

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



UNIVERSITE -SAAD DAHLEB- BLIDA

جامعة سعد دحلب - البليدة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## MEMOIRE DE MASTER

Thème:

Contribution à l'étude de la  $b$ -coloration dans les graphes

Présenté par :

Melle REGAB Amira & Mr SAADADOU Djamel

Devant les membres de jury :

Mr Bouchou Ahmed                      Président              Maître Assistant, USD Médéa

Mr Blidia Mostafa                      Examineur              Professeur, USD Blida

Mme Zemir Zoham                      Examineur              Maître de Conférences, USD Blida

Mr Ikhlef Eschouf Noureddine              Promoteur              Maître Assistant, USD Médéa

PROMOTION : 2010-2011

## Table des matières

Remerciements . . . . .	4
Dédicace . . . . .	5
Abstract . . . . .	7
Résumé . . . . .	8
La liste des figures . . . . .	9
Introduction . . . . .	12
<b>I NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THÉORIE DES GRAPHS</b>	<b>14</b>
1.1 Définitions et notations . . . . .	14
1.1.1 Graphe . . . . .	14
1.1.2 Sous-graphe . . . . .	15
1.1.3 Voisinages . . . . .	15
1.1.4 Degré d'un sommet . . . . .	16
1.1.5 Chaînes et cycles . . . . .	16
1.1.6 Graphe connexe . . . . .	16
1.1.7 Distance et diamètre . . . . .	17
1.2 Graphes particuliers . . . . .	17
1.2.1 Graphe complet . . . . .	17
1.2.2 Graphe complémentaire . . . . .	17

1.2.3	Graphe régulier . . . . .	18
1.2.4	Graphe $k$ -parti . . . . .	18
1.2.5	Joint de deux graphes . . . . .	18
1.2.6	Arbre et forêt . . . . .	19
1.3	Quelques paramètres structurels d'un graphe . . . . .	20
1.4	Complexité algorithmique . . . . .	21
<b>II COLORATION ET <math>B</math>-COLORATION, QUELQUES RÉSULTATS EX-</b>		
<b>ISTANS . . . . .</b>		<b>23</b>
2.1	Quelques colorations particulières de graphes . . . . .	23
2.1.1	Coloration propre et nombre chromatique . . . . .	23
2.1.2	La $a$ -coloration et le nombre $a$ -chromatique . . . . .	25
2.1.3	La $b$ -coloration et le nombre $b$ -chromatique . . . . .	25
2.2	Quelques résultats classiques . . . . .	26
2.2.1	Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe quelconque . . . . .	26
2.2.2	Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$ . . . . .	29
2.2.3	Quelques bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe biparti . . . . .	29
2.2.4	Le nombre $b$ -chromatique du joint de deux graphes . . . . .	30
2.2.5	Notion de la $b$ -continuité . . . . .	30
<b>III LE NOMBRE <math>B</math>-CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHS . . . . .</b>		<b>31</b>
3.1	La $b$ -coloration dans les arbres . . . . .	31

3.1.1	La $b$ -coloration dans les arbres pivotés . . . . .	32
3.1.2	La $b$ -coloration dans les arbres non pivotés . . . . .	34
3.2	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu de certains graphes particuliers	40
3.2.1	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une chaîne . . . . .	42
3.2.2	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un cycle . . . . .	44
3.2.3	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une roue . . . . .	45
3.2.4	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Friendship	47
3.2.5	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Helm .	48
3.2.6	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Windmill	53
3.2.7	Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une couronne d'une chaîne et d'un cycle . . . . .	54
3.3	La $b$ -coloration du graphe milieu de la somme cartésienne de deux chaînes.	59
<b>IV</b>	<b>LE NOMBRE <math>B</math>-CHROMATIQUE DU GRAPHE MILIEU D'UN AR-</b> <b>BRE BINAIRE . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>V</b>	<b>LE NOMBRE <math>B</math>-CHROMATIQUE DU GRAPHE DE HALIN. . . . .</b>	<b>76</b>
	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>84</b>

## Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier le dieu, le tout puissant de nous avoir donné la santé, le patience et la volonté pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous remercions vivement notre promoteur M<sup>r</sup> IKHLEF ESCHOUF Nouredinne, pour son aide, son soutien moral et son suivi permanent.

Ainsi, nous remercions tous nos responsables et professeurs au niveau du département mathématique et particulièrement M<sup>r</sup> Blidia et M<sup>r</sup> Safar pour les efforts et les moyens qu'ils nous ont fournis sans cesse pour la réussite de cette formation.

Enfin, nous remercions tous qui ont participé de près ou de loin durant le déroulement de ce mémoire.

## Dédicace

Je dédie le présent mémoire à tous mes professeurs, sans lesquels je ne serai pas arrivé à un tel résultat, une honorable réussite universitaire tout ce qu'ils m'ont appris, conseillé et orienté mérité bien des considération dont je ne trouve pas mots adéquats pour les qualifier pour des études de longue haleine.

Aussi, je n'oublie pas les étudiants de ma promotion (surtout Abdessamed, Azzedine, Sid ali, Amina, Fouzia, Fatima, Aida, Soumia, Soumia, et ma binôme Amira) pour toutes les années d'études que nous avons passées ensemble, marquées netamment par des nombreux souvenirs, les uns plus inoubliables que les autres, ainsi que mes amis (Mohamed, Hamza, Fateh, Djaber,.....).

Mes parents, eux aussi, restent très attentifs au moindre évènement.

Ma réussite est d'abord la leur. Et leur coeur bat plus vite que le mien dans ce genre de situation exceptionnelle.

*Djamel*

## ملخص

ليكن  $G=(V,E)$  بيانا بسيطا برتبة  $n$ ، بحيث  $v$  تمثل مجموعة الرؤوس و  $E$  مجموعة الأضلاع .  
التلوين المسيطر هو تلوين أجود بحيث كل قسم لوني  $i$  يحتوي على عنصر مجاور إلى عنصر  
آخر على الأقل من كل قسم لوني  $j$ ،  $i \neq j$ .  
العدد اللوني المسيطر المسمى  $b(G)$  هو أكبر عدد من الأقسام اللونية في التلوين المسيطر.  
في هذه المذكرة نهتم أساسا بالتلوين المسيطر في بعض البيانات المتوسطة، وقمنا بتحديد العدد  
العدد المسيطر لبيان Halin، انطلاقا من خوارزمية Irving و Manlove.  
ثم حاولنا الربط بين نتائج كل من Silva و Maffray في بيانات الصبار مع البيانات المتوسطة  
للأشجار المزدوجة و أخيرا قمنا بتحديد العدد المسيطر للجمع الديكارتي لسلسلتين .

## RESUME

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. Parmi les nombreux paramètres de coloration existants, on s'intéresse à l'étude d'un nouveau concept de coloration des sommets, appelé coloration dominante ou  $b$ -coloration. La coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre  $b$ -chromatique, noté  $b(G)$ , est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante.

Dans ce mémoire, on détermine le nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu de certains graphes, on donne le nombre  $b$ -chromatique du graphe de *Halin* en utilisant l'algorithme de *Irving et Manlove* pour la coloration des arbres ensuite on adapte les résultats trouvés par *Silva et Maffray* [9] pour les graphes cactus au graphe milieu de l'arbre binaire. Enfin, on donne le nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu de la somme cartésienne de deux chaînes.



## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1. Un graphe $G$ .....	15
Figure 1.2. Un sous-graphe d'un graphe $G$ .....	15
Figure 1.3. Exemple de graphes complets.....	17
Figure 1.4. Exemple de graphe bipartis complets.....	18
Figure 1.5. Le joint de deux graphes.....	19
Figure 1.6. Un arbre $T$ .....	19
Figure 1.7. Une forêt.....	19
Figure 1.8. L'étoile $K_{1,n}$ .....	20
Figure 1.9. La double étoile $S_{3,4}$ .....	20
Figure 2.1. Graphe non $b$ -continu.....	30
Figure 3.1. Exemple d'un graphe milieu.....	40
Figure 3.2. La $b$ -coloration de $M(P_2)$ , $M(P_3)$ et $M(P_4)$ .....	42
Figure 3.3. La $b$ -coloration de $M(P_5)$ , $M(P_6)$ et $M(P_7)$ .....	43
Figure 3.4. La $b$ -coloration partielle de $M(P_n)$ , $n \geq 4$ .....	43
Figure 3.5. La $b$ -coloration de $M(C_3)$ et $M(C_4)$ .....	44
Figure 3.6. La $b$ -coloration de $M(C_5)$ , $M(C_6)$ et $M(C_7)$ .....	44
Figure 3.7. La $b$ -coloration partielle de $M(C_n)$ , $n \geq 8$ .....	44
Figure 3.8. Exemple d'une roue $W_6$ .....	45
Figure 3.9. La $b$ -coloration de $M(W_4)$ .....	46
Figure 3.10. La $b$ -coloration de $M(W_5)$ .....	46
Figure 3.11. La $b$ -coloration de $M(W_6)$ .....	47
Figure 3.12. Exemple de graphe de friendship $F_2, F_3, F_4$ .....	47
Figure 3.13. Le graphe milieu de $F_4$ .....	48
Figure 3.14. Exemple d'un graphe de Helm.....	48
Figure 3.15. La $b$ -coloration de $M(H_4)$ .....	49
Figure 3.16. La $b$ -coloration de $M(H_5)$ .....	50

Figure 3.17. ....	51
Figure 3.18. ....	51
Figure 3.19. Une (6) $b$ -coloration de $M(H_6)$ .....	52
Figure 3.20. Une (7) $b$ -coloration de $M(H_7)$ .....	52
Figure 3.21. La $b$ -coloration de $M(H_8)$ .....	53
Figure 3.22. Exemple d'un graphe de Windmill $Wd(5, 4)$ .....	53
Figure 3.23. Exemple d'un graphe de Windmill $Wd(5, 4)$ .....	54
Figure 3.24. Exemple d'une couronne.....	54
Figure 3.25. La $b$ -coloration de $M(Cr(P_2))$ et $M(Cr(P_3))$ .....	55
Figure 3.26. La $b$ -coloration de $M(Cr(P_4))$ , $M(Cr(P_5))$ et $M(Cr(P_6))$ .....	55
Figure 3.27. La $b$ -coloration de $M(Cr(P_7))$ , $M(Cr(P_8))$ et $M(Cr(P_9))$ .....	56
Figure 3.28. La $b$ -coloration partielle de $M(Cr(P_n))$ , $n \geq 11$ .....	57
Figure 3.29. La $b$ -coloration de $M(Cr(C_3))$ , $M(Cr(C_4))$ et $M(Cr(C_5))$ .....	57
Figure 3.30. La $b$ -coloration de $M(Cr(C_6))$ , $M(Cr(C_7))$ , $M(Cr(C_8))$ et $M(Cr(C_9))$ .....	58
Figure 3.31. Une $b$ -coloration partielle de $M(Cr(C_n))$ pour $n \geq 10$ .....	59
Figure 3.32. La somme cartésienne de $P_2$ et $P_3$ .....	59
Figure 3.33. La $b$ -coloration de $M(P_2 \square P_2)$ , $M(P_2 \square P_3)$ et $M(P_2 \square P_4)$ .....	60
Figure 3.34. La $b$ -coloration de $M(P_2 \square P_5)$ .....	61
Figure 3.35. LA $b$ -coloration de $M(P_2 \square P_6)$ .....	61
Figure 3.36. L'extention de la $b$ -coloration de $M(P_2 \square P_7)$ au $M(P_2 \square P_n)$ .....	62
Figure 3.37. La $b$ -coloration de $M(P_3 \square P_3)$ .....	62
Figure 3.38. La $b$ -coloration de $M(P_3 \square P_4)$ .....	63
Figure 3.39. La $b$ -coloration de $M(P_3 \square P_5)$ .....	63
Figure 3.40. La $b$ -coloration de $M(P_4 \square P_4)$ .....	64
Figure 3.41. La $b$ -coloration de $M(P_4 \square P_6)$ .....	65
Figure 3.42. La $b$ -coloration de $M(P_4 \square P_7)$ .....	66
Figure 3.43. La $b$ -coloration de $M(P_3 \square P_{12})$ .....	66
Figure 3.44. La $b$ -coloration du $M(P_4 \square P_8)$ .....	67
Figure 3.45. La $b$ -coloration du $M(P_5 \square P_6)$ .....	67

Figure 4.1. Exemple d'un arbre binaire.....	68
Figure 4.2. L'arbre binaire particulier $B_4$ .....	69
Figure 4.3. Le graphe milieu de $B_3$ .....	69
Figure 4.4.....	70
Figure 4.5.....	71
Figure 4.6.....	71
Figure 4.7. La $b$ -coloration de $M(B_1)$ et $M(B_2)$ .....	72
Figure 4.8. La $b$ -coloration de différentes structures de $M(B_3)$ .....	72
Figure 4.9. La $b$ -coloration de différentes structures de $M(B_4)$ .....	72
Figure 4.10. La $b$ -coloration de différentes structures de $M(B_5)$ .....	73
Figure 4.11. La $b$ -coloration de différentes structures de $M(B_6)$ .....	74
Figure 5.1. Exemple d'un graphe de Halin .....	76
Figure 5.2.....	77
Figure 5.3.....	79
Figure 5.4. Une (4) $b$ -coloration de de $h(T_0)$ .....	81
Figure 5.5.....	82
Figure 5.6.....	82

## Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII<sup>ème</sup> Siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même pont, et de revenir à leur point de départ, ou celui de la marche du cavalier sur l'échiquier pour former un circuit hamiltonien ou le problème de coloration d'une carte géographique de telle manière que deux pays voisins, ne soit pas colorés avec la même couleur. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début de XX<sup>ème</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley, Berge et Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connections d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments, par exemple, les réseaux de communication, réseaux routiers, internet, interaction entre divers espèces d'animaux ou les réseaux des circuits électriques. Ces graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes, en se ramenant à l'étude de ces graphes représentés simplement par des sommets et des arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes ont été souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance de l'aspect algorithmique.

Les problèmes de coloration sont au coeur de la théorie des graphes et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches. Ils apparaissent dans de nombreux problèmes pratiques ou théoriques. En effet, de nombreux problèmes pratiques peuvent être modélisés comme des problèmes de colorations de graphes. Nous pouvons citer par exemple les problèmes d'ordonnancement, d'allocation des fréquences, d'allocation des registres, de reconnaissance des formes. Il existe aussi plusieurs types de colorations, comme la coloration des sommets et la coloration des arêtes. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la coloration des sommets. Dans ce domaine, un grand nombre de paramètres ont été définis,

parmi les paramètres fondamentaux nous trouvons le nombre chromatique. Le problème de décision lié à ce paramètre est *NP-complet*.

De nombreux paramètres de coloration ont été dérivés du nombre chromatique, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre des couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser ce nombre. Irving et Manlove ont introduit un nouveau paramètre et une nouvelle coloration que ils ont appelé le nombre *b*-chromatique ou la *b*-coloration

Une *b*-coloration d'un graphe  $G$  est une coloration propre de  $G$  telle que pour chaque couleur  $c$ , il existe au moins un sommet  $v_c$  ayant toutes les couleurs dans son voisinage, un tel sommet  $v_c$ , sera appelé sommet *b*-dominant.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à la notion de la *b*-coloration. Cinq chapitres sont développés comme suit:

Le premier chapitre portera sur les généralités, où nous introduisons les définitions de base, ainsi que les notations usuelles de la théorie des graphes. Ensuite, nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique en citant quelques définitions de base.

Dans le deuxième chapitre, après l'introduction de certains types de coloration, nous citons les principaux résultats concernant le nombre *b*-chromatique.

Le troisième chapitre portera sur l'étude du nombre *b*-chromatique du graphes milieux de certains graphes particuliers.

Dans le quatrième chapitre, nous adaptons l'algorithme de la *b*-coloration des cactus établis par Malffray et Silva aux graphes milieu des arbres binaires pour des cas particuliers.

Dans le cinquième chapitre, nous donnons la *b*-coloration du graphe de Halin en utilisant l'algorithme de Irving et Manlove pour la coloration des arbres.

# CHAPITRE I

## NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THÉORIE DES GRAPHES

### 1.1 *Définitions et notations*

Nous introduisons dans ce chapitre les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes, ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer à l'ouvrage de BERGE [1]

#### 1.1.1 Graphe

Un graphe  $G$  est la donnée d'un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et  $E$  est l'ensemble des paires de sommets appelées arêtes. Le cardinal de  $V$ , appelé ordre de  $G$  est noté  $n$ . Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules:  $u, v, x, y, a, b$  etc. Deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents ou voisins, s'ils sont reliés par une arête. Un non voisin  $u$  d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$  est un sommet non adjacent à  $v$ . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes, si elles ont une extrémité commune. Une arête  $e$  sera dite incidente à un sommet  $v$  si  $v$  est une de ses extrémités. Dans ce cas  $v$  sera dit incident à  $e$ .

Un graphe simple est un graphe, dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de  $G$  a ses extrémités distinctes. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Au vu de cette définition, il est naturel de représenter un graphe où les points du graphique représentent les sommets du graphe et les segments entre deux points représentent les arêtes. Par exemple la figure 1.1 montre un graphe  $G = (V, E)$  avec  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ .

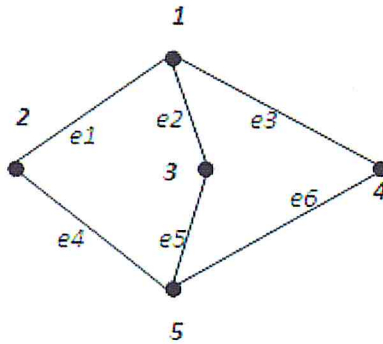


Figure 1.1. Un graphe  $G$

### 1.1.2 Sous-graphe

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple avec  $V$  ensemble des sommets et  $E$  ensemble des arêtes, pour un sous-ensemble  $A \subset V$ , on désigne par  $G[A]$  le sous graphe de  $G$  engendré par  $A$ . Donc, le sous graphe  $G[A]$  est le graphe ayant  $A$  pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ . Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets  $A$  engendre ou induit le sous-graphe  $G[A]$ . Voir le sous-graphe induit par  $A = \{1, 3, 4, 5\}$

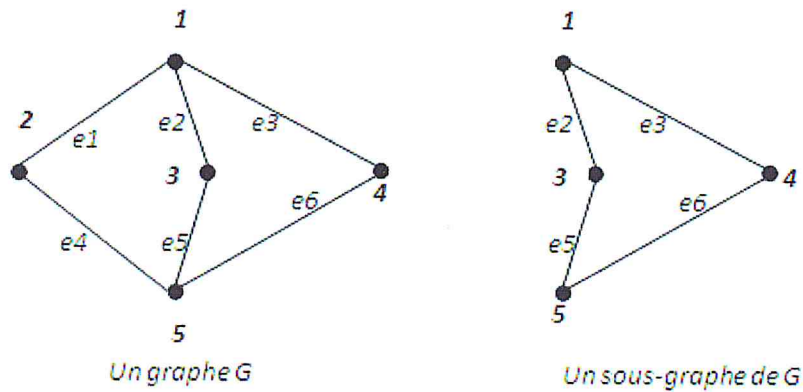


Figure 1.2. Un sous-graphe d'un graphe  $G$

### 1.1.3 Voisinages

Pour un sommet  $v$  de  $G$ , le voisinage ouvert est défini par l'ensemble suivant  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$  et le voisinage fermé est défini par  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . L'ensemble  $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$  (resp  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ ) est le voisinage ouvert (resp fermé) du

sous-ensemble  $S \subseteq V$ . Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe  $G$ , les voisinages ouvert et fermé d'un sommet  $v$  seront notés simplement par  $N(v)$  et  $N[v]$  au lieu de  $N_G(v)$  et  $N_G[v]$  respectivement. De même, nous utiliserons les notations  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement.

#### 1.1.4 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet  $v$  d'un graphe  $G$ , noté  $deg_G(v)$  ou  $d(v)$ , est le nombre de voisins de ce sommet. Un sommet de degré 0 est dit sommet isolé et un sommet de degré 1 est dit sommet pendent. On définit par  $\Delta(G) = \max\{d_G(v)/v \in V\}$  et  $\delta(G) = \min\{d_G(v)/v \in V\}$  le degré maximum et minimum dans  $G$  respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira  $deg(v)$  ou  $d(v)$ ,  $\Delta$  et  $\delta$  pour désigner respectivement  $deg_G(v)$ ,  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$ .

#### 1.1.5 Chaînes et cycles

Une chaîne  $P_k$  d'un graphe  $G = (V, E)$  de longueur  $k - 1$  est une suite  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  de sommets distincts tels que pour chaque  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ ,  $v_i v_{i+1}$  soit une arête de  $G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés les extrémités de la chaîne, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête, est dite simple. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire. On appelle cycle  $C_k$  dans un graphe  $G$ , une chaîne simple de longueur  $k$  dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

#### 1.1.6 Graphe connexe

Considérons l'ensemble des sommets d'un graphe  $G = (V, E)$ , la relation binaire  $C$  appelée relation de connexité, défini par  $x C y \iff$  il existe une chaîne de  $x$  à  $y$  est une relation d'équivalence.

- Dans un graphe  $G$ , on appelle classe connexe tout sous ensemble de sommets qui forment une classe d'équivalence de la relation de connexité, une composante connexe est un sous graphe maximal qui engendre une classe connexe.
- Un graphe est connexe, s'il ne possède qu'une seule composante connexe.



### 1.1.7 Distance et diamètre

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ . On appelle distance entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ , la longueur d'une plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . Cette chaîne est appelée chaîne géodésique. Le diamètre du graphe  $G$ , noté  $Diam(G)$ , est défini comme suit:

$$Diam(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$$

## 1.2 Graphes particuliers

### 1.2.1 Graphe complet

Le graphe complet d'ordre  $n$ , noté  $K_n$  est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré  $n - 1$ . Ainsi, deux sommets quelconques de  $K_n$  sont adjacents. La figure 1.3 donne quelques exemples de graphes complets.

