

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1



Faculté des Sciences



Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

SUR LA DOMINATION SOMMET- ARÊTE DANS LES GRAPHES GONFLÉS

Présenté par :

- **BENHAMIDA AMEL**
- **MEFTI AMEL**

Devant le jury composé de :

M^r CHELLALI Mustapha	Professeur, U.S.D. Blida 1	Président
M^{me} BOUTRIG Razika	M.C.B, U.M.B. Boumerdes	Examinatrice
M^{me} MEDDAH Nacéra	M.C.A, U.S.D. Blida 1	Promotrice

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

Remerciements	5
Résumé	6
Abstract	7
Résumé en Arabe	8
Introduction	9
1 <i>Notions générales et terminologies</i>	12
1.1 Notions de base	12
1.1.1 Définitions et notations	12
1.1.2 Graphes particuliers	15
1.1.3 Propriété des ensembles	18
1.1.4 Invariants de graphes	19
1.2 La domination dans les graphes	19
1.2.1 Vue historique et application de la domination	19
1.2.2 Définitions et propriétés préliminaires	20
1.2.3 Quelques types de domination avec application	21
2 <i>État de l'art sur la domination sommet-arête dans les graphes</i>	24
2.1 Terminologies et définitions	24
2.2 Quelques Résultats antérieurs	26
2.2.1 La <i>ve</i> -domination dans les arbres	31
3 <i>Contribution à l'étude de la <i>ve</i>-domination dans les graphes gonflés</i>	33
3.1 Terminologies et définitions	33

3.2 Résultats principaux	34
3.2.1 Relations de type Nordhauss-Gaddum	45
3.2.2 Grilles gonflées	46
Conclusion et perspectives	51
Bibliographie	52

Table des figures

1.1	Un graphe G d'ordre $n = 5$ et de taille $m = 5$	13
1.2	Un cycle C_3 et une chaîne P_4	14
1.3	Le graphe complet K_5	15
1.4	Un graphe G et son complémentaire \bar{G}	16
1.5	Un graphe biparti G et un graphe biparti complet $K_{2,3}$	16
1.6	Un graphe cactus.	17
1.7	Arbres particuliers.	18
1.8	Couronne de deux graphes.	18
1.9	Un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8	20
1.10	Un graphe G avec $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 4$	21
1.11	Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 2$	22
1.12	Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 2$	22
1.13	Un graphe G avec $\gamma_{\times 2}(G) = 4$	23
2.1	Un graphe G avec $\gamma_{ve}(G) = 2$ et $\Gamma_{ve}(G) = 3$	25
2.2	Un arbre T avec $\gamma(T) = 8$ et $\beta_{ve}(T) = 7$	32
3.1	Un graphe G et son graphe gonflé G_I	34
3.2	Un graphe biparti G et son graphe gonflé G_I	37
3.3	Un graphe de la famille $\mathcal{N}(H)$	43
3.4	La grille $G_{2,4}$ et la grille gonflée $(G_{2,4})_I$	47
3.5	Les trois situations du processus de marquage.	47
3.6	Processus de marquage pour $(G_{2,6})_I$	48
3.7	Une grille $G_{3,4}$	49
3.8	Une grille $G_{m,c}$	50

Remerciements

Grâce à **ALLAH**, qui nous a donné la volonté, la force et le courage nous avons abouti à la concrétisation de ce travail.

On voudraient dans un premier temps remercier *M^{me} MEDDAH Nacéra*, Maître de conférences classe A, à l'université de Saad Dahlab Blida 1, c'est un grand honneur et une expérience incroyable de travailler sous la direction d'une promotrice dont les compétences et talents sont remarquables. On apprend quelques choses de nouveau de vous chaque jour. Merci pour la confiance que vous avez placé en nous et de partager votre expérience, vos commentaires avisés, vos encouragements, et votre patience qui ont permettent d'épanouir pleinement dans ce travail, nous sommes fiertes d'être dirigés par vous.

Nous voudrions également exprimer toute notre reconnaissance à *M^r CHELLALI Mustapha*, Professeur à l'université de Saad Dahlab Blida 1, d'avoir accepté de nous faire l'honneur de juger ce travail et de participer à notre jury de mémoire.

Nous adressons nos sincères et vifs remerciements à *M^{me} BOUTRIG Razika*, Maître de conférences classe B, à l'université de Boumerdes, d'avoir accepté d'être membre de jury.

Nous profitons également pour remercier chaleureusement tous les membres de nos familles ainsi que les enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à notre formation et bien sur tous les amis qui nous soutenus de près ou de loin à cet aboutissement, merci à tous.

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude du concept de domination sommet-arête, abrégé *ve-domination*, dans les *graphes gonflés*. Rappelons qu'un graphe G_I est une inflation (graphe gonflé) d'un graphe G , si G_I est obtenu à partir de G en remplaçant chaque sommet v de G , de degré $d(v)$ par une clique $K_{d(v)}$, et en joignant deux sommets de cliques distinctes de G_I par une arête si et seulement si les sommets correspondants de G sont adjacents. Aussi, un sous ensemble de sommets D est un *ve-dominant*, si chaque arête e est ou bien incidente à un sommet de D ou adjacente à une arête incidente à un sommet de D . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve-dominant* d'un graphe G est appelé nombre de *ve-domination*, et est noté par $\gamma_{ve}(G)$.

Dans ce mémoire, et en premier lieu, nous présentons quelques bornes inférieures et bornes supérieures, du nombre de *ve-domination* dans l'inflation G_I , d'un graphe G , en termes des caractéristiques du graphe G , ou en termes d'autres paramètres de domination du graphe G , avec des caractérisations des graphes extrémaux. Aussi on donne une caractérisation descriptive de la famille des arbres G dont le nombre de feuilles est égal au nombre de *ve-domination* supérieur de son inflation G_I .

En second lieu, nous présentons une caractérisation des arbres G dont le nombre de domination est égal au nombre de *ve-domination* de son inflation G_I . Aussi nous donnons une caractérisation des graphes G dont le nombre de domination est égal au nombre de *ve-domination* de son inflation G_I , et est égal à $\left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$.

A la fin, on donne des bornes supérieures du nombre de *ve-domination* pour l'inflation d'une grille $G_{m,c}$ pour $m, c \geq 2$.

Abstract

The objective of this thesis is to study the concept of vertex-edge domination, abbreviated *ve*-domination, in inflated graphs. Recall that a graph G_I is an inflation (inflated graph) of a graph G , if G_I is obtained from G by replacing each vertex v of G , of degree $d(v)$ by a clique $K_{d(v)}$, and by joining two vertices of distinct cliques of G_I by an edge if and only if the corresponding vertices of G are adjacent. Also, a subset of vertices D is *ve*-dominating, if every edge e is either incident to a vertex of D or adjacent to an edge incident to a vertex of D . The minimum cardinal of a *ve*-dominating set of a graph G is called the *ve*-domination number, and is denoted by $\gamma_{ve}(G)$.

In this thesis, first, we present some lower bounds and upper bounds, of the *ve*-domination number in the inflation G_I , of a graph G , in terms of the characteristics of the graph G , or in terms of other domination parameters of the graph G , with characterizations of extremal graphs. Also we give a descriptive characterization of the family of trees G whose number of leaves is equal to the upper *ve*-domination number of its inflation G_I .

Secondly, we present a characterization of trees G whose domination number is equal to the *ve*-domination number of its inflation G_I . Also we give a characterization of graphs G whose domination number is equal to the *ve*-domination number of its inflation G_I , and is equal to $\left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$.

Finally, we give upper bounds on the *ve*-domination number for the inflation of a grid $G_{m,c}$ for $m, c \geq 2$.

