

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté de Technologie

Département de Mécanique

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Energétique

CONCEPTION A HAUTE TEMPERATURE DES TUYERES SUPERSONIQUES TYPE ANNULAIRE

Par

HAMAIDIA Walid

devant le jury composé de :

Younes BENKHEDDA	Professeur	U. de Blida 1	Président
Hamid OUALI	Professeur	EMP. Alger	Examineur
Boualam SALAH	Professeur	E.N.S.H. Blida	Examineur
Bachir IMINE	Professeur	U.S.T.O. Oran	Examineur
Abdallah BENAROUS	Professeur	U. de Blida 1	Examineur
Toufik YAHIAOUI	Professeur	U. de Blida 1	Rapporteur
Abderrazak ALLALI	Professeur	U. de Blida 1	Co-Rapporteur
Mohamed SELLAM	Maître de Conférences A	U. d'Evry France	Invité

Blida, 2020

A mes parents

A ma femme

A mes deux anges : Anas et Douha

A mes frères et mes sœurs

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter.
En reconnaissance de tous les sacrifices consentis
par tous et chacun pour me permettre d'atteindre
cette étape de ma vie.

Avec toute ma tendresse.

Je dédie ce travail

HAMAIDIA Walid

“Celui qui reçoit une idée de moi ;
reçoit un savoir sans diminuer le mien ;
tout comme celui qui allume sa bougie à la mienne ;
reçoit la lumière sans me plonger dans la pénombre ;
Que les idées circulent librement de l'un à l'autre partout sur la planète”

RESUME

Le but de ce travail est concevoir un nouveau concept de tuyère axisymétrique annulaire par l'intermédiaire d'un solveur numérique basé sur la méthode des caractéristiques à haute température, inférieure au seuil de dissociation des molécules. Dans ce cas les chaleurs spécifiques varient avec l'évolution de la température. La différence donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle à haute température est présentée. La nouvelle tuyère *CAN* (Cylindrical Annular Nozzle), possède un corps central cylindrique et une paroi externe qui donne un écoulement uniforme et parallèle à la sortie de la tuyère. L'intérêt de la nouvelle conception est d'améliorer les performances en l'occurrence son nombre de Mach de sortie, sa masse et son coefficient de poussée. La comparaison des résultats est faite avec la tuyère *MLN* (Minimum Length Nozzle) vu qu'elle est très utilisée jusqu'à présent dans la majorité de la construction aéronautique, elle possède aussi les meilleures performances par rapport aux autres types de tuyères supersoniques existantes. On trouve une infinité de forme en fonction du choix des valeurs du nombre de Mach de sortie et de la température génératrice.

Le système d'équations régissant cet écoulement est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis, en utilisant un modèle à deux équations de transport (*SST Menter*), sur un maillage structuré Multi-blocs. L'approche *CFD* porte sur l'analyse physique des écoulements compressibles supersoniques dans les tuyères *MLN* et *CAN* en régime sur-détente, cette approche met en évidence l'existence et l'interaction de plusieurs phénomènes physiques très complexes peuvent considérablement influencer sur les performances et la fiabilité des tuyères propulsives. La tuyère *CAN* assure un décollement contrôlé et symétrique, par conséquence des charges latérales de faible intensité et les niveaux de fluctuations moins importants par rapport à la tuyère *MLN*.

Mots Clés

Tuyère axisymétrique annulaire, Méthode des caractéristiques à haute température, *CFD*, Tuyères *MLN* et *CAN*, la méthode des volumes finis, Equations de transport (*SST Menter*), Charges latérales.

ABSTRACT

The aim of this work is to design a new concept of annular axisymmetric nozzle using a numerical solver based on the method of characteristics at high-temperature, lower than molecule dissociation temperature threshold. In this case the specific heat varies with the evolution of the temperature. The difference of the perfect gas model compared to our high temperature model is presented. The new nozzle is named by Cylindrical Annular Nozzle. Its form contains a cylindrical central body and an external wall which giving a uniform and parallel flow at the exit nozzle. The interest of a new design is to improve the performances, which are the exit Mach number, nozzle's size, mass and thrust coefficient. The comparison of the results with the *MLN* nozzle since it is currently used in the majority of the aerospace industry; it also has the best performance compared to other existing supersonic nozzles. There are an infinite nozzle's shapes depending on the choice of the exit Mach number and the stagnation temperature.

The equations system governing this flow is solved by the finite volume method, using a turbulence model with two transport equations (*SST-Menter*), on a multi-blocs structured mesh. The *CFD* approach focuses on the physical analysis of supersonic compressible flows through *MLN* and *CAN* nozzles in the over-expansion regime, thus proving that the existence and interaction of several complex physical phenomena can significantly affect the performance and the reliability of propulsion nozzles. The *CAN* nozzle provides controlled and a symmetrical separation flow, which results in reduced side-loads and decreased fluctuation levels compared to the *MLN* nozzle.

Key Words

Annular axisymmetric nozzle, the method of characteristics at high-temperature, *CFD*, *MLN* and *CAN* nozzles, the finite volume method, transport equations (*SST- Menter*), side-loads.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تصميم شكل جديد لفوهة حلقيّة ذات محور تناظري باستخدام برنامج رقمي يعتمد على طريقة الخصائص، يتم إجراء هذه الدراسة في مجال فرضية دراجة الحرارة المرتفعة أقل من عتبة دراجة الحرارة تفكك الجزيئات الغاز. في هذه الحالة تختلف الحرارة النوعية لضغط ثابت مع زيادة درجة الحرارة، يتم الأخذ بعين الاعتبار مقارنة و دراسة بين نموذج الغاز المثالي و نموذج درجة الحرارة العالية من اجل الحصول على نهاية مجال تطبيق نموذج الغاز المثالي. فوهة *CAN* الجديدة (لفوهة حلقيّة ذات محور تناظري) ، تتكون من جسم مركزي أسطواني وجدار خارجي مما يعطي تدفق منتظم و موازي عند مقطع الخروج للفوهة. تكمن أهمية التصميم الجديد أيضا في تحسين أداء الفوهة، مع إمكانية رفع عدد ماك لمقطع الخروج، معامل القوة و تخفيض الكتلة. تتم مقارنة النتائج مع فوهة *MLN* (الحد الأدنى لطول الفوهة) نظراً لإستعمالها على نطاق واسع في معظم الصناعات الفضائية ، كما أنها تتمتع بأفضل أداء مقارنة بأنواع الفوهات ما فوق الصوتية الموجودة. اعتمادا على اختيار قيم عدد ماخ مقطع الخروج و درجة حرارة التوليد، يمكن إختيار عدد غير متناهي من اشكال الفوهات.

يتم حل نظام المعادلات التي تحكم تدفق السوائل اعتمادا على طريقة الأحجام المتناهية ،تحديدا "مخطط رو" و هو المخطط المستعمل غالبا في حل المعادلات المضطربة وذلك باستخدام نموذج معادلاتي الإضطراب (*SST Menter*)، على شبكة منظمة متعددة الكتل. يركز مجال ديناميكية الموائع الحسابية *CFD* على التحليل الفيزيائي للتدفقات المضغوطة و دراسة طبيعة السلوك الحركي الهوائي لتدفق السوائل ما فوق الصوتية في فوهات *MLN* (فوهات ذات أطوال قصيرة) و *CAN* (فوهة حلقيّة ذات محور تناظري) تحت نظام الضغط الزائد ، ويبرز هذا النهج وجود وتفاعل العديد من الظواهر الفيزيائية الجد المعقدة والتي يمكن أن تؤثر بشكل كبير على أداء، إستقرار وموثوقية فوهات الدفع. تتميز فوهة *CAN* بانفصال متحكماً ومتناسقاً لتدفق الغاز ، و النتيجة تخفيض القوى الجانبية و بالتالي مستويات إهتزاز أقل شدة مما يساعد على الأداء الجيد و المستقر مقارنة بفوهة *MLN*.

كلمات المفاتيح

فوهة حلقيّة ذات محور تناظري، طريقة الخصائص في مجال درجة حرارة عالية، ديناميكية الموائع الحسابية *CFD*، *MLN* (فوهات ذات أطوال قصيرة)، *CAN* (فوهة حلقيّة ذات محور تناظري)، طريقة الأحجام المتناهية، نموذج معادلاتي الإضطراب (*SST Menter*)، القوى الجانبية.

REMERCIEMENTS

En premier lieu je remercie *ALLAH* le très Miséricordieux, le tout puissant, qui m'a donné le courage et la patience pour bien mener ce modeste travail.

J'exprime ma reconnaissance à monsieur *T. YAHIAOUI*, Professeur au département de mécanique de l'université de Blida-1, directeur de cette thèse, qui m'a prodigué les conseils et les encouragements pour finaliser mon mémoire. Je garde l'excellent souvenir de nos discussions, il m'a aidé minutieusement avec amabilité et patience malgré ses occupations. J'ai beaucoup admiré sa simplicité, son ardeur au travail, ses qualités humaines et son raisonnement scientifique. C'est ici pour moi l'occasion de lui témoigner toute ma gratitude.

J'exprime ma reconnaissance au Professeur *A. ALLALI*, Co-promoteur de cette thèse. Je n'ai pas de mots pour le remercier assez, mais je lui dirais seulement merci pour tout ce que vous avez fait pour moi et je vous serais reconnaissant durant toute ma vie.....*Merci.*

Les travaux qui font l'objet de cette thèse ont été réalisés au laboratoire *LMEE* (Laboratoire de Mécanique et d'Energétique, université d'Evry. Paris) sous la direction de Monsieur *M. SELLAM*, maître de conférences (A), à qui j'adresse mes sincères remerciements pour son soutien, sa disponibilité, sa patience et sa compréhension, en particulier dans les phases difficiles de ce travail de thèse. Je tiens aussi à le remercier de m'avoir accueilli et intégré dans son équipe de recherche durant mon séjour scientifique. Il est en grande partie à l'origine de ce parcours très enrichissant et valorisant, en m'offrant une opportunité exceptionnelle d'acquérir de nouvelles connaissances en termes de recherche. Les mots à ce stade sont insuffisants pour lui exprimer ma gratitude.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur *Y. BENKHADA*, Professeur à l'Université de Blida-1, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je veux également adresser mes remerciements à Monsieur *H. OUALI*, Professeur à l'Ecole Militaire Polytechnique pour l'intérêt qu'il a montré pour ce travail, et pour avoir bien voulu accepter l'invitation de participer au jury. Je me réjouis de pouvoir toujours collaborer avec lui dans des programmes de recherche communs.

Je veux également adresser mes remerciements à Monsieur *S. BOUALEM*, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Blida pour avoir consacré son temps précieux pour examiner ce travail et participer à mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent encore à Monsieur *A. BENAROUS*, Professeur à l'Université de Blida-1 pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

Ainsi que Monsieur *B. IMINE*, Professeur à l'Université des Sciences et des Technologies d'Oran d'avoir accepté de se déplacer et de faire un long voyage pour m'honorer de sa présence et de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME	2
REMERCIEMENTS	5
TABLE DES MATIERES	7
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	11
INTRODUCTION	17
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUE	27
1.1. Introduction	27
1.2. Présentation d'une tuyère supersonique	27
1.3. Revue bibliographique sur la conception des tuyères supersoniques	28
1.4. Types de profils	31
1.4.1. Profil conique	32
1.4.2. Profil idéal	34
1.4.3. Profil idéal tronqué (<i>TIC</i>)	34
1.4.4. Profil optimisé tronqué (<i>TOC</i>)	35
1.4.5. Profil parabolique optimisé (<i>TOP</i>)	36
1.4.6. Profil idéal tronqué compressé (<i>CTIC</i>)	37
1.4.7. Tuyère à compensation d'altitude	38
1.4.8. Tuyère double galbes	43
1.4.9. Tuyère à générateurs de vortex	47
1.4.10. Tuyère à deux modes	48
1.4.11. Tuyère auto-adaptée	49
1.5. Conception des tuyères supersoniques en utilisant le modèle <i>HT</i>	54
1.5.1. Cas bidimensionnelle	55
1.5.2. Cas axisymétrique	56
1.6. Position du problème par rapport à la littérature	57
1.7. Objectifs de l'étude	60
2. DIMENSIONNEMENT A HAUTE TEMPERATURE DES TUYERES ANNULAIRES AXISYMETRIQUES	62
2.1. Paramètres d'un écoulement supersonique à haute température	62
2.2. Méthode des caractéristiques à haute température	63
2.3. Dimensionnement de la tuyère annulaire axisymétrique	63
2.4. Formulation mathématique	66
2.4.1. Equation et procédure pour un point interne	68

2.4.2. Procédure pour un nœud interne particulier	70
2.4.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie	71
2.5. Calcul des paramètres thermodynamiques	72
2.6. Procédure de calcul dans la tuyère	73
2.6.1. Région de Kernel	73
2.6.2. Région de transition et contour de la tuyère axisymétrique	75
2.7. Masse de la structure de la tuyère	79
2.8. Force de la pression exercée sur la paroi du divergent	80
2.9. Erreur des processus numériques	81
2.10. Erreur entre les deux modèles <i>GP</i> et <i>HT</i>	81
3. PHENOMENOLOGIE DES ECOULEMENTS DANS LES TUYERES DE MOTEURS- FUSEES EN SUR-DETENTE	82
3.1. Conception des profils de tuyère	82
3.2. Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique	84
3.2.1. Ecoulement subsonique	85
3.2.2. Ecoulement sonique adapté	85
3.2.3. Ecoulement sonique non adapté	85
3.2.4. Ecoulement supersonique adapté	87
3.2.5. Ecoulement supersonique non adapté	87
3.2.6. Remarques et résultats	87
3.3. Fonctionnement réel de la tuyère supersonique	87
3.3.1. Le régime d'adaptation	88
3.3.2. Le régime de sous-détente	88
3.3.3. Le régime de sur-détente	89
3.4. Les profils des tuyères supersoniques	92
3.4.1. Tuyères coniques	92
3.4.2. Les tuyères optimisées	92
3.5. Structures de chocs d'une tuyère supersonique en sur-détente	93
3.5.1. Réflexion régulière	96
3.5.2. Réflexion de Mach	96
3.5.3. Réflexion de Mach inverse	97
3.6. Configuration de décollement en régime sur-détendu	98
3.7. Procédure de découlement supersonique	99
3.7.1. Découlement libre	100
3.7.2. Découlement restreint	101
3.7.3. Basculement de régime (<i>FFS-RSS</i>)	105
3.8. Conclusion	105

4. LA MODELISATION DES ECOULEMENTS COMPRESSIBLES TURBULENTS	107
4.1. Equations fondamentales des fluides compressibles	107
4.2. Equations moyennées	108
4.3. La couche limite	110
4.3.1. Couche limite sans gradient de pression	110
4.3.1.1. La région interne	111
4.3.1.2. La région externe	112
4.3.2. Couche limite avec gradient de pression	113
4.4. Hypothèses et lois de comportement	114
4.4.1. L'état du fluide	114
4.4.2. Le comportement thermodynamique	114
4.4.3. Le comportement dynamique	115
4.4.4. Le comportement thermique	116
4.5. Méthodes et calcul numériques : Présentation du code	116
4.5.1. Le système complet des équations de Navier-Stokes	116
4.5.2. Propriété du gaz et condition aux limites	117
4.5.3. Discritisation des équations par la méthode des volumes finis	118
4.5.4. Modèles de turbulence	120
4.5.4.1. Modèle de baldwin-Lomax	121
4.5.4.2. Modèle $K - \varepsilon$	122
4.5.4.3. Modèle $K - \omega$	123
4.5.4.4. Modèle $SST-K - \omega$ de Menter	124
4.5.4.5. Modèle de Spalart-Allmaras	126
4.5.5. Modèle de turbulence adopté en 2-D axisymétrique	126
4.5.6. Maillage	128
4.5.7. Approche numérique	128
5. UN NOUVEAU CONCEPT DE TUYERES ANNULAIRE : CAN	130
5.1 Introduction	130
5.2 Partie 01 : Résultats et discussions de dimensionnement de la tuyère CAN axisymétrique à haute température	131
5.2.1. Comparaison avec la tuyère MLN	132
5.2.2. Caractéristique de maillage	133
5.2.3. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème	134
5.2.4. Influence de la température T_0 sur la forme de la tuyère CAN	135
5.2.5. Effet de la position du corps central sur la forme de la tuyère CAN	135

5.2.6. Influence du nombre de Mach de sortie sur la forme de la tuyère	136
5.2.7. Variation des paramètres thermodynamiques à travers de la paroi	137
5.2.8. Variation des paramètres de design de la tuyère en fonction de nombre de Mach de sortie M_E	138
5.2.9. Variation des paramètres de design en fonction de température génératrice T_0	139
5.2.10. Influence de la Position de redresseur annulaire sur les paramètres de design pour M_E et T_0 donnés	140
5.2.11. L'erreur donnée par le modèle <i>PG</i> par rapport à haute température	142
5.2.12. Comparaison des performances de design entre les deux tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i>	142
5.3. Partie 02 : Application <i>CFD</i> sur les tuyères supersonique sur-détendues	146
5.3.1. Domaine de calcul et condition aux limites	148
5.3.2. Réalisation et sensibilité au maillage	150
5.3.3. Effet de la couche limite sur M_{exit} pour les tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i>	152
5.3.4. Topologie de l'écoulement dans les tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i>	154
5.3.4.1. Calcul du régime supersonique adapté	154
5.3.4.2. Régime aérodynamique en sur-détente	157
5.3.5. Structure de jets dans les tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i> en sur-détente	161
5.3.5.1. Découlement libre et pression pariétales dans la tuyère <i>MLN</i>	161
5.3.5.2. Découlement et pression pariétales dans la tuyère <i>CAN</i>	163
5.3.6. Organisation du spectre des lignes de frottement pariétales dans un décollement axisymétrique	164
5.3.7. Charges latérales dans les tuyères <i>MLN</i> et <i>CAN</i> sur-détendues	167
CONCLUSION	168
ANNEXES	
A. Liste des symboles	171
B. Paramètres d'un écoulement supersonique à haute température	175
C. Méthode des caractéristiques	192
REFERENCES	201

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure I.1	Le moteur Européen Vulcain-2 d'Ariane-5 [11].	19
Figure I.2	Le moteur <i>SSME</i> de la navette spatiale américaine [11].	19
Figure I.3	Groupe de recherche Européen <i>CRISTAL</i> [12].	21
Figure 1.1	La tuyère de-Laval [36]	28
Figure 1.2	Contour de Mach dans une tuyère conique 15° , <i>TIC</i> , <i>TOC</i> et <i>TOP</i> avec $\varepsilon = 43,4$. Les lignes en gras indiquent la position approximative du choc intérieur [15].	31
Figure 1.3	Composants de base d'un profil idéal.	32
Figure 1.4	a) Définition du profil conique, b) schéma 3-D.	33
Figure 1.5	Tuyère conique de la fusée V-2.	33
Figure 1.6	Abaque de 12 profils idéaux avec un calcul de couche limite [15].	34
Figure 1.7	Méthode d'Ahlberg et al. pour un profil <i>TIC</i> optimal [54].	35
Figure 1.8	Définition d'un profil <i>TOC</i> .	36
Figure 1.9	Famille de profil <i>TOC</i> pour $25^\circ \leq \theta_N \leq 34^\circ$ [59].	36
Figure 1.10	Lignes caractéristiques C^+ et C^- dans un profil de tuyère.	37
Figure 1.11	Profil <i>CTIC</i> comparé avec un profil <i>TIC</i> .	38
Figure 1.12	Comparaison de différents profils conventionnels.	38
Figure 1.13	Tuyère à divergent extensible.	39
Figure 1.14	Tuyères type anneau déclencheur [15].	41
Figure 1.15	Tuyère à injection de flux secondaire [15].	42
Figure 1.16	Tuyère à injection de flux secondaire près de la sortie, tuyère secondaire.	42
Figure 1.17	Modes de fonctionnement de la tuyère double galbes [78].	43
Figure 1.18	Comparaison des performances de la tuyère double galbe à celle de la tuyère galbée optimisée [83].	44
Figure 1.19	Distribution de la pression pariétale, dans les trois concepts de la tuyère double galbes [85].	45
Figure 1.20	Distribution de la pression pariétale dans une <i>TICCP</i> en mode basse altitude, pendant la transition et en mode haute altitude [87].	46

Figure 1.21	Variation de pression dans le deuxième mode de fonctionnement de la tuyère double galbes, comparaison de l'écoulement visqueux vs non visqueux (gauche) [87], <i>CFD</i> -visqueux (droite) [90].	46
Figure 1.22	Comparaison du niveau de charge latérale entre la tuyère double galbe et la tuyère conventionnelle <i>TIC</i> [87].	47
Figure 1.23	Schéma des structures tourbillonnaires sur la surface ondulée [91].	47
Figure 1.24	Tuyère à générateurs de Vortex [15].	48
Figure 1.25	Tuyère à deux modes de fonctionnement.	49
Figure 1.26	Divergent à surface variable [98].	50
Figure 1.27	Tuyère munie d'un col à section variable [15].	50
Figure 1.28	Tuyère à expansion/déflexion.	51
Figure 1.29	Tuyère à corps central idéal profilé.	52
Figure 1.30	Tuyère à corps central tronqué.	53
Figure 1.31	Tuyère plane à corps central tronqué (Linear Aerospike Nozzle).	54
Figure 1.32	Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée 2- <i>D</i> [31].	55
Figure 1.33	Variation de la masse de la tuyère <i>MLN</i> 2- <i>D</i> [31].	56
Figure 1.34	Variation de C_F exercée sur la paroi de la tuyère <i>MLN</i> 2- <i>D</i> [31].	56
Figure 1.35	Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée axisymétrique.	57
Figure 1.36	Tuyère supersonique <i>CAN</i> (Cylindrical Annular Nozzle).	58
Figure 1.37	Tuyères (<i>MLN</i>) de moteurs fusées [13], [15].	59
Figure 2.1	Différent géométries des tuyères.	64
Figure 2.2	Types d'ondes de détente.	65
Figure 2.3	Champ de l'écoulement dans la tuyère à corps central.	65
Figure 2.4	Champ d'écoulement dans une tuyère à détente centrée [111].	66
Figure 2.5	Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach.	67
Figure 2.6	Nœud interne quelconque.	69
Figure 2.7	Nœud interne particulier.	71
Figure 2.8	Nœud sur l'axe de symétrie.	71
Figure 2.9	Processus de calcul des caractéristiques dans la région de Kernel.	74
Figure 2.10	Processus de calcul des C^* de la région de transition.	76
Figure 2.11	Différents cas d'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique.	76
Figure 2.12	Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition.	79

Figure 2.13	Présentation d'un tronçon de la tuyère à détente centrée.	80
Figure 3.1	Schéma de la tuyère supersonique [166].	85
Figure 3.2	Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique. Evolution de la pression le long de la tuyère [166].	86
Figure 3.3	Régime de sur-détente en $1-D$ [166].	86
Figure 3.4	Fonctionnement d'une tuyère supersonique en fonction d'altitude.	87
Figure 3.5	Topologie de l'écoulement à l'adaptation [126].	88
Figure 3.6	Topologie de l'écoulement en Régime de sous-détente.	89
Figure 3.7	Profil de pression pariétale le long de la tuyère.	89
Figure 3.8	Régime en sur-détente (décollement naissant) [126].	90
Figure 3.9	Régime en sur-détente (décollement étendu) [126], [127].	91
Figure 3.10	Profils des tuyères <i>TIC</i> et <i>TOC</i> [130].	93
Figure 3.11	Tuyères <i>TIC</i> et <i>TOC</i> du <i>DLR</i> [166].	93
Figure 3.12	Formes lumineuses dans le jet du moteur Vulcain fonctionnant au sol au banc <i>P5</i> de <i>DLR/Lampoldshausen</i> [126].	94
Figure 3.13	Structure de disque de Mach (haut) et structure de chocs en chapeau (bas). Calculs Navier-Stokes pour des taux de détente voisins du taux nominal du moteur Vulcain [132].	94
Figure 3.14	Figure. 3.14 : Schémas des deux structures de choc dans le jet du moteur Vulcain pour des régimes stabilisés proches du taux de détente nominal [132].	95
Figure 3.15	Réflexion régulière.	96
Figure 3.16	Visualisation strioscopique de la réflexion régulière [135].	96
Figure 3.17	Réflexion régulière dans une tuyère réelle <i>RL10-A5</i> [135].	96
Figure 3.18	Réflexion de Mach.	97
Figure 3.19	Strioscopique de la réflexion de Mach, <i>ONERA</i> tuyère <i>S8Ch</i> [134].	97
Figure 3.20	Réflexion de Mach moteur Vulcain au banc d'essai [135].	97
Figure 3.21	Réflexion de Mach inverse.	97
Figure 3.22	Structure de choc dans le jet du moteur vulcain [126].	98
Figure 3.23	Processus du décollement sur une plaque plane [127].	98
Figure 3.24	Représentation schématisée du décollement libre.	100
Figure 3.25	Décollement libre dans les tuyères sur-détendues [11,28].	100
Figure 3.26	Schéma du décollement libre, d'après Hagemann [138].	101
Figure 3.27	Schéma du décollement restreint, d'après Frey et Hagemann [138].	102

Figure 3.28	Distributions de pression pariétale associées au régime de décollement (Etude Volvo Aero dans la tuyère VAC-S1 testée au FOI) [94].	103
Figure 3.29	Simulations numériques de l'écoulement sur-détendu. (Etude DLR-ASTRIUM et banc P3.2 DLR à Lampoldshausen) [140].	104
Figure 3.30	Tuyère bidimensionnel décollée [141].	104
Figure 3.31	Basculement entre décollement libre et restreint et inversement durant les transitoires (tuyère VAC-S1 testée au FOI) [94].	105
Figure 4.1	Evolution du frottement dans la couche limite[143].	112
Figure 4.2	Les différentes zones de la couche limite [143].	113
Figure 4.3	Évolution de la couche limite suivant le gradient de pression [143].	114
Figure 4.4	Volume de contrôle en 2-D.	118
Figure 4.5	Volume de contrôle dans une configuration tridimensionnelle.	118
Figure 5.1	Raffinement de la zone de Kernel.	133
Figure 5.2	Raffinement de la zone de transition.	133
Figure 5.3	Insertion de la caractéristique C^- et raffinement des trois zones.	133
Figure 5.4	Contour des tuyères donnant $M_E=3.00$.	135
Figure 5.5	Effet du rayon y_{body} sur la forme de la tuyère CAN.	136
Figure 5.6	Effet de M_E sur la forme de la tuyère CAN.	136
Figure 5.7	Variation du nombre de Mach le long de la paroi pour différentes positions du corps central.	137
Figure 5.8	Variation de l'angle de déviation θ le long de la paroi pour différentes positions du corps central.	137
Figure 5.9	Evolution de L/y^* en fonction de M_E	138
Figure 5.10	Evolution de C_{mass} en fonction de M_E	138
Figure 5.11	Variation de C_F en fonction de M_E	138
Figure 5.12	Evolution de θ^* en fonction de M_E	139
Figure 5.13	Evolution de M^* en fonction de M_E	139
Figure 5.14	Variation de L_d/y^* en fonction de T_0 lorsque $M_E=3.00K$ pour différentes positions du corps central.	140
Figure 5.15	Variation de C_{mass} en fonction de T_0 lorsque $M_E=3.00K$ pour différentes positions du corps central.	140
Figure 5.16	Variation de C_F en fonction de T_0 lorsque $M_E=3.00K$ pour différentes positions du corps central.	140
Figure 5.17	Variation de L/y^* en fonction des positions du corps central.	141

Figure 5.18	Variation de C_{mass} en fonction des positions du corps central.	141
Figure 5.19	Variation de C_F en fonction des positions du corps central.	141
Figure 5.20	Evolution de θ^* en fonction des positions du corps central.	141
Figure 5.21	Evolution de M^* en fonction des positions du corps central.	141
Figure 5.22	Variation de $\varepsilon(C_F)$ en fonction de M_E à haute température.	142
Figure 5.23	Variation de $\varepsilon(C_{mass})$ en fonction de M_E à haute température.	142
Figure 5.24	Comparaison entre les tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i> pour la même section A^* , M_E et C_{mass} donnant $M_E(MLN)=3.00$.	143
Figure 5.25	Evolution de M_E (<i>CAN</i>) en fonction de M_E (<i>MLN</i>) lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E, C_{mass} .	145
Figure 5.26	Evolution de C_{mass} (<i>CAN</i>) en fonction de M_E (<i>MLN</i>) lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E, C_{mass} .	145
Figure 5.27	Variation de $C_F(CAN)$ en fonction de $M_E(MLN)$ lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E, C_{mass} .	146
Figure 5.28	Evolution de $L/y^*(CAN)$ en fonction de M_E (<i>MLN</i>) lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E, C_{mass} .	146
Figure 5.29	Géométries des tuyères : (a) <i>CAN</i> et (b) <i>MLN</i> .	147
Figure 5.30	Domaine de calcul (champ lointain) et conditions aux limites.	148
Figure 5.31	Contours du nombre de Mach et de la température à travers la tuyère <i>CAN</i> .	149
Figure 5.32	Domaine de calcul de la tuyère et conditions aux limites.	149
Figure 5.33	Maillage structuré multi-blocs de la tuyère <i>MLN</i>	151
Figure 5.34	Maillage structuré multi-blocs de la tuyère <i>CAN</i> .	151
Figure 5.35	Maillage de la demi-tuyère et du milieu extérieur.	152
Figure 5.36	Variation du nombre de Mach de sortie de <i>CAN</i> en fonction de Y .	153
Figure 5.37	Variation du nombre de Mach de sortie de <i>MLN</i> en fonction de Y .	153
Figure 5.38	Evolution du nombre de Mach à travers la tuyère <i>CAN</i> .	154
Figure 5.39	Variation du nombre de Mach à travers la tuyère <i>MLN</i> .	154
Figure 5.40	Les lignes de courant dans la tuyère <i>CAN</i> .	155
Figure 5.41	Les lignes de courant dans la tuyère <i>MLN</i> .	155
Figure 5.42	Les lignes Iso-Mach dans la tuyère <i>CAN</i> .	155
Figure 5.43	Variation de la température statique dans la tuyère <i>CAN</i> .	156
Figure 5.44	Evolution de la vitesse tout au long de la tuyère <i>CAN</i> .	156
Figure 5.45	Distribution de la pression statique tout au long de la tuyère <i>CAN</i> .	156

Figure 5.46	Régime de sur-détendu de la tuyère <i>LEA-TIC</i> ($NPR=10$) [126].	158
Figure 5.47	Effet du NPR sur la topologie de l'écoulement dans la tuyère <i>CAN</i> .	159
Figure 5.48	Effet du NPR sur la topologie de l'écoulement dans la tuyère <i>MLN</i> .	160
Figure 5.49	Interaction de l'onde de choc et l'évolution du nombre de Mach tout au long de la tuyère <i>MLN</i> à $NPR=05$.	162
Figure 5.50	Topologie de l'écoulement en sur-détendu de <i>MLN</i> à $NPR=05$.	163
Figure 5.51	Contours iso-Mach et spectre des lignes de courant de l'écoulement séparé de la tuyère <i>CAN</i> pour différents NPR .	165
Figure 5.52	Contours iso-Mach et spectre des lignes de courant de l'écoulement séparé de la tuyère <i>MLN</i> pour différents NPR .	166
Figure B.1	Variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$.	183
Figure B.2	Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$.	183
Figure B.3	Présentation de la condensation des nœuds.	184
Figure C.1	Illustration de la direction de l'écoulement et de l'angle de Mach.	196
Figure C.2	Les caractéristiques C^- et C^+ .	197
Figure C.3	Relation entre les lignes de Mach et les coordonnées cartésiennes.	198
Tableau 1.1	Variation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ en fonction de la température de l'air [7].	60
Tableau 5.1	Effet de raffinement de la zone de Kernel sur les paramètres de design.	134
Tableau 5.2	Effet de raffinement de la zone transition sur les paramètres de design	134
Tableau 5.3	influence de la caractéristique C^- , sur les paramètres de design.	135
Tableau 5.4	Résultats des paramètres de design correspondent à la figure 5.4.	135
Tableau 5.5	Résultats des paramètres de design correspondent à la figure 5.5.	136
Tableau 5.6	Résultats des paramètres de design correspondent à la figure 5.6.	137
Tableau 5.7	Comparaison des résultats de dimensionnement des tuyères <i>CAN</i> et <i>MLN</i> correspondent à la figure 5.24.	144
Tableau 5.8	Gain en performance des paramètres de design de la tuyère <i>CAN</i> par rapport à la tuyère <i>MLN</i> .	144

INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, la résolution numérique des problèmes d'aérodynamiques, tels que, les écoulements des fluides dans les tuyères convergentes divergentes supersoniques sont devenus possibles. Ces tuyères, dont le but essentiel est d'assurer l'accélération des gaz de combustion à des vitesses supersoniques, interviennent dans diverses structures, comme : les moteurs fusées, les moteurs d'avions et dans les souffleries supersoniques destinées aux études expérimentales des écoulements réels. Les concepteurs aérodynamiciens ont débuté les applications en 1935. A cette époque, toutes les études étaient basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'avait pas encore commencé [1].

Par le passé, la tuyère a été considérée à cause de sa simplicité comme un organe annexe, dont le rôle consiste essentiellement, à assurer le fonctionnement d'un moteur à un régime donné, par adaptation convenable de sa forme géométrique. Même l'avènement du vol supersonique à ses débuts n'a pas provoqué de changement d'attitude chez les constructeurs.

La conception de la portion divergente, d'une tuyère supersonique fait l'objet d'intenses recherches pour atteindre des poussées de plus en plus importantes. La poussée maximale est obtenue quand l'écoulement à la sortie est uniforme.

Avec l'avènement de la propulsion spatiale, les motoristes ont été contraints par une spécification limitant le poids et la longueur du divergent d'une tuyère, à définir, en fonction de la plage d'altitudes de vol et les optimums du rapport de section et de la poussée poids, tout en essayant de minimiser les pertes de poussée par rapport à la tuyère idéale. Pour cela, ils proposent des solutions pour réduire la longueur du divergent. Entre autres, des tuyères avec un divergent conique de demi-angle de 15° . Ces tuyères sont caractérisées par un faible rapport de section, c'est le cas, de la fusée allemande V-2 pendant la 2^{ème} guerre mondiale. À cette époque-là, les chercheurs allemands ne voyaient aucun avantage à utiliser la méthode des caractéristiques, pour le design de profils plus élaborés pour équiper leurs moteurs.

Néanmoins, après la Deuxième Guerre mondiale, les tuyères supersoniques ont pris une grande importance pour l'industrie militaire. Il fallait augmenter les performances des moteurs fusées pour :

- Des applications stratégiques dans le domaine militaire;
- La course vers la conquête spatiale.

C'est dans ce contexte que des tuyères à grands rapports de sections ont été développées pour les moteurs fusées fonctionnant à haute altitude. L'utilisation du concept de tuyère conique est devenue alors, impraticable au vu de leur longueur et leur diamètre de sortie. Mais, ces dernières continuent toujours à être utilisées sur des moteurs fonctionnant à basse altitude. Pour les hautes altitudes, les moteurs fusées sont équipés par des tuyères à profils optimisés par la méthode des caractéristiques. Il est connu que la masse de la tuyère contient une grande portion de la masse totale des missiles [2], [3]. Ce problème sera donc réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant une poussée maximale avec un poids le plus petit possible de la tuyère (longueur minimale).

En jouant sur ces facteurs, plusieurs formes de tuyères ont été conçues [4] parmi lesquelles : la tuyère à détente centrée (*MLN*) et la tuyère à corps central [5], [6], objets de ce travail

Le problème rencontré dans les expériences et les applications aéronautiques est que l'utilisation des tuyères dimensionnées sur la base des hypothèses du gaz parfait, dégrade les performances souhaitées par cette tuyère. Si on fait des mesures par l'expérience, on va trouver des valeurs différentes de celles déterminées par le calcul; surtout si la température génératrice de la chambre de combustion est élevée. Plusieurs éléments sont responsables de ce changement. Notons ici que la théorie du gaz parfait ne tient pas compte de cette température [7]. Notre étude va résoudre ce problème en utilisant un modèle mathématique qui va tenir compte de cette température.

Une interpolation de $C_p(T)$ par un polynôme de 9^{ème} degré, afin de trouver une forme analytique de cette fonction est appliquée [5,6, 8-10]. Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance, mais nos résultats seront présentés

par le choix d'une interpolation polynômiale. La substance choisie est l'air. La comparaison de la nouvelle conception de la tuyère CAN (Cylindrical Annular Nozzle) est faite avec la tuyère à détente centrée MLN (Minimum Length Nozzle) vu qu'elle est utilisée actuellement dans la propulsion aérospatiale.

La tuyère propulsive du moteur-fusée d'un lanceur est soumise pendant le vol à une pression ambiante (P_a) voisine de 1 bar au niveau du sol et à des pressions inférieures à dix millièmes de Pascal en hautes altitudes.

Par ailleurs, pour la conception de la tuyère, il est nécessaire que son régime d'adaptation soit atteint à une altitude moyenne. Au sol, le design conduit à un régime de sur-détente où la structure de décollement intervient. L'origine du choc de décollement est alors positionnée sur la lèvre de la tuyère. Ainsi, l'apparition des charges latérales est évitée et l'intégrité mécanique du lanceur est préservée. Actuellement, tous les moteurs fusées à ergol liquide s'appuient sur des tuyères MLN (voir figures I.1 et I.2).



Figure. I.1 : Le moteur Européen Vulcain-2 Ariane-5 [11].



Fig. I.2 : Le moteur SSME de la navette spatiale américaine [11].

Au cours du processus de conception, un compromis doit être fait, entre la performance au niveau de la mer (décollage et montée à basse altitude) et celle à vide (haute altitude), afin de satisfaire au mieux les exigences de la mission dans les limites des performances de la tuyère.

On n'omet pas de tenir compte, du rapport d'expansion de la tuyère. Il doit être limité pour éviter le décollement de la couche limite dans la partie divergente de la tuyère au niveau de la mer. Inversement, une tuyère à rapport d'expansion variable permet d'optimiser l'impulsion délivrée sur toute la trajectoire du vol, entraînant des gains de performances spectaculaires [2].

C'est dans ce contexte que la tuyère à corps central *CAN* a été proposée. Pendant les différentes phases de vol ce type de tuyères permet de minimiser les charges latérales de telle sorte que la tuyère a toujours, une pression adaptée. L'étude de ce Type de tuyère a été confrontée à plusieurs contraintes, comme : le poids, le coût, la complexité mécanique et le refroidissement, ce qui a privé leur mise en œuvre sur des lanceurs réels.

La demande actuelle des grandes puissances et des vitesses toujours de plus en plus rapide, incite à passer au supersonique. Ce domaine du supersonique est devenu après la seconde guerre mondiale un domaine d'actualité, de concurrence et de compétitivité entre les Etats-Unis, l'Union Européenne, le Japon, la Russie et la Chine. Plusieurs organismes de recherches (*NASA, DLR, ONERA, LEA-Poitier (P-PRIME), LMFN-CORIA, AGARD...*), groupes de recherches Européens (*CRISTAL, FSCD, ATAC,...*) (voir figure I.3), agences de programmes (*ESA, CNES, SNSB, JAXA,...*), et industriels (Boeing Rocket Dyne, Pratt & Whitney, *EADS*, Lockheed Martin, Snecma Moteurs, Volvo A C, Astrium, Air Liquide, Dassault, Mitsubishi Heavy Industries,...) travaillent sur l'amélioration des performances et la fiabilité des tuyères supersoniques, des moteurs fusées et des lanceurs spatiaux [11,12]. Ce domaine constitue le point de départ vers un grand nombre d'autres domaines qui intéressent actuellement tout le monde tel que : l'internet, la télévision, la communication téléphonique ainsi que tous les services fournis par les satellites artificiels en orbites géostationnaires.



Figure I.3 : Groupe de recherche européen CRISTAL [12].

Les écoulements compressibles dans les tuyères supersoniques des moteurs fusées ont fait l'objet d'une quantité considérable d'études expérimentales et numériques depuis la deuxième moitié du vingtième siècle après la première application opérationnelle du fameux missile Allemand V2 en 1943 suite aux travaux de l'Allemand Werner Von Braun. Ces travaux de recherche se sont poursuivis et intensifiés jusqu'à aujourd'hui dans des laboratoires de recherche spécifiques dans différents pays tel que:



L'Union Européenne



En Allemagne

Avec les recherches de : Gerald Hagemann, Ralf Stark, Manuel Frey, Michael Terhardt, Andreas Gross, C. Weiland, Nurnberger-Genin, (Laboratoire DLR Lampoldshausen) [13-14].



En Suède (Sweden)

Avec les travaux de : Jan Ostland et al (Volvo Aero Corporation) [15-16].



Au Pays-Bas (Netherlands)

Avec les travaux de : Richards Schwane, Yang Xia, Henry Wong et al, (EADS/Space Transportation) [17-18].



En Italie

Marcello Onofri, Francesco Nasuti, Emanuelle Martilli (Université de Rome : La sapienza) [19-20].



En Espagne

Avec les recherches de : José A. Morinigo (2004), José J. Salva [21- 22].



En France

ONERA-Meuden : Jean Délery (Professeur émérite), Jean-Pierre Veuillot, L. Jacquin, Sébastien Deck (2002), A Bourgoing (2002), Philippe Reijasse (2005), Arnaud Galli (2005), Sébastien Girard (2009), Pierre-Élie Weiss (2010), Bruno Sainte-Rose (2010), (Département DAFE et DAAP) [23-24]. Université d'Evry, Université Paris VI, SNECMA-Veron, IUSTI Marseille.

Université Poitier : T. Alziary de Roquefort (Professeur émérite), Pierre Compte, J.P. Bonnet, Stève Girard (1999), Anh Thi Nguyen (2003), T.H.Hieu (2005), H. DENIAU, Guillaume Lehnasch (2005), Afaque Shams(2010), Vincent Jaunet (2010) (Institut *PPRIME*, *ENSMA*, *LEA* Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, UMR CNRS/ENSMA 6609, Poitiers Cedex, France), [25-26].

CORIA-Rouen : Dany Vandromme (1983 Lille), Yann Lebret (1993), Guy Douay (1994), Erhan Solakoglu (1994), Abdellah Hadjadj (1997), E. Lefrancois (1998), E.Kessy (1998), Abderrahmane Nebbache, Cyril Pilinski (2002), Anne-Sophie Mouronval (2004), Samuel Dubos (2005), Yohann Perrot (2006) , Arnab Chaudhuri (2009), A. Chinnayya, D.Taieb (2010), D.Ngomo (2010) , Ouissem Ben Nasr (2011), BenSayah Khaled , (*LFMN- Laboratoire de mécanique des fluides numérique, laboratoire rattaché à l'UMR CNRS 6614 CORIA Rouen*) [27-28].



Aux Etats-Unis

Avec Les recherches de : Charles E. Tinney et al (2012) de *l'université du Texas*, Josef H. Ruf (2010) et Ten-See Wang (2009) (*NASA Marshall Space Flight Center*), Dimitri Papamosschou et al (2009) de *l'université de Californie*,

Craig A. Hunter (1998) (NASA Langler Research Center), Chen, C. L. et Chakravarthy (1994) (Rockwell International Science Center), Horn, M., Fisher, S (1994), Nave L. H. et Coffey G. H. (1973) , Schmucker R. H. (1973), Roy A. Lawrence (1967) , Summerfield et al (1954) et Foster et Cawles (1949) [2- 29].

Objet de la thèse et motivation

Depuis plus d'une dizaine d'années, des motoristes Européens et Américains ont intensifié leurs recherches pour satisfaire la demande continue de satelliser des charges de plus en plus lourdes et répondre aux impératifs de la compétition internationale soit sur le plan commercial ou sur le plan de la conquête de l'espace. Évidemment, sur le plan stratégique, Ces études contribuent à la consolidation et à l'amélioration de la maîtrise de la technique des lanceurs dont un pays doit se doter pour assurer son indépendance. Sachant que les aptitudes de ces moteurs-fusées dépendent étroitement des performances des moteurs utilisés et que ces dernières sont liées aux performances des tuyères équipant ces moteurs, alors, tous les travaux actuels sont orientés pour améliorer l'efficacité de ces tuyères. Pour cela, plusieurs techniques et designs ont été proposés pour arriver à de meilleurs rendements.

Les moteurs fusés actuels et futurs devant être adaptés aux hautes altitudes, le concept de tuyère idéale est exclu car il conduirait à une longueur et un poids du divergent prohibitifs. Les motoristes contraints par une spécification limitant le poids et la longueur d'une tuyère de moteur spatial sont conduits à rechercher un optimum du rapport poussé sur poids pour un rapport de sections fixé.

Cette thèse vise pour objectif la conception d'une nouvelle tuyère supersonique CAN (Cylindrical Annular Nozzle) dans le but d'améliorer ses performances aérodynamiques. Le présent travail est divisé en deux parties :

La première partie consiste à concevoir un nouveau design de tuyère axisymétrique annulaire par l'intermédiaire d'un solveur numérique basé sur la méthode des caractéristiques à haute température, inférieure au seuil de dissociation des molécules, afin d'améliorer les performances aérodynamiques par rapport à la tuyère à détente centrée MLN. La nouvelle forme développée contient un corps central cylindrique et une paroi extérieure pour le redressement

de l'écoulement. La tuyère *MLN* est très utilisée jusqu'à présent dans la majorité de la construction aéronautique, vu ces performances meilleures par rapport aux autres type de tuyères supersoniques existantes et aussi pour la simplicité de la fabrication [9, 30-32]. Le but de notre étude est de donner aux concepteurs un outil qui leur permettra de concevoir des tuyères axisymétriques à corps central pour n'importe quelle géométrie de la section de sortie choisie et de connaître son nombre de Mach, son coefficient de poussée et sa masse. Deux cas intéressants peuvent se présenter :

- Détermination des résultats de la conception de la tuyère *CAN* ;
- Etude comparative des performances des cas *CAN* et *MLN*.

Tous les résultats obtenus dépendent de quatre paramètres qui sont le nombre de Mach de sortie, la température génératrice de la chambre de combustion, le maillage en caractéristiques opté et le rayon du corps central.

La deuxième partie est de contribuer à l'étude et à l'évaluation physico-théorique des charges latérales induites en sur-détente dans les deux tuyères *CAN* et *MLN*. Ce type des tuyères équipent l'étage principal de lanceur dont le moteur fonctionne pendant les premiers kilomètres d'ascension, plusieurs scénarii physiques sont rencontrés : décollement de jet, choc oblique, choc quasi-droit (disque de Mach), choc oblique réfléchi, ligne de glissement, écoulement de retour, zone de mélange, interaction onde de choc / couche limite. Cette topologie d'écoulement engendre une distribution de pression différente le long des parois de la tuyère ce qui provoque des oscillations induisant des efforts mécaniques (charges latérales) stationnaires en module et en direction, capables d'endommager le divergent de la tuyère. Le concept d'allumage au sol d'une tuyère à grand rapport de sections, qui fonctionnerait en décollement de jet pendant les premiers hectomètres, reste une solution à envisager à relativement court terme. Dans la simulation il convient de quantifier les charges thermomécaniques induites par le décollement de jet et de concevoir la tuyère *CAN* de manière à ce qu'elles soient les plus faibles possibles par rapport à la tuyère *MLN*. L'interprétation des modèles de découlement sont appuyée sur l'analyse des résultats d'expériences de *CNES*, de *SNECMA* et de *ONERA*.

Organisation de la thèse

Suite à cette introduction sur les tuyères supersoniques, l'étude de la problématique envisagée est réalisée en cinq chapitres, suivis d'une conclusion générale.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique détaillée, qui présente les travaux effectués dans ce domaine. Ce chapitre est divisé en deux parties dédiées respectivement: aux écoulements supersoniques et aux méthodes de conception des divergents.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de l'approche de conception d'une tuyère à corps central (CAN) donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle, en utilisant la méthode des caractéristiques à haute température, en ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique $C_P(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ en fonction de la température. La discrétisation des équations de compatibilité et des caractéristiques est faite par la méthode des différences finies [5], [6], [9], [33] et [34], le calcul de la masse, ainsi que la force de pression exercés sur la paroi sont présentés dans les références [5], [8] et [35].

Le troisième chapitre introduit l'aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente (décollement libre, restreint et charges latérales). L'application *CFD* pour comprendre la phénoménologie des charges latérales en fonction des pressions pariétales qui se développent dans la tuyère lors du démarrage du moteur. Ainsi nous avons étudié l'influence du film pariétal sur les caractéristiques dynamiques des signaux de pression instationnaire, acquis le long du profil et à différentes positions angulaires. Les critères du choix du maillage font l'objet de cette étude ainsi que le choix du modèle de turbulence. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus par la méthode des caractéristiques.

Le quatrième chapitre est consacré en premier lieu à la modélisation des écoulements compressibles turbulents par une présentation des modèles physiques et mathématique de la mécanique des fluides à travers un rappel des équations de Navier-Stokes compressibles instantanées puis moyennées et la méthode des volumes finis qui sont à la base de la simulation numérique des écoulements turbulents dans la plus part des codes en *CFD*.

Le cinquième chapitre est divisé en deux parties :

La première partie est consacrée aux résultats obtenus par la conception de la tuyère *CAN*, en utilisant la méthode des caractéristiques à haute température. On trouvera également une comparaison entre les tuyères *CAN* et *MLN* pour montrer les améliorations en géométrie et masse de cette dernière.

La deuxième partie a pour objet de contribuer à la simulation et l'étude de l'évaluation des charges latérales aérodynamiques induites par la sur-détente et le décollement de jet dans les tuyères à l'aide d'un solveur physico-théorique (*CFD-FASTRAN*). Les résultats obtenus portent sur la simulation numérique de l'écoulement supersonique adapté et hors adaptation dans la tuyère *MLN* équipant le moteur-fusée *Vulcain-2* du lanceur Européen *Ariane-6* et notre tuyère développée *CAN*. L'élaboration des calculs *CFD* à été réalisé au niveau du *Laboratoire Mécanique et Energétique, Every val d'Essonne. Université de Paris-Saclay, France*.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale qui reprend les objectifs du présent travail, les principaux résultats obtenus et donne les principales caractéristiques des outils physico-théoriques développés. Des perspectives pour la poursuite de cette étude sont proposées.

CHAPITRE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUE

1.1. Introduction

Les tuyères supersoniques interviennent énormément dans les structures aéronautiques et aérospatiales telles que: les moteurs fusées, les missiles, les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques destinées à la modélisation des écoulements supersoniques et la réalisation expérimentale des écoulements réels. Les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leurs consommations dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère.

La poussée d'un système propulsif est dépendante en premier lieu de la quantité des produits de combustion éjectés à travers une tuyère où l'écoulement dans son passage est continuellement accéléré d'un régime subsonique à un régime supersonique à la section de sortie. L'organe tuyère constitue environ 70% de la masse de la structure.

L'optimisation d'une tuyère doit tenir compte : des matériaux utilisés, du mode de fabrication de la paroi, des exigences de refroidissement et des limites admissibles de dimensionnement, en plus du calcul de la dynamique des gaz qui nous intéressent.

1.2. Présentation d'une tuyère supersonique

Une tuyère supersonique est une conduite de forme convergente-divergente a pour rôle d'accélérer les gaz d'une vitesse faible à une vitesse sonique au col puis à une vitesse supersonique à la sortie du divergent de la tuyère.

La forme de la tuyère permet de détendre les gaz. Tout le long de la tuyère, la vitesse du gaz augmente, tandis que sa pression et sa température diminuent.

Typiquement, une tuyère est constituée de trois parties essentielles, voir (figure 1.1).

- Le convergent** : partie amont de la tuyère, son contribue à l'accélération des gaz;
- Le col** : la plus petite section qui permet d'avoir des conditions soniques ($M=1$) où la tuyère est dite amorcée.
- Le divergent** : partie aval de la tuyère. Il permet d'accélérer l'écoulement à des vitesses supersoniques selon la relation d'Hugoniot, lorsque le col est amorcé.

Cette configuration a été proposée par Gustaf de Laval vers à la fin du 19^{ème} siècle. Elle est, souvent désignée comme tuyère de « Laval » ou tuyère *CD* (Converging Diverging nozzle). Elle permet de :

- La détermination de la poussée développée par les effets créés dans chaque partie ;
- Le calcul du champ d'écoulement dans chacune des régions.

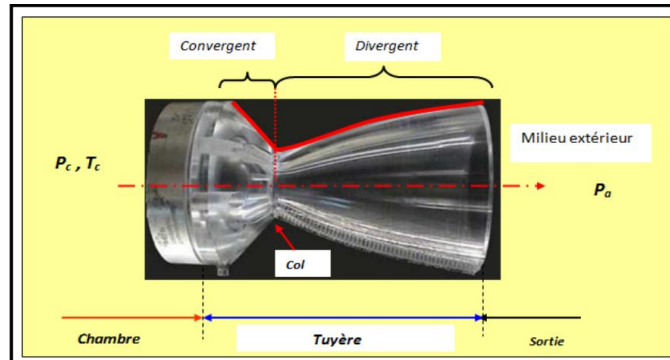


Figure 1.1 : La tuyère de-Laval [36]

1.3.Revue bibliographique sur la conception des tuyères supersoniques

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la conception des tuyères supersoniques depuis 80 ans et les études et recherches se poursuivent jusqu'à présent. Ces études sont développées en parallèle avec les problèmes rencontrés, les moyens disponibles en calcul et la capacité des chercheurs à entamer des problèmes sérieux.

S'agissant des tuyères supersoniques, le besoin pour les premières études était la conception pour des nombres de Mach supersoniques faible jusqu'à 2.0 environ et une température dans la chambre de combustion qui ne dépasse pas les 1000K, vu qu'il n'y a pas un développement convenable des matériaux réfractaires qui peuvent résister à des températures élevées supérieure à 1000K. Dans ce cas, les hypothèses pour lesquelles on a opté pour faire une telle conception sont celles d'un gaz parfait. Dans ce cas, le modèle mathématique adéquat devient assez simple. Il est basé sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats de ces études en mettant l'accent sur les points forts de ces travaux.

Le premier travail effectué pour la conception des tuyères des moteurs fusées était en 1940 par Malina [37]. L'auteur a utilisé le modèle basé sur la théorie du gaz parfait pour déterminer les caractéristiques et les performances d'un moteur fusée. Dans ce cas les équations seront considérablement simplifiées. La tuyère de cet engin a été considérée comme conique et l'écoulement considéré complètement unidirectionnel.

En 1947, Sauer [38] a développé une technique de calcul pour les écoulements supersoniques basée sur la méthode des caractéristiques précisément pour les problèmes axisymétriques. Les hypothèses utilisées sont toujours basées sur l'utilisation du gaz parfait.

Coburn et Dolph en 1949 [39], ont développé la méthode des caractéristiques pour les écoulements supersoniques tridimensionnels. Ici le calcul est limité pour les problèmes axisymétriques. Le calcul pour une forme 3-D quelconque n'a pas été encore développé. A titre d'information, la géométrie axisymétrique est considérée comme une géométrie quasi tridimensionnelle. C'est-à-dire elle représente une présentation en 3-D mais le calcul peut être considéré uniquement en 2-D.

En 1952, Ruptash [40] a appliqué la théorie du gaz parfait pour déterminer les performances des souffleries supersoniques. On peut dire que ce travail est similaire à celui de Malina [37] du point de vue performances des tuyères utilisées en aérospatiales et en souffleries. Après le développement des outils informatiques, Beckwith et al. [41] ont développé en 1952 un calcul pour les tuyères axisymétriques appliqué pour un test de géométrie carré. Le premier développement pour la recherche du contour d'une tuyère plane en vue d'optimiser les performances de Malina est réalisé par Rao en 1957 [42]. Ici l'auteur a choisi la tuyère dite coquetier c'est-à-dire un raccordement entre une petite zone circulaire et autre de redressement de forme polynomiale.

Le premier calcul utilisant la méthode des caractéristiques en écoulement supersonique 3-D pour une géométrie arbitraire a été réalisé par Rakich [43] en 1967, ensuite par Chushkin en 1968 [44] et par la suite par Ranson et al. en 1970 [45]. Les auteurs ont développés une méthode purement numérique. Notons ici que la seule méthode connue à l'époque pour le calcul des écoulements supersoniques était la méthode des caractéristiques. A cette époque, il est noté un petit développement en puissance des calculateurs numériques.

Le premier calcul utilisant la méthode des caractéristiques pour la conception des tuyères supersoniques 2-D et axisymétriques était en 1978 par Sivells [46]. La tuyère développée dans ce travail était de type coquetier et le modèle de calcul utilisé c'est-à-dire les hypothèses sont toujours basées sur un gaz parfait.

Une variété de formes des tuyères supersoniques utilisées en Aéronautique sont présentées par Sutton en 1992 [1]. On trouve dans cette référence une dizaine de formes des tuyères supersoniques à détente centrée. Plusieurs travaux sont réalisés pour ce type de tuyère citons celui de Argrow et al 1988 [47]. La géométrie utilisée dans cette étude est axisymétrique. Les auteurs dans cette étude ont fait la comparaison des performances obtenues suivant le choix de la ligne sonique de départ de calcul dans le divergent de la tuyère. Toujours dans cette étude les auteurs ont utilisés le modèle du gaz parfait malgré que les résultats obtenus sont élargis jusqu'au nombre de Mach 5.00 mais sans considération de la température de la chambre de combustion.

Des applications pour d'autres types de tuyères sont présentées par Gerald et al. [48], citons la tuyère à corps central et annulaire. La première étude de conception des tuyères 3-D de géométrie quelconque a été réalisée par Haddad et Moss [49] en 1990. La tuyère choisie dans cette référence est de type coquetier avec utilisation du modèle de gaz parfait.

Entre 1970 et 2010 presque tous les travaux sur la conception des tuyères sont basés sur l'utilisation du modèle de gaz parfait. Ce problème est considérablement simplifié. Il considère que les chaleurs spécifiques sont constantes et ne varient pas avec la température. Cette hypothèse est valable uniquement à basse température et à faible nombre de Mach.

Le modèle développé dans cette étude à une marge supersonique jusqu'à $M_s=3,00$ et des températures de la chambre de combustion allant jusqu'à 3500K inférieure au seuil de dissociation des molécules pour concevoir une tuyère supersonique de géométrie axisymétrique, appelée CAN (Cylindrical Annular Nozzle), formée par un corps central cylindrique et une paroi extérieure courbée, pour limiter et redresser l'écoulement jusqu'à la sortie de la tuyère.

Plusieurs tuyères ont été développées au fur et à mesure avec le temps. Citons une quinzaine de formes connues dans la littérature. Chacune possède des avantages et des inconvénients. Vu la simplicité du calcul, les concepteurs ont commencé avec les géométries planes jusqu'à 1970.

1.4.Types de profils

La conception finale d'une configuration de tuyère d'une fusée dépend de nombreuses considérations, on citera :

- La masse maximale et les limites de dimensions du moteur ;
- Les performances de refroidissement ;
- Les méthodes de fabrication, etc.

L'examen détaillé de tous ces aspects nécessite des connaissances dans plusieurs domaines de l'ingénierie. Toutefois, il convient de signaler que l'une des exigences les plus élémentaires dans la boucle de conception d'une tuyère de fusée est de minimiser le poids. Pour cela, il est conseillé de maîtriser la longueur et la surface de la tuyère.

Dans le cas non visqueux, les profils peuvent être classés en plusieurs types, chacun produisant son propre champ d'écoulement interne. Il est essentiel pour un concepteur de comprendre ces caractéristiques, car le champ d'écoulement interne détermine le décollement du flux et le comportement des charges latérales.

La figure 1.2 présente des exemples de contour de Mach pour différentes tuyères :

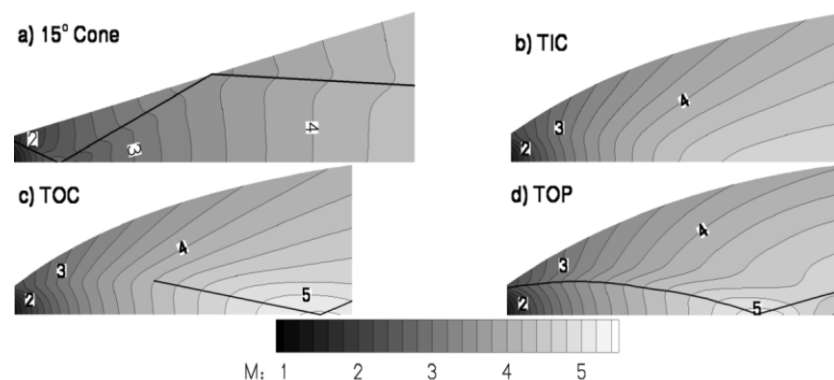


Figure 1.2 : Contour de Mach dans une tuyère conique 15°, *TIC*, *TOC* et *TOP* avec $\varepsilon = 43,4$. Les lignes en gras indiquent la position approximative du choc intérieur [15].

Le défi principal de la dynamique des gaz réside dans la forme optimale du profil qui maximise le rendement sans tenir compte : des pertes de chaleur, des réactions chimiques et des propriétés chimiques des gaz d'échappement.

La méthode la plus utilisée actuellement par les concepteurs des tuyères est celle dite des caractéristiques (*MOC* : Method Of Characteristics) qui est basée sur la résolution des équations hyperboliques d'Euler [50]. Elle permet une conception qui tient compte de certaines caractéristiques physiques spécifiées par le concepteur.

La figure 1.3 représente les composants de base d'un profil idéal, la région de Kernel est déterminée par le contour TN . Après la zone d'expansion TN , le contour NE permet à l'écoulement d'avoir une direction axiale à la sortie de la tuyère. Une fois les lignes caractéristiques NK et KE est calculées, il est possible d'utiliser la méthode des caractéristiques pour construire le champ entre N et E . (voir figure 1.3).

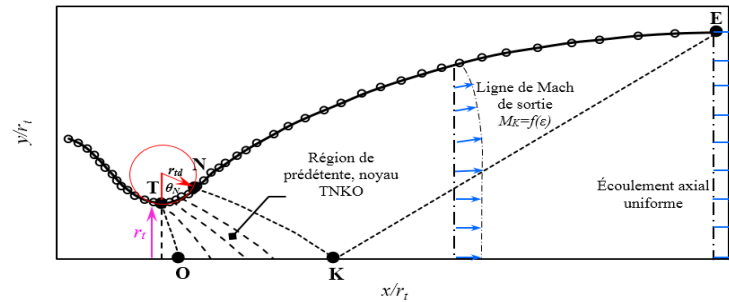


Figure 1.3 : Composants de base d'un profil idéal.

Par contre, pour les profils du col, la méthode VNAP2 développée par Cline M. C. [51] est préconisée. Elle est basée, sur une analyse d'écoulement transsonique, une ligne initiale TO , le nombre de Mach légèrement supérieur à l'unité, défini dans la région du col. Un champ d'écoulement dans la zone d'expansion $TNKO$, peut-être calculé avec la méthode des caractéristiques [52].