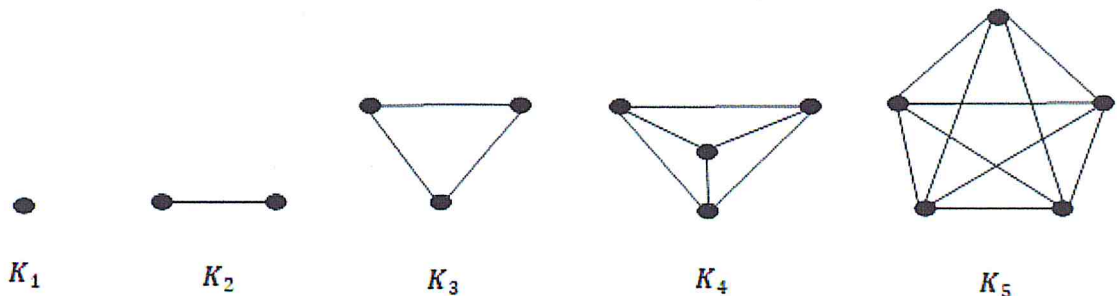


Figure 1.3. Exemple des graphes complets

### 1.2.2 Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire de  $G = (V, E)$ , noté  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ , est le graphe dont l'ensemble des sommets est exactement  $V$  et l'ensemble des arêtes est l'ensemble complémentaire de  $E$  par rapport aux arêtes de la clique à  $|V|$  sommets, c'est à dire pour toute arête  $e$

$$e \in \bar{E} \iff e \in E(K_n) \setminus E.$$

### 1.2.3 Graphe régulier

Un graphe est dit  $d$ -régulier si tous ses sommets sont de degré  $d$ . Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique. Par exemple, les cycles sont des graphes 2-réguliers, les couplages sont des graphes 1-réguliers, les stables sont des graphes 0-réguliers.

### 1.2.4 Graphe $k$ -parti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $k$ -parti s'il existe une partition de  $V$  en  $k$  sous ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_k$  telle que chacun des  $V_i$  soit un stable. On appelle graphe biparti si  $k = 2$ . Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire que pour tout sommet  $v \in V_1$  et  $u \in V_2$ ,  $uv \in E$ . si  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$  alors le graphe biparti complet est noté  $K_{p,q}$ . Quelques exemples du graphe biparti sont montrés dans la figure 1.4

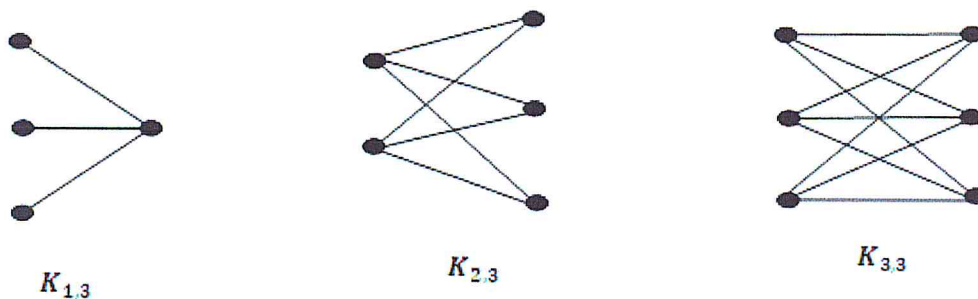


Figure 1.4. Exemple de graphes bipartis complets

### 1.2.5 Joint de deux graphes

**Définition 1** Le joint de deux graphes  $K = (V(K), E(K))$  et  $H = (V(H), E(H))$ , noté  $K \vee H$  est le graphe  $G$  défini par:  $V(G) = V(K) \cup V(H)$  et  $E(G) = E(K) \cup E(H) \cup \{(u, v), u \in V(K) \text{ et } v \in V(H)\}$

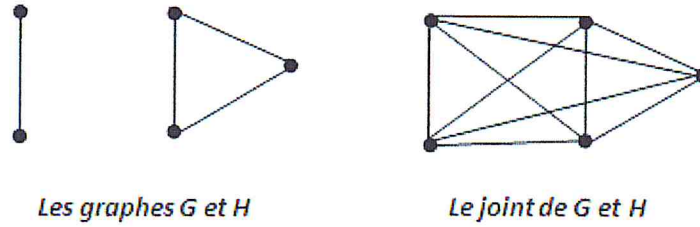


Figure 1.5. Le joint de deux graphes

### 1.2.6 Arbre et forêt

- On appelle arbre, et on note par  $T$ , un graphe connexe et sans cycle. Un arbre comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1.

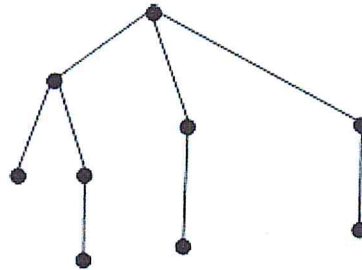


Figure 1.6. Un arbre  $T$

- Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé forêt (chaque composante connexe est un arbre).

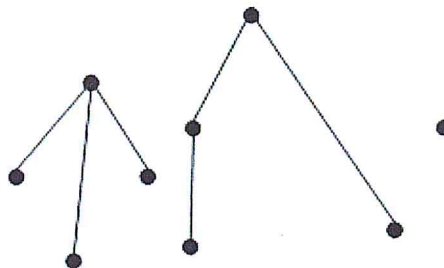


Figure 1.7. Une forêt

- On appelle étoile, et on note par  $K_{1,n}$ , l'arbre à  $n + 1$  sommets ayant  $n$  feuilles. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure.1.8

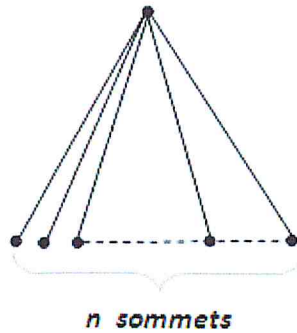


Figure 1.8. L'étoile  $K_{1,n}$

- On appelle double étoile, et on note par  $S_{p,q}$ , l'arbre à  $p + q + 2$  sommets ayant  $p + q$  feuilles, un sommet de degré  $p \geq 2$  et un autre de degré  $q \geq 2$ . Un exemple d'une double étoile est montré dans la figure 1.9



Figure 1.9. La double étoile  $S_{3,4}$

### 1.3 Quelques paramètres structurels d'un graphe

- On dit qu'un sous ensemble  $A$  de  $V$  est minimal (resp. maximal) par rapport à une propriété  $P$ , si'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq A$  (resp  $B \supseteq A$ ) tel que  $G[B]$  vérifie  $P$ .
- On dit qu'un sous ensemble  $A \subset V$  est minimum ou de taille minimale (resp maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété  $P$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq V$  tel que  $G[B]$  vérifie  $P$  et  $|B| < |A|$  (resp  $|A| < |B|$ ) où  $|A|$  est le cardinal de l'ensemble  $A$ , c'est à dire le nombre de ses éléments.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $A$  un sous ensemble de sommets de  $V$ , l'ensemble  $A$  est appelé une clique si pour chaque paire de sommets distincts  $a, b \in A$  on a  $a$  est adjacent à  $b$ .

- La taille d'une clique est le nombre de sommets de la clique. Une clique de taille  $n$  est noté  $K_n$ .
- Le cardinal maximum d'une clique maximale de  $G$  est noté par  $\omega(G)$ , le cardinal maximum d'une partition minimale de l'ensemble des sommets de  $G$  en cliques est noté par  $\theta(G)$ .
- Un stable d'ordre  $n$  dans un graphe  $G$ , appelé aussi ensemble indépendant est un ensemble  $S_n$  de  $n$  sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de  $G$  noté  $i(G)$  (resp.  $\alpha(G)$ ) est appelé nombre de domination stable (resp, nombre de stabilité) de  $G$ . Notons que pour tout graphe  $G$ , on a  $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$  et  $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ .

## 1.4 Complexité algorithmique

La notion de la complexité des problèmes d'optimisation combinatoire est un domaine important, car si un problème est identifié comme complexe il sera difficile d'en spécifier un modèle qui donnera la solution optimale en un temps acceptable. On pourra même perdre espoir de trouver un algorithme efficace pour le résoudre.

**Définition 2** *La complexité d'un algorithme  $A$  est une fonction  $C_A(N)$  donnant le nombre d'instruction à exécuter par  $A$  dans le pire des cas pour une donnée de taille  $N$  fixée, c'est à dire sur la donnée qui va demander le plus de travail à l'algorithme.*

- Un algorithme de résolution d'un problème  $P$  donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires, qui transforme les données en résultats.
- La performance d'un algorithme, est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'ensemble traité (exprimé en terme du nombre  $n$  de caractères

nécessaires pour le codage des données), et le temps d'exécution exprimé en terme du nombre  $f(n)$  d'opérations élémentaires.

- Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher l'optimum d'une application  $f$  donnée. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer le problème de reconnaissance ou de décision qui est une classe d'énoncés auxquelles on doit répondre par oui ou non.
- Un problème est dit polynomial, ou appartient à la classe  $P$ , s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe  $P$  sont dit "faciles".
- Un problème de décision est dit  $NP$  (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp.  $CO-NP$ ), si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.
- Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes. Il est clair que  $P \subseteq NP$  mais la classe  $NP$  contient des problèmes pour lesquels, on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution.
- Soit  $P_1, P_2$  deux problèmes de reconnaissance. On dit que  $P_1$  se réduit (en temps polynomial) à  $P_2$  s'il existe un algorithme pour  $P_1$  qui fait appel (comme un sous programme) à un algorithme de résolution du problème  $P_2$  et si cet algorithme de résolution de  $P_1$  est polynomial lorsque la résolution de  $P_2$  est comptée comme une opération élémentaire.
- Un problème de reconnaissance est dit  $NP$ -complet, si tout problème de la classe  $NP$  peut se réduire polynomialement à lui.
- Un problème  $P$  est dit  $NP$ -dur, s'il existe une résolution polynomial du problème de satisfaisabilité au problème de reconnaissance associé à  $P$ .

## CHAPITRE II

### COLORATION ET $B$ -COLORATION, QUELQUES RÉSULTATS EXISTANS

Dans la première partie de ce chapitre, on donne un bref aperçu sur quelques types de coloration et leurs paramètres. Un certain nombre de résultats théoriques liés à ces définitions sont également introduits. Dans la deuxième partie, nous présentons les principaux résultats de la littérature liés à la  $b$ -coloration et au nombre  $b$ -chromatique.

#### *2.1 Quelques colorations particulières de graphes*

En 1852, le jeune Anglais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. En effet, à tout pays d'une carte de géographie, on associe un sommet du graphe. A deux sommets de graphe, on associe une arête si et seulement si les deux pays correspondants ont une frontière commune. Une coloration des sommets du graphe est alors équivalente à une coloration des régions. Cette technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

##### **2.1.1 Coloration propre et nombre chromatique**

**Définition 3** Une coloration propre est une application  $c$  de  $V$  dans  $\mathbb{N}$  telle que si deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes  $c(x) \neq c(y)$ . Une classe de couleur  $i$  est un ensemble stable de sommets de  $V$  coloré avec la même

couleur  $i$ . Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble  $V$  est le nombre chromatique, noté  $\chi(G)$ .

Le problème de décision lié à ce paramètre est *NP*-complet dans le cas général. De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. Un des résultats classiques en termes de borne du nombre chromatique est donné par Brooks[2]

**Théorème 4** *Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

*Et avec égalité si et seulement si on est dans un des deux cas suivants:*

- *Soit  $\Delta(G) \neq 2$  et  $G$  admet un sous-graphe  $K_{\Delta(G)+1}$  comme composante connexe, où  $K_{\Delta(G)+1}$  est le graphe complet d'ordre  $\Delta(G) + 1$ .*
- *Soit  $\Delta(G) = 2$  et  $G$  admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.*

Dans [1] Berge a montré que tout graphe  $G$  d'ordre  $n$ , satisfait  $\chi(G)\alpha(G) \geq n$  et  $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$ . On rappelle aussi l'inégalité de Gaddum et Nordhaus [3], si  $\overline{G}$  est le complémentaire du graphe  $G$ , on a  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

On peut avoir le résultat classique suivant:

**Proposition 5** *pour tout graphe  $G$  on a:  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , où  $\omega(G)$  est la taille d'une clique maximum de  $G$ .*

En effet, la coloration de  $G$  doit réserver au moins  $\omega(G)$  couleurs différentes pour la clique maximum du graphe.

De nombreux paramètres de coloration propre ont été dérivés du nombre chromatique  $\chi(G)$ , la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleur. Parmi ces dernières, on cite le nombre  $a$ -chromatique  $\Psi(G)$  et le nombre  $b$ -chromatique  $b(G)$ . Une manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en unifiant



ou en jumelant des classes de couleurs différentes, d'où l'introduction de la  $a$ -coloration et de nombre  $a$ -chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins [4].

### 2.1.2 La $a$ -coloration et le nombre $a$ -chromatique

**Définition 6** Une  $a$ -coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes  $i$  et  $j$ , le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs  $i$  et  $j$ , contient au moins une arête. Le nombre  $a$ -chromatique, noté  $\Psi(G)$ , est le nombre maximum de classe de couleurs dans une  $a$ -coloration.

### 2.1.3 La $b$ -coloration et le nombre $b$ -chromatique

La définition de la  $a$ -coloration présentée précédemment a inspiré Irving et Manlove [5, 7] à introduire un autre procédé de coloration. En effet, une autre manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs, en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleurs. D'où la définition de la coloration dominante.

Une coloration dominante est une coloration propre telle que, toute classe de couleur  $i$  contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur  $j \neq i$ . Ce sommet est dit  $b$ -dominant pour la couleur  $i$  (ou sommet de couleur dominante  $i$ ). Le nombre  $b$ -chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une coloration dominante avec  $b(G)$  couleurs est dite  $b$ -coloration.

**Définition 7** Une  $(k)$   $b$ -coloration de  $G$  est une coloration dominante de  $G$  avec  $k$  couleurs.

**Définition 8** On appelle système  $b$ -dominant  $S$  d'un graphe  $G$ , l'ensemble des sommets  $b$ -dominants de couleurs distinctes dans une coloration dominante tel que  $|S| = b(G)$ .

Irving et Manlove ont montré dans [5, 7] que le problème de décision associé au nombre  $b$ -chromatique est  $NP$ -complet en général, même si on se restreint aux graphes bipartis et que le problème est polynomial pour les arbres.

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination d'un paramètre donné dans un graphe ne cesse d'inciter les chercheurs à établir des bornes qui encadrent le plus possible

le paramètre en question. Ces bornes n'ont un intérêt que si on arrive à les déterminer en temps polynomial.

Pour qu'un graphe  $G$  admette une coloration dominante avec  $k$  couleurs, il doit avoir au moins  $k$  sommets de degré supérieur à  $k - 1$ , de cette observation, Irving et Manlove ont défini le  $m$ -degré qui donne une borne supérieure du nombre  $b$ -chromatique.

**Définition 9** Soit les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  d'un graphe  $G$  donnés tels que:  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ , où  $d(v_i)$  est le degré de  $v_i$ . Le  $m$ -degré de  $G$ , noté  $m(G)$  est défini par:

$$m(G) = \max \{i : d(v_i) \geq i - 1\}$$

Un sommet  $v$  vérifiant  $d(v) \geq m(G) - 1$  est dit sommet dense.

Dans la section suivante, nous rappelons les principaux résultats classiques de la littérature liés à la  $b$ -coloration.

## 2.2 Quelques résultats classiques

Certaines études ont été réalisées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique pour des classes particulières de graphes. Kouider et Mahéo [6] ont donné les valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique pour des graphes particuliers: pour le graphe stable  $b(S_n) = 1$ , pour la chaîne et le cycle  $b(P_n) = b(C_n) = 3$  pour tout  $n \geq 5$ . D'autres résultats sont donnés dans ce qui suit.

### 2.2.1 Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe quelconque

Dans [5] et [6] les auteurs ont montré que le  $m$ -degré est une borne supérieure du nombre  $b$ -chromatique.

**Proposition 10** [6],[5] Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ensemble de sommets d'un graphe  $G$  ordonnés dans l'ordre décroissant de leur degrés. Alors  $b(G) \leq m(G)$

**Preuve.** On sait que, dans une coloration dominante de  $G$  avec  $b(G)$ -couleurs, il existe au moins  $b(G)$  sommets de degré au moins  $b(G) - 1$ . Si  $b(G) \geq m(G) + 1$ , alors il existe au moins  $b(G)$  sommets de degré supérieur ou égal à  $m(G)$ . Autrement dit, il y a au moins

$m(G) + 1$  sommets de degré supérieur ou égal à  $m(G)$ , contradiction avec la définition de  $m(G)$ . ■

La différence entre le  $m$ -degré et le nombre  $b$ -chromatique d'un graphe  $G$  peut être très large.

**Exemple 11** Pour  $K_n$  on a  $m(K_n) = b(K_n) = n$ . Par contre, pour  $K_{n,n}$  on a  $m(K_{n,n}) = n$  et  $b(K_{n,n}) = 2$ , d'où la différence entre  $m(G)$  et  $b(G)$  peut être très grande.

Dans [5] Irving et D.F. Manlove ont remarqué que, le nombre chromatique est une borne inférieure du nombre  $b$ -chromatique.

**Proposition 12** Toute  $\chi(G)$ -coloration est une coloration dominante.

**Preuve.** Soient  $c$  une coloration minimale de  $G$  et  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_\chi\}$  une partition minimale en  $\chi(G)$ -classes de couleurs. Si la coloration  $c$  n'est pas dominante alors, il existe au moins une classe  $S_i$  de couleur  $i$  qui ne contient aucun sommet  $b$ -dominant. Dans ce cas, les sommets de  $S_i$  peuvent être transférés dans les autres classes  $S_j$ ,  $j \neq i$ , contradiction avec le fait que  $c$  est une coloration minimale. ■

Le corollaire suivant s'en déduit:

**Corollaire 13** Pour tout graphe  $G$ , on a  $b(G) \geq \chi(G)$ .

Toute  $b(G)$  coloration vérifie la définition de la  $a$ -coloration. Alors, on peut déduire le corollaire suivant:

**Corollaire 14** Pour tout graphe  $G$  on a  $\chi(G) \leq b(G) \leq \Psi(G)$ .

la proposition suivante est due à R.W. Irving et D.F. Manlove [5]. Ils montrent que  $\Delta(G) + 1$  est une borne supérieure pour le nombre  $b$ -chromatique d'un graphe  $G$ .

**Proposition 15** [5] Tout graphe  $G$  satisfait  $b(G) \leq \Delta(G) + 1$ , où  $\Delta(G)$  est le degré maximum de  $G$ .

**Preuve.** Si  $x_i$  est un sommet  $b$ -dominant de couleur  $i$  alors  $d(x_i) \geq b(G) - 1$ . Et comme  $\Delta(G)$  est le degré maximum de  $G$ , alors  $\Delta(G) \geq b(G) - 1$ . ■

Dans [6] M.Kouider et M.Mahéo fournissent d'autres bornes supérieures.

**Proposition 16** [6] Pour tout graphe  $G$  de taille  $m$ , on a :  $b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$

**Preuve.** Soit donnée une partition des sommets de  $G$  dans une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$ -couleurs. Alors, il existe au moins une arête entre deux classes de couleur quelconques. Donc,  $m \geq C_b^2 = \frac{b(b-1)}{2}$ . La résolution de cette inéquation donne la formule de la proposition. ■

**Proposition 17** [6] Si  $G = (V, E)$  est un graphe d'ordre  $n$ , alors  $b(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$  où  $\alpha(G)$  est le nombre de stabilité.

**Preuve.** Soit  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$  une partition de  $G$  avec  $b(G)$  couleurs. Comme  $|S_i| \leq \alpha(G)$ ,  $1 \leq i \leq b(G)$ , alors  $n = \sum_{i=1}^{b(G)} |S_i| \leq b(G)\alpha(G)$  ■

**Proposition 18** [6] Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$  et  $\overline{G}$  son complémentaire alors,  $b(G).b(\overline{G}) \geq n$ .

**Preuve.** Soit  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$  une partition en  $b$ -coloration de  $\overline{G}$  avec  $b(\overline{G})$  couleurs. Donc il est clair que les stables  $S_i$  sont des cliques dans  $G$ . D'où  $|S_i| \leq \chi(G)$ ,  $1 \leq i \leq b(\overline{G})$ . Ceci implique que  $n = \sum_{i=1}^{b(\overline{G})} |S_i| \leq b(\overline{G})\chi(G) \leq b(\overline{G})b(G)$  ■

**Proposition 19** [6] Pour tout  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $b(K_{n,p}) = 2$ , où  $K_{n,p}$  est un graphe biparti complet.

**Preuve.** Soit  $V(K_{n,p}) = A \cup B$  avec  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  et  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ . Comme  $\chi(K_{n,p}) \leq b(K_{n,p})$ , posons  $b(K_{n,p}) = h \geq 2$ . Supposons que  $a_1$  est un sommet  $b$ -dominant de couleur 1 dans une  $b$ -coloration de  $K_{n,p}$  avec  $h$  couleurs. Donc, les couleurs 2, 3, ...,  $h$  apparaissent dans  $B$  et tout sommet  $a_i$ ,  $2 \leq i \leq n$  a la couleur 1. En conséquence, un sommet  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , ne peut pas dominer une couleur autre que 1, donc  $h = 2$ . ■

**Proposition 20** [6] Si  $G$  est un graphe non connexe avec des composantes connexes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ ,  $p \geq 2$  alors  $b(G) \geq \max \{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$ .

**Preuve.** Comme  $b(G) \geq b(C_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ , alors  $b(G) \geq \max \{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$ . ■

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une borne supérieure de  $b(G)$  dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés ( $K_{1,t}$ ) ensuite nous donnons une deuxième borne supérieure dans le cas d'un graphe biparti. Ces deux bornes ont fait l'objet d'un article co-signé par M.Kouider et M.Zaker[8]

### 2.2.2 Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$

**Théorème 21** *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,t}$  avec  $t \geq 3$ , alors  $b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1$ .*

**Preuve.** Soit  $C$  une classe de couleur dans une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $b(G)$ -couleurs, et soit  $x$  un sommet  $b$ -dominant quelconque représentant la couleur  $c$ . Notons  $S$  l'ensemble des sommets voisins à  $x$  et de couleurs distinctes. Il est clair que  $|S| = b-1$ . Si  $H$  représente le sous graphe induit par  $S$  alors  $\alpha(H) \leq t-1$ , car sinon  $S \cup \{x\}$  contient un  $K_{1,t}$ . Comme  $|S| = |V(H)| \leq \alpha(H)\chi(H)$  et  $\chi(H) \leq \chi(G)-1$  alors, on trouve  $b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1$ . ■

### 2.2.3 Quelques bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe biparti

**Théorème 22** [10] *Pour tout graphe  $G$  d'ordre  $n$  différent d'une clique, on a  $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \right\rfloor$  où  $\omega(G)$  est la taille maximum d'une clique.*

**Preuve.** Posons  $\omega(G) = t$ , il est clair que  $G$  ne contient pas de clique de taille supérieure ou égale à  $(t+1)$ , alors toute  $b$ -coloration contient au plus  $(t-1)$  classes de couleurs de taille 1. Soient  $S_1, \dots, S_b$  les classes d'une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $n_1$  le nombre de classes de couleurs de taille 1, on a  $n_1 < (t-1)$  et comme  $|V(G)| = n = n_1 + \sum_{i=n_1+1}^b |S_i| > n_1 + 2(b-n_1) = 2b-n_1$ , alors  $b(G) = b \leq \frac{n+n_1}{2} = \frac{n+t-1}{2} = \frac{n+\omega(G)-1}{2}$ .  $b(G)$  étant entier on a l'inégalité du théorème. ■

**Corollaire 23** [10] *Si  $G$  est un graphe sans triangle ( $K_3$ ), alors  $b(G) \leq \frac{n+1}{2}$*

Il suffit de poser  $\omega(G) = 2$  dans l'inégalité du Théorème 22.