ملخص

الغرض من هذه الأطروحة هو دراسة مفهوم هيمنة رأس-حافة، و المختصرة على أنها ve -هيمنة، في الرسوم البيانية المضخمة. نذكر ان الرسم البياني G_I هو تضخم (رسم بياني مضخم) للرسم البياني G ، اذا تم الحصول على G_I من G عن طريق استبدال كل رأس v من G ، من الدرجة $d(v)$ بواسطة زمرة $K_d(v)$ ، ومن خلال ربط رأسين من مجموعات متميزة من G_I بحافة إذا فقط إذا كانت الرؤوس الموافقة لـ G متجاورة . أيضاً، مجموعة فرعية من الرؤوس D هي مجموعة ve -هيمنة، إذا كانت كل حافة e إما واقعة على رأس D أو مجاورة لحافة تقع على رأس D . العدد الأصلي لمجموعة هيمنة رأس-حافة للبيان G يسمى بعدد هيمنة رأس-حافة و يرمز له ب $\gamma_{ve}(G)$.

في هذه الأطروحة، أولاً، نقدم بعض القيم الحدية الصغرى و الحدية الكبرى، للعدد ve -هيمنة في الرسم البياني المضخم G_I ، للرسم G ، من حيث خصائص الرسم البياني G ، أو من ناحية أخرى معلمات هيمنة الرسم البياني G ، مع توصيف الرسوم البيانية القصوى. نعطي أيضاً توصيفاً وصفيًا لعائلة الأشجار G التي يساوي عدد اوراقها العدد الأكبر ل ve -هيمنة في الرسم البياني المضخم G_I .

ثانياً، نقدم توصيفاً للأشجار G التي يكون رقم هيمنتها مساويا لعدد هيمنة رأس-حافة لرسمها البياني المضخم G_I ، و أيضاً نقدم توصيفاً للرسومات البيانية G التي يكون رقم هيمنتها مساويا لعدد هيمنة رأس-حافة لرسمها البياني المضخم G_I ، ويساوي $\lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$.

وفي الأخير، نعطي قيم حدية كبرى لعدد هيمنة رأس-حافة للشبكة المضخمة $G_{m,c}$ من اجل $m, c \geq 2$.

Introduction

Chacun de nous a vu une fois au moins un plan de métro, une carte de lignes ferroviaires ou aériennes ou un plan électrique ; ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe. Toutefois, entre la vague notion d'un schéma formé de "points" et de "trajets" reliant ces points et la théorie mathématique des graphes, il y a une longue élaboration de concepts.

La théorie des graphes est aujourd'hui un domaine très important faisant le lien entre les mathématiques discrètes et l'informatique. Une question provenant de la modélisation de problèmes concrets (réseaux de transport, de téléphone, de microprocesseurs,... etc.) peut être étudiée par des méthodes purement abstraites et être appliquée en retour par des utilisateurs potentiels dans le domaine qui lui a donné naissance ou dans n'importe quel autre domaine.

Parmi les branches les plus étudiées de la théorie des graphes figure la domination dans les graphes. En effet, la domination constitue un domaine florissant de recherche comportant un nombre énorme de problèmes qui sont jusqu'à présent ouverts ou qui n'ont même pas été étudiés.

Ce concept trouve son origine au dix-neuvième siècle avec les jeux d'échecs. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. En 1862, De Jaenisch [1] posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur un échiquier de telle sorte que chaque case soit occupée par une reine, soit peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. La domination devient un domaine théorique en 1958 avec Claude Berge [2], et plus tard, en 1977, avec Cockayne et Hedetniemi [3].

Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont

vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble D de sommets dans un graphe (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur à D a au moins un voisin dans D . Le problème de la recherche d'un ensemble dominant de taille minimale est un problème NP-complet [4].

Parmi les variantes de la domination, nous citons par exemple, un ensemble sommet-arêtes dominant abrégé *ve*-dominant, qu'est un sous ensemble $D \subseteq V$ de G , si pour toute arête $e \in E$, il existe un sommet $v \in D$ tel que le sommet v *ve*-domine l'arête e . Le cardinal minimum d'un ensemble sommet-arête dominant de G est appelé le nombre de sommet-arête domination de G , noté $\gamma_{ve}(G)$.

De nombreux chercheurs ont étudié le comportement de certains paramètres des graphes quand le graphe subit des modifications par des opérations élémentaires comme la suppression de sommets ou d'arêtes, l'ajout de sommets ou d'arêtes, identification de sommets, contraction d'arêtes, ..etc. Ce mémoire est composé de trois chapitres qui sont développés comme suit :

Chapitre 1 : Notions générales et terminologies

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base utilisées tout au long de ce manuscrit. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant un bref aperçu sur son histoire. Nous présentons par la suite quelques paramètres de domination avec leur application, à savoir le nombre de domination, le nombre de domination double, le nombre de domination totale, le nombre de domination couplée,..etc.

Les notions propres à un chapitre donné, seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : État de l'art sur la domination sommet-arête dans les graphes

Le deuxième chapitre est consacré à l'état de l'art de la domination sommet-arête dans les graphes. Nous y présentons quelques résultats antérieurs pour quelques paramètres de la domination sommet-arête dans les graphes.

Chapitre 3 : Contribution à l'étude de la *ve*-domination dans les graphes gonflés

Dans le troisième chapitre, nous sommes orientés vers l'étude de la *ve*-domination dans les

graphes gonflés (cette classe de graphes sera définie dans le chapitre 3). D'abord, nous avons établi une borne supérieure du nombre de ve -domination d'un graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles $\ell(G)$ et de l'ordre $n(G)$, du graphe G , et nous avons donné une relation entre le nombre de transversal $\beta(G)$, et le nombre de ve -domination $\gamma_{ve}(G_I)$, du graphe gonflé G_I . Dans un second lieu nous avons donné une conditions nécessaire sur les graphes G pour que $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$. De plus nous avons fourni une caractérisation des graphes G dont le nombre de dominations est égale au nombre de ve -domination de G_I . Enfin, nous avons donné une borne inférieure sur le nombre de ve -domination supérieur $\Gamma_{ve}(G_I)$, d'un graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles de graphe G . De plus, nous avons établi une borne supérieure de nombre de ve -domination dans le graphe gonflé de la grille $G_{2,c} : c \geq 2$. Ainsi que pour le graphe gonflé de la grille $(G_{m,c}) : m, c \geq 3$.

Ce mémoires s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés le long de ce manuscrit et quelques futures perspectives.

Chapitre 1

Notions générales et terminologies

Ce chapitre est consacré aux concepts de base et terminologies de la théorie des graphes utilisés le long de ce mémoire. Nous donnons par la suite une vue historique sur la domination dans les graphes, où on présente quelques paramètres et quelques types, de domination avec leur application. Pour plus de détails sur la théorie des graphes, le lecteur peut se référer aux livres de Claude Berge [5] et Chartrand et Lesniak [6], et pour la domination ceux de Haynes et al. [7] et [8].

1.1 Notions de base

1.1.1 Définitions et notations

Un *graphe* $G = (V(G), E(G))$ est défini par deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$; où $V(G)$ est un ensemble de sommets fini et non vide, et $E(G)$ est un ensemble fini d'une famille de paires de sommets appelées arêtes. L'*ordre* de G est le nombre de ses sommets, noté par $n = |V(G)|$, et la *taille* de G est le nombre de ses arêtes, notée par $m = |E(G)|$. L'orsqu'il n'ya pas d'ambiguïté, nous notons simplement $G = (V, E)$.

Une *arête* e joignant deux sommets u et v notée par $e = uv$. Les sommets u et v sont appelés les extrémités de e . On dit que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et à v . Un graphe d'ordre 1 est dit trivial, sinon il est dit non-trivial.

Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues, notée $e = uu \in E$.

Un graphe G est *simple* s'il est sans boucles, et sans arêtes multiples (arêtes qui possèdent les mêmes extrémités). Dans la suite, nous considérons uniquement les graphes simples et non-triviaux.

A titre d'exemple d'un graphe, on considère le graphe G de la Figure 1.1, dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et l'ensembles des arêtes est : $\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$.

