'effet de la présence d'inclusion près de la fissure en tenant compte du type du matériau de l'inclusion et de l'effet de la distance de celle-ci par rapport à la fissure.

Les résultats obtenus concernent le FIC.

L'analyse des résultats donnés par ANSYS, a permis de tirer les conclusions suivantes :

Pour une fissure dans la matrice et pour le rapport des modules de Young inclusion/matrice E_2/E_1 inférieur à 1, c'est-à-dire une inclusion plus souple que la matrice, pour une configuration de fissure sur l'axe de l'inclusion, la position la plus critique correspond à la tête de fissure la plus proche de l'inclusion. Cette situation s'inverse lorsque ce rapport est supérieur à un et la position plus critique correspond à la tête de fissure la plus éloignée de l'inclusion.

Références

1. O. Rahmani, S.kebdani, Introduction à la Méthode des Eléments Finis pour les Ingénieurs, Edition OPU, 2003.
2. Griffith .A.A. (1920) .The phenomena of rupture and flow solids. Philosophical transactions of royal society vol.
3. C. Zienkiewicz, La Méthode Des Eléments Finis, Mc Graw Hill, 1979.
4. Hervé Oudin. Méthode des éléments finis. Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, 2008.
5. H.D Bui. « Introduction à la mécanique de la rupture » in Rupture contrôle Sureté Edité par Masounave, Bathias, Dickson, Conseil national de recherches du Canada, Institut de Génie des Matériaux, 1980.
6. Hicheme Ferdjani. Introduction à la mécanique de la rupture fragile. Université Saad Dahlab. April 2018.
7. Abdelghani SEGHIR. Cours Méthode des Eléments Finis l'université A. Mira, Béjaia, Algérie
8. Dr. A.-V. Phan, analyses Fracture Université of South Alabama
9. Irwin.G.R. (1948). Fractures dynamics, fracturing of metals, American society for metals, Ceveland.
10. Pil-1994 W.D. Pilkey. (1994). (Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices).
11. Zhon-2002 L.Zhonghua, C.Qiang. (2002). some simple formulas to predict the variation of stress intensity factors for mode I crackinduced by near crack-tip inclusion. Engineering Fracture Mechanics.
12. Cotterell.B. (2002) «The past, present, and future of fracture mechanics » Engineering Fracture Mechanics
13. C. Y. Dong, S. H. Loet, Y. K. Cheung. (2003). Numerical analysis of the inclusion-crack interactions using an integral equation. COMPUTATIONAL ECHANICS.
14. ZHONGHUA LI and QIANG CHEN (2002). International Journal of Fracture.