**Proposition 24** [10] *Tout graphe biparti d'ordre  $n \geq 3$ , vérifie  $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$*

**Preuve.** D'après le Corollaire 23 on a l'inégalité. ■

Et puisque dans un graphe biparti on a  $\alpha(G) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ , alors on peut déduire:

**Corollaire 25** *Tout graphe biparti d'ordre  $n \geq 3$ , on a  $b(G) \leq \alpha(G)$*

### 2.2.4 Le nombre $b$ -chromatique du joint de deux graphes

**Théorème 26** *Soient  $H$  et  $G$  deux graphes simples. Alors, le nombre  $b$ -chromatique du joint de  $H$  et  $G$  noté  $G \vee H$ , est  $b(G \vee H) = b(G) + b(H)$ :*

### 2.2.5 Notion de la $b$ -continuité

**Définition 27** *Un graphe est dit  $b$ -continu, si por tout entier  $k$  positif  $\chi(G) \leq k \leq b(G)$ , le graphe  $G$  admet une  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs.*

Certains graphes admettent une  $b$ -coloration avec  $p$  couleurs et une  $b$ -coloration avec  $q$  couleurs telle que  $p < q$ , mais n'admettent pas de  $b$ -coloration avec  $r$  couleurs telle que  $p < r < q$ ; où  $p, q, r$  sont des entiers positifs. Par exemple,

- i) Le graphe biparti complet d'ordre  $n$  moins un couplage parfait admet une  $b$ -coloration avec 2 et  $\frac{n}{2}$  couleurs et aucune  $b$ -coloration avec  $k$  couleurs où  $2 < k < n$
- ii) Le cube admet une  $b$ -coloration avec 2 et 4 couleurs, mais n'admet pas une  $b$ -coloration avec 3 couleurs (voir figure 2.1).

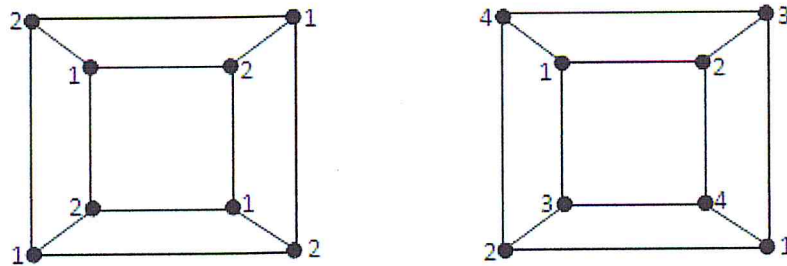


Figure 2.1. Graphe non  $b$ -continu

## CHAPITRE III

### LE NOMBRE $B$ -CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHES

Dans ce chapitre, nous étudions la  $b$ -coloration du graphe milieu de quelques graphes particuliers, nous donnons aussi le nombre  $b$ -chromatique de la somme cartésienne de deux chaînes.

#### 3.1 *La $b$ -coloration dans les arbres*

Dans la première partie de cette section, nous donnons d'abord les définitions nécessaires concernant les arbres pivotés. Un certain nombre de résultats théoriques liés à ces définitions sont également introduits. Ensuite nous donnons les différentes étapes de la  $(m - 1)$   $b$ -coloration d'un arbre pivoté.

Dans [5] Irving et Manlove ont montré que le problème de décision associé à la recherche du nombre  $b$ -chromatique est  $NP$ -complet en général, même si on se restreint aux graphes bipartis et que ce problème est polynomial pour les cas des arbres.

Nous rappelons une deuxième fois la définition de  $m$ -degré.

**Définition 28** Soit les sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  d'un graphe  $G$  ordonnés tels que:

$d(v_1) \geq d(v_2) \dots \geq d(v_n)$ , où  $d(v_i)$  est le degré de  $v_i$ . Le  $m$ -degré de  $G$ , noté  $m(G)$  est défini par

$$m(G) = \max \{i : d(v_i) \geq i - 1\}.$$

Un sommet  $v$  vérifiant  $d(v) \geq m(G) - 1$  est dit sommet dense.

Pour trouver le nombre  $b$ -chromatique dans un arbre, Irving et Manlove ont montré qu'on peut trouver une  $b$ -coloration de l'arbre  $T$  en utilisant  $m$  couleurs sauf dans un seul cas.

### 3.1.1 La $b$ -coloration dans les arbres pivotés

**Définition 29** Un arbre  $T = (V, E)$  est dit pivoté, s'il a exactement  $m$  sommets denses et  $T$  contient un sommet spécial  $v$  vérifiant les propriétés suivantes:

- $v$  n'est pas dense.
- Tout sommet denses ou bien il est adjacent à  $v$  ou bien il est adjacent à un sommet dense adjacent à  $v$ .
- Tout sommet dense adjacent à  $v$  et à un autre sommet dense a son degré égale à  $m - 1$ .

Dans ce cas le sommet  $v$  est appelé pivot de  $T$ .

**Proposition 30** Soit  $T = (V, E)$  un arbre pivoté et  $v$  un pivot de  $T$ , alors :

- i) Il existe au moins deux sommets denses adjacents à  $v$ .
- ii) Il existe au moins un sommet dense adjacent à  $v$  et à un autre sommet dense de  $T$ .

**Théorème 31** Si  $T$  est un arbre pivoté, alors  $b(G) = m(G) - 1$ .

**Preuve.** On désigne par  $v$  le pivot de  $T$ . Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  l'ensemble des sommets ordonnés dans l'ordre décroissant de leurs degrés et  $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  l'ensemble des sommets denses de  $T$ . Soit  $v_1, v_2, \dots, v_p$ ,  $p < m$  l'ensemble des sommets denses adjacents à  $v$  et  $v_1, v_2, \dots, v_q$ ,  $q < p$ , l'ensemble des sommets denses adjacents à  $v$  ayant au moins un sommet dense dans leurs voisinages. D'après la Proposition 30,  $p \geq 2$  et  $q \geq 1$ .

D'abord, nous montrons que  $b(T) \leq m - 1$ . Supposons que  $b(T) = m$ , c'est à dire il existe une  $(m)$   $b$ -coloration  $c$  de  $T$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $c(v_i) = i$  pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Comme  $d(v_j) = m - 1$ ,  $1 \leq j \leq q$ , alors aucun sommet de  $v_1, v_2, \dots, v_q$  ne peut être adjacent à deux sommets de même couleurs, donc tous les voisins de  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  sont de couleurs distinctes. De ce fait le sommet  $v$  ne peut pas être coloré par  $j$ ,  $p+1 \leq j \leq m$ . D'autre part, le sommet  $v$  ne peut pas avoir la couleur  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$  car sinon on aura une coloration non propre. En conséquence, aucune couleur n'est disponible



pour  $v$ , contradiction.

Maintenant, nous montrons que  $b(T) \geq m - 1$ . A cet effet, il suffit de construire une  $(m - 1)$ - $b$ -coloration de  $T$ . Comme  $p \geq 2$  et  $q \geq 1$ , alors les deux sommets denses  $v_1$  et  $v_2$  sont adjacents à  $v$  et pour un certain  $r$ ,  $p + 1 \leq r \leq m$ , il existe un sommet dense  $v_r$  adjacent à  $v_1$ . Nous donnons maintenant une  $b$ -coloration des sommets de l'arbre  $T$ .

**Etape 1:** Coloration des sommets denses et le pivot  $v$

On colore tout sommet  $v_i$ ,  $i = 2 \dots m$  par la couleur  $i$ . Puis on affecte les deux couleurs  $r$  et  $2$  aux sommets  $v$  et  $v_1$  respectivement.

**Etape 2:** Coloration des sommets non denses adjacents aux sommets denses.

Considérons les ensembles suivants:

$R_i = \{2, \dots, m\} \setminus \{i\}$  l'ensemble des couleurs nécessaires pour la sommet  $v_i$ .

$C_i = \{c(v_j), 1 \leq j \leq n, v_j \in N(v_i), v_j \text{ coloré}\}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , l'ensemble des couleurs existantes dans le voisinage de  $v_i$ .

$U_i = \{v_j, m + 1 \leq j \leq n, v_j \in N(v_i), v_j \text{ non coloré}\}$ ,  $2 \leq i \leq m$ , l'ensemble des sommets non colorés dans le voisinage de  $v_i$

Par construction  $v_i$  ne peut être adjacent à deux sommets de même couleur. Ceci implique que:

$$|U_i| + |C_i| = d(v_i) \geq m - 1 > m - 2 = |R_i|$$

Puisque  $C_i \subset R_i$ , alors  $|U_i| \geq |R_i \setminus C_i|$ . Soit  $|R_i \setminus C_i| = \{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{n_i}\}$  et pour  $\{u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{n_i}\}$  sommets choisis dans  $U_i$  où  $n_i \geq 0$ , on pose  $c(u_i^j) = r_i^j$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ .

**Etape 3:** Coloration des sommets non coloré à l'étape 2.

On suppose que  $v_i$  n'est pas coloré. Comme  $d(v_i) < m - 1$ , pour  $m + 1 \leq i \leq n$ , alors notons par  $C_i = \{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{n_i}\}$  l'ensemble des couleurs existantes dans le voisinage de  $v_i$ . Déterminons  $j \in (\{2, \dots, m\} \setminus C_i)$  et posons  $c(v_i) = j$ . ■

### 3.1.2 La $b$ -coloration dans les arbres non pivotés

**Définition 32** Soit  $T = (V, E)$  un arbre,  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $T$  et  $V''$  est un sous-ensemble  $V'$  de cardinalité  $m$

On dit que  $V''$  encercle un sommet  $v \in V \setminus V''$  si :

- $\forall v_i \in V''$ ,  $v_i \in N(v)$ , ou  $v_i \in N(N(v) \cap V'')$ .
- $\forall v_i \in V''$ , si  $v_i \in N(v) \cap N(V'')$  alors  $d(v_i) = m - 1$ .

On remarque que si  $V' = V''$  et  $v$  non dense, on se trouve dans le cas où  $T$  est pivoté.

**Définition 33** Soit  $T = (V, E)$  un arbre.  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $T$ .  $V''$  est un sous-ensemble de cardinalité  $m$ ,  $V''$  est dit un bon ensemble relativement à  $T$  si:

- $V''$  n'encercle aucun sommet de  $V \setminus V''$ .
- $\forall u \in V \setminus V''$  tel que  $d(u) \geq m$ ,  $u$  est adjacent à un sommet  $v$  de  $V''$  tel que  $d(v) = m - 1$ .

**Lemme 34** Si  $T = (V, E)$  est un arbre non pivoté, alors on peut construire un bon ensemble.

**Preuve.** Soit  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $T$ , en ordonnant les sommets denses suivant leurs degré décroissant, on peut choisir un ensemble  $V''$  de cardinalité  $m$ , de manière que tout sommet de  $V \setminus V''$  ait un degré plus petit que  $m$ . Notons  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et  $V'' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ . On suppose que:

1.  $V''$  encercle un sommet  $v \in V \setminus V''$  sinon  $V''$  serait un bon ensemble.
2.  $v_i \in V'' \cap N(v)$ ,  $1 \leq i \leq p$  ( $p \leq m$ )
3.  $v_i \in V'' \cap N(v)$  et  $v_i \in V'' \cap N(v_d)$ ,  $v_d \in V''$ ,  $1 \leq i \leq q$  ( $q \leq p$ ).

Observons que:

- $p \geq 2$  sinon  $p = 1$  et  $v_1$  sera de degré  $m$ , alors qu'il est de degré  $m - 1$ .

- $q \geq 1$  sinon  $q = 0$ , donc  $p = m$  ce qui entraîne  $v$  sommet dense, contradiction.

- Comme  $q \geq 1$ ,  $\exists r \in \{p+1, \dots, m\}$  tel que  $v_r \in V''$  et est adjacent à  $v_1$ .

Deux cas s'imposent:

**Cas 1.** Si  $v$  est un sommet dense alors  $d(v) = m - 1$  (puisque  $v$  est dense et  $v \notin V''$  donc  $d(v) < m$ ), soit  $W = (V'' \setminus \{v_2\}) \cup \{v\}$  et  $|V''| = m$ , le sommet  $v_2$  existe puisque  $p \geq 2$  et par le choix de  $V''$ ,  $v_2$  est le seul sommet qui n'est pas dans  $W$  pouvant avoir un degré  $m$  puisque  $v_2$  est adjacent à  $v \in W$  et  $d(v) = m - 1$  et  $W$  satisfait la condition 2 de la définition. On montre que  $W$  n'encercle aucun sommet de  $V \setminus V''$ . Si un sommet  $t \notin W$  et si:

- $t$  est adjacent à un sommet  $v_i$ ,  $p+1 \leq i \leq m$ , alors  $t$  est à distance 3 de  $v \in W$
- $t$  est adjacent à un sommet  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , alors  $t$  est à distance 3 de tout sommet  $v_k \in W$
- $t$  est adjacent au sommet  $v \in W$ , alors  $t$  est à distance 3 de  $v_{p+1}$  et donc  $v_2 \notin W$ ,  $\exists v_{p+1} \in N(v_1)$  tel que  $v_2$  soit à distance 3 de  $v_{p+1}$

**Cas 2.** Si  $v$  est un sommet non dense:  $|V'| \neq m$ , sinon  $T$  est pivoté au sommet  $v$ , contradiction. Donc  $|V'| > m$ ,  $\exists u \in V' \setminus V''$  et on pose  $W = (V'' \setminus \{v_1\}) \cup \{u\}$  et supposons que  $W$  encercle un sommet  $x$  de  $V \setminus W$ , alors  $x$  serait le seul sommet de  $V \setminus W$  se trouvant sur une chaîne reliant toute paire de sommets non adjacents de  $W$ . Mais les sommets  $v_1$  et  $v$  n'appartiennent pas à  $W$ , et se trouvent sur une chaîne reliant les sommets  $v_2$  et  $v_r$  de  $W$  ceci contredit le fait que  $W$  encercle un sommet  $x$  de  $V \setminus W$ . Donc  $W$  est un bon ensemble, car il vérifie la deuxième propriété de la définition, puisque  $d(v) < m - 1$  et  $d(v_1) = m - 1$  et tout sommet en dehors de  $W$  est de degré plus petit que  $m$ .

On construit par l'algorithme suivant un bon ensemble, pour cela, soit  $T$  un arbre avec l'ensemble des sommets  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et  $V'$  est l'ensemble des sommets denses de  $T$ .

**Algorithme 1:**

l'ensemble  $Q$  des sommets  $v_{p+1}, \dots, v_q$  ont un seul sommet intérieur voisin et l'ensemble des sommets  $v_{q+1}, v_2, \dots, v_m$  n'ont aucun sommet intérieur voisin, remarquer que les sous ensembles  $P$  et  $Q$  ne peuvent pas être vides ( $W$  étant construit ainsi). On commence par colorer les sommets de  $P$  et  $Q$ , colorons d'abord ceux de  $P$ . Si  $i < p$ , les sommets intérieurs qui sont voisins des sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ , sont colorés comme suite:

a) Si un sommet intérieur  $u$ , prend la couleur  $k$  au moment ou on colore les sommets intérieurs voisins du sommet  $v_j$ , forcément il existe une chaîne (de longueur au plus 3) du sommet  $u$  vers  $v_k$  passant par  $v_j$ .

b) Deux sommets voisins de  $v_j$  ne doivent pas avoir la même couleur (sinon  $\exists v_k$  et  $v_{k'}$  dans  $W$  qui ont la même couleur).

c) Deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Procédons alors à la coloration des sommets intérieurs voisins de  $v_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) non colorés, pour celà appelons  $x_1, \dots, x_s$  les sommets intérieurs voisins de  $v_i$ , le sommet  $x_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) étant un sommet voisin intérieur de  $v_i$ , il existe  $v_{c_i} \in W$ ,  $c_j \neq i$ ,  $v_{c_j}$  à distance au plus deux de  $x_j$ , et  $x_j$  se trouve sur la chaîne de  $v_i$  à  $v_{c_j}$ . Les sommets  $v_{c_1}, \dots, v_{c_s}$  sont distincts sinon on peut créer un cycle de longueur  $\geq 4$ .

Si  $s > 1$ , on pose  $c(x_j) = c_j$ , puis on faisant une translation sur les couleurs on prendra  $c(x_j) = c_j + 1$  et  $c(x_s) = c_1$  et ceci ne contredit pas **a)**, **b)** et **c)**

Si  $s = 1$ , comme  $v_i$  a au moins deux sommets intérieurs voisins, il existe au moins  $x_i$ , sommet non coloré voisin intérieur de  $v_i$ , on pose  $c(x_i) = c(x_1)$  et  $c(x_i) = c(v_{c_i})$  tel que  $v_{c_i}$  et  $v_i$  sont dans  $W$  et  $x_i$  et  $x_1$  se trouvent sur une chaîne d'extrémité  $v_i$  et  $v_{c_i}$ . On colore à présent les sommets intérieurs restants incolores, voisins de  $v_i$  ( $p + 1 \leq i \leq q$ ), pour cela, soient  $z_1, \dots, z_k$  les sommets en question et chaque  $v_i$  a exactement un seul sommet intérieur voisin parmi les  $z_j$ .  $z_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) sont colorés de manière que:

i)- Cette coloration partielle soit propre.

ii)- Aucun sommet  $v_i$  de degré  $m - 1$  n'a deux couleurs identiques dans son voisinage.

Posons

$$c \in C \iff (v_c \in N(z_j)) \vee (\exists d, v_c \in N(v_d) \wedge v_d \in N(z_j) \wedge d(v_d) = m - 1, \text{ où } 1 \leq c, d \leq m)$$

Une coloration qui ne se trouve pas dans  $C$  vérifie a) et b), de plus  $C \neq \{1, \dots, m\}$  sinon  $W$  encercle  $z_j$  et donc il ne serait pas bon. Donc Il existera toujours une couleur possible pour  $z_j$ .

Les sommets extérieurs peuvent être colorés indépendamment puisqu'ils ne peuvent être adjacent entre eux, ni à un sommet coloré excepte  $v_i$ . Pour colorer tels sommets on considère  $N(v_i)$ , enfin de rendre les sommets  $v_i$   $b$ -dominants, soient  $U_i$  l'ensemble des sommets voisins de  $v_i$  non colorés,  $C_i$  l'ensemble des sommets existantes dans  $N(v_i)$ ,  $R_i$  l'ensemble des couleurs qui doivent apparaitre dans  $N(v_i)$ ,  $R_i = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ . Donner les couleurs manquantes  $R_i \setminus C_i = \{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{n_i}\}$  aux sommets  $\{u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{n_i}\} \subseteq U_i$ . Nous pouvons à présent étendre cette coloration à tout le graphe, on rappelle que tout sommet  $v$  restant incolore est tel que  $d(v) \leq m-1$ , sinon  $d(v) \geq m$  et par la deuxième propriété d'un ensemble bon,  $v$  est adjacent à un sommet  $w$  où  $d(w) = m-1$ , mais un tel sommet  $w$  est déjà coloré, par conséquent, le sommet  $v$  peut toujours recevoir une couleur. ■

### Détermination d'une $m$ - $b$ -coloration dans un arbre non pivoté

#### Etape 1:

Choisir  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  un bon ensemble de  $T$  qui existe car  $T$  est non pivoté. Poser  $c(v_i) = i, \forall i, 1 \leq i \leq m$ .

#### Etape 2:

Considérer  $U = N(W) \setminus W = U_i \cup U_0$ . Où  $U_i$  sont les sommets de  $U$  se trouvant sur une chaîne de longueur au plus trois reliant deux sommets de  $W$  (sommets intérieurs).  $U_0 = U \setminus U_i$  est l'ensemble des sommets extérieurs.

Ordonner les sommets de  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  comme suite:

$$i < j \text{ si } |N(v_i) \cap U_i| \geq |N(v_j) \cap U_i|$$

Poser  $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \cup \{v_{p+1}, \dots, v_q\} \cup \{v_{q+1}, \dots, v_m\}$  où

$$|N(v_i) \cap U_i| \geq 2, \text{ si } 1 \leq i \leq p$$

$$|N(v_i) \cap U_i| = 1, \text{ si } p+1 \leq i \leq q$$

$$|N(v_i) \cap U_i| = 0, \text{ si } q+1 \leq i \leq m.$$

#### Etape 3:

$N(v_i) \cap U_i = \{x_i, 1 \leq i \leq s\}$  est l'ensemble des sommets intérieurs non colorés voisins de  $v_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ).

Tester si  $s > 1$

Si oui  $c(v_j) = c_j \neq c_i \neq c(v_i)$  et  $c(x_j) = c_j + 1$  et  $c(x_s) = c_1$  où  $1 \leq j \leq s - 1$ .

Si  $s = 1$ ,  $x_1$  est le seul sommet intérieur voisin de  $v_i$  qui soit non coloré  $c(x_1) = c(x_i)$ ,  $x_1$  et  $x_i \in N(v_i) \cap U_i$ .

#### Etape 4:

$z_i$  sommet intérieur voisin unique de  $v_i$ ,  $p + 1 \leq i \leq q$

$c \in C \iff (v_c \in N(z_j)) \vee (\exists d, v_c \in N(v_d) \wedge v_d \in N(z_j) \wedge d(v_d) = m - 1, \text{ où } 1 \leq c, d \leq m.$

$c(z_i) = c_j \notin C$  et qui ne soit pas dans le voisinage de  $v_i$

#### Etape 5:

Colorer les sommets extérieurs  $U_0$  voisins de  $v_i$  et on pose:

$U_i$  ensemble des sommets voisins de  $v_i$  non colorés

$C_i$  l'ensemble des couleurs existantes dans  $N(v_i)$

$R_i$  l'ensemble des couleurs qui doivent apparaître dans  $N(v_i)$ , ces ensembles sont défini comme suite:

$$R_i = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$$

$$U_i = \{v_j, m + 1 \leq j \leq n \text{ et } v_j \in N(v_i) \text{ et } v_j \text{ non coloré}\}$$

$$C_i = \{c(v_j): 1 \leq j \leq n \text{ et } v_j \in N(v_i) \text{ et } v_j \text{ coloré}\}$$

Donner les couleurs manquantes  $R_i \setminus C_i = \{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{n_i}\}$  aux sommets  $\{u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{n_i}\} \subseteq U_i$ .