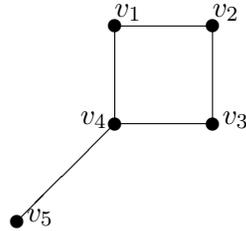


FIGURE 1.1 – Un graphe G d'ordre $n = 5$ et de taille $m = 5$.

Voisinage et degré

Pour un sommet v d'un graphe G , le *voisinage ouvert*, noté par $N_G(v)$, est défini par $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, et le *voisinage fermé*, noté par $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est défini par $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$, et le voisinage fermé de S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Le *voisinage privé* d'un sommet $v \in S$ par rapport à S , noté $pn[v, S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v , i.e, $pn[v, S] = \{u \in V(G) \text{ où } N_G[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le *degré* d'un sommet u dans un graphe G , noté par $d_G(u)$, est le nombre de sommets adjacents à u . On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum dans un graphe G , respectivement. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé*. Un sommet de degré un est dit *feuille* ou *pendant*, et son voisin est dit *support*.

Un sommet *support* est dit fort s'il est adjacent à au moins deux sommets *pendants*, sinon, il est dit faible. L'ensemble de sommets supports de G est noté par $S(G)$, et l'ensemble de sommets pendants de G est noté par $L(G)$. Aussi on note par $\ell(G) = |L(G)|$ et $s(G) = |S(G)|$. D'après la Figure 1.1, $\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1$ avec $d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = 2$ et

$d_G(v_4) = 3$. v_4 est un support faible et v_5 est un sommet pendent.

Chaînes, cycles

Une *chaîne* de longueur $k - 1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ tel que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ pour $i = 2, 3, \dots, k$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne.

Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est dite *simple*, et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*.

Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k , est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un *cycle*, noté C_k est une chaîne simple de longueur $k \geq 1$ dont lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues. Dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

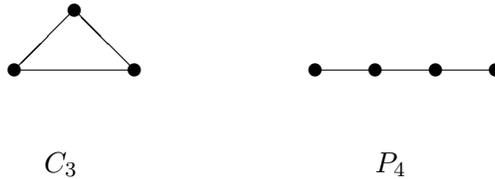


FIGURE 1.2 – Un cycle C_3 et une chaîne P_4 .

Distance et diamètre

La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . Le *diamètre* d'un graphe $G = (V, E)$, noté $diam(G)$, est la distance maximum entre deux sommets de G , c-à-d $diam(G) = \max_{u \in V} \{ \max(d(u, v)) : v \in V \}$.

Connexité

Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne qui les relie. Un graphe qui n'est pas connexe est dit dis-connexe ou non connexe. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Un sommet x d'un graphe G est un sommet *d'articulation* si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e, si G est connexe alors $G - x$ n'est pas connexe.

La notion connexe non-trivial est abrégée dans ce qui suit par cnt.

1.1.2 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Graphe partiel et sous-graphe

Le graphe H est appelé un *sous-graphe partiel* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, et il est appelé un *graphe partiel* du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G , le *sous-graphe* $H = (S, E)$ induit par S dans G ; noté par $G[S]$, est le sous graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.

Graphe k-régulier

Un graphe *k-régulier* est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k . Ainsi les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-réguliers.

Graphe complet

Un graphe *complet* d'ordre n , noté par K_n , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents, c'est à dire, G est $(n-1)$ -régulier. Comme illustration du concept, le graphe complet K_5 de la Figure 1.3.

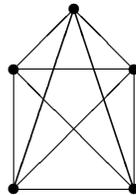


FIGURE 1.3 – Le graphe complet K_5 .

Graphe complémentaire

Le graphe *complémentaire* de $G = (V, E)$, noté par $\bar{G} = (V, \bar{E})$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G , et une arête existe dans \bar{G} si elle n'existe pas dans G . A titre d'exemple, le graphe G et son graphe complémentaire \bar{G} de la Figure 1.4.



FIGURE 1.4 – Un graphe G et son complémentaire \bar{G} .

Graphe multipart

Un graphe est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en $p \geq 2$ sous-ensembles, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $p = 2$, le graphe G est appelé biparti.

Un graphe est *biparti* si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires. Si un sommet appartenant à un sous ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres sous ensemble $V_{j:j \neq i}$ pour tout $i = \overline{1, p}$, alors le graphe G est appelé multiparti complet, et est noté par K_{k_1, k_2, \dots, k_p} avec $k_i = |V_i|$.

Des exemples, du graphe biparti G , et du graphe biparti complet $K_{2,3}$ sont représentés dans la Figure 1.5.



FIGURE 1.5 – Un graphe biparti G et un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Graphe cactus

Un *cactus* est un graphe connexe dans lequel chaque 2 cycles ont au plus un sommet en commun, i.e, chaque arête appartient à au plus un cycle simple.

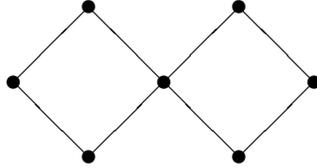


FIGURE 1.6 – Un graphe cactus.

Arbre

L'une des structures les plus simples d'un graphe connexe est connue sous le nom d'arbre. Une *arbre* est un graphe connexe sans cycle, et est noté par T . Comme cas particuliers des arbres on a :

L'*étoile*, est un graphe biparti complet, tel que $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$, et est notée par $K_{1,p}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile.

Une *étoile double*, notée par $S_{p,q}$, est l'arbre obtenu à partir de deux étoile $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ en ajoutant une arête relie les deux centres.

Une *étoile subdivisée*, notée par SS_p , est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p} : p \geq 1$, en subdivisant chacune de ses arêtes.

Une *chenille* $C(t_1, t_2, \dots, t_s)$ est un arbre dont la suppression de ses feuilles donne une chaîne u_1, u_2, \dots, u_s , où t_i est le nombre des feuilles adjacentes à u_i .

Une *forêt* est un graphe dont toutes ses composantes connexes sont des arbres.

A titre d'exemples, les arbres particuliers de la Figure 1.7 suivante. Notons que l'ensemble des arbres particuliers forme une forêt.

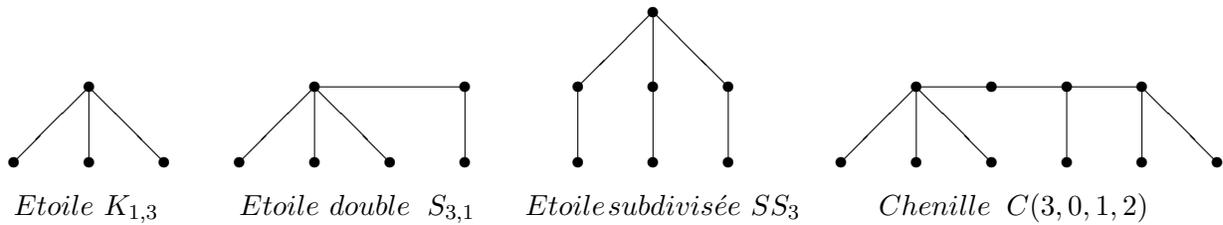


FIGURE 1.7 – Arbres particuliers.

Couronne de deux graphes

La *couronne* G de deux graphes G_1 et G_2 , comme c'est défini dans [9], est le graphe $G_1 \circ G_2$ obtenu à partir d'une copie de G_1 et $|V(G_1)|$ copies de G_2 où le i^{me} sommet de G_1 est adjacent à tous les sommets de la i^{me} copie de G_2 . A titre d'exemples, les deux graphes de la Figure 1.8.

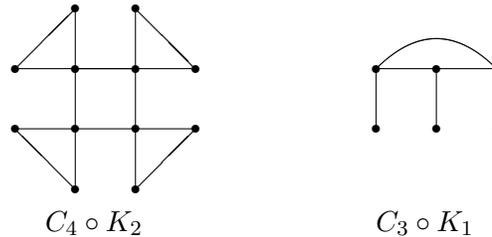


FIGURE 1.8 – Couronne de deux graphes.