1.4.1. Profil conique

Le profil conique a toujours été le plus utilisé dans les moteurs fusées. La vitesse du jet en sortie de la tuyère conique est sensiblement égale à la vitesse calculée, par une approche monodimensionnelle pour le même rapport de section. Cependant, l'écoulement n'est pas axial sur toute la surface de sortie. Une perte de rendement est induite par la divergence de l'écoulement.

En considérant que l'écoulement est de forme conique à la sortie, Malina [37] a montré que le rendement géométrique est donné par la relation ci-dessous:

$$\eta_{geo} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (1.1)$$

Les figures 1.4 (a) et (b) représentent respectivement, le demi-angle du cône et la longueur du profil conique.

La longueur du profil conique est obtenue par l'équation (1.2) ci-dessous :

$$L_{a^*, cone} = \frac{r_t (\sqrt{\varepsilon} - 1) + r_{td} (\sin \alpha - 1)}{\tan \alpha} \quad (1.2)$$

ε : rapport de section ; r_t : rayon de la tuyère ; r_{td} : rayon de courbure aval.

En général, le demi-angle de cône varie entre 12° et 18° . Néanmoins, le profil conique de 15° est souvent pris comme référence comme moyen de comparaison des longueurs et des performances entre les différents profils de tuyères. Pour un rapport de section ε similaire, la longueur d'un profil galbé est souvent donnée en pourcentage comparativement à la longueur d'un profil conique de demi-angle de 15° .

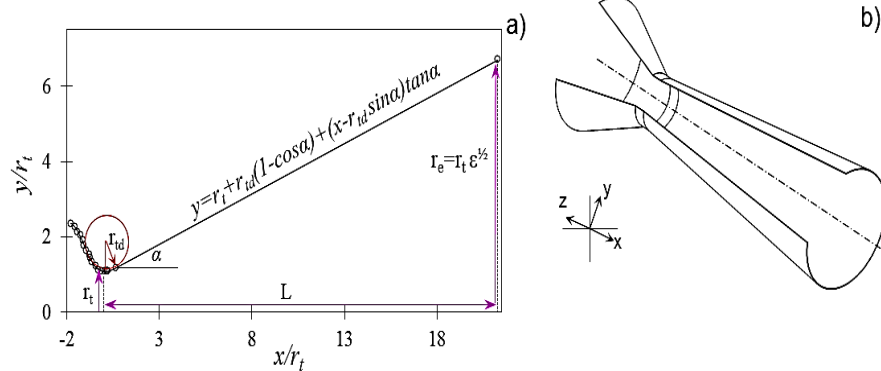


Figure 1.4 : a) Définition du profil conique, b) schéma 3-D.

A la fin des années 1930, des études exhaustives ont été effectuées par des scientifiques allemands sur différents types de profils de tuyères [53]. Ils ont tenu compte de tous les aspects de la conception et ont affirmé qu'aucun avantage significatif ne justifie l'utilisation de profils complexes. Cependant, cette affirmation n'est valable que pour des tuyères à faible rapport de sections comme celui de la fusée V-2 (figure 1.5). En raison, de fortes pertes de divergences qu'elles occasionnent.



Figure 1.5 : Tuyère conique de la fusée V-2.

Le profil conique est aujourd'hui, principalement, utilisé pour des tuyères courtes comme celles qui équipent les propulseurs à poudre et les petits propulseurs, où une fabrication simple est préférable aux performances aérodynamiques.

1.4.2. Profil idéal

Un profil idéal est celui qui produit un écoulement isentropique, un champ de vitesses uniformes à la sortie de la tuyère. Un tel profil peut être conçu en utilisant la méthode des caractéristiques. La procédure détaillée est présentée par Shapiro A.H. [50] et Zurcow M. J. & Hoffman J. D [52].

La figure 1.6 représente (12) profils avec les iso-coefficients de poussée à haute altitude, les iso-rapports de sections et les iso-coefficients de pression pariétale [15].

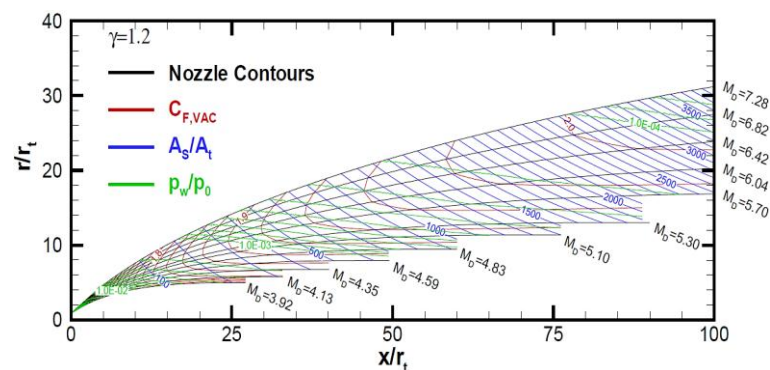


Figure 1.6 : Abaque de 12 profils idéaux avec un calcul de couche limite [15].

1.4.3. Profil idéal tronqué (TIC)

Une tuyère très longue est nécessaire pour produire un écoulement 1-D. Néanmoins, cette dernière n'est pas adaptée pour les applications aérospatiales où des limitations strictes du poids et des structures sont imposées afin d'augmenter la charge utile. En réalité, la dernière partie en aval d'une tuyère idéale ne représente qu'un très faible pourcentage de la poussée totale et sa contribution peut être négligée.

Par conséquent, en tronquant cette tuyère, on facilite son utilisation sur les moteurs fusées, sans perte significative en performances. Un tel profil est appelé : profil idéal tronqué (TIC: Truncated Ideal Contour). La troncature peut être assez loin en amont de la sortie. Tant que la zone d'expansion n'est pas tronquée, le champ d'écoulement aura une partie centrale où le profil de vitesse de sortie est axial et uniforme. Il ne sera divergent que dans la région proche de la paroi (voir figure 1.7).

Les contours de Mach dans une tuyère TIC sont représentés sur la figure 1.2(b). Ce type de profils trouve des applications sur des tuyères réelles comme : la LR-115, Viking, et la RD-0120 utilisées respectivement sur les lanceurs américains Saturne C-1, Européen Ariane-4 et Russe Energia [15].

Ahlberg et al. [54] ont développé une méthode graphique pour sélectionner les profils optimaux d'une famille de profils *TIC*. Avec cette méthode sur le même abaque, ils ont associé un ensemble de profils idéaux aux iso-coefficients de poussée, aux iso-rapports de sections, au diamètre et à la longueur (voir les figures 1.6 et 1.7). La forme du profil est calculée en utilisant la méthode des caractéristiques *MOC*.

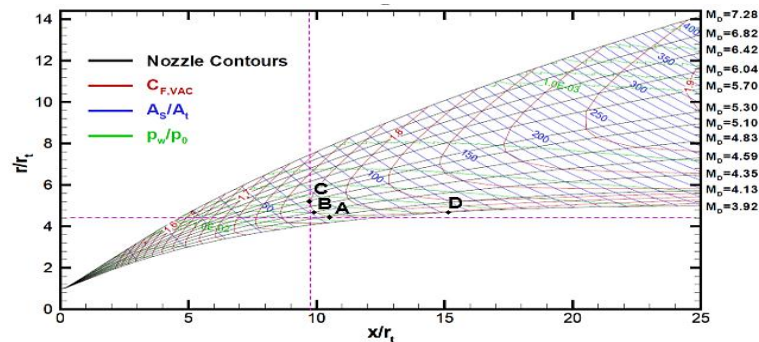


Figure 1.7 : Méthode d'Ahlberg et al. pour un profil *TIC* optimal [54].

A noter que cette méthode prend en compte le calcul du coefficient de poussée, en utilisant un code *T.D.K* (Two-Dimensional Kinetics nozzle) proposé par Frey [55].

1.4.4. Profil optimisé tronqué (*TOC*)

Guderley et al. [56] ont formulé un modèle mathématique pour déterminer la surface de sortie et la forme du profil qui produit la poussée optimale, pour des valeurs données de la longueur et de la pression ambiante. Cependant, cette approche n'a pas été largement suivie jusqu'à ce qu'une solution simplifiée soit présentée par Rao [57]. Depuis, ce profil est souvent désigné par le profil de Rao.

En Russie, Shmyglevsky Yu. D. [41] a formulé indépendamment la même méthode. L'idée de base du profil de Rao-Shmyglevsky [58] est le profil optimisé (*TOC*: Thrust-Optimized Contour) (voir figure 1.8).

Tout d'abord un écoulement dans la zone d'expansion est généré, en utilisant la méthode des caractéristiques pour une variété de θ_N (pente dans la région de col) et de R_{td} (rayon de courbure au col). Pour des paramètres de conception (nombre de Mach à la sortie et rapport de section ϵ ou la longueur de la tuyère).

Les points *P* et *N* peuvent être obtenus en satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes, à savoir :

- Débit massique à travers *PE* égal au débit massique à travers *NP* ;
- Une poussée maximale.

Dans une tuyère à profil *TOC*, le choc est formé en aval de la dernière ligne caractéristique négative C^- . Par conséquent, la pression pariétale est influencée par une pression légèrement plus élevée à la sortie dans le cas, du profil *TOP*. Cette propriété particulière du profil *TOP* s'avère très utile, pour les tuyères qui fonctionnent à basses altitudes pour retarder l'apparition du décollement de la couche limite.

Pour cette raison, les tuyères du Vulcain et de la *SSME* (Space Shuttle Main Engine, respectivement utilisées sur le lanceur européen Ariane-5 et la navette spatiale américaine [60]) sont conçues avec des profils *TOP*.

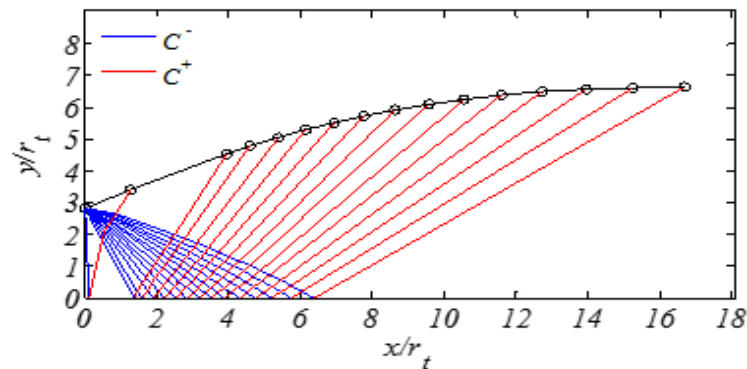


Figure 1.10 : Lignes caractéristiques C^+ et C^- dans un profil de tuyère.

Notons que la conception du profil initial de la *SSME* était un *TOC* et le changement vers le profil *TOP* a permis une augmentation de pression de 24% à la sortie de la tuyère avec une perte de 0.1% seulement du rendement par rapport à la tuyère *TOC*.

1.4.6. Profil idéal tronqué compressé (*CTIC*)

En 1966, Gogish [61] a proposé de compresser les profils *TIC* pour concevoir des tuyères extrêmement courtes. Il a suggéré qu'un tel profil idéal tronqué et compressé (*CTIC*: Compressed Truncated Ideal Contour) peut avoir de meilleures performances par rapport à un profil *TOC*.

Un profil *CTIC* est obtenu en compressant linéairement (avec un facteur C) un profil *TIC* dans la direction axiale à la longueur désirée comme (voir figure 1.11). Le profil *CTIC* a une expansion initiale rapide suivie d'une courbure plus sévère en arrière comparativement au profil *TIC*. Donc, de fortes ondes de compression sont engendrées dans le champ d'écoulement. Une compression suffisamment forte engendre la focalisation des lignes caractéristiques pour former un choc oblique.

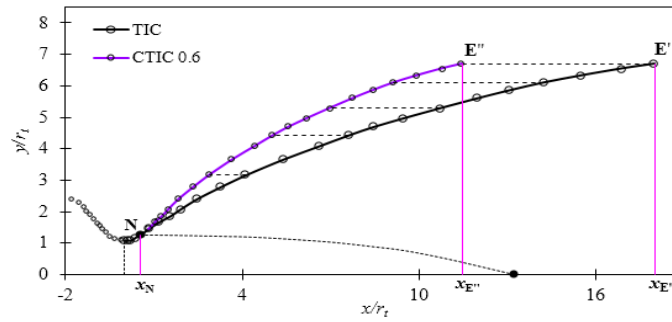


Figure 1.11 : Profil *CTIC* avec un facteur $C = \frac{x_{E''} - x_N}{x_{E'} - x_N} = 0.6$, comparé à un profil *TIC*.

La pression pariétale et la poussée augmentent, si l'onde de choc se situe près de la paroi de la tuyère. Ce mécanisme a été proposé pour la première fois par Gogish [61]. Il a suggéré qu'un profil *CTIC* peut donner de meilleures performances qu'un profil *TOC*, la proposition par Hoffman J.D. [62] souligne que le profil *TOC* donne toujours, de meilleures performances que le profil *CTIC*.

Toutefois, l'écart de performance entre les deux profils est assez réduit (de l'ordre de 0.04%) pour certains modèles. Actuellement, ce profil est utilisé sur le moteur Mitsubishi *LE-7A*, équipant le lanceur japonais *H-IIA* [60]. La figure 1.12 présente une comparaison géométrique entre les différents profils de tuyères conventionnelles.

Pour les tuyères de première phase qui fonctionnent à partir du niveau de la mer jusqu'aux hautes altitudes, le choc interne a une forte influence sur le comportement du jet et détermine le décollement ainsi que les charges latérales induites. Pour les étages supérieurs, le choix ne pose pas énormément de contraintes.

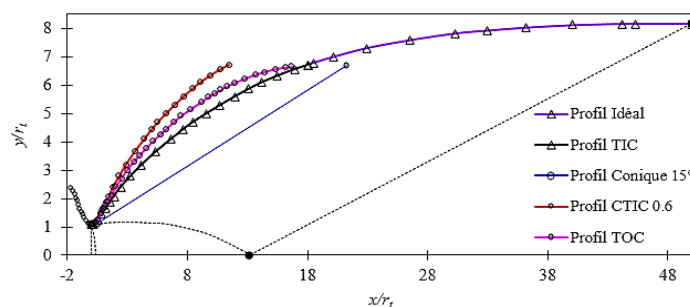


Figure 1.12 : Comparaison de différents profils conventionnels.

1.4.7. Tuyère a compensation d'altitude

Pour la plupart des recherches, les objectifs poursuivis sont la description et la caractérisation des zones de décollement, la définition de critères de conception et l'amélioration de ceux qui existent déjà afin de réaliser des tuyères capables de fonctionner au sol, en conditions de sur-détente, sans apparition de décollement de jet.

Une compilation exhaustive des critères proposés (empiriques ou semi-empiriques) a été recueillie par Stark [63]. Toutes ces études soulignent le rôle majeur joué par la pression ambiante sur l'apparition de décollement de jet. Le rapport entre le niveau de pression statique à la paroi et la pression ambiante est souvent utilisé comme un bon paramètre de corrélation pour prédire son apparition.

Toutefois, la plupart des techniques de contrôle proposées dans ces études n'ont été testées qu'en laboratoire, sur de petites surfaces. Ces conditions ne sont pas représentatives de celles que l'on rencontre dans le moteur-fusée. Les techniques de contrôle proposées apparaissent souvent inapplicables sur ces engins, car trop complexes et inappropriées à leurs conditions de fonctionnement. Nous exposerons, ci-dessous, les différentes idées proposées pour contrôler, éviter et maîtriser ou réduire les effets de décollement.

A. Tuyère à décollement contrôlé

On trouve dans cette catégorie les types de concepts suivants :

A.1 Tuyère à rugosité interne contrôlée

Ce concept prévoit la présence de secteurs angulaires à rugosité accrue sur la surface interne de la tuyère [64]. Ce dernier a pour but de limiter les charges latérales induites par la dissymétrie éventuelle de la ligne de décollement, sans toutefois, limiter ou prévenir le décollement.

A.2 Tuyère à divergent extensible

Elle est dite, aussi, tuyère à deux positions (Two-position nozzle), (voir figure 1.13). Plusieurs études numériques existent en littérature sur ce type de tuyères. Récemment, Sato et al. [65] ont mené une campagne d'essais sur une maquette à échelle réduite, afin d'évaluer les charges latérales agissant sur la partie mobile lors de déploiement en vol. Ces charges représentent une contrainte majeure pour le dimensionnement mécanique du moteur [66].

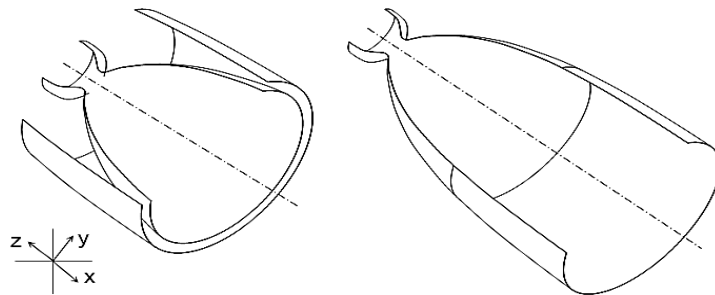


Figure 1.13 : Tuyère à divergent extensible.

L'impossibilité de vérifier au sol le dimensionnement du moteur dans des conditions représentatives du vol représente un inconvénient quant à l'utilisation de ce type de concept, sans toutefois, compromettre la fiabilité du lanceur.

B. Tuyère avec anneau déclencheur

Ce type de tuyères est divisé en deux catégories selon le mode de fonctionnement de l'anneau déclencheur. On trouve, ainsi :

B.1 Tuyère avec anneau déclencheur fixe

Pour contrôler le décollement de la couche limite, on fixe un déclencheur sur la paroi intérieure du divergent, ce qui a pour objet de perturber la couche limite et la faire décoller d'une manière symétrique dans les conditions de sur-détente, figure 1.14 (a). À très haute altitude (pression faible), l'écoulement se recolle derrière le déclencheur et la poussée se trouve ainsi supérieure en utilisant l'ensemble du rapport de section.

La transition entre les deux modes (basse altitude et haute altitude) dépend de plusieurs paramètres, notamment la taille de déclencheur [67]. Cette tuyère possède pratiquement les mêmes performances que le concept double galbe [15]. Par contre, l'existence de problèmes liés à la résistance à haute température, la fixation précise du déclencheur et la transition entre les deux modes ont affecté ses performances. Pour cette raison, l'intérêt pour ce concept a diminué depuis les années 70 [67].

B.2 Tuyère avec anneau déclencheur temporaire

Ce concept est doté d'un déclencheur (insert) temporaire pour contrôler le décollement en mode basse altitude. Ce déclencheur est supprimé en mode de fonctionnement à vide. Par conséquent, ce dernier peut-être éjectable ou ablatif respectivement [68] (voir figure 1.14(b)). Le déclencheur peut être aussi une tuyère secondaire totale ou un insert partiel fixé à l'intérieur de la paroi de la tuyère. Ce type de déclencheurs entraîne une légère perte de performances en mode basse altitude comparativement à une tuyère galbée de même rapport de sections [69].

Des essais à chaud de la tuyère à déclencheur éjectable ont démontré la faisabilité de ce concept [70]. Toutefois, il convient de souligner que ce concept est fortement dépendant d'un mécanisme fiable qui fournit un détachement brusque et symétrique de l'insert. Une éjection non symétrique entraînerait la génération de charges latérales. D'autre part, il existe un risque de collision en aval de la paroi de tuyère, car les inserts

peuvent également éprouver un mouvement transversal vers la paroi. Ces limitations des inserts éjectables ont fait penser à l'utilisation des inserts ablatifs (en combustible solide consommable) [67,71].

Au cours de l'ascension du lanceur, la taille de l'insert se réduit en continu jusqu'à sa consommation complète, ce qui donne en fin une tuyère galbée avec de meilleures performances en fonctionnement à haute altitude.

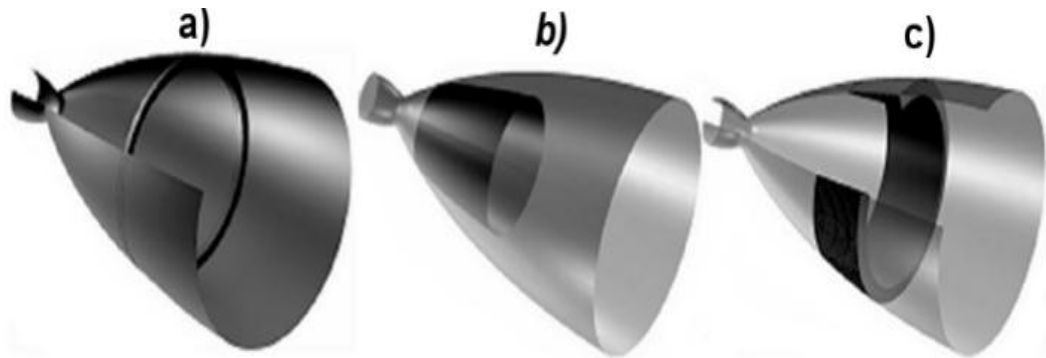


Figure 1.14 : Tuyères à anneau déclencheur, a) fixe, b) éjectable, c) ablatif [15].

Les principales incertitudes de ce concept sont le taux de consommation et la stabilité de l'insert. En outre, une consommation homogène, symétrique et bien définie en temps doit être garantie, en dépit d'éventuelles fluctuations locales de pression et de température près de la paroi de la tuyère.

C. Tuyère a injection de flux secondaire

C.1 Tuyère a injection secondaire passive

Ce concept repose sur la possibilité de contrôler la position de décollement du jet par l'injection secondaire d'un jet fluide, prélevé directement de l'atmosphère externe et introduite à l'intérieur de la tuyère par des fentes réalisées directement sur la paroi d'où l'appellation « Vented Nozzle » [15] (voir figure 1.15 (a)). En mode hautes altitudes, ces fentes se ferment, ce qui a pour effet de faire fonctionner la tuyère en régime adapté à différentes altitudes de vol et améliorer ainsi les performances globales du moteur.

Parsley et Van-Stelle [72] ont effectué des tests à chaud dans le but de caractériser les performances de ce concept. En 2007, Semenov et al. [73] réalisent une campagne de mesures expérimentales. Ces expériences ont montré que le gain sur le plan de performances reste limité (de l'ordre de 1 à 3 %). De plus, l'existence de charges latérales, et une fuite de gaz chauds vers l'extérieur en mode hautes altitudes, constituent des limitations rédhibitoires pour l'application de ce concept sur un lanceur.

C.2 Tuyère à injection secondaire active

Un gaz à pression définie est injecté dans l'écoulement principal de la tuyère, normal ou suivant un angle, à partir de la paroi. L'écoulement sur-détendu peut être, ainsi, forcé à se séparer au niveau de l'emplacement désiré (voir figure 1.15 (b)).

Sur ce concept, une expérience menée par Ward & Musical [74], montre qu'une grande quantité de gaz est requise pour induire une séparation significative de l'écoulement. En outre, aucune augmentation du rendement réalisée. Une autre alternative de ce concept a été proposée par Bonniot [75] (voir figure 1.16 (a)).

L'idée principale de ce dispositif est de réduire le niveau de pression externe au niveau de la section de sortie de la tuyère. Cela implique qu'une tuyère secondaire soit positionnée près de la sortie du divergent principal.

Ce dispositif est probablement le plus prometteur, bien que la définition proposée [75] (tuyère secondaire galbée) n'ait pas démontré une réelle efficacité : le moteur Vulcain-1 intègre en effet une des variantes proposées par l'auteur, mais sa sensibilité au décollement de jet n'est pas différente de celle des autres moteurs de même classe.

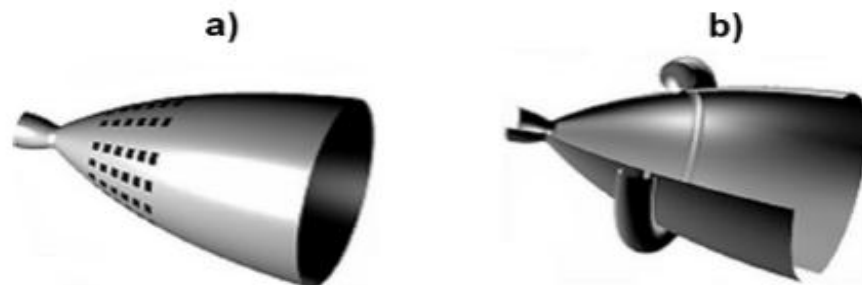


Figure 1.15 : Tuyère à injection de flux secondaire, a) Injection passive, b) Injection active [15].

Récemment, Boccaletto [76] a proposé d'installer une tuyère à corps central tronqué (Aerospike) à l'extrémité de la tuyère principale (voir figure 1.16(b)). Les expériences et les simulations numériques ont montré une potentielle amélioration de performances, néanmoins aucun résultat en fonctionnement n'est discuté.

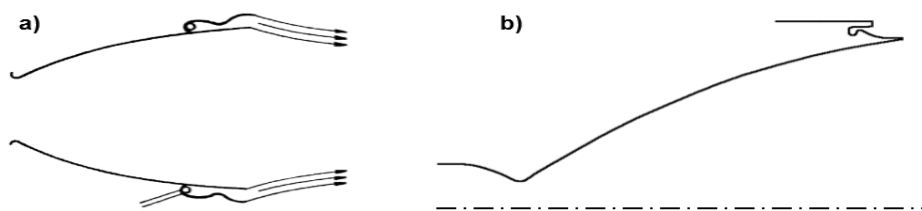


Figure 1.16 : Tuyère à injection de flux secondaire près de la sortie, tuyère secondaire a) Galbée, b) Aerospike (Boccajet).

1.4.8. Tuyère double galbes

La tuyère double galbes repose, sur le principe à forcer l'écoulement pour décoller de la paroi à l'emplacement désiré, en imposant un point d'inflexion. Ce qui a pour finalité d'augmenter la poussée du lanceur à basses altitudes.

L'inflexion du contour assure un décollement contrôlé, par conséquent, elle limite la production des fortes charges latérales connues dans les tuyères classiques. Durant la montée, le jet se dilate progressivement pour se recoller définitivement à la paroi de la tuyère, en aval du point d'inflexion (voir figure 1.17).

Une fois, que le flux est collé à la paroi et la pression de sortie de la tuyère est supérieure à la pression ambiante, le rapport de section effectif élevé obtenu engendre l'augmentation des performances pour le reste de l'ascension. Dans le cas idéal, ils font avoir deux tuyères, dont chacune est optimisée pour une partie différente de la trajectoire de vol.

Des études expérimentales ont démontré que la performance des tuyères double galbes (ACN) à deux modes, est très proche (entre 1 et 3 %) de l'efficacité optimale d'une ACN idéale, pour un rapport de section maximum donné [77].

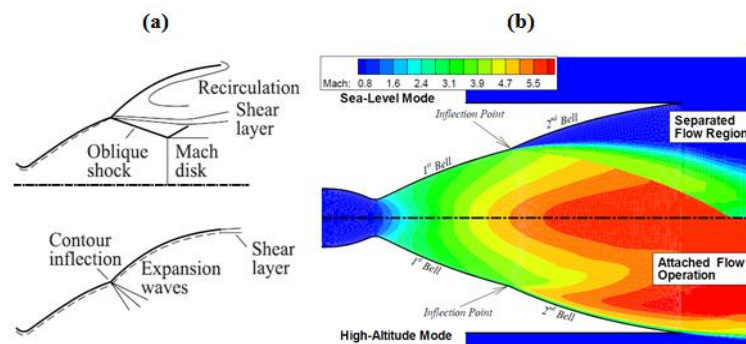


Figure 1.17: Modes de fonctionnement de la tuyère double galbes [78].

A. Le concept ACN double galbes

Foster & Cowles [79] furent les premiers en 1949 à proposer le concept d'une tuyère avec inflexion de profil. L'idée est de contourner la limitation du rapport de section des tuyères des moteurs principaux du lanceur. En effet, c'est à eux qu'il revient de supporter une large gamme de pression ambiante. Les premières études, à la fois, expérimentales et numériques de faisabilité de la tuyère double galbes ont été entreprises par Horn & Fisher [77] durant les années 1990. La tuyère double galbes offre deux modes de fonctionnement, c'est-à-dire, deux altitudes où les moteurs peuvent être optimisés.

- Le rapport de section du profil de base (Base Nozzle) offre un fonctionnement en toute sécurité à basses altitudes avec une poussée comparable à celle d'une tuyère galbée, optimisée (*TOC* : Thrust-Optimized Contour) du même rapport de section.
- Après la transition vers le mode haut altitudes, l'écoulement se recolle sur la paroi de l'extension, en utilisant l'ensemble du rapport de section pour générer une poussée supérieure à hautes altitudes.

Le gain des performances obtenu à partir de ces études dépend du moteur. Diverses hypothèses ont été proposées au sujet du comportement de l'écoulement dans la tuyère double galbe. Frey & Hagemann [80] ont prédit un gain en charge utile jusqu'à 72% sur le moteur *FSS1*. Immich & Caporicci [81] ont indiqué un gain en charge utile atteignant les 33% ou 1400kg indépendamment de l'utilisation de lanceur. Une augmentation de l'impulsion spécifique de 10s a été calculée par Miyazawa [82].

Cependant, le concept *DBN* présente certaines inefficacités qui réduisent ses performances. En effet, des pertes (de l'ordre de 3%) sont générées durant le fonctionnement en mode basses altitudes, en raison, de la traînée d'aspiration due au non-attachement de l'écoulement sur l'extension de la tuyère. En mode hautes altitudes, des pertes (de l'ordre de 0,1 à 1,2 %) dues à l'inflexion du profil [81,83].

La Figure 1.18 montre l'évolution de l'impulsion spécifique pour une tuyère double galbe comparativement avec celles d'une tuyère *TOC* et une tuyère adaptée.

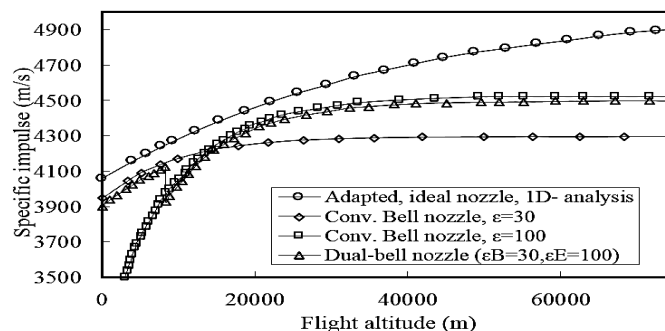


Figure 1.18: Comparaison des performances de la tuyère double galbe à celle de la tuyère galbée optimisée [83].

B. Types de concept *DBN*

Différents types, de conception, concernant l'inflexion de la paroi et l'extension de la tuyère ont été traités lors d'études analytiques et expérimentales conduite par une équipe allemande [80, 84]. Une attention particulière a été portée sur la dépendance du comportement de transition entre les deux modes de fonctionnement.

Trois types d'extensions ont été testés, à savoir: extension à pression constante, à gradient de pression favorable et à gradient de pression adverse. Un profil de contour idéal tronqué *TIC* (Truncated Ideal Contour) a été adopté pour le premier galbe (Base Nozzle), les trois autres configurations sont notées : *TICCP*, *TICNP* et *TICPP*.

La distribution de la pression pariétale de ces trois configurations est présentée dans la figure 1.19. Notons que :

- La configuration *TICNP* conduit à un décollement non contrôlé à l'intérieur de l'extension, comme on peut l'observer, dans une tuyère conique [85] ;
- Par contre, les configurations *TICCP* et *TICPP* présentent une transition plus rapide entre les deux modes : basses altitudes et hautes altitudes [80].

Cependant, des expériences antérieures sur les tuyères conventionnelles ayant un gradient de pression adverse ont révélé des problèmes de charges latérales importantes. Ainsi, la configuration *TICCP* a été choisie comme étant la plus prometteuse pour des recherches ultérieures.

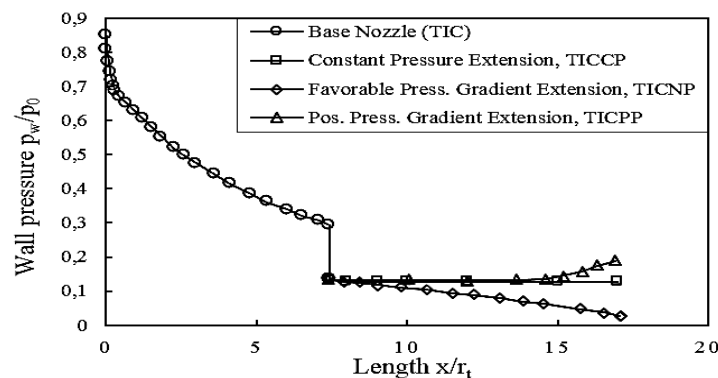


Figure 1.19: Distribution de la pression pariétale, dans les trois concepts de la tuyère double galbes [85].

Plusieurs études expérimentales, à gaz froid ainsi que des simulations numériques ont été réalisées pour étudier la configuration *TICCP* lors de ses deux modes de fonctionnement et la transition entre eux [84].

Stark & Génin [87] ont remarqué, qu'avant la transition réelle où l'écoulement se recolte brusquement sur l'ensemble de l'extension, la pression pariétale chute dans la région d'inflexion (voir figure 1.20). Plusieurs effets ont été analysés :

- L'effet de l'angle de divergence de l'extension [86-87] ;
- L'effet de la densité des gaz froids [88] ;
- L'effet de l'injection de gaz au niveau du point d'inflexion sur la transition [86].

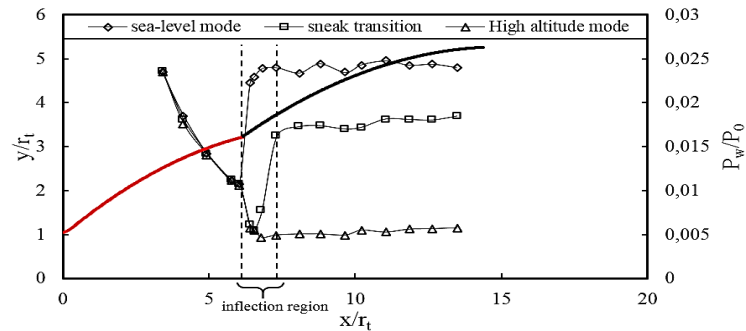


Figure 1.20 : Distribution de la pression pariétale dans une *TICCIP* en mode basse altitude, pendant la transition et en mode haute altitude [87].

Une forte perturbation a été observée, du rapport de pression de transition (*NPR*) avec une valeur plus élevée durant le démarrage, car il empêche l'interaction entre les deux modes de fonctionnement [86].

La distribution de la pression pariétale théorique et expérimentale, issue d'un calcul *CFD* [79,89] en mode hautes altitudes. En raison, des effets de la couche limite, la pression suit une pente négative et non une discontinuité comme le prévoit la théorie. Cet effet a été déjà prédit par Martelli et al. [89] (voir figure 1.21).

L'extension doit, alors, être divisée en deux parties : la région d'inflexion, où le gradient de pression est négatif et la partie résiduelle, où la pression pariétale est constante [87]. Martelli et al. relevèrent une troisième région à gradient de pression négatif située à l'extrémité de l'extension.

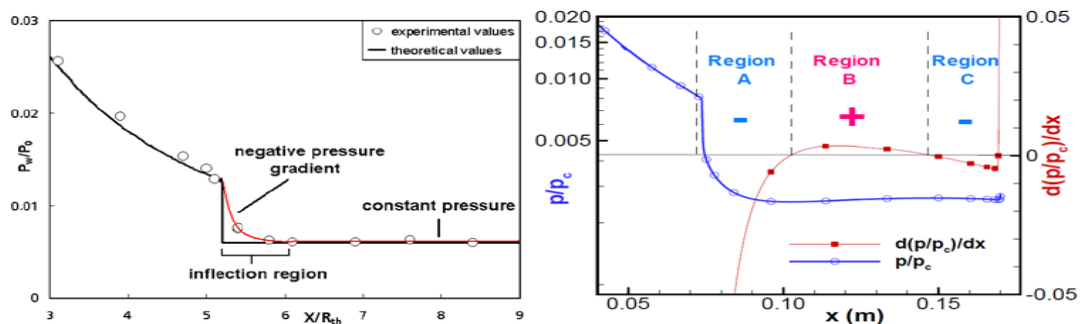


Figure 1.21 : Variation de pression dans le deuxième mode de fonctionnement de la tuyère double galbes, comparaison de l'écoulement visqueux vs non visqueux (gauche) [87], *CFD*-visqueux (droite) [90].

Cette évolution que précède la transition réelle est nommée « sneak transition ». Durant la montée, la variation de *NPR* est uniquement due à la variation de la pression ambiante par le changement d'altitude. La « sneak-transition » peut être la source de charges latérales très élevées du même ordre de grandeur que celles rencontrées lors de la phase de démarrage, figure (1.22) [87].

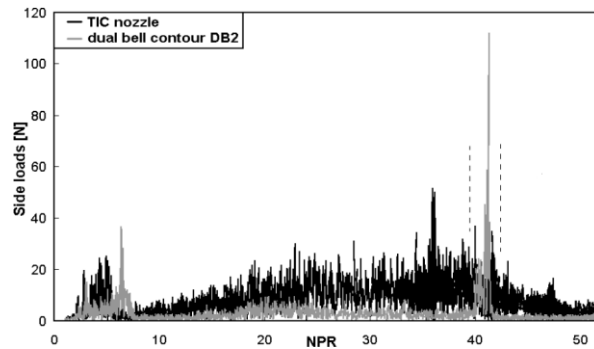


Figure 1.22: Comparaison du niveau de charge latérale entre la tuyère double galbe et la tuyère conventionnelle TIC [87].

1.4.9. Tuyère à générateurs de vortex

Dans le but de réduire les charges latérales, deux concepts sont proposés.

A. Divergent à paroi ondulée

L'idée de base de ce concept [91] est d'augmenter la résistance au décollement en générant des tourbillons à l'aide d'un contour ondulé à la sortie (voir figure 1.24(a)). Le contour ondulé permet, a priori, de freiner le mouvement latéral de la ligne de décollement par :

- L'augmentation de la traînée dans la région critique ;
- L'induction de vortex qui fixent l'écoulement circonférentiel (voir figure (1.23)).

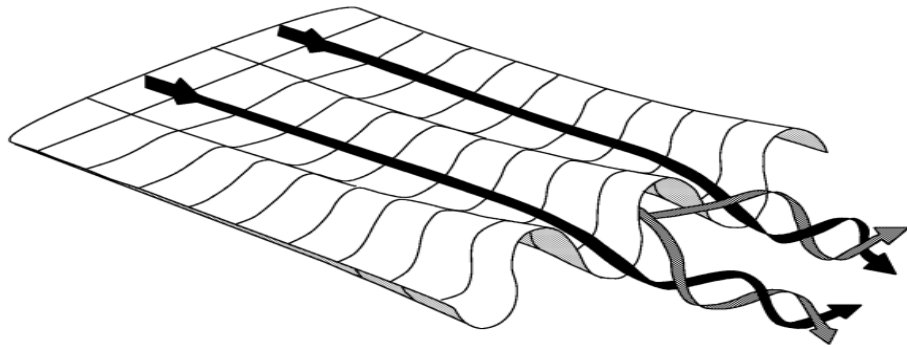


Figure 1.23 : Schéma des structures tourbillonnaires sur la surface ondulée [91].

Des essais à gaz froid, sur des modèles sous-échelle ont montré que le contour ondulé permet de réduire de manière significative et dans certains cas d'éliminer totalement, le décollement induit par le choc dans l'écoulement sur-détendu [92].

Toutefois, en raison de la contrainte pariétale sur la surface ondulée et une augmentation des pertes de sur-détente, le contrôle de décollement est réalisé au prix de pertes de performances, allant de (3,6-6,4%) par rapport, au cas totalement décollé. En outre, la complexité de la conception et de la fabrication augmentent de manière significative lors du passage d'une géométrie de révolution à une géométrie 3-D.

B. Divergent polygonal

L'idée principale est de contrôler le décollement du jet :

- Par l'introduction d'arrêtes le long du divergent ;
- En favorisant une transition progressive du col vers la sortie ;
- Le passage d'une section circulaire à une section polygonale [93] (voir figure 1.24 (b)).

Des activités expérimentales ont été menées sur ce type de concept dans le cadre du groupe de travail *FSCD* par Östlund & Bigert [94].

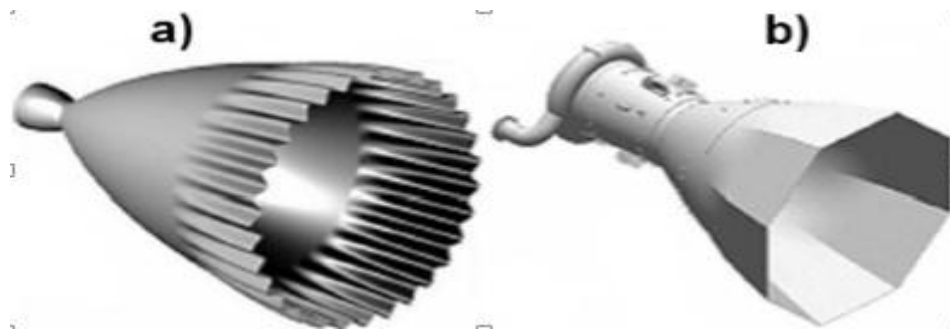


Figure 1.24 : Tuyère à générateurs de Vortex : a) Divergent à paroi ondulée, b) divergent polygonal [15].

1.4.10. Tuyère à deux modes

A. Divergent polygonal

Ce concept prévoit deux chambres de combustion complètement concentrique, (voir figure 1.25(a)). À basses altitudes, les deux chambres fonctionnent en parallèle avec un rapport de détente modéré.

En mode hautes altitudes, seule la chambre interne reste en fonctionnement. L'écoulement se recolte sur la paroi externe en donnant un rapport de détente plus élevé que le premier mode, ainsi, on obtient un gain de performances en mode hautes altitudes. Des essais ont montré la présence de décollement en mode basses altitudes [95]. Ce décollement résulte des fortes charges thermiques. En outre, la discontinuité de profil en mode hautes altitudes induit des pertes de performances de l'ordre de 0.8 - 4%, en fonction du rapport de sections du col extérieur / col intérieur [83].

B. Doubles moteurs concentriques

Ce concept prévoit deux moteurs concentriques ; le plus petit étant inclus à l'intérieur du plus grand, (voir figure 1.25(b)) [96]. Contrairement aux types cités ci-dessous, la chambre intérieure n'est pas complètement placée dans la chambre extérieure. Cette dernière est de forme annulaire à paroi intérieure indépendante.

En principe, les deux modes de fonctionnement sont comparables à ceux d'une tuyère à deux cols [83]. Des simulations numériques ont montré la présence d'ondes de compression proche de la lèvre de la tuyère intérieure, en mode basse altitude [97]. Ces ondes favorisent l'inhomogénéité de l'écoulement dans la zone de mélange commune entre la tuyère intérieure et extérieure.

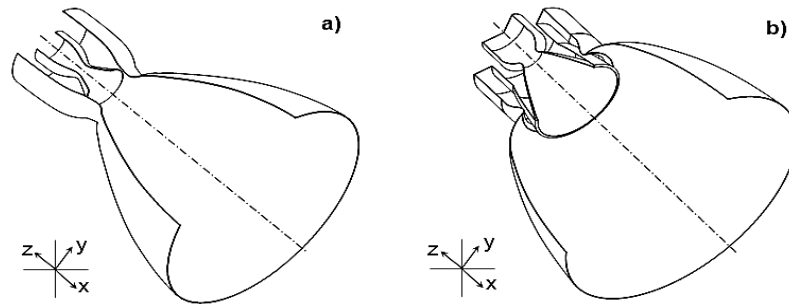


Figure 1.25 : Tuyère à deux modes de fonctionnement, a) tuyère à deux cols, b) deux moteurs concentriques.

Durant le mode haute altitude, des ondes de détente sont remarquées à la sortie de la tuyère extérieure lorsque le rapport de sections augmente soudainement et l'écoulement dirigé vers l'axe de symétrie. Proche de l'axe, un choc se produit et la pression statique augmente significativement dans la région centrale de jet. Cette augmentation de pression induit des zones de recirculation dans la tuyère intérieure. Les pertes dues à l'inhomogénéité et le choc de compression restent comparables à ceux dans les tuyères galbées (conventionnelle) [83].

1.4.11. Tuyère auto-adaptée

Dans ce type, la détente est réalisée par un écoulement interne ou externe.

A. Tuyère auto-adaptée à écoulement interne

A.1 Tuyère à injection secondaire active

Il s'agit d'un concept qui prévoit de varier le rapport de sections de la tuyère en déployant sa surface, préalablement repliée [98] (voir figure 1.26). Cela permet d'adapter la pression de sortie de la tuyère à toutes les altitudes de vol. Cette technologie nécessite un refroidissement actif de la paroi métallique.

Bien que d'un point de vue théorique, cette solution soit la plus appropriée pour éliminer le problème du décollement de jet et pour maximiser les performances de la tuyère, sa faisabilité reste complètement à démontrer. Néanmoins, des solutions technologiques similaires (tuyères à pétales superposés) ont été utilisées sur des missiles balistiques et sur certaines tuyères d'avions militaires.

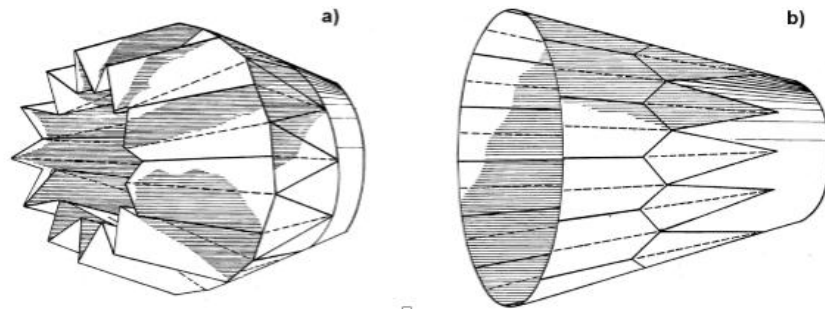


Figure 1.26 : Divergent à surface variable [98].

A.2 Col a surface variable

Ce concept (voir figure 1.27) utilise une tuyère galbée classique avec une section de sortie fixe et un pointeau mécanique situé dans la chambre de combustion et la région du col pour faire varier la surface de ce dernier.

La section du col, de forme annulaire entre le pointeau et la paroi extérieure, est variée en déplaçant axialement le pointeau. Le concept de pointeau a été utilisé dans les moteurs à propergol solide comme un moyen de fournir une poussée variable.

En principe, il permet une variation continue de la section de col et, par conséquent, des rapports de sections optimums tout au long de la mission. Cependant, il nécessite un dispositif d'actionnement et un système de commande perfectionné. Ce concept présente quelques inconvénients tels que :

- Le poids du moteur ;
- La complexité de conception ;
- Le refroidissement du pointeau et la paroi du col ;
- La fiabilité.

Les pertes de performances de ce type de tuyère sont comprises entre 1 à 2,5% par rapport à une tuyère galbée pour le même rapport de sections [98]. Ces mêmes pertes varient en fonction de la position du pointeau.

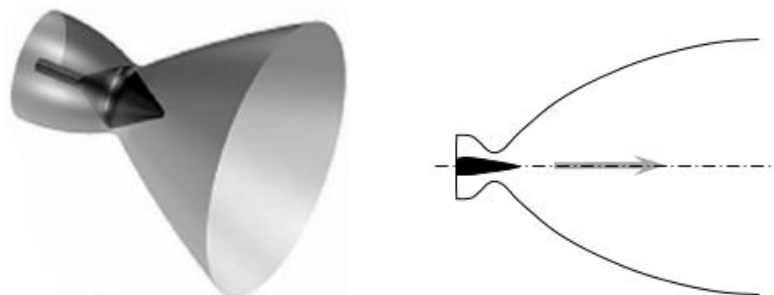


Figure 1.27 : Tuyère munie d'un col à section variable [15].

A.3 Tuyère à expansion/déflexion

Il s'agit de concept dont le but principal est la réduction de l'encombrement global du moteur (voir figure 1.28), en particulier, dans la direction longitudinale. Plusieurs variantes de ce concept sont proposées.

La plus connue est celle où la chambre de combustion et les composants du moteur se trouvent placés au milieu de la tuyère [99]. Dans ce concept, les gaz de combustion atteignent la vitesse sonique dans la zone où leur direction d'écoulement subit une forte déviation, pour être dirigée dans la tuyère supersonique, sans générer d'ondes de choc.

En effet, la focalisation d'une onde de compression sur la paroi métallique du col serait rédhibitoire pour la tenue thermomécanique de la structure.

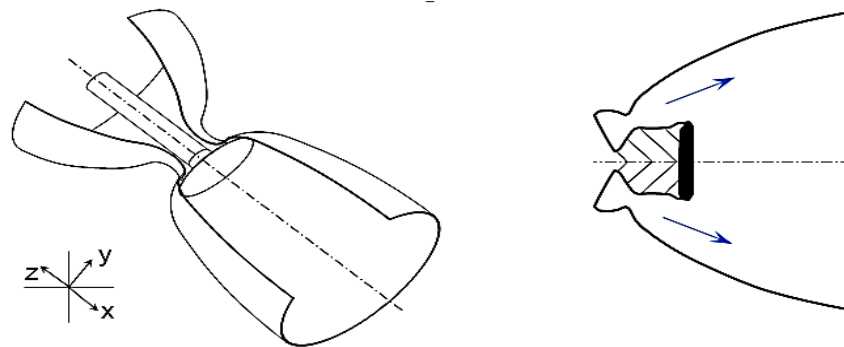


Figure 1.28 : Tuyère à expansion/déflexion.

La définition du profil de la région sonique de la chambre de combustion, ainsi que son système de refroidissement, représente les points les plus critiques pour la réalisation de ce concept. Néanmoins, un prototype a été réalisé en Russie (moteur *RD-0126E*) et des essais à feu ont été réalisés dans les années 1990, démontrant le bon fonctionnement de ce type d'engins [4]. Toutefois, ce type de tuyères est destiné à une utilisation principalement dans le vide, car elle n'apporte aucune amélioration par rapport à la problématique du décollement de jet.

B. Tuyère auto-adaptée à écoulement externe

L'auto adaptation est le fait que la frontière externe du jet s'adapte en fonction de la pression extérieure P_a . L'intérêt des tuyères à corps central (Plug Nozzle) par rapport aux tuyères classiques apparaît lors des régimes de sur-détente, par le fait, de l'adaptation de la frontière externe où le jet est canalisé à travers une section efficace A_{eff} variable selon la pression extérieure.

Une tuyère à corps central fonctionne avec un rapport de section efficace A_{eff}/A_c adaptable en fonction de l'altitude. Il en résulte une détente autocontrôlée des gaz propulsifs. Ce concept a fait l'objet de plusieurs études ces dernières années pour évaluer la géométrie optimale de l'épave, à l'instar de celle de Dunn & Coats [100]. Calabro & al., Wisse [101] et Onofri [102] qui ont évalué les performances et les limites des différentes architectures. Ce type de tuyères est divisé en trois catégories selon le mode de fonctionnement.

B.1 Tuyère à corps central idéal

Ce concept, prévoit un corps central idéal axisymétrique (full length plug nozzle) de profil conique ou galbé (voir figure 1.29). Le calcul de profil se base sur la méthode de Rao [4], en tenant en compte les effets de la cinématique et de la couche limite sur la méthode *TDK* (Two-Dimensional Kinetics) [100].

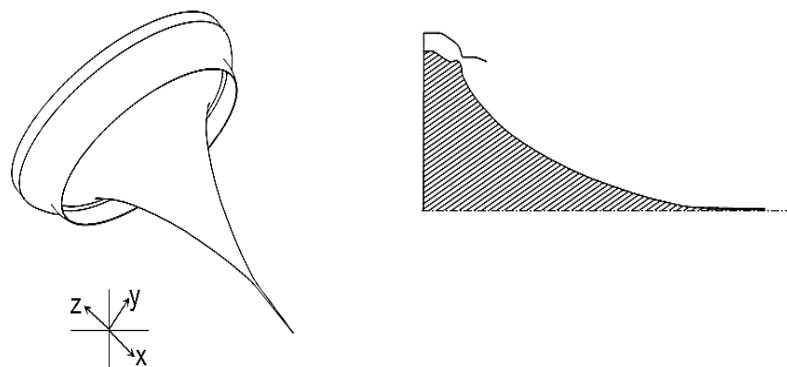


Figure 1.29 : Tuyère à corps central idéal profilé.

Par rapport, à une tuyère idéale à écoulement interne, le profil d'une épave idéale est très long et donc beaucoup très lourd par rapport à une tuyère idéale conventionnelle. Ce type de tuyère permet d'avoir de :

- Meilleures performances en mode basses altitudes ;
- Mêmes performances en mode hautes altitudes, qu'une tuyère conventionnelle (ayant même rapport de section) [78].

Néanmoins, son poids et sa longueur ne permettent pas de l'intégrer facilement sur un lanceur. En outre, elle demande un système de refroidissement de haute technologie surtout au bout de l'épave.

B.2 Tuyère à corps central tronqué

Ce concept est avantageux par rapport au précédent, vu sa masse et sa longueur considérées comme modérées. Le comportement du champ d'écoulement est différent.

En mode basses altitudes, la région du culot génère un sillage. À hautes altitudes, le sillage du culot se referme. La transition entre les deux modes génère une poussée négative, car, au moment de la fermeture du sillage, la pression au culot est légèrement inférieure à la pression atmosphérique. A basses altitudes, cette tuyère donne quasiment les mêmes performances que celle à corps central idéal. Néanmoins, à hautes altitudes, elle se caractérise par des pertes de performances dues à la traînée du culot [83] (voir figure 1.30).

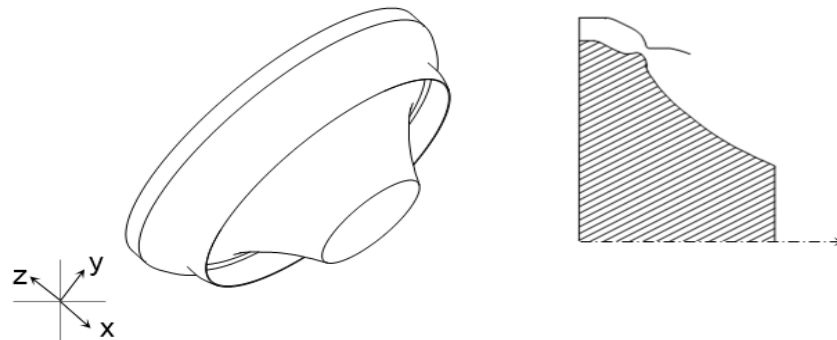


Figure 1.30 : Tuyère à corps central tronqué.

B.3 Tuyère plane à corps central tronqué

Les tuyères planes à corps central tronqué (Linear Aerospike Nozzle) ont fait l'objet de nombreuses études dans les années 1980-2010. L'exemple le plus connu est probablement le prototype *NASA XRS-2200*, testé à feu en août 2001 à la NASA's Stennis Space Center (voir figure 1.31).

Néanmoins, après la suppression du projet X-33, auquel ce moteur était destiné, les travaux ont été arrêtés. Par sa conception, ce type de tuyères permet de faire fonctionner le moteur avec un écoulement supersonique attaché, car le jet se trouve en équilibre de pression avec l'atmosphère (quelle que soit l'altitude de vol).

A hautes altitudes avec une pression faible, les performances de cette tuyère diminuent fortement. D'autre part, plusieurs difficultés doivent être surmontées pour des futures applications en vol de cette technologie. En outre, la nécessité de maîtriser le réseau de chocs généré par l'interaction du jet propulsif avec l'atmosphère et la surface métallique de l'épave durant les conditions de fonctionnement du moteur et à toutes les altitudes de vol est primordiale.

Sans oublier le besoin de refroidir correctement l'épave, en particulier son extrémité, qui impose des contraintes de conception et de fabrication difficiles à respecter.



Figure 1.31 : Tuyère plane à corps central tronqué (Linear Aerospike Nozzle).

1.5. Conception des tuyères supersoniques à haute température :

Les études sur les tuyères supersoniques en utilisant le modèle à haute température sur le dimensionnement de ces dernières, ont été principalement menées par les auteurs Zebbiche et Youbi. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats de ces études en mettant l'accent sur les points forts de ces travaux.

- L'utilisation de la forme de la tuyère obtenue sur la base du modèle d'un gaz parfait, dégrade les performances souhaitées; surtout si la température de la chambre de combustion T_0 est élevée (supérieure à $1000K$) [5, 35, 109].
- A faible température, l'écart des résultats entre les deux modèles est faible, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement à haute température en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque T_0 augmente, la théorie du gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *HT*.

L'étude montre que si on conserve la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie M_s du modèle du gaz parfait, il faut déterminer pour le modèle *HT*, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et par conséquent une autre forme de la tuyère sera obtenue. Le rapport des sections obtenu est supérieur au rapport des sections du modèle *GP*. La forme de la tuyère obtenue à γ constant est alors incluse dans la tuyère obtenue par le modèle *HT*.

$$M_s(HT) = M_s(GP) \quad (1.3)$$

$$M_s(HT) = \frac{\sqrt{2 \gamma [T_s(HT)]}}{a [T_s(HT)]} \quad (1.4)$$

Dans ce cas, le rapport des sections entre le modèle *HT* et *GP* est :

$$A_s / A^*(HT) = \exp \left(\int_{T_{s(HT)}}^{T^*} F_A(T) dT \right) > A_s / A^*(GP) \quad (1.5)$$

La deuxième situation consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle du gaz parfait pour les applications aéronautiques. Dans ce cas, cette tuyère délivre un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (1.7)). La correction du nombre de Mach pour le modèle *HT* se fait en premier lieu par la détermination de la température T_s comme solution de l'équation (1.5). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et vont influencer sur les autres paramètres de conception telle que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère.

$$A_s / A^*(HT) = A_s / A^*(GP) \quad (1.6)$$

Alors, le nombre de mach M_s entre les deux modèles est :

$$M_s(HT) < M_s(GP) \quad (1.7)$$

1.5.1. Cas bidimensionnelle

Zebbiche et Youbi ont menés une étude de conception à *HT* d'une tuyère supersonique bidimensionnelle *MLN* [31]. Ils ont ajouté l'effet de variation de C_p et de γ en fonction de la température T_0 sur la conception des tuyères supersoniques. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats :

- Effet sur la longueur (L/y^*)

La figure 1.32 montre la variation de la longueur adimensionnelle (L/y^*) de la tuyère 2-D à détente centrée en fonction du nombre de Mach de sortie M_s et en fonction de la température T_0 . On remarque toujours l'influence de la température T_0 surtout si la valeur dépasse les 1000K environ. L'étude indique l'influence du changement de la température génératrice sur les paramètres de design de la tuyère où l'erreur entre le modèle *HT* et le modèle *GP* est mise en évidence dans cette étude.

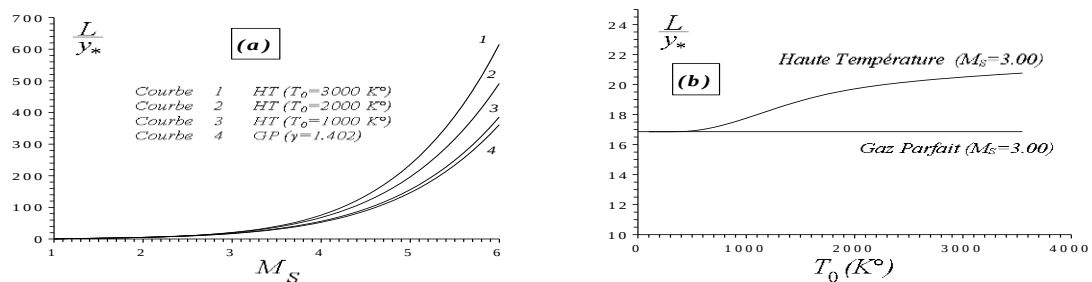
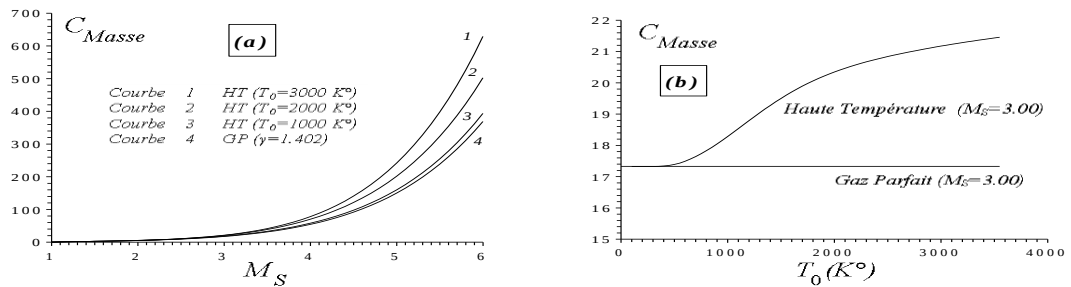


Figure 1.32 : Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée 2D [31]
 (a) : en fonction de M_s . (b) : en fonction de T_0 lorsque $M_s = 3.00$.

- Effet sur la masse (C_{Masse})

La figure 1.33(a) représente la variation de la masse adimensionnelle de la tuyère en fonction de M_S . Si $M_S < 2.50$ environ, la température T_0 ne présente presque aucune influence. De même, la figure 1.33(b) présente la variation en fonction de T_0 lorsque $M_S = 3.00$. Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. On n'a pas pris en compte le calcul de la masse des deux côtés gauche et droit de la tuyère. Ils se trouvent à l'infini (n'existe pas), vu que la tuyère est 2-D.



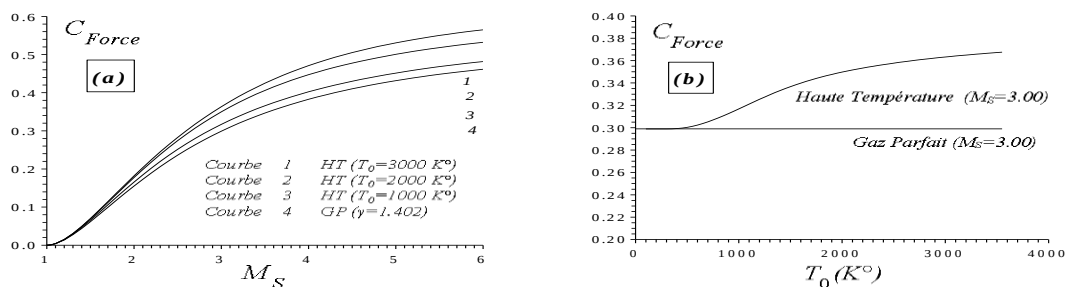
(a): en fonction de M_S .

(b) : en fonction de T_0 lorsque $M_S = 3.00$

Figure 1.33 : Variation de la masse de la tuyère MLN 2D [31]

- Effet sur la force de pression (C_{Force})

La figure 1.34(a) représente la variation de la force de pression en fonction de M_S pour différentes température T_0 , y compris le cas du gaz parfait. Le but de la figure 1.34(b) est de présenter l'effet de T_0 sur ce paramètre, si on change T_0 de la chambre de combustion sans changer le nombre de Mach M_S .