#### Etape 6:

Tout sommet  $v_i$  restant incolore est tel que  $d(v_i) < m - 1$ .

$C_i = \{r_i^1, r_i^2, \dots, r_i^{n_i}\}$  les couleurs existants dans le voisinage de  $v_i$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus C_i$ , poser  $c(v_i) = j$ , couleur qui n'existe pas dans le voisinage de  $v_i$ .

### 3.2 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu de certains-graphes particuliers

**Définition 36** Le graphe milieu d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $M(G) = (V \cup E, E')$  dans lequel deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents si  $v$  est une arête de  $E$  incidente au sommet  $u$  de  $V$  ou  $u$  et  $v$  sont deux arêtes de  $E$  ayant un sommet commun. Autrement-dit, le graphe milieu du graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $M(G)$  obtenu en subdivisant une fois les arêtes de  $G$  créant des nouveaux sommets, puis en reliant chaque deux nouveaux sommets s'ils ont un voisin commun dans  $G$ .

**Définition 37** On appelle graphe de Ligne d'un graphe  $G = (V, E)$  le graphe  $L(G) = (E, E')$  où les sommets correspondent aux arêtes de  $G$ , et deux sommets sont adjacents dans  $L(G)$  si les arêtes correspondants dans  $G$  ont un sommet commun.

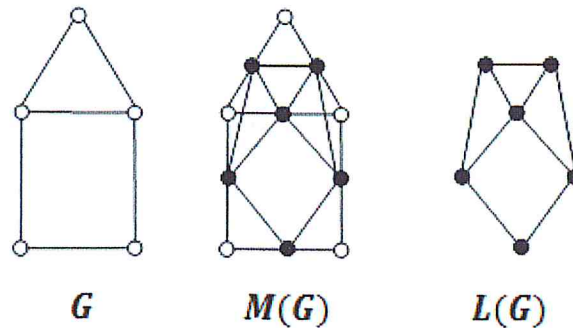


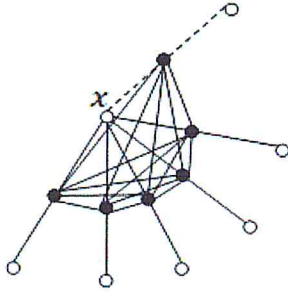
Figure 3.1. Exemple d'un graphe milieu

**Remarque 38** On peut définir le graphe milieu d'un graphe  $G$  comme la superposition de graphe de ligne de  $G$  avec le graphe subdivisé de  $G$ , où le graphe subdivisé de  $G$  est le graphe  $G$  en subdivisant les arêtes une fois.

**Proposition 39** Pour tout graphe  $G$  de degré maximum  $\Delta(G)$  on a :

$$b(M(G)) \geq \Delta(G) + 1$$

**Preuve.** Soit  $x$  un sommet de  $G$  tel que  $d_G(x) = \Delta(G)$ , alors le graphe  $M(G)$  contient une clique d'ordre  $\Delta(G) + 1$ . D'où  $b(M(G)) \geq \omega(M(G)) \geq \Delta(G) + 1$ .



■

**Corollaire 40** Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$ . Si  $m(M(G)) = \Delta(G) + 1$ , alors  $b(M(G)) = \Delta(G) + 1$ .

**Preuve.** Puisque  $b(M(G)) \leq m(M(G)) = \Delta(G) + 1$ , alors d'après le Corollaire 39, on a l'égalité. ■

**Définition 41** Soit  $G = (V, E)$  un graphe,  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $G$  et  $V''$  un sous-ensemble de  $V'$  de cardinalité  $m$ : On dit que  $V''$  encercle un sommet  $v \in V \setminus V''$  si :

- $\forall v_i \in V''$ ,  $v_i \in N(v)$ , ou  $v_i \in N(N(v) \cap V'')$ .
- $\forall v_i \in V''$ , si  $v_i \in N(v) \cap N(V'')$  alors  $d(v_i) = m - 1$ .

Dans ce cas, le graphe  $G$  est dit pivoté et le sommet  $v$  est dit pivot de  $G$ .

**Proposition 42** Soit un graphe  $G = (V, E)$ ,  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $G$  et  $V''$  est un sous-ensemble de  $V'$  de cardinalité  $m$ , si  $V''$  encercle un sommet  $v \in V \setminus V''$ , alors  $G$  ne peut pas être coloré avec  $m$  couleurs où  $V''$  est l'ensemble des sommets  $b$ -dominant.

**Preuve.** Soit un graphe  $G = (V, E)$ ,  $V'$  l'ensemble des sommets denses de  $G$  et  $V''$  est un sous-ensemble  $V'$  de cardinalité  $m$ , et soit  $v \in V \setminus V''$  un sommet encercle par  $V''$ , alors d'après la Définition 41, les sommets de  $V'' = \{v_1, \dots, v_m\}$  sont à distance 1 ou 2 de  $v$ , et ceux qui ont un sommet dense voisin autre que  $v$  sont de degré  $m - 1$ . Soient  $v_1, \dots, v_p$  ( $p \leq m$ ) l'ensemble des sommets denses adjacents à  $v$ , et  $v_1, \dots, v_q$  ( $q \leq p$ ) l'ensemble des sommets denses qui ont d'autres voisins denses. Le sommet  $v$  ne peut pas prendre la



couleur  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) sinon la coloration sera impropre, et il ne peut pas prendre la couleur  $j$  ( $q + 1 \leq j \leq m$ ) sinon on aura une couleur répétée dans le voisinage de  $v_k$  ( $1 \leq k \leq q$ ).

Donc aucune couleur n'est disponible pour le sommet  $v$ . ■

### 3.2.1 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une chaîne

**Théorème 43** Pour toute chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a :

$$b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 & \text{si } n = 3, 4 \\ 4 & \text{si } n = 5, 6, 7 \\ 5 & \text{si } n \geq 8 \end{cases}$$

**Preuve.** Il est facile de vérifier que les graphes milieux des chaînes  $P_n$ ,  $2 \leq n \leq 7$ , sont les graphes donnés dans les figures 3.2 et 3.3. Ainsi, il est facile de déterminer le nombre  $b$ -chromatique correspondant à ces graphes (voir figure 3.2 et 3.3).

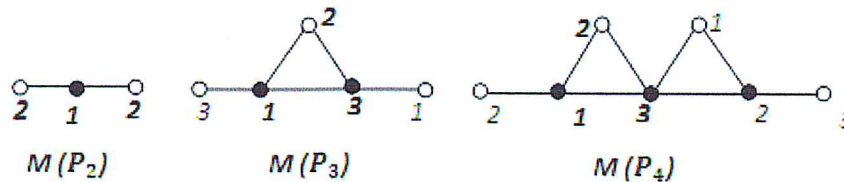


Figure 3.2. La  $b$ -coloration de  $M(P_2)$ ,  $M(P_3)$  et  $M(P_4)$

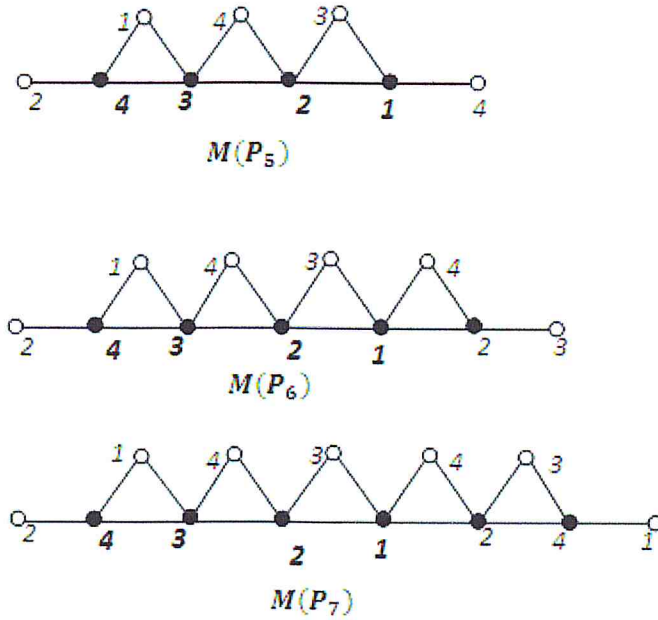


Figure 3.3. La  $b$ -coloration de  $M(P_5)$ ,  $M(P_6)$  et  $M(P_7)$ .

Supposons que  $n \geq 9$ . Le graphe  $M(P_8)$  admet une  $b$ -coloration avec 5 couleurs (voir figure 3.4). D'autre part, le  $m$ -degré de  $M(P_8)$  est égal à 5. Ceci implique que  $b(M(P_8)) = 5$ . Comme  $M(P_8)$  est un sous graphe de  $M(P_n)$ , alors la preuve se fait en deux étapes:

1. On donne une coloration partielle de  $M(P_n)$  en colorant le sous-graphe  $M(P_8)$ .
2. On étend la coloration de  $M(P_8)$  au reste des sommets non colorés de  $M(P_n)$ . Cette extension est possible car  $b(M(P_8)) = \Delta(M(P_n)) + 1$ . Dans ce cas, on aura toujours une couleur disponible pour un sommet non coloré de  $M(P_n)$ . Puisque  $b(M(P_8)) = 5$ , alors  $b(M(P_n)) = 5$ .

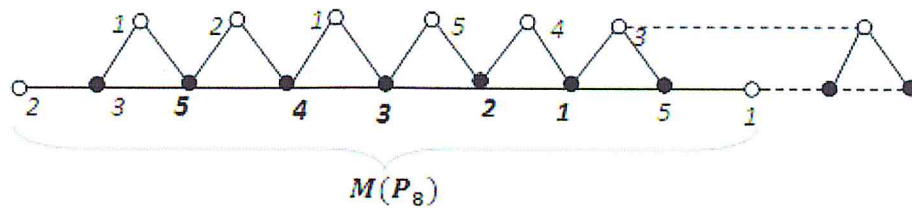


Figure 3.4. La  $b$ -coloration partielle de  $M(P_n)$ ,  $n \geq 9$ .

■

### 3.2.2 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un cycle

**Théorème 44** *Le nombre  $b$ -chromatique d'un cycle  $C_n$ , est :*

$$b(M(C_n)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 3 \\ 4 & \text{si } n = 4 \\ 5 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

**Preuve.** Les graphes milieux des cycles  $C_n$ ,  $3 \leq n \leq 7$  sont les graphes représentés dans les figures 3.5 et 3.6 et pour ces graphes on a  $b(M(C_n)) = m(M(C_n))$  (voir figure 3.5 et 3.6).

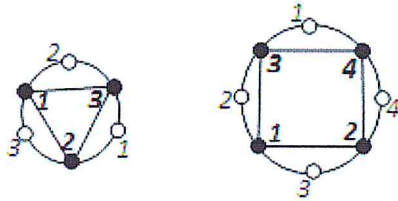


Figure 3.5. La  $b$ -coloration des  $M(C_3)$  et  $M(C_4)$

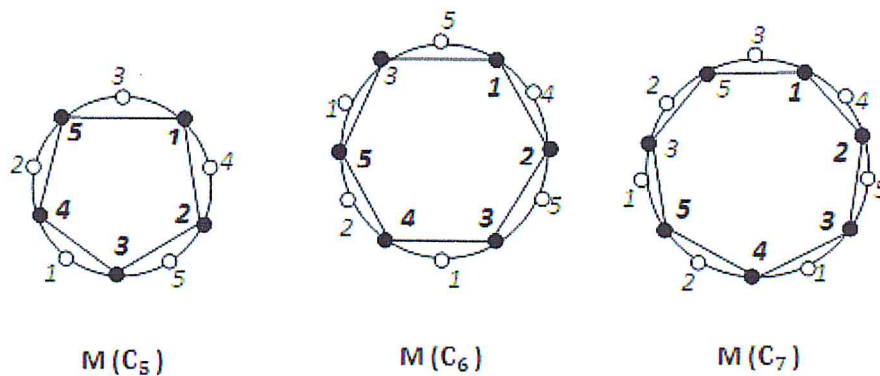


Figure 3.6. La  $b$ -coloration de  $M(C_5)$ ,  $M(C_6)$  et  $M(C_7)$

Pour  $n \geq 8$ , on remarque que  $M(P_8)$  est un sous-graphe de  $M(C_n)$ , donc la preuve se fait en deux étapes

1. On donne une coloration partielle de  $M(C_n)$  en colorant le sous-graphe  $M(P_8)$ .

2. On étend la coloration de  $M(P_8)$  au reste des sommets non colorés de  $M(P_n)$ , car  $b(M(P_8)) = \Delta(M(C_n))+1$ , donc on a toujours une couleur disponible pour un sommet non coloré de  $M(C_n)$ . Donc ce graphe sera  $\Delta + 1$  c-à-d, il admet une (5)  $b$ -coloration (voir la figure 3.7)

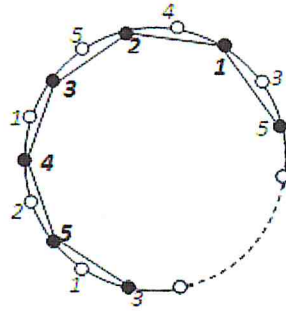


Figure 3.7. La  $b$ -coloration partielle de  $M(C_n)$  pour  $n \geq 8$

■

### 3.2.3 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une roue

**Définition 45** On appelle *graphe roue*, noté  $W_n$ , un graphe d'ordre  $n \geq 4$ , obtenu en ajoutant un sommet centre relié à tous les sommets du cycle  $C_{n-1}$ .

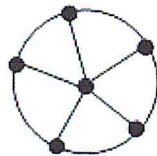


Figure 3.8. Exemple d'une roue  $W_6$

**Théorème 46** le nombre  $b$ -chromatique de la roue  $W_n$  est:

$$b(M(W_n)) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 4 \\ 6 & \text{si } n = 5 \\ 7 & \text{si } n = 6 \\ n & \text{si } n \geq 7 \end{cases}$$

**Preuve.** L'ordre de  $M(W_4)$  est 10 et son  $m$ -degré est égal à 6. Supposons que  $b(M(W_4)) = 6$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $M(W_4)$  avec 6 couleurs. Comme le graphe  $M(W_4)$  a exactement 6 sommets denses. Alors, tous les sommets denses de  $M(W_4)$  sont  $b$ -dominants et de couleurs distinctes. D'autre part, il existe une classe de couleur qui contient exactement un seul sommet, disons  $x_0$ , sinon  $n \geq 12$ . Ceci implique que tous les autres sommets  $b$ -dominants (denses) autre que  $x_0$  sont adjacents à  $x_0$ , ce qui n'est pas vrai pour le graphe  $M(W_4)$  (voir figure 3.9). Comme  $M(W_4)$  admet une  $b$ -coloration avec 5 couleurs (voir figure 3.9), alors  $b(M(W_4)) = 5$ .

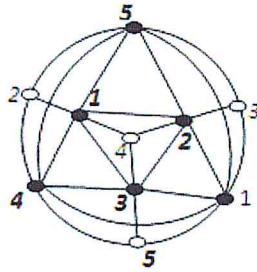


Figure 3.9. La  $b$ -coloration de  $M(W_4)$

L'ordre de  $M(W_5)$  est 13. Le graphe  $M(W_5)$  a 4 sommets de degré 7, 4 sommets de degré 6, un sommet de degré 4 et 4 sommets de degré 3, donc le  $m$ -degré de  $M(W_5)$  est égal à 7. Supposons que  $b(M(W_5)) = 7$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $M(W_5)$  avec 7 couleurs. Alors, il existe une classe de couleur qui contient exactement un seul sommet, disons  $x_0$ , sinon  $n \geq 14$ . Ceci implique que tous les autres sommets  $b$ -dominants (sommets denses) autre que  $x_0$  sont adjacents à  $x_0$ , ce qui n'est pas vrai pour le graphe  $M(W_5)$  (voir figure 3.10). Comme  $M(W_5)$  admet une  $b$ -coloration avec 6 couleurs (voir figure 3.10), alors  $b(M(W_5)) = 6$ .

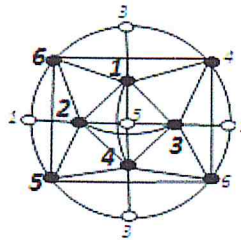


Figure 3.10. La  $b$ -coloration de  $M(W_5)$

Le  $m$ -degré du graphe  $M(W_6)$  est égal à 7. Puisque  $M(W_6)$  admet une  $b$ -coloration avec 7 couleurs (voir figure 3.11), alors  $b(M(W_6)) = 7$ .

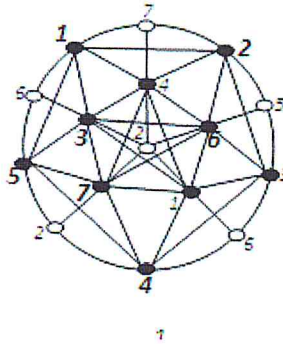


Figure 3.11. La  $b$ -coloration de  $M(W_6)$

Pour  $n \geq 7$ , posons  $G = M(W_n)$ . Le  $m$ -degré de  $G$  est égal à  $n$ . Puisque  $\Delta(W_n) = n - 1$ , alors d'après le Corollaire 40,  $b(G) = n$ . ■

### 3.2.4 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Friendship

**Définition 47** Le graphe de Friendship, noté  $F_n$ , est un graphe planaire avec  $2n + 1$  sommets et  $3n$  arêtes.  $F_n = nP_2 \vee P_1$ .

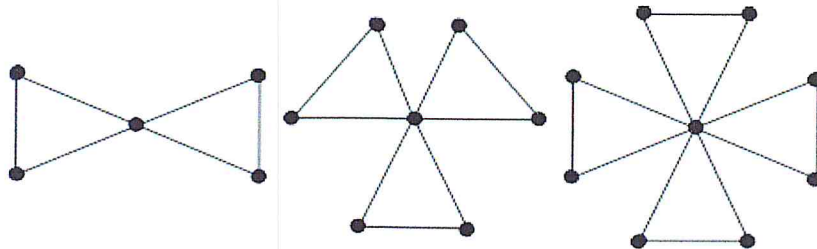


Figure 3.12. Exemple de graphes de Friendship  $F_2, F_3, F_4$

**Théorème 48** Le nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu de  $F_n$  est  $2n + 1$

*Preuve.* Posons  $G = M(F_n)$ . Alors  $m(G) = 2n + 1$ . Comme  $\Delta(F_n) = 2n$ , alors d'après le Corollaire 40,  $b(G) = 2n + 1$ .

La figure 3.13. donne le graphe  $F_4$  et son graphe milieu.

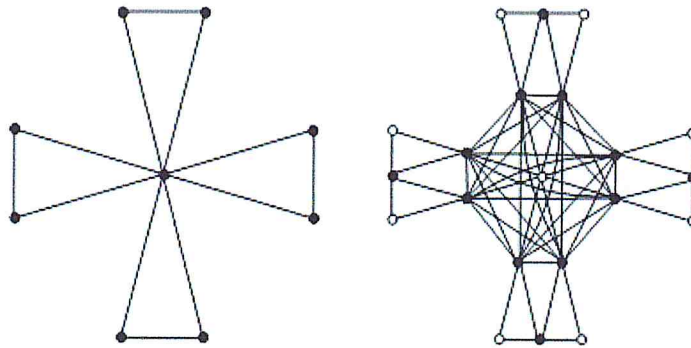


Figure 3.13. Le graphe milieu de  $F_4$

■

### 3.2.5 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Helm

**Définition 49** On appelle *graphe de Helm*, noté  $H_n$ , le graphe obtenu à partir d'une roue d'ordre  $n$ , en joignant chaque sommet  $v_i$  de cycle  $C_{n-1}$  de la roue à un nouveau sommet  $u_i$ .

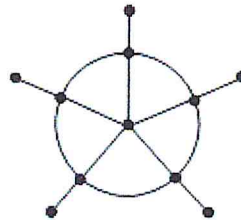


Figure 3.14. Exemple d'un graphe de Helm

**Théorème 50** Soit  $H_n, n \geq 4$  un graphe de Helm, alors:

$$b(M(H_n)) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 4 \\ 7 & \text{si } n = 5 \\ 7 \text{ ou } 8 & \text{si } n = 6 \\ 8 \text{ ou } 9 & \text{si } n = 7 \\ 9 & \text{si } n = 8 \\ n & \text{si } n \geq 9 \end{cases}$$

**Preuve.** Le  $m$ -degré du graphe  $M(H_4)$  est égal à 6, et comme ce graphe admet une (6)  $b$ -coloration (voir figure 3.15), alors  $b(M(H_4)) = 6$ .

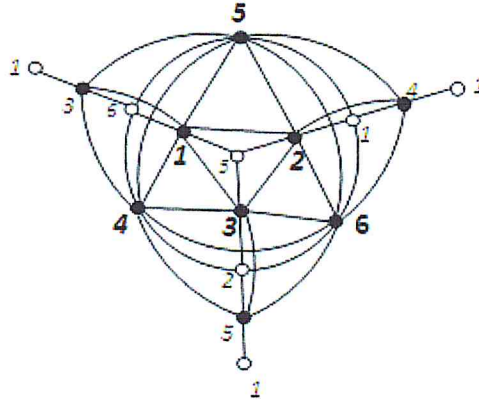


Figure 3.15. La  $b$ -coloration de  $M(H_4)$

Soit  $H_5 = (V(H_5), E(H_5))$  le graphe de Helm d'ordre 9 avec  $V(H_5) = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}$  où  $d_{H_5}(v) = 4$ ,  $d_{H_5}(v_i) = 4$ ,  $d_{H_5}(w_i) = 1$  ( $1 \leq i \leq 4$ ),  $v_i v_{i-1} \in E(H_5)$  et  $w_i$  est adjacent à  $v_i$ . Soit  $M(H_5) = (V(M(H_5)), E(M(H_5)))$  le graphe milieu du graphe de Helm  $H_5$  avec  $V(M(H_5)) = V(H_5) \cup \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  où  $d_{M(H_5)}(e_i) = 8$  ( $1 \leq i \leq 8$ ),  $d_{M(H_5)}(a_j) = 4$  ( $1 \leq j \leq 4$ ). Pour  $i = 5$  à 8,  $e_i$  est adjacent à  $v$ . Pour  $i = 1$  à 4,  $e_i$  n'est pas adjacent à  $v$  et l'arête correspondante à  $e_i$  ( $i = 1$  à 4) dans  $H_5$  est incidente à  $v_i$  et  $v_{i+1}$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $M(H_5)$  avec 8 couleurs. Comme  $M(H_5)$  a exactement 8 sommets denses, alors ils vont tous être  $b$ -dominants. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $c(e_i) = i$ ,  $1 \leq e_i \leq 8$ . Il est facile de constater que l'ensemble  $\{e_5, e_6, e_7, e_8, v\}$  induit une clique d'ordre 5. Le sommet  $e_5$  est adjacent à  $e_1$  et  $e_4$ , le sommet  $e_6$  est adjacent à  $e_4$  et  $e_3$ , le sommet  $e_7$  est adjacent à  $e_2$  et  $e_3$ , le sommet  $e_8$  est adjacent à  $e_1$  et  $e_2$ . Sans perte de généralité, on peut affecter la couleur 1 au sommet  $v$ . Comme  $d_{M(H_5)}(e_i) = 8$ , alors il y a au plus une couleur répétée dans le voisinage de  $e_i$ . Le sommet  $e_3$  lui manque les couleurs 1, 5, 8 dans son voisinage. Deux de ses voisins, disons  $a_4$  et  $v_4$  vont prendre la couleur, disons 1 (respct 5). Mais, dans ce cas, le sommet  $e_6$  va avoir deux couleurs répétées dans son voisinage, contradiction. Donc  $b(M(H_5)) < 8$ . La figure 3.16 donne une  $b$ -coloration  $M(H_5)$  avec 7 couleurs. Donc  $b(M(H_5)) = 7$ .