1.1.3 Propriété des ensembles

Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{P} une propriété. Un sous ensemble S de V est dit *minimal* par rapport à la propriété \mathcal{P} si aucun sous ensemble strict de S ne vérifie cette propriété. Un sous ensemble S est dit *maximal* par rapport à la propriété \mathcal{P} , si aucun sous ensemble de V contenant S et différent de S ne vérifie la propriété \mathcal{P} .

Ensemble minimum et ensemble maximum

Un sous ensemble B de V est dit *minimum* ou de taille minimale par rapport à la propriété \mathcal{P} si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous ensemble de B) ne vérifie cette propriété. De même, l'ensemble B est dit *maximum* ou de taille maximale par rapport à \mathcal{P} , si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie \mathcal{P} .

1.1.4 Invariants de graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n .

Stable, clique

On appelle *stable* (*indépendant*) d'un graphe $G = (V, E)$ un sous-ensemble S de sommets de V deux à deux non adjacents. Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée nombre de stabilité ou nombre d'indépendance (resp. nombre d'indépendance inférieur) de G , noté par $\alpha(G)$ (resp. $i(G)$) .

Une *clique* K de G est un sous ensemble de sommet de V deux à deux adjacents.

Couplage

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes ; chaque sommet est donc incident à au plus une arête du couplage. La taille maximale d'un couplage dans G est noté par $\alpha'(G)$. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. Un couplage de G est dit *parfait* si tout sommet de G est incident à une arête du couplage, autrement dit si $\alpha'(G) = n/2$.

Transversal

Un sous-ensemble de sommets T d'un graphe G est un *transversal* si toute arête de G est incidente à au moins un sommet de T . On notera par $\beta(G)$ le cardinal minimum d'un transversal de G .

1.2 La domination dans les graphes

1.2.1 Vue historique et application de la domination

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{ème} siècle en Inde (voir [10]). En 1862, De jaenish [1] posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines R à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le

nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [11].

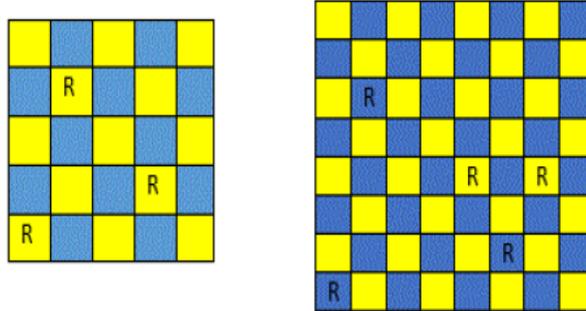


FIGURE 1.9 – Un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8 .

En 1958, Claude Berge [12] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [13] en 1962. La domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [3] en 1977. L'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est difficile au sens de la complexité algorithmique (Voir [4], [14]). Ainsi beaucoup d'axes de recherches ont vu le jour, par exemple : la détermination des bornes supérieures et des bornes inférieures, la recherche d'algorithmes polynomiaux, ..etc. Pour son application, considérons un réseau de communication constitué de stations fixes, et entre deux stations quelconques il peut exister une communication directe. Le problème posé est de sélectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec celles qui en possèdent.

1.2.2 Définitions et propriétés préliminaires

Définition 1.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant est un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D .

Un ensemble dominant D est dit minimal si aucun sous-ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Un dominant de cardinalité minimum est un dominant minimal l'inverse

est faux.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \geq 1$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $N(v) \cap S \neq \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le nombre de domination inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe G , noté par $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$ -ensemble. La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelé nombre de domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$. Un exemple d'un graphe illustratif de ce concept est le graphe G de la Figure 1.10.

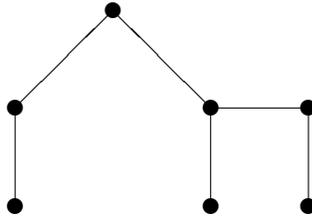


FIGURE 1.10 – Un graphe G avec $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 4$.

1.2.3 Quelques types de domination avec application

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement à quelques types de dominations.

Domination totale

En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi [15] introduisent le concept de domination totale. Un ensemble dominant est dit total s'il est sans sommets isolés, c'est à dire chaque sommet de l'ensemble possède au moins un autre voisin dans le même ensemble. Le cardinal

minimum d'un ensemble dominant total noté par $\gamma_t(G)$, est appelé le nombre de domination totale. Pour son application, on cite l'exemple suivant :

Considérons un groupe d'individus. On veut sélectionner parmi ces individus, un comité restreint tel que toute personne du groupe ait des affinités avec au moins un membre de ce comité. Si nous modélisons ce problème par un graphe G dont l'ensemble des sommets représente le groupe d'individus et deux sommets sont adjacents s'il y a affinités entre les personnes représentées. Alors le comité restreint sélectionné est un dominant total du graphe. A titre d'exemple du concept, le graphe G de la Figure 1.11.

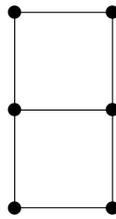


FIGURE 1.11 – Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 2$.

Domination couplée

La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater [16]. Un sous ensemble D de V est dit dominant couplé de G si D est dominant de G et si le sous graphe induit par D admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé. Comme exemple pratique, considérons un village au sein duquel on veut placer un groupe de vigiles qui assure la protection de ses voisins tout en s'assurant lui même une protection mutuelle avec un collègue. Le plus petit groupe de vigiles représente un ensemble dominant couplé minimum du graphe. Par exemple dans le graphe de la Figure 1.12, le nombre de domination couplée est $\gamma_{pr}(G) = 2$.

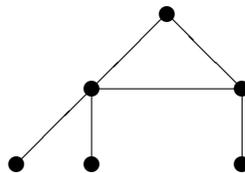


FIGURE 1.12 – Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 2$.

Domination double

Un ensemble dominant double est un ensemble dominant D de V tel que tout sommet de V est dominé au moins deux fois par D , c'est à dire tout sommet de D possède au moins un voisin dans D et tout sommet de $V - D$ possède au moins deux voisins dans D . Le nombre de domination double est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double, noté par $\gamma_{\times 2}(G)$. La domination double a été introduite en 2000 par Haray et Haynes [17].

Si nous reprenons l'exemple précédent, en spécifiant que tout villageois soit protégé par au moins deux vigiles et que chaque vigile soit lui même protégé par un des ses collègues, alors le plus petit groupe constitué est un ensemble dominant double minimum du graphe représentatif des habitants du village. Un exemple d'un graphe illustratif du concept est le graphe de la Figure 1.13, dont le nombre de domination double est $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

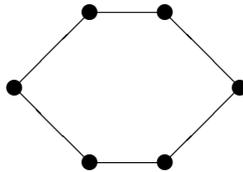


FIGURE 1.13 – Un graphe G avec $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

Chapitre 2

État de l'art sur la domination sommet-arête dans les graphes

Les deux concepts, domination sommet-arête et domination arête-sommet, abrégés *ve*-domination et *ev*-domination, respectivement, ont été introduits par Kenneth Peters en 1986 [18] dans sa thèse de PhD, dirigée par Renu Laskar à l'université de Clemson, intitulée "Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity", ensuite, J.R Lewis a réinsé l'étude de ces deux paramètres dans sa thèse de PhD dans [19]. Nous allons consacrer ce chapitre composé de deux sections 1 et 2, à l'étude du concept *ve*-domination. Dans la section 1, nous présentons quelques terminologies et définitions qui sont liées au concept de *ve*-dominations. Tandis que dans la section 2, nous présentons quelques résultats antérieurs liés à ce concept. Il convient de noter que les résultats existants sont loin de fournir des réponses à tous les problème ouverts dans ce contexte.

2.1 Terminologies et définitions

Nous commençons d'abord par introduire quelques définitions et terminologies nécessaires sur la *ve*-domination dans les graphes.