(a): en fonction de M_S .

(b) : en fonction de T_0 lorsque $M_S = 3.00$.

Figure 1.34 : Variation de C_F exercée sur la paroi de la tuyère MLN 2-D [31].

1.5.2. Cas axisymétrique

Les études de conception à haute température de la tuyère supersonique axisymétrique MLN, ont été menées par Zebbiche [110,111]. On montrera dans ce qui suit les résultats de ces travaux de recherches :

- Un maillage raffiné et bien adéquat dans les régions de Kernel et de la transition, permet de concevoir une tuyère convenablement avec une erreur minimale.

- La tuyère à détente centrée axisymétrique possède un point d'inflexion ayant un angle θ_{max} situé proche du col. Alors, l'angle de déviation de la paroi augmente de θ^* à θ_{max} ensuite diminue progressivement jusqu'à $\theta=0$ à la section de sortie.

Un autre résultat important trouvé par Zebbiche [110,111], est la représentation des courbes iso-valeurs, notamment les courbes iso-Mach et les iso-directions respectivement (voir figures 1.35(a) et 1.35(b)). On voit clairement que les courbes obtenues dans la région de transition ne sont pas des lignes de droites, vu que cette zone est de type non simple, contrairement au cas $2D$, où on a trouvé des segments de droite. La figure 1.35 démontre que l'écoulement est axisymétrique avec une sortie uniforme et parallèle.

Dans la figure 1.35(b), on remarque que les courbes coupent la paroi de la tuyère en deux points, qui démontrent l'existence d'un point d'inflexion possédant $\theta = \theta_{max}$. On remarque que quelques courbes iso-valeurs passent par le point A du col, qui démontre encore que les courbes iso-Mach possèdent un nombre de Mach $M \leq M^*$ et les courbes iso-directions possède $\theta \leq \theta^*$. Les points possédant une direction nulle sont les points du col, l'axe de symétrie et la partie uniforme triangulaire.

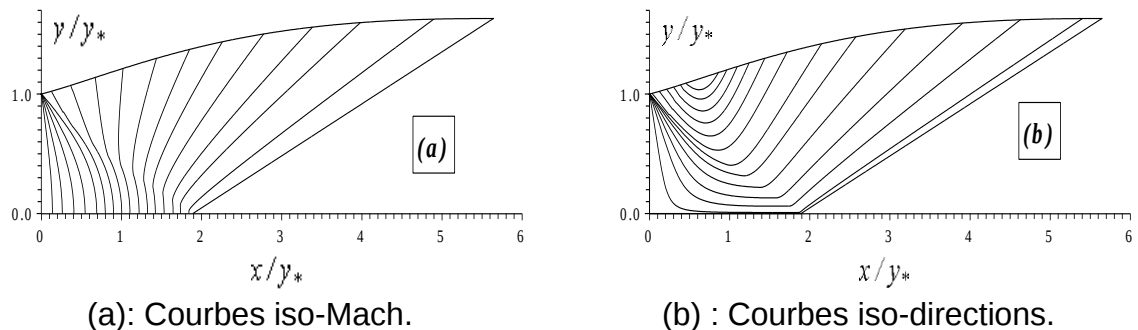


Figure 1.35 : Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée axisymétrique [111].

1.6. Position du problème par rapport à la littérature

Dans l'industrie aéronautique, l'amélioration des performances des tuyères [103], joue un rôle très important et représente un problème d'actualité. La tuyère *MLN* est très utilisée jusqu'à présent dans la majorité de la construction aéronautique, vu ces performances par rapport aux autres type de tuyères supersoniques existantes et aussi pour la simplicité de la fabrication [30, 31,32]. On s'intéresse généralement à trois principales performances qui sont le nombre de Mach de sortie M_E , la masse de la tuyère et la force de poussée. On peut aussi discuter la longueur de la tuyère et d'autres paramètres concernant la géométrie de la tuyère.

Pour une chambre propulsive d'un lanceur satellitaire, la tuyère supersonique possède la plus grande partie de l'engin qui peut arriver à 80% de la masse globale [30]. La nouvelle forme conçu sera nommée tuyère annulaire à corps central *CAN* (Cylindrical Annular Nozzle), formée par un corps central et une paroi extérieure pour redresser l'écoulement jusqu'à la sortie) (voir figure 1.36). Cette dernière est obtenue dans le but de résoudre les principaux problèmes d'amélioration des performances:

- L'augmentation de la charge utile qui est souvent un satellite spatial ou une bombe.
- L'augmentation de la quantité de carburant, afin d'augmenter l'autonomie et la portée d'un missile en qualité de temps de vol et la durée de vie de satellite.

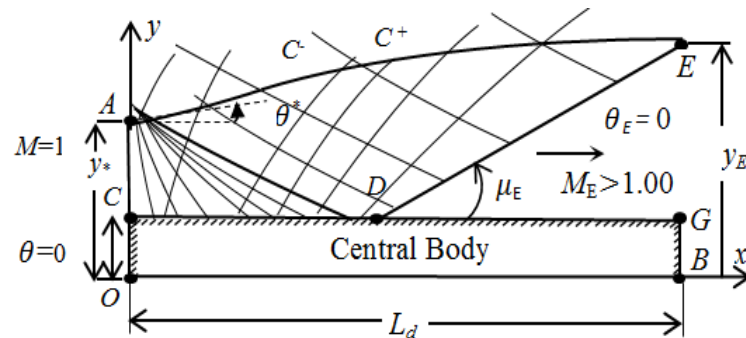


Figure 1.36 : Tuyère supersonique CAN (Cylindrical Annular Nozzle).

Vus les longueurs et poids prohibitifs des tuyères conventionnelles, les motoristes se sont penchés vers un concept d'une tuyère moderne avec un minimum de longueur *MLN* (Minimum Length Nozzle) et des meilleures performances géométriques et aérodynamiques (voir figure 1.37). Cette dernière équipe la plupart des moteur fusées actuels et futures, citons :

- Les lanceurs Atlas V [104] et Falcon 9 [105] des USA qui a été lancé en 2019 ;
- Le projet Langue Marche 11 de la Chine,
- Le projet Ariane-6 [106] et Europa de l'Union Européen qui a été lancé en 2019,
- Les projets *H-IIA* et *H-IIB* de Japon en 2019,
- Le projet *KSLV* [107] de la Corée de sud,
- Le projet Safir de la république de l'Iran,
- Le projet Shavit de l'Israël et
- Le projet Dnepr de l'Ukraine [108].
- Les projets de la république de l'India *PSLV C37* (launched in February 15th, 2017).

Pour cela, une étude comparative entre cette dernière (tuyère *MLN*) et la tuyère *CAN*, objet de mes travaux de recherches, est nécessaire pour montrer les améliorations apportées par le concept du présent travail.



RS-25-SSME engine (USA)



Vulcain 2 engine (Europe)



Vulcain engine (Europe)



RD-180 engine (Russia)



NK-33 engine (Russia)



F-1 engine (USA)

Figure 1.37 : Tuyères (MLN) de moteurs fusées [13], [15].

La méthode de conception de la tuyère CAN est basée sur la méthode des caractéristiques en axisymétrique, à haute température [83]. D'après le tableau 1.1, on remarque que la chaleur spécifique C_p et γ varie en fonction de la température. Notons ici que la théorie du gaz parfait ne tient pas compte de cette température. Les auteurs Zebbiche et Youbi ont développé un modèle mathématique à HT [5, 6, 9].

Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [7, 34, 52] sont valables sous la base de quelques hypothèses. Parmi ces hypothèses, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait, c'est-à-dire que les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes et ne dépendent pas de la température. On trouve dans la référence [7], une table contenant les valeurs de C_p et γ en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle 55K et 3500K.

Tableau 1.1 : variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ en fonction de la température de l'air [7].

T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$
55	1001,9	1,402	900	1120,4	1,344	2500	1273,8	1,291
200	1002,2	1,401	1100	1158,2	1,329	2700	1281,5	1,289
250	1002,8	1,401	1200	1173,8	1,324	2800	1285,0	1,288
300	1004,5	1,400	1300	1187,5	1,319	2900	1288,3	1,287
350	1007,9	1,398	1400	1199,6	1,315	3000	1291,5	1,286
400	1013,1	1,395	1500	1210,2	1,311	3100	1294,4	1,285
450	1020,3	1,391	1600	1219,7	1,308	3200	1297,2	1,284
500	1029,2	1,387	1700	1228,1	1,305	3300	1299,8	1,283
550	1039,4	1,381	1800	1235,7	1,303	3400	1302,3	1,283
800	1098,2	1,354	2300	1264,9	1,294			
850	1109,5	1,349	2400	1269,5	1,292			

1.7. Objectifs de l'étude

Après une recherche bibliographique, on a remarqué que la majorité des travaux publiés dans le domaine de la conception des tuyères sont basés sur l'utilisation du modèle du gaz parfait à chaleur spécifique C_p constante. Cette supposition ne tient pas compte du comportement réel du gaz lorsque la température génératrice est élevée.

L'objectif principal de la présente étude, consiste à tenir compte de l'effet de la variation de C_p et γ en fonction de la température pour concevoir une nouvelle forme des tuyères supersoniques axisymétriques à corps central (CAN), à une température inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Le calcul des performances de ces tuyères est fait, en mettant l'accent sur : le nombre de Mach de sortie, le coefficient de poussée ainsi que la masse de la tuyère. La comparaison sera faite avec les résultats concernant l'étude et la conception à haute température de la tuyère supersonique *MLN* basée sur les travaux des auteurs Zebbiche et Youbi [6].

Pour mieux comprendre la phénoménologie des charges latérales en fonction des pressions pariétales qui se développent lors du démarrage du moteur en sur-détente (décollement libre, restreint et charges latérales), une application *CFD* a été réalisée. Cette dernière contribue à l'étude et à l'évaluation physico-théorique des charges latérales dans les deux tuyères *CAN* et *MLN*. Plusieurs phénomènes physiques sont rencontrés : décollement de jet, choc oblique, disque de Mach, ligne de glissement, zone de mélange, interaction (onde de choc/ couche limite). Cette topologie d'écoulement engendre une distribution de pression différente le long des parois ce qui provoque des oscillations induisant des Charges latérales instationnaires, capables d'endommager le divergent de la tuyère

Dans cette simulation, il convient de quantifier les charges thermomécaniques induites par le décollement de jet en sur-détente qui seront plus faibles par rapport aux celles de la tuyère *MLN*. Alors que l'interprétation des modèles d'écoulement est appuyée sur l'analyse des résultats d'expériences de *CNES*, de *SNECMA* Moteurs et de *ONERA*.

Finalement, il apparaît clairement en sur-détente que :

- Les phénomènes rencontrés dans les tuyères sont multiples et très complexes ;
- Les topologies des écoulements ainsi que les répartitions de la pression à la paroi sont différentes suivant le profil et le rapport des pressions de fonctionnement. Donc, il faut s'attendre à des difficultés dans la modélisation et la simulation numérique de ces écoulements compressibles dans les tuyères supersoniques.

CHAPITRE 2

DIMENSIONNEMENT DES TUYERES ANNULAIRES AXISYMETRIQUES A HAUTE TEMPERATURE

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode de dimensionnement des tuyères annulaires à corps central axisymétriques, en utilisant la méthode des caractéristiques à haute température et en ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ en fonction de la température [5] et [6]. Cette hypothèse est valable lorsque la température génératrice de la chambre de combustion est élevée, inférieure au seuil de dissociation des molécules.

2.1. Paramètres d'un écoulement supersonique à haute température

Les résultats de conception sur la base du gaz parfait présentés dans les références [7], [34], [112] et [113] sont valables pour certaines hypothèses. Parmi celles-ci, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes et ne dépendent pas de la température, ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croît [5] et [8]. Le but est de présenter le modèle mathématique en ajoutant l'effet de variation de C_p avec la température. Dans ce cas, le gaz est nommé gaz calorifiquement imparfait ou gaz à haute température. Une table contenant les valeurs de C_p et γ en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle de $55K$ jusqu'à $3550K$ est présentée dans la référence [30]. Ici, on a fait une interpolation polynomiale aux valeurs afin de trouver une forme analytique de la fonction $C_p(T)$ [114], vu qu'il existe une relation analytique entre $C_p(T)$ et $\gamma(T)$.

Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme d'interpolation et de la substance, mais les résultats seront illustrés par le choix d'une interpolation par un polynôme du 9^{ème} degré [5]. Les relations mathématiques développées sont sous la forme d'équations algébriques non linéaires et d'intégrales de fonctions analytiques complexes, où la procédure analytique de résolution est impossible. La méthode de dichotomie est utilisée pour la résolution des équations algébriques non linéaires [5], [114] et [115] et l'algorithme de Simpson utilisé pour l'intégration des fonctions présentées dans les références [114], [115] et [5]. Les fonctions à intégrer possèdent des gradients élevés aux extrémités de l'intervalle

d'intégration. La quadrature de Simpson demande une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable. La solution de ce problème est faite par introduction d'une procédure de condensation afin de raffiner les points à l'endroit où il y a un gradient élevé [5] et [116]. Les fonctions possèdent un gradient élevé au point supersonique. La formule de condensation choisie est celle de Robert, présentée dans la référence [116]. L'application sera pour l'air dans le domaine supersonique inférieur au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ [33]. La comparaison est faite avec le modèle du gaz calorifiquement parfait à γ constant. Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle du gaz parfait, une étude sur l'erreur donnée par rapport à haute température est présentée dans l'annexe B.

2.2. méthode des caractéristiques à haute température

La solution numérique des divers problèmes qui ne peuvent pas être traités analytiquement à cause de leur complexité est réalisée grâce à l'application des lois mathématiques décrivant leur comportement physique qui s'expriment généralement par des équations différentielles aux dérivées partielles. Le principe d'une approche numérique est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème en équations algébriques. Ainsi, les solutions des équations de base d'un fluide compressible ou non dans un régime subsonique et supersonique diffèrent selon le type des régimes et on peut les partager en elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Ils sont de type elliptique pour un écoulement subsonique ($M < 1$) et de type hyperbolique pour un écoulement supersonique [7].

Pour obtenir les solutions numériques des équations non linéaires de types elliptiques et paraboliques, on utilise une méthode fondée sur les éléments finis. Par contre dans le cas où l'écoulement est supersonique, une méthode issue de la formulation caractéristique des équations hyperboliques est plus appropriée [5]. Dans l'annexe C, on va décrire quelques éléments de la méthode des caractéristiques pour un écoulement supersonique plan et axisymétrique à haute température.

2.3. Dimensionnement de la tuyère annulaire axisymétrique

La tuyère supersonique tridimensionnelle est conçue à partir de la tuyère axisymétrique. C'est pourquoi on est obligé de décrire en premier lieu la méthode de design d'une tuyère axisymétrique. La figure 2.1 représente les différentes géométries

de tuyères supersoniques ayant un écoulement horizontal au col et à la section de sortie. Les cas (a) et (b) sont respectivement de géométries bidimensionnelles [31, 109,117] et axisymétriques [47, 110, 111, 117].

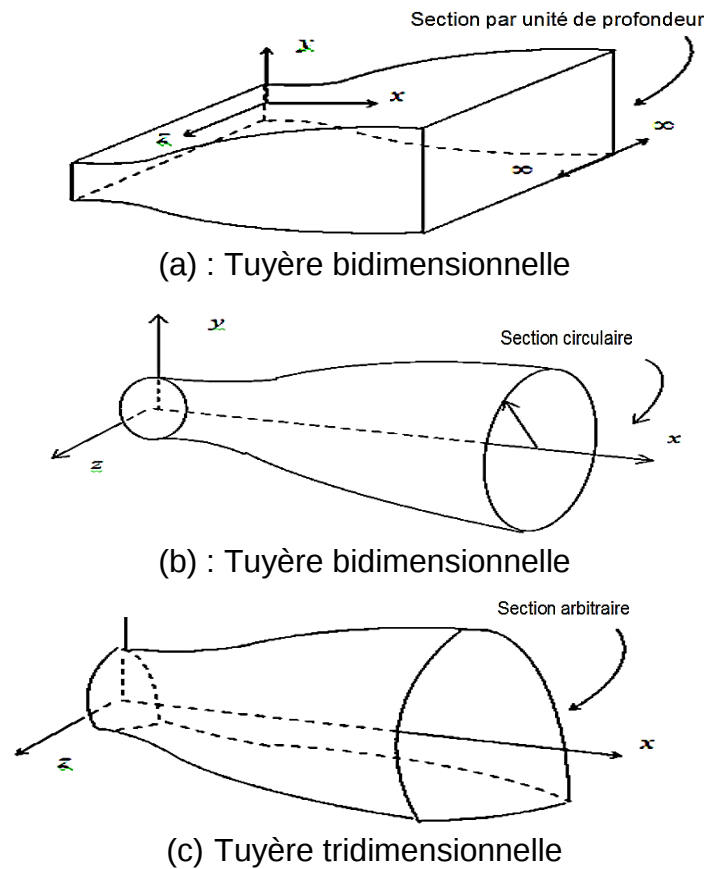
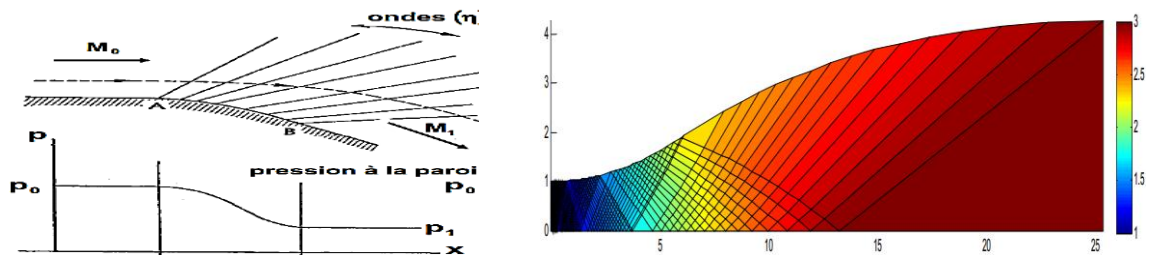


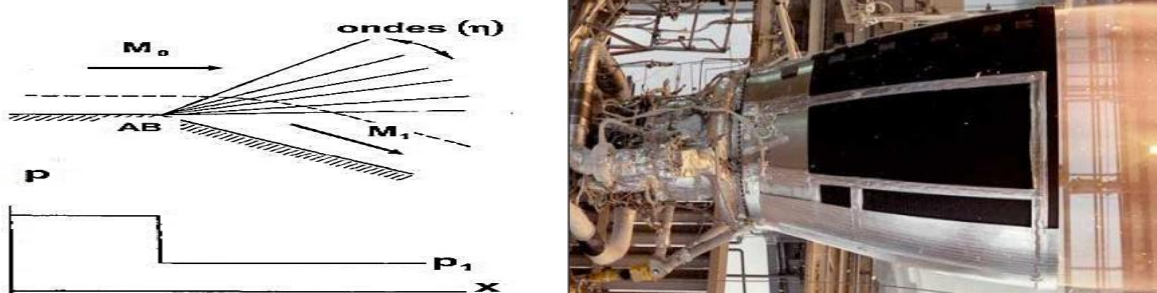
Figure.2.1. Les différentes géométries des tuyères.

Le but de ce travail consiste à concevoir un nouveau concept de tuyère axisymétrique annulaire par l'intermédiaire d'un solveur numérique basé sur la méthode des caractéristiques à haute température, inférieure au seuil de dissociation des molécules, afin d'améliorer les performances aérodynamiques, soit par l'augmentation de nombre de Mach de sortie, la diminution de la masse de la tuyère ou bien par l'augmentation du coefficient de poussée par rapport à la tuyère à détente centrée (*MLN*), en tenant la même section du col entre notre tuyère *CAN* et la tuyère *MLN*. Cette dernière donne une longueur minimale par rapport aux autres types existants. Il existe deux catégories pour ce type de tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées (voir figure 2.2 (b)). La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée; dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées (étalées) (voir figure 2.2 (a)). Ce type de tuyère est nommé tuyère de longueur minimale avec ligne

sonique courbée. Les tuyères de longueur minimale plane et axisymétrique sur la base de ligne sonique droite sont présentées dans les références [7], [33] [117] et [118]. La référence [34] traite l'analyse complète de la tuyère *MLN* plane avec ligne sonique courbée. Les références [33], [34] présentent l'analyse de la tuyère *MLN* axisymétrique avec ligne sonique courbée. Généralement l'application de la ligne sonique droite est utilisée pour les moteurs fusées [30, 42].



(a) Onde progressive de détente étalée : (gradual expansion for Wind tunnel diffuser)



(b) faisceau d'ondes de détente centrées : (Rocket Nozzle (Minimum Length))

Figure 2.2 : Types d'ondes de détente

La figure 2.3 illustre le schéma général d'une tuyère *CAN* et lignes caractéristiques du champ d'écoulement dans les différentes régions.

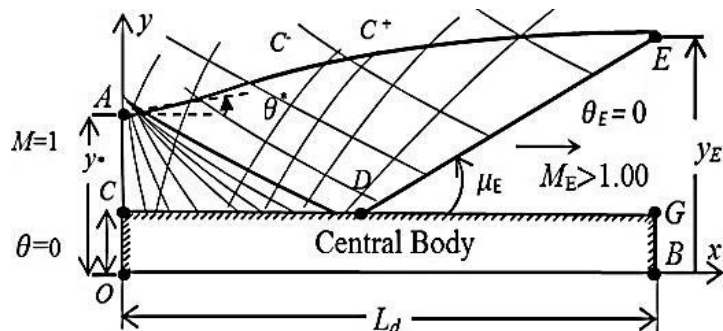


Figure 2.3 : Champ de l'écoulement dans la tuyère à corps central.

La figure 2.4 montre le champ d'écoulement dans cette tuyère. L'écoulement entre le col *CA* et la région uniforme *DEG* est divisé en deux régions. La région *CAD*, appelée par région de Kernel, est une région d'ondes non simples *ADE*. La région triangulaire *DEG* est une région d'écoulement uniforme au nombre de Mach de sortie M_S .

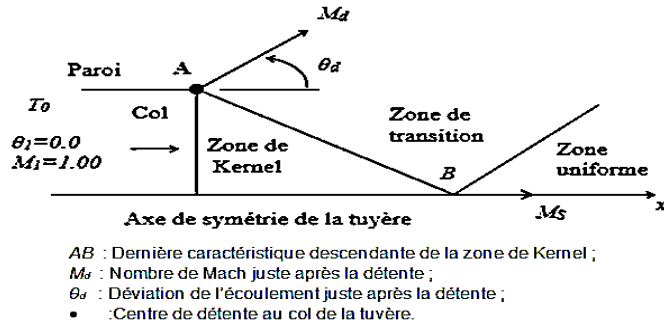


Figure 2.4 : Champ d'écoulement dans une tuyère à détente centrée [111].

Les travaux discutés auparavant sont réalisés par l'hypothèse d'un gaz parfait. Ces travaux sont limités pour des faibles températures, pour lesquelles on peut aller jusqu'à $1000K^\circ$ environ, pour des nombres de Mach qui ne dépassent pas $M_S=2.0$. Dans le cas réel, la chaleur spécifique C_P et le rapport γ varient en fonction de la température. Le but de ce chapitre est d'ajouter l'effet de la variation de la température sur une nouvelle conception d'une tuyère supersonique annulaire à corps central.

Les auteurs Zebbiche et Youbi [5, 31,32, 119] ont reconsidéré le problème avec une autre approche où le gaz à haute température n'est plus entièrement parfait. Ceci conduit par la suite à faire une correction notable sur la conception des profils des tuyères supersoniques. Surtout au-delà d'une température génératrice de $1000K$, à partir de laquelle, les chaleurs spécifiques à pression constante C_P et à volume constant C_V varient considérablement avec la température. Les nouvelles relations sur des rapports thermodynamiques à haute température sont présentées dans l'annexe B.

2.4. Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel et adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [111, 119]:

Suivant ξ (1–3) :

$$\begin{cases} d(v + \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \end{cases} \quad (2.1)$$

Suivant η (2–3) :

$$\begin{cases} d(v - \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les équations (2.1) et (2.2) sont valables respectivement sur les caractéristiques C^- et C^+ comme le montre la figure 2.5. Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbées, si le maillage est bien raffiné on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommées ξ sur la caractéristique C^- et par η sur la caractéristique C^+ .

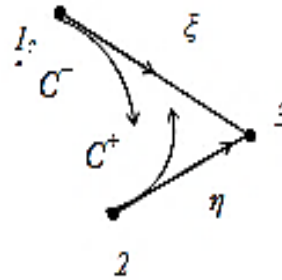


Figure 2.5 : Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach.

Les relations dans le système présenté par les équations (2.1) et (2.2) sont données pour le modèle du gaz à haute température par [5, 109, 113, 119] :

$$dv = F_v(T) = - \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT \quad (2.3)$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (2.4)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T)rT} \quad (2.5)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.6)$$

Sous les équations (2.1) et (2.2), θ représente l'angle de déviation de la vitesse de l'écoulement par rapport à l'horizontal est [7] :

$$\mu = \arcsin(1/M) \quad (2.7)$$

On peut exprimer les directions ξ et η des caractéristiques en fonction des coordonnées cartésiennes x et y par la relation suivante [7, 52, 118]:

$$\begin{cases} d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \\ d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Remplaçant les relations de l'équation (2.8) ainsi que la relation (2.3) dans le système (2.1) et (2.2) on obtient :

Suivant ξ (1-3):

$$\begin{cases} \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT + d\theta = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \cos(\theta - \mu)} \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \end{cases} \quad (2.9)$$

Suivant η (2-3):

$$\begin{cases} \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT + d\theta = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \cos(\theta + \mu)} \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles qui dépend de quatre inconnues (x, y, T, θ).

Comme on la mentionné, les caractéristiques C^+ et C^- sont des courbes, l'application de la méthode des caractéristiques oblige à introduire un maillage bien raffiné, afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de lignes droites. Les propriétés (x, y, T, θ, ρ, P) en un point de champ d'écoulement, peuvent être déterminées à partir de celles des deux points reliés par les lignes caractéristiques précédentes. Par exemple, les propriétés au point 3 de la figure 2.5 peuvent être déterminées à partir de celles 1 et 2 qui les relient. On approche dans ce cas la variation des paramètres y, θ et T le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3, par les expressions suivantes [10,111, 119] :

$$\theta_{13} + C_\theta + \theta_1 + (1 - C_\theta) \theta_3 \qquad \theta_{23} + C_\theta + \theta_2 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad (2.11)$$

$$T_{13} + C_T T_1 + (1 - C_T) T_3 \qquad T_{23} + C_T T_2 + (1 - C_T) T_3 \quad (2.12)$$

$$y_{13} + C_y y_1 + (1 - C_y) y_3 \qquad y_{23} + C_y y_2 + (1 - C_y) y_3 \quad (2.13)$$

C_y, C_θ et C_T sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres.

2.4.1. Equation et procédure pour un point interne

Un point interne est situé dans le champ de l'écoulement supersonique, on prend l'exemple de point 3 (voir figure 2.6). Ce point est lié aux deux points 1 et 2 par des lignes de Mach ξ et η respectivement. Les propriétés (x, y, T, θ) aux points 1 et 2 sont connues et le problème revient à déterminer ces propriétés au point 3 [111, 119].

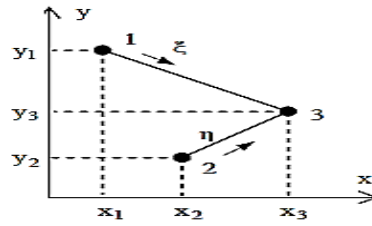


Figure 2.6 : Nœud interne quelconque.

L'intégration des équations (2.9) et (2.10) donne :

Suivant ξ (1–3):

$$\begin{cases} A_{13}(T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1) \\ y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \end{cases} \quad (2.14)$$

Suivant η (2–3):

$$\begin{cases} A_{13}(T_3 - T_2) + (\theta_3 - \theta_2) = B_{23}(y_3 - y_2) \\ y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

$$A_{13} = -\frac{C_P(T_{13})}{2H(T_{13})}\sqrt{M_{13}^2 - 1} \quad A_{23} = -\frac{C_P(T_{23})}{2H(T_{23})}\sqrt{M_{23}^2 - 1} \quad (2.16)$$

$$B_{13} = -\frac{\sin(T_{13})\sin(\mu_{13})}{y_{13}\cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad B_{23} = -\frac{\sin(\theta_{23})\sin(\mu_{23})}{y_{13}\cos(\theta_{23} - \mu_{23})} \quad (2.17)$$

$$C_{13} = \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad C_{23} = \operatorname{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}) \quad (2.18)$$

$$\mu_{13} = \arcsin(1/M_{13}) \quad \mu_{23} = \arcsin(1/M_{23}) \quad (2.19)$$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2H(T_{13})}}{a_{13}} \quad M_{23} = \frac{\sqrt{2H(T_{23})}}{a_{23}} \quad (2.20)$$

$$a_{13} = \sqrt{\gamma_{13} r T_{13}} \quad a_{23} = \sqrt{\gamma_{23} r T_{23}} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{13} = \frac{C_P(T_{13})}{C_P(T_{13}) - r} \quad \gamma_{23} = \frac{C_P(T_{23})}{C_P(T_{23}) - r} \quad (2.22)$$

Les équations (2.14) et (2.15) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à quatre inconnues (x_3 , y_3 , T_3 , θ_3). L'algorithme par itérations successives s'écrit [31, 110, 111, 120] :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \\ y_3 = E_1 + C_{13}x_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$T_{13} = \frac{D_1 + D_2 + [B_{23}y_3 + B_{13}x_3]}{A_{13} + A_{23}} \quad (2.24)$$

$$\theta_3 = D_1 + B_{13}x_3 + A_{13}T_3 \quad (2.25)$$

Avec:

$$E_1 = y_3 - C_{13}x_1 \quad E_2 = y_2 - C_{23}x_2 \quad (2.26)$$

$$D_1 = \theta_1 + A_{23}T_1 - B_{13}x_1 \quad D_2 = -\theta_2 + B_{23}y_1 - A_{13}T_2 \quad (2.27)$$

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration de prédicteur correcteur par la méthode des différences finies [34, 47, 117, 118, 120, 121]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de y_{i3} , T_{i3} et θ_{i3} ($i=1, 2$) à l'itération, $K=0$, sont données par:

$$T_{13} = T_1 \quad \theta_{13} = \theta_1 \quad y_{13} = y_1 \quad (2.28)$$

$$T_{23} = T_2 \quad \theta_{23} = \theta_2 \quad y_{23} = y_2 \quad (2.29)$$

Substituons les expressions (2.28) et (2.29) dans les relations (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) et (2.22) ainsi que dans les relations (2.26) et (2.27), ensuite remplaçons les résultats obtenus dans les relations (2.32), (2.33), (2.34) et (2.35) pour obtenir les valeurs prédictives des paramètres ($x_3^0, y_3^0, T_3^0, \theta_3^0$) au point 3.

Pour l'algorithme du correcteur d'Euler, les valeurs des relations (2.11), (2.12) et (2.13) sont utilisées et substituées dans les équations (2.23), (2.24) et (2.25) pour obtenir les nouveaux paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont ($x_3^1, y_3^1, T_3^1, \theta_3^1$)

L'algorithme du correcteur d'Euler sera répété jusqu'à l'obtention de la précision ε . Pour K itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence [9] :

$$Max \left[\left| y_3^K - y_3^{K-1} \right|, \left| \theta_3^K - \theta_3^{K-1} \right|, \left| T_3^K - T_3^{K-1} \right| \right] < \varepsilon \quad (2.30)$$

La variable x converge automatiquement avec la convergence de la condition (2.30).

2.4.2. Procédure pour un nœud interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure 2.7 lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie [10, 110, 111].

L'utilisation de l'algorithme du point interne en axisymétrie pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme B_{23} dans la relation (2.17) est indéterminé pour la valeur prédictive, puisque, au point 2 on a $y_2=0, \theta_2=0$.

Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie, on peut rapprocher le numérateur du terme B_{23} par $\sin(\theta_{23}) = \sin(\theta_3) \approx \theta_3$ et le dénominateur par $\sin(\theta_{23} + \mu_{23}) \approx \sin(\mu_{23})$. Le terme B_{23} se simplifie à:

$$B_{23} \approx \frac{\theta_3}{y_3} \quad (2.31)$$

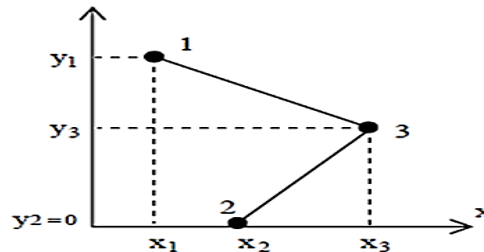


Figure 2.7 : Nœud interne particulier.

L'équation (2.15) ne reste plus valable, et sera remplacée par:

$$A_{23} (T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (2.32)$$

Alors, la résolution de l'équation (2.31) par rapport à θ_3 donne:

$$\theta_3 = \frac{A_{23} T_3 - A_{23} T_2 + \theta_2}{2} \quad (2.33)$$

Remplaçons l'équation (2.33) dans (2.17) et résolvons l'équation obtenue par rapport à T_3 on obtient:

$$T_3 = \frac{2 [D_1 + B_{13} x_3] + A_{23} T_2}{2 A_{13} + A_{23}} \quad (2.34)$$

Comme résultat, l'équation (2.29) sera remplacée par l'équation (2.14). Donc pour déterminer les propriétés (x_3 , y_3 , T_3 , θ_3) de ce type de point particulier, on utilise les équations (2.23), (2.24) et (2.40).

2.2.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure 2.8, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Donc, le point 2 au-dessous de cet axe est l'image du point 1. Comme résultat, le point 3 est par analogie un point interne.

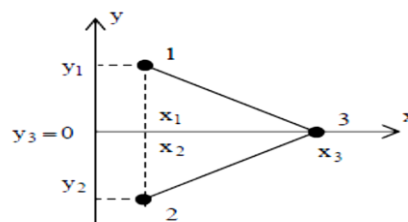


Figure 2.8 : Nœud sur l'axe de symétrie.

La procédure de calcul est la même que celle utilisée précédemment pour un point interne sauf que dans le cas actuel $y_3 = v_3 = \theta_3 = 0$. On ne tient compte que de la caractéristique C^- , représentée par le segment de droite 1–3. Les inconnues x_3 , T_3 sont respectivement obtenues par la résolution du système (2.14). On obtient :

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}} \quad (2.35)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{B_{13} (x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}} \quad (2.36)$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par:

$$x_2 = x_1 \quad ; \quad y_2 = -y_1 \quad ; \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad ; \quad T_2 = T_1 \quad (2.37)$$

2.5. Calcul des paramètres thermodynamiques

Une fois qu'on a déterminé les propriétés (x , y , T et θ) en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer le nombre de Mach M_3 en remplaçant la température $T = T_3$ dans la relation (2.4). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes du vecteur de vitesse peuvent être déterminés respectivement par les relations suivantes [10, 110, 111] :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 = \exp \left(- \int_{T_3}^{T_0} \frac{C_P(T)}{a^2(T)} dT \right) \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{P}{P_0} \right)_3 = \left(\frac{T}{T_0} \right)_3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)_3 = \frac{a(T_3)}{a(T_0)} = \left(\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \right)^{1/2} \left(\frac{T_3}{T_0} \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

$$\left[\frac{V}{a_0} \right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0} \right]^{1/2} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} \left[\frac{u}{a_0} \right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0} \right]^{1/2} \cos(\theta_3) \\ \left[\frac{v}{a_0} \right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0} \right]^{1/2} \sin(\theta_3) \end{cases} \quad (2.42)$$

2.6. Procédure de calcul dans la tuyère

Le calcul de l'écoulement dans la tuyère est divisé en deux régions nommées respectivement : région de Kernel et région de transition.

2.6.1. Région de Kernel

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel commence au point A avec plusieurs manières de conception. La première possibilité consiste à dimensionner la tuyère sur la base de l'angle de détente θ_d . La deuxième possibilité est que la conception se fera sur la base du nombre de Mach de sortie M_S [10].

- Si la conception se fait sur la base de l'angle de détente θ_d , le calcul numérique nous oblige à discrétiser la zone de détente de l'écoulement $0 \leq \theta \leq \theta_d$ en un nombre fini de points. Au total, on obtient $(N+1)$ C^- , et entre caractéristiques successives, on a :

$$\Delta\theta = \Delta\nu = \frac{\theta^*}{N} \quad (2.43)$$

- Si la conception se fait sur la base du nombre de Mach M_S , le calcul nous oblige d'avoir un pas petit, alors :

$$\Delta\theta = \Delta\nu = \text{donné} \quad (2.44)$$

Les relations (2.43) et (2.44) donnent un maillage uniforme pour les caractéristiques C de la fin de la région de Kernel avec un espace large, mais pour les premières C^- juste après le col, donnent un maillage non uniforme. Ainsi le contour de la paroi juste après le col est mal présenté. Pour corriger ce problème, on opte dans notre étude pour un raffinement du maillage par insertion des C^- supplémentaires entre la ligne sonique et la 1^{ère} caractéristique insérée en introduisant la condensation suivante [5, 10,47].

$$\nu_i = \left(\frac{i}{N_i} \right)^\Delta \Delta\nu \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N_i \quad (2.45)$$

N_i : Nombre des caractéristiques C^- insérées entre le col et la 1^{ère} C^-

Δ : Nombre réel supérieur à 1

La procédure de calcul dans la région de Kernel est représentée par la figure 2.9. En premier lieu on détermine les propriétés au point 1 de la figure 2.9(a). En ce point, on a $x_1 = 0$, $y_1 = y_A = y_d = 1$ et $\theta_1 = \nu_1$. La température T_1 doit être déterminée en résolvant l'équation suivante [10,110, 111]:

$$\theta_1 = \int_{T_1}^{T_*} F_v(T) dT \quad (2.46)$$

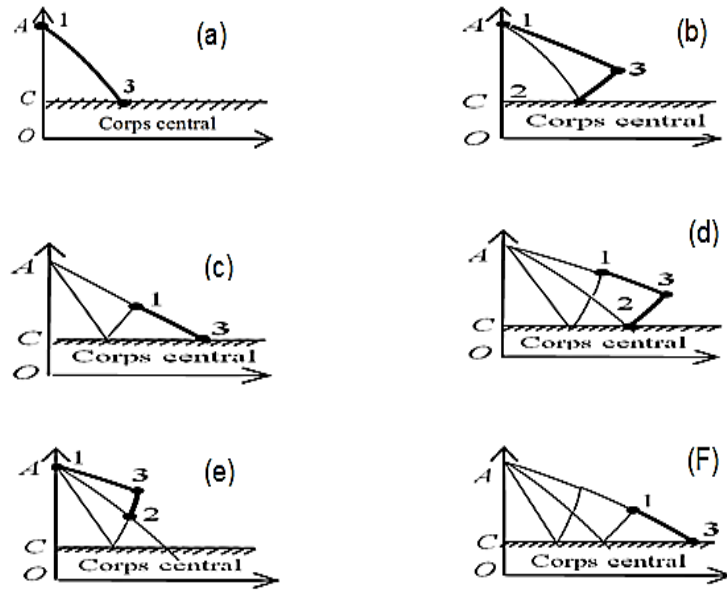


Figure 2.9 : Processus de calcul des caractéristiques dans la région de Kernel.

On procède ensuite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.9(a) en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Maintenant, la première caractéristique est calculée. On passe à la deuxième C^- et le calcul commence par la détermination des propriétés au point 1 de la figure 2.9(b). En ce point on a toujours $x_1/y_* = 0$, $y_1/y_* = 1$, mais $\theta_1 = v_2$ ou $\theta_1 = 2\Delta\theta$ suivant que le maillage soit avec ou sans procédure de condensation. La détermination de la température T_1 se fait toujours par la résolution de l'équation (2.46) avec la nouvelle valeur de θ_1 . On passe par la suite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.9(b). Nous finissons le calcul sur cette C^- par la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.9(c) en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie.

Une fois arrivé au point de l'axe de symétrie, la caractéristique descendante concernée est complètement calculée. On passe à la troisième C^- . Chaque caractéristique à partir de la troisième, contient 4 types de points. Le premier, c'est le point 1 superposé avec le point A. Un point 3 sur l'axe de symétrie comme le montre la figure 2.9(f). Un point 3 interne particulier (voir figure 2.9(e)) et le reste des points sont de type points internes. Chaque type de point nécessite une procédure différente comme présentée auparavant. Notons ici, qu'une C^- de numéro i ($i=1, 2, 3, \dots, N$) contient $i + 1$ points à traiter. Si la zone de Kernel contient N caractéristiques à traiter, le nombre total N_{Total} de points à traiter est exactement égal à:

$$N_{Total} = 2 + 3 + 4 + \dots + N = \frac{N (N + 1)}{2} - 1 \quad (2.47)$$

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel s'arrête si le calcul de toutes les N caractéristiques est achevé. Après la détermination du champ d'écoulement dans la région de Kernel, on peut déterminer sa longueur (longueur de détente) par:

$$\frac{L_d}{y_*} = \frac{x_B}{y_*} \quad (2.48)$$

2.6.2. Région de transition et contour de la tuyère axisymétrique

La détermination du contour de la tuyère axisymétrique se fait en même temps que le calcul de l'écoulement aux points d'intersection des caractéristiques dans la région de transition ADE (voir figure 2.3).

Le contrôle de la géométrie du maillage dans la région de transition dépend de la distance Δx (non-dimensionnelle) choisie pour les points sélectionnés sur la ligne de Mach uniforme DE . Les propriétés des points sur cette ligne sont connues et sont égales aux valeurs de l'écoulement uniforme de la section de sortie.

La figure 2.10 représente le processus de calcul et illustre la direction de calcul dans la région de transition. On calcul en premier lieu les propriétés au point 3 de la figure 2.10(a). Ici les propriétés au point 2 sont connues puisque ils appartiennent à la dernière C^- dans la région de Kernel. Les propriétés au point 1 sont données par:

$$x_1 = x_B + \Delta x \quad ; \quad y_1 = \Delta x \operatorname{tg}(\mu_S) \quad ; \quad \theta_1 = 0.0 \quad ; \quad T_1 = T_S \quad (2.49)$$

La température T_S peut être déterminée par la résolution de l'équation (2.4) en remplaçant $T=T_S$ et $M=M_S$. Le calcul des propriétés au point 3 se fait en utilisant la procédure d'un point interne. On passe au calcul des propriétés au point interne 3 (voir figure 2.10(b)) sur la même C^- . On poursuit le calcul suivant la flèche indiquée sur la figure 2.10(b) jusqu'au premier point (point 3) de la C^- (voir figure 2.10(c)). Le premier point de la caractéristique précédente est un point de la paroi, qui est déjà déterminé.

Le problème qui se pose est la détermination d'un point sur la paroi de la tuyère qui coupe la caractéristique C^- calculée. Entre les deux caractéristiques, on peut détecter plusieurs points intermédiaires de la paroi. Les différents cas possibles de détection de points de la paroi sont illustrés sur la figure 2.10.

Sur cette dernière, les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 ainsi que le segment de la paroi sont considérés comme des lignes droites. Les propriétés aux

points 1, 2, 3 et W sont connus. L'intersection de la paroi avec la C^- est nommée par le point P^- de propriétés $(x^-, y^-, \theta^-, T^-)$ et l'intersection avec la C^+ est nommée par le point P^+ de propriétés $(x^+, y^+, \theta^+, T^+)$.

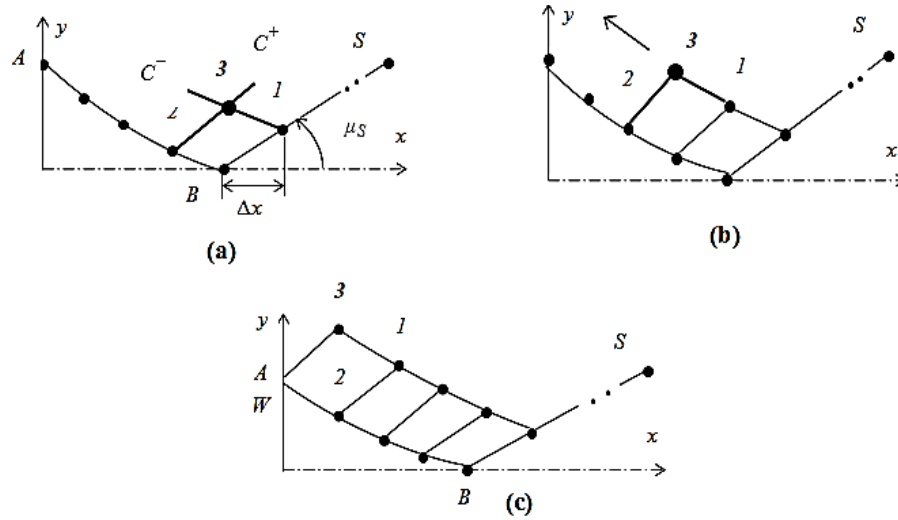


Figure 2.10 : Processus de calcul des C^- de la région de transition.

Pour connaître l'intersection du segment de la paroi avec C^+ ou C^- , on calcule la valeur suivante avec l'approximation initiale $\theta^\pm = \theta_W$.

$$\Delta y = y_W - y_1 + (x_1 - x_W) \operatorname{tg}(\varphi) \quad (2.50)$$

Avec :

$$\varphi = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (2.51)$$

$C_W \in [0, 1]$: Coefficient d'interpolation.

- Si $\Delta y \geq 0$, on se trouve dans la situation (a) ou (c) de la figure 2.11.
- Si $\Delta y < 0$, on se trouve dans la situation (b) ou (d) de la figure 2.11.

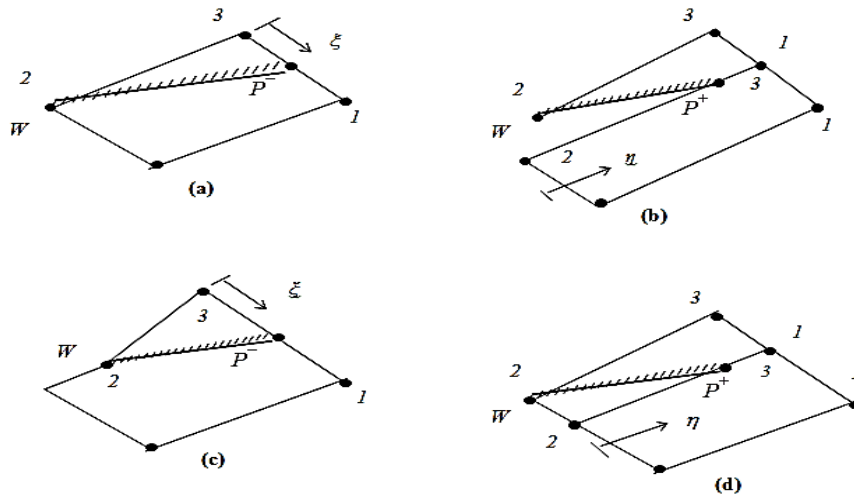


Figure 2.11 : Différents cas d'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique.

1^{er} Cas: Si $\Delta y \geq 0$

Lorsque $\xi = 0$, on a $\theta_{13}(\xi) = \theta_3$ et lorsque $\xi = \Delta\xi_{13}$ (distance entre les points 1 et 3) on a $\theta_{13}(\xi) = \theta_1$. La variation linéaire de l'angle θ donne au point P^- , le résultat suivant:

$$\theta^- = \theta_3 + \left[\frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_1) \quad (2.52)$$

La détermination de la position du point P^- se fait en écrivant les équations reliant les points 1 et 3 et les points W et P^- . On obtient:

$$\begin{cases} x^- = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^- + x_W \operatorname{tg}(\varphi^-)}{\operatorname{tg}(\varphi^-) - \lambda^-} \\ y^- = y_3 + \lambda^- (x^- - x_3) \end{cases} \quad (2.53)$$

Avec:

$$\varphi^- = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^- \quad (2.54)$$

$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (2.55)$$

2^{ème} Cas: Si $\Delta y < 0$

Lorsque $\eta = 0$, on a $\theta_{23}(\eta) = \theta_2$ et lorsque $\eta = \Delta\eta_{23}$ (distance entre les points 2 et 3), on a $\theta_{23}(\eta) = \theta_3$. La variation linéaire de l'angle θ , donne au point P^+ , le résultat suivant:

$$\theta^+ = \theta_2 + \left[\frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_2) \quad (2.56)$$

La détermination de la position du point P^+ se fait en écrivant toujours les équations reliant les points 2 et 3 et les points W et P^+ . On obtient:

$$\begin{cases} x^+ = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^+ + x_W \operatorname{tg}(\varphi^+)}{\operatorname{tg}(\varphi^+) - \lambda^+} \\ y^+ = y_3 + \lambda^+ (x^+ - x_3) \end{cases} \quad (2.57)$$

Avec :

$$\varphi^+ = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (2.58)$$

$$\lambda^+ = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (2.59)$$

L'équation (2.53) représente un système algébrique non linéaire permettant de déterminer la position (x^-, y^-) du point P^- . En premier lieu, on approxime l'angle $\theta^- = \theta_W$. On introduit cette approximation dans l'équation (2.53) pour obtenir l'approximation initiale de la position du point P^- .

Pour le point P^+ , l'algorithme est présenté par les équations (2.56) et (2.57) pour obtenir la position de ce point et l'angle de déviation de la paroi.

$$\text{Max} \left[\left| x^{\pm}(\text{itération } K) - x^{\pm}(\text{itération } K-1) \right|, \left| y^{\pm}(\text{itération } K) - y^{\pm}(\text{itération } K-1) \right| \right] < \varepsilon \quad (2.60)$$

Entre chaque deux itérations il faut vérifier la condition (2.60) pour la nouvelle valeur corrigée de θ^- ou θ^+ pour prendre convenablement les équations nécessaires entre le point P^+ ou P^- et de détecter exactement le point de la paroi. Une fois la position d'un point déterminée, il sera considéré comme un nouveau point de la paroi et une ou deux parmi les configurations de la figure 2.11 seront appliquées. La procédure sera répétée pour les prochaines caractéristiques sélectionnées dans la région de transition. La présentation de la paroi dépend du pas Δx choisi pour les points de la ligne de Mach uniforme BS et des résultats obtenus sur la dernière C^- de la région de Kernel.

Une fois la position des points P^+ et P^- est déterminée, l'angle de déviation de la paroi converge en même temps avec le processus de calcul. La température en ces points peut être calculée en supposons une variation linéaire sur les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 avec la même démarche comme l'angle θ . On aura le résultat suivant, respectivement pour le point P^- et P^+ :

$$T^- = T_3 + \left[\frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (T_1 - T_3) \quad (2.61)$$

$$T^+ = T_2 + \left[\frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (T_3 - T_2) \quad (2.62)$$

Pour obtenir le nombre de Mach en ce point, on remplace la valeur obtenue de la température dans l'équation (2.4). Les autres paramètres peuvent être obtenus en remplaçant la valeur de T_3 par la valeur obtenue de T^- ou T^+ dans les relations (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42).

La figure 2.12 représente la procédure qui sera répétée pour chaque C^- dans la région de transition jusqu'à la détermination d'une intersection de la paroi avec la $C^+ BS$ uniforme. Chaque fois qu'on sélectionne un point sur la ligne BS , le nombre de points interne à calculer sur la C^- correspondante diminue graduellement jusqu'à l'obtention d'un seul point. Cette situation obtenue veut dire qu'on est arrivé au point S de la section de sortie. Par conséquent, le rayon de sortie correspondant à la discrétisation sera donné par:

$$\frac{A_E}{A_*}(\text{computed}) = \left(\frac{y_N^2 - y_{body}^2}{y_*^2 - y_{body}^2} \right) \quad (2.63)$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi de la tuyère (précisément le nombre N_W dans la relation (2.63)) dépend du pas Δx choisi sur la C^- uniforme BS et du nombre de points sur la dernière C^- AB de la région de Kernel. Il est supérieur ou égal au nombre de points choisis sur la C^- BS uniforme et même supérieur au nombre de points obtenus sur la dernière C^- AB de la région de Kernel; ce qui n'est pas le cas pour la géométrie bidimensionnelle, où le nombre de points de la paroi est égal forcément au nombre de points de la dernière C^- AB de la région de Kernel.

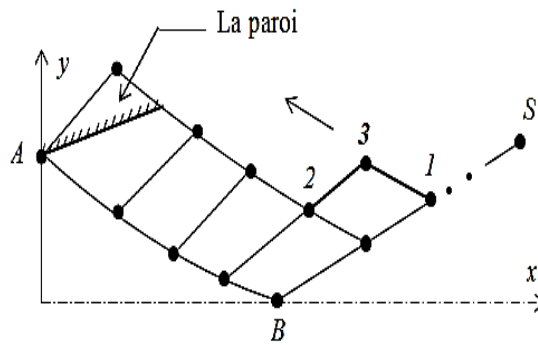


Figure 2.12 : Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition.

2.7. Masse de la structure de la tuyère

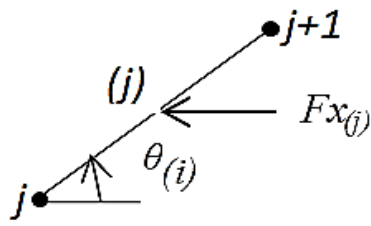
Pour calculer la masse de la structure de la tuyère, on considère les deux suppositions suivantes [9,110, 111] :

1. La forme de la paroi entre deux points successifs est une ligne droite. Cette configuration donne de bons résultats lorsque le nombre de points N est très élevé.
2. La structure du divergent est constituée du même matériau, d'une épaisseur t_M et de masse volumique ρ_M constantes.

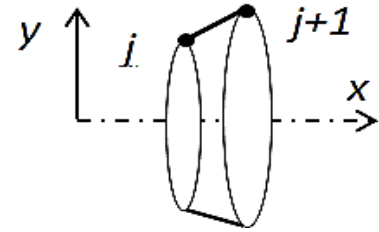
Le calcul de la masse de la structure de la tuyère est lié au calcul de sa surface de révolution. Comme on aura $(N-1)$ segments de droite, alors, sous forme non-dimensionnelle, la masse peut être obtenue par:

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A_*} = C_{Masse} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \frac{S(j)}{A_*} \quad (2.64)$$

$S(j)$: représente la surface de révolution de la couronne circulaire limitée entre les points j et $j+1$ ($j=1, 2, \dots, N-1$) (voir figure 2.13).



(a) Force de pression



(b) Tronçon d'une tuyère

Figure 2.13 : Présentation d'un tronçon de la tuyère axisymétrique à détente centrée.

D'après le théorème de Guldin [11], la surface $s_{(j)}$, sous forme non-dimensionnelle, calculée par:

$$C_{Mass} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{y_i}{y^*} + \frac{y_{i+1}}{y^*} \right) \left[\left(\frac{x_{j+1}}{y^*} - \frac{x_j}{y^*} \right)^2 + \left(\frac{y_{j+1}}{y^*} - \frac{y_j}{y^*} \right)^2 \right] + 2\pi \frac{y_{body}}{y^*} \frac{L}{y^*} + \pi \left(\frac{y_{body}}{y^*} \right)^2 \quad (2.65)$$

2.8. Force de la pression exercée sur la paroi du divergent

Pour calculer la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère, on suppose encore que la pression exercée sur le tronçon (j) de la figure 2.13 est approchée par:

$$P_{(j)} = \sigma P_j + (1 - \sigma) P_{j+1} \quad (2.66)$$

Alors:

$$F_{(j)} = P_{(j)} S_{(j)} \quad (2.67)$$

La force de pression totale F_x exercée sur la paroi, est obtenue par la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons, on obtient:

$$C_F = \frac{Thrust}{P_0 A_*} = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{P_j}{P_0} \right) \left(\frac{S_j}{A_*} \right) \sin(\theta_j) + \pi \left(\frac{P_E}{P_0} \right) \left(\frac{y_{body}}{y^*} \right)^2 \quad (2.68)$$

Le rapport des pressions dans l'expression (2.68) est donné par la relation (2.41) et l'angle $\theta_{(j)}$ peut être obtenu par la relation suivante:

$$\theta_{(j)} = \arctg \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \quad (2.69)$$

Le coefficient de la force de pression est une partie du coefficient de poussée globale de propulsion. Dans les relations du calcul de la masse et la force de pression, l'expression A_* est égale à πy_*^2 pour le cas axisymétrique.

2.9. Erreur des processus numériques

L'erreur relative commise pour le calcul numérique peut être évaluée pour le rapport des sections critiques, par la relation suivante [31] :

$$\varepsilon_{(A_E / A_*)} (\%) = \left| 1 - \frac{(A_E / A_*)_{Computed}}{(A_E / A_*)_{Exact}} \right| \times 100 \quad (2.79)$$

2.10. Erreur entre les deux modèles *GP* et *HT*

Pour présenter l'intérêt de notre modèle *HT*, on peut calculer l'erreur relative commise pour le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* pour chaque paramètre par la relation suivante [31] :

$$\varepsilon_{(Parameter)} (\%) = \left| 1 - \frac{(Parameter)_{PG}}{(Parameter)_{HT}} \right| \times 100 \quad (2.80)$$

CHAPITRE 3

PHENOMENOLOGIE DES ECOULEMENTS DANS LES TUYERES DE MOTEURS-FUSEES EN SUR-DETENTE

3.1. Conception des profils de tuyères

Une tuyère supersonique est une conduite de forme convergente-divergente. Elle met en communication une chambre contenant un gaz comprimé avec un milieu extérieur d'évacuation. La chambre et le milieu extérieur sont à des pressions différentes pour permettre le mouvement du gaz. La tuyère supersonique a pour rôle d'accélérer les gaz d'une vitesse faible à l'entrée du convergent à une vitesse sonique au col puis à une vitesse supersonique à la sortie de la tuyère.

Les motoristes d'une fusée, contraints par une spécification limitant le poids et la longueur de la tuyère, sont conduits, en fonction de la plage d'altitude de vol, à définir un rapport de sections et à rechercher un optimum du rapport poussé sur poids.

Plusieurs solutions ont été proposées afin de réduire la longueur de divergent, tout en s'efforçant de minimiser les pertes de poussée par rapport à celle d'une tuyère idéale. Historiquement les tuyères qui équipaient les moteurs des premières fusées suborbitales étaient de faible rapport de sections et possédaient un divergent conique de demi angle d'environ 15° [122]. C'était le cas de la fusée allemande V-2. Les scientifiques avaient mené des recherches sur les tuyères supersoniques, mais ils ne trouvent pas un avantage à utiliser la méthode des caractéristiques pour élaborer des profils plus sophistiqués qui auraient équipés les tuyères de faible rapport de sections de leurs fusées balistiques. Après la seconde guerre mondiale, la demande continue pour augmenter les performances des moteurs fusées, d'abord pour les applications stratégiques (fusée balistique intercontinentale) puis dans le cadre de la conquête spatiale (course à la Lune, satellisation) a conduit à définir des tuyères à plus grand rapport de sections pour des moteurs fonctionnant à très hautes altitudes. Pour des tuyères à grand rapport de sections, le concept de divergent conique devient vite irréalisable [122]. Si des tuyères à divergent quasi-conique continuent d'être utilisées pour des moteurs à ergols solides fonctionnant généralement aux basses altitudes [123], la plupart des tuyères qui équipent les moteurs fusées ont des profils optimisés calculés par la méthode des caractéristiques.

L'optimisation des performances d'un moteur fusée peut être recherchée et, éventuellement, atteinte en essayant d'améliorer son architecture, ses composants, les technologies de fabrication, ainsi que les systèmes de gestion et de contrôle de la puissance délivrée par ses organes, en particulier les turbopompes et la chambre propulsive. Pour les moteurs d'étage supérieur, cette optimisation se traduit, dans la plupart des cas, par la minimisation de la masse et la maximisation de l'impulsion spécifique, à condition de respecter l'enveloppe géométrique imposée par les contraintes d'aménagement du lanceur. Pour les moteurs d'étage inférieur (étage principal et/ou boosters d'appoint), la minimisation de la masse et la maximisation de l'impulsion spécifique restent des atouts de premier ordre. Néanmoins, d'autres exigences tout aussi importantes influencent la conception d'un tel moteur : d'une part, la maximisation de poussée en déterminant les dimensions globales et les sollicitations structurales; d'autre part, le besoin de régulation du niveau de poussée sur de larges plages de fonctionnement, conditionne les choix technologiques et de conception des principaux organes composant le moteur. Ce dernier point constitue un atout majeur pour la gestion du lanceur en vol, permettant d'en maximiser les performances tout en préservant sa fiabilité. En effet, la possibilité de démarrer le moteur à une puissance réduite (de l'ordre de 40–50 % du niveau nominal), et de le faire fonctionner sur une plage de régulation de +/- 20 % autour du point de fonctionnement nominal, permet de gérer au mieux l'accélération du véhicule en vol, tout en maîtrisant les sollicitations thermomécaniques, particulièrement sévères au moment de l'allumage. Toutefois, une telle excursion du point de fonctionnement a des impacts majeurs sur la conception des organes propulsifs : les turbopompes, pour lesquelles la dynamique des parties tournantes et les phénomènes de cavitation représentent des difficultés majeures ; les organes de combustion, pour lesquels la variation du point de fonctionnement induit des difficultés de conception pour les circuits de refroidissement ainsi que pour la stabilité de la combustion ; la tuyère supersonique, pour laquelle les difficultés majeures sont liées au refroidissement de la paroi métallique, mais surtout aux phénomènes de décollement de jet, en régime transitoire et permanent.

Pour les moteurs d'étage principal, la conception des tuyères propulsives classiques est fortement liée à la nécessité de faire fonctionner ces dispositifs à basse altitude, avec une pression ambiante d'environ 0.1 MPa. Par conséquent, le choix du taux de détente résulte du compromis entre la maximisation des performances en vol et la

nécessité de faire fonctionner la tuyère tout le temps en conditions de jet attaché (*full flowing*), en particulier au sol, afin d'éviter les sur-chargements dynamique sur, induits par un décollement de jet éventuel. L'introduction du besoin de régulation de la poussée, en particulier lors du démarrage et pendant les phases de vol atmosphérique, ne peut que contraindre encore plus la conception d'un tel dispositif. En effet, le démarrage du moteur se faisant au sol à puissance réduite ne peut qu'aggraver le risque de décollement de la veine supersonique.

Plusieurs études sont menées depuis des décennies, afin de s'affranchir de cette limitation. D'une part, la phénoménologie du décollement de jet et les facteurs qui en sont à l'origine ont été étudiés, afin de prévenir ou, éventuellement, de contrôler le décollement même et ses effets. D'autre part, des dispositifs de détente supersonique autres que les tuyères de Laval ont été conçus ; l'objectif final de ces études est de s'affranchir complètement des problèmes liés au décollement de jet.