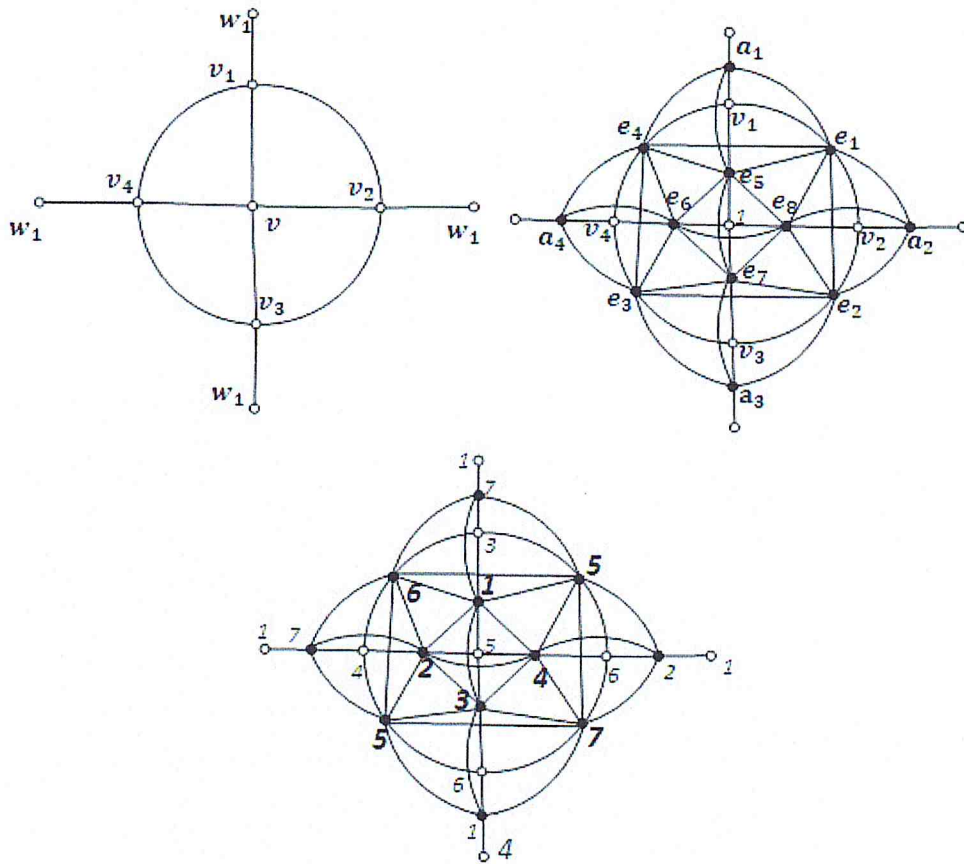


Figure 3.16. La  $b$ -coloration de  $M(H_5)$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(H_6)$  est égal à 9. Supposons que  $b(G) = 9$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec 9 couleurs et soit  $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$  l'ensemble des sommets  $b$ -dominants de  $c$ . Posons  $c(v_i) = i$ , pour  $1 \leq i \leq 9$ . Alors deux cas se présentent:

**Cas 1:**  $V'$  contient 5 sommets de degré 9 et 4 sommets de degré 8.

Sans perte de généralité, on peut supposer que les sommets de  $G$  sont colorés suivant la figure 3.17. Les sommets de  $V'$  colorés avec 6, 7, 8, 9 sont tous de degré 8; ceci implique que ces sommets n'ont aucune couleur répétée dans leurs voisinages. Soient  $u, v \notin V'$  (voir les deux sommets sur le graphe de la figure 3.16). Alors,  $u$  et  $v$  ne peuvent prendre que l'une des couleurs 4 ou 5 car sinon l'un des sommets de  $V'$  coloré avec 7 ou 8 aura une couleur répétée dans son voisinage. Mais dans ce cas, le sommet  $b$ -dominant de couleur 2

aura deux couleurs répétées dans son voisinage, alors que son degré est 9, contradiction.  
 D'où  $b(G) < 9$ .

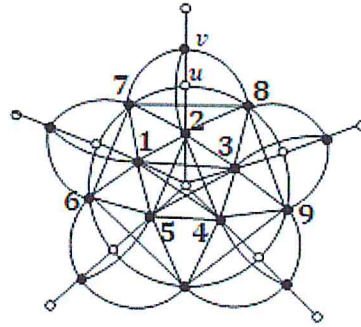


Figure 3.17.

**Cas 2:**  $V'$  contient 5 sommets de degré 8 et 4 sommets de degré 9

Dans la figure 3.18, le sommet  $v$  ne peut prendre que la couleur 3 car sinon l'un des sommets  $b$ -dominants colorés avec 1 ou 5 aura une couleur répétée dans son voisinage, alors que ces sommets sont de degré 8. La couleur 6 est une couleur manquante dans le voisinage du sommet  $b$ -dominant coloré 3. Mais ce sommet  $b$ -dominant ne peut pas avoir la couleur 6 dans son voisinage car sinon l'un des sommets  $b$ -dominants colorés 7 ou 8 aura une couleur répétée dans son voisinage. En conséquence,  $b(G) < 9$ . La figure 3.19 donne une  $b$ -coloration de  $G$  avec 7 couleurs. D'où  $7 \leq b(G) \leq 8$ .

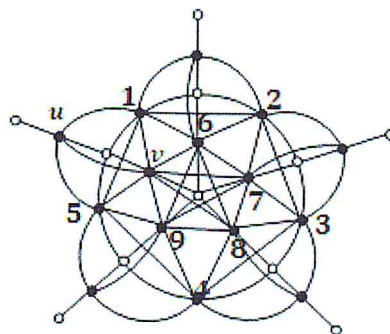


Figure 3.18.

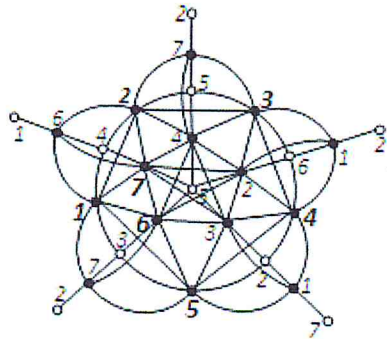


Figure 3.19. Une (6)  $b$ -coloration de  $M(H_6)$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(H_7)$  est égal à 9 et ce graphe admet une (8)  $b$ -coloration (voir figure 3.20 ). Donc  $8 \leq b(G) \leq 9$

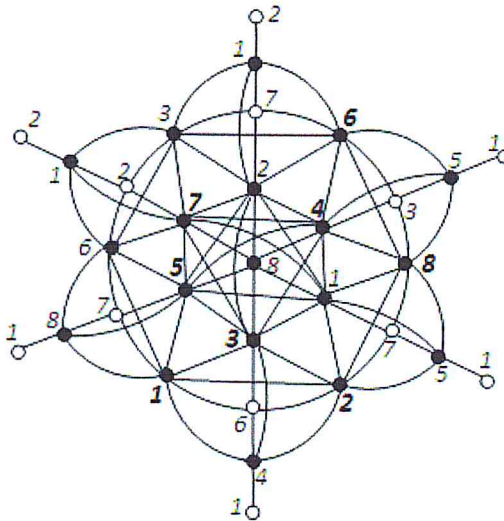


Figure 3.20. Une (7)  $b$ -coloration de  $H_7$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(H_8)$  est égal à 9, et ce graphe admet une (9)  $b$ -coloration. Alors  $b(G) = 9$ . (voir figure 3.21). ■

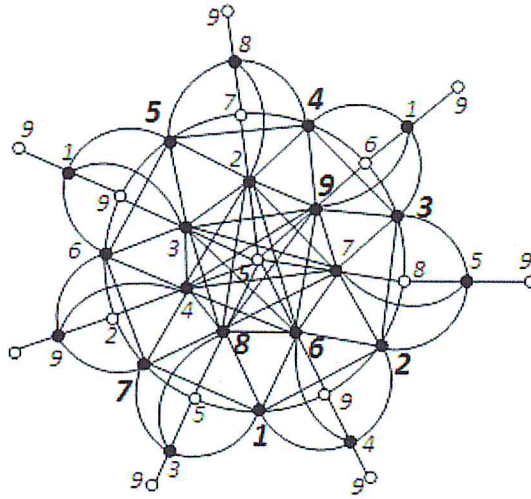


Figure 3.21. La  $b$ -coloration de  $M(H_8)$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(H_n)$  pour  $n \geq 9$  est égal à  $n$  et  $\Delta(G) = n - 1$ , donc d'après la Proposition 40  $b(G) = n$ .

### 3.2.6 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'un graphe de Windmill

**Définition 51** *Le graphe de Windmill, noté  $Wd(k, n)$ , est un graphe simple qui possède  $(k - 1)n + 1$  sommets et  $nk(k - 1)/2$  arêtes. Il est défini pour  $k \geq 2$  et  $n \geq 2$ , il peut être construit en joignant  $n$  copies du graphe complet  $K_{k-1}$  à un nouveau sommet.*

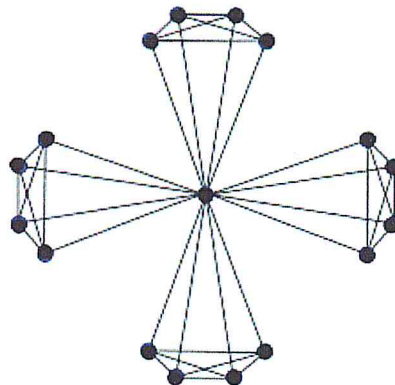


Figure.3.22.Exemple d'un graphe de Windmill  $Wd(5, 4)$

**Théorème 52** pour tout graphe  $Wd(k, n)$  on a :

$$b(M(Wd(k, n))) = n(k - 1) + 1$$

**Preuve.** Pour  $G = M(Wd(k, n))$ , on a  $m(G) = n(k - 1) + 1$ . Alors  $b(G) \leq n(k - 1) + 1$ . Comme le degré maximum de  $G$  est égal à  $(k - 1)$ , alors  $b(G) \geq n(k - 1) + 1$ . D'où  $b(G) = n(k - 1) + 1$

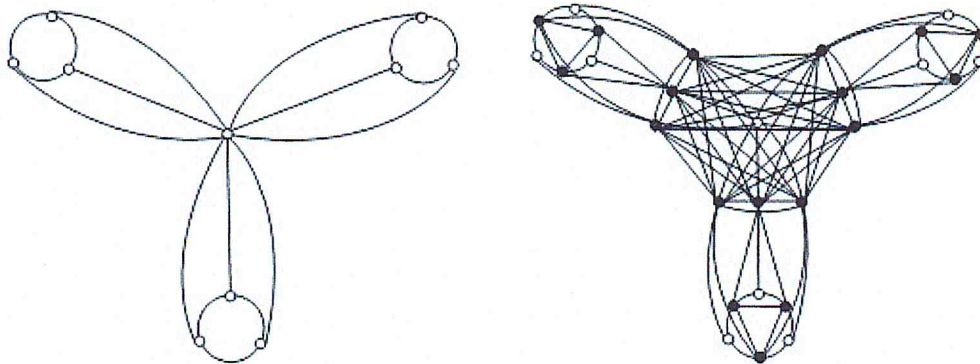


Figure.3.23. Le graphe milieu de Windmill  $Wd(4, 3)$

■

### 3.2.7 Le nombre $b$ -chromatique du graphe milieu d'une couronne d'une chaîne et d'un cycle

**Définition 53** La couronne d'un graphe  $G$ , notée  $Cr(G)$ , est le graphe obtenu à partir d'une copie de  $G$  à laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de  $G$ .

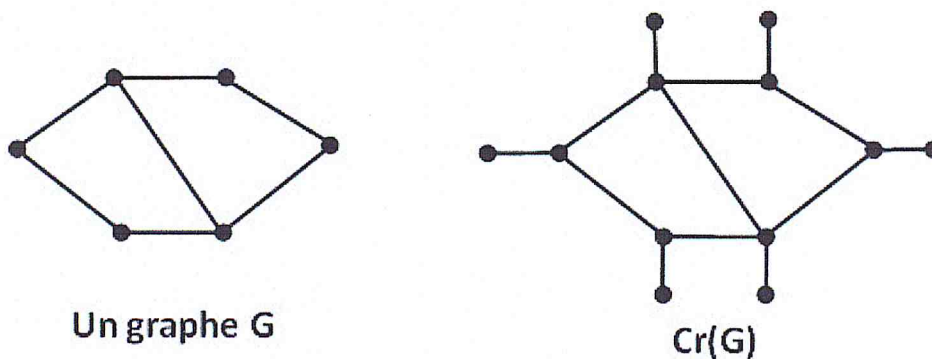


Figure 3.24. Exemple d'une couronne

**Théorème 54** Pour toute chaîne  $P_n$  d'ordre  $n \geq 2$ , on a :  $b(M(Cr(P_n))) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2 \\ 4 & \text{si } n = 3 \\ 5 & \text{si } n = 4, 5, 6 \\ 6 & \text{si } n = 7, 8, 9 \\ 7 & \text{si } n \geq 10 \end{cases}$

**Preuve.** Le  $m$ -degré de  $M(Cr(P_2))$  et  $M(Cr(P_3))$  est égal à 3 et 4 respectivement. Aussi, il est simple de vérifier que  $M(Cr(P_2))$  et  $M(Cr(P_3))$  admettent une (3)  $b$ -coloration et (4)  $b$ -coloration respectivement. D'où  $b(M(Cr(P_2))) = 3$  et  $b(M(Cr(P_3))) = 4$  (Voir figure 3.25).

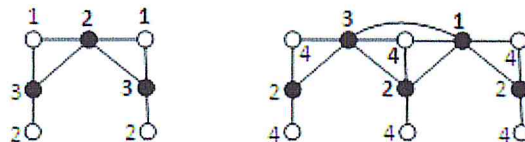


Figure 3.25. La  $b$ -coloration de  $M(Cr(P_2))$  et  $M(Cr(P_3))$

Les graphes  $M(Cr(P_4))$ ,  $M(Cr(P_5))$  et  $M(Cr(P_6))$  sont les graphes présentés dans la figure 3.26. Comme le  $m$ -degré de ces trois graphes est égal à 5 et puisque ces trois graphes admettent une (5)  $b$ -coloration, alors  $b(M(Cr(P_4))) = b(M(Cr(P_5))) = b(M(Cr(P_6))) = 5$ .

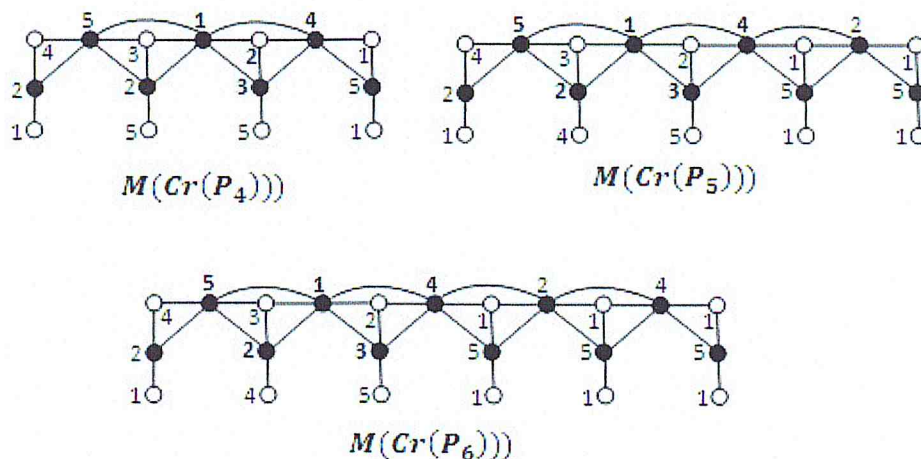


Figure 3.26. La  $b$ -coloration de  $M(Cr(P_4))$ ,  $M(Cr(P_5))$  et  $M(Cr(P_6))$

La figure 3.27 présente les graphes  $M(Cr(P_7))$ ,  $M(Cr(P_8))$  et  $M(Cr(P_9))$ . Il est facile

de vérifier que, le  $m$ -degré de ces trois graphes est égal à 6, et que ces trois graphes sont (6)  $b$ -colorables (voir figure 3.27). Donc  $b(Cr(P_i)) = 6$  pour  $i = 7, 8, 9$ .

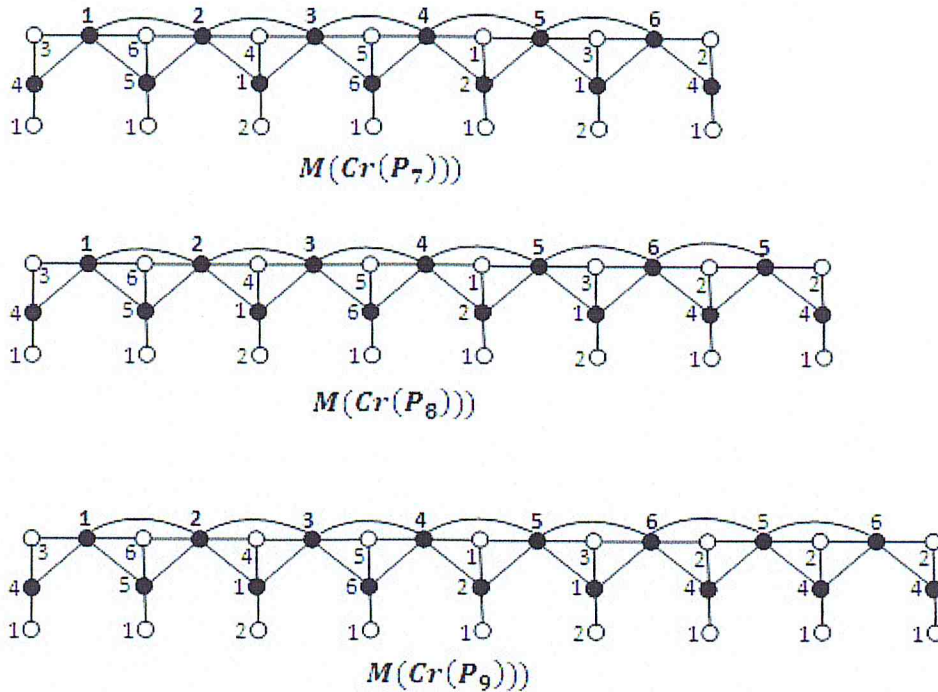


Figure 3.27. La  $b$ -coloration de  $M(Cr(P_7))$ ,  $M(Cr(P_8))$  et  $M(Cr(P_9))$

Pour  $n \geq 10$ , le graphe  $M(Cr(P_{10}))$  admet une  $b$ -coloration avec 7 couleurs (voir figure 3.28). D'autre part, le  $m$ -degré de  $M(Cr(P_{10}))$  est égal à 7. Ceci implique que  $b(M(Cr(P_{10}))) = 7$ . Maintenant, on étend cette coloration à tous les sommets de  $M(Cr(P_n))$  car  $M(Cr(P_{10}))$  est un sous graphe de  $M(Cr(P_n))$ . L'extension se fait en deux étapes:

1. On donne une coloration partielle de  $M(Cr(P_n))$  en colorant le sous-graphe  $M(Cr(P_{10}))$ .
2. On étend la coloration de  $M(Cr(P_{10}))$  au reste des sommets non colorés de  $M(Cr(P_n))$ .

Cette extension est possible car  $b(M(Cr(P_{10}))) = \Delta(M(Cr(P_n))) + 1$ . Dans ce cas, on aura toujours une couleur disponible pour un sommet non coloré de  $M(Cr(P_n))$ .

Puisque  $b(M(Cr(P_{10}))) = 7$ , alors  $b(M(Cr(P_n))) = 7$ .

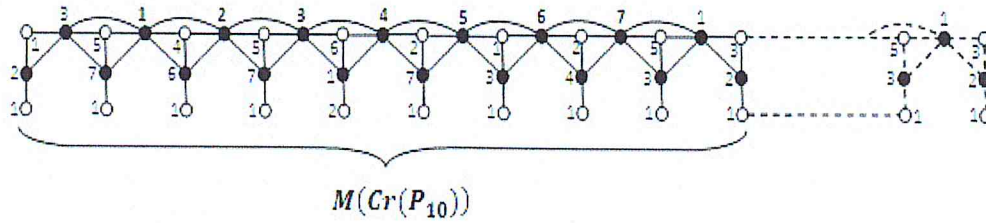


Figure 3.28. La  $b$ -coloration partielle de  $M(Cr(P_n))$ ,  $n \geq 11$ .

■

**Théorème 55** Pour tout cycle  $C_n$ , on a :  $b(M(Cr(C_n))) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 3, 4, 5 \\ 6 & \text{si } n = 6 \\ 7 & \text{si } n \geq 7 \end{cases}$

**Preuve.** Le  $m$ -degré de  $M(Cr(C_3))$ ,  $M(Cr(C_4))$  et  $M(Cr(C_5))$  est égal à 5, et on peut voir que les graphes  $M(Cr(C_3))$ ,  $M(Cr(C_4))$  et  $M(Cr(C_5))$  admettent une (5)  $b$ -coloration (Voir figure 3.29). D'où  $b(M(Cr(C_3))) = b(M(Cr(C_4))) = b(M(Cr(C_5))) = 5$ .