Définition 2.1 (*J.R. Lewis. [19]*). *On dit qu'un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ *ve*-domine l'arête $e \in E$ si :*

1. *e est incidente à u , ou*
2. *e est adjacente à une arête incidente à u .*

*En d'autres termes, un sommet u *ve*-domine toutes les arêtes incidentes à tout sommet dans*

$N_G[u]$.

Définition 2.2 (J.R. Lewis. [19]). Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un *ve-dominant* de G , si pour toute arête $e \in E$, il existe un sommet $v \in S$ tel que v *ve-domine* e . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve-dominant* de G est appelé le *nombre de ve-domination* de G , noté $\gamma_{ve}(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble *ve-dominant minimal* de G , appelé le *nombre de ve-domination supérieur* de G , et est noté par $\Gamma_{ve}(G)$.

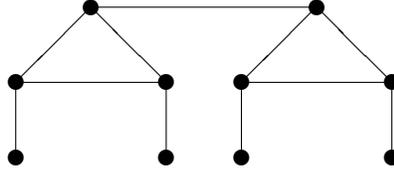


FIGURE 2.1 – Un graphe G avec $\gamma_{ve}(G) = 2$ et $\Gamma_{ve}(G) = 3$.

Définition 2.3 (J.R. Lewis. [19]). Un sommet $v \in S \subseteq V$ a une arête privée $e = uw \in E$ (relatif à l'ensemble S) si :

- 1 : v est incidente à e , ou
- 2 : v est adjacente à u ou w , et
- 3 : pour tout sommet $x \in S - \{v\}$, e n'est pas incidente à x et x n'est pas adjacent ni à u ou w .

En d'autres termes, v *ve-domine* l'arête e et aucun autre sommet de S ne *ve-domine* e .

Définition 2.4 (J.R. Lewis. [19]). Un sous ensemble S de V est dit *ve-dominant indépendant* de G , si S est un *ve-dominant* et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arêtes. Le *nombre de ve-domination indépendante* de G , $i_{ve}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble *ve-dominant indépendant* de G et le *nombre de ve-domination indépendante supérieur* $\beta_{ve}(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble *ve-dominant indépendant minimal* de G .

Définition 2.5 (J.R. Lewis. [19]). Un sous ensemble S de V est dit *ve-irrédondant* de G , si chaque sommet de S possède une arête privée. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un *ve-irrédondant maximal* de G noté $ir_{ve}(G)$ (resp. $IR_{ve}(G)$) est appelé le *nombre de ve-irrédondance* (resp. le *nombre de ve-irrédondance supérieur*).

Nous donnons la définition de la domination efficace qui été établie par Bange et al [20].

Définition 2.6 *Un ensemble de sommets S d'un graphe G est un dominant efficace de G si tout sommet de V est dominé exactement une seule fois par S .*

2.2 Quelques Résultats antérieurs

Nous commençons par la chaîne d'inégalité reliant les paramètres de ve -domination .

Théorème 2.7 *(J.R. Lewis et al. [21]). Pour tout graphe cnt G d'ordre n ,*

$$ir_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \beta_{ve}(G) \leq \Gamma_{ve}(G) \leq IR_{ve}(G) \leq n/2.$$

La comparaison entre la chaîne d'inégalité pour les paramètres de domination et la chaînes d'inégalité pour les paramètres de la ve -domination.

Théorème 2.8 *(J.R. Lewis et al. [21]). Pour tout graphe cnt G d'ordre n ,*

$$\begin{array}{cccccccc} ir(G) & \leq & \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \alpha(G) & \leq & \Gamma(G) & \leq & IR(G) \\ \hat{\vee} & & \vee & & \vee & & \vee & & \hat{\vee} & & \vee \\ ir_{ve}(G) & \leq & \gamma_{ve}(G) & \leq & i_{ve}(G) & \leq & \beta_{ve}(G) & \leq & \Gamma_{ve}(G) & \leq & IR_{ve}(G) \end{array}$$

Il convient de noter que les paramètres $ir(G)$ et $ir_{ve}(G)$ sont incomparables en générale de même pour $\Gamma(G)$ et $\Gamma_{ve}(G)$

Proposition 2.9 *(J.R. Lewis et al. [21]) . Comme tout ensemble dominant est un ve -ensemble dominant de G pour tout graphe cnt, donc $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma(G)$.*

Le résultat suivant fournit une classe de graphes G pour lesquels $\gamma_{ve}(G) = i_{ve}(G)$. Disons qu'un graphe G appartient à la famille \mathcal{G} si pour tout γ_{ve} -ensemble non indépendant S de G , il existe une paire de sommets adjacents u et v dans S telle que, sans perte de généralité, v a exactement une arête privée par rapport à S .

Théorème 2.10 *(J.R. Lewis et al.[21]). Pour tout graphe cnt $G \in \mathcal{G}$, $\gamma_{ve}(G) = i_{ve}(G)$.*

Dans les propositions suivantes, on donne la valeur du paramètre γ_{ve} pour quelques classes particulières de graphes.

Proposition 2.11 (*J.W. Peters. [18]*). Soit G un graphe cnt d'ordre n . Alors $\gamma_{ve}(G) = 1$ si et seulement s'il existe un sommet $v \in V$, tels que tout sommet de G est à distance inférieure ou égale à deux par rapport à v et si $Y = \{u \in V : d_G(u, v) = 2\}$, alors Y est un ensemble indépendant.

Proposition 2.12 (*J.W. Peters. [18]*)

- a) $\gamma_{ve}(K_n) = \gamma_{ve}(K_{n,m}) = \gamma_{ve}(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 1$.
- b) Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_{ve}(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$.
- c) Pour tout cycle C_n , $\gamma_{ve}(C_n) = \lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor$.

Proposition 2.13 (*J.R. Lewis et al. [21]*). Pour tout graphe grille $G_{2,c}$ avec $n = 2c$, $\gamma_{ve}(G_{2,c}) = \lceil \frac{c}{3} \rceil = \lceil \frac{n}{6} \rceil$.

Preuve. C'est un exercice simple de montrer que la formule est valable pour $c \leq 6$. Par conséquent, supposons que $c \geq 7$. Soit S un γ_{ve} -ensemble de $G_{2,c}$. Noter que $G_{2,c}$ a $3c - 2$ arêtes. Afin de ve -dominer les arêtes de la fin, S doit contenir au moins un sommet de la colonne 1 ou 2 et au moins un de la colonne $c-1$ ou c . Chaque sommet des colonnes 1, 2, $c-1$ et c peut ve -dominer au plus 8 arêtes, et tout autre sommet peut ve -dominer au plus 9 arêtes. Ainsi, $|S| - 2$ sommets doivent ve -dominer au moins $3c - 18$ arêtes et donc

$$|S| - 2 \geq \frac{3c - 18}{9} = \frac{3(\frac{n}{2}) - 18}{9} = \lceil \frac{n}{6} \rceil - 2.$$

Ainsi $\gamma_{ve}(G_{2,c}) = |S| \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil$.

Pour voir que $\gamma_{ve}(G_{2,c}) \leq \lceil \frac{n}{6} \rceil$, soit $S = \{a_{1,6i+2}, a_{2,6j+5} | 0 \leq i \leq \lfloor \frac{c-2}{6} \rfloor \text{ et } 0 \leq j \leq \lfloor \frac{c-5}{6} \rfloor\}$. Si $c \equiv 0, 2 \pmod{3}$, sinon soit $S = \{a_{1,6i+2}, a_{2,6j+5}, a_{1,c} | 0 \leq i \leq \lfloor \frac{c-2}{6} \rfloor \text{ et } 0 \leq j \leq \lfloor \frac{c-5}{6} \rfloor\}$. ■

Peters [18] a établi aussi une borne supérieure sur $\gamma_{ve}(G)$ en fonction de degré maximum Δ et de degré minimum δ :

Proposition 2.14 (*J.W. Peters. [18]*). Pour tout graphe cnt G , de degré maximum Δ et de degré minimum δ ,

$$\gamma_{ve}(G) \leq n - \Delta - \frac{\Delta(\delta-1)}{2} + 1.$$

Pour un graphe G d'ordre maximum $\Delta = \Delta(G)$ et de taille m , la Proposition 2.15 donne une borne inférieure pour $\gamma_{ve}(G)$ en fonction de Δ .