Sur la base des compétences professionnelles acquises dans le domaine des tuyères supersoniques des moteurs fusée, et nous appuyant sur les acquis des recherches décrites aux chapitres précédents du présent travail, nous avons voulu étudier, plus en détail, combien et comment il était possible de s'affranchir des problèmes liés au décollement de jet pour les moteurs opérant à basse altitude. Dans ce but, nous avons d'abord évalué les différents concepts de tuyère déjà proposés par la littérature ainsi que leurs spécificités technologiques et opérationnelles, puis nous avons restreint le champ d'investigation aux tuyères à écoulement interne, de type convergent-divergent. Ce choix, a priori restrictif, est motivé par le fait que ces dispositifs ont été développés et produits depuis des décennies, atteignant des niveaux de fiabilité démontrée, au sol et en vol, très satisfaisants.

3.2. Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté par la figure 3.1, constitué d'une tuyère Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice P_c supposée fixe. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique P_a est variable.

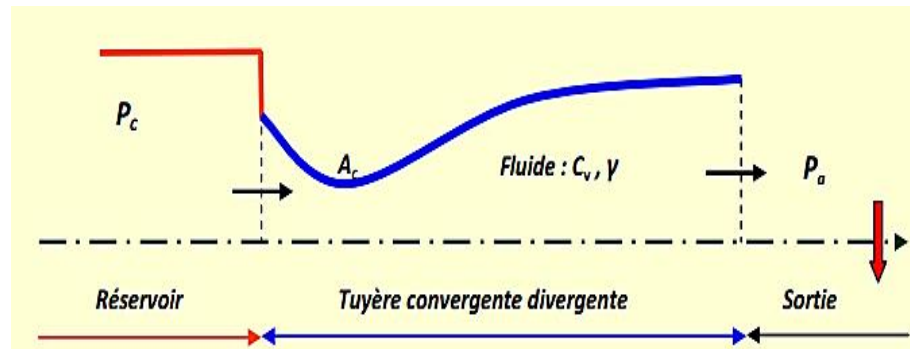


Figure. 3.1 : Schéma de la tuyère supersonique [166].

Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression génératrice, le fluide est entièrement au repos (voir figure 3.2, courbe (a)). Si la pression du milieu ambiant P_a diminue progressivement au-dessous de la pression P_c supposée constante, un débit d'écoulement prend naissance et cinq régimes particuliers d'écoulements sont distingués [124], [125].

3.2.1. Écoulement subsonique

L'écoulement est subsonique dans toute la tuyère [voir figure 3.2, courbes (b) et (c)]. Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col. Dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression du milieu extérieur. La pression est donc minimale dans la section du col où la vitesse passe par une valeur maximale.

3.2.2. Écoulement sonique adapté

Si P_a continue à diminuer jusqu'à une valeur notée P_{ac1} , l'écoulement au col devient sonique et le débit atteint une valeur limite maximale (voir figure 3.2, courbe (d)). L'écoulement est dit sonique adapté. Partout encore, sauf au col, l'écoulement est subsonique. Au col de la tuyère, la pression atteint la valeur critique P^* et la vitesse atteint la vitesse du son. Le col est amorcé.

3.2.3. Écoulement sonique non adapté

Si P_a diminue au-dessous de P_{ac1} , le col reste toujours sonique. Dans le divergent apparaît un phénomène irréversible appelé onde de choc, l'écoulement est dit sonique non adapté ou régime de sur-détente. L'évolution de l'écoulement est représentée par la courbe (e) de la figure 3.2.

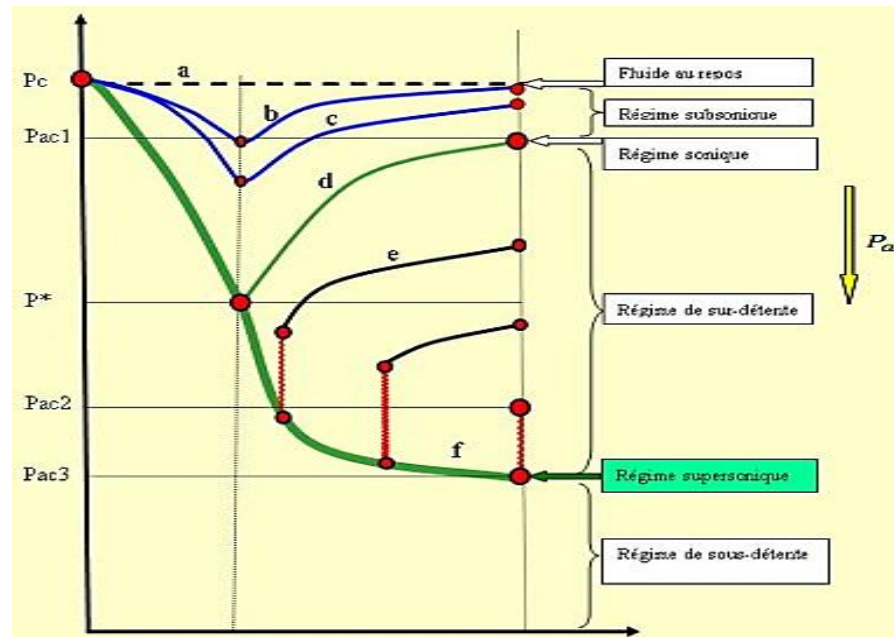


Figure. 3.2 : Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique. Evolution de la pression le long de la tuyère [166].

Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc droite divise l'écoulement en deux parties (voir figure 3.3). Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. A travers l'onde de choc, la pression augmente et la vitesse diminue brusquement. Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) la pression remonte et la vitesse diminue progressivement, l'écoulement est à nouveau subsonique.

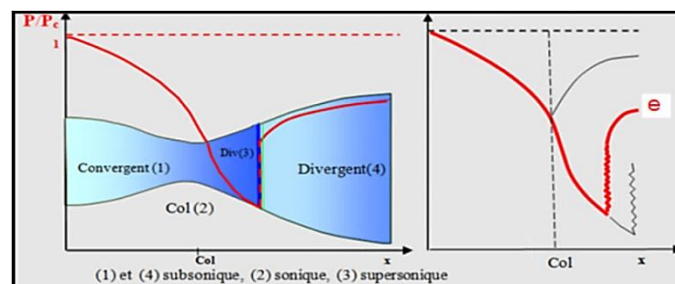


Figure. 3.3 : Régime de sur-détente en 1-D [166].

L'onde de choc se déplace vers la sortie lorsque P_a diminue. Soit P_{ac2} la pression ambiante pour laquelle l'onde de choc se place à la sortie de la tuyère.

En diminuant encore la pression P_a au-dessous de P_{ac2} , l'écoulement est entièrement supersonique, la diminution de P_a ne modifie plus l'écoulement à l'intérieur. L'adaptation de la pression entre la sortie de la tuyère et la pression du milieu ambiant doit se faire à l'extérieur du divergent par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques.

3.2.4. Ecoulement supersonique adapté

Si P_a continue à diminuer il arrive un moment où l'écoulement est entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît, alors la tuyère est parfaitement adaptée. L'évolution du gaz est représentée par la courbe (f) de la figure 3.2. Notons par P_{ac3} la pression ambiante pour laquelle ce phénomène se produit. P_{ac3} est appelée pression d'adaptation.

3.2.5. Ecoulement supersonique non adapté

Lorsque la pression P_a devient inférieure à P_{ac3} l'écoulement est dit supersonique non adapté. L'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification, l'adaptation entre la tuyère et la pression ambiante doit se faire à l'extérieur de la tuyère par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques.

3.2.6. Remarques et résultats

- Une tuyère supersonique ne fonctionne donc correctement que pour la seule valeur du rapport de pression P_{ac3}/P_c , où P_{ac3} est appelée pression d'adaptation.
- La limitation de l'intervalle de chaque régime d'écoulement nécessite la détermination des valeurs de la pression du milieu ambiant pour une pression chambre P_c fixe. Ces valeurs sont P_{ac1} , P_{ac2} , P_{ac3} .

3.3. Fonctionnement réel de la tuyère supersonique

L'approche des écoulements parfaits et non visqueux suppose l'absence totale des effets visqueux. Dans les écoulements réels, la tuyère comporte une couche limite qui est très sensible aux variations de pression, ce qui rend les phénomènes physiques dans la tuyère plus complexes.

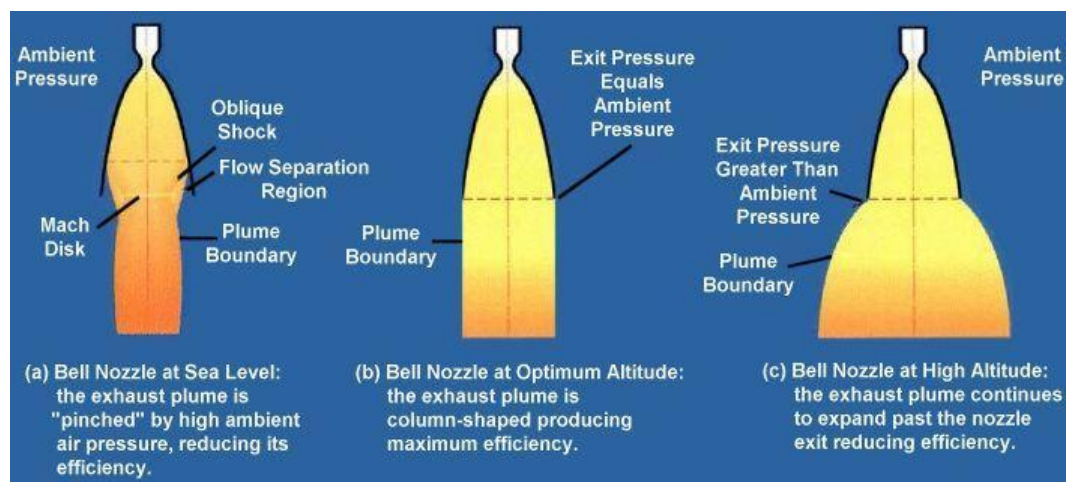


Figure 3.4 : fonctionnement d'une tuyère supersonique en fonction d'altitude.

Lorsque le col est sonique, l'écoulement dans la tuyère dépend uniquement de la pression à la sortie notée P_e et de la pression du milieu ambiant P_a . En fonction de la différence entre ces deux pressions, trois cas sont rencontrés (voir figure 3.4) :

- (a) : $P_e = P_a$, la tuyère est dite adaptée ;
- (b) : $P_e > P_a$, la tuyère est dite sous-détendue ;
- (c) : $P_e < P_a$, la tuyère est dite sur-détendue.

3.3.1. Le régime d'adaptation

Dans le cas du régime adapté, la détente du gaz est complètement accomplie dans la tuyère. Le gaz se détend depuis la chambre jusqu'à la sortie de la tuyère, la pression du milieu ambiant P_a est égale à la pression de sortie P_e . L'écoulement du gaz sort de la tuyère sous forme d'un jet supersonique quasi-uniforme. Une frontière isobare sépare le jet supersonique du fluide ambiant. En sortant de la tuyère, la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage. Cette interaction forme une couche de mélange (voir figure 3.5).

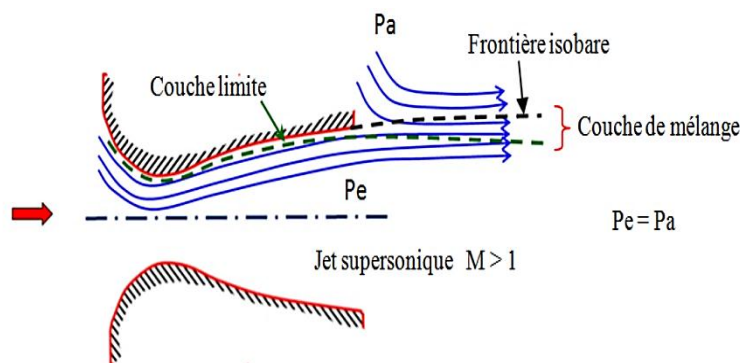
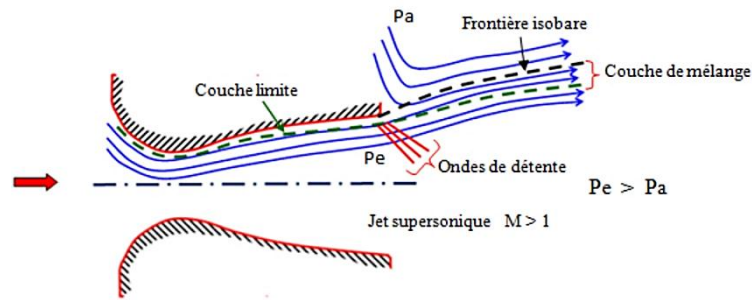


Figure 3.5 : Topologie de l'écoulement à l'adaptation [126].

3.3.2. Le régime de sous-détente

Ce régime supersonique hors adaptation est appelé régime de sous-détente. Il se concrétise lorsque la pression du milieu ambiant P_a est inférieure à la pression d'adaptation. La détente est incomplète dans la tuyère. En sortant de la tuyère, le gaz continue sa détente de la pression de sortie P_e à la pression inférieure ambiante P_a . La suite de la détente du gaz est réalisée à la sortie de la tuyère par un faisceau d'ondes de détente. Vu que la pression de sortie est supérieure à la pression ambiante, un élargissement du jet supersonique est observé à la sortie de la tuyère. La frontière isobare qui sépare le jet supersonique du fluide du milieu ambiant prend une forme divergente (voir figure 3.6).



(a) Écoulement en régime de sous-détente [126].



(b) Éclatement des jets des boosters de la Navette Spatiale à haute altitude.
Figure 3.6 : Topologie de l'écoulement en Régime de sous-détente.

La figure 3.7 représente le profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente. L'écoulement suit une distribution de pression strictement décroissante depuis la pression chambre jusqu'à la pression de sortie.

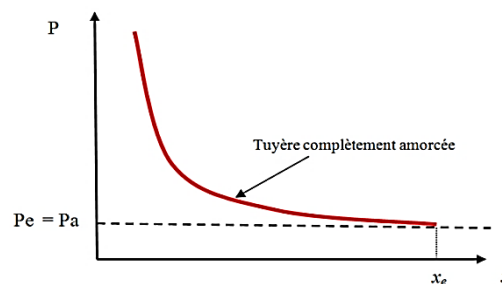


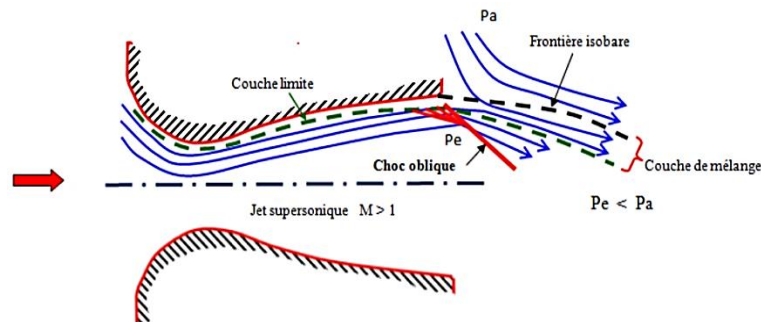
Figure 3.7 : Profil de pression pariétale le long de la tuyère.

3.3.3. Le régime de sur-détente

La figure 3.9 représente le deuxième régime supersonique hors adaptation sur détendu. Ce régime se produit lorsque la pression P_a est supérieure à la pression d'adaptation de la tuyère. La détente des gaz dans la tuyère s'effectue jusqu'à une pression statique P_1 qui est inférieure à la pression ambiante P_a . La couche limite du jet dans cette situation subit une contre-pression et un choc d'intensité P_2/P_1 se forme dans l'écoulement. La pression P_2 est la pression après le choc, elle est presque égale à la pression ambiante. Suivant l'intensité du choc, deux cas sont rencontrés : le régime de sur-détente avec décollement naissant et le régime avec décollement étendu.

-Sur-détente avec décollement naissant

Pour des gradients de pression adverse modérés, la couche limite subsonique détecte ou ressent la contre pression en un point O appelé origine de l'interaction juste un peu en avant de la sortie de la tuyère. La couche limite décolle de la tuyère à la lèvre et un choc oblique se forme à la sortie de la tuyère. Dans ce régime il n'y a pas de point de décollement. Ce régime de sur-détente est qualifié de sur-détente avec décollement naissant (figure 3.8).



(a) Topologie de l'écoulement en en sur-détendu (décollement naissant).

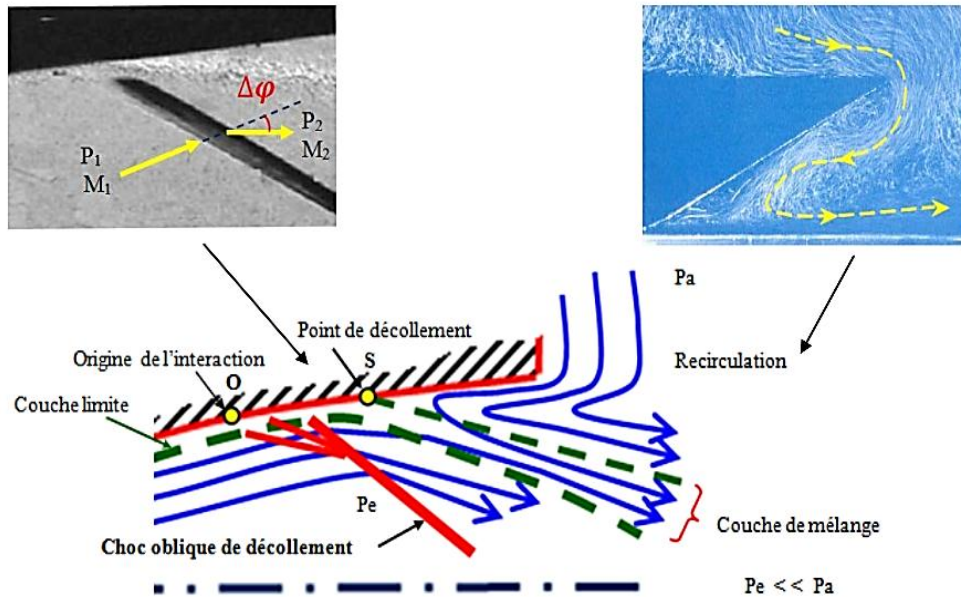


(b) Tuyère en sur-détente avec décollement naissant (Shock diamonds in Shuttle's main engine nozzles during STS-120 launch (NASA), and during tests)

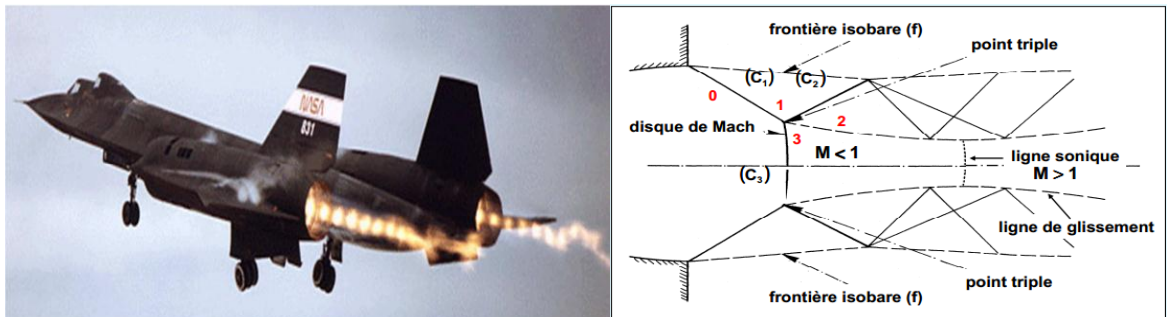
Figure 3.8 : Régime en sur-détente (décollement naissant) [126].

-Sur-détente avec décollement étendu

En sur-détente avec un décollement étendu, la couche limite n'est pas en mesure de supporter n'importe qu'elle valeur de contre pression. Au-delà d'une certaine valeur critique, la couche limite décolle à l'intérieur de la tuyère. Ce décollement entraîne une profonde modification de l'écoulement (voir figure (3.9)) [126], [127].



(a) Tuyère en sur-détente avec décollement étendu.



(b) Structure d'un jet supersonique en sur-détendu (formation de disque de Mach)

Figure 3.9 : Régime en sur-détente (décollement étendu) [126], [127].

Le décollement ainsi créé va se produire dans un point S situé à l'intérieur de la tuyère (voir figure 3.9 (a)). Au niveau de ce point de décollement, il se produit une compression rapide de l'écoulement interne de la tuyère depuis la pression P_1 (pression non perturbée immédiatement avant le décollement) jusqu'à la pression P_2 (pression en aval du point de décollement). Cette rapide contre pression provoque la formation d'un choc oblique au travers duquel l'écoulement est ralenti et dévié d'un angle φ et son nombre de Mach passe de M_1 à M_2 . De S part une couche de mélange, zone visqueuse assurant une transition continue des propriétés de l'écoulement décollé entre le jet à grande vitesse situé près de l'axe de symétrie et la région proche de la paroi, où le fluide est presque stagnant. Le fluide externe est aspiré à l'intérieur de la tuyère sous l'effet d'entraînement puis évacué dans la couche de mélange.

Ce régime est très dangereux pour la tuyère, la topologie de l'écoulement est fortement influencée par le profil de la tuyère ainsi que le rapport de pression P_e/P_a .

3.4. Les profils des tuyères supersoniques

Deux types de tuyères sont largement utilisés :

3.4.1. Tuyères coniques

Les tuyères à profils coniques sont utilisées particulièrement en raison de la simplicité de la conception de leur divergent. L'angle de divergence se situe entre 15 et 25 degrés. Ce type de profil équipe les missiles et les propulseurs à poudre. Un exemple de tuyère conique est la tuyère de la fusée historique allemande V-2 [128].

3.4.2. Les tuyères optimisées

La conception de grandes tuyères se confronte à la contrainte de poids et à la longueur du divergent, ce qui pousse à l'utilisation des profils optimisés. Deux grandes familles de tuyères à profil optimisé sont utilisées actuellement : les tuyères idéales tronquées et les tuyères à profil parabolique [13], [126].

- Les tuyères à contour idéal tronqué *TIC*

Le profil d'une tuyère à contour idéal tronqué est obtenu à partir d'une tuyère idéale qui a été calculé pour engendrer dans le plan de sortie un écoulement parallèle à l'axe. Pour des raisons d'optimisation, le divergent de la tuyère est tronqué dans la dernière partie au prix de perte de poussée relativement limitée. Ces tuyères équipent certains moteurs de lanceurs comme le moteur européen Viking du lanceur Ariane-4, le moteur japonais *LE-7* du lanceur *H-2* et le moteur russe *RD-120* du lanceur Zenith [13], [129].

- Les tuyères à profil parabolique *TOC*

L'optimisation de performance d'une tuyère *TOC* est proposée par Rao [57]. Ce dernier a montré que le profil de la tuyère pouvait être approché par une parabole, sans perte significative de performance [42]. Ce type de profil est utilisé pour les tuyères des moteurs fusées moderne tels que le moteur Vulcain d'Ariane-5 ou le moteur *SSME* de la navette spatiale américaine.

La figure (3.10) présente les profils de deux tuyères *TIC* et *TOC* du laboratoire *LEA* de Poitier en France [130]. Les deux tuyères ont le même rapport de section S_{sortie} / S_{col} et les mêmes performances pour un écoulement parfait. Mais, la tuyère *TOC* est optimisée par rapport à la tuyère *TIC*, avec une longueur plus faible, ce qui implique un poids plus faible. Ce gain d'optimisation est pénalisé par un écoulement réel plus perturbé dans la tuyère *TOC* que la Tuyère *TIC*.

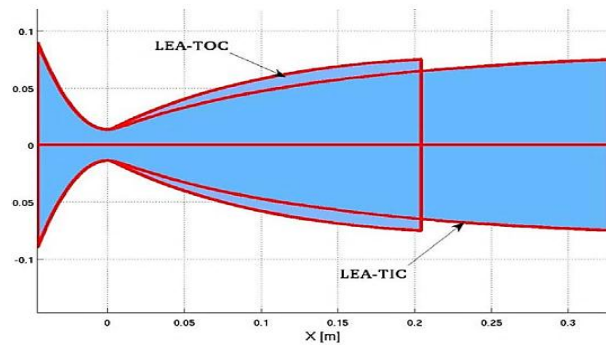


Figure 3.10 : Profils des tuyères *TIC* et *TOC* [130].

La figure 3.11 présente les maquettes à échelle réduite des tuyères *TIC* et *TOC* du laboratoire *DLR* en Allemagne [131].

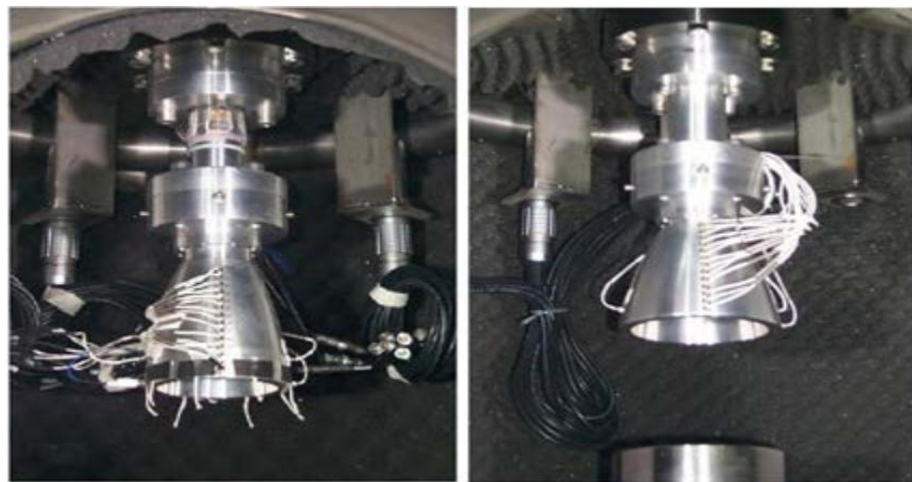


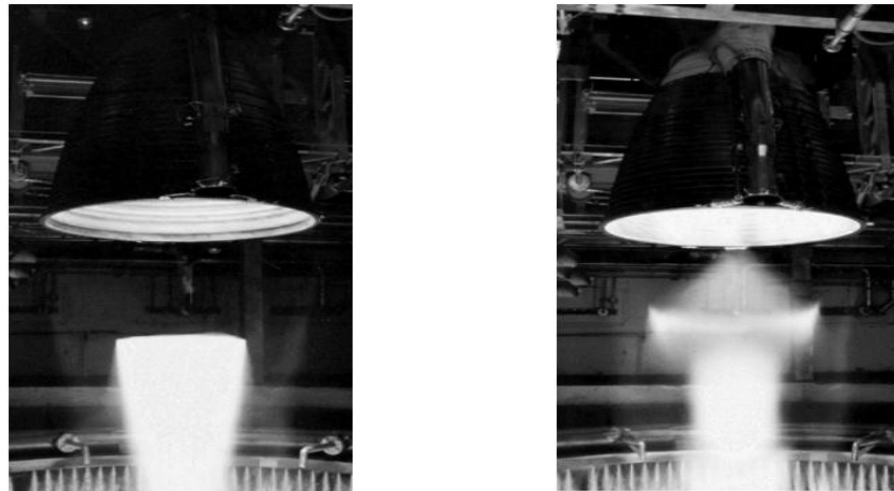
Fig 3.11 : Tuyères *TIC* et *TOC* du *DLR* [166].

3.5. Structures de chocs d'une tuyère supersonique en sur-détente

Lorsqu'on observe le jet sur-détendu d'une tuyère de moteur-fusée à ergols liquides en fonctionnement au sol, on y voit des régions lumineuses qui traduisent la présence de chocs intenses associés à la non-adaptation de l'écoulement. La luminosité de ces régions est due au rayonnement thermique des gaz portés à haute température lorsqu'ils sont brutalement décélérés lors de la traversée des chocs intenses.

Dans le cas du jet du moteur Vulcain fonctionnant au sol à la pression chambre nominale, on observe nettement la structure lumineuse classique induite par la réflexion de Mach sur l'axe du choc de non-adaptation (voir figure 3.12(a)).

Lorsque le moteur fonctionne à une pression légèrement inférieure à la pression nominale, la structure lumineuse arbore une forme radicalement différente faisant penser à un toit en pagode ou à un chapeau chinois, d'où le nom de chocs en chapeau donné par les motoristes à cette structure de chocs (voir figure 3.12(b)).



(a) pression chambre nominale

(b) pression chambre (95%)

Figure. 3.12 : Formes lumineuses dans le jet du moteur Vulcain fonctionnant au sol au banc *P5* de *DLR/Lampoldshausen* [126].

Des calculs en *CFD* de l'écoulement dans la tuyère Vulcain [132], fonctionnant à des taux de détente relativement proches du taux nominal au sol, ont effectivement montré que deux systèmes de chocs peuvent exister (voir figure 3.13). La partie haute montre une structure classique de disque de Mach, formé par la réflexion singulière du choc issu de la lèvre de tuyère. En revanche la structure sur la partie basse prend une autre forme qui résulte de l'interaction entre le système de chocs de non-adaptation et le choc interne de focalisation.

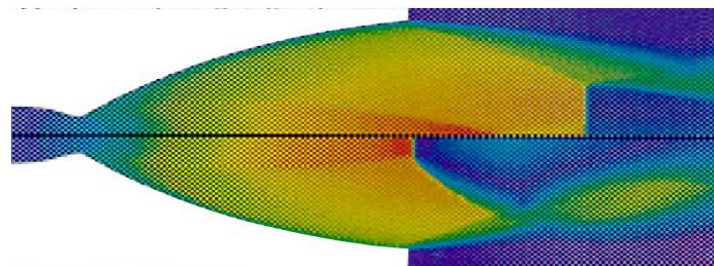
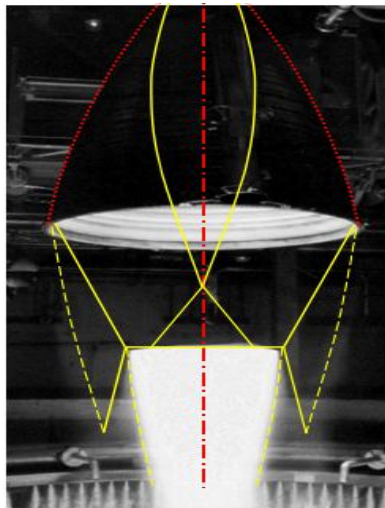


Figure. 3.13 : Structure de disque de Mach (haut) et structure de chocs en chapeau (bas). Calculs Navier-Stokes pour des taux de détente voisins du taux nominal du moteur Vulcain [132].

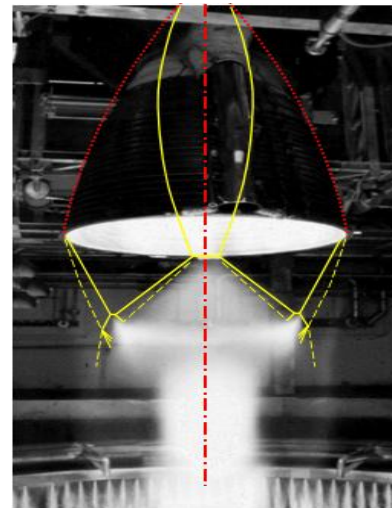
Grâce à ces simulations numériques il est possible de dessiner les schémas des structures de chocs et de les superposer aux images de jet. Sur la figure 3.14 le profil interne de la tuyère est donné en pointillé rouge. Les traces des chocs dans un plan méridien sont tracées en ligne continue jaune et les lignes de courant (ligne de jet et lignes de glissement) sont tracées en ligne à tirets jaunes.

Lors du fonctionnement au sol, le jet du moteur Vulcain est en sur-détente, il se forme un choc de non-adaptation en sortie de la tuyère. Au régime nominal, le choc se réfléchit sur l'axe de symétrie de façon singulière, ce qui crée un disque de Mach et un point triple d'où part le choc réfléchi (voir figure 3.14(a)). Du point triple émane une ligne de glissement qui sépare l'écoulement subsonique en aval du disque de Mach de l'écoulement supersonique en aval du choc réfléchi. Le choc interne de la tuyère dû à la focalisation de la tuyère, et qui prend naissance immédiatement après la région du col, a également été tracé, mais il ne perturbe pas la réflexion de Mach.

Lorsque le moteur fonctionne légèrement en dessous de la pression chambre nominale, il y a une forte interaction entre le système de choc interne de focalisation et la réflexion de Mach du choc de sur-détente (voir figure. 3.14(b)). Cette interaction de chocs complexe a été dénommée par les motoristes européens de structure de chocs en chapeau (*cap-shock pattern*) [132]. Dans cette structure, le choc interne de focalisation se réfléchit de manière singulière sur l'axe, créant un disque de Mach. Un choc se réfléchit et interagit à son tour avec le choc de non-adaptation, ce qui donne une structure d'anneau de Mach, produit une région torique subsonique lumineuse qui forme la base ou le bord du chapeau.



a) Structure de disque de Mach.



b) Structure de chocs en chapeau.

Figure. 3.14 : Schémas des deux structures de choc dans le jet du moteur Vulcain pour des régimes stabilisés proches du taux de détente nominal [132].

Plusieurs types de structures de chocs peuvent être observés dans les tuyères supersoniques en régime de sur-détente: la réflexion régulière, la réflexion de Mach et la structure de chocs en chapeau. La structure de chocs dépend fortement du profil de la tuyère et du rapport de pression P_c/P_a .

3.5.1. Réflexion régulière

Le choc oblique de décollement ou choc incident CI se réfléchit directement sur l'axe de symétrie en un choc oblique réfléchi CR [133] (voir figure 3.15). L'image strioscopique réalisée à l'*ONERA* (figure 3.16) [134], montre la topologie d'une structure de choc en réflexion régulière dans une tuyère à échelle réduite. La même structure est observée sur des tuyères réelles comme le montre l'image de fonctionnement du moteur *RL10-A5* au banc d'essai (voir figure 3.17) [135].

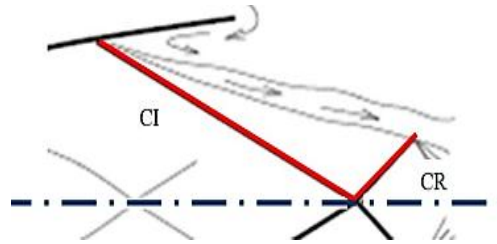


Fig. 3.15 - Réflexion régulière.

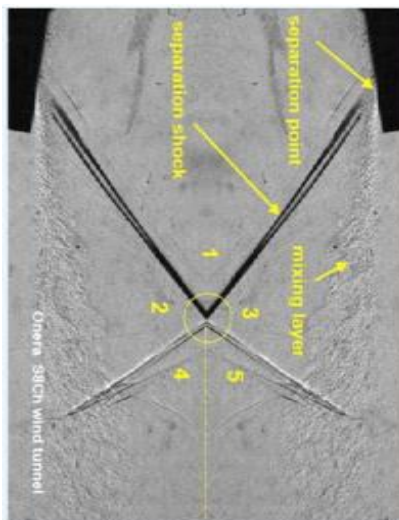


Figure. 3.16 : Visualisation strioscopique dans une réflexion régulière [135].

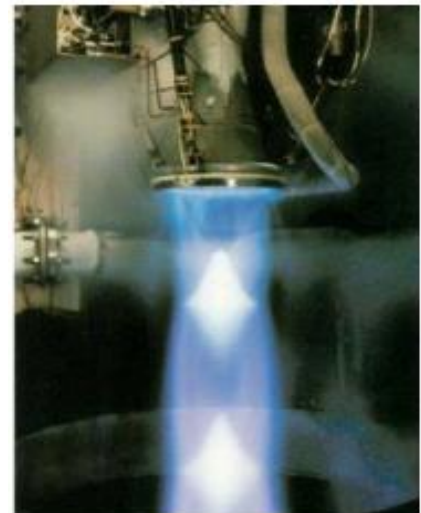


Figure. 3.17 : Réflexion régulière tuyère réelle *RL10-A5* [135].

3.5.2. Réflexion de Mach

Le choc oblique de décollement ou choc incident CI se réfléchit en formant un disque de Mach (voir figure 3.18). Le choc réfléchi part d'un point triple TP où se rencontre le choc incident, le choc réfléchi et le disque de Mach. Une ligne de glissement LG sépare la zone du jet supersonique de la zone subsonique derrière le disque de Mach. Cette réflexion de Mach est dite réflexion singulière. L'image strioscopique réalisée à l'*ONERA* [134] montre la topologie d'un écoulement avec une structure de chocs en réflexion singulière (voir figure 3.19). La figure 3.20 montre la même structure pour la tuyère du moteur *Vulcain-1* [135].

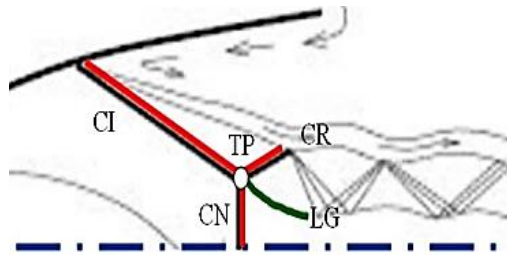


Figure. 3.18 : Réflexion de Mach.

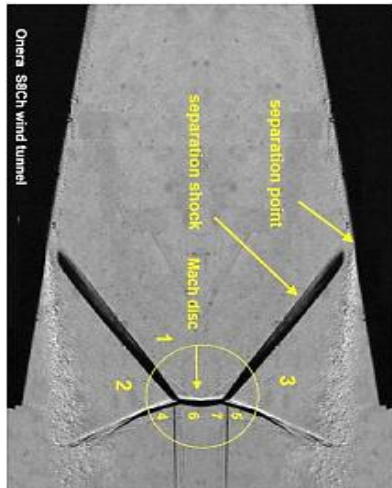


Figure 3.19 : Strioscopique de la tuyère S8Ch ONERA [134].



Figure 3.20 : Réflexion de Mach moteur Vulcain au banc d'essai [135].

3.5.3. Réflexion de Mach inverse

Dans le cas des tuyères fortement optimisées en poussée, il se forme un Choc Interne de Focalisation *CIF*. Ce choc interne se réfléchit de manière singulière sur l'axe, créant un disque de Mach, et un choc réfléchi *CR1* qui interagit à son tour avec le choc oblique de décollement *CI*. La ligne de glissement et les lignes de courant après le disque de Mach, divergent de l'axe de symétrie. Cette interaction de chocs complexes forme une structure de choc particulière appelée structure de chocs en chapeau (voir figures 3.21 - 3.22). La réflexion de mach qui fait apparaitre cette structure de chapeau est appelée réflexion de Mach inverse. Cette structure dépend fortement de la courbure du profil de la tuyère et du rapport de pression P_c/P_a [134], [126].

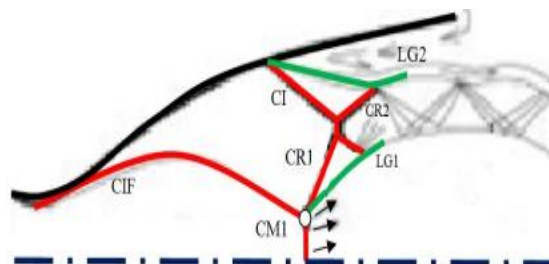


Figure 3.21 : Réflexion de Mach inverse.

La photographie de la figure 3.22 montre la structure de chocs en chapeau pour le moteur Vulcain du lanceur Ariane-5 testé au banc d'essai *P-5* du laboratoire *DLR* en Allemagne. La luminosité très forte du jet est le résultat de l'échauffement du gaz au passage des chocs. L'eau produite par la combustion de l'hydrogène et l'oxygène rayonne fortement [126].

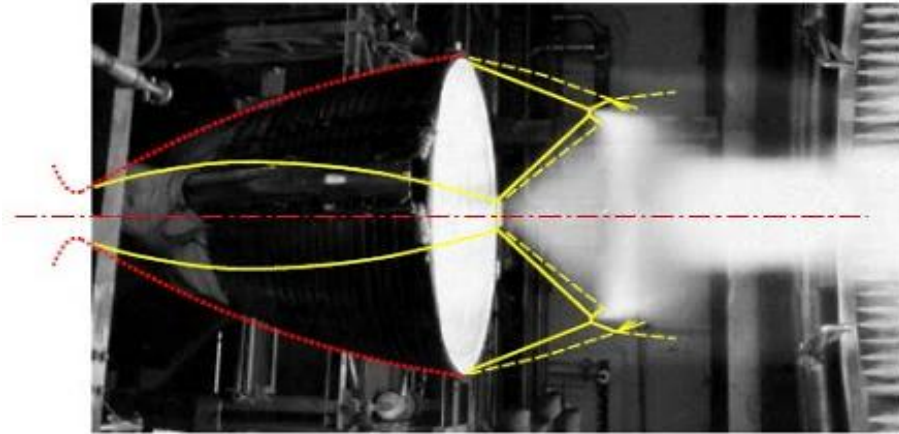


Figure 3.22 : Structure de choc dans le jet du moteur vulcain [126].

3.6. Configurations de décollement en régime sur-détendu

Le phénomène de décollement est profondément lié au comportement dynamique de la couche limite. Le décollement intervient lorsque la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est-à-dire dans une situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. Dans ce cas, la vitesse de l'écoulement externe diminue et les particules fluides subissent une décélération. La décélération est encore plus importante dans la couche limite du fait des transferts de quantités de mouvement par les forces visqueuses [127].

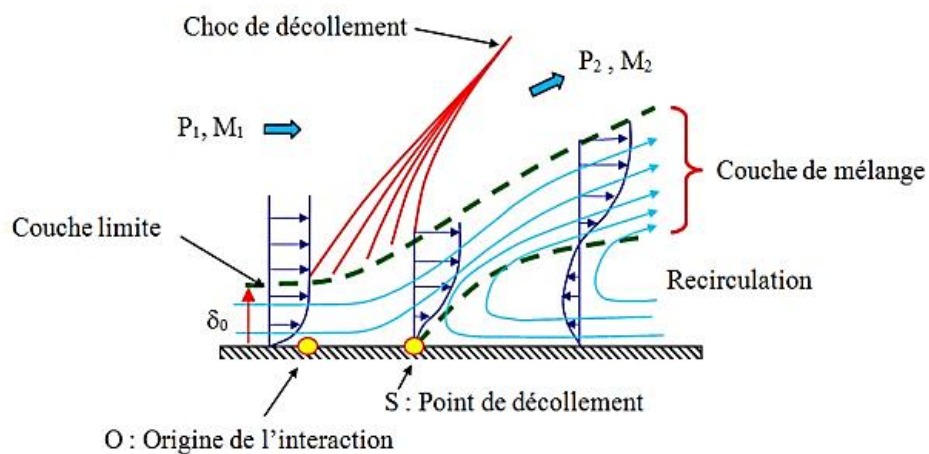


Figure. 3.23 : Processus du décollement sur une plaque plane [127].

Une expérience d'un décollement de l'écoulement supersonique sur une paroi plane est réalisée par Jean Délery (voir figure 3.23) [127]. Où il a relevé les points suivants :

- A partir d'un point O , origine de l'interaction, la couche limite commence à s'épaissir. En même temps, son profil de vitesse tend à se vider, les régions proches de la paroi sont plus ralenties que les parties externes.
- En même temps, des ondes de compression sont induites dans l'écoulement voisin du fluide. Rapidement, ces ondes se focalisent pour constituer un choc de décollement.
- Le décollement se produit en un point S où le profil de vitesse $u(y)$ de la couche limite est tel que $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ sur la paroi, en ce point de décollement.
- En aval de S , les profils $u(y)$ comportent, près de la paroi, un courant de retour (recirculation) où la vitesse est à contre-courant de l'écoulement principal. Ce reflux est dû à l'action opposant du champ de pression qui refoule, vers l'amont, le fluide à faible énergie de la portion interne de la couche limite. Dans cette région dite décollée, le frottement pariétal τ_w est négatif, sa valeur absolue étant toutefois plus faible.
- Les études expérimentales [15], [126], [136], et numériques [21], [59], [137] montrent l'existence de deux types différents de décollements à l'intérieur des tuyères : le décollement libre et le décollement restreint.

3.7.Procédure de décollement supersonique

Lors du régime de fonctionnement en sur-détente, il y a un décollement de la couche limite qui se passe à l'intérieur de la tuyère en raison de la contre pression p_a qui règne à la sortie de la tuyère. Ce décollement est caractérisé principalement par une large augmentation de la pression pariétale. L'évolution de la pression pariétale modifie la poussée de la tuyère. C'est la raison pour laquelle la connaissance de la position du point de décollement s et du saut de pression atteint est importante.

Pour un régime à un rapport de pression donné (NPR), il est encore difficile de prévoir si ce régime provoquera un décollement et, s'il y a décollement, quelles seront la position du point de décollement et l'évolution de la pression pariétale. Cette difficulté provient de la complexité des phénomènes physiques rencontrés dans de tels écoulements, fortement compressibles et turbulents.

L'expérience montre qu'il y a au moins deux types différents de décollements à l'intérieur de la tuyère : le décollement libre et le décollement restreint.

3.7.1. Décollement libre

Le décollement dans une tuyère est dit libre lorsque la couche limite du jet décolle en amont de la sortie de la tuyère sous l'effet du gradient de pression adverse et que le jet décollé débouche librement de la tuyère dans une atmosphère initialement au repos.

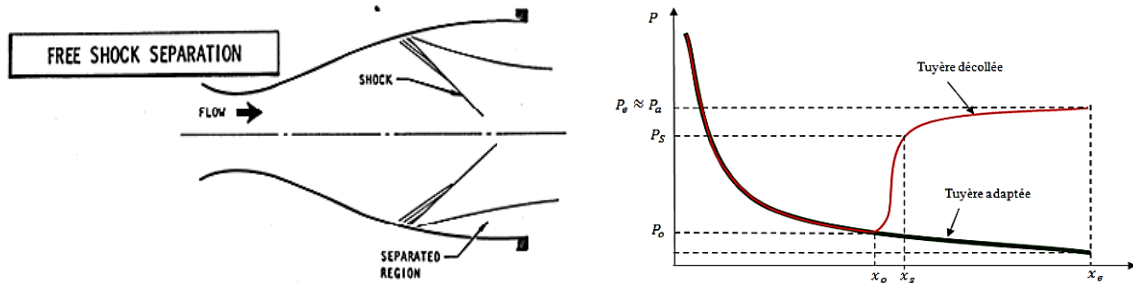
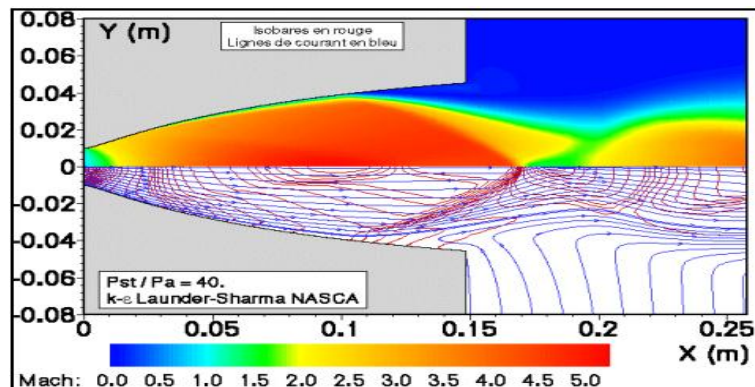
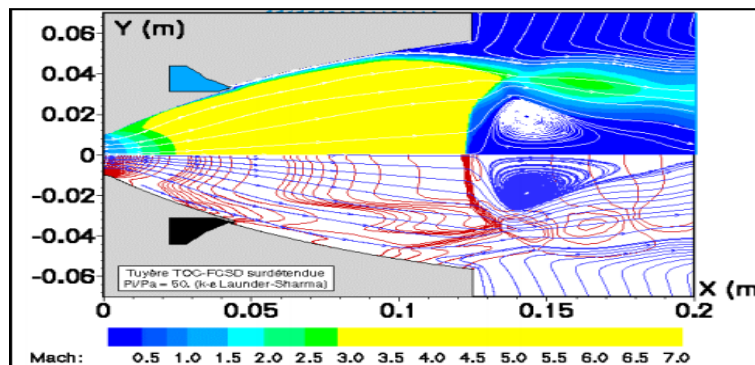


Figure. 3.24 : Représentation schématique du décollement libre.

La configuration de décollement libre *FSS* (Free Shock Separation) (voir figure 3.24) peut intervenir dans certaines tuyères en régime sur-détendu, comme l'indiquent les lignes de courant issues de calculs Navier-Stokes dans une tuyère idéale avec une structure de réflexion de Mach (voir figure. 3.25(a)) ou bien dans une tuyère optimisée à contour parabolique avec une structure de chocs en chapeau (voir figure 3.25(b)).



a –Tuyère idéale tronquée ONERA-TIC ($p_{ij}/p_a=40$)



b - Tuyère optimisée à contour parabolique ONERA-TOC ($p_{ij}/p_a=50$)

Figure 3.25 : Décollement libre dans les tuyères sur-détendues. Contours iso-Mach en haut, contours isobares et lignes de courant en bas [11, 28].

Ce décollement se produit quand l'écoulement est entièrement séparé de la paroi. Pendant que la sur-détente se développe, le point de décollement se déplace plus loin en amont dans la tuyère (voir la figure (3.26)).

En étudiant la répartition de la pression, on constate que l'écoulement est divisé en trois régions. D'abord une première région, en amont du point X_0 , où la couche limite est fixée à la paroi, on a le même comportement qu'en régime d'adaptation. Dans la deuxième région, la pression croît de la pression minimum P_0 à la pression plateau P_p . Cette région est considérée comme une région d'interaction. La couche limite commence à s'épaissir au point X_0 , mais elle ne se sépare pas de la paroi jusqu'à ce que la force de frottement pariétal τ_w soit nulle au point de décollement X_s . La troisième région de recirculation de l'écoulement est entièrement séparé de la paroi.

Il en ressort que le décollement libre fait intervenir deux mécanismes bien distincts. Le premier est associé au décollement du jet à la paroi alors que le second est lié à l'écoulement ambiant aspiré dans la zone de recirculation.

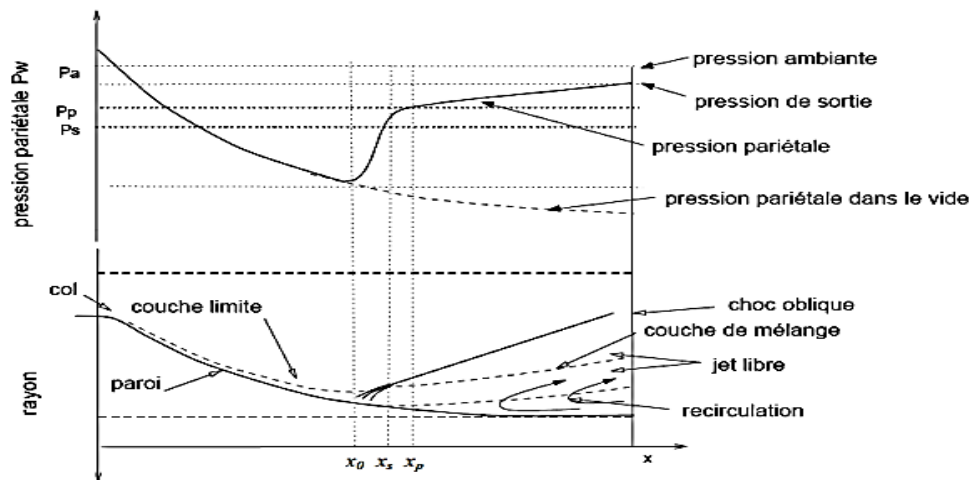


Figure 3.26 : Schéma du décollement libre, d'après Hagemann [138].

3.7.2. Décollement restreint

Le second type de configuration de décollement, autre que le décollement libre fut observé dans les années 70 par Nave et Coffey [139], durant des tests sur les maquettes du moteur J-2S alimentées en gaz froids et fut confirmé numériquement en 1994 par les simulations numériques de Chen et al [28]. Ce décollement peut apparaître lorsque le recollement de la couche limite intervient sur le divergent juste après le décollement. Ce régime est appelé décollement restreint *RSS* (Restricted Shock Separation) (voir figure 3.27).

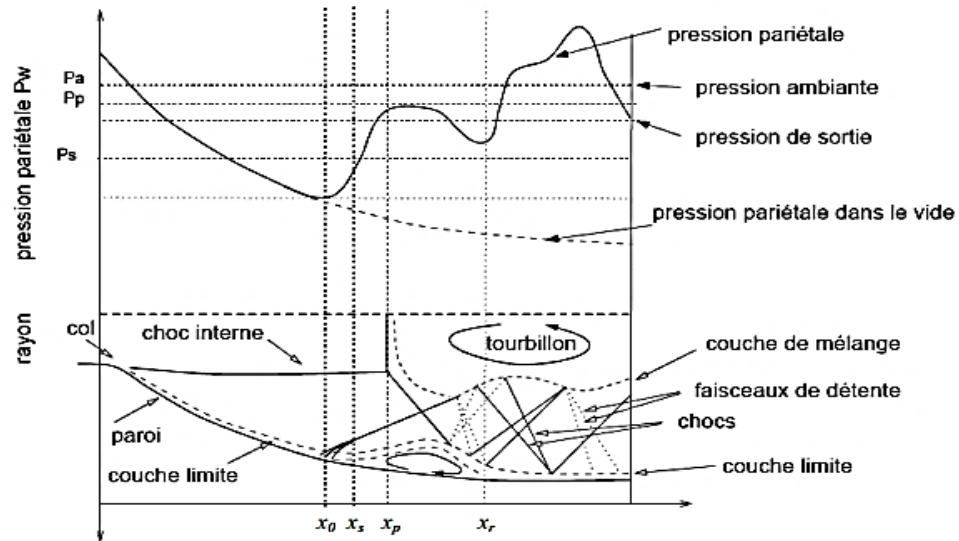


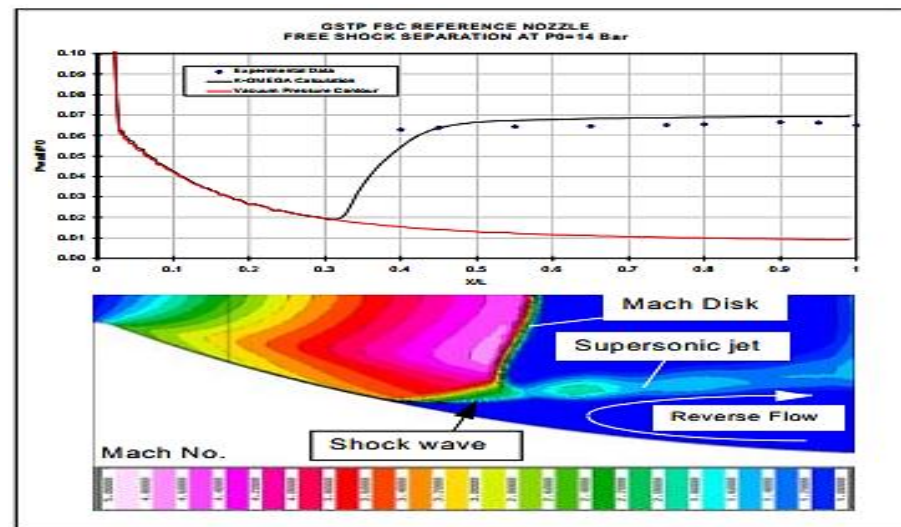
Figure 3.27 : schéma du décollement restreint, d'après Frey et Hagemann [138].

Pour ce régime n'ayant lieu qu'à certains rapports de pression, la couche limite décolle puis recolte rapidement sur la paroi de la tuyère. L'évolution de la pression pariétale en aval du décollement est marquée par une succession de détente et de re-compression, la pression pariétale dépassant parfois la pression ambiante. Ce phénomène est attribué au recollement de l'écoulement décollé. En effet, celui-ci induit des ondes de compression et de détente dans le jet supersonique.

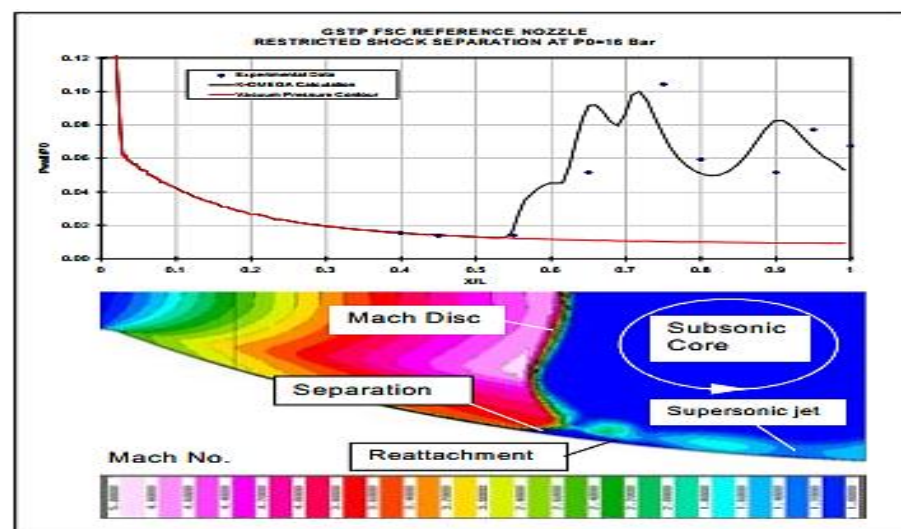
Plus récemment les études numériques [128, 80, 59] et expérimentales [136, 26, 130] menées en Europe ont effectivement montré que les distributions de pression de la tuyère *TOC* sont différentes suivant la nature du décollement, libre ou restreint. C'est le cas de l'étude du motoriste Volvo Aero [94], s'appuyant sur des essais effectués par l'organisme de recherche suédois *FOI* sur une maquette de tuyère optimisée. La distribution de pression pariétale non perturbée est indiquée par les courbes en rouge sur la figure 3.28.

Pour un taux de détente $p_{ij}/p_a = 14$ (voir figure. 3.28(a)), le jet décolle librement de la paroi sous l'effet de la pression ambiante, et le calcul retrouve la pression plateau caractéristique des décollements étendus : c'est le décollement libre. Pour un taux de détente légèrement supérieur, $p_{ij}/p_a = 16$ (voir figure. 3.28(b)), la couche limite du jet est en régime de recollement après avoir subi un décollement sous l'effet du choc : c'est le décollement restreint caractérisé à la paroi par un point de décollement suivi d'un point de recollement. Le décollement restreint est associé à une allure très perturbée du profil de pression ; après une brusque élévation de pression à la traversée du pied de choc,

on observe d'abord une courte région de plateau correspondant à la poche de fluide décollé, suivie d'une succession d'augmentation et de diminution de la pression qui traduit les ondes de choc et de détente présentes dans le jet supersonique.



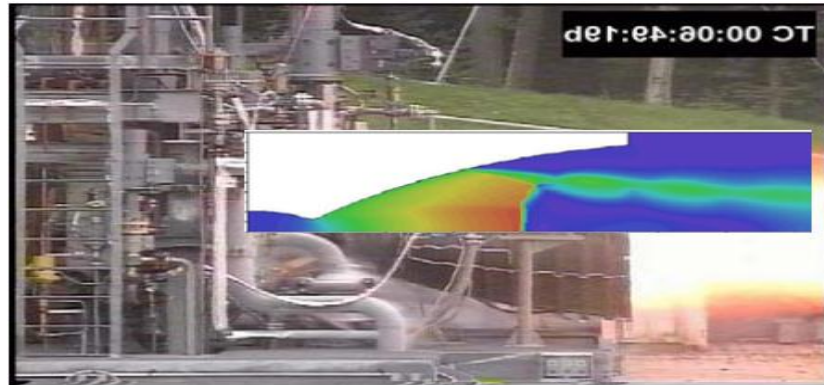
(a) : décollement libre



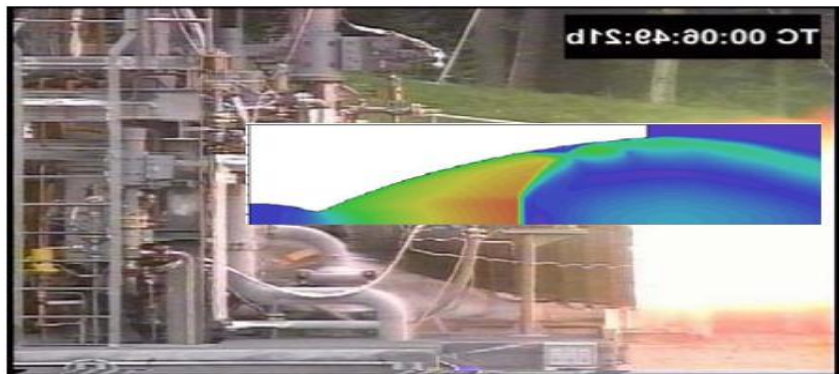
(b) : décollement restreint

Fig 3.28 : Distributions de pression pariétale associées au régime de décollement (Etude Volvo Aero dans la tuyère VAC-S1 testée au FOI) [94].

Des études numériques stationnaires [140] de l'écoulement sur-détendu dans la tuyère Vulcain, ont également montré que les deux régimes de décollement y apparaissaient de manière stable selon le taux de détente. Le montage de la figure 3.29 [140] met en corrélation les champs iso-Mach numériquement obtenus avec les photographies donnant le diamètre du jet en sortie.



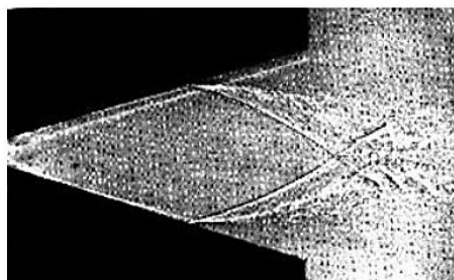
(a) : décollement libre



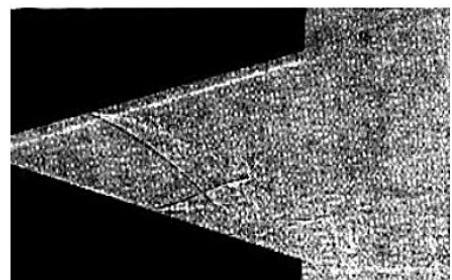
(b) : décollement restreint

Figure 3.29 : Simulations numériques de l'écoulement sur-détendu dans la tuyère Vulcain au banc. (Etude *DLR-ASTRIUM* et banc *P3.2 DLR* à Lampoldshausen) [140].

Il est important de noter que les deux types (*FSS* et *RSS*) peuvent présenter des dissymétries, qu'elles soient bidimensionnelles, ou de révolution, coniques ou profilés, à petit ou à grand rapport de section. Le caractère dissymétrique peut avoir lieu dans les plages intermédiaires de *NPR*, après et avant des régimes de décollement symétriques. La figure 3.30 montre les résultats issus de l'expérience menée par J.D.McKenney (1949) [141] sur une tuyère décollée. Si le décollement reste symétrique pour $NPR=19.4$ (voir figure.3.30(a)), la figure 3.30(b) montre une nouvelle structure de l'écoulement pour $NPR=8.7$, le décollement associé est instable et non symétrique.



(a) Décollement symétrique



(b) Décollement dissymétrique

Figure 3.30 : Tuyère bidimensionnel décollée [141].