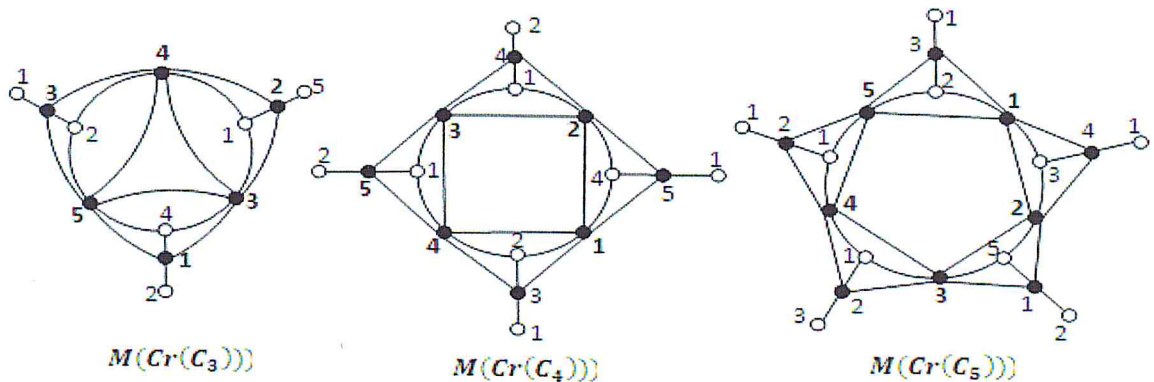


Figure 3.29. La  $b$ -coloration de  $M(Cr(C_3))$ ,  $M(Cr(C_4))$  et  $M(Cr(C_5))$

La figure 3.30 présente les graphes  $M(Cr(C_6))$ ,  $M(Cr(C_7))$ ,  $M(Cr(C_8))$  et  $M(Cr(C_9))$ . Le  $m$ -degré de  $M(Cr(C_6))$  est égal à 6, et le  $m$ -degré de  $M(Cr(C_7))$ ,  $M(Cr(C_8))$ ,  $M(Cr(C_9))$  est égal à 7, et ces quatre graphes sont ( $m$ )  $b$ -colorables (voir figure 3.30). D'où  $b(M(Cr(C_6))) = 6$  et  $b(M(Cr(C_i))) = 7$  pour  $i = 7, 8, 9$ .



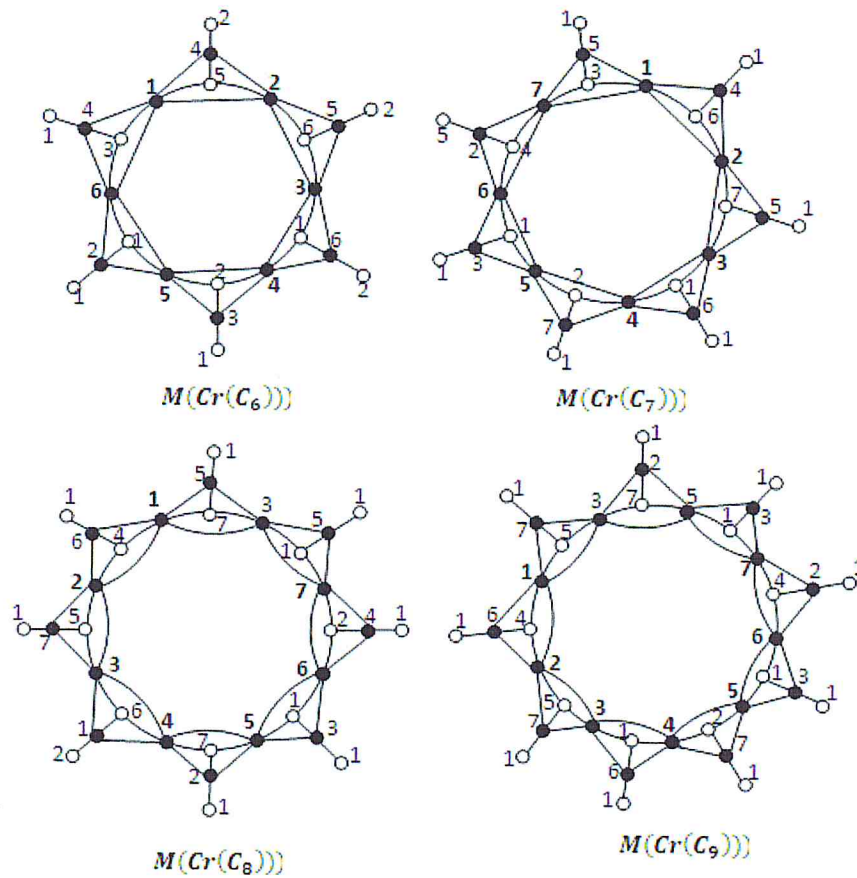


Figure 3.30. La  $b$ -coloration de  $M(Cr(C_6))$ ,  $M(Cr(C_7))$ ,  $M(Cr(C_8))$  et  $M(Cr(C_9))$

Pour  $n \geq 10$ . On a  $b(M(Cr(P_{10}))) = 7$ . Comme  $M(Cr(P_{10}))$  est un sous graphe de  $M(Cr(C_n))$ , alors on va étendre cette coloration à tous les sommets de  $M(Cr(C_n))$ .

L'extension de cette coloration passe par deux étapes:

1. On donne une coloration partielle de  $M(Cr(C_n))$  en colorant le sous-graphe  $M(Cr(P_{10}))$ .
2. On étend la coloration de  $M(Cr(P_{10}))$  au reste des sommets non colorés de  $M(Cr(C_n))$ .

Cette extension est possible car  $b(M(Cr(P_{10}))) = \Delta(M(Cr(C_n))) + 1$ . Dans ce cas, on aura toujours une couleur disponible pour un sommet non coloré de  $M(Cr(C_n))$ .

Puisque  $b(M(Cr(P_{10}))) = 7$ , alors  $b(M(Cr(C_n))) = 7$ .

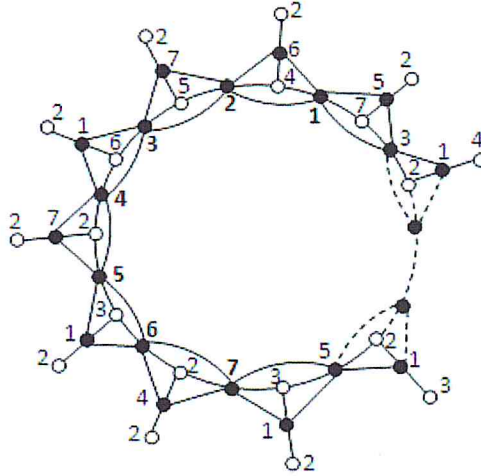


Figure 3.31. Une  $b$ -coloration partielle de  $b(M(Cr(C_n)))$  pour  $n \geq 10$

■

### 3.3 La $b$ -coloration du graphe milieu de la somme cartésienne de deux chaînes.

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition de la somme cartésienne de deux graphes et puis on va donner la  $b$ -coloration du graphe milieu de la somme cartésienne de deux chaînes.

**Définition 56** La somme cartésienne de deux graphes  $K = (V(K), E(K))$  et  $H = (V(H), E(H))$  noté  $K \square H$ , est le graphe  $G$  défini par:

1.  $V(G) = \{(u, v) : u \in V(K), v \in V(H)\}$ .
2.  $E(G) = \{[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : (u_1 = u_2 \text{ et } [v_1, v_2] \in E(K)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } [u_1, u_2] \in E(H))\}$ .

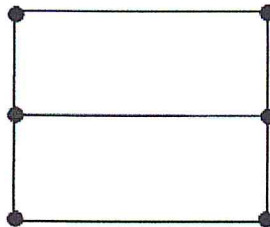


Figure 3.32. La somme cartésienne de  $P_2$  et  $P_3$

**Proposition 57** Soient  $P_m$  et  $P_n$  deux chaînes d'ordre respectif  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ . Soit  $G = M(P_m \square P_n)$ . Alors

$$b(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 2 \text{ et } n = 2 \\ 5 & \text{si } m = 2 \text{ et } n = 3 \\ 6 & \text{si } (m = 2, n = 4, 5, 6) \text{ ou } (m = 3, n = 3) \\ 7 & \text{si } (m = 2, n \geq 7) \text{ ou } (m = 3, n = 4) \\ 8 & \text{si } (m = 3, n = 5, \dots, 11) \text{ ou } (m = 4, n = 4, \dots, 7) \text{ ou } (m = 5, n = 5) \\ 9 & \text{si } (n \geq 5, m \geq 6) \text{ ou } (n = 3, m \geq 12) \text{ ou } (n = 4, m \geq 8) \end{cases}$$

**Preuve.** Le  $m$ -degré de  $M(P_2 \square P_2)$  est égal à 4 et puisque ce graphe est (4)  $b$ -coloriable, alors  $b(M(P_2 \square P_2)) = 4$ . Le  $m$ -degré de  $M(P_2 \square P_3)$  est égal à 5 et puisque ce graphe est (5)  $b$ -coloriable, alors  $b(M(P_2 \square P_3)) = 5$ . Le  $m$ -degré de  $M(P_2 \square P_4)$  est égal à 6 et puisque ce graphe est (6)  $b$ -coloriable, alors  $b(M(P_2 \square P_4)) = 6$ . La figure 3.33 donne la coloration de  $M(P_2 \square P_2)$ ,  $M(P_2 \square P_3)$  et  $M(P_2 \square P_4)$

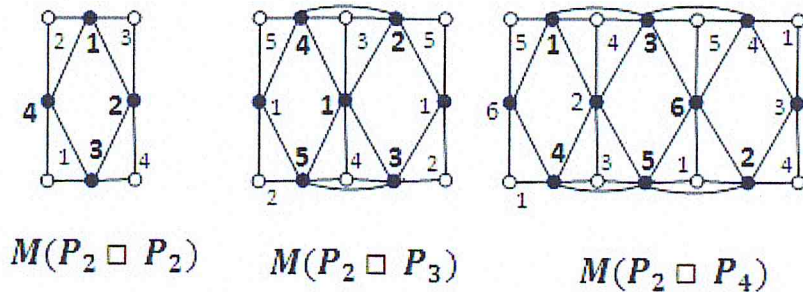


Figure 3.33. La  $b$ -coloration de  $M(P_2 \square P_2)$ ,  $M(P_2 \square P_3)$  et  $M(P_2 \square P_4)$

Le graphe  $G = M(P_2 \square P_5)$  a 7 sommets de degré 6, alors  $m(G) = 7$ , supposons que ce graphe est (7)  $b$ -colorable, comme on a 7 sommets denses alors ils vont tous être  $b$ -dominants. Soient  $c$  une coloration de  $G$  avec 7 couleurs,  $V' = \{v_1, \dots, v_7\}$  l'ensemble des sommets denses de  $G$ , on pose  $c(v_i) = i$  pour  $i = 1, \dots, 7$ . On remarque que le sommet  $v_1$  à la couleur 6 comme couleur manquante et il a deux voisins non coloré mais on peut pas affecté cette couleur à ces deux sommets, sinon cette couleur sera répété dans le voisinage de l'un des sommets  $v_4$  ou  $v_3$  et de cet effet  $b(G) < 7$ . Comme  $G$  admet une  $b$ -coloration avec 6 couleurs, alors  $b(G) = 6$  (voir figure 3.34).

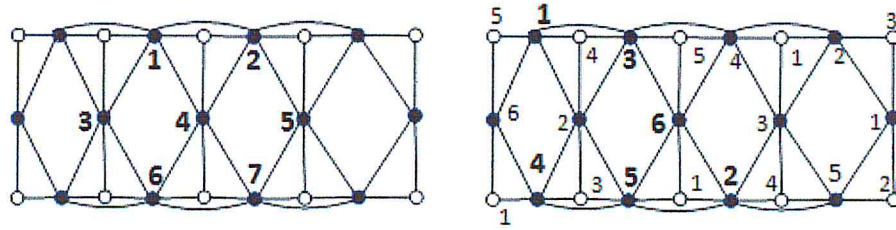
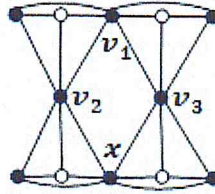


Figure 3.34. La  $b$ -coloration de  $M(P_2 \square P_5)$

Le graphe  $G = M(P_2 \square P_6)$  a plus que 7 sommets de degré 6, donc  $m(G) = 7$ . Supposons que  $b(G) = 7$ , soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec 7 couleurs. Soit  $V' = \{v_1, \dots, v_7\}$  un système  $b$ -dominant, on pose  $c(v_i) = i$ , on constate que  $\forall V'$  on a trois sommets  $v_1, v_2$  et  $v_3$ .



On donne les couleurs nécessaire au voisinage de  $v_1, \forall c(x)$ , avec  $x$  voisin commun de  $v_2$  et  $v_3$ , cette couleur sera répété dans le voisinage de l'un de  $v_2$  et  $v_3$  qui sont de degré 6. A cet effet l'un de ces deux sommets ne sera pas  $b$ -chromatique. Alors le graphe  $G$  ne peut pas être coloré avec 7 couleurs, donc  $b(G) < 7$ . Comme  $G$  admet une  $b$ -coloration avec 6 couleurs (voir figure 3.35), alors  $b(G) = 6$

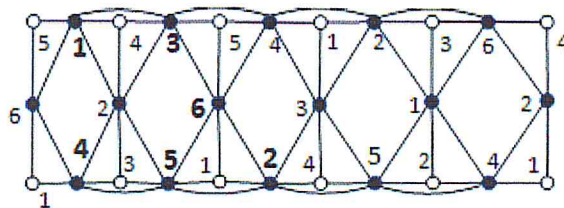


Figure 3.35. LA  $b$ -coloration de  $M(P_2 \square P_6)$

Le graphe  $G = M(P_2 \square P_7)$  a plus que 7 sommets de degré 6, alors  $m(G)$  est égal à 7 et comme  $G$  admet une  $b$ -coloration avec 7 couleurs (voir figure 3.36), alors  $b(G) = 7$

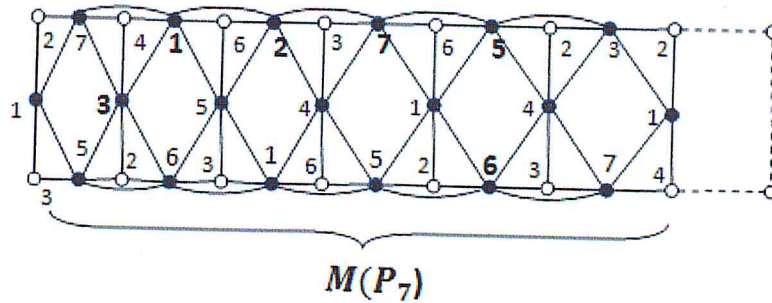


Figure 3.36. L'extension de la  $b$ -coloration de  $M(P_2 \square P_7)$  au  $M(P_2 \square P_n)$

Le graphe  $G = M(P_2 \square P_n)$ ,  $n \geq 8$  a plus que 7 sommets de degré 6, alors le  $m$ -degré de  $G$  est égal à 7. on remarque que  $M(P_2 \square P_7)$  est un sous-graphe de  $M(P_2 \square P_n)$  pour  $n \geq 8$ . alors la preuve se fait on deux étapes:

1. On donne une coloration partielle de  $M(P_2 \square P_n)$  en colorant le sous-graphe  $M(P_2 \square P_7)$ .
2. On étend la coloration de  $M(P_2 \square P_7)$  au restes des sommets non colorés de  $M(P_2 \square P_7)$ , cette extension est possible car  $b(M(P_2 \square P_7)) = \Delta(M(P_2 \square P_n)) + 1$ , d'où  $b(M(P_2 \square P_n)) = 7$  pour  $n \geq 8$ .

Le  $m$ -degré de  $M(P_3 \square P_3)$  est égal à 6 et ce graphe admet une  $b$ -coloration avec 6 couleurs. D'où  $b(M(P_3 \square P_3)) = 6$  (voire figure 3.37).

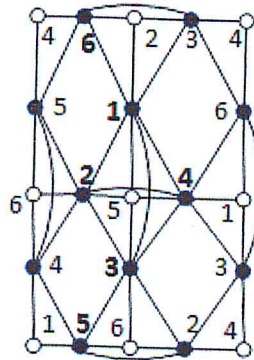


Figure 3.37. La  $b$ -coloration de  $M(P_3 \square P_3)$

Le graphe  $G = M(P_3 \square P_4)$  a un sommet de degré 8, 6 sommets de degré 7 et 2 sommets de degré 6, donc le  $m$ -degré de ce graphe est égal à 7 et ce graphe admet une  $b$ -coloration avec 7 couleurs (voir figure 3.38).

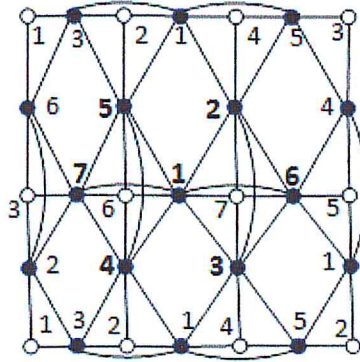


Figure 3.38. La  $b$ -coloration de  $M(P_3 \square P_4)$

Le  $m$ -degré de graphe  $G = M(P_3 \square P_5)$  est égal à 8 et ce graphe admet une  $b$ -coloration avec 8 couleurs. D'où  $b(G) = 8$  (voire figure 3.39).

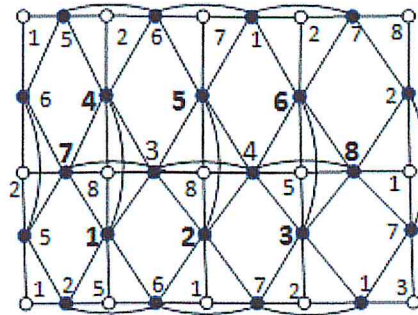
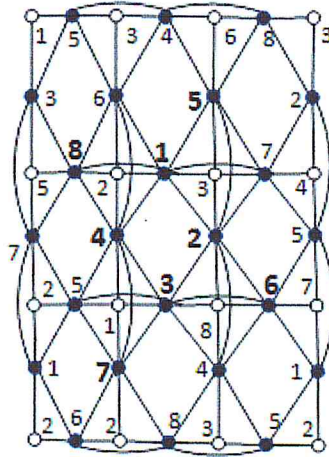


Figure 3.39. La  $b$ -coloration de  $M(P_3 \square P_5)$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(P_3 \square P_6)$  est égal à 8, et comme  $M(P_3 \square P_5)$  est un sous-graphe  $G$  et il est (8)  $b$ -colorable, alors on peut étendre la coloration de  $M(P_3 \square P_5)$  au reste de sommets non colorés de  $G$ , car les sommets non colorés de  $G$  sont de degré strictement inférieur à 6. On possède de la même manière pour le graphe  $H = M(P_3 \square P_7)$ , on a  $m(H) = 7$ , et comme  $M(P_3 \square P_6)$  est un sous-graphe de  $H$ , et il est (8)  $b$ -colorable alors on peut faire une extension de la coloration de graphe  $M(P_3 \square P_6)$  au reste de sommets non colorés de graphe  $H$  car ils sont de degré strictement inférieur à 7. On fait la même chose pour les graphes  $G = M(P_3 \square P_n)$  avec  $n = 8, \dots, 11$ , car  $m(G) = 8$ . Donc  $G$  sera (8)  $b$ -colorable.

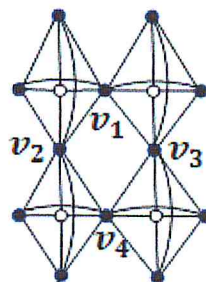
Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(P_4 \square P_4)$  est égal à 8 et comme ce graphe admet une  $b$ -coloration avec 8 couleurs, alors  $b(G) = 8$  (voir figure 3.40).



**Figure 1:** Figure 3.40. La  $b$ -coloration de  $M(P_4 \square P_4)$

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(P_4 \square P_5)$  est égal à 8, et comme  $M(P_4 \square P_4)$  est un sous graphe de  $G$  et il est (8)  $b$ -colorable, alors on fait l'extention de la (8)  $b$ -coloration de sous graphe  $M(P_4 \square P_4)$  au reste de sommets non colorés de graphe  $G$ , car ils sont de degré strictement inférieur à 7, et dans ce cas  $G$  sera (8)  $b$ -colorable.

Le  $m$ -degré du graphe  $G = M(P_4 \square P_6)$  est égal à 9. Supposons que ce graphe est (9)  $b$ -colorable. Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec 9 couleurs où  $V' = \{v_1, \dots, v_9\}$  est l'ensemble  $b$ -dominant, on pose  $c(v_i) = i$ , pour  $1 \leq i \leq 9$ .  $\forall V'$  il existe quatre sommets  $b$ -dominant  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$ , tel que  $v_1$  est un voisin commun de  $v_2, v_3$  et  $v_4$  est un voisin commun de  $v_2, v_3$ .



On remarque que la couleur 4 est une couleur manquante au voisinage de  $v_1$ , mais on peut pas l'affecter à son voisinage, sinon elle sera répétée dans le voisinage de l'un de  $v_2, v_3$ .

Donc ce graphe ne peut pas être coloré avec 9 couleurs, alors  $b(G) < 9$ . Et comme  $G$  admet une  $b$ -coloration avec 9 couleurs (voir figure 3.41) alors  $b(G) = 8$ .

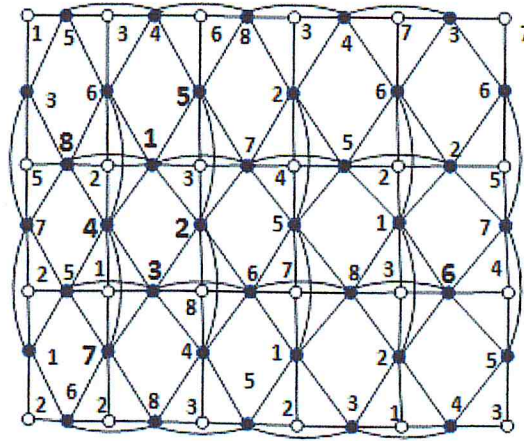
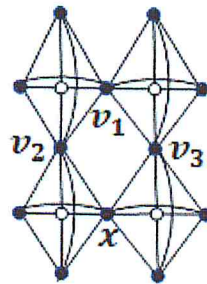


Figure 3.41. La  $b$ -coloration de  $M(P_4 \square P_6)$

Le graphe  $G = M(P_5 \square P_7)$  a 13 sommets de degrés 8, donc  $m(G)$  est égal à 9. Supposons que ce graphe est (9)  $b$ -colorable, soit  $V' = \{v_1, \dots, v_9\}$  l'ensemble  $b$ -dominant pour une coloration  $c$  avec 9 couleurs, on pose  $c(v_i) = i$ , pour  $1 \leq i \leq 9$ .  $\forall V'$  il existe trois sommets  $b$ -dominant  $v_1, v_2$  et  $v_3$ , tel que  $v_1$  est un voisin commun de  $v_2$  et  $v_3$



On donne les couleurs nécessaires au voisinage de  $v_1$ ,  $\forall c(x)$ , avec  $x$  voisin commun de  $v_2$  et  $v_3$ , cette couleur sera répétée dans le voisinage de l'un de  $v_2$  et  $v_3$ . À cet effet l'un de ces deux sommets ne sera pas  $b$ -chromatique car ces deux sommets sont de degré  $m - 1$ . Alors  $G$  ne peut pas être (9)  $b$ -colorable c-à-d  $b(G) < 9$  et comme  $G$  admet une  $b$ -coloration avec 8 couleurs, (voir figure 3.42) alors  $b(G) = 8$ .