Proposition 2.15 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Si G est un graphe d'ordre m et de degré maximum Δ , alors*

$$\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{m}{\Delta^2} \rceil.$$

Ainsi, pour les graphes k -réguliers, on a :

Corollaire 2.16 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Si G est un graphe k -régulier, alors*

$$\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{n}{2k} \rceil.$$

Rappelons qu'un graphe 3-régulier est appelé un graphe cubique.

Corollaire 2.17 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Pour tout graphe cubique, $\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil$.*

Soit $\Psi(G)$ le cardinal maximum des sommets d'un ensemble $S \subseteq V$ qui ne contient pas une enclave (une enclave est un sommet $v \in S$ tel que $N[v] \subseteq S$). Par cette définition, on a immédiatement les deux résultats suivants.

Proposition 2.18 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Pour tout graphe d'ordre G , $\Gamma_{ve}(G) \leq \Psi(G)$.*

En 2017, X.Chen et al. [23] ont répondu sur la question posée par R.Boutrig et al. [25], par une nouvelle relation entre le nombre supérieur de non-enclavement et le nombre de ve -domination indépendante.

Théorème 2.19 (*X.Chen et al. [23]*). *Soit G un graphe connexe avec $\Delta(G) \geq 3$. Alors*

$$\Psi(G) + \frac{2}{\Delta(G) - 1} (i_{ve}(G) - 1) \leq n - 1.$$

Une comparaison entre les paramètres de domination et les paramètres de ve -domination a été faite par J.R. Lewis et al. [21].

Théorème 2.20 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Pour tout graphe G ,*

1. $i_{ve}(G) \leq i(G)$.
2. $\beta_{ve}(G) \leq \alpha(G)$.

3. $IR_{ve}(G) \leq IR(G)$.

4. $IR_{ve}(G) \leq \alpha'(G) \leq n/2$.

Théorème 2.21 (*J.R. Lewis et al. [21]*). Soit G tout graphe cnt. Alors le complément $V - S$ de tout ensemble minimal ve-dominant est un ensemble ve-dominant. En fait, le complément $V - S$ de tout ensemble minimal ve-dominant est un ensemble dominant.

Corollaire 2.22 (*J.R. Lewis et al. [21]*). Pour tout graphe ntc G , $\Gamma_{ve}(G) + \gamma(G) \leq n$.

Proposition 2.23 (*J.R. Lewis et al. [21]*). Soit G un graphe cnt. Alors le complément $S - V$ de tout ensemble dominant minimal S est un ensemble ve-dominant.

Corollaire 2.24 (*J.R. Lewis et al. [21]*). Pour tout graphe ntc G , $\Gamma(G) + \gamma_{ve}(G) \leq n$.

D'autres résultats ont été établis par R. Boutrig et al. [24, 25, 26], sont donnés dans ce qui suit.

Théorème 2.25 (*R. Boutrig et M. Chellali. [24]*). Pour tout graphe cnt biparti G ,

$$\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \frac{\gamma_i(G)}{2}.$$

Théorème 2.26 (*R. Boutrig et al. [25]*). Soit G un graphe connexe d'ordre n . Alors $IR(G) + i_{ve}(G) \leq n$, avec égalité si et seulement si G est une étoile.

Théorème 2.27 (*R. Boutrig et al. [25]*). Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et sans C_5 , alors $\gamma_{ve}(G) \leq \frac{n}{3}$.

Corollaire 2.28 (*R. Boutrig et al. [25]*). Si G est un graphe biparti d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq \frac{n}{3}$.

Corollaire 2.29 (*B. Krishnakumari et al. [26]*). Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(T) \leq \frac{n}{3}$.

Observons que la condition "sans C_5 " est nécessaire pour l'énoncé du Théorème 2.27. Pour un exemple simple, on considère le cycle C_5 pour lequel $\gamma_{ve}(C_5) = 2 > 5/3$. Cependant, ceci est le seul exemple du graphe que les auteurs de [25] ont trouvé pour lequel la borne du Théorème 2.27 n'est pas vérifiée.

Ils ont laissé comme un problème ouvert, soit de prouver que le Théorème 2.27 est vrai pour tous les graphes cnt d'ordre $n \geq 6$, ou bien de donner une famille de graphes comme un contre-exemple.

Théorème 2.30 (*R.Boutrig. [22]*). *Si G est un graphe connexe tel que $3 \leq \Delta(G) \leq 5$, alors $i_{ve}(G) \leq \frac{\Delta(G)}{2}\gamma_{ve}(G)$.*

Corollaire 2.31 (*R.Boutrig. [22]*). *Pour tout graphe 3-régulier G , $i_{ve}(G) \leq \frac{3}{2}\gamma_{ve}(G)$.*

P. Zylinski a répondu sur la conjecture proposé par R. Boutrig et al. [25] par le théorème suivant :

Théorème 2.32 (*P.Zylinski. [27]*). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 6$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*

Théorème 2.33 (*R.Boutrig et al. [25]*). *Si G est un graphe cnt sans sous-graphe induit isomorphe à $K_{1,k}$ pour $k \geq 3$, alors $i_{ve}(G) \leq (k-2)\gamma_{ve}(G) - (k-3)$.*

Comme conséquence du Théorème 2.33, nous considérons le corollaire suivant.

Corollaire 2.34 (*R.Boutrig et al. [25]*). *Si G est un graphe sans $K_{1,3}$ cnt, alors $\gamma_{ve}(G) = i_{ve}(G)$.*

Proposition 2.35 (*R.Boutrig et al. [25]*). *Si G un graphe cnt d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) < n/2$.*

Théorème 2.36 (*W.F. Klostermeyer et al. [28]*). *Si G un graphe cubique, alors $\gamma_{ve}(G) \leq 9n \setminus 26$.*

2.2.1 La ve -domination dans les arbres

Lewis et al.[21] se sont intéressés à caractériser les arbres T tels que $\gamma_{ve}(T) = \gamma(T)$, où la caractérisation est à la fois descriptive et constructive. Soit \mathcal{F} la famille des arbres T qui peuvent être obtenus à partir de l'union de $k \geq 1$ étoiles d'ordres au moins trois en ajoutant $(k-1)$ arêtes joignant les feuilles des étoiles.

La caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de ve -domination et le nombre de domination sont égaux est obtenue dans [21] par le théorème suivant.

Théorème 2.37 (*J.R. Lewis et al. [21]*). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\gamma_{ve}(T) = \gamma(T)$.
2. T a un ensemble dominant efficace S , dont chaque sommet de S est un sommet support de T .
3. $T \in \mathcal{F}$.

On considérant que si T est un arbre non trivial d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{ve}(T)$ est borné inférieurement par $(n - \ell - s + 3)/4$. Dans le but de caractériser les arbres atteignant cette borne, soit la famille \mathcal{O} d'arbres $T = T_k$ qui peut être obtenue comme suit.

Soit T_1 une chaîne P_5 . Si k est un entier positif, alors T_{k+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_k par l'une des opérations suivantes :

- Opération \mathcal{O}_1 : attacher un sommet en le joignant à n'importe quel sommet support de T_k .
- Opération \mathcal{O}_2 : Attacher une chaîne P_2 en joignant l'un de ses sommets à un sommet de T_k qui n'est pas une feuille et qui est adjacent à un sommet de support de degré deux.
- Opération \mathcal{O}_3 : Attacher une chaîne P_4 en joignant une de ses feuilles à une feuille de T_k adjacente à un sommet support faible.