3.7.3. Basculement de régime ($FSS \leftrightarrow RSS$)

Le phénomène de la transition entre décollement libre et décollement restreint ($FSS \leftrightarrow RSS$) se produit pendant les deux phases d'amorçage et d'extinction des moteurs fusées pour un rapport de pression NPR bien défini. Si le basculement du régime de décollement libre vers un régime de décollement restreint ($FSS \leftrightarrow RSS$) se produit au démarrage, le basculement dans le sens inverse ($RSS \leftrightarrow FSS$) se produit durant la phase d'extinction du moteur. Comme nous venons de le voir, le décollement restreint se caractérise par une zone de recirculation fermée, où les pressions sont inférieures à la pression ambiante. Pendant le phénomène de transition, cette zone de recirculation se referme et s'ouvre cycliquement, accompagnée d'une augmentation ou de chute de la pression dans la zone de retour selon l'ouverture ou la fermeture de la zone de recirculation. Cette transition cyclique est connue dans la littérature spécialisée sous le nom de « *end effect* » (voir figure 3.31).

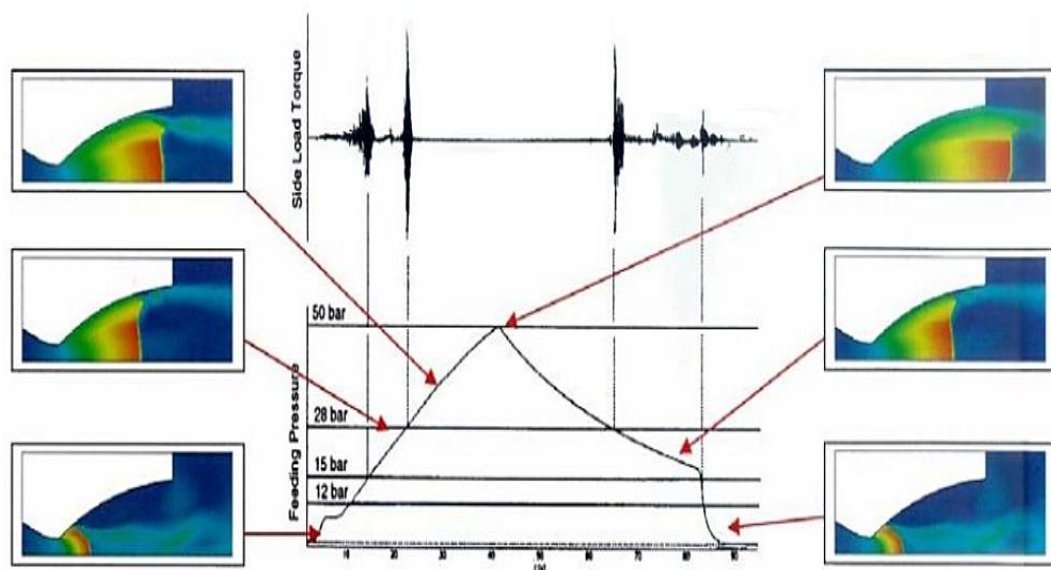


Figure 3.31 : Basculement entre décollement libre et restreint et inversement durant les transitoires (tuyère VAC-S1 testée au FOI [94]).

3.8. Conclusion

Dans le cas du régime de sur-détente dans les tuyères supersoniques optimisées en poussée, les études expérimentales et numériques ont révélées la coexistence et la cohabitation d'une grande diversité de phénomènes physiques. Les trois régimes d'écoulement : le régime subsonique, sonique et supersonique sont présents dans différentes zones du divergent. La couche limite du divergent enregistre un gradient de pression adverse. Lorsque ce dernier dépasse un certain seuil, la couche limite décolle

de la paroi. Ce décollement est généralement de type décollement *FFS* et parfois de type *RSS*. Chaque type de décollement engendre une distribution de pression pariétale particulière. Un autre phénomène propre aux écoulements supersoniques se manifeste. Ce phénomène particulier est les ondes de choc. Différentes formes de chocs peuvent être rencontrées : les ondes de chocs droites, obliques, et les ondes de détente de Prandtl-Meyer. Ces chocs forment des structures particulières telles que : les réflexions régulières, les réflexions singulières et la structure de chocs en chapeau. L'interaction de ces différents phénomènes instationnaires entraîne des efforts mécaniques sur la paroi de la tuyère qui peuvent causer des vibrations et des déformations dans les tuyères. Ces efforts mécaniques appelés charges latérales (*side-loads*) constituent un problème crucial et contraignant dans la conception de la structure de la tuyère.

La problématique des charges latérales dans les tuyères propulsives des moteurs fusées reste un des enjeux majeurs dans l'industrie aéronautique. En effet, lors des phases de démarrage et d'extinction des moteurs fusées, la structure interagit avec l'écoulement principal qui est siège de phénomènes physiques très complexes, conduisant ainsi à la génération des effets aéro-élastiques qui peuvent amplifier les charges latérales. En considérant cette problématique relevant du domaine multi physique, recours aux simulations numériques couplées paraît légitime et indispensable afin d'alléger le plan d'expérience, jugée chère et coûteuse. Cependant, pour des problèmes complexes tels que le calcul couplé pour des tuyères axisymétriques en écoulement turbulent, même avec un déploiement de grands moyens de calcul, le temps nécessaire pour achever ce type de simulation numérique reste exorbitant.

Finalement, il apparaît clairement que :

- Les phénomènes rencontrés dans les tuyères sont multiples et très complexes.
- Les topologies des écoulements ainsi que les répartitions de la pression à la paroi de la tuyère, sont différentes suivant le profil et le rapport des pressions de fonctionnement de la tuyère.

Donc, il faut s'attendre à des difficultés dans la modélisation et la simulation numérique de ces écoulements compressibles dans les tuyères supersoniques.

CHAPITRE 4

LA MODELISATION DES ECOULEMENTS COMPRESSIBLES TURBULENTS

Ce chapitre est consacré en premier lieu à la présentation des modèles physiques et mathématique de la mécanique des fluides à travers un rappel des équations de Navier-Stokes compressibles instantanées puis moyennées qui sont à la base de la simulation numérique des écoulements turbulents dans les tuyères supersoniques.

La discrétisation de ces équations est ensuite illustrée en utilisant la méthode des volumes finis en utilisant le code (*CFD FASTRAN*). En deuxième lieu, nous exposerons les modèles de turbulence : Baldwin-Lomax, Spalart-Allmaras, $k-\varepsilon$ et $k-\omega$ et. Enfin, nous présenterons les différentes étapes suivies lors des simulations numériques (maillage, conditions initiales et aux limites, propriétés du gaz, convergence et post-traitement).

4.1 Equations fondamentales des fluides compressibles

Les équations de la dynamique des fluides sont dérivées en se basant sur le fait que l'aspect dynamique du fluide soit déterminé par les lois de conservation suivantes :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (4-1)$$

- Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) \quad (4-2)$$

p : La pression statique.

δ_{ij} : Le tenseur de Kronecker.

τ_{ij} : Le tenseur des contraintes visqueuses.

- Equation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E_t) + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E_t + p)] = - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) \quad (4-3)$$

q_j : Le flux de chaleur dans la direction j , E_t l'énergie totale par unité de masse, qui s'exprime par la relation suivante, à partir de l'énergie interne et cinétique :

$$E_t = e + \frac{1}{2} u_k u_k \quad (4-4)$$

L'équation d'état du gaz parfait :

$$p = \rho r T \quad (4-5)$$

Pour un fluide supposé newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses prend la forme suivante:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4-6)$$

Le flux de chaleur q_j en fonction de la température s'écrit :

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (4-7)$$

k : La conductivité thermique qui s'exprime en fonction de la viscosité dynamique par le nombre de Prandtl P_r :

$$P_r = \frac{\mu c_p}{k} = \gamma \frac{\mu c_v}{k} \quad (4-8)$$

C_p et C_v représentent les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

En supposant que le fluide est parfait (l'énergie interne $e = C_v T$ et l'enthalpie $h = C_p T$), le flux de chaleur peut s'écrire :

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{P_r} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (4-9)$$

La conservation d'une quantité veut dire que sa variation totale dans un volume arbitraire peut être exprimée par le bilan de la quantité transportée à travers les frontières et toutes les forces et les sources internes ou externes qui affectent le volume. La quantité qui travers les frontière est appelée flux ce dernier est divisé en un flux convectif et un flux diffusif.

4.2 Equations moyennées

La résolution des équations de Navier-Stokes demeure encore très difficile et très coûteuse en temps, malgré les avancées technologiques sur la puissance des calculateurs. Afin de pallier ce problème, il convient de décomposer le mouvement instantané en une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette décomposition, s'effectue selon le formalisme de Favre [142]. On utilise une moyenne pondérée par la masse, $\tilde{\phi}$ obtenue en effectuant le rapport $\overline{\rho\phi}/\bar{\rho}$ et qui est appliqué à toutes les variables. Ainsi, une quantité instantanée ϕ de l'écoulement est décomposée selon Reynolds en une partie moyenne $\bar{\phi}$ et une partie fluctuante ϕ' :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad \text{Où} \quad \bar{\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \phi(t) dt \quad (4-10)$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées peuvent contenir des termes additionnels comme les tenseurs des contraintes de Reynolds. Ces équations moyennées sont simplifiées pour les écoulements compressibles en utilisant la formule de Favre. La méthode de Favre consiste à décomposer la quantité instantanée, par exemple la composante de la vitesse u_i , en une partie moyenne $\bar{u}_i$ pondérée par la masse et une partie fluctuante u'_i , où :

$$\bar{u}_i = \frac{\overline{\rho u_i}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho(\vec{x}, \tau) u_i(\vec{x}, \tau) d\tau \quad (4-11)$$

Les grandeurs de fluide sont écrites selon la moyenne de Favre par la suite :

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u'_i \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= \bar{p} + p' \\ h &= \bar{h} + h' \\ e &= \bar{e} + e' \end{aligned} \quad (4-12)$$

En remplaçant les quantités précédentes dans les équations de Navier-Stokes, nous obtenons, pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j) = 0 \quad (4-13)$$

Pour l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} (-\bar{\rho} u'_i u'_j) \quad (4-14)$$

Où le terme $-\bar{\rho} u'_i u'_j$ représente les contraintes de Reynolds (flux turbulents de la quantité de mouvement). Pour achever la fermeture du système d'équations, ce terme doit être modélisé. Les modèles de turbulence utilisés dans le code *FASTRAN* utilisent le concept de la viscosité turbulente de Boussinesq, dans lequel la contrainte de Reynolds est supposée comme une fonction linéaire des taux de déformation :

$$-\bar{\rho} u'_i u'_j = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (4-15)$$

μ_t : La viscosité turbulente et k : L'énergie turbulente $k = \frac{1}{2} \bar{u}_i u'_i u'_i$.

La formule de Favre considérée comme une simplification mathématique. La dérivation de ces équations moyennées *FANS* (Favre-Averaged Navier-Stokes équations), sont obtenues en remplaçant l'équation (4-14) dans l'équation (4-15) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_i u_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \mu_t \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} k) \quad (4-16)$$

De même pour l'équation d'énergie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_j h) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} u_j h'' \quad (4-17)$$

Des termes additionnels sont apparus. Le premier terme est l'enthalpie fluctuante, elle peut être écrite sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} u_j h'' = \Gamma_t \frac{\partial h}{\partial x_j} = c_p \Gamma_t \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-18)$$

$$\Gamma_t : \quad \text{La diffusivité turbulente } \Gamma_t = \frac{\mu_t}{Pr_t}$$

$$Pr_t : \quad \text{Le nombre turbulent de Prandtl.}$$

Le deuxième terme est le taux de dissipation de l'énergie turbulente ε qui dépend du modèle de turbulence. On obtient le taux de dissipation par la résolution de l'équation de ε . Pour le modèle $k - \varepsilon$, ce terme est défini par :

$$\tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{\rho} \varepsilon \quad (4-19)$$

4.3 La couche limite

La couche limite est une zone située au voisinage d'un corps immergé dans un fluide en mouvement, en dehors de laquelle, les effets de la viscosité sont négligeables.

4.3.1. Couche limite sans gradient de pression

La précision et la performance d'une simulation numérique de l'écoulement turbulent est conditionnée par la manière avec laquelle la région au voisinage des parois est modélisée. Pour mettre en évidence cet aspect on rappelle ici quelques généralités concernant la couche limite sans gradient de pression dans le cas bidimensionnel (cas d'une plaque plane turbulente). Pour une description plus détaillée, on pourra se reporter à Cousteix [143].

On peut distinguer deux zones principales dans la couche limite : la région interne et la région externe. Le raccord entre ces deux régions est assuré par la zone logarithmique. Le frottement dans l'écoulement est défini par :

$$\tau = -\overline{\rho u'v'} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4-20)$$

$$-\overline{\rho u'v'} : \text{Frottement turbulent} \qquad \mu \frac{\partial u}{\partial y} : \text{Frottement visqueux}$$

4.3.1.1. La région interne

Elle correspond à la région près de la paroi. Dans cette zone, les vitesses étant faibles, on utilise donc des échelles de vitesse et de longueur basées sur le frottement à la paroi et la viscosité. On peut ainsi définir la vitesse de frottement :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}} \quad \text{Ou :} \quad \tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4-21)$$

On introduit une vitesse et une distance adimensionnelles appelées les « les variables de paroi ».

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (4-22)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

- Sous couche laminaire

Au voisinage immédiat de la paroi, les contraintes turbulentes tendent vers zéro et la viscosité laminaire domine largement la viscosité turbulente (voir figure 4.1), d'où :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4-23)$$

Par définition de la vitesse de frottement et en approchant la dérivée de la vitesse par son approximation linéaire, on peut écrire :

$$\tau_p = \rho_p u_\tau^2 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx \mu \frac{u}{y} \quad (4-24)$$

Soit :

$$\frac{u}{u_\tau} = y \frac{\rho_p u_\tau}{\mu} \quad (4-25)$$

On écrit une loi de la vitesse en fonction de la distance à la paroi. Si on réécrit cette expression en fonction des variables de paroi, on obtient la loi linéaire. Au voisinage

immédiat de la paroi, les contraintes turbulentes tendent vers zéro et la viscosité laminaire domine largement la viscosité turbulente (voir figure 4.1), d'où :

$$u^+ = y^+ \quad (4-26)$$

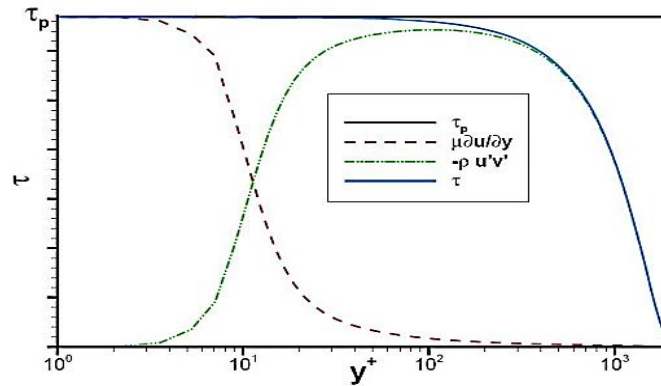


Figure. 4.1 : Evolution des composantes du frottement dans la couche limite [143].

- la zone tampon

Dans cette zone, les effets visqueux diminuent devant le frottement turbulent mais ne sont pas complètement négligeables. Cette zone correspond à $5 \leq y^+ \leq 30$.

4.3.1.2. La région externe

Dans cette région, la vitesse longitudinale s'éloigne peu de la vitesse u_e à l'extérieur de la couche limite. On représente donc le profil de vitesse dans cette zone par un profil déficitaire. La vitesse de frottement u_τ définie précédemment reste à l'échelle de vitesse du mouvement turbulent. Par contre, l'échelle de longueur est basée sur l'épaisseur de la couche limite δ , qui correspond à la taille caractéristique des structures turbulentes.

$$\frac{u_e - \tilde{u}}{u_\tau} = F(n) \quad , \quad \text{avec} \quad n = \frac{y}{\delta} \quad (4-27)$$

D'autre part, on a une relation vitesse dans le sillage et le coefficient de frottement C_f :

$$C_f = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} \quad ; \quad u_e^+ = \frac{u_e}{u_\tau} = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \quad (4-28)$$

- la zone logarithmique

Elle appartient à la fois aux zones interne et externe qu'elle permet de raccorder. Au-delà de la zone tampon, le frottement est essentiellement une contrainte de cisaillement turbulent, on a donc :

$$\tau = \tau_p = -\rho \overline{u'v'} \quad (4-29)$$

En utilisant la vitesse de frottement définie précédemment, on obtient pour la contrainte de Reynolds :

$$\overline{u'v'} = u_\tau^2 \quad (4-30)$$

Cette vitesse de frottement apparaît donc comme une échelle caractéristique des fluctuations de vitesse. Comme la viscosité n'intervient plus dans cette zone, il faut construire par analyse dimensionnelle, une expression pour $\partial u / \partial y$ avec les échelles déjà définies :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{Ky} \quad (4-31)$$

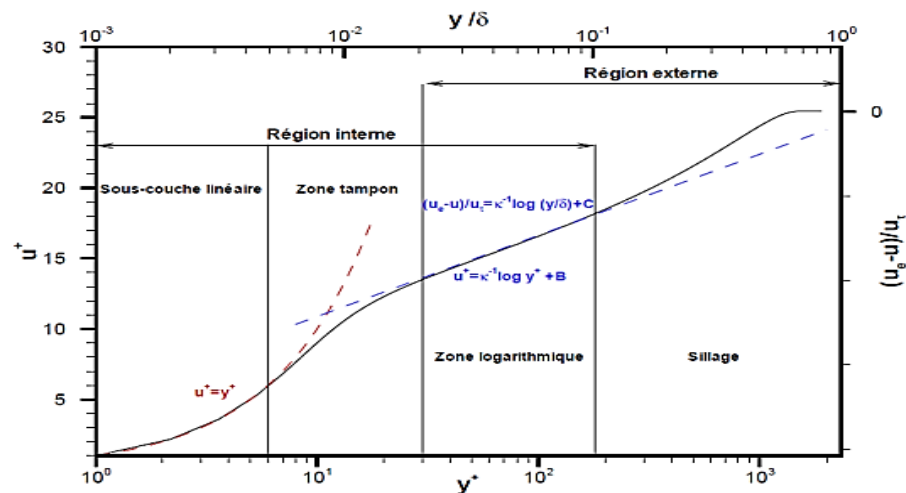
En intégrant, on obtient :

$$u^+ = \frac{1}{k} \log(y^+) + C \quad (4-32)$$

Où $k=0.41$ est la constante de Von Karman. C la constante d'intégration.

Les essais en souffleries montrent que la constante C est proche de 5.

La loi logarithmique est valable pour des valeurs de y^+ supérieures à environ 30. Les expériences montrent aussi que loi linéaire est valable tant que $u^+ = y^+$ (voir figure 4.2).



4.3.2. Couche limite avec gradient de pression

Le ralentissement de la couche limite trouve son origine principalement dans la présence d'un gradient de pression. Lorsque ce gradient de pression sera trop fort, on aura un décollement de la couche limite. On a vu dans le paragraphe précédent que l'étendue de la zone logarithmique dépend des conditions extérieures de l'écoulement.

Cousteix [143] montre que la pente de la loi logarithmique reste constante pour une couche limite soumise à un gradient de pression positif. L'effet du gradient de pression se manifeste sur l'étendue de la zone logarithmique, qui se réduit au fur et à mesure que le gradient de pression augmente (voir figure 4.3).

Si on regarde l'évolution du coefficient de frottement suivant le gradient de pression (voir figure 4.3), on voit que (u_e^+) augmente avec l'intensité du gradient de pression, u_e^+ correspond à la vitesse extérieure, ce qui correspond à une diminution du coefficient de frottement pariétal C_f . Lorsque le frottement devient négatif, la couche limite décolle.

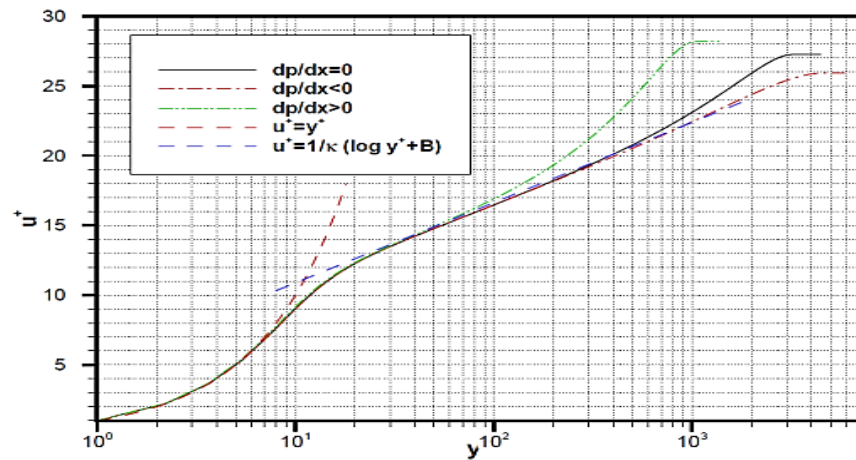


Figure. 4.3 : Évolution de la couche limite suivant le gradient de pression [143].

4.4 Hypothèses et lois de comportement

4.4.1. L'état du fluide

Les fluides considérés dans les écoulements de tuyères sont des gaz. La masse volumique des gaz est suffisamment faible pour que les effets de gravité puissent être négligés. On suppose également l'absence de toute force magnétique ou électrique sur le fluide. Ainsi les forces volumiques $\vec{f}$ sont considérées nulles :

$$\rho \vec{f} = 0 \quad (4-33)$$

4.4.2. Le comportement thermodynamique

La loi d'état adoptée, décrivant les variations de pression statique liées aux variations de températures. En supposant que le fluide dans la tuyère est un gaz sous effets de haute température. Un écoulement calorifiquement imparfait, thermodynamiquement parfait. La pression et l'énergie interne sont données par [124] :

$$p = \rho r T \quad (4-34)$$

$$e = c_v \Delta T \quad (4-35)$$

C_v : La chaleur spécifique à volume constant.

La constante du gaz r représente le rapport de la constante universelle des gaz parfait ($R=8.314 \text{ J.mole}^{-1}.K^{-1}$) la masse molaire du gaz considéré :

$$r = \frac{R}{M} \quad (4-36)$$

r : relié aux chaleurs spécifiques C_v, C_p par la relation de Meyer :

$$r = C_p - C_v \quad (4-37)$$

La pression peut être donnée en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement par :

$$p = \rho(\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}v^2\right) \quad (4-38)$$

Où γ est le rapport des chaleurs spécifiques donné par :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (4-39)$$

4.4.3. Le comportement dynamique

Les fluides dans les écoulements de tuyères sont des fluides réels, c'est-à-dire de point de vue dynamique des fluides visqueux. En adoptant l'hypothèse du fluide Newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\tau}$ est donné par la loi :

$$\overline{\tau} = 2\mu \overline{S} + \varsigma (\text{div}(\vec{V})) \overline{I} \quad (4-40)$$

μ : Le coefficient de viscosité moléculaire ς : Le coefficient de viscosité volumique.

En utilisant l'hypothèse de Stokes :

$$3\varsigma + 2\mu = 0 \quad (4-41)$$

Le coefficient de viscosité volumique ς est donné en fonction de μ par :

$$\varsigma = -\frac{2}{3}\mu \quad (4-42)$$

Le tenseur des taux de déformation $\overline{S}$ est relié au gradient de vitesse par la relation :

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \left[\overline{\vec{V} \text{ grad}} + (\overline{\text{grad} \vec{V}}) \right] \quad (4-43)$$

Le tenseur des contraintes peut être donné en fonction du vecteur vitesse $\vec{v}$ par :

$$\overline{\tau} = \mu \left[\overline{\text{grad} \vec{V}} + (\overline{\text{grad} \vec{V}}) \right] - \frac{2}{3} \mu (\text{div}(\vec{V})) \overline{I} \quad (4-44)$$

4.4.4. Le comportement thermique

Les fluides dans les écoulements de tuyères sont des fluides conducteurs de chaleur. Selon la loi de Fourier, le vecteur de flux de chaleur $\vec{q}$ (flux de chaleur par unité de surface et de temps) est proportionnel au gradient de température:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}(T) \quad (4-45)$$

Où λ est le coefficient de la conductivité thermique.

Ce coefficient peut être écrit en fonction du nombre de Prandtl, qui exprime le rapport entre les effets thermiques et les effets visqueux. Le nombre de Prandtl s'écrit :

$$Pr = (\mu c_p) / \lambda \quad (4-46)$$

Le nombre de Prandtl est supposé constant : $Pr = 0.72$ pour l'air.

La viscosité dynamique est donnée par la loi de Sutherland. Elle se mesure en pascal-seconde (Pa.s) [133] :

$$\mu(T) = \frac{B_s \sqrt{T}}{1 + \frac{C_s}{T}} \quad (4-47)$$

Dans le cas de l'air la formule de Sutherland est bien vérifiée jusqu'à des températures de 3000K [133]. Les valeurs des constantes de la loi de Sutherland sont :

$$B_s = 1.454 \cdot 10^{-6} \text{ et } C_s = 110.4$$

4.5 Méthodes et calcul numériques : Présentation du code

Ce paragraphe est consacré à la présentation du code de calcul utilisé pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées obtenues précédemment. Ainsi, la discrétisation de ces équations est illustrée en utilisant la méthode des volumes finis, utilisée dans le code du calcul (*CFD-FASTRAN* [145]). Les différents modèles de turbulence de type *RANS* : Baldwin-Lomax, Spalart-Allmaras, $k - \varepsilon$, $k - \omega$ et *SST- $k - \omega$* de Menter sont exposés en détail. Enfin, nous présenterons les différentes étapes suivies lors des simulations numériques (maillage, conditions initiales et aux limites, convergence et post-traitement).

4.5.1. Le système complet des équations de Navier-Stokes

Les lois de conservation précédentes seront rassemblées en un système d'équations pour une vue beaucoup plus générale des différents termes. Pour cela on se rapporte à la loi générale de la conservation d'une quantité vectorielle, on introduit le vecteur $\vec{F}_c$ relié au transport convectif des quantités, et un vecteur $\vec{F}_v$ vecteur des flux visqueux.

Alors les équations de Navier-Stokes en 3-D représentent un système de cinq (05) équations pour les cinq variables conservatives : $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$, et ρE . Mais on voit qu'il y a sept (07) inconnues d'où la nécessité de deux relations additionnelles de la thermodynamique entre les variables d'état.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \overline{W} dW + \oint_{\partial\Omega} (\overline{F_C} - \overline{F_v}) ds = \int_W \overline{Q} dW \quad (4-58)$$

$$\begin{aligned} \overline{F_C} &= \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho H V \end{bmatrix} & \overline{F_v} &= \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} & \overline{W} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \\ \overline{Q} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho f_e \overline{V} + q_h \end{bmatrix} & \Theta_x &= u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \\ & & \Theta_y &= u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \\ & & \Theta_z &= u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

4.5.2. Propriété du gaz et conditions aux limites

Le code *CFD FASTRAN* intègre un solveur volumes finis destiné à simuler les écoulements à haute température et vitesse avec prise en compte de multiples corps en mouvement ainsi que l'aéro-thermochimie, en régime stationnaire ou instationnaire. L'écoulement est supposé turbulent. Le fluide suit la loi des gaz calorifiquement imparfait. La viscosité dynamique est donnée par la loi de Sutherland :

$$\mu = \frac{1.458 \cdot 10^{-6} T^{3/2}}{110.4 + T} \quad (4-94)$$

La condition d'entrée du fluide dans la tuyère est supposée subsonique avec des valeurs de M , p et T spécifiées pour chaque configuration. Les conditions de sortie externe sont supposées à pression imposée (1bar). Les parois des tuyères sont considérées comme adiabatiques.

4.5.3. Discrétisation des équations par la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis utilise directement les lois de conservation sous la forme intégrale, elle commence par diviser l'espace physique en un nombre de volumes de contrôle, l'intégrale de surface est approximée par la somme des flux traversant chaque face du volume de control. La précision de la discrétisation spatiale dépend du schéma avec lequel les flux sont évalués. Il y a deux approches pour définir le volume de contrôle afin de calculer les flux convectif et visqueux (voir figure 4.4) :

- Cell centred schemes : Dans ce cas les quantités sont définies aux centres des mailles et les volumes de contrôle sont identiques aux mailles.
- Cell vertex schemes : Ici les variables sont définis aux nœuds des mailles, les volumes de contrôle sont soit l'union de toutes les mailles partageant le même nœud soit des volumes centrées sur les nœuds.

Dans cette approche, le domaine de calcul est discrétisé en volumes de contrôle dans lesquels les équations gouvernant l'écoulement sont intégrées numériquement. Une cellule de volume de contrôle est illustrée sur la figure 4.5, où P désigne le centre géométrique de la cellule.

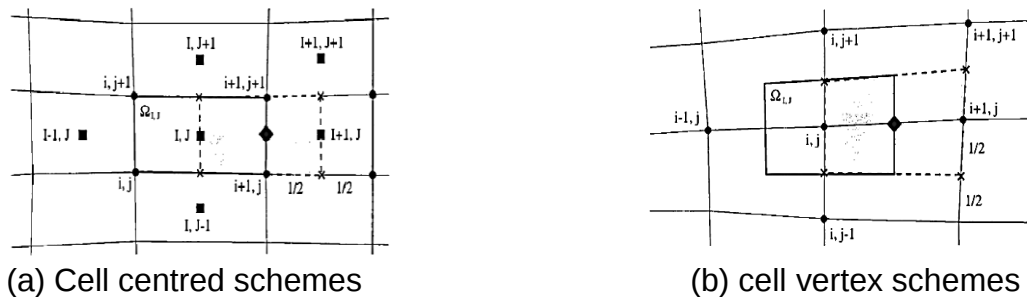


Figure. 4.4: Volume de contrôle en 2-D [142].

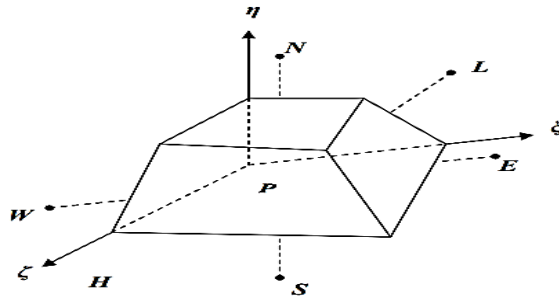


Figure. 4.5: Volume de contrôle dans une configuration tridimensionnelle.

L'équation de continuité dans le système de coordonnées $\xi \eta \zeta$, est donnée par :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} (J \bar{\rho} \varepsilon^K) = 0 \quad (4-48)$$

L'intégration de l'équation (4.48) sur le volume de contrôle nous donne :

$$\frac{\overline{\rho^n V_p^n} - \overline{\rho^{n-1} V_p^{n-1}}}{\Delta t} + G_e - G_w + G_n - G_s + G_h - G_l = 0 \quad (4-49)$$

G : représente le flux de la masse à travers les faces du volume de contrôle, n et $n-1$ représentent respectivement le pas actuel de temps et le pas précédent. Les indices w , e , s , n , l , et h sont relatifs aux six faces du volume de contrôle.

Toutes les équations gouvernant le problème, à l'exception de l'équation de continuité, peuvent être écrites sous la forme généralisée suivante:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (J \overline{\rho \phi}) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left[J \overline{\rho (V_{\varepsilon^K}) \phi} \right] = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left[J \Gamma g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_K} \right] \quad (4-50)$$

Où ϕ est une variable de l'écoulement, Γ la diffusivité effective, J la matrice jacobéenne et $\xi_K = \xi_K(x, y, z)$. Les termes du membre de gauche de l'équation sont appelés respectivement terme transitoire et convectif et le troisième terme dans le partie à droit de l'équation est le terme diffusif :

$$\Gamma = \frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \quad (4-51)$$

La méthode des volumes finis repose sur l'intégration de l'équation (4.50) sur le volume de contrôle :

$$\iiint_V \left[\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (J \overline{\rho \phi}) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left\{ J \overline{\rho (V_{\varepsilon^K}) \phi} \right\} \right] J d\xi d\eta d\zeta = \iiint_V \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left[J \Gamma g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_K} \right] J d\xi d\eta d\zeta \quad (4-52)$$

$\overline{V}$: Le vecteur vitesse. Il est préférable d'effectuer l'intégration terme par terme, d'où :
L'intégration du terme transitoire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (J \overline{\rho \phi}) J d\xi d\eta d\zeta = \frac{\overline{\rho^n \phi^n V^n} - \overline{\rho^{n-1} \phi^{n-1} V^{n-1}}}{\Delta t} \quad (4-53)$$

Le terme convectif est donné par :

$$C = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left\{ J \overline{\rho (V_{\varepsilon^K}) \phi} \right\} \quad (4-54)$$

L'intégration du terme convectif sur le volume de contrôle donne :

$$G_e - G_w + G_n - G_s + G_h - G_l = G_e \phi_e - G_w \phi_w + G_n \phi_n - G_s \phi_s + G_h \phi_h - G_l \phi_l \quad (4-55)$$

Le terme diffusif peut être divisé en deux parties : la première partie est la diffusion principale ($i=k$), tandis que la deuxième est de la diffusion transversale ($i \neq k$).

Pour la première partie :

$$D_m^1 = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_K} \left[J \Gamma g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_K} \right] \quad k=1, 2, 3 \quad (4-56)$$

Pour $K=1$ l'intégration de l'équation donne:

$$\iiint_V D_m^1 J d\xi d\eta d\zeta = \left[J \Gamma g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_K} \right]_e - \left[J \Gamma g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_K} \right]_w \quad (4-57)$$

4.5.4. Modèles de turbulence

Malgré la puissance des calculateurs actuels, la résolution des équations de Navier-Stokes instantanées dans le cas des écoulements turbulents à géométrie complexe, ne peut être envisagée à l'heure actuelle. Pour capturer de manière correcte toutes les échelles spatio-temporelles actives dans un écoulement turbulent, depuis celle des plus grands tourbillons imposées jusqu'aux plus petits tourbillons, un maillage de résolution de l'ordre de celle-ci est nécessaire. Cette approche, appelée Simulation Numérique Directe ou *DNS* (Direct Numerical Simulation), reproduit de façon détaillée et fidèle la physique des phénomènes étudiés, mais elle se confronte à des contraintes sévères de stockage de données et de temps de calcul.

Deux approches sont utilisées pour résoudre le problème de turbulence, la modélisation instationnaire et la modélisation statistique de la turbulence.

La modélisation instationnaire de la turbulence consiste à résoudre la dynamique des grandes et moyennes échelles, et de modéliser les petites échelles. Cette approche est appelée la simulation des grandes échelles ou *LES* (Large Eddy Simulation). Pour cette approche, les calculs doivent être nécessairement instationnaires. Elle nécessite un maillage très fin, donc un coût de stockage et de calcul encore très coûteux.

La modélisation statistique de la turbulence consiste à modéliser toutes les échelles de turbulence. Elle utilise un traitement statistique pour transformer le système des équations de Navier-Stokes instantanées en un système d'équations de Navier-Stokes moyennées en temps. Cette approche est appelée l'approche RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Elle permet de réduire le coût de calcul, tout en garantissant un bon niveau de précision.

Plusieurs modèles de turbulence sont disponibles dans le code *CFD-FASTRAN* [145], du modèle à zéro équation (algébrique) au modèle à deux équations de transport.

Le modèle à zéro équation utilise des relations algébriques pour relier les fluctuations de l'écoulement aux grandeurs moyennes des variables en utilisant des constantes expérimentales. Les modèles à une et à deux équations utilisent des équations aux dérivées partielles pour atteindre le même but.

L'écoulement au voisinage des parois est composé de trois couches : une sous-couche visqueuse, une couche tampon où les effets visqueux et turbulent sont du même ordre et une couche inertielle (turbulente). L'épaisseur des deux premières couches et les profils de vitesse au voisinage de la paroi sont des paramètres importants pour les modèles de turbulence. On utilise souvent une distance y^+ et une vitesse U^+ adimensionnées pour définir les couches au voisinage de la paroi:

$$y^+ = \frac{\rho y U_\tau}{\mu} \quad (4-59)$$

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} \quad (4-60)$$

Où U_τ est la vitesse de frottement :
$$U_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{0.5}.$$

4.5.4.1. Modèle de baldwin-Lomax

Ce modèle est un modèle algébrique à zéro équation de turbulence. Il utilise des relations algébriques pour lier la vitesse et la longueur caractéristique aux grandeurs moyennes de l'écoulement. La prévision de la turbulence et des discontinuités sur les parois est donc difficile. Le modèle de Baldwin-Lomax utilise différentes expressions de la viscosité turbulente relatives aux régions interne et externe de la couche limite.

$$\overline{\mu}_t = \begin{cases} \left(\overline{\mu}_t \right)_{in} & \text{pour } (y \leq y_c) \\ \left(\overline{\mu}_t \right)_{out} & \text{pour } (y \geq y_c) \end{cases} \quad (4-61)$$

Où y est la distance normale de la paroi et y_c est le point où les valeurs de la viscosité des couches interne et externe sont égales. La viscosité turbulente dans la couche interne est obtenue par l'équation :

$$\left(\overline{\mu}_t \right)_{in} = \overline{\rho} l^2 \left| \overline{\omega} \right| \quad (4-62)$$

l : L'échelle de la longueur caractéristique $l = \kappa y \left[1 - \exp \left(-y^+ / A^+ \right) \right]$

ω : La vorticité $\overline{\omega} = \overline{\nabla} \times \overline{V}$ est reliée à l'échelle du temps turbulent par $\tau = \omega^{-1}$

κ, A^+ valent 0.4 et 26.0 respectivement.

L'échelle caractéristique de la vitesse est donc :

$$q = l \left| \vec{\omega} \right| = l \left| \nabla \times \vec{U} \right| \quad (4-63)$$

La viscosité turbulente dans la couche externe est estimée par l'équation :

$$\left(\bar{\mu}_t \right)_{out} = \bar{\rho} K F_w F_k (y) \quad (4-64)$$

Où les expressions $F_w, F_k (y)$ sont estimées par les fonctions :

$$F_w = \min \left(\frac{y_{max} q_{max}}{\kappa}, \frac{C_\omega y_{max} U_{dif}^2}{q_{max}} \right) \quad (4-65)$$

$$F_k (y) = \frac{1}{\left[1 + 5.5 \left(\frac{C_k y}{y_{max}} \right)^6 \right]} \quad (4-66)$$

q_{max} : La valeur maximale de la vitesse turbulente et y_{max} la valeur maximale de y quand q est maximale. La quantité U_{dif} est la différence entre la vitesse maximale et la vitesse minimale dans le profil :

$$U_{dif} = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)_{max} - (u^2 + v^2 + w^2)_{min}} \quad (4-67)$$

Avec les constantes : $C_k = 0.3$; $C_\omega = 0.1$; $k = 0.0269$

4.5.4.2. Modèle $k - \varepsilon$

Le modèle de $k - \varepsilon$ [146] est un modèle à deux équations de transport pour évaluer la viscosité tourbillonnaire. Il résout deux équations aux dérivées partielles pour obtenir l'énergie cinétique turbulente k et sa dissipation ε , ces équations sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j k) = \bar{\rho} P - \bar{\rho} \varepsilon + \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{P_{rk}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4-68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u_j \varepsilon) = C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\rho} P \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\rho} \varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{P_{rk}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4-69)$$

Où P est le taux de production de l'énergie cinétique turbulente donnée par l'équation :

$$P = u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} k \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \quad (4-70)$$

Avec les constantes [146] : $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $P_{rk} = 1.0$ et $P_{r\varepsilon} = 1.3$.

Les effets visqueux sont plus importants que les effets turbulents au voisinage de la paroi. Une loi de paroi (wall function) est, par conséquent, appliquée dans cette région

et le modèle de turbulence résout le champ dans le reste du domaine de l'écoulement.

Dans la loi de paroi,

- l'échelle de la vitesse est prise comme $q = k^{0.5}$.

- l'échelle de la longueur est modélisée par : $l = \frac{C_{\mu}^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon}$

- k et ε sont reliés par des expressions semi-empiriques à la vitesse de frottement μ_{τ} :

$$k = \frac{u_{\tau}^2}{\sqrt{C_{\mu}}} \quad (4-71)$$

$$\varepsilon = \frac{C_{\mu}^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (4-72)$$

- La viscosité turbulente est exprimée par :

$$\nu_t = \frac{C_{\mu} k^2}{\varepsilon} \quad (4-73)$$

Dans l'approche standard de la loi de paroi, le profil de la vitesse est estimé depuis la paroi jusqu'à la première maille par les relations suivantes [146] :

$$u^+ = y^+ \text{ Pour } y^+ \leq 11.5, u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \text{ Pour } y^+ \geq 11.5 \quad (4-74)$$

Où les constantes k , E sont déterminées expérimentalement, et valent : 0.4 et 9.0 respectivement. Le concept de loi de paroi est valable dans le cas où la valeur de la distance au centre de la première maille voisine à la paroi est telle que $y^+ > 30$.

4.5.4.3. Modèle $k - \omega$

Le modèle de $k - \omega$ [146] est un modèle à deux équations de transport. Les équations à résoudre sont : l'équation de l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation spécifique ω . La viscosité turbulente est exprimée par : $\nu_t = C_{\mu} \frac{k}{\omega}$ et les équations de transport sont illustrées par les équations suivantes [146]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_j k) = \bar{\rho} P - \bar{\rho} \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{P_{rk}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4-75)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_j \omega) = C_{\omega 1} \frac{\bar{\rho} P_{\omega}}{k} - C_{\omega 2} \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}_t}{P_{r\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4-76)$$

Avec les constantes [146] : $C_{\mu} = 0.09$, $C_{\omega 1} = 0.555$, $C_{\omega 2} = 0.833$, $P_{rk} = 2.0$ et $P_{r\omega} = 2.0$.

Les conditions de k et ω sur la paroi sont :

$$k = 0 \text{ Pour } y = 0, \quad \omega = 7.2 \frac{v}{y} \text{ Pour } y = y_1 \quad (4-77)$$

Où y_1 est la distance entre la paroi et le centre de la première maille. Pour avoir des solutions précises, le centre de la première maille doit être positionné plus près de la paroi. Ce modèle exige donc un maillage très fin au voisinage des surfaces solides. Une distance adimensionnée proche de l'unité $y^+ = 1$ est généralement préconisée.

4.5.4.4. Modèle SST- $k-\omega$ de Menter

La viscosité turbulente peut s'obtenir à partir d'une relation algébrique, d'une équation de transport ou de plusieurs équations de transport [147]. Dans cette étude, on a utilisé le modèle à 2 équations de transport $k-\omega$ de Menter avec la correction SST (Shear Stress Transport) vu son efficacité et sa grande popularité dans les études numériques de calcul des écoulements compressibles dans les tuyères [23], [25], [148].

Le modèle $k-\omega$ de Menter [149] consiste en une combinaison du modèle $k-\omega$ de Wilcox [150] et $k-\epsilon$ de Launder-Sharma [151] via une fonction de raccord de Menter F_1 . La fonction de Menter contribue à privilégier le modèle de Wilcox, étant donné sa robustesse dans la région interne des couches limites, dans les zones des écoulements soumises à de forts gradients de pression adverse et dans les zones de décollement. D'autre part la fonction de Menter permet de basculer progressivement vers le modèle $k-\epsilon$ de manière à profiter de sa supériorité dans la zone de sillage.

La fonction de dissipation spécifique ω est reliée à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente ϵ par la relation suivante :

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k} \quad \text{Avec } \beta^* = 0.09 \quad (4-78)$$

La viscosité turbulente est calculée en fonction de l'énergie cinétique turbulente k et de la dissipation spécifique ω par :

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho} k / \omega}{\max [1, \Omega F_2 / a_1 \omega]} \quad (4-79)$$

$$\Omega = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4-80)$$

Avec Ω la norme du tenseur de viscosité et $a_1 = 0.31$.

La fonction F_2 permet d'éviter à la limitation SST de s'appliquer en dehors des couches limites. Elle est donnée en fonction de la distance à la paroi par :

$$F_2 = \tanh \left\{ \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}; \frac{500 \mu}{\rho \omega y^2} \right)^2 \right\} \quad (4-81)$$

Le modèle de Menter repose sur le transport de deux équations, une pour l'énergie cinétique turbulente et une autre pour la dissipation spécifique :

$$\frac{\partial \bar{\rho k}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho k} \bar{V}) = \text{div}[(\mu + \sigma_k \mu_k) \overline{\text{grad}(k)}] + S_k \quad (4-82)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho \omega}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho \omega} \bar{V}) = \text{div}[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \overline{\text{grad}(\omega)}] + S_\omega \quad (4-83)$$

Les termes sources du modèle S_k, S_ω s'écrivent :

$$S_k = P_k - \beta^* \bar{\rho k \omega} \quad (4-84)$$

$$S_\omega = \frac{\gamma \bar{\rho}}{\mu_t} P_k - \beta \bar{\rho \omega^2} + 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho \sigma_\omega}}{\omega} \overline{\text{grad}(k)} \cdot \overline{\text{grad}(\omega)} \quad (4-85)$$

Avec P_k production de k :

$$P_k = \bar{\tau^t} : \overline{\text{grad}(\bar{V})} \quad (4-86)$$

Les constantes du modèle s'obtiennent par pondération des constantes du modèle de Wilcox et de Launder-Sharma en utilisant la fonction de Menter F_1 :

$$C_{ste} = F_1 C_{ste1} + (1 - F_1) C_{ste2} \quad (4-87)$$

Les constantes du modèle sont les suivantes :

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \kappa = 0.41$$

$$\sigma_{k2} = 0.85, \quad \sigma_{\omega2} = 0.5, \quad \beta_2 = 0.075, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \kappa = 0.41$$

La fonction de Menter F_1 permet d'utiliser le modèle de Wilcox $k-\omega$ dans la sous-couche visqueuse et la région logarithmique ($F_1 = 1$) et basculer progressivement vers $k-\epsilon$ à mesure qu'on s'approche de la zone de sillage ($F_1 = 0$). Cette fonction s'écrit :

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (4-88)$$

$$\arg_1 = \min[\max(T_1, T_2), T_3] \quad (4-89)$$

$$T_1 = \frac{500 \mu_t}{\rho \omega y^2}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \quad T_3 = \frac{4 \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} k}{D_{k\omega} y^2}$$

$$D_{k\omega} = \max \left(\frac{\bar{\rho} \sigma_{\omega 2}}{\omega} \text{grad}(k) \cdot \text{grad}(\omega); 10^{-20} \right) \quad (4-90)$$

Le terme F_1 intervient dans la sous-couche visqueuse, le terme F_2 , dans la zone logarithmique et le terme F_3 , dans l'écoulement externe.

La viscosité turbulente μ_t est déterminée par le modèle de turbulence à deux équations de transport $k-\omega$ de Menter avec la correction *SST* (Shear Stress transport).

4.5.4.5. Modèle de Spalart-Allmaras

Le modèle de Spalart-Allmaras [152] est un modèle à une équation. Il résout en général une équation de transport liée à la viscosité turbulente μ_t [152] :

$$\mu_t = \rho \nu f_{\nu 1} \quad (4-91)$$

Et l'équation de transport :

$$\frac{D\nu}{Dt} = c_{b1} S \nu + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \nu) \frac{\partial \nu}{\partial x_j} + c_{b2} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \right] - c_{w1} f_w - \left(\frac{\nu}{d} \right)^2 \quad (4-92)$$

Le modèle de Spalart-Allmaras exige comme le modèle $k-\omega$ et *SST* un maillage raffiné sur les parois, avec une valeur de $y^+ \approx 1$.

4.5.5. le Modèle turbulence adopté en 2D axisymétrique

Dans les écoulements la tuyère supersonique axisymétrique, il est possible de restreindre le domaine de calcul 3D en 2D axisymétrique. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes *URANS* (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) seront écrites dans un système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) , auquel on associe le vecteur vitesse $\vec{V}(\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta)$. Le modèle adopté pour la modélisation des écoulements compressible dans les tuyères supersoniques est le modèle *URANS* couplé avec le modèle *SST* Menter à deux équations de transport $k-\omega$. Le modèle est écrit en coordonnées axisymétriques.

Les variables conservatives $(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{v}_x, \bar{\rho} \tilde{v}_r, \bar{\rho} E_{ef}, \bar{\rho} k, \bar{\rho} \omega)$ s'expriment par rapport aux deux coordonnées spatiales (x, r) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \tilde{v}_r) \\
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_x + \bar{p}_{ef}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_r) = \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{\tau}_{xr}) \\
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{v}_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \tilde{v}_r \tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_r + \bar{p}_{ef}) = \frac{\partial \tilde{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tilde{\tau}_{xr}) + \frac{p_{ef} - \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} \\
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} E_{ef}) + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\rho} E_{ef} + \bar{p}_{ef}) \tilde{v}_x] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\bar{\rho} E_{ef} + \bar{p}_{ef}) \tilde{v}_r] = \frac{\partial}{\partial x}[\tilde{\tau}_{xx} \tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{xr} \tilde{v}_r + \overline{q_x}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\tilde{\tau}_{xr} \tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{rr} \tilde{v}_r + \overline{q_r})] \\
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} k \tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} k \tilde{v}_r) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{P_{rk}} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{P_{rk}} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + S_k \\
& \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \omega \tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} \omega \tilde{v}_r) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{P_{r\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{P_{r\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + S_\omega
\end{aligned} \right. \quad (4-93)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \tilde{\tau}_{xx} = 2 \left(\mu + \mu_t \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{V} \right) \\
& \tilde{\tau}_{rr} = 2 \left(\mu + \mu_t \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \text{div} \vec{V} \right) \\
& \tilde{\tau}_{xr} = 2 \left(\mu + \mu_t \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) \\
& \tilde{\tau}_{\theta\theta} = 2 \left(\mu + \mu_t \right) \left(\frac{\tilde{v}_r}{r} \right) \\
& \text{div} \vec{V} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r}
\end{aligned} \right. \quad (4-94)$$

4.5.6. Maillage

La réalisation d'un maillage approprié au problème traité est l'une des étapes les plus importantes dans les simulations numériques. L'adaptation du maillage aux conditions aux limites du problème est primordiale dans ce type de calcul. Un maillage structuré est utilisé dans tous les calculs 2D et 3D réalisés. Ce type de maillage permet de contrôler de façon rigoureuse l'épaisseur des mailles dans des endroits précis (au voisinage des parois par exemple). Le seul problème que l'on rencontre dans ce type de maillage par rapport au maillage non structuré est l'augmentation du nombre de mailles lors de son raffinement dans les zones sensibles à étudier. Le domaine total de calcul est subdivisé en plusieurs blocs, le raffinement de chaque bloc dépend de l'importance des zones étudiées. Dans notre étude par exemple, on s'intéresse à l'écoulement dans la partie divergente de la tuyère. Dans ce cas, le divergent de la tuyère contient entre 60% et 70% du nombre total des cellules.

4.5.7. Approche numérique

L'approche numérique du code *CFD-FASTRAN* est basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis. Le champ d'écoulement est subdivisé en petits volumes de contrôle. Les équations de conservation sont appliquées à chaque volume en prenant en compte les flux des variables à travers chaque face du volume de contrôle. Chaque variable est calculée au centre de chaque cellule et supposée constante dans tout le volume de contrôle.

Le calcul des flux convectifs est basé sur deux schémas décentrés (*Upwind*) : Le schéma de Roe - *FDS* (Flux Difference Splitting) et le schéma de Van Leer - *FVS* (Flux Vector Splitting).

Une précision spatiale d'ordre supérieur peut être obtenue par l'utilisation d'un limiteur de flux approprié *MUSSL* (Monotone Upstream-Centered Schemes Laws). Ces limiteurs sont utilisés pour prévenir des oscillations numériques, en particulier pour les écoulements sièges de fortes zones d'interaction chocs/surfaces de discontinuité.

Pour l'intégration temporelle, trois schémas sont intégrés dans le code : le schéma explicite de *Runge-Kutta* multi étage, le schéma semi implicite (*point implicit*) et le schéma totalement implicite (*fully implicit*).

Les calculs numériques présentés dans ce mémoire ont été réalisés en optant pour le schéma de *Roe - FDS*, moins dissipatif au voisinage de la couche limite, associé au limiteur *MUSSL*, basé sur le calcul de la pente minimale des gradients associés aux grandeurs physiques de l'écoulement prises sur les faces du volume de contrôle. Le schéma implicite a été par ailleurs utilisé pour l'intégration en temps.

Le pas de temps est contrôlé par le nombre de *CFL* (*Courant-Fredrichs-Lewy*). L'accélération de la convergence est obtenue en faisant varier ce nombre de *CFL* linéairement de sa valeur initiale généralement faible (dépendant du raffinement du maillage utilisé) à une valeur finale, sur un nombre de pas de temps spécifié.

La convergence des calculs itératifs est obtenue (solution quasi stationnaire) lorsque la valeur spécifiée des grandeurs résiduelles (*L2Norm*) est atteinte. D'autres contrôles de la convergence peuvent être également obtenus en comparant les courbes donnant l'évolution de certaines variables, tel que le frottement pariétal (par l'intermédiaire de la grandeur y^+) en fonction du nombre d'itérations.

CHAPITRE 5

UN NOUVEAU CONCEPT DE TUYERE A HAUTE TEMPERATURE : CAN

5.1 Introduction

Sur la base d'amélioration les performances propulsives des moteurs fusées qui sont intensifiées depuis une dizaine d'années, nous appuyant sur les acquis des recherches décrites aux chapitres précédents du présent travail, nous avons voulu étudier, plus en détail, combien et comment il était possible de s'affranchir des problèmes liés au décollement de jet pour les moteurs opérant à basse altitude. Pour ce faire, nous avons d'abord proposé un nouveau concept de tuyère (CAN) ; évalué leurs spécificités technologiques, ensuite nous avons restreint le champ d'investigation aux tuyères à l'écoulement interne de type convergent – divergent.

Pour les moteurs des étages inférieurs (étage principal et/ou boosters d'appoint), la conception des tuyères est fortement liée à la nécessité de faire fonctionner ces dispositifs à basse altitude, avec une pression ambiante d'environ 0.1 MPa . Par conséquent, le choix du taux de détente résulte du compromis entre la maximisation des performances en vol et le besoin de faire fonctionner la tuyère tout le temps en conditions de jet attaché (*full flowing*), en particulier au sol, afin d'éviter les surchargements dynamiques sur la structure, induits par un décollement de jet éventuel.

La minimisation de la masse sèche et la maximisation de l'impulsion spécifique restent des atouts de premier ordre. Néanmoins, d'autres exigences tout aussi importantes influencent la conception d'un tel moteur : d'une part, la maximisation du niveau de poussée en détermine les dimensions globales et les sollicitations structurales; d'autre part, le besoin de régulation du niveau de poussée sur de larges plages de fonctionnement conditionne les choix technologiques et les choix de conception des principaux organes composant le moteur. Ce dernier point est clé pour la gestion du lanceur en vol, permettant d'en maximiser les performances tout en préservant sa fiabilité. En effet, la possibilité de démarrer le moteur à un niveau de puissance réduite (de l'ordre de 40 – 50 % du niveau nominal), permet de gérer au mieux l'accélération du véhicule en vol, tout en maîtrisant les sollicitations

thermomécaniques du moteur, particulièrement sévères au moment de l'allumage. Toutefois, une telle excursion du point de fonctionnement a un impact majeur sur la conception des organes propulsifs : la tuyère supersonique, pour laquelle les difficultés principales sont liées au refroidissement de la paroi métallique, mais surtout aux phénomènes de décollement de jet, en régime transitoire et permanent.

Pour les moteurs à étage supérieur, cette optimisation se traduit, dans la plupart des cas, par la minimisation de la masse sèche et la maximisation de l'impulsion spécifique, à condition de respecter l'enveloppe géométrique imposée par les contraintes d'aménagement du lanceur.

Pour cela, Deux grands axes ont été privilégiés : d'une part, l'amélioration des performances en comparaison avec la tuyère *MLN* vu qu'elle est très utilisée jusqu'à présent dans la majorité de la construction aérospatiale, D'autre part, le fonctionnement en régime sur-détendu d'une tuyère supersonique, examinent la phénoménologie du décollement du jet, afin de prévenir ou, éventuellement, de contrôler les charges latérales et par conséquent l'instabilité des tuyères thermopropulsives.

L'étude de ce type de tuyère, est motivée par le fait que cette dernière atteignant des améliorations des performances démontrées, au sol et en vol, très satisfaisantes.

5.2 Parie 01 :Résultats et discussions de dimensionnement dela tuyère CAN

La première partie est consacrée aux résultats de conception obtenus. On trouvera également une comparaison entre le nouveau concept *CAN* et la tuyère *MLN* [5,30, 32, 34,153], pour montrer les améliorations en géométrie et en masse. On s'intéresse généralement à quatre principales performances qui sont le nombre de Mach de sortie M_E , la masse de la tuyère interprétée par le coefficient C_{Mass} et la force de poussée représentée par le coefficient C_F . Ainsi que la longueur de la tuyère.

Le présent travail dédié à l'amélioration des performances des tuyères supersoniques. En effet, l'idée de la nouvelle tuyère proposée repose sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques en axisymétrie à haute température. Le profil externe ainsi que la longueur du corps central de la tuyère sont des inconnus à priori. Ils seront déterminés numériquement afin d'avoir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Cette condition a pour but d'obtenir une impulsion maximale et par

conséquent, il n'y aura aucune perte de poussée et la détente de l'écoulement dans la tuyère sera complète. L'étude a été composée de trois étapes suivant :

- Détermination des résultats de la conception de la tuyère *CAN* ;
- Etude comparative des performances des cas *CAN* et *MLN* ;
- Etude numérique du cas suggérés.

5.2.1. Comparaison avec la tuyère *MLN*

Nous prenons en considération la même section entre les deux tuyères *CAN* et *MLN*, pour quand puisse expliquer les gains en performances du nouveau concept par rapport à la tuyère *MLN*.

Les données qui seront choisis arbitrairement dans la plage de fonctionnement pour la tuyère *MLN* sont : M_E , T_0 et A^* . Puis nous calculons les paramètres de design de cette dernière, on s'intéresse dans ce cas aux valeurs de C_{Mass} , C_F et L/y^* .

Le rayon du col est calculé par la relation suivante [5] :

$$y_*^2 (MLN) = \frac{A_*}{\pi} \quad (5.1)$$

Pour la tuyère *CAN*, nous cherchons le rayon du corps central qui donne la même section du col de la tuyère *MLN*. Plusieurs solutions peuvent être considérées dans ce cas, selon la valeur choisie de $y^*(CAN)$, par la formule suivante :

$$y_{OC}^2 = y_{body}^2 = y_*^2(BPN) - y_*^2(MLN) \quad (5.2)$$

Pour avoir une solution physique, il faut que $y^*(CAN) > y^*(MLN)$. Si on prend $y^*(CAN) = 2y^*(MLN)$ on aura $y_{body} = 1.73205 y^*(MLN)$.

La première étape, nous tenons le même M_E entre les deux tuyères $M_E(CAN) = M_E(MLN)$, on aura les valeurs de design : C_{Mass} , C_F , L_d/y^* et L/y^* . Dans ce cas, on obtient un gain en qualité de masse (C_{Mass}) et de force (C_F), c.-à-d. la valeur de $C_{Mass}(CAN) < C_{Mass}(MLN)$, $C_F(CAN) > C_F(MLN)$ et $L(CAN) < L(MLN)$ (voir tableau 5.7).

La deuxième étape, nous fixons la même masse entre les deux tuyères $C_{Mass}(CAN) = C_{Mass}(MLN)$ et puis nous cherchons le nombre de Mach de sortie M_E et le coefficient C_F de la tuyère *CAN*. Par conséquent $M_E(CAN) > M_E(MLN)$, $C_F(CAN) > C_F(MLN)$ et $L(CAN) > L(MLN)$, c.-à-d. une amélioration de C_F , du nombre de Mach de sortie et une diminution de la longueur de la tuyère (voir tableau 5.7).

Afin de présenter l'intérêt de la tuyère *CAN* par rapport à la tuyère *MLN*, l'erreur relative commise pour le calcul numérique peut être évaluée pour les différents paramètres entre les deux tuyères *CAN* et *MLN* par la relation suivante :

$$\varepsilon_{parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{CAN}}{Parameter_{MLN}} \right| \times 100 \quad (5.3)$$

5.2.2. Caractéristiques de maillage

Les résultats caractéristiques obtenus consistent à déterminer les paramètres de design de *CAN*, suivis par une comparaison avec les performances de la tuyère *MLN*. Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 représentent respectivement le maillage obtenus de la zone de Kernel, la région de transition et la zone entre la ligne sonique et la première caractéristique insérée C^- . Les résultats sont en fonction des paramètres : Δ , $\Delta\theta$ et N_i .

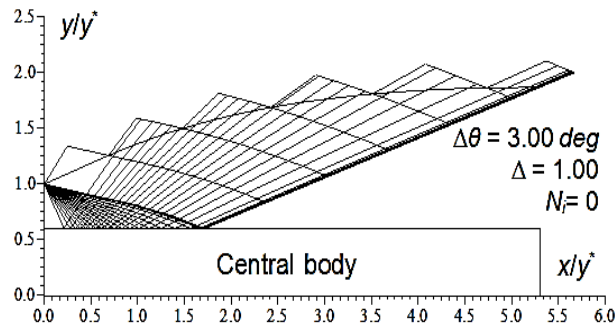


Figure. 5.1 : Raffinement de la zone de Kernel.

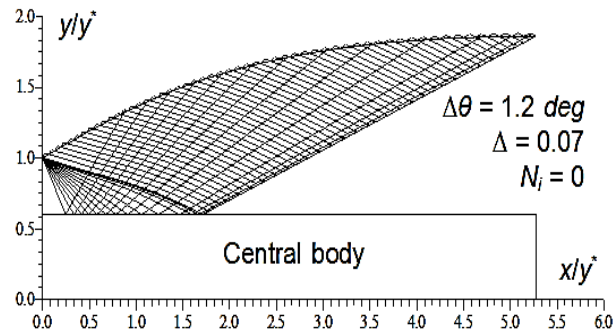


Figure. 5.2 : Raffinement de la zone de transition.

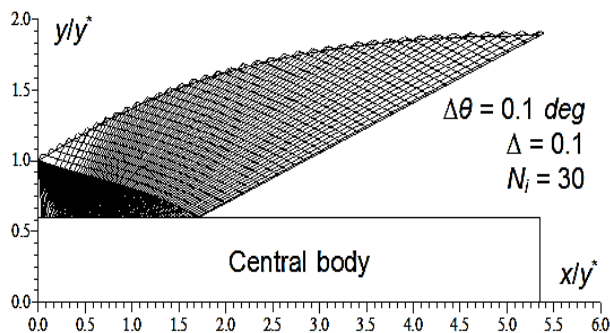


Figure. 5.3 : Insertion de la caractéristique C^- et raffinement des trois zones.