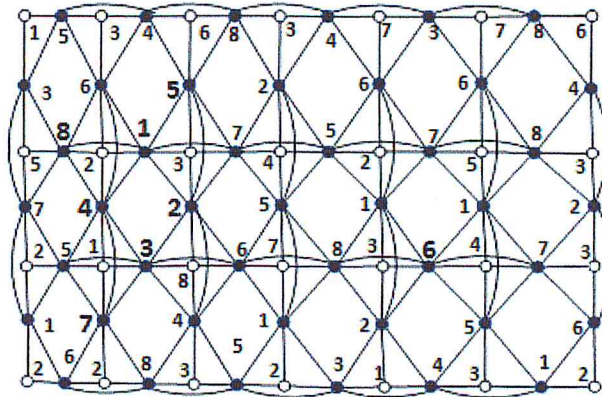


Figure 3.42. La  $b$ -coloration de  $M(P_4 \square P_7)$

Le graphe  $G = M(P_3 \square P_{12})$  a 9 sommets de degré 8, donc  $m(G) = \Delta(G) + 1$  et ce graphe est (9)  $b$ -colorable (voir figure 3.43). Comme  $G$  est un sous graphe de  $M(P_3 \square P_n)$ ,  $n \geq 13$  et  $b(M(P_3 \square P_{12})) = \Delta(M(P_3 \square P_n)) + 1$  pour  $n \geq 13$ , alors on fait l'extention de la coloration de  $G$  au reste de sommets non colorés de  $M(P_3 \square P_n)$  pour  $n \geq 13$ , d'où  $b(M(P_3 \square P_n)) = 9$ .

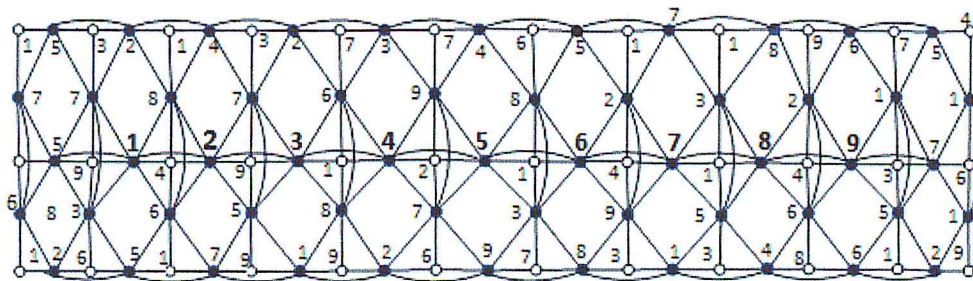


Figure 3.43. La  $b$ -coloration de  $M(P_3 \square P_{12})$

Le graphe  $G = M(P_4 \square P_8)$  a 16 sommets de degré 8, alors  $m(G) = 9 = \Delta(G) + 1$  et ce graphe est (9)  $b$ -colorable (voir figure 3.44). Et comme  $G$  est un sous graphe de  $M(P_4 \square P_n)$  pour  $n \geq 9$ , et  $b(M(P_4 \square P_8)) = \Delta(M(P_4 \square P_n)) + 1$  pour  $n \geq 9$ , alors on fait l'extention de la coloration de  $G$  au reste de sommets non colorés de  $M(P_4 \square P_n)$  pour  $n \geq 9$ , car ils sont de degré inférieur ou égal à  $\Delta(G)$ , alors on a toujours une couleur disponible pour les sommets non colorés de  $b(M(P_4 \square P_n))$ . Donc  $b(M(P_4 \square P_n)) = 9, \forall n \geq 9$ .

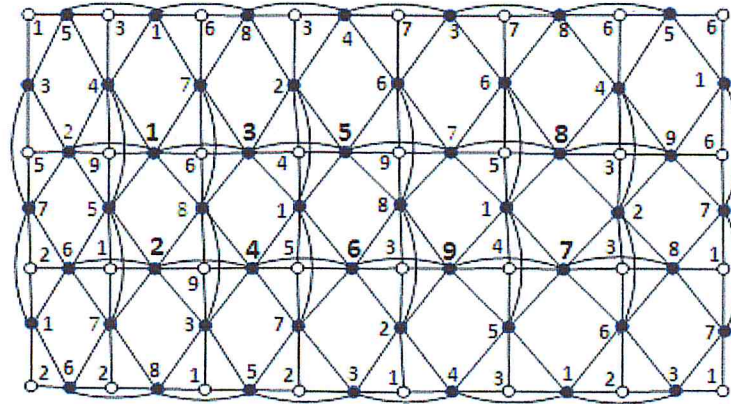


Figure 3.44. La  $b$ -coloration du  $M(P_4 \square P_8)$

Le graphe  $G = M(P_5 \square P_6)$  a plus que 9 sommets de degré 8, alors  $m(G) = 9 = \Delta(G) + 1$  et ce graphe est (9)  $b$ -colorable (voir figure 3.45). Et comme  $G$  est un sous graphe de  $M(P_m \square P_n)$  pour  $n \geq 7, m \geq 6$  et  $b(M(P_5 \square P_6)) = \Delta(M(P_m \square P_n)) + 1$  pour  $n \geq 7, m \geq 6$ , alors on fait l'extention de la coloration de  $G$  au reste de sommets non colorés de  $M(P_m \square P_n)$  pour  $n \geq 7, m \geq 6$ . Donc  $b(M(P_m \square P_n)) = 9, \forall n \geq 7, m \geq 6$ .

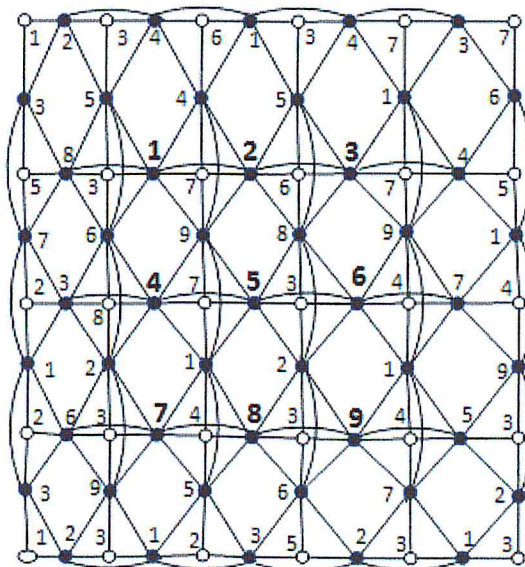


Figure 3.45. La  $b$ -coloration du  $M(P_5 \square P_6)$

■



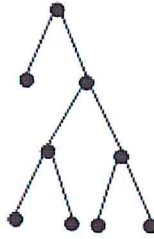


Figure 4.2. L'arbre binaire particulier  $B_4$

**Définition 60** *Un bloc est un sous graphe induit 2-connexé maximal. Un graphe est un bloc graphe, si les composantes 2-connexées maximales de  $G$  sont des cliques.*

**Remarque 61** *Le graphe milieu d'un arbre binaire  $B_n$  est un graphe en bloc où chaque bloc est de taille au plus 4, le graphe milieu de  $B_3$  est présenté dans la figure 4.3.*

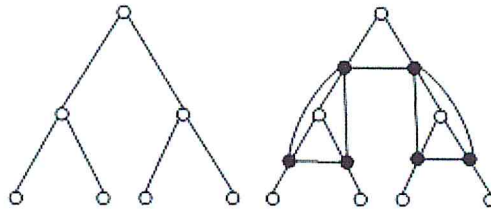


Figure 4.3. Le graphe milieu de  $B_3$

**Définition 62** *Soit  $G = M(B_n)$  un graphe où  $V$  est l'ensemble des sommets de  $G$ . Soient  $M_G$  l'ensemble des sommets denses de  $G$ ,  $V'$  un sous-ensemble de  $M_G$  de cardinalité  $m$  et  $v \in V \setminus V'$*

*On dit que  $V'$  encercle  $v$  (ou  $v$  est accessible à  $V'$ ) si :*

- $\forall u \in V', v$  est adjacent à  $u$
- ou
- $u$  et  $v$  ont un voisin commun dans  $V'$ , disons  $w$ , tel que  $d_G(w) = m - 1$ .

Dans ce cas  $v$  est dit pivot de  $G$  par rapport à  $V'$ .

Par exemple, dans la figure 4.4, le sommet  $v$  est accessible à tous les sommets denses de  $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  de  $M(B_7)$ .

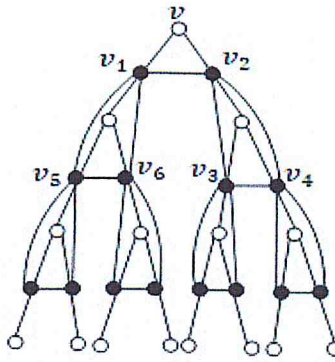


Figure 4.4

**Définition 63** Soient  $G = M(B_n)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets de  $G$ ,  $M_G$  l'ensemble des sommets denses de  $G$  et  $V' \subseteq M_G$  un sous-ensemble de cardinalité  $m$ . On dit que  $V'$  encercle une paire de sommets  $x, y \in V \setminus V'$ , si  $V'$  n'encercle ni  $x$  ni  $y$ , de plus on a:

- $x$  est adjacent à  $y$ .
- Il existe  $V'' \subset V'$ , tel que  $|V''| = m - 1$  et chaque sommet de  $V''$  soit est adjacent à  $x$  ou  $y$ , ou il est adjacent à un certain sommet  $w$ , telle que  $d(w) = m - 1$ , et  $w$  est adjacent a  $x$  ou  $y$ .

Dans la figure 4.5.  $x, y$  est une paire de sommets encerlée par  $V' = \{v_1, \dots, v_7\}$  ..

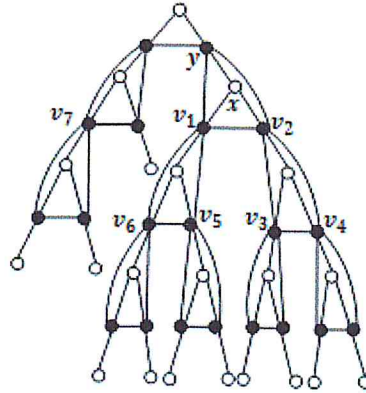


Figure 4.5.

**Définition 64** Soit  $G = M(B_n)$  le graphe milieu d'un arbre binaire, où  $V$  est l'ensemble des sommets de  $G$ ,  $M_G$  l'ensemble des sommets denses de  $G$ ,  $V' \subseteq M_G$  tel que  $|V'| = m$ . Le graphe  $G = M(B_n)$  est dit pivoté si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée:

1.  $|M_G| = m$  et  $V'$  encercle un sommet ou une paire de sommets de  $V \setminus V'$ .
2.  $|M_G| = m + 1$  et  $\exists u, v, w \in M_G$  de degré  $m - 1$  tel que tous les sommets de  $M_G$  sont adjacent à  $u$  ou  $v$  ou  $w$ . De plus, il existe un sommet non dense  $x$  tel que  $x, u, v, w$  forment une clique d'ordre 4 (voir figure 4.6).

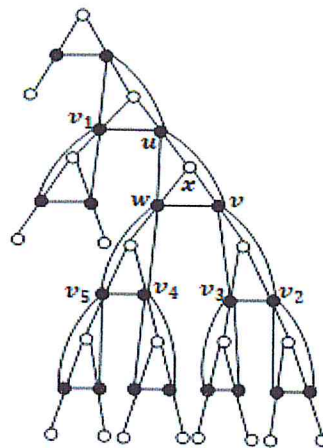


Figure 4.6

**Théorème 65** Si  $G = M(B_n)$  avec  $1 \leq n \leq 6$ , alors  $b(G) = m(G)$ .

**Preuve.** Les graphes  $M(B_n)$   $1 \leq n \leq 6$  sont les graphes présentés dans les figures 3.27 – 3.31. Ils sont non pivotés et  $(m)$   $b$ -colorables.

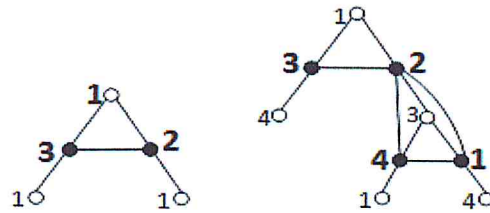


Figure 4.7. La  $b$ -coloration de  $M(B_1)$  et  $M(B_2)$

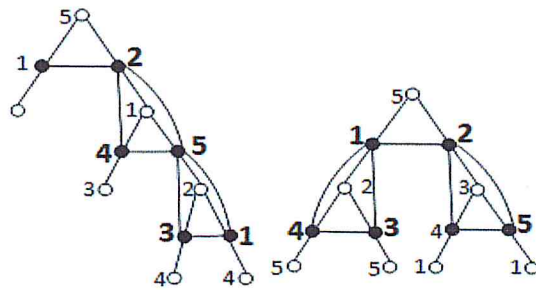


Figure 4.8. La  $b$ -coloration de différentes structures de  $M(B_3)$

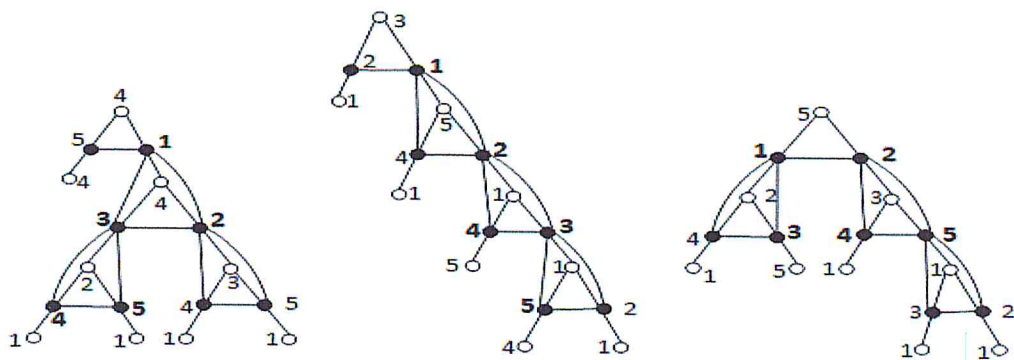


Figure 4.9. La  $b$ -coloration de différentes structures de  $M(B_4)$

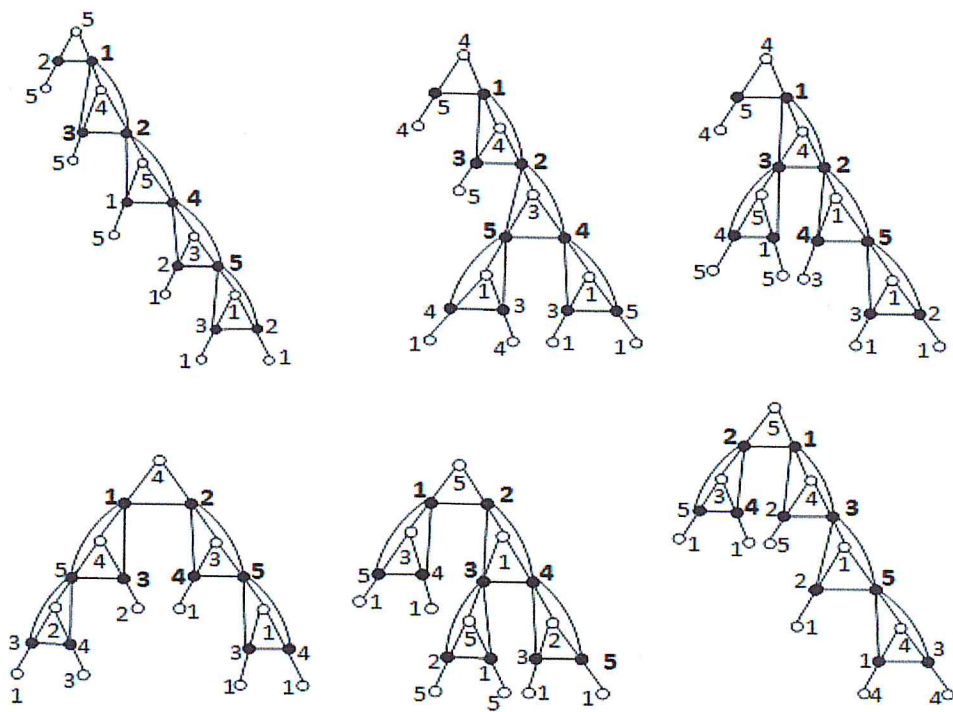
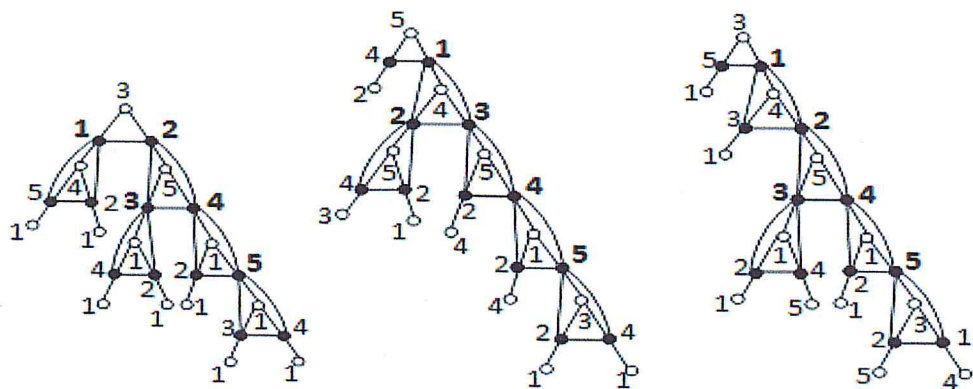


Figure 4.10. La  $b$ -coloration de différentes structures de  $M(B_5)$





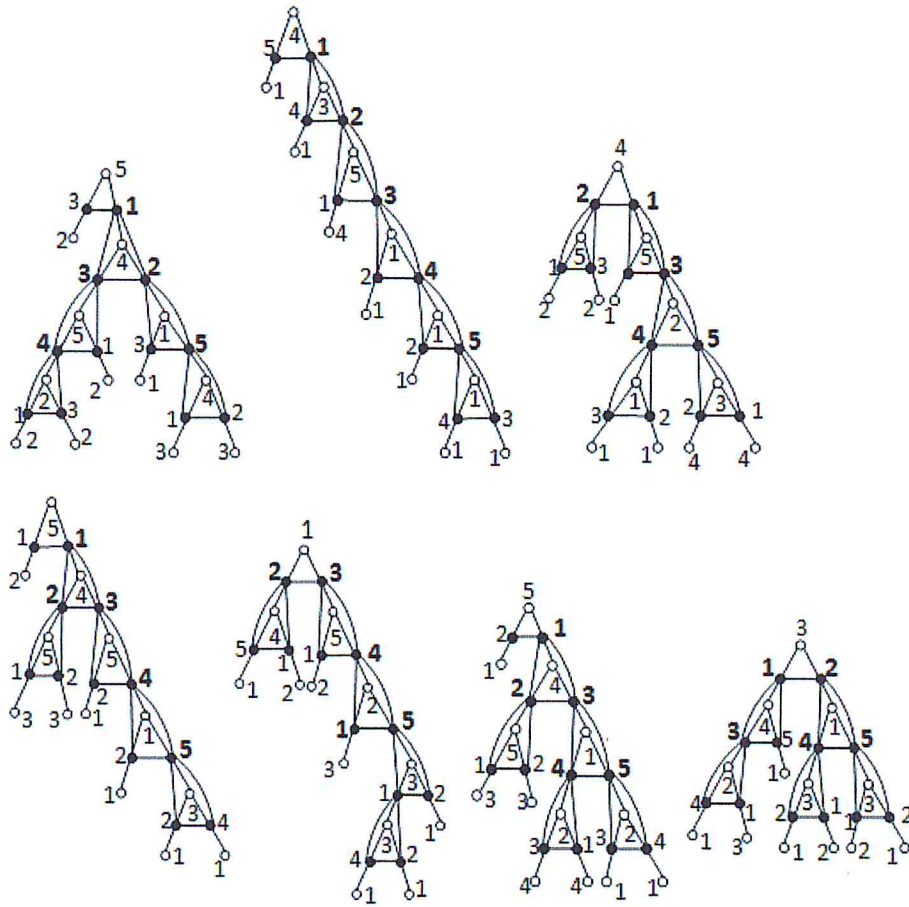


Figure 4.11. La  $b$ -coloration de différentes structures de  $M(B_6)$

■

**Théorème 66** Si  $G = M(B_n)$  est pivoté, alors,  $b(G) < m(G)$ .

**Preuve.** Soient  $G = M(B_n)$  un graphe milieu d'un arbre binaire pivoté,  $M_G$  l'ensemble des sommets denses et  $V' \subseteq M_G$  tel que  $|V'| = m$ . Comme  $G$  est pivoté, alors l'une des deux propriétés de la Définition 64 est vérifiée. La preuve se fait en deux étapes.

**Étape 1:** On suppose que la première propriété est vérifiée.

Soit  $c$  une  $b$ -coloration de  $G$  avec  $m$  couleurs. Supposons que  $|M_G| = m$  et  $V'$  encercle un sommet de  $V \setminus V'$ . Alors, il existe un sommet  $v \in V \setminus V'$  tel que  $v$  est accessible à tous les sommets de  $V'$  (voir l'exemple de la figure 3.34). Tous les sommets denses sont à distance

au plus 2 de  $v$ . Le sommet  $v$  ne peut pas prendre la couleur d'un sommet dense qui se trouve dans son voisinage sinon la coloration sera impropre. Soit  $y \in V'$  tel que  $y$  est à distance 2 de  $v$ . Dans ce cas, il existe un sommet  $z \in V'$  tel  $z \in N(v) \cap N(y)$ . Par définition  $d(z) = m - 1$ . Le sommet  $v$  ne peut pas prendre la couleur de  $y$  car sinon  $z$  ne sera pas  $b$ -dominant. Donc  $v$  n'a pas une couleur disponible. Donc on ne peut pas colorer  $G$  avec  $m$  couleurs. D'où  $b(G) < m$ .