Théorème 2.38 (*B. Krishnakumari et al. [26]*). *Si T est un arbre non trivial d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{ve}(T) \geq (n - \ell - s + 3)/4$ avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{O}$.*

On considèrent que si T est un arbre non trivial d'ordre n avec ℓ feuilles, alors $\gamma_{ve}(T)$ est borné inférieurement par $(\gamma_t(T) - \ell + 1)/2$. Dans le but de caractériser les arbres atteignant cette borne, considérant la famille \mathcal{N} d'arbres $T = T_k$ qui peut être obtenue comme suit. Soit

$T_1 = P_5$. Si k est un entier positif, alors T_{k+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_k par l'une des opérations suivantes.

- Opération \mathcal{N}_1 : Attacher une chaîne P_2 en joignant l'un de ses sommets à un sommet de T_k adjacent à une chaîne P_2 .
- Opération \mathcal{N}_2 : Attacher une chaîne P_4 en joignant une de ses feuilles à une feuille de T_k dont le sommet support est faible.

Théorème 2.39 (Y. B. Venkatakrisnan et al. [29]). *Si T est un arbre avec ℓ feuilles, alors $\gamma_{ve}(T) \geq (\gamma_t(T) - \ell + 1)/2$ avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{N}$.*

Une borne supérieure de $\gamma_{ve}(T)$ par $(\gamma_t(T) + \ell - 2)/2$ a été fournie par Y. B. Venkatakrisnan et al. [29]. Dans le but de caractériser les arbres atteignant cette borne, soit la famille \mathcal{H} des arbres $T = T_k$ qui peut être obtenue comme suit. Soit $T_1 \in \{P_2, P_3, P_4\}$. Si k est un entier positif, alors T_{k+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_k par l'opération \mathcal{N}_2 . Il est facile de voir que \mathcal{H} consiste en chaînes P_n où $n \neq 4k + 1$ pour k entier positif.

Théorème 2.40 (Y. B. Venkatakrisnan et al. [29]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec ℓ feuilles, alors $\gamma_{ve}(T) \leq (\gamma_t(T) + \ell - 2)/2$ avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{H}$.*

Théorème 2.41 (R. Boutrig et al. [25]). *Pour tout arbre non trivial T ,*

$$\gamma_{ve}(T) \leq i_{ve}(T) \leq \gamma(T).$$

Il convient de noter que le nombre de domination peut être plus petit ou plus grand que le nombre supérieur de ve -domination indépendante, même pour les arbres. En effet, pour la chaîne P_9 , on peut voir que $\gamma(P_9) = 3 < \beta_{ve}(P_9) = 4$, alors que pour l'arbre T illustré dans la Figure 2.2, on a $\gamma(T) = 8 > \beta_{ve}(T) = 7$.

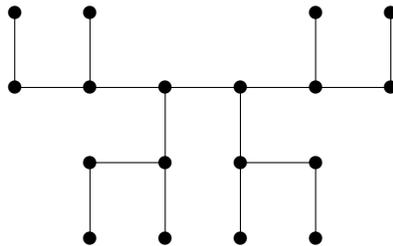


FIGURE 2.2 – Un arbre T avec $\gamma(T) = 8$ et $\beta_{ve}(T) = 7$.

Chapitre 3

Contribution à l'étude de la ve-domination dans les graphes gonflés

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent, à l'étude du concept de *ve*-domination dans les graphes. Dans ce chapitre qui représente notre contribution, on s'intéresse au concept de *ve*-domination dans la classe de graphes gonflés. D'autres paramètres de domination ont été étudiés dans cette classe de graphe à savoir la domination totale par M.A. Henning et A.P. Kazemib [30] et la domination couplée par L. Kang et al. [31]. Pour un graphe gonflé G_I , d'un graphe G , on a établi des bornes en terme des caractéristiques du graphe G , tels que le nombre de sommets support, le nombre de feuilles et l'ordre du graphe, où en terme d'autres paramètres de domination de G . Ainsi de caractériser les graphes extrémaux atteignant certaines bornes.

Le travail présenté dans ce chapitre a été réalisé en collaboration avec M^{me} Meddah.

3.1 Terminologies et définitions

Avant d'aller plus loin, nous devons d'abord introduire certaines terminologies qui seront utiles par la suite. Pour les notations des graphes gonflés, nous suivons [32]. L'inflation ou graphe gonflé G_I d'un graphe G sans sommets isolés est obtenu comme suit : chaque sommet x_i de degré $d(x_i)$ de G est remplacé par une clique $X_i \cong K_{d(x_i)}$ et chaque arête $x_i x_j$ dans G est remplacée par une arête uv de telle sorte que $u \in X_i, v \in X_j$, et deux arêtes différentes de G sont remplacées par des arêtes non adjacentes de G_I . Il existe deux types d'arêtes dans

G_I . Les arêtes de la clique X_i qui sont colorées en rouge et les X_i sont appelées cliques rouges (une clique rouge X_i est réduite à un sommet si x_i est une feuille de G). Les autres, qui correspondent aux arêtes de G , sont colorés en bleu et forment un couplage parfait dans G_I . Chaque sommet de G_I appartient à exactement une clique rouge et est incident avec exactement une arête bleue. Pour des raisons de simplicité, nous désignons l'ensemble des sommets d'une clique rouge X_i par X_i . Un exemple illustratif de ce concept, le graphe gonflé G_I du graphe G , de la Figure 3.1.

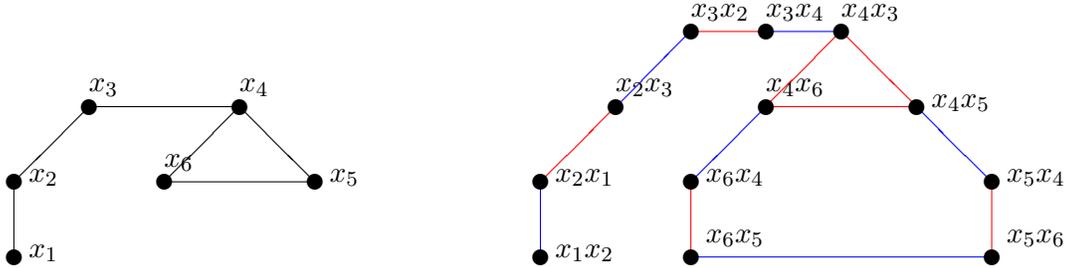


FIGURE 3.1 – Un graphe G et son graphe gonflé G_I .

Suivant la notation de Kang et al. [31], si x_i et x_j sont deux sommets adjacents de G , alors les extrémités de l'arête bleue dans G_I remplaçant l'arête $x_i x_j$ de G , sont $x_i x_j \in X_i$ et $x_j x_i \in X_j$. Par définition, chaque feuille de G correspond à une feuille de G_I et chaque sommet support $x_j x_i$ de la clique X_j dans le graphe G_I n'est adjacent qu'aux autres sommets de la clique X_j et à la feuille unique $x_i x_j$ qui lui est adjacente dans G_I (où x_i est une feuille adjacente au sommet support x_j dans G). Une conséquence évidente de la définition est que $n(G_I) = \sum_{x_i \in V(G)} d_G(x_i) = 2m(G)$, $\delta(G_I) = \delta(G)$ et $\Delta(G_I) = \Delta(G)$.

Soit T un arbre non trivial. Si nous remplaçons chaque arête de T par deux arêtes multiples et que nous subdivisons ensuite chaque arête, nous appelons le graphe résultant un C_4 -cactus.

3.2 Résultats principaux

Notre objectif dans cette section est d'étudier la ve -domination dans les graphes gonflés. Nous commençons notre étude par le premier théorème qui consiste à établir une borne supérieure du nombre de ve -domination d'un graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles $\ell(G)$ et de l'ordre $n(G)$, du graphe G .

Théorème 3.1 Soit G un graphe cnt d'ordre $n(G) \geq 3$ avec $\ell(G)$ feuilles. Donc $\gamma_{ve}(G_I) \leq n(G) - \ell(G)$, avec égalité si et seulement si chaque sommet dans G est une feuille ou un sommet support.