5.2.3. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème

Le tableau 5.1 représente l'effet de raffinement de la zone de Kernel (variation de $\Delta\theta$) sur les paramètres de design pour : $M_E=3.00$, $y^*(CAN)=1.00$, $y_{body}=0.6$, $T_0=2000K$, $\Delta=0.01$, $N_i=0$, avec l'erreur obtenue sur le rapport des sections A_E/A^* . Alors plus $\Delta\theta$ est petit, plus la convergence des paramètres de design est assurée. Cette convergence est traduite par l'erreur obtenue ε relative a le rapport (A_E/A^*).

Tableau 5.1. Effet de raffinement de la zone de Kernel sur les paramètres de design.

$\Delta\theta^\circ$	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E/A^*	ε (%)
3.0	5.2103	36.8730	0.3032	4.7302	5.6153
2.0	5.2601	37.4135	0.3207	4.8198	3.6513
1.0	5.3084	37.9435	0.3396	4.9088	1.7725
0.5	5.3324	38.2026	0.3496	4.9538	0.8514
0.2	5.3460	38.3498	0.3561	4.9795	0.3261
0.1	5.3503	38.3962	0.3586	4.9878	0.1594

Le tableau 5.2 représente l'effet de raffinement de la zone de transition en variant Δ , sur les paramètres de design pour : $M_E=3.00$, $y^*(CAN)=1.00$, $y_{body}=0.6$, $T_0=2000K$, $\Delta\theta=0.01$ et $N_i=0$. Alors plus Δ est petit, plus la convergence des paramètres de design est assurée. Ce qui est confirmé par l'erreur ε obtenue.

Tableau 5.2. Effet de raffinement de la zone transition sur les paramètres de design

Δ	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E/A^*	ε (%)
5.0	5.6543	41.9070	0.4221	5.6437	11.4799
3.0	5.4832	40.0263	0.3893	5.2783	5.3523
1.0	5.3659	38.5805	0.3594	5.0208	0.4990
0.5	5.3557	38.4624	0.3581	4.9997	0.0777
0.3	5.3541	38.4377	0.3587	4.9955	0.0601
0.1	5.3530	38.4363	0.3608	4.9951	0.0139

Le tableau 5.3 représente l'effet de caractéristique supplémentaire C^* , en variant N_i , sur les paramètres de design pour : $M_E=3.00$, $y^*(CAN)=1.00$, $y_{body}=0.6$, $T_0=2000K$, $\Delta\theta=0.01$ et $\Delta=0.01$, Alors plus N_i est élevé, plus la convergence des paramètres de design est assurée. Ce qui est confirmé par l'erreur ε relative a le rapport (A_E/A^*).

L'influence de la discrétisation des caractéristiques de maillage, est principalement sur la convergence du problème, donc plus les paramètres Δ , $\Delta\theta$ sont précis et N_i élevé, on aura des bons résultats sur les paramètres de design de la tuyère CAN.

Tableau 5.3. Influence de la caractéristique insérée C^- , sur les paramètres de design

N_i	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E / A^*	ε (%)
0	5.3540	38.4352	0.3618	4.9950	0.0161
3	5.3540	38.4356	0.3622	4.9951	0.0143
5	5.3540	38.4359	0.3625	4.9951	0.0133
10	5.3540	38.4359	0.3628	4.9951	0.0129
20	5.3540	38.4359	0.3630	4.9951	0.0108
50	5.3540	38.4360	0.3631	4.9951	0.0058

5.2.4. Influence de la température T_0 sur la forme de la tuyère CAN

La figure 5.4 présente les quatre (04) formes des tuyères ayant la même section A^* , pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 (1000K, 2000K, 3000K) et pour le cas du gaz parfait $\gamma=1.402$ lorsque le nombre de Mach de sortie $M_E = 3.00$, $y^*(CAN)=1.00$, $y_{body}=0.6$. On remarque que la température génératrice T_0 influe sur les grandeurs des paramètres de design, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait. Les résultats obtenus sont donnés par le tableau ci-après.

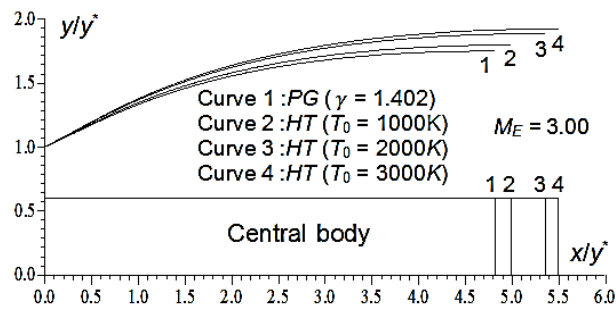
Figure. 5.4 : Contour des tuyères donnant $M_E=3.00$.

Tableau 5.4 Résultats des paramètres de design correspondant à la figure 5.4

Curve	T_0	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E/A^*
1	$\gamma = 1.402$	4.8139	33.0117	0.2986	4.2200
2	1000K	4.9865	34.7353	0.3165	4.4713
3	2000K	5.3540	38.4359	0.3493	4.9958
4	3000K	5.4969	39.9197	0.3628	5.2069

5.2.5. Effet de la position du corps central sur la forme de la tuyère CAN

La figure 5.5 représente l'effet du rayon y_{body} du corps central sur la forme de la tuyère CAN, lorsque $M_E=3.00$, $y^*=1.00$ et $T_0=2000K$. Plus la section du col est petite, plus la forme de la tuyère devient réduite, c.-à-d. éviter l'encombrement vu que la

longueur de la tuyère provoque des oscillations induisant des Charges latérales, capable d'endommager le divergent de la tuyère.

Les différentes formes des tuyères dans la figure 5.5 ayant la même section A^* , par conséquence le même débit .Pour le cas $y_{body}=0$, la tuyère CAN devient une tuyère (MLN). Les résultats de dimensionnement sont présentés dans le tableau 5.5.

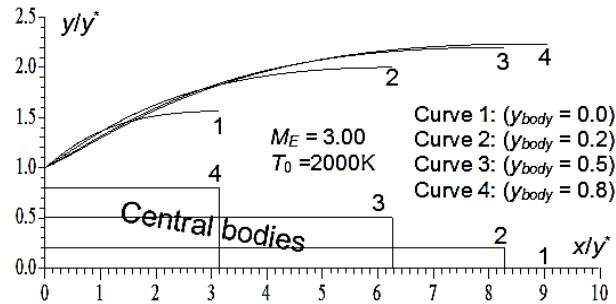


Figure. 5.5 : Effet du rayon y_{body} sur la forme de la tuyère CAN.

Tableau 5.5 Résultats des paramètres de design correspondant à la figure 5.5

Curve	y_{body}	L_d/y^*	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E/A^*
1	0.0	2.7300	9.0500	34.5257	0.3488	4.9958
2	0.2	2.6174	8.2706	35.8165	0.3490	4.9958
3	0.5	2.0157	6.2555	37.7247	0.3493	4.9958
4	0.8	0.9726	3.1279	40.6312	0.3495	4.9958

5.2.6. Influence du nombre de Mach de sortie sur la forme de la tuyère

La figure 5.6 représente l'effet du nombre de Mach M_E sur la forme de la tuyère CAN pour $y^*(CAN)=1.00$, $y_{body}=0.6$ et $T_0=2000K$. Les résultats obtenus montrés dans le tableau 6, les différentes formes des tuyères ayant la même section A^* , par conséquence le même débit (voir figure 5.6). Dans ce cas, plus M_E augmente, la longueur de la tuyère devient assez grande. L'effet de la variation du nombre de Mach M_E est principalement sur la forme et la longueur de la tuyère.

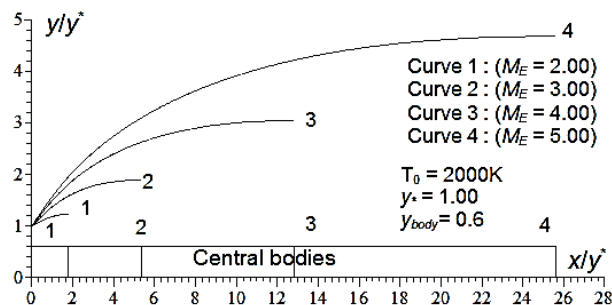


Figure. 5.6 : Effet de M_E sur la forme de la tuyère CAN.

Tableau 5.6 Résultats des paramètres de design correspondant à la figure 5.6

Curve	M_0	L/y^*	C_{Mass}	C_F	A_E/A^*
1	2.00	1.7998	10.4441	0.1772	1.7709
2	3.00	5.3540	38.4359	0.3493	4.9958
3	4.00	12.7951	127.2120	0.4466	13.8614
4	5.00	25.6140	357.9521	0.4999	33.5655

5.2.7. Variation des paramètres thermodynamiques à travers de la paroi

Les figures 5.7 et 5.8 représentent, respectivement, la variation des paramètres M , θ , et P/P_0 en fonction de y_{body} , le long de la paroi de la tuyère CAN, lorsque $M_E=3.00$.

La figure 5.7 montre la variation du nombre de Mach dans la tuyère (CAN) en fonction des différentes positions du corps central. Ainsi l'augmentation du nombre de Mach de M^* au col juste après la première détente se produit au point A (voir figure 2.2), jusqu'à la sortie de la tuyère $M_E=3.00$.

Plus le rayon du corps central est grand, plus la valeur de M^* augmente, ce qui donne une détente rapide (voir figure 5.7), c.-à-d. une tuyère courte, et par conséquent, une amélioration des performances en C_{Mass} et L/y^* par rapport à la tuyère MLN.

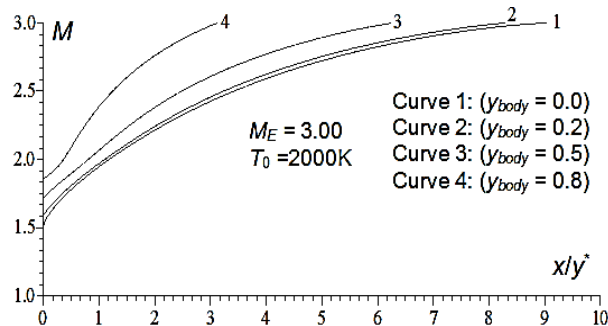


Figure. 5.7 : Variation du nombre de Mach le long de la paroi pour différentes positions du corps central.

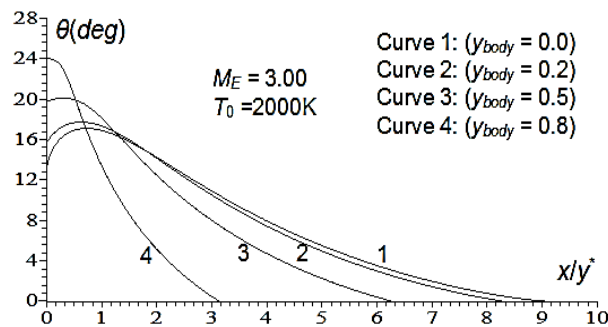


Figure. 5.8 : Variation de l'angle de déviation θ le long de la paroi pour différentes positions du corps central.

La figure 5.8 montre la déviation de l'écoulement à travers la paroi. La tuyère possède un point d'inflexion qui va causer une augmentation de θ jusqu'à θ_{Max} , puis un redressement de l'écoulement jusqu'à la section de sortie ($\theta = 0.0$), lorsque le rayon du corps central augmente, le point d'inflexion se rapproche du col de la tuyère.

5.2.8. Variation des paramètres de design de la tuyère CAN en fonction du nombre de Mach de sortie M_E

Les figures 5.9, 5.10 et 5.11 montrent respectivement la variation des paramètres de dimensionnement de la tuyère CAN, telle que L/y^* , C_{Mass} et C_F en fonction de M_E , pour différentes positions du corps central. Avec l'augmentation de rayon du corps central, la tuyère CAN possède une amélioration des performances.

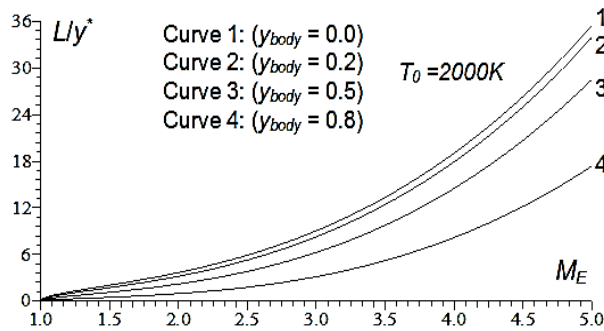


Figure. 5.9 : Evolution de L/y^* en fonction de M_E .

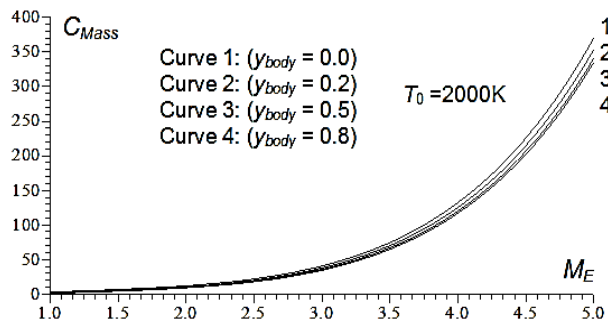


Figure. 5.10 : Evolution de C_{mass} en fonction de M_E .

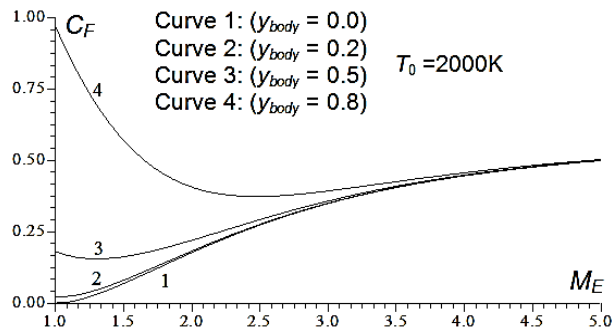


Figure. 5.11 : Variation de C_F en fonction de M_E .

La courbe 1 dans ces figures représente les paramètres de dimensionnement de la tuyère *MLN*, on remarque clairement que la longueur et la masse de la tuyère diminue avec l'augmentation de y_{body} , Tandis que le coefficient C_F augmente avec l'augmentation de rayon du corps central (Voir figure 5.11).

Les figures 5.12 et 5.13 représentent respectivement la variation des paramètres de dimensionnement θ^* et M^* de la tuyère *CAN* en fonction du nombre de Mach de sortie, pour les différentes positions du corps central, lorsque $T_0=2000K$. On remarque avec l'évolution de rayon du corps central, le nombre de Mach M^* devient très élevé, dans ce cas on peut atteindre le Mach de sortie sur une distance très réduite, ce qui donne une longueur courte de la tuyère par rapport à la tuyère *MLN*. Donc nous concluons que la présence du corps central influe sur les performances de la tuyère *CAN*.

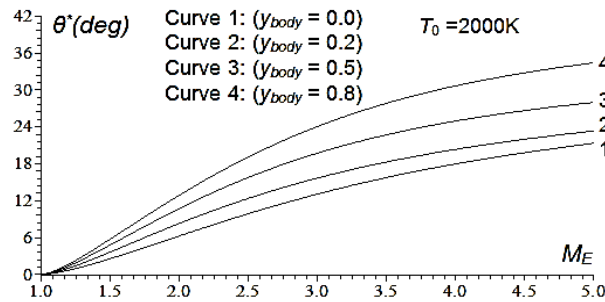


Figure. 5.12 : Evolution de θ^* en fonction de M_E .

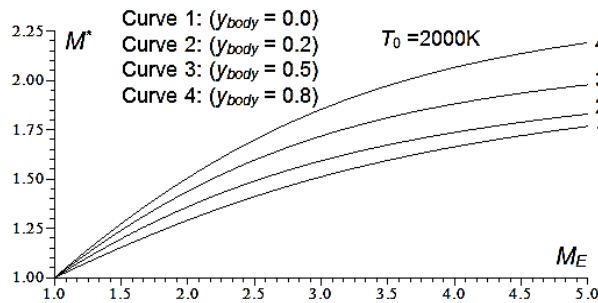


Figure. 5.13 : Evolution de M^* en fonction de M_E .

5.2.9. Variation des paramètres de design en fonction de la température génératrice T_0

L'amélioration de tous les paramètres de dimensionnement à partir d'une température génératrice T_0 environ $240K$. Alors si $T_0 < 240K$, on peut étudier le présent problème en utilisant le modèle *PG*. Tandis que si $T_0 > 240K$, la correction des performances est faite par le modèle *HT*.

Les figures 5.14, 5.15 et 5.16 représentent la variation des paramètres de design de *CAN*, en fonction de la température génératrice T_0 , pour différentes positions du corps

central, lorsque $M_E=3.00$, $y_*(CAN)=1.00$ et $y_{body}=0.8$. On remarque clairement l'influence de T_0 sur tous les paramètres. La courbe en pointillée dans ces figures représente la variation pour le cas d'un gaz calorifiquement parfait ($\gamma = 1.402$), dans ce modèle la température T_0 n'influe pas sur les paramètres de design.

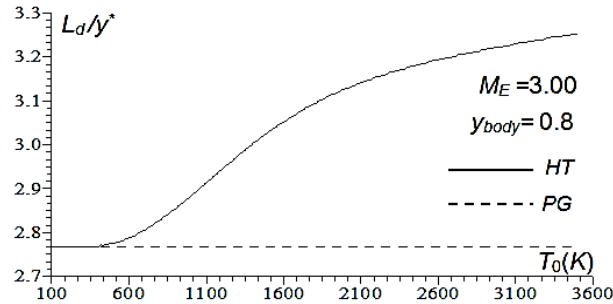


Figure. 5.14 : Variation de L_d/y^* en fonction de T_0 lorsque $M_E = 3.00$ pour différentes positions du corps central.

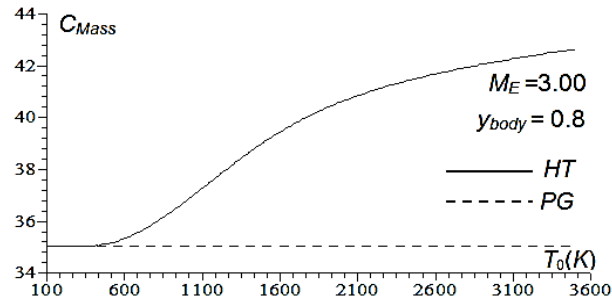


Figure. 5.15 : Variation de C_{mass} en fonction de T_0 lorsque $M_E = 3.00$ pour différentes positions du corps central.

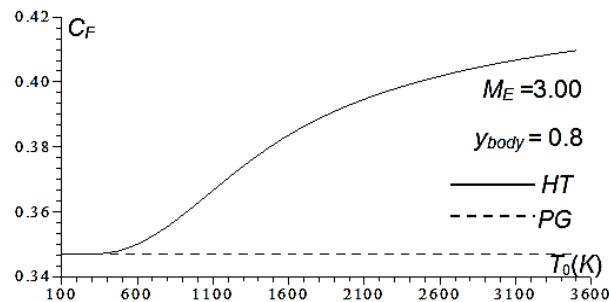


Figure. 5.16 : Variation de C_F en fonction de T_0 lorsque $M_E = 3.00$ pour différentes positions du corps central.

5.2.10. Influence de la position du redresseur sur les paramètres de design pour M_E et T_0 donnés

Les figures 5.17, 5.18, 5.19, 5.20 et 5.21 présentent la variation des paramètres de design de la tuyère CAN en fonction de rayon du corps central y_{body} , pour $M_E=3.00$ à pour les températures $T_0=1000K$, $2000K$, $3000K$ et le cas du gaz parfait ($\gamma=1.402$). On remarque que lors de l'évolution de y_{body} , les performances de la tuyère CAN sont

améliorées, vu qu'il y a une diminution de la section A^* de la tuyère, L/y^* et C_{mass} . Ainsi une augmentation en C_F , θ^* et M^* .

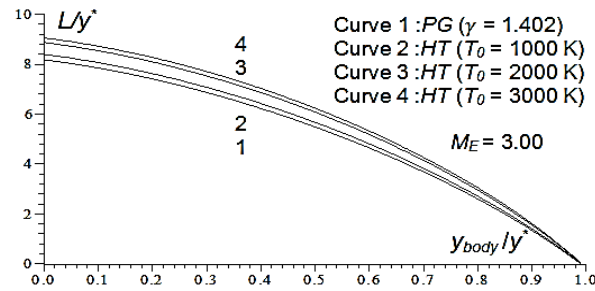


Figure. 5.17 : Variation de L/y^* en fonction des positions du corps central.

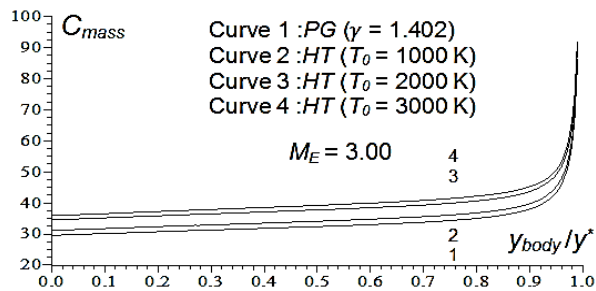


Figure. 5.18 : Variation de C_{mass} en fonction des positions du corps central.

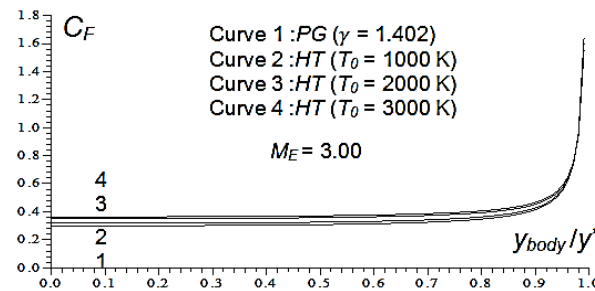


Figure. 5.19 : Variation de C_F en fonction des positions du corps central.

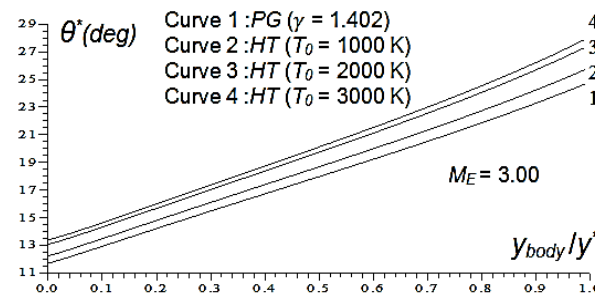


Figure. 5.20 : Evolution de θ^* en fonction des positions du corps central.

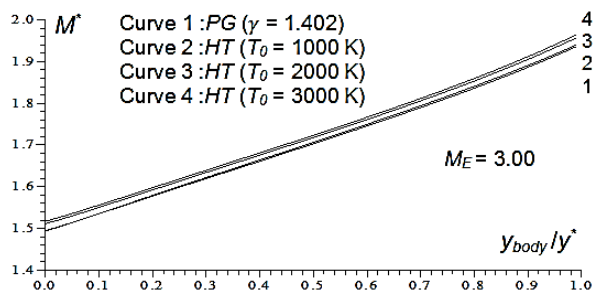


Figure. 5.21 : Evolution de M^* en fonction des positions du corps central.

5.2.11. L'erreur donnée par le modèle PG par rapport au modèle HT

Les figures 5.22 et 5.23, présentent l'erreur commise en C_F et C_{Mass} par le modèle du gaz parfait par rapport à l'utilisation de modèle HT en fonction de M_E , lorsque $y_{body}=0.8$, pour les valeurs de T_0 respectivement 1000K, 2000K, 3000K. L'erreur maximale peut atteindre à 25 % et 65% respectivement en C_F et C_{Mass} . Si $T_0 < 1000K$ l'erreur entre les deux modèles PG et HT ne dépasse pas 5%.(voir figures 5.22 et 5.23 (courbe 3)),

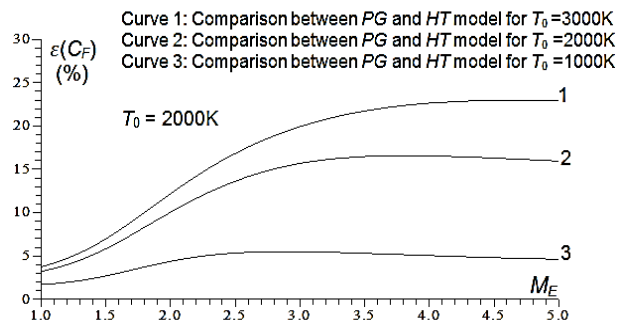


Figure. 5.22 : Variation de $\varepsilon(C_F)$ en fonction de M_E à haute température.

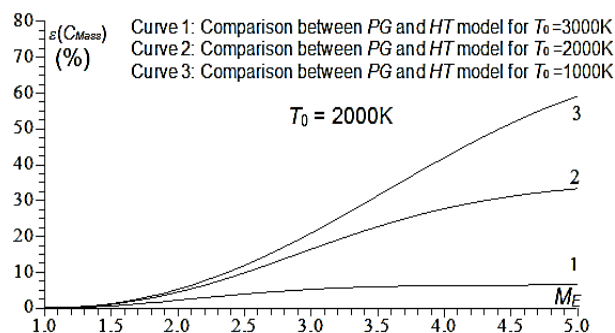


Figure. 5.23 : Variation de $\varepsilon(C_{mass})$ en fonction de M_E à haute température.

5.2.12. Comparaison des performances de design entre les tuyères CAN et MLN

Pour permettre d'évaluer les performances, nous devons fixer le débit traversant les deux tuyères. Dans ce qui suit, nous allons comparer les performances physiques de la tuyère CAN développée dans ce travail avec la tuyère MLN pour :

- Le même nombre de Mach de sortie M_E ;
- Le même coefficient de masse C_{mass} .

Les résultats de dimensionnement de la tuyère MLN en utilisant le modèle PG et HT sont respectivement issus des travaux mentionnés dans [30, 153-154] et [10].

La figure 5.24 présente les contours des tuyères MLN et CAN pour M_E (MLN) = 3,00 et $T_0=2000K$, ainsi que leurs performances, lorsqu'on conserve un paramètre de design (M_E ou bien C_{mass}). La courbe 1, 2 et 3 sur cette figure, représente respectivement : les formes des tuyères MLN et CAN :

- La tuyère *MLN* qui donne $M_E=3.00$ à une température génératrice $T=2000K$.
- Lorsque les deux tuyères possèdent le même nombre de Mach de sortie M_E .
- Lorsque la tuyère *CAN* possède la même valeur de C_{Mass} que la tuyère *MLN*, alors $C_{Mass}(CAN)=C_{Mass}(MLN)$.

Les résultats numériques présentés dans le tableau 5.7, à titre de comparaison entre les deux tuyères, et pour voir clairement les avantages et les performances de la tuyère *CAN* par rapport à *MLN*.

Le rayon sonique du col de la tuyère *CAN* $y_* = 1,00$, tandis que $y_*(MLN) = 0,5$ pour avoir la même surface du col, égale à 0.785.

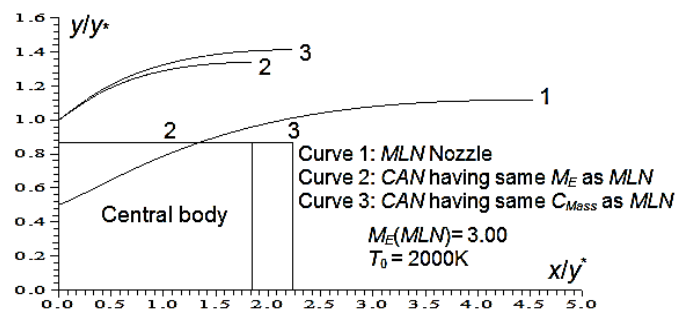


Figure. 5.24 : Comparaison entre les tuyères *CAN* et *MLN* pour la même section A^* , M_E et C_{mass} donnant $M_E(MLN)=3.00$.

Pour mieux apprécier l'intérêt et les avantages de la tuyère *CAN*, nous calculons la finesse par la formule ci-dessous [30-154]. Alors, une augmentation de M_E et une diminution de C_{Mass} entraînent une amélioration de ce paramètre :

$$f = \frac{C_F \times M_E}{C_{Mass}} \quad (5.4)$$

Le tableau 5.7 démontre l'intérêt de la forme de la tuyère 3 qui représente la tuyère *CAN*, avec une amélioration de la finesse ($f(CAN) > f(MLN)$). Les résultats de la tuyère *CAN* (courbe 2) comparée avec la tuyère *MLN*, montrent qu'il y a une amélioration de la longueur $L/y_*(CAN) < L/y_*(MLN)$, par contre il y a une augmentation de la masse de structure $C_{Mass}(CAN) > C_{Mass}(MLN)$. Cependant, le rapport des sections reste le même ($A_E/A^*(CAN)=A_E/A^*(MLN)$), vu que les deux tuyères possèdent les mêmes M_E et T_0 .

La tuyère 3 (*CAN*) présente une amélioration de point de vu nombre de Mach par rapport à la tuyère *MLN* : $M_E(CAN) > M_E(MLN)$, par ailleurs les rapports de section des deux tuyères sont différents. En comparant les deux tuyères *CAN-2* et *CAN-3*, on remarque que la longueur du corps central de la tuyère *CAN-3* est légèrement supérieure par rapport à la tuyère *CAN-2* : $L_d/y_*(CAN-3) > L_d/y_*(CAN-2)$.

Tableau 5.7 Comparaison des résultats de dimensionnement des tuyères *CAN* et *MLN* correspondent à la figure 5.24.

courbe	1 (<i>MLN</i>)	2 [$M_E(CAN)=M_E(MLN)$]	3 [$C_{mass}(CAN)=C_{mass}(MLN)$]
y^*	0.500	1.000	1.000
y_{body}	0.000	0.866	0.866
A^*	0.785	0.785	0.785
M_E	3.000	3.000	3.077
L/y^*	4.523	2.232	2.435
C_{Mass}	34.544	42.225	34.544
C_F	0.348	0.422	0.423
A_E/A^*	4.996	4.996	4.428
f	0.030	0.029	0.037

Le tableau 5.8 représente le pourcentage du gain relatif des performances obtenues des tuyères 2 et 3 par rapport à la tuyère *MLN*. La tuyère *CAN-3* est choisie comme une tuyère de référence, vu l'amélioration des performances : amélioration du nombre de Mach et de la masse par rapport à la tuyère *CAN-2* et *MLN*. La longueur de la tuyère *CAN-3* est légèrement supérieur par rapport à la tuyère *CAN-2*, par contre elle est meilleure comparée à la tuyère *MLN*.

Les gains obtenus en M_E , C_F et L/y^* respectivement : 2,56%, 21,55%, 46,16%. Ces gains varient en fonction du choix de $M_E(MLN)$, T_0 , $y^*(MLN)$ et $y^*(CAN)$.

Tableau 5.8 Gain en performance des paramètres de design de *CAN* par rapport à *MLN*

Pourcentage	CAN(courbe2)		CAN(courbe3)	
$\varepsilon(M_E)$ (%)	0.00	/	2.56	(+)
$\varepsilon(C_{Mass})$ (%)	22.23	(+)	0.00	/
$\varepsilon(L/y^*)$ (%)	50.65	(-)	46.16	(-)
$\varepsilon(C_F)$ (%)	21.26	(+)	21.55	(+)
$\varepsilon(f)$ (%)	3.33	(+)	23.33	(+)

Les gains obtenus en géométrie ci-dessus permettent d'améliorer d'autres problèmes intéressants de la physique aérospatiale à savoir :

- Eviter l'encombrement vu que la longueur engendre une distribution de pression différente tout au long des parois ce qui provoque des oscillations induisant des efforts mécaniques (Charges latérales), capable d'endommager le divergent de la tuyère :

- Augmenter la charge utile qui est souvent un satellite spatial ;
- Améliorer la masse de carburant, afin d'augmenter l'autonomie et la portée de missile en qualité de vol ou la durée de vie de satellite.

Pour élargir et confirmer nos résultats, ainsi que l'avantage de la nouvelle conception *CAN* par rapport à *MLN* ; nous avons présenté la variation des paramètres de design de la tuyère *CAN* en fonction de M_E de la tuyère *MLN*.

Dans les figures 5.25, 5.26, 5.27, 5.28 respectivement, la courbe 1 montre la variation des paramètres de la tuyère *MLN*, les courbes 2 et 3, montrent la variation des paramètres de la tuyère *CAN*. Ces paramètres sont : M_E , C_{Mass} , C_F et L/y^* en fonction de M_E (*MLN*) pour $T_0 = 2000K$, $y^*(MLN) = 0,5$ et $y^*(CAN) = 1,00$.

- La courbe 2 : lorsque les tuyères *CAN* et *MLN* possèdent le même M_E
- La courbe 3 : lorsque les tuyères *CAN* et *MLN* possèdent le même C_{mass}

Il est clair qu'il y a une amélioration des performances de la longueur et de la force ainsi qu'un gain de masse de la tuyère *CAN* par rapport à la tuyère *MLN*.

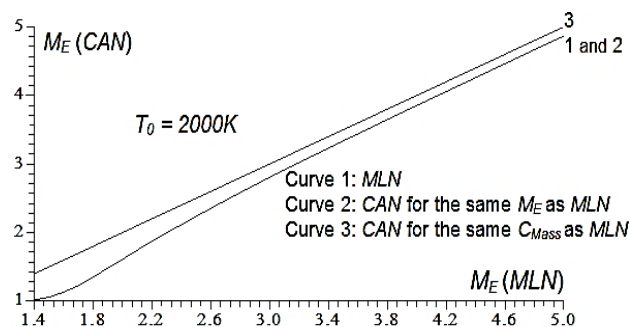


Figure. 5.25 : Evolution de $M_E(CAN)$ en fonction de $M_E(MLN)$ lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E , C_{mass}

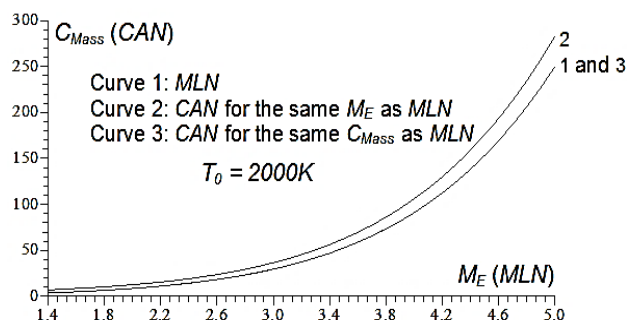


Figure. 5.26 : Evolution de $C_{mass}(CAN)$ en fonction de $M_E(MLN)$ lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E , C_{mass} .

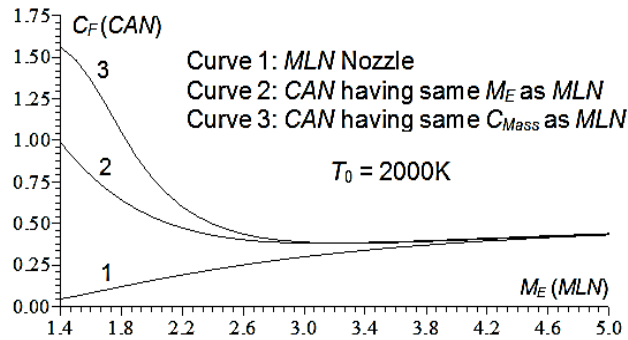


Figure. 5.27 : Variation de $C_F(CAN)$ en fonction de $M_E(MLN)$ lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E , C_{mass} .

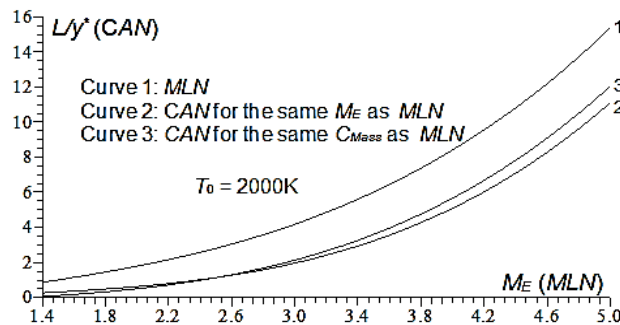


Figure. 5.28 : Evolution de $L/y^*(CAN)$ en fonction de $M_E(MLN)$ lorsque les deux tuyères possèdent le même M_E , C_{mass} .

Les courbes 1,2 et 1,3 respectivement, sont superposées (voir figures 5.25 et 5.26). Tandis que dans les figures 5.27 et 5.28, les 3 courbes sont distinctes, vu que les tuyères *MLN* et *CAN-2* possèdent le même M_E et les tuyères *MLN* et *CAN-3* possèdent le même C_{Mass} . On remarque que $M_E(CAN) > M_E(MLN)$ (voir figure 5.25).

5.3 Parie 02 : Application CFD sur les tuyères supersoniques sur-détendues

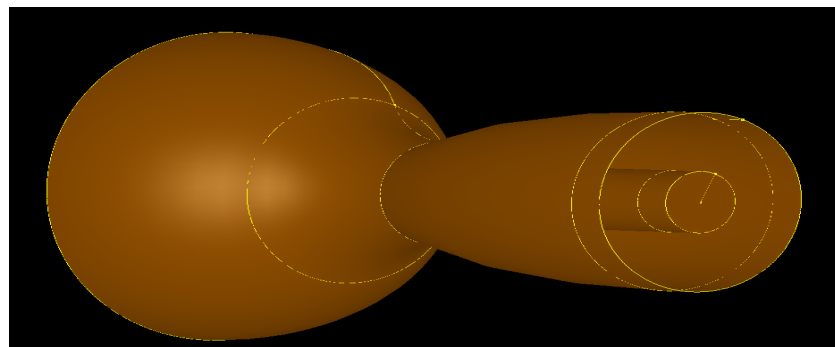
L'objet de cette partie est de contribuer à l'étude de l'évaluation des charges latérales aérodynamiques induites par la sur-détente et le décollement de jet dans les tuyères à l'aide d'un solveur physico-théorique (*CFD-FASTRAN*).

L'idée d'intégrer un corps central au sein de la tuyère constitue un apport original dans le domaine de la conception des tuyères. L'étude révèle des améliorations notables des caractéristiques de fonctionnement confirmées par voie expérimentale. La phénoménologie physique impliquée dans l'évolution de ce type d'écoulement supersonique revêt un caractère complexe au vu des phénomènes imbriqués à l'instar des ondes de choc, de leur interactions avec la couche limite, des zones de recirculation qui peuvent ou évoluent à un mécanisme d'émission tourbillonnaire ...etc.

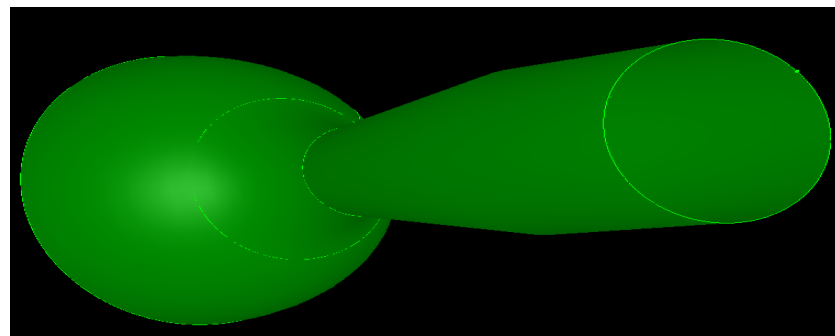
Les résultats physiques sont issus d'une synthèse des conséquences aérodynamiques de la sur-détente et d'un décollement du jet dans une tuyère de moteur fusée, telles que la topologie de l'écoulement en sur-détente, la structure des systèmes de chocs, les distributions de pression pariétales, l'amplitude et les fréquences de leurs fluctuations, la position du décollement de jet pour l'évaluation des charges latérales dans les tuyères sur-détendues. Ces résultats seront confrontés aux résultats existants dans la littérature. Les performances de chaque configuration seront ensuite analysées. Les figure (a) et (b) 5-29 représentent respectivement les deux profils *CAN* et *MLN* utilisées dans la simulation numérique.

Notre travail concerne la modélisation numérique de l'écoulement turbulent dans les deux tuyères axisymétrique (*MLN* et *CAN*). Le système des équations régissant cet écoulement turbulent est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis. Le modèle de turbulence utilisé est celui à deux équations de transport *K-SST* Moner.

Les résultats obtenus portent sur la simulation numérique de l'écoulement supersonique adapté dans la tuyère *CAN* et la tuyère *MLN* équipant le moteur-fusée Vulcain-2 du lanceur Ariane-6. Les calculs *CFD* ont été réalisés au niveau du *Laboratoire Mécanique et Energétique, Evry. Université de Paris-Saclay, France*.



(a) La géométrie en 3-D de la tuyère *CAN*.



(b) La géométrie en 3-D de la tuyère *MLN*.

Figure. 5.29 : Géométries des tuyères : (a) *CAN* et (b) *MLN*.

5.3.1. Domaine de calcul et conditions aux limites

Les conditions aux limites sont représentées dans la figure 5.30. Les calculs sont réalisés pour un écoulement à haute température turbulent. Les conditions génératrices régnant dans la chambre de combustion sont : $P_c=40 \text{ bar}$, $T_c=2000\text{K}$. L'écoulement qui traverse la tuyère, s'accélère tout au long de celle-ci et s'éjecte à une grande vitesse aux conditions ambiantes : $P_0=1 \text{ bar}$, $T_0=288\text{K}$ (15°C).

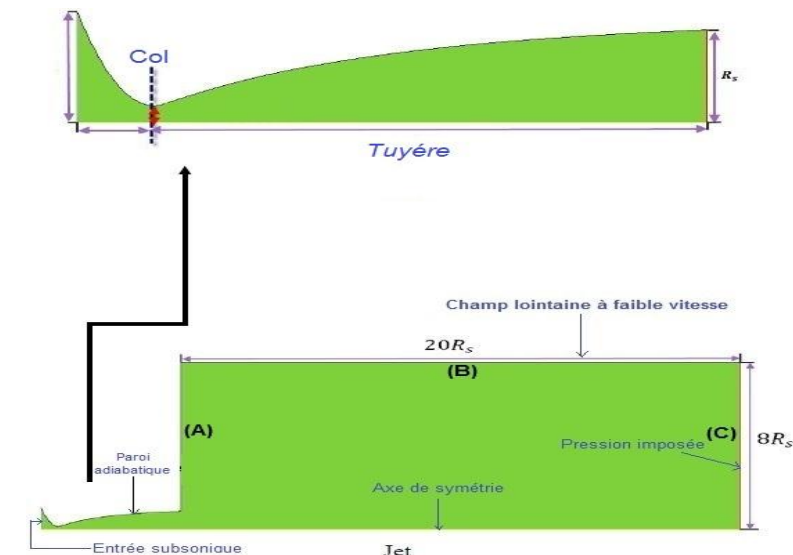
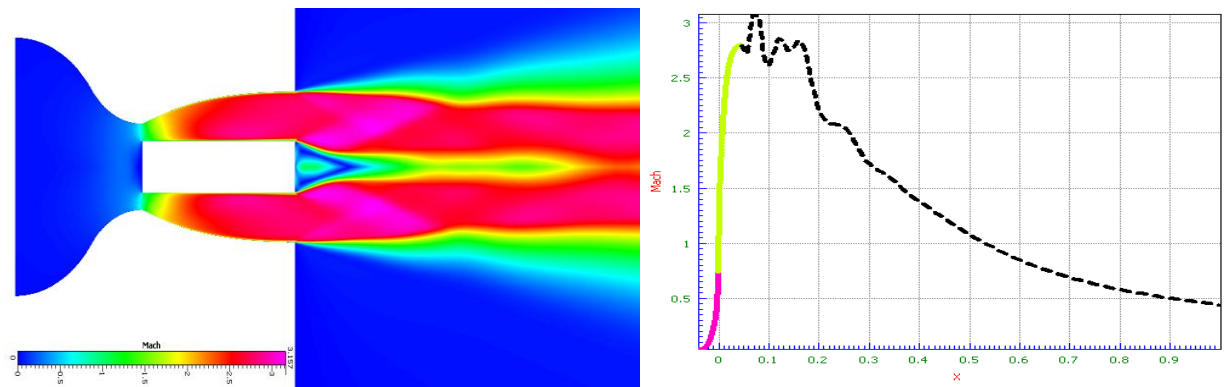


Figure. 5.30 : Domaine de calcul (champ lointain) et conditions aux limites.

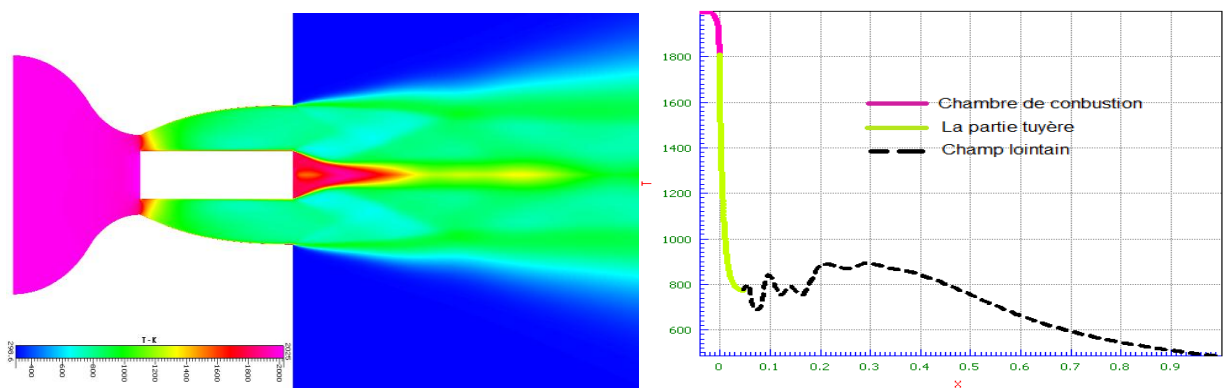
- A la sortie (frontière (C)), la pression statique P_a est supposée constante (les conditions ambiantes) ;
- Aux parois solides (la paroi de la tuyère et la paroi verticale (A) du jet), la condition de non-glissement est imposée. Ces parois solides sont considérées adiabatiques ;
- La frontière B correspond à une entrée lointaine à faible vitesse. Pour cette raison, le fluide entrant subi une évolution isentropique depuis les conditions ambiantes. Sur l'axe de tuyère, la condition de symétrie est imposée (Voir figure 5.30).

En ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ à HT . Cette hypothèse est valable lorsque la température génératrice de la chambre de combustion est élevée et inférieur au seuil de dissociation des molécules [10], une table contenant les valeurs de C_p et γ en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle 55K et 3550K.

Les calculs en *CFD* donnent des résultats similaires à ceux qu'on a trouvé par la méthode caractéristique *MOC* (Méthod Of Characterestic), une température de $\approx 850\text{K}$ et le nombre de Mach $M_E=3.15$, (voir figure 5.31).



a) Contour du nombre de Mach.



b) Variation de la température.

Figure. 5.31 : Contours du nombre de Mach et de la température à travers la tuyère CAN.

En profitant de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe de la tuyère, le domaine de calcul est réduit à une demie tuyère délimitée par les frontières (voir figure 5.31).

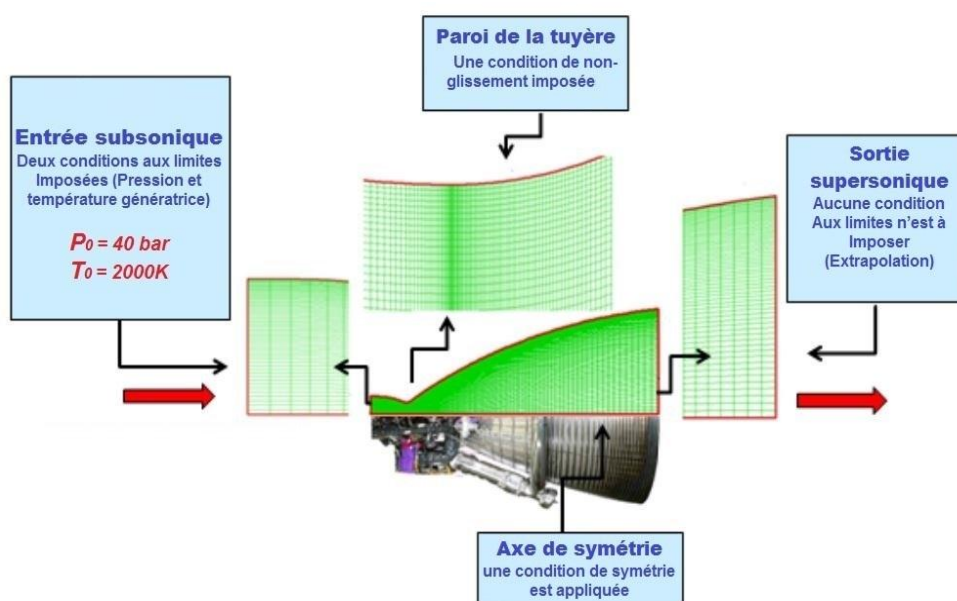


Figure. 5.32 : Domaine de calcul de la tuyère et conditions aux limites.

- Une entrée représentée par un segment de droite vertical, où l'écoulement est subsonique. Il faut imposer deux conditions aux limites qui sont la pression P_0 et la température génératrices T_0 .
- Une frontière inférieure constituée d'un axe de symétrie horizontal, où une condition de symétrie est appliquée. Une frontière supérieure constituée par la paroi de la tuyère. Une condition de non-glissement est imposée.
- Une sortie représentée par un segment de droite vertical, où l'écoulement est supersonique. Aucune condition aux limites n'est à imposer.

5.3.2. Réalisation et sensibilité au maillage

Le maillage structurés multi-blocs à base de quadrilatères a été réalisé à l'aide du *CFD-GEOM* [156]. Ce type de maillage permet en général d'obtenir une bonne résolution numérique. Il permet en outre un raffinement homogène au voisinage des parois afin de résoudre la sous-couche laminaire de la couche limite. Celle-ci est généralement décrite en utilisant la variable réduite y^+ définissant la hauteur de la première maille adjacente à la paroi.

$$y^+ = \frac{\rho U_\tau y}{\mu} \quad (5.5)$$

Où U_τ est la vitesse de frottement défini par :

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Afin d'étudier la sensibilité des solutions, trois maillages structurés avec différentes densités de mailles ont été testés : maillage *A* composé de 456000 cellules, maillage *B* de 764000 cellules et maillage *C* de 998000 cellules. Dans les trois cas, 70% des cellules sont distribuées dans le divergent de la tuyère, avec un traitement particulier aux proches parois.

On remarque que le saut de pression détecté pour les maillages *B* et *C* est similaire. Le maillage *C* prédit un point de séparation en amont par rapport aux maillages *A* et *B*, le maillage *C* sera retenu dans la suite de notre étude paramétrique.

Le maillage des tuyères *MLN* et *CAN* respectivement est composé de plusieurs zones (voir figure 5.33 et 5.34).

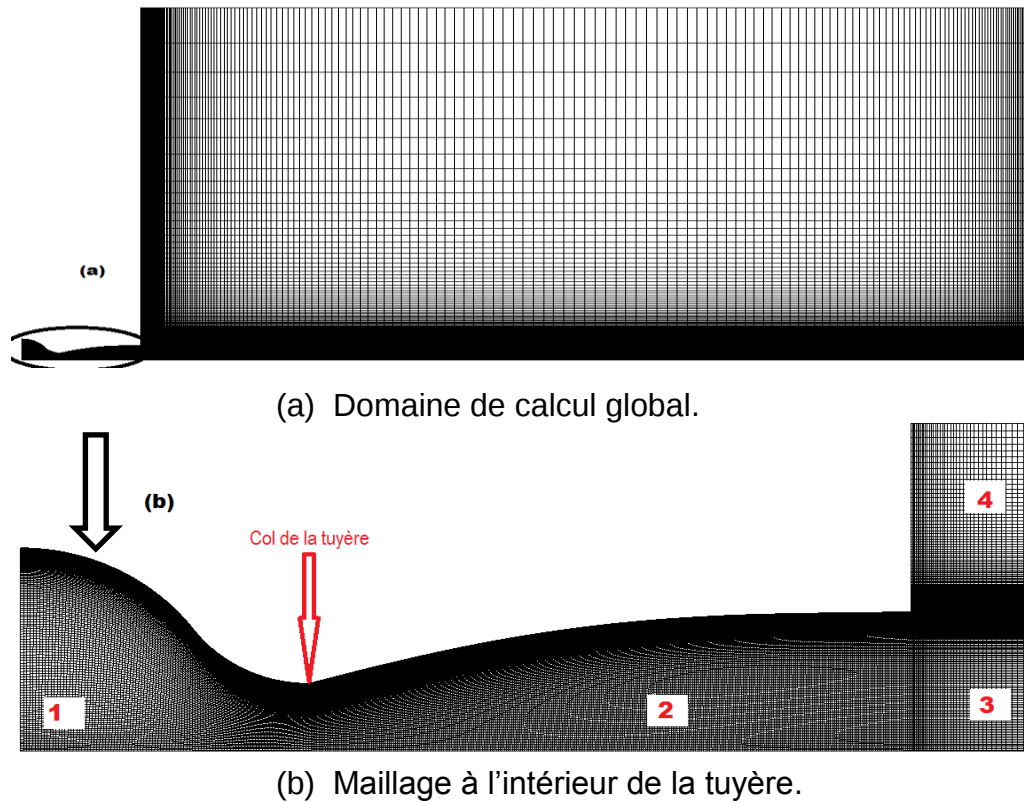


Figure. 5.33 : Maillage structuré multi-Blocs de la tuyère *MLN*.

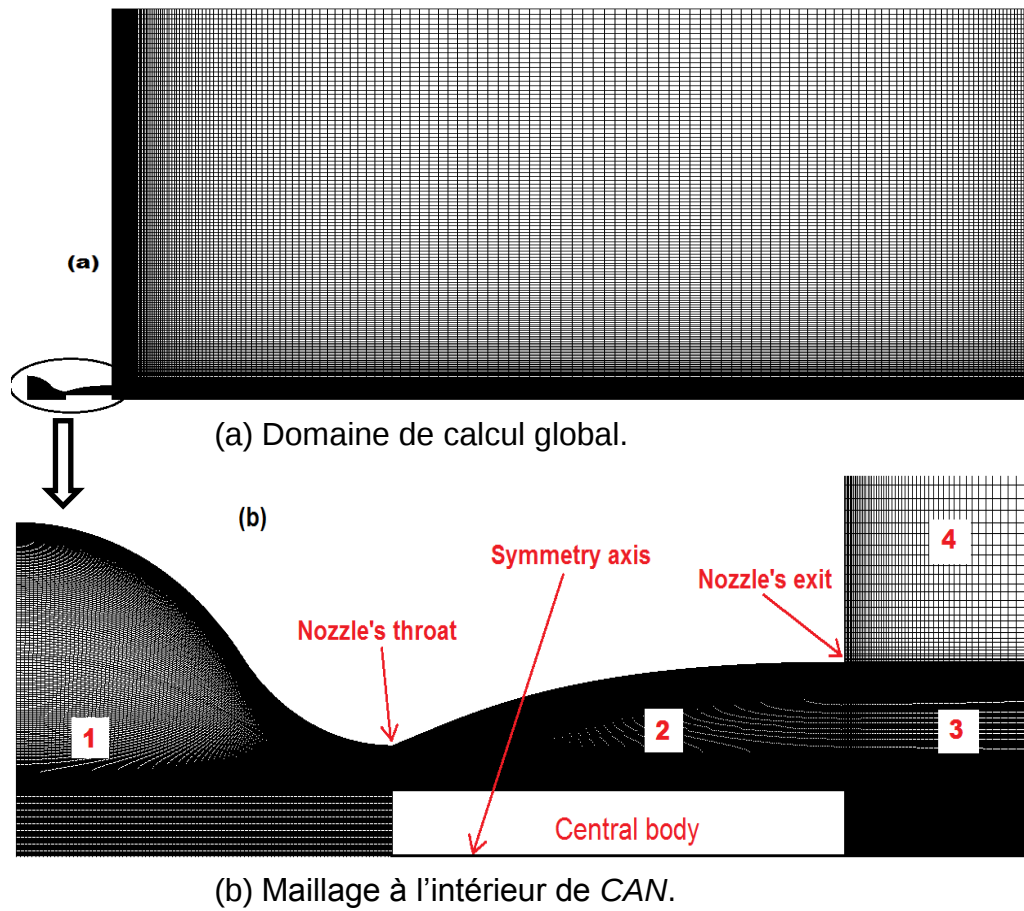


Figure. 5.34: Maillage structuré multi-Blocs de la tuyère *CAN*.

- La zone (1), maillant l'intérieur de la chambre de combustion.
- La zone (2) couvre le champ à l'intérieur de la tuyère. Le raffinement de maillage est également pris en compte sur les parois internes afin de mieux simuler la couche limite, elle contient le nombre de cellules le plus important.
- Les zones (3) et (4) couvrent le champ externe en aval de la tuyère.

La figure 5.35 représente le maillage utilisé pour le calcul numérique. Il est composé de deux blocs :

- Le bloc demi-tuyère en rouge qui est composé de deux parties. Un premier maillage raffiné près de la paroi pour prendre en compte la couche limite et l'autre avec un pas constant près de l'axe de la tuyère.
- Le bloc extérieur en vert, raffiné à la sortie de la tuyère et relâché en aval. Le raccord des domaines de maillage se fait par une continuité de maillage à chaque intersection.

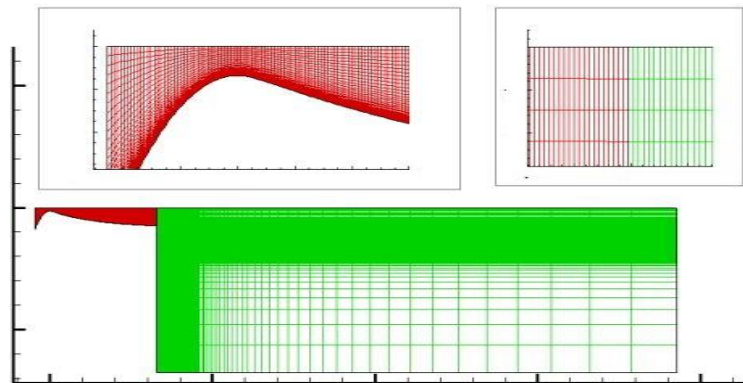


Figure. 5.35 : Maillage de demi-tuyère et du milieu extérieur.

Pour améliorer notre compréhension des phénomènes physico-théorique pour les deux tuyères *CAN* et *MLN*, des simulations numériques ont été entamés pour l'étude de flux séparé à travers les deux tuyères.

5.3.3. Effet de la couche limite sur M_{exit} pour les tuyères *CAN* et *MLN*

Le nombre de Mach M_E de design pour les deux tuyères *MLN* et *CAN* en utilisant le MOC est $M_E=3.00$, en raison de l'effet de la couche limite, en se basant sur l'analyse expérimentale et théorique du décollement supersonique [29], il a été clairement mis en évidence la forte influence de la couche limite sur le nombre de Mach de sortie de la tuyère *MLN*, ce qui donne une valeur obtenue par la simulation $M_E(MLN) = 2,98$. Par contre dans le cas de la tuyère *CAN*, une deuxième détente par un faisceau d'ondes de détente à travers le corps central et la lèvre de la tuyère a réduit l'influence de la couche limite sur le nombre de Mach de sortie, qui est resté uniforme à la sortie $M_E(CAN)=3.00$.

Les figures 5.36 et 5.37 montrent la variation de M_E tout au long de la section de sortie de les tuyères *CAN* et *MLN* respectivement. On note que M_E simulé pour le *CAN* atteint la valeur de $M_E=3,00$ à la section de sortie qui reste constante (écoulement uniforme et parallèle à la sortie de la tuyère). Contrairement pour le *MLN*, le M_E avoisine la valeur de 3,00 puis se dégrade légèrement (voir figure 5.37). Ainsi, le M_E de *CAN* est supérieur en comparaison avec la tuyère *MLN*.

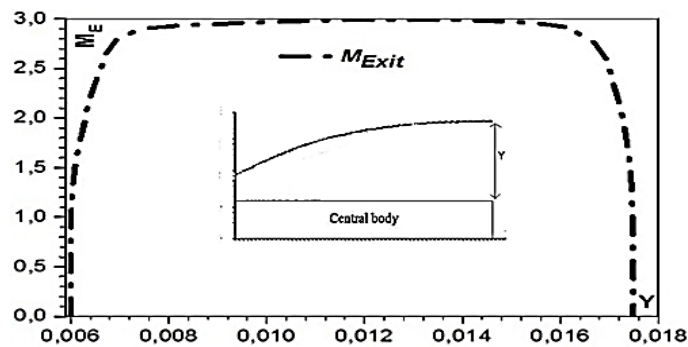


Figure. 5.36 : Variation du nombre de Mach de sortie de *CAN* en fonction de Y .

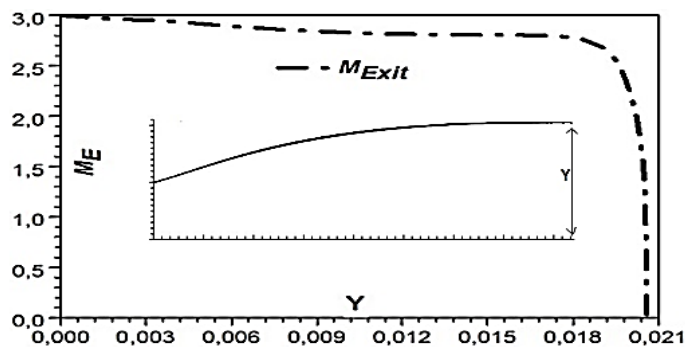
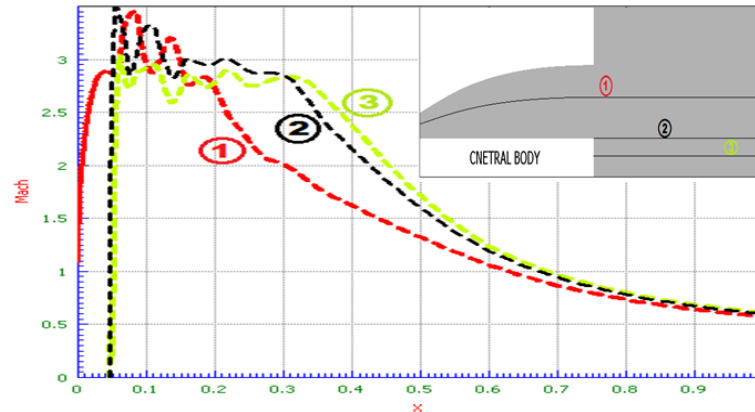


Figure. 5.37 : Variation du nombre de Mach de sortie de *MLN* en fonction de Y .

La comparaison entre les figures 5.38 et 5.39 à l'adaptation ($NPR=40$) montre l'influence du corps central sur les champs de Mach dans la tuyère *CAN*. La figure 5.38 représente la variation du nombre de Mach pour les trois positions :

- La position 1 (au milieu du col jusqu'aux champs lointains), l'écoulement dans le col est transsonique $M^*=1$ (une tuyère amorcée), puis le régime est devenu supersonique dans la partie divergente, le nombre de Mach atteint une valeur égale à 3.39 à la sortie de la tuyère à cause d'une suite de détente du gaz par un faisceau d'ondes de détente, un élargissement du jet supersonique est observé à la sortie de la tuyère.
- La courbe 2 représente l'évolution du nombre de Mach à partir du sommet du corps central jusqu'aux champs lointains, on remarque une augmentation brusque du nombre de Mach jusqu'à une valeur maximale égale à 3.49, suivi par une diminution en s'éloignant de l'aval de la tuyère.