Si  $V'$  encercle une paire de sommet  $x, y$ , alors il existe un sous ensemble  $V''$  tel que  $V' = V'' \cup \{w\}$  et pour chaque sommet  $v_i \in V''$ ,  $v_i \in N(x)$  ou  $v_i \in N(y)$  ou bien il existe un sommet  $v_j \in V'' \cap N(x)$  ou  $v_j \in V'' \cap N(y)$ ,  $j \neq i$ , tel que  $d(v_j) = m - 1$  et  $v_i \in N(v_j)$ . Donc tous les sommets de  $V''$  sont à distance au plus 2 de  $x$  ou  $y$ . Si  $w$  est adjacent à  $x$  ou  $y$ , alors  $x$  ou  $y$  est un pivot, contradiction. Donc  $w$  est à distance au moins 2 de  $x$  ou  $y$ . Si  $w$  est à distance 2 de  $x$  ou  $y$ , alors il n'existe aucun sommet intermédiaire entre  $w$  et  $x$  (ou  $y$ ) de degré  $m - 1$ . De manière similaire au premier cas, on peut montrer que  $x$  et  $y$  ne peuvent pas prendre les couleurs de  $V''$ . Si  $c(x) = c(w)$ , alors il n'existe aucune couleur disponible pour  $y$  car  $y$  ne peut pas prendre les couleurs de  $V''$ . Donc  $b(G) < m$ .

**Etape 2:** On suppose que la deuxième propriété est vérifiée.

Soit  $M_G = \{v_1, v_2, \dots, v_{m+1}\}$ . Soit  $v_i \in M_G$ . Nous allons montrer que pour tout sommet dense  $v_i \in M_G$ ,  $V' = M_G \setminus \{v_i\}$  ne peut pas être un système  $b$ -dominant pour une coloration  $c$  avec  $m$  couleurs. Par définition, il existe trois sommets de  $M_G$ , disons  $u, v, w$ , de degré  $m - 1$  tels que tous les sommets de  $V'$  sont adjacents à  $u$  ou  $v$  ou bien  $w$  et un sommet non dense  $x$  tels que  $u, v, w, x$  forment une clique d'ordre 4. Si  $v_i \neq u, v, w$ , alors l'ensemble  $M_G \setminus \{v_i\}$  ne peut pas être un système  $b$ -dominant pour une  $b$ -coloration avec  $m$  couleur car  $M_G \setminus \{v_i\}$  encercle le sommet  $x$ . Si  $v_i = u, v$  ou  $w$ , alors l'ensemble  $M_G \setminus \{v_i\}$  ne peut pas être un ensemble  $b$ -dominant pour une  $b$ -coloration avec  $m$  couleurs car  $M_G \setminus \{v_i\}$  encercle la paire de sommets  $x, v_i$ . Donc  $M_G \setminus \{v_i\}$  ne peut pas être un ensemble  $b$ -dominant pour une  $b$ -coloration avec  $m$  couleurs pour tout sommet  $v_i \in M_G$ . Alors  $b(G) < m$ . ■

**Conjecture 67** Soit  $G = M(B_n)$  le graphe milieu d'un arbre binaire particulier, si  $G$  est non pivoté, alors  $b(G) = m(G)$ .

## CHAPITRE V

### LE NOMBRE $B$ -CHROMATIQUE DU GRAPHE DE HALIN.

Dans ce chapitre, on va donner le nombre  $b$ -chromatique du graphe de Halin.

**Définition 68** On appelle graphe de Halin noté  $H$  le graphe obtenu à partir d'un arbre  $T$  particulier qui ne contient pas des sommets de degré 2, en joignant tous les sommets pendants en créant ainsi un cycle  $C$ , et donc  $H = C \cup T$ .

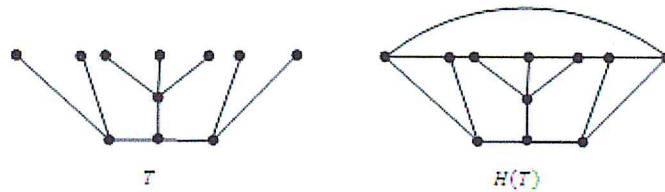


Figure 5.1. Exemple d'un graphe de Halin

**Théorème 69** Soit  $H$  un graphe de Halin avec  $m(H) \geq 5$ . Alors  $b(T) = b(H)$ .

**Preuve.** Soit  $H$  un graphe de Halin avec  $m(H) \geq 5$ . Alors, la preuve de ce théorème se fait en deux étapes:

**Étape 1:** Montrons que  $b(T) \geq b(H)$ .

Toute  $b$ -coloration de  $H$  reste une  $b$ -coloration dans  $T$  car les sommets denses de  $H$  sont les mêmes que de  $T$ . Donc  $b(T) \geq b(H)$ .

**Étape 2:** Montrons que  $b(T) \leq b(H)$ .

Il s'agit de montrer que toute  $b$ -coloration de  $T$  est une  $b$ -coloration de  $H$ . Deux cas sont à distinguer:

**Cas 1:**  $T$  est pivoté.

Soit  $W$  l'ensemble des sommets denses de cardinalité  $m - 1$ . Par le Théorème 31,  $b(T) = m - 1$ . Alors, nous allons montrer que  $b(H) = m - 1$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration partielle du graphe  $H$  obtenue à partir de l'algorithme de Irving et Manlove pour la coloration des arbres pivotés jusqu'à l'étape 2. Si cette coloration est propre, alors à la fin de la troisième étape de l'algorithme de Irving et Manlove, alors  $H$  est  $(m - 1)$   $b$ -colorable. Sinon, on rend la coloration propre en faisant quelques permutations de couleurs de la manière suivante: Comme la coloration n'est pas propre, alors il existe au moins deux sommets adjacents  $v_r, v_l$  de même couleur (voir figure 5.2). Les sommets  $v_r$  et  $v_l$  sont des sommets pendants dans  $T$  et ils se trouvent sur le cycle dans  $H$ . Le sommet  $v_r$  (resp.  $v_l$ ) est adjacent à un sommet dense  $v_i$  (resp.  $v_j$ ). L'un des deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  a au moins un voisin non dense qui est déjà coloré, disons  $v_{i_0}$ . Supposons au contraire que  $v_i$  et  $v_j$  n'ont aucun voisin non dense coloré autre que  $v$ . Alors  $d(v_i) = d(v_j) = m - 1$  et  $v_i$  et  $v_j$  sont forcément adjacents à  $v$ . De plus, tous les voisins colorés (autre que  $v$ ) de  $v_i$  et  $v_j$  sont des sommets denses. Dans ce cas,  $v_i$  (resp.  $v_j$ ) a  $m - 3$  voisins denses colorés. Ceci implique que  $T$  contient au moins  $2m - 4$  sommets denses colorés, contadiction avec le fait qu'on a  $m$  sommets denses colorés car  $2m - 4 > m$ . Dans ce cas, on fait la permutation suivante:  $c(v_r) = c(v_{i_0})$  et  $c(v_{i_0}) = c(v_r)$ .

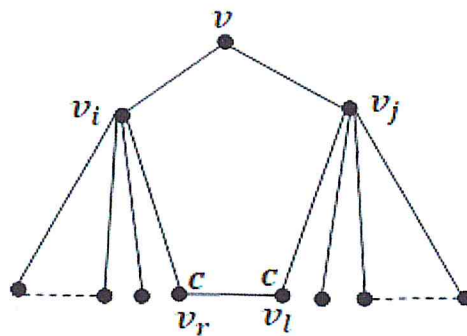


Figure 5.2.

**Cas 2:**  $T$  est non pivoté.

Soit  $W$  l'ensemble des sommets denses de cardinalité  $m$ . D'après le Théorème 35,  $b(T) = m$ .

Nous allons montrer que  $b(H) = b(T)$ . Soit  $c$  une  $b$ -coloration partielle de  $T$  obtenue à partir de l'algorithme de Irving et Manlove pour la coloration des arbres non pivoté, jusqu'à avoir un ensemble de  $m$  sommets  $b$ -dominants, c'est à dire jusqu'à l'obtention de  $m$ -sommets denses de couleurs différentes et chaque sommet dense aura exactement  $m - 1$  voisins colorés avec des couleurs différentes. Ensuite, on ajoute le cycle. Si cette  $b$ -coloration est propre, à la fin de l'algorithme de Irving et Manlove, alors  $H$  est  $(m)$   $b$ -colorable. Sinon, on rend cette coloration propre en faisant quelques permutations de couleurs de la manière suivante: Comme la coloration  $c$  n'est pas propre, alors il existe au moins deux sommets adjacents  $v_r$  et  $v_l$  qui ont la même couleur  $c(v_r) = c(v_l)$  (voir figure 5.3).  $v_r$  et  $v_l$  sont deux sommets pendants dans  $T$ , ils sont sur le cycle dans  $H$  et ils sont adjacents aux certains sommets  $b$ -dominants  $v_i$  respectivement  $v_j$ . L'un des  $v_i$  et  $v_j$  a au moins un sommet coloré, privé à lui dans  $W$ , disans  $v_{i_0}$  respectivement  $v_{j_0}$ . Supposons au contraire que  $v_i$  et  $v_j$  n'ont aucun sommet privé coloré dans  $W$ . Alors, les voisins colorés de  $v_i$  et  $v_j$  sont tous des sommets denses ou des sommets intérieurs voisins à d'autres sommets denses colorés. Comme  $d(v_i) \geq m - 1$  et  $d(v_j) \geq m - 1$ , alors  $v_i$  a au moins  $m - 2$  voisins denses colorés à distance au plus 2 et  $v_j$  a au moins  $m - 2$  voisins denses colorés à distance au plus 2 autres que de  $v_i$  sinon l'arbre  $T$  va contenir un cycle. Donc on a  $2m - 2$  sommets denses colorés, contadiction avec le fait qu'on a  $m$  sommets denses colorés car  $2m - 2 > m$ . Dans ce cas, on permute la couleur de  $v_r$  avec celle de  $v_{i_0}$  et inversement. On peut étendre cette coloration à tous les sommets de  $H$  car tous les sommets restants de  $H$  sont de degré inférieur à  $m$ . De cette manière, on va obtenir une nouvelle  $b$ -coloration propre de  $H$  avec  $b(T)$  couleurs. Donc  $b(H) \geq b(T) = m(T)$ . Comme  $m(H) = m(T)$ , alors  $b(H) = m(T) = b(T)$ .

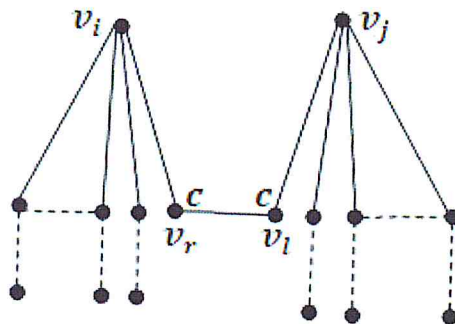


Figure 5.3.

■

**Théorème 70** Soit  $H = T \cup C$  un graphe de Halin d'ordre  $n + 1$  et  $S_{p,q}$  la double étoile d'ordre  $p + q + 2$  avec  $m(H) = 4$ , Alors,

$$b(H) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 5 \text{ et } \text{diam}(T) = 2 \\ 4 & \text{si } (n = 4 \text{ ou } n \geq 6) \text{ et } \text{diam}(T) = 2 \\ 3 & \text{si } T = S_{2,2} \text{ et } \text{diam}(T) = 3 \\ 4 & \text{si } T = S_{p,q}, p > q \geq 2 \text{ et } \text{diam}(T) = 3 \\ 4 & \text{si } \text{diam}(T) \geq 4 \end{cases}$$

**Preuve.** Soit  $H$  un graphe de halin avec  $m(H) = 4$ . Alors, on distingue trois cas selon le diamètre de  $H$ .

1.  $\text{Diam}(T) = 2$ .

Le graphe  $H$  est obtenu à partir de l'étoile  $K_{1,n}$ , ( $n \geq 3$ ) autrement dit  $H$  est le joint d'un cycle  $C_{n-1}$  et une clique d'ordre 1, et d'après le Théorème 26 on a  $b(H) = b(C_{n-1}) + 1$  et comme  $b(C_{n-1}) = 2$  si  $n = 5$  ou 3 sinon, alors

$$b(H) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 5 \\ 4 & \text{si } n = 4 \text{ ou } n \geq 6 \end{cases}$$

2.  $\text{Diam}(T) = 3$ .

Dans ce cas,  $H = S_{p,q} \cup C_{p+q}$  où  $S_{p,q}$  est la double étoile d'ordre  $p + q + 2$  et  $C_{p+q}$  est le cycle d'ordre  $p + q$ . Notons par  $x$  et  $y$  les centres de la double étoile de degré  $p + 1$  et

$q + 1$  respectivement. La définition de  $H$  implique que  $p \geq 2$  et  $q \geq 2$ . Posons  $H = H(p, q)$ . Alors, nous réclavons que:

$$b(H(2, 2)) = 3.$$

Supposons le contraire. Comme  $\omega(H(2, 2)) = \Delta(H(2, 2)) = 3$ , alors  $b(H(2, 2)) = 4$ . Soient  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  (voir figure 5.4) l'ensemble des sommets de  $H$  et  $V' \subseteq V$  l'ensemble des sommets denses. Il est facile de vérifier que tous les sommets de  $H$  sont denses. donc  $V = V'$ . D'autre part,  $H(2, 2)$  a au moins 4 sommets de degré 3 mais il ne contient pas au moins 5 sommets de degré au moins 4. Donc  $m(H(2, 2)) = 4$ . Soit  $V'' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \}$ . Puisque  $|V''| = m(H(2, 2))$  et  $V''$  encercle le sommet  $v_5$  et  $v_6$ , alors d'après la Proposition 3.14. Alors  $H(2, 2)$  ne peut pas être coloré avec 4 couleurs, contradiction. D'où  $b(H(2, 2)) = 3$ .

Le  $m$ -degré de  $H(2, 3)$  est égal à 4. Comme  $H(2, 3)$  admet une  $b$ -coloration avec 4 couleurs, alors  $b(H(2, 3)) = 4$ . Soit  $u \in V(H(2, 3))$ , ( $u \neq y$ ) un voisin de  $x$  et  $v \in V(H(2, 3))$ , ( $v \neq x$ ) un voisin de  $y$ . Donc  $uv \in E(H(2, 3))$ . Alors le graphe  $H(p, q)$ ,  $p \geq 3$  et  $q \geq 3$  est obtenu à partir de  $H(2, 3)$  en subdivison l'arête  $uv$ ,  $p + q - 5$  fois ensuite on relie  $p - 2$  nouveaux sommets avec  $x$  et le reste des nouveaux sommets avec  $y$ , il est claire que  $m(H(p, q)) = m(H(2, 3))$  pour  $p \geq 3$  et  $q \geq 3$ . Comme  $H(2, 3)$  admet une  $b$ -coloration avec 4 couleurs, alors  $H(p, q)$  admet une (4)  $b$ -coloration, il suffit de garder le même ensemble  $b$ -dominat de  $m(H(2, 3))$ , et on a toujours une couleur disponible pour les nouveaux sommets de  $H(p, q)$  (voir figure 5.4)

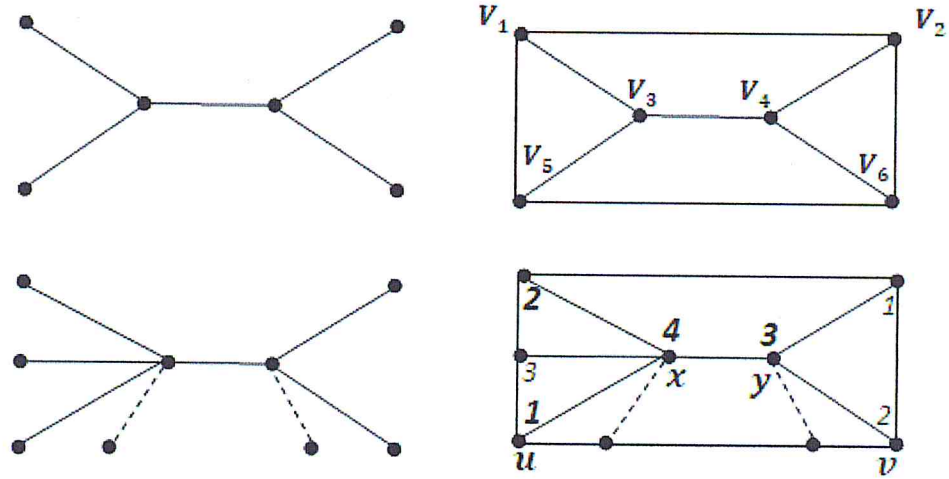


Figure 5.4

3.  $\text{Diam}(T) \geq 4$

Soit  $H$  un graphe de Halin avec  $m(H) = 4$ , soit  $V' = \{x_i \mid d_T(x_i) \geq 3\}$ , deux cas sont distingués

Cas 1:  $|V'| = 3$

Dans ce cas, l'arbre  $T$  est celui donné par la figure. Le  $m$ -degré de  $H(T)$  est égal à 4. Donc  $b(H(T)) \leq 4$ , alors on distingue deux cas:

1.  $T = T_0$  (voir figure 5.5). Comme  $H(T_0)$  admet une  $b$ -coloration avec 4 couleurs. (voir figure 3.27). Alors  $b(H(T_0)) = 4$ .
2.  $T \neq T_0$ . Soient  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les trois sommets de  $V'$ . Nous attribuons la couleur  $i$  au sommet  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Soit  $x_4$  un sommet de  $V \setminus V'$ . Alors  $d_T(x_4) = 1$  et  $d_H(x_4) = 3$  car  $x_4 \in C(H)$ , attribuons la couleur 4 au sommet  $x_4$  dans  $H$ . Ensuite, nous colorions le reste des sommets de  $H$  avec les couleurs 1, 2, 3, 4 de telle façon que la coloration reste propre et que les sommets  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  soient des sommets  $b$ -dominants. De ce fait  $H$  sera  $b$ -colorable avec 4 couleurs. Cette coloration est possible car tous les sommets restants sont de degré 3. D'où  $b(H(T)) = 4$



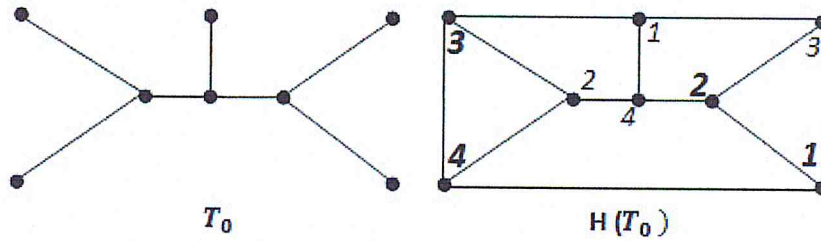


Figure. 5.5. Une (4)  $b$ -coloration de  $H(T_0)$

Cas 2:  $|V'| \geq 4$

Dans ce cas on prend  $V'' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset V'$ . Soit  $C_0$  la chaîne diamétrale de  $T$ . Sans perte de généralité, on peut supposer qu'au moins trois sommets, disons  $x_1, x_2, x_3$ , appartiennent à  $C_0$ . On colore le graphe  $H$  de la manière suivante: On affecte la couleur  $i$  au sommet  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ensuite, on colore les voisins de  $x_i$  de telle sorte que  $x_i$  soit  $b$ -dominant (voir l'exemple présenté dans la figure 3.28 ). Soit  $x_j \in V'$ , ( $j \geq 5$ ). Alors  $x_j$  ne peut pas être adjacent à deux sommets de  $V''$  sinon on va créer un cycle. Dans ce cas,  $x_j$  a une couleur manquante dans son voisinage. D'où, pour chaque sommet  $x_j \in V''$ ,  $j \geq 5$ , on peut lui affecter une couleur qui est manquante dans son voisinage. Enfin, tous les sommets de  $V \setminus (V' \cup V'')$  sont de degré 3. Ceci implique qu'il existe toujours une couleurs manquante dans le voisinage de ces sommets. En conséquence, on peut étendre cette coloration à tous les sommets de  $H$ . D'où  $b(H) = 4$ .

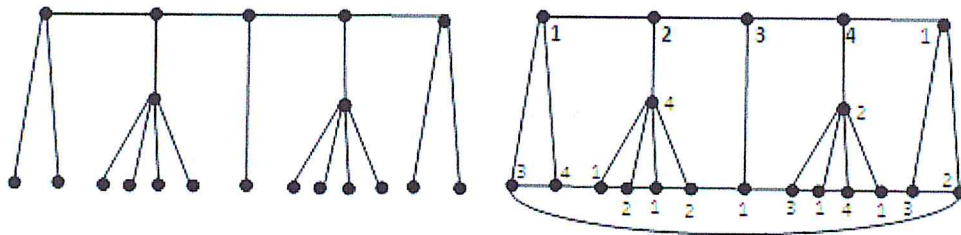


Figure 5.6

■

Le théorème suivant s'endéduit à partir des Théoremes 69, 70

**Théorème 71** *Si  $H$  est un graphe de Halin, alors  $b(T) = \begin{cases} b(H) \text{ si } \text{Diam}(T) > 2 \\ 3 \text{ si } n = 5 \text{ et } \text{diam}(T) = 2 \\ 4 \text{ si } (n = 4 \text{ ou } n \geq 6) \text{ et } \text{diam}(T) = 2 \end{cases}$*

### *Conclusion*

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de la  $b$ -coloration dans les graphes.

Dans le premier lieu, nous avons donné les valeurs exactes du nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu d'une chaîne, un cycle, une roue, graphe de Helm, graphe de Windmill et graphe d'amitié, la somme cartésienne de deux chaînes.

Dans le deuxième lieu, nous avons adapté quelques résultats existants dans les cactus au graphe milieu d'un arbre binaire

Enfin, nous avons déterminé le nombre  $b$ -chromatique du graphe de Halin.

Beaucoup de problèmes restent ouverts dans ce domaine et ils peuvent être étudiés ultérieurement à savoir la détermination du nombre  $b$ -chromatique du graphe milieu d'un  $k$ -arbre.

## REFERENCES

- [1] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.
- [2] R. Brooks. On coloring the nodes of networks . Maths.Proc. Cambridge Philos. Soc., 37:194-197, (1941).
- [3] E.A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63:175-177, (1956).
- [4] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphic homomorphisms, Port. Math. 26:453-462, (1967).
- [5] R.W. Irving and D.F. Manlove. The  $b$ -chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91:127-141, (1999).
- [6] M. Kouider and M. Mahéo. Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a graph. Discrete Math., 256:267-277, (2002).
- [7] D. F. Manlove. Minimaximal and Maximinimal optimisation problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998-27 of the computing Science Department on Glasgow University, 1998.
- [8] M. Kouider and M. Zaker. Bounds for the  $b$ -chromatic number of some families of graphs. arXiv:math. Co/0506167 v1 9Jun 2005.
- [9] Ferreira DA Silva Ana Shirly .Maffray .Le nombre  $b$ -chromatique de quelques classes de graphes généralisant les arbres. Novembre 2010.
- [10] Noureddine IKHLEF ESCHOUF. Mostafa BLIDIA.  $b$ -coloring of some bipartite graphs