- La courbe 3 représente l'évolution du champ de Mach après culot (zone de recirculation), on note un pic maximal jusqu'à la sortie de la tuyère $M_E=3.10$.
- En ce qui concerne l'évolution du nombre de Mach dans la tuyère MLN (voir figure 5.39), il est important de noter aussi que $M_{E, CAN} > M_{E, MLN}$.



- (1) au milieu de col jusqu'aux champs lointains ;
- (2) à partir de sommet du corps central jusqu'à le champ lointain ;
- (3) au milieu de corps central jusqu'aux champs lointain.

Figure. 5.38 : Evolution du nombre de Mach à travers la tuyère CAN.

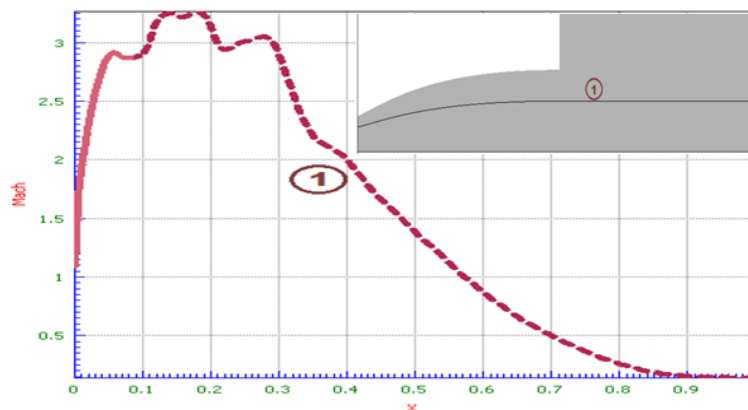


Figure. 5.39 : Variation du nombre de Mach à travers la tuyère MLN.

5.3.4. Topologie de l'écoulement dans les tuyères CAN et MLN

Le présent travail mis en évidence sur l'influence du (NPR) sur la topologie de l'écoulement en sur-détente. Les résultats obtenus entre ces deux types de modèles de séparation (FSS et RSS) sont comparés à travers les deux tuyères (MLN et CAN).

5.3.4.1. Calcul du régime supersonique adapté :

Avant de présenter les résultats et la topologie de l'écoulement en régime de sur-détente pour les deux tuyères CAN et MLN , il est préférable d'avoir une vision sur les résultats de calcul du régime supersonique adapté.

Les différents champs des propriétés caractéristiques de l'écoulement du fluide dans les tuyères *CAN* et *MLN* pour le régime supersonique adapté sont présentés dans les figures 5.40 et 5.41. Les lignes de courant montrent la continuité et la simplicité de l'écoulement tout au long des tuyères en supersonique à l'adaptation ($NPR=40$). A la sortie des tuyères, l'écoulement est presque quasi-uniforme. Les valeurs numériques des différents champs permettent de prédire la topologie de l'écoulement et d'avoir un ordre de grandeur des différentes propriétés moyennes de l'écoulement.

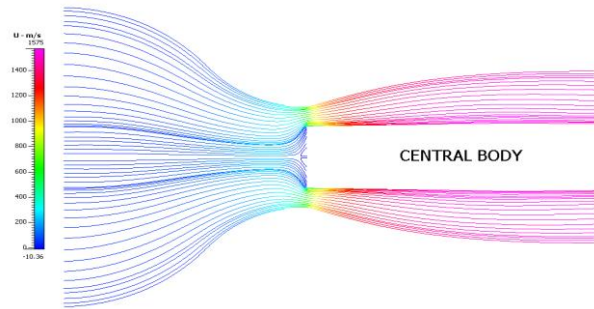


Figure. 5.40 : Les lignes de courant de la tuyère *CAN*.

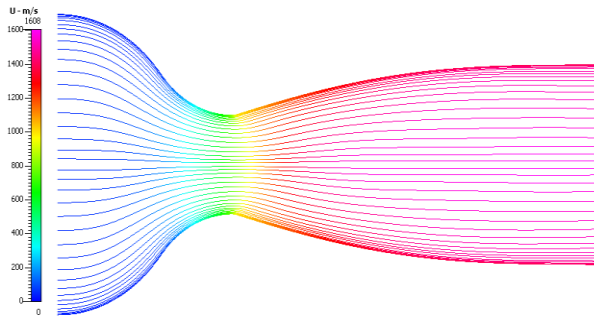


Figure. 5.41 : Les lignes de courant de la tuyère *MLN*.

Figure. 5.42 montre l'évolution du nombre de Mach dans la tuyère *CAN*. Dans le convergent qui représente la chambre de combustion, l'écoulement est subsonique ($Mach < 1$), il devient transsonique ($0.8 < Mach < 1.2$) dans le col, l'évolution du nombre de Mach est supersonique dans le divergent, il atteint une valeur maximale de 3.15 à la sortie de la tuyère.

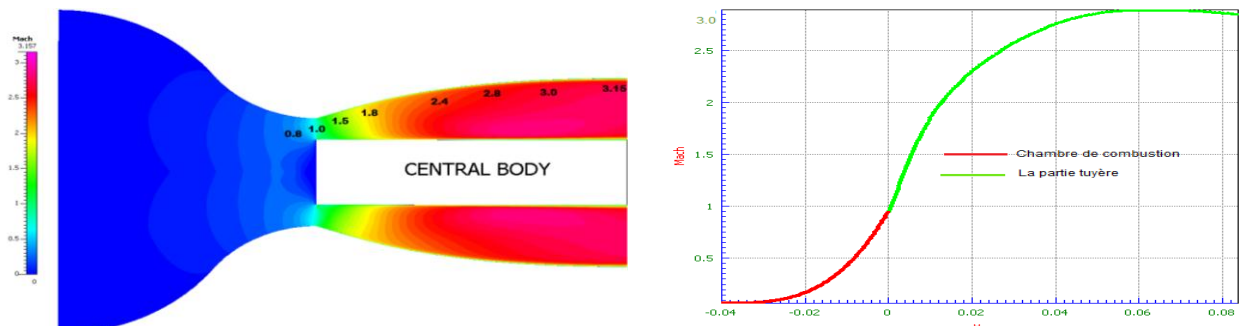


Figure. 5.42 : Les lignes Iso-Mach dans la tuyère *CAN*.

La Température à l'entrée de la tuyère, est de $1700K$. Elle diminue progressivement (détente des gaz) jusqu'à une valeur de $800K$ à la sortie, ce qui est confirmé avec la température calculée par le MOC ($T=809K$). (Voir figure 5.43).

La figure (5.44) montre le champ de vitesse dans la tuyère CAN. L'écoulement est accéléré tout au long de la tuyère. Il passe par une vitesse faible à l'entrée du convergent à une vitesse sonique au col ($U=850m/s$) puis à une vitesse supersonique à la sortie du divergent où il atteint une vitesse maximale égale à $1625m/s$.

Le nombre de Mach au niveau du col de CAN : $M = \frac{V}{a} = \frac{850}{20.4\sqrt{1700}} = 1.09$

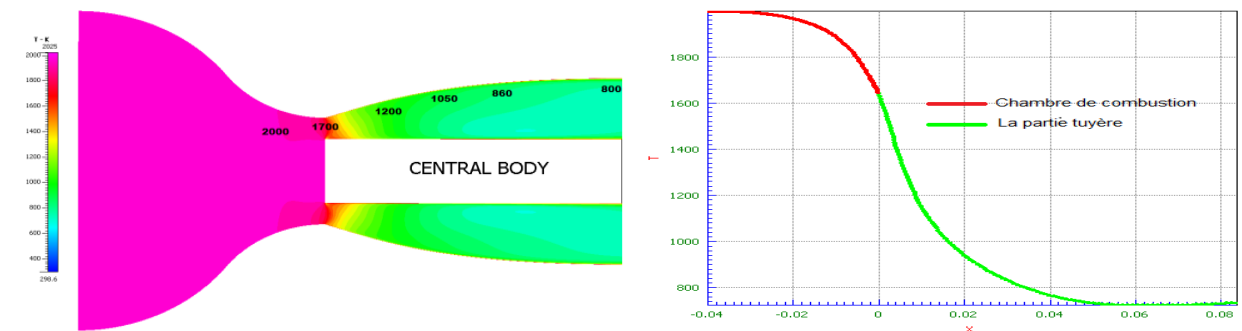


Figure. 5.43 : Variation de la température statique dans la tuyère CAN.

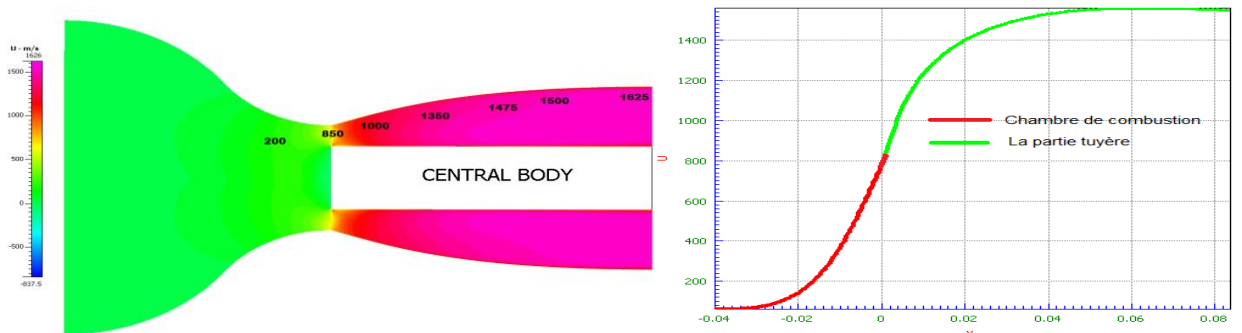


Figure. 5.44 : Evolution de la vitesse tout au long de la tuyère CAN.

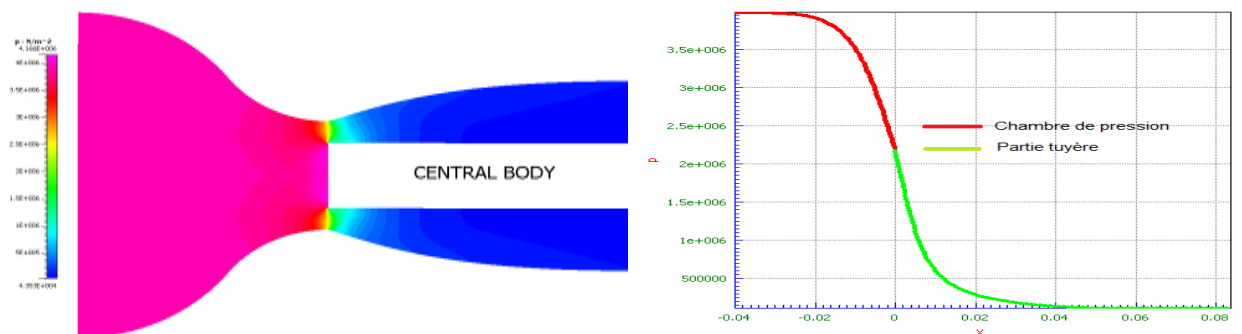


Figure. 5.45 : Distribution de la pression statique tout au long de la tuyère CAN.

La figure 5.45 représente le profil de pression statique le long de la tuyère à l'adaptation, les gaz se détendent d'une pression de 40bar dans la chambre. L'écoulement suit une distribution de pression strictement décroissante depuis la pression génératrice jusqu'à la pression de sortie. Ce régime supersonique est appelé régime d'adaptation. Il se concrétise lorsque la pression au milieu ambiant P_a est égale à la pression d'adaptation. Dans ce cas la détente est complète dans la tuyère CAN.

A l'adaptation, L'évolution du gaz tout au long des deux tuyères CAN et MLN est présentée respectivement par les figures (5.47(a) et 5.48(a)), suit une distribution de pression décroissante jusqu'à la pression de sortie qui est égale à la pression ambiante. Au voisinage de la lèvre de la tuyère, les lignes de courant du jet quitte le divergent sans aucune différence de pression statique (absence de décollement). Le phénomène d'onde de choc disparaît, alors les deux tuyères sont parfaitement adaptées (voir figure 5.47(e) et 5.48(e)). Donc Les deux tuyères ne fonctionnent pas correctement que pour une seule valeur d'adaptation ($NPR=40$).

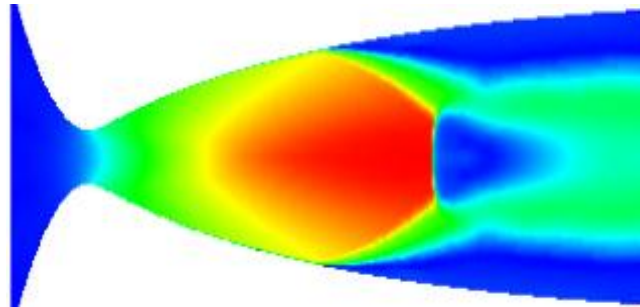
5.3.4.2. Régime aérodynamique en sur-détente

Le régime hors adaptation est le régime dit de sur-détente lorsque la détente des gaz dans la tuyère s'effectue jusqu'à la pression statique p_o qui est inférieur à la pression ambiante p_a . En sur-détente les gaz de la tuyère subissent un rapport de détente supérieur à celui de l'adaptation. Une contre-pression s'exerce sur la couche limite du jet et un choc d'intensité se forme dans le divergent de la tuyère.

- Sur-détente avec décollement naissant

Lorsque le $NPR=10$, le gradient de pression adverse n'atteint pas la valeur critique au-delà de laquelle il y a un décollement de la couche limite, un choc oblique se forme à la lèvre de la tuyère mais ne pénètre pas à l'intérieur de la tuyère (voir figure 5.47(c) et 5.48(c)). Il n'y a pas un point de décollement situé en amont car la couche limite décolle à la lèvre de la tuyère. Sur la distance d'interaction proche de la sortie de la tuyère, la pression pariétale évolue depuis la pression statique non perturbée jusqu'à la pression p_E immédiatement en aval du choc et toujours sensiblement inférieure à la pression ambiante p_a , voir la figure 5.47(e) (cas de $NPR=10$). Ce régime de sur-détente dans lequel la tuyère ne subit qu'une amorce de décollement est qualifié de sur-détente avec décollement naissant.

On doit noter que l'avantage de la tuyère *CAN*, elle résiste contre des faible *NPR* (décollement naissant pour $NPR=10$), ce qui met la structure en stabilité en la comparaison avec la tuyère *LEA-TIC* utilisée pour le moteur-fusée *HM-7B* cryogénique développé pour propulser le troisième étage de la fusée *Ariane-5*, le choc fait décoller la couche limite de la paroi bien en amont de la lèvre à $NPR=34.7$. Voir la figure 5.46 qui montre la topologie de l'écoulement et l'expérience réalisée de la tuyère *LEA-TIC* à l'*ONERA* par Philippe Reijasse [126].

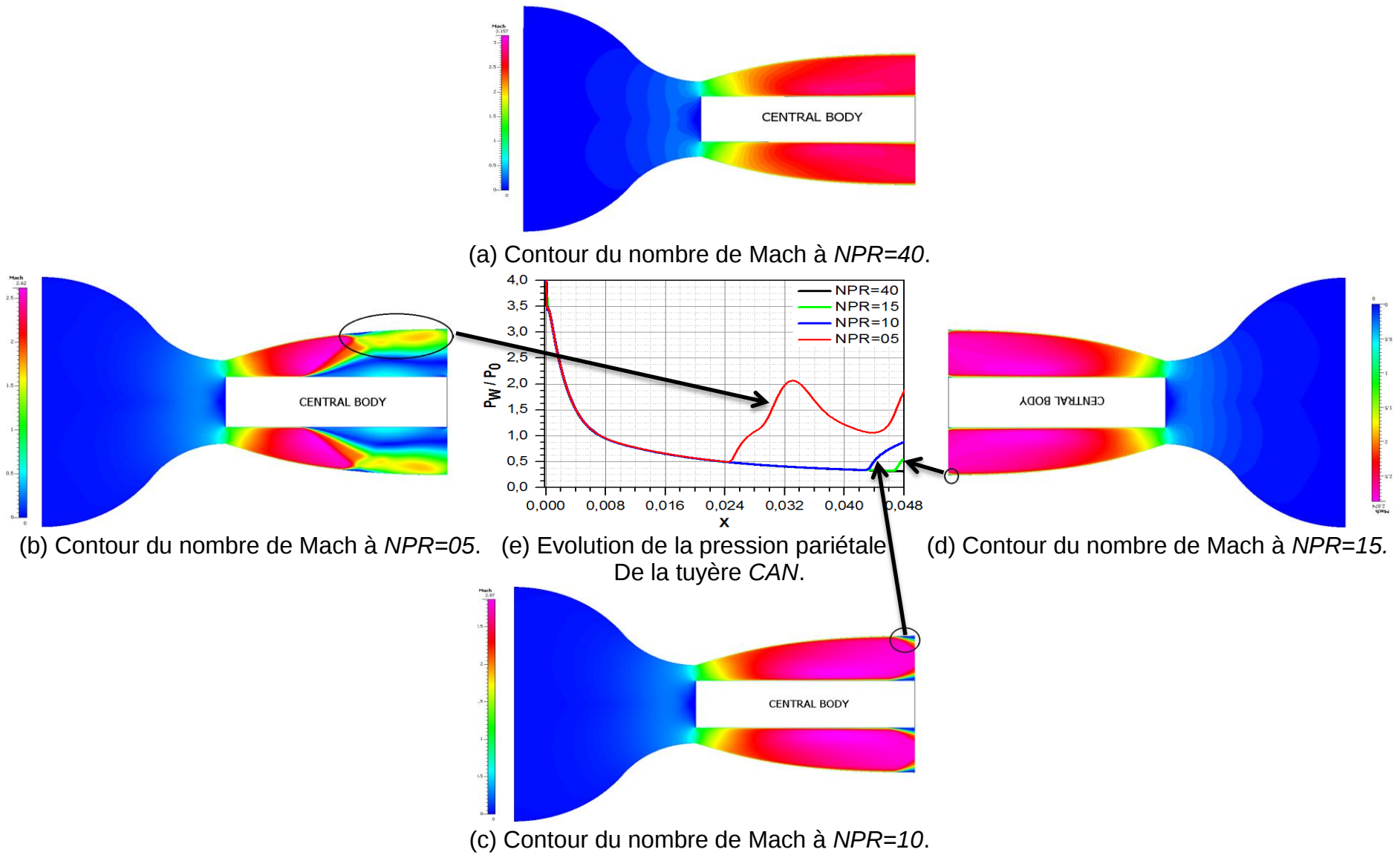


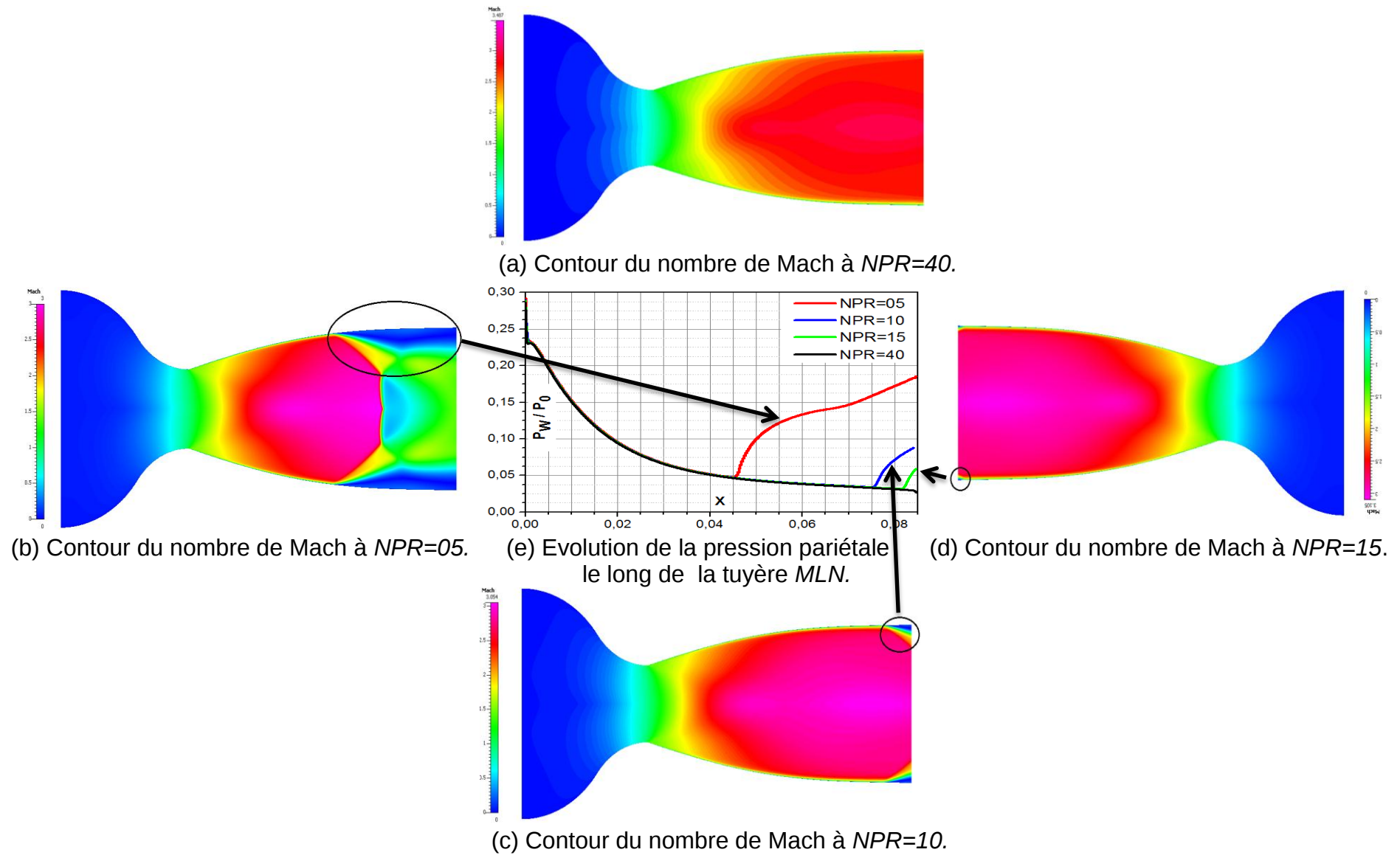
(a) : Simulation de l'écoulement sur-détendu.



(b) : Image strioscopique (ONERA) [126].

Figure. 5.46 : Régime en sur-détente de la tuyère *LEA-TIC* ($NPR=10$).





Sur-détente avec décollement étendu

Les figures 5.47(b) et 5.48(b) montrent la topologie de l'écoulement des tuyères *CAN* et *MLN* pour $NPR=05$. Au-delà de cette valeur critique, le choc fait décoller la couche limite de la paroi sur laquelle elle s'était développée, bien en amont de la lèvre. Le décollement ainsi créé va se produire dans la région située à l'intérieur de la tuyère. Au niveau du point de décollement, il se produit une compression rapide de l'écoulement interne à la tuyère depuis une pression non perturbée immédiatement avant le décollement jusqu'à la pression en aval du point de décollement).

5.3.5. Structure de jets décollés dans les tuyères *CAN* et *MLN* en sur-détente :

Le décollement est étudié numériquement pour différents rapports de pressions (NPR). En régime sur-détendu, les configurations de décollement libre et restreint se succèdent lorsque l'on augmente progressivement le rapport de pressions. Les résultats obtenus sont comparés à travers les deux tuyères. La tuyère *CAN* présente un faible encombrement par rapport à la tuyère *MLN*.

5.3.5.1. Décollement libre et pression pariétales dans la tuyère *MLN*

La figure 5.48(b) montre le décollement libre *FSS* (Free Shock Separation) dans une tuyère *MLN* amorcée, lorsque la couche limite de jet décolle en amont de la sortie de la tuyère sous l'effet du gradient de pression adverse.

Dans le petit intervalle centré près de l'axe de la tuyère, la pression extérieure élevée est détectée brusquement par le fluide fortement accéléré et détendu. Ce dernier réagit instantanément pour s'adapter à cette pression extérieure. Par conséquent, l'écoulement subit des variations très grandes et rapides de ces caractéristiques sur une distance très faible de telle sorte que dans cette petite distance, il apparaît une discontinuité dans l'écoulement entre un état amont supersonique et un état aval subsonique. Cette discontinuité est appelée onde choc droite ou disque de Mach.

La figure 5.48(e) (cas de $NPR=05$) montre l'évolution de la pression pariétale normalisée par la pression de la chambre de combustion le long de la tuyère *MLN*. La pression pariétale diminue progressivement le long de la tuyère jusqu'à la position du point de décollement. Le choc de décollement provoque une croissance rapide de la pression pariétale, ensuite elle s'infléchit et atteint un niveau relativement constant proche de la pression ambiante.

- Evolution du nombre de Mach et interaction d'ondes de choc

Le résultat en termes de configuration de décollement est schématisé sur la figure 5.49(a) qui montre le choc incident qui se réfléchit sur la tuyère *MLN* en formant un choc normal appelé disque de Mach. Ainsi apparait un point triple, point de rencontre du choc de décollement, du choc réfléchi et du disque de Mach. Du point triple émane une ligne de glissement. Cette discontinuité isobare sépare la poche subsonique en aval du choc, la région supersonique en amont et un choc réfléchi par la paroi.

La figure 5.49(b) présente l'évolution du nombre de Mach tout au long de la tuyère autour de $NPR=05$, il est visible un tourbillon en aval du choc normal, ainsi une structure de choc en chapeau ou le nombre de Mach atteint une valeur égale à 3.00 en amont de choc, puis chute directement à une valeur subsonique de 0.570 en aval. L'écoulement est décéléré brusquement par l'effet de choc.

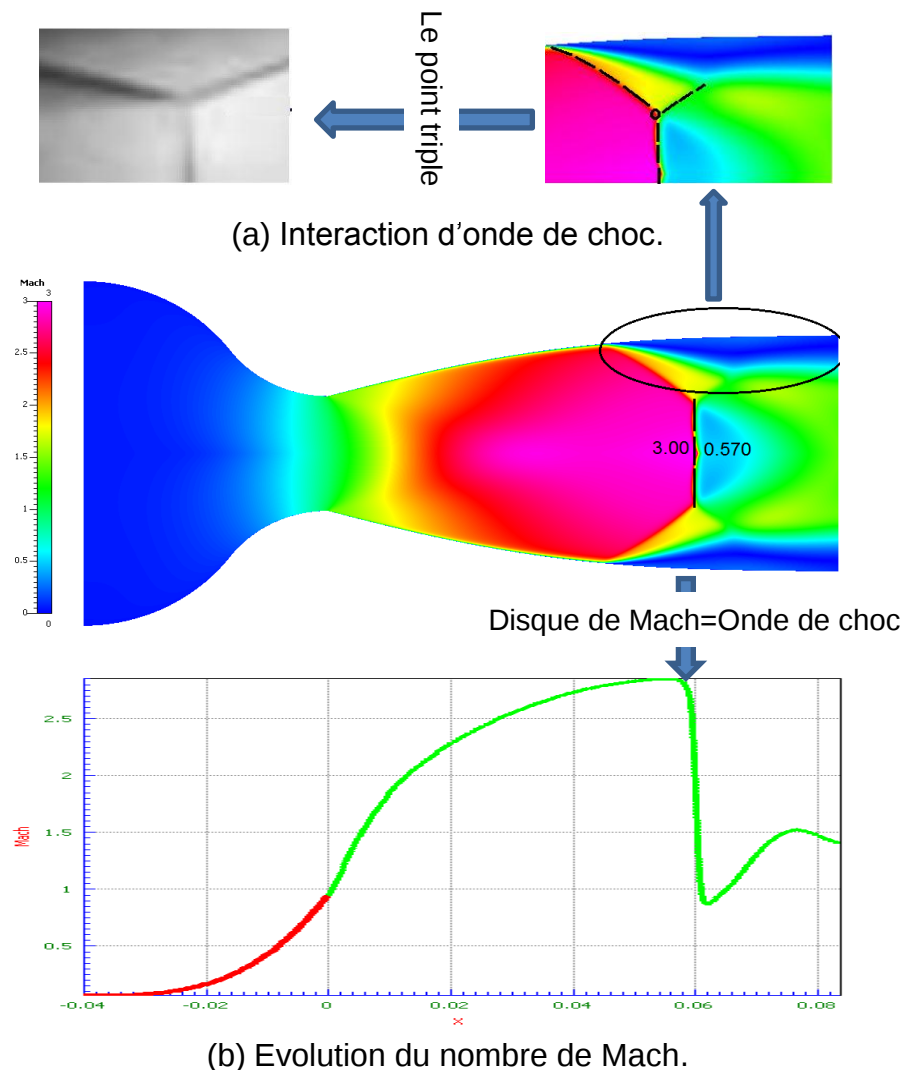


Figure. 5.49 : Interaction de l'onde de choc et l'évolution du nombre de Mach tout au long de *MLN* à $NPR=05$.

Dans le régime de sur-détente, on constate la coexistence de plusieurs phénomènes physiques (voir figure 5.50). Le maillage et le modèle de turbulence utilisés ont pu prédire fidèlement ces phénomènes physiques.

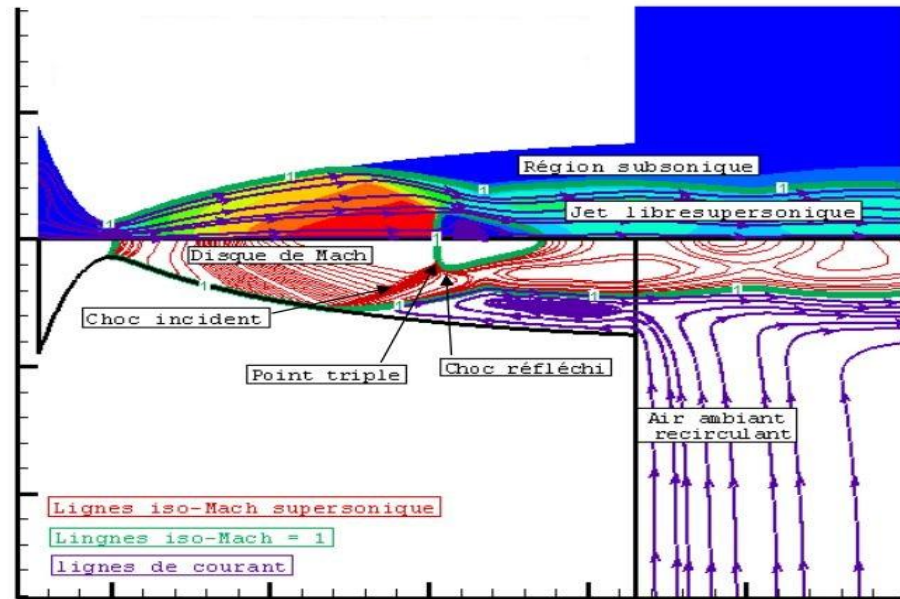


Figure. 5.50 : Topologie de l'écoulement en sur-détendu de *MLN* à $NPR=05$.

En conclusion, l'écoulement ne peut pas se détendre dans tout le divergent de la tuyère et se comprime à travers un choc droit à cause de la contre pression qui est trop élevée. Ce choc normal est appelé disque de Mach. La figure 5.50 montre un récapitulatif du comportement global de l'écoulement en régime de sur-détente pour un rapport de pression $p_c/p_w=05$.

5.3.5.2. Décollement et pression pariétales dans la tuyère CAN

La figure 5.47(b) montre un régime de sur-détente dans la tuyère *CAN*, autre que le décollement libre, peut intervenir spécifiquement dans les tuyères qui engendrent une structure de chocs en chapeau. C'est le régime de décollement restreint *RSS* (Restricted Shock Separation), ainsi dénommé lorsque le recollement de la couche limite est nettement visible sur le divergent juste après le décollement. Ainsi on remarque des pics de pression dépassant la valeur de la p_a ce qui a été interprétée comme associée à un régime de décollement restreint, où la couche limite recolle sur le divergent immédiatement après avoir traversé un premier choc. Le régime de décollement restreint a été expérimentalement identifié pour la première fois lors des essais sur une maquette de tuyère optimisée du moteur *J-2S* [139].

La figure 5.47(e) (cas de $NPR=05$), montre l'évolution de la pression pariétale normalisée par la pression chambre tout au long de la tuyère *CAN*. La couche limite du jet est en régime de recollement après avoir subi un décollement sous l'effet du choc : c'est le décollement restreint caractérisé à la paroi par un point de décollement suivi d'un point de recollement. Le décollement restreint est associé à une allure perturbée du profil de pression, on observe d'abord une courte région de plateau correspondant à la poche de fluide décollé, suivie d'une succession rapide d'augmentation et de diminution de la pression qui traduit les ondes de choc et de détente présentes dans le jet supersonique annulaire qui sont recollés à la paroi.

5.3.6. Organisation du spectre des lignes de frottement pariétales dans un décollement axisymétrique

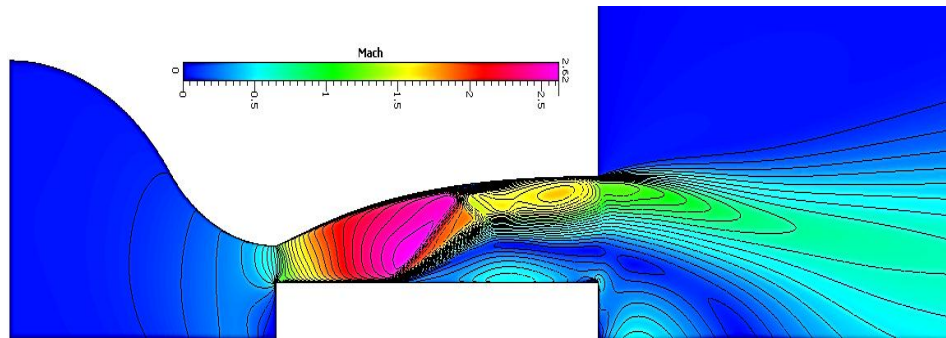
D'après l'expérience compilée par Cousteix [143], la dissymétrie du décollement dans les tuyères de révolution n'a été observée que lors de fonctionnement à un très faibles taux de détente. Celui-ci intervient typiquement durant l'amorçage et l'extinction du moteur. Cette dissymétrie est attribuée à la combinaison de deux causes :

- La transition non axisymétrique du laminaire au turbulent ;
- L'angle que fait le jet décollé avec la paroi de la tuyère.

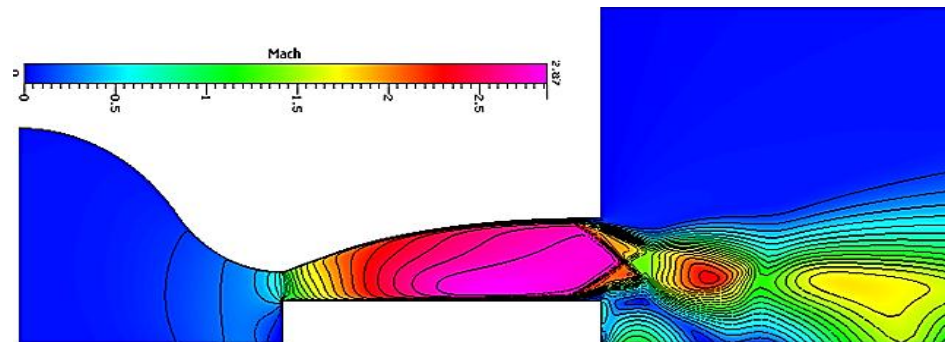
On doit noter qu'il est pratiquement impossible d'avoir des conditions parfaitement symétriques pendant le processus de démarrage. Ainsi, il n'est pas surprenant que l'état asymétrique se produise de manière cohérente dans l'expérience.

La figure 5.51 montre les contours du nombre de Mach de la tuyère *CAN* pour NPR de 5 jusqu'à 40. Notez qu'il est observé qu'un choc apparaît à l'intérieur de la tuyère pour $NPR=5$ et $NPR=15$. Avec l'augmentation du NPR , le point de séparation se déplace en aval du col de la tuyère jusqu'à l'adaptation. Une caractéristique importante pour $NPR=5$, le choc est asymétrique, et se déplace en devenant symétrique vers la sortie de la tuyère *CAN*, ce qui rend les efforts latéraux quasiment équilibrés. Ceci est un avantage pour la stabilité de la structure durant la phase de démarrage ou bien d'extinction du moteur.

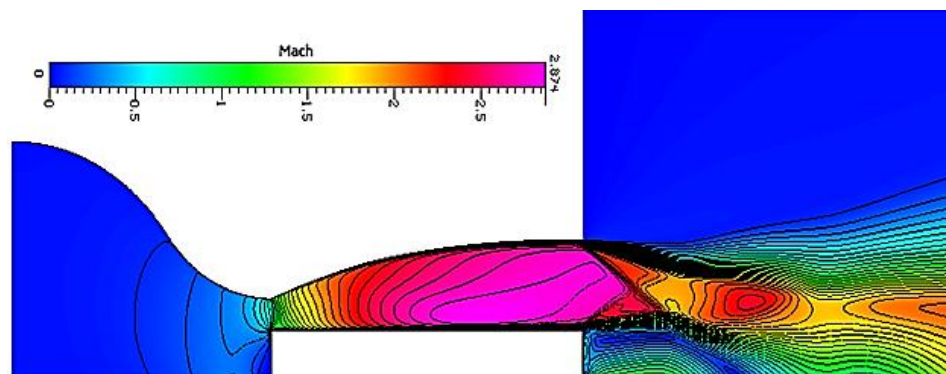
En comparaison avec la tuyère *MLN*, le déplacement du choc est asymétrique cela génère des fluctuations de l'écoulement provoquant une source de tremblement aérodynamique pendant le démarrage du moteur (voir figure 5.52).



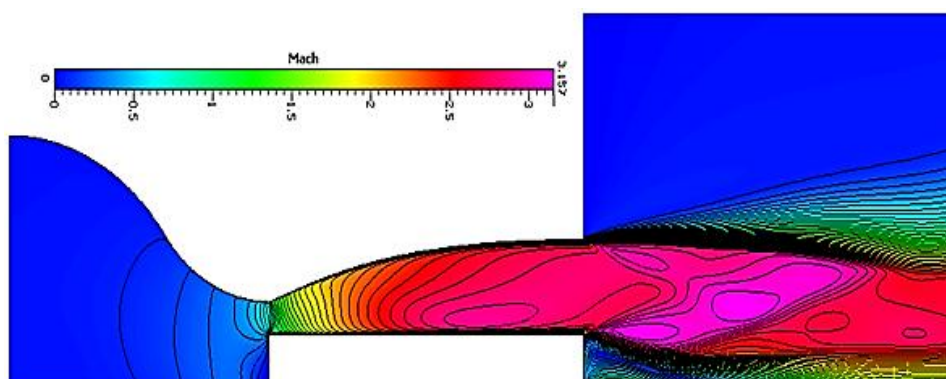
(a) Onde de choc asymétrique ($NPR=05$).



(b) Onde de choc symétrique ($NPR=10$).

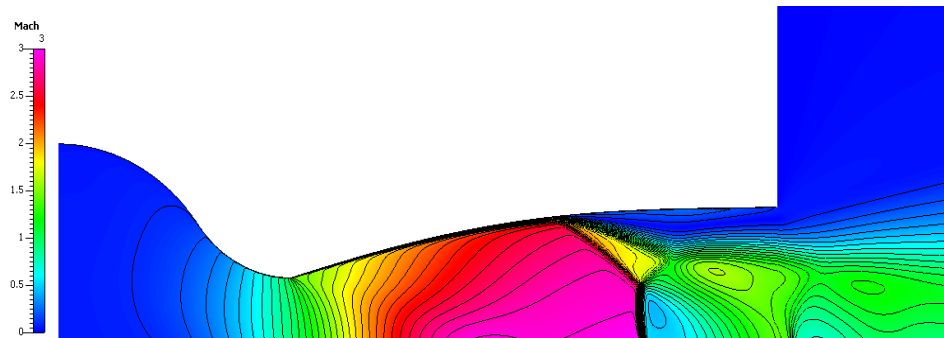


(c) Onde de choc symétrique ($NPR=15$).

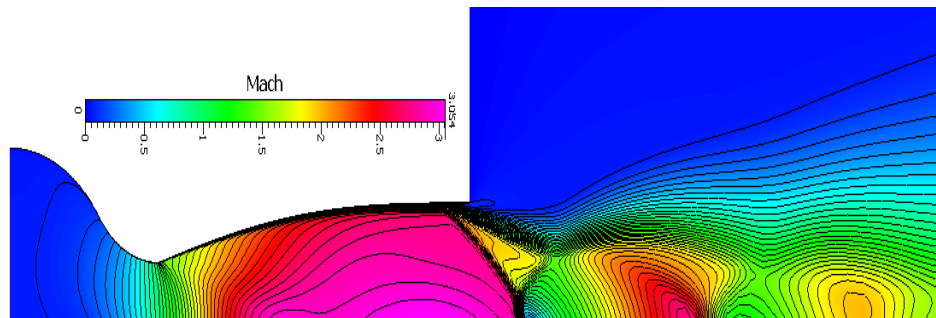


(d) Adaptation ($NPR=40$).

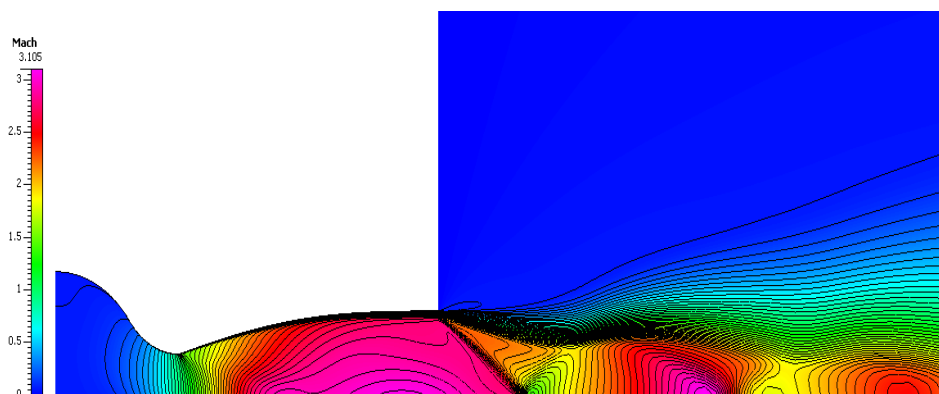
Figure. 5.51 : Contours iso-Mach et spectre des lignes de courant de l'écoulement séparé de la tuyère CAN pour différents NPR .



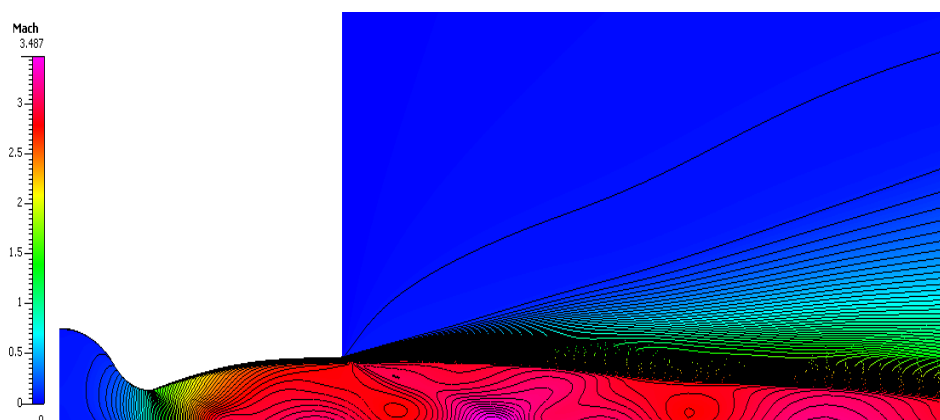
(a) Onde de choc asymétrique ($NPR=05$).



(b) Onde de choc symétrique ($NPR=10$).



(c) Onde de choc symétrique ($NPR=15$).



Adaptation ($NPR=40$).

Figure. 5.52 : Contours iso-Mach et spectre des lignes de courant de l'écoulement séparé de la tuyère *MLN* pour différents NPR .

5.3.7. Charges latérales dans les tuyères *MLN* et *CAN* sur-détendues

Les origines physiques du décollement dans les tuyères (Nozzle Flow Separation) et des charges latérales (Side-Loads) associées sont jusqu'à ce jour non maîtrisées. La prévision de ces phénomènes représente un enjeu aéronautique majeur.

Les études menées dans notre travail montrent une différenciation des régimes de charges latérales entre les tuyères (*CAN* et *MLN*) à choc interne dans lesquelles intervient le décollement restreint ou le décollement libre.

Dans la tuyère *MLN* où n'intervient que le décollement libre (voir figure. 5.49), les causes aérodynamiques des charges latérales sont d'une part les oscillations du choc et les fluctuations de pression associées dans la région d'interaction choc/couche limite, et d'autre part les instabilités de la couche limite décollée et la présence de plusieurs poches de recirculation qui se traduit par des fluctuations de la pression pariétale dans la région d'interaction, mais s'exerçant sur toute la surface en contact avec la région décollée. De ce fait dans la tuyère *MLN*, pour un décollement en faible *NPR*, le gradient de pression pariétal local est élevé et sera accompagné par des chocs de grande amplitude. Le décollement libre est un paramètre pressenti important pour expliquer les charges latérales de la tuyère *MLN* sur-détendue.

Jusqu'aujourd'hui le fonctionnement en décollement libre de jet d'une tuyère a été évité en raison des risques pour l'intégrité de la structure de vibrations dues aux charges latérales aérodynamiques induites par les instationnarités régnant dans un écoulement décollé.

Dans la tuyère *CAN*, lorsque le régime de décollement restreint intervient (voir figure 5.47(b)), les efforts latéraux restent de faible intensité et les niveaux des fluctuations des charges latérales sont moins importants par rapport à la tuyère *MLN*, l'efficacité de redresseur annulaire (corps central) de la tuyère *CAN* assure un décollement contrôlé et symétrique, par conséquent, elle limite la production des fortes charges latérales connues dans les tuyères classiques. Durant la montée, le jet se dilate progressivement pour se recoller définitivement à la paroi de la tuyère. Ainsi, minimiser les déformations et éviter les risques de couplage aérodynamique/structure (aéroélastique), ce qui permet la stabilité de la tuyère, typiquement durant l'amorçage et l'extinction du moteur.

CONCLUSION

Le cadre industriel de cette contribution est l'amélioration des performances de la tuyère *CAN* (Cylindrical Annular Nozzle) et la meilleure maîtrise des efforts latéraux induits par son régime de sur-détente. Il a motivé ce mémoire de thèse qui s'est focalisée sur le nouveau concept *CAN*, l'analyse physique des charges latérales purement aérodynamiques qui sont intervenant dans les cas de décollement libre et restreint dans des tuyères de révolution sur-détendues.

Le présent travail est divisé en deux parties :

La première partie consiste à concevoir un nouveau concept de tuyère axisymétrique annulaire par l'intermédiaire d'un solveur numérique basé sur la méthode des caractéristiques, afin d'améliorer les performances aérodynamiques par rapport à la tuyère *MLN*. Deux cas intéressants peuvent se présenter :

- Une tuyère *CAN* à concevoir, ayant la même masse que celle de *MLN* mais délivrant un nombre de Mach de sortie ou un coefficient de poussée supérieur;
- Une tuyère *CAN* à réaliser, délivrant le même nombre de Mach que la tuyère *MLN* mais possédant des performances meilleures que celle-ci.

Tous les résultats obtenus dépendent de quatre paramètres qui sont le nombre de Mach de sortie, la température génératrice de la chambre de combustion, le maillage en caractéristiques opté et le rayon du corps central.

Au cours du processus de conception des tuyères, un compromis doit être trouvé entre les performances au niveau de la mer (décollage et montée à basse altitude) et celles à vide (haute altitude) afin de mieux satisfaire les exigences de la mission dans les limites des performances de la dite tuyère.

La deuxième partie est de contribuer à l'étude et à l'évaluation physico-théorique des charges latérales induites en sur-détente dans les deux tuyères *CAN* et *MLN*. Ce type des tuyères équipent l'étage principal de lanceur dont le moteur fonctionne pendant les premiers kilomètres d'ascension. Au cours de Cette phase de lancement, la topologie de l'écoulement engendre une distribution de pression différente le long des parois de la tuyère ce qui provoque des oscillations induisant des charges latérales (Side-load), capable d'endommager le divergent de la tuyère. Dans cette simulation il convient de quantifier les charges thermomécaniques

induites par le décollement de jet et de concevoir la tuyère *CAN* de manière à ce qu'elles soient les plus faibles possibles par rapport à la tuyère *MLN*.

Les résultats obtenus portent sur la simulation numérique de l'écoulement supersonique adapté et hors adaptation dans la tuyère *CAN* et la tuyère *MLN* équipant le moteur-fusée *Vulcain-2* du lanceur Européen *Ariane-6*.

Les travaux de recherches dans cette thèse se sont concentrés sur les points suivants:

- Eviter l'encombrement vu que la longueur de la tuyère provoque des **oscillations** induisant **des efforts mécaniques (Charges latérales)** instationnaires en module et en direction, capables **d'endommager** le divergent de la tuyère ;
- Augmenter la charge utile qui est souvent un satellite spatial ;
- Améliorer la masse du carburant, afin d'augmenter l'autonomie et la portée d'un missile en qualité de vol ou la durée de vie de satellite.

Les résultats obtenues montrent que :

- Lorsque le régime de décollement restreint intervient dans la tuyère *CAN*, les efforts latéraux restent de faible intensité et les niveaux des fluctuations des charges latérales sont moins importants par rapport à la tuyère *MLN* ;
- L'efficacité de raidisseur annulaire (le corps central) de la tuyère *CAN* assure un décollement contrôlé et symétrique, par conséquent, elle limite la production des fortes charges latérales durant la montée ;
- Le décollement libre est un paramètre pressenti important pour expliquer les charges latérales dans la tuyère *MLN* sur-détendue, le gradient de pression pariétal est élevé et sera accompagné par de chocs de grande amplitude ;
- Une caractéristique importante dans la tuyère *CAN* en sur-détente, le choc est asymétrique, et se déplace en devenant symétrique vers la sortie, ce qui rend les efforts latéraux quasiment équilibrés. Ceci est un avantage pour la stabilité de la structure durant la phase de démarrage ou bien d'extinction du moteur ;
- En comparaison avec la tuyère *MLN*, le déplacement du choc est totalement asymétrique cela génère des fluctuations de l'écoulement provoquant une source de tremblement aérodynamique pendant le démarrage du moteur.

Il ressort de ce travail de recherche que le nombre de Mach et le coefficient de poussée sont substantiellement augmentés avec une réduction de la masse de la

tuyère tout en maintenant constante la section au col séparant le convergeant et le divergeant. De plus, les performances géométriques et aérodynamiques de notre nouvelle tuyère (*CAN*) ont été améliorées par rapport à la tuyère classique de longueur minimale (*MLN*) qui est très utilisée dans les applications aérospatiales. Ce progrès est dû à l'implantation d'un corps central de forme cylindrique à une tuyère *MLN*, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives d'utilisation des missiles et engins spatiaux.

Le sujet traité ouvre des voix de prospection sur plusieurs ramifications en rapport avec les écoulements supersoniques dédiés à la propulsion. Les retombées industrielles sont directes avec un intérêt certain aux domaines de l'aéronautique et l'aérospatial. Le nouveau concept *CAN* est obtenu dans le but de résoudre les principaux problèmes d'amélioration des performances par rapport à la tuyère *MLN*, afin d'utiliser le gain obtenu pour résoudre d'autres problèmes intéressants de la physique aérospatiale, comme l'augmentation de la masse de la charge utile qui est souvent un satellite spatial ou une bombe nucléaire importés, ou l'augmentation de la quantité de carburant utilisé pour la propulsion, afin d'augmenter l'autonomie de missile en qualité de temps de vol, la durée de vie de satellite ou bien de la portée d'un missile intercontinental.

Après ce travail, différentes perspectives sont envisagées. Malgré les apports aérodynamiques bénéfiques du corps central de forme cylindrique, son volume et poids encombrants qui provoque une zone de recirculation derrière le culot, pendant la phase transitoire de démarrage du moteur, où les fluctuations de l'écoulement externe décollé en aval du culot s'exercent sur la partie extérieure du moteur. Le profilage de ce cylindre en un corps pointu peut pallier à ces inconvénients géométriques et aérodynamiques. Ainsi l'hypothèse d'une création de vortex subsonique derrière le cylindre pour atténuer la zone de recirculation, et la transformer en poussée additionnelle.

ANNEXE A

LISTE DES SYMBOLES

Lettres latines

A	: Aire d'une section de la tuyère [m^2]
a	: Vitesse du son [m/s]
C_P	: Chaleur spécifique à pression constant [$J/(kgK)$]
C_V	: Chaleur spécifique à volume constant [J/K]
C_F	: Coefficient de poussée
C_{Masse}	: Coefficient de masse
C^-	: Caractéristique descendante
C^+	: Caractéristique montante
C_θ	: Coefficient de l'interpolation du paramètre θ
C_T	: Coefficient de l'interpolation du paramètre T
C_y	: Coefficient de l'interpolation du paramètre y
E_t	: Energie spécifique totale par unité de masse [J/kg]
e	: Energie interne [J/kg]
F_1, F_2	: Fonctions du modèle SST Menter
F	: Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère [N]
J	: Matrice Jacobéenne
k	: Conductivité thermique
L	: Longueur de la tuyère [m]
M	: Nombre de Mach
N	: Nombre des discrétisation de la zone de détente.
P	: Pression [atm]
P_r	: Nombre de Prandtl
Pr_t	: Nombre de Prandtl turbulent
q_j	: Flux de chaleur [w/m^2]
R	: Constante universelle des gaz parfaits [$J/kg.K.mol$]
r	: Constante des gaz parfaits [$J/kg.K$] ; ($r=C_p-C_v$)
$\overline{s}$	: Tenseur des taux de déformation

T	: Température [K]
u_τ	: vitesse de frottement [m/s]
$\vec{v}$	: Vecteur vitesse
y^+	: ordonnée de paroi réduite ($y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$)
u^+	: vitesse adimensionnelle (variable de paroi ; $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$)
x, y, z	: Composantes cartésiennes

Lettres grecques

θ	: Angle de déviation de l'écoulement [rad]
μ	: Angle de Mach
ν	: Angle de Prandtl-Meyer
ν_t	: Viscosité turbulente
ρ	: Masse volumique [kg/m ³]
δ	: Tenseur de Kronecker
ε	: Tolérance de calcul
γ	: Rapport de Chaleur Spécifique
ξ	: Ligne de Mach descendante
η	: Ligne de Mach montante
ς	: Coefficient de viscosité volumique
τ	: Contrainte de cisaillement
τ_w	: Frottement pariétal
$\overset{=}{\tau}$	: tenseur des contraintes visqueuses
$\overset{=}{I}$	: Tenseur identité
$\overset{=}{S}$	: Tenseur des taux de déformation
Γ_t	: Diffusivité turbulente
Γ	: Diffusivité effective
λ	: Coefficient de la conductivité thermique
ϕ	: Grandeur instantanée de l'écoulement
$\overline{\phi}$	: Grandeur moyenne selon Reynolds
t_M	: Epaisseur du matériau de la structure de la tuyère [mm]

Indices

13	: Valeur moyenne entre les points 1 et 3
23	: Valeur moyenne entre les points 2 et 3
3	: Valeur au point 3
0	: Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)
*	: Condition critique (valeur au col juste après la détente)
+	: Valeur en un point sur la caractéristique descendante
-	: Valeur en un point sur la caractéristique montante
A	: Point sur la section du col de la tuyère
E	: Exit
$\bar{\bar{(i,j)}}$	: Une base de repère (x, y)
S	: Section de Sortie
K	: Itération
p	: Paroi
Iso	: Courbe iso-valeur
j	: Nœud

Abréviations

ONERA	: Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
CNRS	: Centre National des Recherches Spatiales
SSME	: Space Shuttle Main Engine
SNECMA	: Société Nationale d'Etude et Conceptions de Moteurs Aéronautiques
DLR	: German Aerospace Center (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)
V-2	: Vulcan-2
CFD	: Computational Fluid Dynamics
FDS	: Flux Difference Splitting
FVS	: Flux Vector Splitting
CFL	: Courant-Fredrichs-Lewy
MUSCL	: Monotone Upstream-Centered Schemes Laws.
RANS	: Reynolds Averaged Navier-Stokes
URANS	: Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes
DNS	: Direct Numerical Simulation

<i>LES</i>	: Large Eddy Simulation
<i>SST</i>	: Shear Stress Tensor
<i>FFS</i>	: Free Shock Separation
<i>RSS</i>	: Restricted Shock Separation
<i>NPR</i>	: Nozzle Pressure Ratio" ou taux de détente P_i/P
<i>HT</i>	: Haute Température
<i>GP</i>	: Gaz Parfait
<i>Masse</i>	: Masse de la structure de la tuyère normalisée par $(\rho_M t_M)$ [m ²]
<i>CD</i>	: Converging-diverging Nozzle
<i>LG</i>	: Ligne de glissement
<i>CR</i>	: Choc réfléchi
<i>CIF</i>	: Choc interne de focalisation
<i>MOC</i>	: Method Of Characteristics
<i>ACN</i>	: Altitude Compensating Nozzle
<i>MLN</i>	: Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée)
<i>BPN</i>	: Best Performance Nozzle
<i>TDK</i>	: Two-Dimensional Kinetics
<i>DBN</i>	: Dual Bell Nozzle
<i>TIC</i>	: Truncated Ideal Contour
<i>TOC</i>	: Thrust-Optimized Contour
<i>TOP</i>	: Thrust-Optimized Parabolic
<i>CTIC</i>	: Compressed Truncated Ideal Contour

ANNEXE B

PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

B.1 Formulation Mathématique du problème

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur l'utilisation des équations de conservations sous forme différentielle [52]. [113] et [158]. On rappelle que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable et elle est donnée par:

$$P = \rho r T \quad \text{B-1}$$

Avec $r = 287.1029 \text{ J/(Kg.k}^\circ\text{)}$

B.1.1 Equations adiabatique

D'après les relations de la thermodynamique [158], on peut écrire pour un écoulement adiabatique, la relation suivante:

$$dq = C_v dT + l dv = 0 \quad \text{B-2}$$

$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{r T}{v} \quad \text{B-3}$$

$$dv = - \frac{d\rho}{\rho^2} \quad \text{B-4}$$

D'où :

$$v = \frac{1}{\rho}$$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach $Me \in [1.0, 6.00]$. Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$C_v = \frac{C_p}{\gamma} \quad \text{B-5}$$

Remplaçons les relations (B-3), (B-4) et (B-5) dans l'expression (B-2), on obtient:

$$\frac{C_p}{\gamma} dT - \frac{r T}{\rho} d\rho = 0 \quad \text{B-6}$$

Nous pouvons vérifier à partir des résultats de la table que C_p , C_v et γ vérifient entre elles la relation (B-5) et celle de Meyer $C_v - C_p = r$ ou $[\gamma(T) = C_p(T) / C_v(T) - r]$ pour un gaz parfait. Cette relation devient:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T [\gamma(T) - 1]} \quad \text{B-7}$$

Alors, l'intégration de la relation (B-7) donne la relation adiabatique pour le gaz parfait à Haute Température.

B.1.2 Equations de la vitesse du son

La vitesse du son, par définition, est donnée par [7], [112] :

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{s=const} \quad \text{B-8}$$

La différentielle de l'équation d'état du gaz parfait (B-1) donne

$$\frac{d\rho}{dP} = \rho r \frac{dT}{dP} + rT \quad \text{B-9}$$

Remplaçons la relation (B-7) dans (B-9) et après réarrangement, on aura:

$$a^2(T) = \gamma(T) rT \quad \text{B-10}$$

L'équation (B-10) prouve l'invariance de la relation de la vitesse du son, qui reste toujours valable pour le modèle à Haute Température, sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad \text{B-11}$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en fonction de la température pour un gaz à Haute Température.

B.1.3 Relation entre la vitesse et la température

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [7] et [158] s'écrit:

$$C_p dT + V dV = 0 \quad \text{B-12}$$

$$V dV = -C_p(T) dT \quad \text{B-13}$$

Intégrant la relation (B-13) entre deux états : $(V_0 \approx 0, T_0)$ et un état donné par (V, T) . On obtient:

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad \text{B-14}$$

A la sortie de la chambre de combustion on a $V_0 \approx 0$ et T_0 donnée. Donc la relation (B-14) donne :

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad \text{B-15}$$

Donc on pose :

$$H(T) = \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad \text{B-16}$$

D'où :

$$C_p dT = 2H(T) \quad \text{B-17}$$

Divisons la relation (B-12) par V^2 et remplaçons (B-15) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} dT \quad \text{B-18}$$

L'expression (B-18) présente la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température.

B.1.4 Relation entre le nombre de Mach et la température

Le nombre de Mach est défini par [7] :

$$M = \frac{V}{a} \quad \text{B-19}$$

Remplaçons la relation (B-10) dans (B-19) et élevons la relation au carré, ensuite substituons l'équation (B-18), on obtient:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad \text{B-20}$$

La relation (B-20) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait.

B.1.5 Relation entre la masse volumique et la température

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement connue par l'équation de Bernoulli, sous forme différentielle, s'écrit [7] :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad \text{B-21}$$

Remplaçons la relation (B-8) dans la relation (B-21), on aura :

$$V dV + a^2 \frac{dP}{\rho} = 0 \quad \text{B-22}$$

Figurant le nombre de Mach, en remplaçant la relation (B-19) dans la relation (B-22), on aura l'expression suivante:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad \text{B-23}$$

Remplaçant les relations (B-15) (B-18), (B-19) et (B-20) dans la relation (B-22), on aura

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_p(T) dT \quad \text{B-24}$$

D'où :

$$F_p(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad \text{B-25}$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température T_0 peut être obtenu en intégrant l'équation (B-26) entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état concerné donné par (ρ, T), on obtient :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left(-\int_{T_0}^T F_p(T) dT\right) \quad \text{B-26}$$

B.1.6 Relation entre la pression et la température

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation (B-1) par l'expression :

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right) \quad \text{B-27}$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état des gaz parfait (B-1), ensuite remplaçons la relation (B-25) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dP}{P} = \left(F_p(T) + \frac{1}{T}\right) dT \quad \text{B-28}$$

Cette relation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour un gaz à haute température.

B.1.7 Relation entre la section et la température

L'équation de conservation de la masse s'écrit [50] :

$$\rho VA = cste \quad \text{B-29}$$

La différentielle de la section (B-29) donne

$$\frac{dA}{A} = -\left\{\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho}\right\} \quad \text{B-30}$$

En remplaçant dV/V et $d\rho/\rho$ par leurs expressions (B-18) et (B-24) respectivement, on obtient la forme suivante:

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad \text{B-31}$$

Avec

$$F_A(T) = C_p(T) \left[\frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad \text{B-32}$$

L'intégration de l'équation (B-31), entre l'état du col (A^* , T^*) et un état quelconque (A , T) du divergent, détermine le rapport des sections supersonique par :

$$\frac{A}{A^*} = \exp \left(- \int_{T^*}^{T_0} F_p(T) dT \right) \quad \text{B-33}$$

Nous remarquons que pour calculer les paramètres ρ et A , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible, vu la complexité des fonctions à intégrer. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. Tous les paramètres M , ρ et A sont fonctions de la température.

B.1.8 Débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par [7], [30] et [112] :

$$m = \int_A \rho V \cos(\theta) dA \quad \text{B-34}$$

θ : l'angle entre le vecteur vitesse et la normale à la section A . Si nous divisons la relation (B-34) par la quantité $A^* \rho_0 a_0$, nous aurons :

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \int_A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right) \cos(\theta) \frac{dA}{A^*} \quad \text{B-35}$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. A cette section on a : $\rho = \rho_0$, $A = A^*$, $M=1$ et $\theta=0$ (écoulement horizontal). Donc, la relation (B-35) se réduit à une relation plus simple:

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left(\frac{a^*}{a_0} \right) \quad \text{B-36}$$

La détermination du rapport des vitesses du son se fait par l'utilisation de la relation (B-9). On obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \right)^{1/2} \left[\frac{T}{T_0} \right]^{1/2} \quad \text{B-37}$$

B.2 Modèle du gaz parfait

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait [7],[33],[34],[112],[158], [50], [113] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \\ \frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1/(\gamma-1)} \\ \frac{A}{A^*} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\ \frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left[\frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{array} \right. \quad \text{B-38}$$

Les relations (B-38) donnant les paramètres T , P , ρ , A et le débit sont reliées avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (B-18), reliant M et T , où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

B.3 Procédure du calcul

On présente en premier lieu, la table de variation de la chaleur spécifique C_p et le rapport γ , pour l'air [159], voir le tableau 1.1. Par contre, pour un gaz parfait, les valeurs de γ et C_p sont données à $298.15K^\circ$ par [7] et [30].

Tableau B.1 : Table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'air [47].

T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$	T (K)	C_p (J/Kg K)	$\gamma(T)$
55	1001,9	1,402	900	1120,4	1,344	2500	1273,8	1,291
.	.	.	1000	1140,4	1,336	2600	1277,8	1,290
200	1002,2	1,401	1100	1158,2	1,329	2700	1281,5	1,289
250	1002,8	1,401	1200	1173,8	1,324	2800	1285,0	1,288
300	1004,5	1,400	1300	1187,5	1,319	2900	1288,3	1,287
350	1007,9	1,398	1400	1199,6	1,315	3000	1291,5	1,286
400	1013,1	1,395	1500	1210,2	1,311	3222	1301,4	1,283
450	1020,3	1,391	1600	1219,7	1,308	3333	1304,2	1,282
500	1029,2	1,387	1700	1228,1	1,305	3444	1304,8	1,282
550	1039,4	1,381	1800	1235,7	1,303	3555	1308,5	1,281
800	1098,2	1,354	2300	1264,9	1,294			
850	1109,5	1,349	2400	1269,5	1,292			

D'après le tableau B.1, on remarque que la chaleur spécifique C_p et γ varie avec la température ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croît. Notons ici que la théorie du gaz parfait ne tient pas compte de cette température. Les auteurs Zebbiche et Youbi ont développé un modèle mathématique [5, 109, 119] qui tiendra compte de cette température.

Le nouveau modèle sera appelé modèle du gaz parfait à Haute Température (HT). La seule différence entre les deux modèles réside au niveau de l'équation de conservation de l'énergie. On n'a pas un problème au niveau de la conservation de la masse et de la quantité du mouvement. Donc le changement de l'équation de l'énergie par une nouvelle qui tient compte de la variation des chaleurs spécifiques à haute température donne un nouveau modèle sachant que la méthode de résolution ne nécessite que quelques modifications. Il est à noter que pour résoudre un tel problème, il suffit généralement de choisir deux variables d'état pour déterminer le reste des paramètres. Alors le modèle mathématique du gaz parfait devient un cas particulier dans notre modèle à Haute Température. On présentera dans ce qui suit les principales équations de modèle haute température.

B.3.1 Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$

L'interpolation des valeurs de C_p en fonction de la température est réalisée par un polynôme du 9^{ème} degré [5] et [9]. Ce choix est justifié par la petite valeur de l'erreur [160] obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [114]. Plusieurs tests d'interpolations [160] ont été effectués afin de choisir la meilleure interpolation. En outre, on a utilisé le schéma de Horner [114] pour la présentation du polynôme $C_p(T)$.

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad \text{B-39}$$

Les coefficients a_i ($i=1, 2, \dots, 10$) sont présentés dans le tableau B.2

i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i	i	a_i
1	1001.1058	3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	7	$-1.350935 \cdot 10^{-15}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$	10	$2.8411 \cdot 10^{-27}$

Après l'interpolation par (B-39). Une présentation graphique du polynôme de $C_p(T)$ et une comparaison avec les valeurs données par le tableau B.1, on remarque une variation ondulée à basse température jusqu'à $240K^\circ$, au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. A cet effet, une

correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau B.1. Alors, si $T=T=240K$, la relation (B-39) donne la valeur suivante:

$$\overline{C_p} = C_p(T) = 1001.15868 J / (KgK)$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante

– $T \leq T$, on utilise la correction suivante: $\overline{C_p} = C_p(T)$

– Si $T > T$, on utilise la formule (B-33).

Concernant la détermination de la forme analytique de la fonction $C_p(T)$, on peut avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes [114]. Pour le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs du tableau B.1 et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. L'interpolation choisie donne une erreur meilleure à $\varepsilon=10^{-3}$.

B.3.2 Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Une fois que l'interpolation est faite, on détermine la fonction $H(T)$ de la relation (B-16), par intégration de la fonction $C_p(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$. Alors, $H(T)$ est une fonction à un paramètre T_0 , elle est définie tant que $T \leq T_0$. Remplaçons la relation (B-39) dans la relation (B-16) et écrivons le résultat obtenu de l'intégration sous la forme du schéma de Horner, on aura:

$$H(T) = H_0 - [T(c_1 + T(c_3 + T(c_4 + T(c_5 + T(c_5 + T(c_6 + T(c_7 + T(c_8 + T(c_9 + T(c_{10}))))))))))] \quad B-40$$

$$H_0 = [T_0(c_1 + T_0(c_3 + T_0(c_4 + T_0(c_5 + T_0(c_5 + T_0(c_6 + T_0(c_7 + T_0(c_8 + T_0(c_9 + T_0(c_{10}))))))))))] \quad B-41$$

Avec : $c_i = a_i / i$ ($i=1, 2, 3, \dots, 10$)

Vu la correction faite sur la fonction $C_p(T)$, la fonction $H(T)$ prend la forme suivante:

– Si $T_0 \leq \overline{T}$, alors: $H(T) = \overline{C_p}(T_0 - T)$

– Si $T_0 \geq \overline{T}$, on a deux cas :
$$\begin{cases} T \geq \overline{T} \Rightarrow H(T) = A.40 \\ T \leq \overline{T} \Rightarrow H(T) = \overline{C_p}(\overline{T} - T) + H(T) \end{cases}$$

B.3.3 Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques et des sections donnés par les formules (B-26) et (B-33), respectivement, demande l'intégration numérique des

fonctions $F_\rho(T)$ et $F_A(T)$ dans les intervalles $[T, T_0]$ et $[T, T^*]$. Notons que la fonction $F_A(T)$ dépend du paramètre T_0 .

Pour avoir une idée sur la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous avons tracé leurs courbes de variations. Elles sont illustrées par les figures B.1 et B.2 respectivement. Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle ($T=T_S$). Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température $T_0=500\text{K}^\circ$ (basse température) et $M_S=6.00$ (extrême supersonique). Nous remarquons que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température T_S . Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température T_S pour les deux fonctions [5]. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

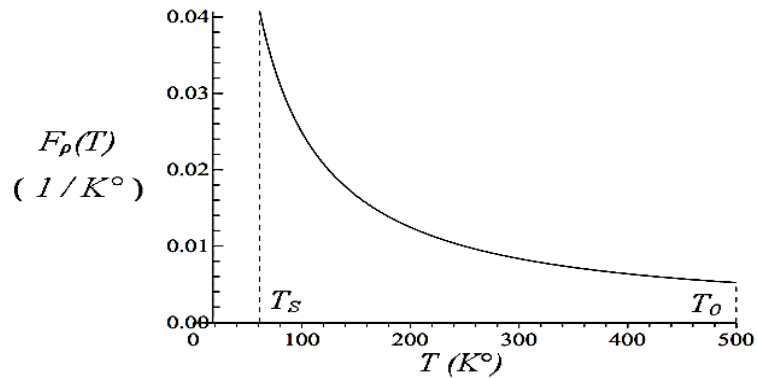


Figure B.1 : Variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$.

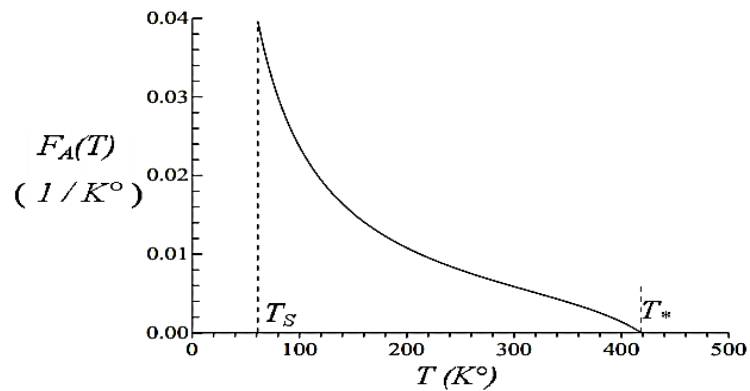


Figure B.2 : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$.

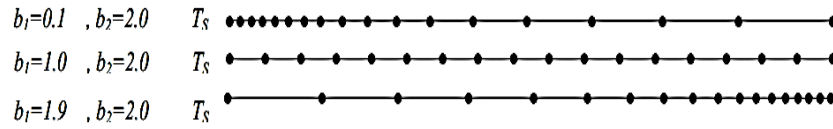


Figure B.3 : Présentation de la condensation des nœuds.

La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [114] et [115], pour le calcul numérique des intégrales (B-26) et (B-33). La fonction de condensation utilisée est celle de Robert [14]. Elle est donnée par :

$$s_i = b_1 z_1 + (1 - b_1) \left[1 - \frac{\tanh [b_1 \cdot (1 - z_1)]}{\tanh (b_1)} \right] \quad \text{B-42}$$

$$z_1 = \frac{i - 1}{N - 1} \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{B-43}$$

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures par:

$$T_i = s_i (T_D - T_G) + T_G \quad \text{B-44}$$

La température T_D égale à T_0 pour la fonction $F_\rho(T)$, et égale à T^* pour la fonction $F_A(T)$. La température T_G égale à T^* pour le paramètre critique, et égale à T_S pour le paramètre à une section supersonique. Si on prend une valeur de b_1 proche de zéro ($b_1=0.1$) et ($b_2=2.0$), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle. Si on prend des valeurs de b_1 proche de 2 (par exemple $b_1=1.9$), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite. Pour des sous intervalles de même longueurs, on peut prendre $b_1=1.0$. La figure B.3 présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de b_1 . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S vu la variation des fonctions $F_\rho(T)$ et $F_A(T)$.

B.4 Paramètres critiques au col correspondant à T_0

L'état générateur est donné par ($M=0$). Alors, les paramètres critiques (T^* , P^* , ρ^* et a^*) correspondant à la température T_0 et au nombre de Mach $M=1$ (ce qui est le cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés. Si on remplace dans la relation (B-20) et les paramètres M , T par les conditions critiques, on obtient :

$$M^* = \frac{2H(T^*)}{\gamma(T^*) \cdot r \cdot T} \quad \text{B-45}$$

($M^*=1$), alors : (B-45) devient :

$$F(T^*) = 2H(T^*) - a^2(T^*) \quad \text{B-46}$$

La détermination de la racine T^* de l'équation (B-45) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [118]. Sachant que $T^* < T_0$, on peut choisir un intervalle $[T_1, T_2]$ contenant la température T^* et qui doit vérifier la condition $F(T_1) F(T_2) \leq 0$. On peut prendre $T_1 = 0K^\circ$ et $T_2 = T_0$. Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer T_1 avec une précision ε , et par suite le rapport T^*/T_0 correspondant à la température T_0 . La valeur T^* obtenue dépend de la précision ε . Le nombre de subdivisions K de l'intervalle $[T_1, T_2]$ correspondant à la précision ε nécessaire pour déterminer la température T^* est donné par [115].

$$k = 1.4426 \log (T_0 / \varepsilon) + 1 \quad \text{B-47}$$

Si nous remplaçons $T=T^*$ dans la relation (B-26) et nous intégrons la fonction, dans l'intervalle $[T^*, T_0]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche ($T=T^*$), nous obtenons le rapport critique des masses volumiques suivant:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \exp \left(- \int_{T^*}^{T_0} F_{\rho}(T) dT \right) \quad \text{B-48}$$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (B-27), on aura :

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left(\frac{T^*}{T_0} \right) \quad \text{B-49}$$

Le rapport des vitesses critiques du son peut être obtenu en substituant la valeur de T^* dans la relation (B-37) par :

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{\gamma(T^*)}{\gamma(T_0)} \right)^{1/2} \left[\frac{T^*}{T_0} \right]^{1/2} \quad \text{B-50}$$

Pour trouver la valeur non-dimensionnelle du débit massique critique, il suffit de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (B-48), et celle des vitesses du son (B-50), dans l'expression (B-36)

B.5 Paramètres supersonique correspondant à T_0

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométrique à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique M_S . Cette section est caractérisée par $\rho=\rho_S$, $P=P_S$, $A=A_S$ et $T=T_S$.

L'obtention du rapport des températures se fait en premier lieu par le remplacement de $T=T_S$ et $M=M_S$ dans la relation (B-20), on obtient:

$$M(T) = \frac{2H(T_s)}{\gamma(T_s) \cdot r \cdot T_s}$$

$$F(T_s) = 2H(T_s) - M_s^2 a^2(T_s) = 0 \quad \text{B-51}$$

La détermination de la racine T_S de l'équation (B-51) se fait de la même manière que celle de T^* et avec la même démarche en utilisant l'algorithme de dichotomie [118], sauf ici, nous avons $T_S < T^*$. Une fois l'intervalle $[T_1, T_2]$ déterminé, on peut facilement obtenir T_S avec une précision ε et par suite le rapport T_S/T_0 correspondant à la température T_0 . On peut prendre dans ce cas $T_1 = 0K^\circ$ et $T_2 = T^*$. La valeur obtenue de T^* dépend de la précision ε .

Remplaçons $T=T_S$ dans la relation (B-26) et intégrons la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques.

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \exp \left(- \int_{T_s}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad \text{B-52}$$

Le rapport des pressions supersoniques peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (B-27), nous aurons :

$$\frac{P_s}{P_0} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \left(\frac{T_s}{T_0} \right) \quad \text{B-53}$$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu encore en remplaçant T par T_S dans la relation (B-37), nous obtenons :

$$\frac{a_s}{a_0} = \left(\frac{\gamma(T_s)}{\gamma(T_0)} \right)^{1/2} \left[\frac{T_s}{T_0} \right]^{1/2} \quad \text{B-54}$$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de T par T_S dans la relation (B-33), ensuite l'intégration de la relation obtenue dans l'intervalle $[T_S, T_0]$ en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche T_S . On obtient:

$$\frac{A_s}{A^*} = \exp \left(- \int_{T_s}^{T_0} F_P(T) dT \right) \quad \text{B-55}$$

Remarque

– On peut calculer le débit à cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (B-35) puis en intégrant, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \frac{\rho_s}{\rho_0} \cdot \frac{a_s}{a_0} \cdot M_s \frac{A_s}{A^*} \quad \text{B-56}$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (B-36) et (B-56) donnent le même résultat.

– La précision du résultat de l'intégration de (B-48), (B-52) et (B-55) dépend essentiellement des valeurs de N , $b1$ et $b2$.

B.6 Erreur du modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait en considère la chaleur spécifique C_p et le rapport γ constants donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles températures. D'après cette étude, on peut remarquer une différence des relations données entre le modèle du gaz parfait et notre modèle développé. L'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle qui tiens compte de la température génératrice peut être calculée pour chaque paramètre. Alors pour chaque couple (T_0, M) , l'erreur relative ε peut être évaluée par la relation suivante [114]:

$$\varepsilon_{\text{paramètre}}(T_0, M) = \left| 1 - \frac{\text{paramètre}_{GP}(T_0, M)}{\text{paramètre}_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad \text{B-57}$$

Le mot paramètre dans la relation (B-57) peut représenter tous les paramètres (T , P , ρ , A , a et débit) mentionnés dans ce chapitre. Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs acceptent une erreur inférieure à 5 %. [159]. L'erreur maximale commise entre les erreurs données par les paramètres peut être évaluée pour donner une erreur globale des résultats du phénomène physique.

B.7 Fonction de Prandtl-Mayer a haute température

Dans ce chapitre on va présenter l'effet de la variation de $C_p(T)$ sur l'expression de la fonction de Prandtl-Meyer pour l'étude de l'écoulement supersonique à HT .

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul des écoulements supersoniques. Si on veut concevoir une tuyère supersonique donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie [39], [47], [115] et [161], il est nécessaire de connaître l'angle de détente initial au col qu'il faut donner pour avoir le

nombre de Mach de sortie voulu. La conception de ce type de tuyère est basée sur l'application de la méthode des caractéristiques [126] et [115]. Cette dernière est formulée sur la base de la fonction de Prandtl Meyer. Une deuxième application consiste à calculer l'écoulement supersonique autour d'un dièdre dans un milieu ambiant chaud, notamment le calcul de l'écoulement autour d'un profil d'aile pointu ou d'un cône de révolution [163].

Les résultats obtenus pour un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [163] sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques C_P et C_V sont constantes et ne dépendent pas de la température; ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température T_0 croît. La nouvelle fonction de Prandtl Meyer est présentée sous la forme d'une intégrale d'une certaine fonction complexe [164], où la procédure analytique d'intégration est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions approchées par deux méthodes d'intégrations numériques, l'une de Simpson avec pas variables et l'autre de Gauss Legendre adaptée vu que la fonction à intégrer possède une singularité dans sa dérivée [165].

La dérivée de cette fonction au point critique est infinie. Elle présente alors un gradient élevé en ce point. Les quadratures d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable, notamment les quadratures de trapèze et de Simpson. Une quadrature robuste et rapide qui répond bien à la spécificité de la fonction est développée. Avec un nombre de point très réduit, on peut intégrer notre fonction avec une précision très élevée. Le problème qui se pose dans l'application de cette quadrature est que les points d'intégration sont des nombres irrationnels équidistants et varient avec le rang de la quadrature [165].

L'application est pour l'air dans le domaine supersonique, inférieure au seuil de dissociation des molécules applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ. Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle G_P , une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle HT sera présentée.

B.8 Formulation mathématique

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression. Lorsque l'intensité du choc $\Delta P/P$ tend vers zéro, fournis l'outil nécessaire

à l'étude de ce phénomène [37]. En effet, l'onde de choc oblique devient une onde de Mach. La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une petite déviation d'écoulement $\Delta\theta$ en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse ΔV par la relation suivante [1], [30], [39], [121], [132] et [160] :

$$d\theta = -\frac{\cot g(\mu)}{V} dV \quad \text{B-58}$$

En insérant la relation entre l'angle de Mach μ et le nombre de Mach M dans l'équation (B-58), on obtient:

$$dV = (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{V} \quad \text{B-59}$$

La relation (B-59) est très importante pour l'étude de l'écoulement supersonique isentropique externe ou interne. Notons que l'angle $d\theta$ est considéré positif lorsque l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression) et négatif quand l'écoulement se rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente).

Pour l'intégration de l'équation (B-59), il convient d'exprimer dV/V et le nombre de Mach par leurs expressions (B-18) et (B-20), on obtient la relation suivante:

$$dV = -F_v(T) dT \quad \text{B-60}$$

$$F_v(T) = \frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{2H(T)/a^2(T) - 1} \quad \text{B-61}$$

Les expressions de $C_P(T)$, $H(T)$ et $a(T)$ sont présentées respectivement par les relations (B-39), (B-40) et (B-9) :

$$\gamma(T) = \frac{C_P(T)}{C_P(T) - r} \quad \text{B-62}$$

On remarque clairement que la fonction de Prandtl-Meyer est reliée directement à la température. L'intégration de la relation (B-61) entre deux états 1 et 2 :

$$V_2 - V_1 = \int_{T_1}^{T_2} -F_v(T) dT = V(T_2) - V(T_1) \quad \text{B-63}$$

La fonction v est définie purement dans le régime supersonique. Lorsque $M=1.0$, on prend $v=0.0$, puisque le calcul se fait par une intégration définie. Alors, la valeur de v pour un nombre de Mach supersonique $M>1.0$ [dans ce cas la température est inférieure à la température critique ($T<T^*$)] est donnée par:

$$v(T) = \int_T^{T^*} -F_v(T) dT \quad \text{B-64}$$

On remarque que le calcul de v nécessite l'intégration de la fonction $Fv(T)$ où la procédure analytique est impossible vu la complexité de cette fonction. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. On peut obtenir la relation de Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir de la relation (B-64) en annulant tous les coefficients de la variation du polynôme $C_p(T)$ avec la température sauf le premier. La relation pour un gaz parfait est donc un cas particulier de la forme générale (B-64) de la fonction de *Prandtl Meyer*. Dans cette relation, la température T correspondant au nombre de Mach M doit être déterminée par la résolution de l'équation (B-20) présentée dans le chapitre 1. Pour faire une comparaison entre les cas *HT* et *GP*, on rappelle la fonction de Prandtl-Meyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [1]:

$$v(M) = \left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1) \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{B-65}$$

La fonction de *Prandtl-Meyer* (B-65) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le gaz parfait. Contrairement notre modèle *HT*, la variable principale est la température T de l'équation (B-20), reliant M et T qu'on ne peut pas déterminer une expression analytique de son inverse.

B.9 Application dans une tuyère

On peut rencontrer le problème étudié, par exemple, lors de la conception des tuyères supersoniques de propulsion. L'utilisation de la forme de la tuyère dimensionnée, obtenue sur la base du modèle d'un gaz parfait donnant un nombre de Mach M_S supersonique uniforme à la section de sortie pour les applications des moteurs fusées ou des souffleries, dégrade les performances souhaitées ; surtout si la température de la chambre de combustion T_0 est élevée [50]. On rappelle que la forme de la structure de la tuyère ne change pas, mais le comportement thermodynamique de l'air change avec la température T_0 . En augmentant la valeur de T_0 , on peut avoir des résultats autres que ceux obtenus pour le modèle du gaz parfait. Si on veut conserver la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie M_S du modèle d'un gaz parfait, il faut déterminer pour notre modèle, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et par conséquent une autre forme de la tuyère sera obtenue. La relation (B-66) indique que le nombre de Mach du modèle *GP* est conservé. En premier lieu, on détermine la température à cette section qui

présente la solution de l'équation (B-67). Pour déterminer le rapport des sections et par conséquent le rayon de la section, on utilise la relation (B-68). Le rapport des sections obtenu par notre modèle est supérieur au rapport des sections du modèle *GP*. La forme de la tuyère obtenue par le modèle à γ constant est alors incluse dans la tuyère obtenue par notre modèle.

$$M_s(H T) = M_s(G P) \quad \text{B-66}$$

$$M_s(H T) = \frac{\sqrt{2 H [T_s(H T)]}}{a [T_s(H T)]} \quad \text{B-67}$$

$$A_s / A^*(H T) = \exp \left(\int_{T_s(H T)}^{T^*} F_A(T) dT \right) \geq A_s / A^*(G P) \quad \text{B-68}$$

La deuxième situation consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle du gaz parfait pour les applications aéronautiques (voir la relation (B-69)). Dans ce cas, cette tuyère va délivrer un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (B-70)). La correction du nombre de Mach pour le modèle à Haute Température se fait en premier lieu par la détermination de la température T_s comme solution de l'équation (B-68). Ensuite on détermine le nombre de Mach de sortie par la relation (B-50). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et vont influencer sur les autres paramètres de conception comme la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère. La résolution de l'équation (B-68) se fait en combinant la méthode de dichotomie avec la quadrature de Simpson.

$$A_s / A^*(H T) = A_s / A^*(G P) \quad \text{B-69}$$

$$M_s(H T) \leq M_s(G P) \quad \text{B-70}$$

ANNEXE C

METHODE DES CARACTERISTIQUES

C.1 Hypothèse fondamentales

La résolution directe du problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques, consiste en principe, à résoudre les équations de base décrivant l'écoulement à savoir l'équation de continuité, les équations de la dynamique et de l'énergie. Ce sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas ne connaît pas à priori les conditions aux limites, étant donné que le profil de la tuyère est lui-même inconnu et recherché. Il est évident qu'on doit émettre, pour rendre le problème plus abordable, certaines hypothèses plus ou moins simplificatrices concernant les propriétés du gaz s'écoulant dans la tuyère et ensuite sur l'écoulement lui-même. A ce titre, on a considéré les hypothèses suivantes [50]:

L'écoulement est considéré comme étant entièrement établi et stationnaire (les dérivées par rapport au temps sont nulles).

- Les forces à distances, telle que, l'effet de la pesanteur et les interactions entre les particules de fluide sont négligées et les forces extérieures de source électrique et magnétique sont absentes.
- Le gaz utilisé est considéré comme parfait. Cependant, le volume occupé par les molécules du gaz est supposé nul, ce qui implique que l'effet de la viscosité est négligé.
- Le gaz est considéré comme étant thermiquement parfait. Le seuil de dissociation des molécules n'est pas encore atteint, c'est-à-dire que nous travaillons avec des molécules et non pas avec des atomes.
- Le gaz est calorifiquement imparfait, c'est-à-dire que ses propriétés calorifiques telles que C_p et γ sont considérées comme variables dépendant uniquement de la température lorsque cette dernière croît.
- L'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc.
- L'écoulement est idéal, le transfert de chaleur par conduction entre les différentes particules de gaz est négligé.

- L'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.
- Le transfert de chaleur forcé par convection ou rayonnement avec la paroi de la tuyère est absent.

C.1.1 Equations descriptives de l'écoulement

Pour qu'un écoulement bidimensionnel, stationnaire, adiabatique, non visqueux et non soumis à des forces extérieures, les équations qui en décrivent le mouvement relativement à un système de coordonnées cartésiennes s'expriment comme suit [7]:

- Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \text{C-1}$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{C-2}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{C-3}$$

- Equation de conservation de l'énergie [13] [14] [15]

$$V^2 = 2 H(T) \quad \text{C-4}$$

Avec : $H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT$; $V = \sqrt{u^2 + v^2}$; $a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T}$

- Equation d'état du gaz parfait

$$P = \rho r T \quad \text{C-5}$$

Après des transformations mathématiques des équations (C-1), (C-2), (C-3) et (C-5), on peut obtenir une équation unique pour les composantes du vecteur vitesse de la forme suivante [7] :

$$(a^2 + u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 + v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \delta a^2 + \frac{v}{y} = 0 \quad \text{C-6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{C-7}$$

Avec : $\delta=0$; le cas plan, $\delta=1$; le cas axisymétrique

On obtient ainsi l'équation générale de la dynamique des gaz. Dans cette équation la vitesse du son est fonction de la température selon l'équation d'énergie (C-4).

Pour l'écoulement axisymétrique, la symétrie est suivant l'axe x . Cependant, la direction y dans les équations est alors celle de la direction radiale.

Il existe un potentiel des vitesses φ défini par [7]:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

L'équation (C.6) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\left[a^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{a^2}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{C-8}$$

L'équation (C-8) représente une équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre. Elle est non linéaire. Les coefficients des termes de deuxième ordre contiennent les dérivées de premier ordre de la fonction φ .

L'équation (C-8) est de type hyperbolique, si le discriminant D est supérieur à zéro pour tout point du domaine d'écoulement :

$$D = B^2 - 4AC \geq 0 \quad \text{C-9}$$

Avec :

$$A = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = a^2 - u^2$$

$$B = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2uv$$

$$C = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = a^2 - v^2$$

La condition (C-9) se réduit à :

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} \geq 1 \quad \text{C-10}$$

Les coordonnées cartésiennes sont généralement mal adaptées à une description de l'écoulement supersonique et les équations présentées précédemment ne peuvent donc être utilisées directement. Dans le plan (xoy) , il y a certaines directions pour lesquelles les dérivées des variables de l'écoulement telles que $\partial P / \partial x$, $\partial u / \partial x$... etc sont indéterminées ou discontinues [7]. Ces directions sont appelées les caractéristiques. Si l'on choisit, de nouvelles coordonnées avec l'une d'entre elles dans la direction des caractéristiques, le système d'équations (C-6) est considérablement simplifié.

C.1.2 Propriétés des équations hyperboliques

Sans entrer dans les détails de la théorie mathématique des équations hyperboliques, une équation est de type hyperbolique si une certaine relation est satisfaite par les coefficients des dérivées du plus grand ordre. Dans notre cas, cette condition est la relation $\frac{u^2 + v^2}{a^2} \geq 1$.

Les équations de cette forme se distinguent par le fait qu'il existe des directions caractéristiques dans le plan (x,y) le long desquelles la dérivée normale des variables dépendantes (dans notre cas u et v) peut être discontinue mais la vitesse elle-même doit être continue. En plus, le long de ces caractéristiques, les variables dépendantes doivent satisfaire une certaine relation appelée l'équation de compatibilité. Cette dernière constitue la base de la méthode numérique.

C.2 Equations des caractéristiques

Les équations des caractéristiques sont obtenues dans la première étape par la multiplication des équations (C-6) et (C-7) par des inconnues σ_1 et σ_2 . Après la sommation on obtient :

$$\sigma_1(a^2 + u^2) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_1}{a} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + (a^2 + v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - uv \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \delta a^2 + \frac{v}{y} = 0 \quad \text{C-11}$$

En assumant que les composantes du vecteur vitesse $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont des fonctions continues. On peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad \text{C-12}$$

$\lambda = \frac{dy}{dx}$: étant la pente des courbes caractéristiques.

En faisant correspondre les équations (C-11) et (C-12), il vient :

$$\lambda = \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_1}{\sigma_1(a^2 - u^2)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2}$$

A partir des équations précédentes, on obtient un système d'équations en σ_1 et σ_2 par :

$$\begin{cases} \sigma_1[(a^2 - u^2)\lambda + 2uv] + \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1(a^2 - v^2) - \sigma_2\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{C-13}$$

Pour que le système (C-13) possède une solution autre que la triviale, il faudrait que le déterminant de la matrice formée par les coefficients soit nul. Ce qui donne :

$$(a^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (a^2 - v^2) = 0 \quad \text{C-14}$$

L'équation (C-14) donne deux solutions qui sont :

$$\lambda^{\pm} = \left[\frac{dx}{dy} \right]^{\pm} = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad \text{C-15}$$

L'équation (C-15) définit deux courbes dans le plan (x,y) qui sont les caractéristiques. Elles sont réelles si $M > 1$. Une autre forme de cette équation fait intervenir d'autres paramètres plus faciles à manipuler tels que le nombre de Mach, la vitesse $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, l'angle représentant la direction de l'écoulement noté θ et l'angle de Mach μ .

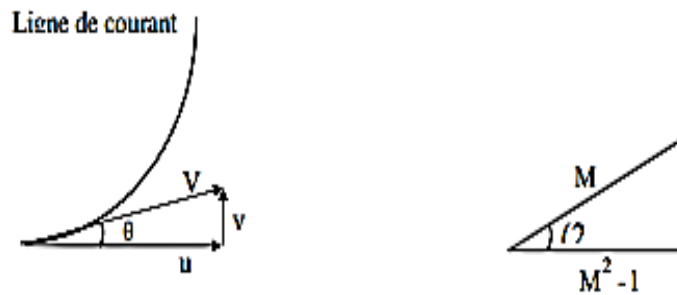


Figure C.1. Illustration de la direction de l'écoulement et de l'angle de Mach.

D'après la figure C.1, on a :

$$u = V \cos \theta$$

$$v = V \sin \theta$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{v}{u} \right) \quad \text{C-16}$$

$$M = \frac{1}{\sin(\mu)}$$

$$\sqrt{M^2 - 1} = \cot g(\mu) \quad \text{C-17}$$

Substituons les équations (C-16) et (C-17) dans (C-15) et après quelques transformations trigonométriques on aboutit à :

$$\lambda^{\pm} = \left[\frac{dx}{dy} \right]^{\pm} = \tg(\theta \pm \mu) \quad \text{C-18}$$

Cette équation est illustrée par la figure (C.2) où les caractéristiques montantes et descendantes C^+ et C^- sont représentés.

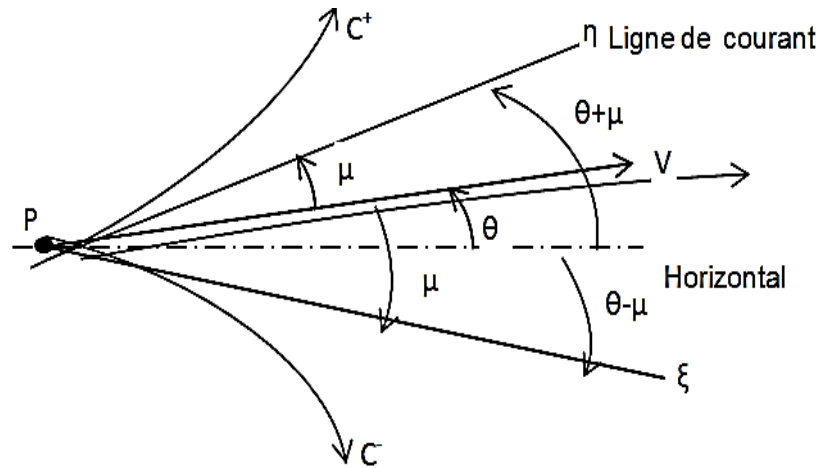


Figure C.2 : Les caractéristiques C^- et C^+ .

C.3 Relation de compatibilité

Les lignes ξ et η sont définies en général comme des lignes courbées et constantes puisque u , v , μ et θ sont des valeurs locales dans le champ de l'écoulement. Ces lignes ne sont pas connues à priori mais si on introduit les lignes ξ et η constantes comme nouvelles coordonnées dans les équations (C-6) et (C-7). Nous obtenons par cette transformation deux familles de courbes $\xi(x,y)=\text{constante}$ et $\eta(x,y)=\text{constante}$ qui prennent ainsi la fonction d'un nouveau réseau de coordonnées. Cette transformation se révélera très utile pour la description d'un écoulement supersonique lors de la mise en forme des équations de base.

D'après la figure C.1 on a :

$$\begin{cases} u = V \cos \theta \\ v = V \sin \theta \end{cases} \quad \text{C-19}$$

Les dérivées partielles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \end{cases} \quad \text{C-20}$$

Par substitution des relations (C-19) et (C-20) dans (C-6) et (C-7), ainsi que l'équation (C-17) on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \mu \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \right] + \frac{\cot g \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right] \cos \mu - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta + \frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right] &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{C-21}$$

On multiplie la première partie de (C-21) par μ , ensuite l'addition avec la deuxième partie et après des transformations mathématique on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] + \frac{\cot g \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} &= 0 \\ \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] - \frac{\cot g \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] + \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} &= 0 \end{aligned} \right.$$

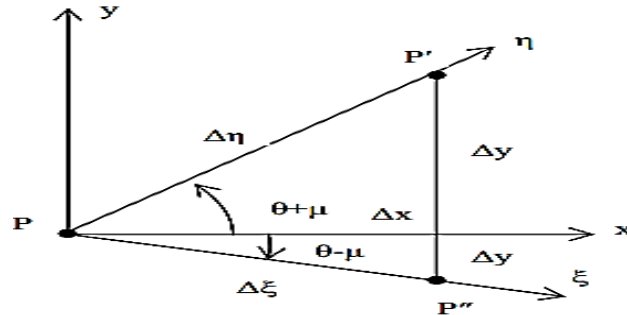


Figure C.3: Relation entre les lignes de Mach et les coordonnées cartésiennes.

On introduit, a cette étape, les coordonnées $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$. D'après la figure (C.3) le déplacement PP' le long de la caractéristique η :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta \eta \quad \text{C-22}$$

Suivant (x, y) on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad \text{C-23}$$

f : Une fonction arbitraire.

Par identification des équations (C-22) et (C-23), on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \quad \text{C-24}$$

A partir de la figure (C-3) on peut écrire les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \tan(\theta + \mu) \\ \frac{\Delta \eta}{\Delta x} &= \frac{1}{\cos(\theta + \mu)} \end{aligned} \right. \quad \text{C-25}$$

Remplaçons les équations du système (C-25) dans l'équation (C-24), puis multiplions par $\cos(\mu + \theta)$, on obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta + \mu) = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{B-26}$$

De même, en allant de P à P' suivant la direction ξ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial f}{\partial y} \sin(\theta - \mu) = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{B-27}$$

A la fin on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\cot g \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\cot g \mu}{V} \frac{\partial V}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \end{cases} \quad \text{B-28}$$

Ce résultat est particulièrement intéressant, puisque dans l'équation applicable le long de la ligne $\eta = \text{constante}$ n'interviennent que les dérivées dans la direction η et vice-versa. Les lignes à ξ et η constantes sont les lignes caractéristiques du système d'équations (C-28).

Selon la définition de la fonction de Prandtl- Meyer (v) et d'après l'équation (C-18) et le système d'équations (C-28), on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \\ \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \end{cases} \quad \text{C-29}$$

- Cas plan

Pour le cas plan ($\delta=0$), le système d'équations (C.29) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad \text{C-30}$$

Le système (B.30) simplifié suivant ξ et η respectivement :

$$\begin{cases} v + \theta = Q^- \\ v + \theta = Q^+ \end{cases} \quad \text{C-31}$$

Où Q^- et Q^+ sont des constantes appelées invariants de Riemann.

- Cas axisymétrique

Pour le cas axisymétrique ($\delta=1$), le système d'équations (C-30) est devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \\ \frac{\partial (v + \theta)}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \end{array} \right. \quad \text{C-32}$$

Ce résultat est différent de celui du cas plan du fait que l'intégration n'est pas simple, car la géométrie (y) est prise en compte. Pour la résolution complète de l'écoulement il faut ajouter les équations des caractéristiques (C-18).

Une fois le problème résolu en fonction de v et θ , on peut facilement obtenir les variations des autres paramètres, tel que M , λ , les rapports thermodynamiques à partir des équations appropriées.

REFERENCES

1. Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," sixth edition, California, 1992.
2. Woutijn J. Baars and Charles E. Tinney and Joseph H. Ruf, Andrew M. Brown, and David, M. McDaniels, "Wall Pressure Unsteadiness and Side Loads in Over-expanded Rocket Nozzles", AIAA JOURNAL, Vol. 50, No. 1, January 2012.
3. Brian W.Donald Woutijn J. Baars and Charles E. Tinney, "Acoustic characterization of subscale rocket nozzles", NASA Marshall Space Flight Center, Huntsville, AL, 35812, USA, AIAA 2012-0544, 2012.
4. Rao G. V. R., "Recent development in Rocket Nozzle Configuration", ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, 1961.
5. Zebbiche T. and Youbi Z., "Design of Two-Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at High Temperature. Application for Air," DGLR 2005-257, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
6. Zebbiche T., "Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Design at High Temperature," Submitted to 45th AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, 8-11 Jan. 2007, Reno Hilton, Reno, Nevada, 2007.
7. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, 1988.
8. Zebbiche T., "Supersonic Plug Nozzle Design," AIAA-2005-4490, 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, Arizona, July 10-13, 2005.
9. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12, 2006.
10. Zebbiche T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 Jun 2006.
11. [Http: // fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fusée](http://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fusée).26-02-2016.
12. Michel. Illig, "CNES Research and Technologies Program Overview", CNES, ISIS 2008.
13. Gerald Hagemann, Frey M, "Shock pattern in the plume of rocket nozzles: needs for design consideration". Shock Waves 17(6), 387–395, 2008.

14. Wagner B., Karl S. and Hannemann K., "Test Case 1a: Short Nozzle Under Separated Flow Condition Numerical Investigation with the DLR Tau-Code", Proceedings of The FSCDATAAC Workshop, Noordwijk, 15-16th November, The Netherlands, 2006.
15. Östlund J and Muhammad-Klingmann B , "Supersonic Flow Separation with application to Rocket Engine Nozzles" , Applied Mechanics, Vol 58, 2005.
16. Mattsson J., Högman U. and Torngren L., "A Subscale Test Programme on Investigation of Flow Separation and Side-Loads in Rocket Nozzles", Proc. of the 3rd Europ. Symp. On Aerothermodynamics of Space Vehicles, ESA-ESTEC, 1998.
17. Richard Schwane, and Xia, Y., "Time-Accurate CFD Predictions and Data Validation for Side Load Generation by Flow-Structure Coupling in Over-Expanded Rocket Nozzles", Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, Vol. 4, No. 1, pp. 53–65, 2005.
18. Wong Henry, Schwane R., Torngren L., "Investigation of Unsteady Turbulent Flow in an Over- expanded Rocket Nozzle", 4th Intern. Conf. on Launcher Technology "Space launcher Liquid Propulsion", Liège, 2002.
19. Onofri M., Nasuti F., "The Physical Origin of Side Loads in Rocket Nozzles". AIAA Paper 99–2587, 1999.
20. Emanuel Martelli, Francesco Nasuti and Marcello Onofri, "Effect of Wall Shape and Real Gas Properties on Dual Bell Nozzle Flow field" , 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 10 - 13 July 2005, Tucson, Arizona, AIAA 2005- 3943,2005.
21. J.A. Moríñigo, J.J. Salvá, "Numerical study of the start-up process in an optimized rocket nozzle", Aerospace Science and Technology 12, 485–489, 2008.
22. J.A. Moríñigo, J.J. Salvá, "Numerical Investigation of the Separation Modes Transition and Hysteresis in the Sub-scale J2S Rocket Engine Nozzle", CNES / ESA 4th International Conference on Launcher Technology: Space Launcher Liquid Propulsion Liège, Belgium, 3-6 December 2002.
23. Bruno Sainte-Rose, "Simulations numériques d'écoulements réactifs massivement décollés par une approche hybride RANS/LE", Thèse de doctorat de l'École Centrale Paris, Département d'Energétique Fondamentale et Appliquée, ONERA 2010.
24. Détery, J. and Marvin J., "Shock-wave boundary layer interactions", AGARDograph n°280, février 1986.
25. Afaque Shams, "Contribution à la simulation numérique des décollements d'écoulements turbulents induits par choc : application a l'écoulement sur-détendu de tuyère supersonique" Ph.D Thesis, Université de Poitiers, 2010.

26. Girard, S., "Etude des charges latérales dans une tuyère supersonique sur-détendue". Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, 15 décembre 1999.
27. Hadjadj, A., Onofri, M., "Nozzle Flow Separation". Int. Journal of Shock Waves, 19(3): 163- 169, 2009.
28. Dany Vandromme, "Contribution à la modélisation et la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variables", Thèse de doctorat Université des sciences et technique de Lille 1983.
29. Ruf, J. H., McDaniels and Brown, A. M., "Nozzle Side Load Testing and Analysis at Marshall Space Flight Center", 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA, Paper 2009-4856, Aug. 2009.
30. Peterson C. R. and Hill P. G., "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing., New York, USA, 1965.
31. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic two-dimensional minimum length nozzle design at high temperature. Application for air," Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 20, N° 1, PP. 29–39, 2007.
32. Boun-jad M., Zebbiche T. and Allali A., "Gas effect at high temperature on the supersonic nozzle conception," International Journal of Aeronautical and Space Sciences, Vol. 18, N° 01, PP. 82-90, 2017.
33. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.
34. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, 1986.
35. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Plug Nozzle Design at High Temperature.Application for Air," AIAA-2006-0592, 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 9-12 Jan. 2006, Reno Nevada, Reno Hilton, USA.
36. Yohann perrot, "étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible", Thèse de doctorat, INSA de Rouen 2006.
37. Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, (1940), 433-450.
38. Sauer R., "Method of Characteristics for Three-Dimensional Axially Symmetrical Supersonic Flows," NACA TM-1133, (1947).
39. Coburn N. and Dolph C. L. t., "Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic flows," Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, New York, American Mathematical Society, (1949), 55-66
40. Ruptash, J., "Supersonic Wind Tunnels-Theory, Design and Performance," University of Toronto, (June 1952), Institute of Aerophysics.

41. Beckwith, I. E., Ridyard, H. W., and Cromer, N., "The Aerodynamic Design of High Mach Number Nozzles Utilizing Axisymmetric Flow with Application to a Nozzle of Square Test Section," NACA TN 2711, (1952).
42. Rao, G.V.R, "Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust," Marquadt Aircraft Co, Presented at the ARC Semi Annual Meeting, (June 10- 13 1957), San Fransisco.
43. Rakich J. V., "Three-Dimensional Flow Calculation by the Method of Characteristics," AIAA Journal, Vol. 5, n° 10, (1967), 1906-1908.
44. Chushkin P. I., "Numerical Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic Flows," Progress in Aerospace Sciences, Vol. 9, (1968), 41-122.
45. Ranson V. H., Thompson H. D. and Hoffman J. D., "Three-Dimensional Supersonic Nozzle Flowfield Calculation," J. of Spacecraft, Vol. 7, n° 4, (1970), 458-462.
46. Sivells, J. C., "A Computer Program for the Aerodynamic Design of Axisymmetric and Planar Nozzles for Supersonic and Hypersonic Wind Tunnels," AEDC-TR-78-63, (December 1978).
47. Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, June 12-14, 1989.
48. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, n° 3, (1998), 318-326.
49. Haddad, A., and Moss, J. B., "Aerodynamic Design for Supersonic Nozzles of Arbitrary Cross Section," *J. Propulsion and Power* (AIAA), Vol. 6, n°. 4, (Nov-Dec 1990), 740-746.
50. Shapiro, A.H., "The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow," Volume I, The Ronald Press Co., New York, 1953.
51. Cline, M.C., "VNAP2: A computer program for computation of two dimensional, time-dependent, compressible, turbulent flow," Kept. LA- 8872, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, Aug. 1981.
52. Zucrow, M.J. and Hoffman, J.D., "Gas Dynamics," Vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1977.
53. Beneche, T. and Quick, W.W., "History of German guided missile development," AGARDograph 20, Verlag E. Appelhos & Co, Brunswick, Germany, 1957.
54. Ahlberg, J.H. et al., "Truncated perfect nozzles in optimum nozzle design," ARS Journal, Vol. 31, No. 5, pp. 614-620, 1961.

55. Frey, H.M., and Nickerson, G.R., "TDK –Two Dimensional Kinetic reference program," SEA Inc. NAS8-36863, 1989.
56. Guderley, K.G. et al., "Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 12, No. 6, pp. 588-628, 1973.
57. Rao, G.V.R., "Exhaust nozzle contour for optimum thrust," *Jet Propulsion*, Vol. 28, No. 6, pp. 377-382, 1958.
58. Shmyglevsky, Yu D., "Variational problems of gas dynamics," *U.S.S.R. Compt. Maths. Math. Phys.* Vol. 20, No. 5, pp. 113-127, 1980.
59. Östlund, J., "Flow processes in rocket engine nozzles with focus on flow separation and side-loads," Licentiate thesis TRITA-MEK-2002, RIT, Stockholm, Sweden.
60. Wade, M., *Encyclopedia Astronautica*, 25687 pages-9423 images, <http://www.astronautix.com/>, 2011.
61. Gogish, L.V., "A study of short supersonic nozzles," *Mekhanika Zhidkosti Gaza*, Vol. 1, No. 2, pp. 175-180, 1966.
62. Hoffman, J.D., "Design of compressed truncated perfect nozzles," *J. of Propulsion and Power*, Vol.3, No. 2, pp. 150-156, 1987.
63. Stark, R., "Flow Separation in Rocket Nozzles, a Simple Criteria," 41st AIAA/ASME/SAE/SEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, AZ, AIAA paper 2005-3940, 2005.
64. Boman, A., "Apparatus for controlling the flow separation line of rocket nozzles," U.S. Patent No. 6.574.952 B2, 2003.
65. Sato, M., et al., "Experimental study on transitional phenomena of extendible nozzle," 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cincinnati, OH, AIAA paper 2007-5471, 2007.
66. Kusaka, K, et al., "Experimental study on extendible and dual-bell nozzles under high altitude conditions," 36th Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA Paper 2000-3303, 2000.
67. Schmucker, R., "Flow processes in over-expanded chemical rocket nozzles. Part 1: Flow separation," NASA TM-77396, 1984.
68. Sutton, G.P., "Stepped Nozzle," U.S. Patent No. 5,779,151, 1998.
69. Sutton, G.P. and Biblarz, O., "Rocket propulsion elements," 7th ed. John Wiley & Sons, 2001.
70. Goncharov, N., et al., "Reusable launch vehicle propulsion on the RD-0120 engine," 31st Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA 1995-3003, 1995.

71. Clayton. R. and Back, L., "Thrust improvement with ablative insert nozzle extensions," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 2, No. 1, pp. 91-93, 1986.
72. Parsley, R.C. and Van Stelle, K.J., "Altitude compensating nozzle evaluation," 28th Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA 92- 3456, 1992.
73. Semenov, V.V., et al., "Liquid propulsion with altitude compensation concept trade study," 57th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, Valencia, Spain, IAC paper 06- C4.1.09, 2006.
74. Musial, N.T. and Ward, J.J, "Overexpanded performance of conical nozzles with area ratios of 6 and 9 with and without supersonic external flow," NASA TM X-83, 1959.
75. Bonniot, C.E., "Rocket engine expansion nozzle with complementary annular nozzle," U.S. Patent No. 05,067,316, 1991.
76. Boccaletto, L. and Dussauge J.P., "High-performance rocket nozzle concept," *J. of Propulsion and Power*, Vol. 26, No. 5, 2010.
77. Horn, M. and Fisher S., "Altitude compensating nozzles," Rocket dyne Division. NASA-CR-194719, 1994.
78. Génin, C., et al., "Experimental and numerical study of dual-bell nozzle flow," *Progress in Flight Physics* Vol. 5, pp. 363-376, 2013.
79. Foster, C. and Cowles, F., "Experimental study of gas-flow separation in over-expanded exhaust nozzles for rocket motors," Progress Report No. 4- 103. JPL, 1949.
80. Frey, M. and Hagemann, G. "Critical assessment of dual-bell nozzles," *J. of Propulsion and Power*, Vol. 15, No. 1, pp. 137-143, 1999.
81. Immich, H. and Caporicci, M., "FESTIP technology developments in liquid rocket propulsion for reusable launch vehicles," 32nd AIAA Joint propulsion conference, Lake Buena Vista, Florida, AIAA-96-3113, 1996.
82. Miyazawa, M., et al., "Flight performance of dual-bell nozzles," 40th Aerospace science meeting, Reno, NV, AIAA-2002-0686, 2002.
83. Hagemann, G., et al., "Advanced rocket nozzles," *J. of Propulsion and Power*, Vol. 14, No. 5, pp. 620-634, 1998.
84. Génin, C. and Stark, R., "Flow Transition in dual-bell nozzles," *Shock Waves*, Vol. 19, pp. 265-270, Springer-Verlag, 2009.
85. Proshchanka, D., et al., "Control of operation mode transition in dual-bell nozzle," 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint propulsion conference, Nashville, TN, AIAA 2010-6815, 2010.

86. Verma, S. B., et al., "Cold gas dual-bell tests in high-altitude simulation chamber," *Shock Waves*, Vol. 21, pp. 131-140, Springer-Verlag, 2011.
87. Stark, R. and Génin, C., "Side loads in dual-bell nozzles, Part I Phenomenology," 2010,
88. Verma, S. B., et al., "Cold-gas experiments to study the flow separation characteristics of a dual-bell nozzle during its transition modes," *Shock Waves*, Vol. 20, pp. 191-203, Springer-Verlag, 2010.
89. Martelli, E., et al., "Thermo-fluid dynamics analysis of film Cooling in Over expanded Rocket Nozzles," 42nd AIAA Joint Propulsion Conference, Sacramento, CA, AIAA 2006-5207, 2006.
90. Martelli, E., et al., "Numerical parametric analysis of dual-bell nozzle flows," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 3, pp. 640-650, 2007.
91. Presz, "Lobed mixer/ejector nozzle," EP Patent No. 09,913,568, A2, 1999.
92. Asbury, S.C. and Hunter, C.A., "Effects of convoluted divergent flap contouring on the performance of a fixed-geometry non-axisymmetric exhaust nozzle," NASA TP-209093, 1999.
93. Häggander, J. and Pekkari, L., "Rocket engine nozzle," U.S. Patent No. 06,308,514, 2001.
94. Östlund, J. and Blgert, M., "A subscale investigation on side loads in sea level rocket nozzle," 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Fort Lauderdale, Florida, AIAA 99-2759, 1999.
95. Ewen, R.L. and O'Brian, C.J., "Dual-Throat thruster test results," 22nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Huntsville, Alabama, AIAA 86-1518, 1986.
96. Beichel, R., "Dual expander rocket engine," U.S. Patent No. 04,220,001, 1980.
97. Hagemann, G. et al., "Dual-Expander engine flowfield simulations," 31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, San Diego, CA, AIAA 95-3135, 1995.
98. Smith-Kent, R. and al., "Analytical contouring of pintle nozzle exit cone using computational fluid dynamics," 31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, San Diego, CA, AIAA 95-2877, 1995.
99. Wasko, R. A., "Performance of annular plug and expansion-deflection nozzles including external flow effects at transonic mach numbers," NASA TN D-4462, 1968.
100. Dunn, S.S. and Coats, D.E., "Optimum nozzles contours for aerospike nozzles using the TDK 99TM computer code," 36th JANNAF Combustion Subcommittee, Cocoa Beach, FL, 1999.

101. Wisse, M.E.N., "An asymptotic analysis of compressible base flow and the implementation into linear plug nozzles," PhD thesis, TU Delft, Netherlands, 2005.
102. Onofri, M., "Plug nozzles: summary of flow features and engine performance," OTAN Report RTO-TR-AVT-007-V1, 2002.
103. Davidenki D., Eude Y. and Falempin F., "Numerical Study on the Annular Nozzle Optimization for Rocket Application," 16th AIAA/DLR/DGLR International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, Bremen, Germany, AIAA 2009-7390, 2009.
104. <http://www.ulalaunch.com/uploads/docs/AtlasVUsersGuide2010.pdf> "Atlas V Launch Services User's Guide United Launch Alliance," USA, March 2014.
105. http://www.spacex.com/sites/spacex/files/falcon_9_users_guide_rev_2.0.pdf "Falcon 9 Launch Vehicle Payload User's Guide," Space Exploration Technologies Corp., SpaceX, October 21st, 2016.
106. <http://www.arianespace.com/May2016> "Ariane 6, User's Manual," Issued and approved by Arianespace, May 2016.
107. <http://www.kslv.or.kr> "Angara User's Guide", International Launch Services, 2015.
108. https://snebulos.mit.edu/projects/crm/DNEPR/Dnepr_User_Guide.pdf "Space Launch System, DNEPR, User's Guide," May 2016.
109. Zebbiche T., "Tuyères Supersoniques à Haute Température," Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010).
110. Zebbiche T., "Stagnation Temperature effect on the Supersonic axisymmetric Minimum Length Nozzle Design with Application for Air," Advances in Space Research, Vol.48, n°23, PP. (2011), 1656-1675.
111. Zebbiche T., "Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Conception at High Temperature," AIAA-2008-3674, 40th AIAA Thermophysics Conference, (23-26 June 2008), USA.
112. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, 1997.
113. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of GasDynamics," John Wiley & Sons, New Jersey, 2002.
114. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1985.
115. Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987.

116. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
117. Georing M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1990-2024, 26th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, (July 16-18 1990), Orlando, Florida.
118. Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
119. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles, " The Aeronautical Journal, Vol, 111, n° 1115, (Jan 2007), 31-40.
120. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, (1986).
121. Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables," , (1970), New York, Academic Press.
122. Dillaway, R. B. A "philosophy for improved rocket nozzle design". 11th American rocket society annual meeting, ARS 362-56 (1956).
123. Erickson, L. H. "Observations of jet separation within conical contour nozzles during solid propellant rocket motor firings". Thiokol chemical Corp., Wasatch Division, Brigham City, UTAH.
124. S. Candel, "Mécanique des Fluides", Dunod 1995.
125. R. Comolet, "Mécanique expérimentale des fluides", Tome 1, Masson, 1990.
126. Reijasse, P, "Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé", PhD Thesis, Université de Paris VI, 2005.
127. Jean Délery, "Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps", Département Aérothermodynamique, E.N.S.A.E, 1989.
128. Deck, S. "Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur des configurations de lanceur", thèse de Doctorat de l'Université d'Orléans, ONERA 2002.
129. Pascal Pempie, "Moteur fusée à ergols liquides", document CNES DLA/CT 03-194,2007.
130. Nguyen, A. T., Girard, S., Alziary de Roquefort, T. "Etude de l'écoulement dans une tuyère à contour parabolique en régime sur-détendu". Rapport LEA sous commande ONERAN°6983/DA/CDES, juillet 2001.

131. Manuel Frey, "Behandlung von Strömungsproblemen in Raketendüsen Überexpansion". PhD thesis, Universität de Stuttgart, Allemagne, 2001.
132. Hagemann G., Immich H., "Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, (July 13-15 1998), Cleveland, OH.
133. Jean Détery, "Traité d'aérodynamique compressible", Volume 2, écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité, Lavoisier 2008.
134. Jean Détery, "Some salient aspects of shock wave /boundary layer interaction", ISIS 2008.
135. Gerald Hagemann, And Michael Terhardt, "Flow Separation and Side-Loads in Rocket Nozzles", Paper presented at the 4th International Symposium on Liquid Space Propulsion, March 2000, DLR Lampoldshausen, 2000.
136. Manuel Frey , Rydén R., Alziary de Roquefort Th., Hagemann G., James Ph., Kachler Th., Reijasse Ph., Schwane R., Stark R., "European Cooperation on Flow Separation Control", 4th Inter. Conf. on Launcher technology "Space Launcher Liquid Propulsion", Liege, 2002.
137. Emanuele Martelli, Nasuti, F., and Onofri, M., "Numerical Analysis of Film Cooling in Advanced Rocket Nozzles", AIAA Journal , Vol. 47, No. 11, 2009, pp. 2558–2604, 2009.
138. Frey M. and Hagemann, G. "Status of flow separation prediction in rocket nozzles", 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE, Joint Propulsion Conference & Exhibit (July 13-15, 1998, Cleveland, OH), AIAA Paper 98-3619.
139. Nave L.H and Coffey G.A. "Sea-level side-loads in high area ratio rocket engine". AIAA Paper 73-1284, 1973.
140. Terhardt, M., Hagemann, G., Frey, M. "Flow separation and side-loads behavior of the Vulcain engine". AIAA-99-2762.
141. McKenney T.D. Flow separation in overexpanded supersonic nozzles. ARS Journal, page 320, Sept/Oct 1954.
142. Favre, A., "Equations des gaz turbulents compressibles, part 2 : méthode des vitesses moyennes ; méthode des vitesses moyennes pondérées par la masse volumique". J. de Mécanique 4, pp. 391-421, 1965.
143. Cousteix J., "Turbulence et couche limite", CEPADUES EDITIONS, 1989.
144. Simpson R.L., Strickland J.H. and Barr P.W. "Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation". Journal of Fluid Mechanics Digital Archive, 79(03):553–594, 2006.
145. CFD-FASTRAN User Manuel, "CFD Research Corporation", V2003.

146. Bekka N. "Simulation numérique d'un écoulement turbulent autour d'une paroi courbée : Comparaison des modèles de turbulence". PhD thesis, Université de Mentouri de Constantine, 2009.
147. Eric Goncalves, "Généralité sur les codes RANS en écoulement compressible", Institut National Polytechnique de Grenoble 2004.
148. J.E Bardina, P.G. Huahg, and T. J. Coakly, Turbulence modeling validation, testing, and development, NASA Technical Memorandum 110446, 1997.
149. Menter, F. R., KUNTZ, M., Langtry, R., "Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. Turbulence, Heat and Mass Transfer", 2003.
150. Wilcox, D. C. "Reassessment of the scale deterring equation for advanced turbulence models". AIAA J., 26, 1299-1310, 1988
151. B. E. Launder and B.I Sharma. "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc. Letters in Heat and Mass Transfer", 1:131-137, 1974.
152. Lüdeke H., Calvo J.B., and Filimon A. "Fluid Structure Interaction at the ARIANE-5 Nozzle section by advanced turbulence models", European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, 2006.
153. Kuahai Y., Xi Y. and Zhan M., "Profile Design and Multifidelity Optimization of Solid Rocket Motor Nozzle," Journal of Fluid Engineering, Vol. 136, N° 03, PP. 341-346, 2013.
154. Sutton G. P. and Biblarz O., "Rocket Propulsion Elements", 8^{ème} edition, John Wiley and Sons., 2010.
155. Abada O., Zebbiche T. and Abdallah El-Hirts A., "Three-dimensional supersonic minimum length nozzle design at high temperature for arbitrary exit cross section," Arabian Journal for Science and Engineering, Vol. 39, N° 11, PP. 8233-8245, 2014.
156. CFD-GEOM User Manuel, CFD Research Corporation, V2003.
157. Chapman, D., Huehn, D., Larson, H. "Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition". NACA TM 3869, 1957.
158. Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
159. Anderson J. . Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
160. Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, PP. 404-407, 1978.

161. Aukin M. K., Kraiko A. N., Lubinov D. A., Makarov V. E. and Tillyaeva N. I., "Designing Three-Dimensional Nozzles to Achieve Near Uniform Supersonic or Hypersonic Flow in The Rectangular Exit Section," *Physics and Astronomy*, Vol. 30, n° 30, (1995), 787-794.
162. Armstrong, W.C., "A Method of Characteristic Computer Program For Three-Dimensional Supersonic Internal Flows," AEDC-TR-78-68, January 1979.
163. Al-Ajlouni M., "An Automatic Method for Creating the Profile of Supersonic Convergent-Divergent Nozzle," *Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol 4 No. 3, (2010), pp. 404-411
164. Sivells J. C., "Aerodynamic Design of Axisymmetric Hypersonic Wind –Tunnel Nozzles," *Journal of Spacecraft*, Vol. 7, n°11, (November 1970), 1292-1299.
165. Lax P. D. and Wendroff B., "Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations," CIMS Report NY0-9759, (July 1962), New York Univ, New York.
166. Mahfoudi El-Ahcene, " Contribution à l'étude des profils de tuyères en écoulements supersoniques visqueux par la méthode des volumes finis", Thèse de doctorat Université de Constantine 2014.