Preuve. Si $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors soit x_j un sommet de $V(G)$, différent d'une feuille. Soient encore $x_j x_t \in X_j$ et $S_j = \{x_j x_t\}$. Il est clair que, dans le graphe G_I , S_j *ve*-domine toutes les arêtes de la clique rouge X_j , ainsi que les arêtes bleues incidentes à X_j . En particulier, si x_j est un sommet support avec une feuille x_i , alors l'arête pendante $(x_i x_j, x_j x_i)$ est *ve*-dominée par S_j . Par conséquent l'ensemble $D = \bigcup_{j=1}^{n(G)-\ell(G)} S_j$ est un *ve*-dominant de G_I .
D'où

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}(G_I) &\leq |D| \\ &= \left| \bigcup_{j=1}^{n(G)-\ell(G)} S_j \right| \\ &= n(G) - \ell(G). \end{aligned}$$

Supposons que $\gamma_{ve}(G_I) = |D| = n(G) - \ell(G)$. Soit x_k un sommet de G . Supposons que x_k n'est ni une feuille ni un sommet support dans G . Pour $i \in \{1, \dots, d(x_k)\}$, soit $x_i \in N_G(x_k)$. Comme $\gamma_{ve}(G_I) = n(G) - \ell(G)$, alors D contient un sommet de la clique X_i , disons $x_i x_k$ pour $i \in \{1, d(x_k)\}$, et un sommet de la clique X_k , disons $x_k x_j$ pour un $j \in \{1, \dots, d(x_k)\}$. Par conséquent toutes les arêtes de la clique X_k seront *ve*-dominées par l'ensemble $D - \{x_k x_j\}$. Ceci implique que $\gamma_{ve}(G_I) \leq |D - \{x_k x_j\}| = n(G) - \ell(G) - 1 < n(G) - \ell(G)$, contradiction. Donc G est un graphe dont chaque sommet est une feuille ou un sommet support.

Inversement, supposons que chaque sommet dans G est une feuille ou un sommet support. Soient $S(G)$ l'ensemble de sommets support de G et D un $\gamma_{ve}(G_I)$ -ensemble. Dans le graphe G_I , il est clair que pour *ve*-dominer toutes les arêtes pendantes ainsi que toutes les arêtes des cliques rouges correspondantes aux sommets support $x_i \in S(G) : i = \overline{1, |S(G)|}$, l'ensemble D contient au moins un sommet de chaque clique X_i . Par conséquent $|S(G)| \leq \gamma_{ve}(G_I) \leq n(G) - \ell(G) = |S(G)|$. D'où $\gamma_{ve}(G_I) = n(G) - \ell(G) = |S(G)|$. ■

Une relation entre le nombre de transversal $\beta(G)$, du graphe G , et le nombre de *ve*-domination, $\gamma_{ve}(G_I)$, du graphe gonflé G_I , est donnée par le Théorème 3.2 suivant.

Théorème 3.2 Si G est un graphe cnt, alors $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G)$.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ où $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit S un $\gamma_{ve}(G_I)$ -ensemble contenant de chaque clique rouge au plus un sommet. Soit aussi (V_0, V_1) une partition de V , où $V_0 = \{x_i \in V \mid |S \cap X_i| = 0\}$, $V_1 = \{x_i \in V \mid |S \cap X_i| = 1\}$. Pour $i = 0, 1$, notons $n_i = |V_i|$, et donc $n = n_0 + n_1$ et $|S| = n_1$. Il est clair que dans un graphe G cnt on a toujours $n_0 \neq 0$ et $n_1 \neq 0$. Soit x un sommet d'une clique rouge qui ne contient aucun sommet de S . Alors, $x = x_i x_j$ pour certains entiers i et j . Notons que $S \cap X_i = \emptyset$. Par conséquent, chaque arête de la clique rouge X_i qui ne contient aucun sommet de S est ve -dominée par au moins un sommet d'une clique rouge voisine contenant exactement un sommet de S . En particulier, on note que V_0 est un ensemble indépendant dans G (sinon S ne sera pas un ve -dominant dans G_I). Alors l'ensemble V_1 est un transversal dans G . Ceci implique que $\beta(G) \leq |V_1| = n_1 = \gamma_{ve}(G_I)$. D'où le résultat désiré $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G)$. ■

Corollaire 3.3 *Si G est un graphe cnt, alors $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) \geq \alpha'(G) \geq \gamma(G)$.*

Remarque 3.4 *Il est clair d'après la chaîne d'inégalité $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) \geq \alpha'(G) \geq \gamma(G)$, que si G est un graphe cnt avec $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$, alors $\beta(G) = \gamma(G)$. Mais la réciproque de cette condition nécessaire n'est pas vraie en général. A titre d'exemple le graphe biparti $K_{2,3}$ pour lequel l'ensemble dominant est un transversal de cardinal $\beta(G) = \gamma(G) = 2$, mais $\gamma_{ve}((K_{2,3})_I) = 3$. Ceci signifie que la famille $\mathcal{C}_{\gamma=\beta}$, des graphes bipartis dont le nombre de transversal est égal au nombre de domination, caractérisée par A. Lingas et al. [37], est différentes des graphes bipartis, pour lesquels $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$.*

Puisque $\gamma(G) \geq \gamma_{ve}(G)$ pour tout graphe G cnt, il s'ensuit que :

Corollaire 3.5 *Si G est un graphe cnt, alors $\gamma_{ve}(G_I) \geq \gamma_{ve}(G)$, et cette borne est atteinte pour les étoiles $K_{1,t}$.*

Ainsi, on établit une condition nécessaire sur les graphes G pour que $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$. Pour cela, nous présentons quelques définitions supplémentaires qui nous seront utiles dans la preuve de notre résultat. Pour un couplage M dans G , de taille $\alpha'(G)$, définissons $\phi_L(G)$ comme l'ensemble des feuilles de G qui ne sont pas saturées par M dans G . Définissons également $\phi_{\geq 2}(G)$ comme étant l'ensemble des sommets de degré au moins 2 qui ne sont pas saturés par M dans G . Soient $\phi_L = |\phi_L(G)|$ et $\phi_{\geq 2} = |\phi_{\geq 2}(G)|$.

Théorème 3.6 *Soit G un graphe cnt. Si $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$, alors $\beta(G) = \gamma(G)$ et G contient un couplage maximum M de cardinalité $\gamma(G)$ qui sature tous les sommets de degré au moins 2 (i-e $\phi_{\geq 2} = 0$).*

Preuve. Soit D un $\gamma_{ve}(G_I)$ -ensemble contenant au plus un sommet de chaque clique rouge, sauf les cliques pendantes, s'ils en existent. Si $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$, alors d'après le Corollaire 3.3, on a $\gamma_{ve}(G_I) = \beta(G) = \alpha'(G) = \gamma(G)$. Soit $D' = \{x_j \in V(G) \mid x_j x_i \in D\}$. Il est clair que $|D'| = |D|$. Par le même argument utilisé dans la preuve du Théorème 3.2, il est clair que D' est un ensemble à la fois dominant minimum et transversal minimum, dans G . De plus, il existe, dans G , un couplage maximum, reliant D' à $V - D'$ de cardinal $\gamma(G)$. Parmi tous ces couplages maximums, nous choisissons M , un couplage qui maximise ϕ_L , et dont une extrémité de chaque arête est dans le $\beta(G)$ -ensemble. Supposons que le couplage M ne sature pas tous les sommets de degré au moins 2, i-e $\phi_{\geq 2} \neq 0$. Et soit x_k un sommet de G de degré au moins 2, non saturé par M . Si on considère la correspondance inverse de D' (dans G) à D (dans G_I), alors les arêtes de la clique rouge X_k ne seront pas toutes ve -dominées par D , contradiction avec D un $\gamma_{ve}(G_I)$ -ensemble. ■

La réciproque de ce résultat n'est pas vrai en général. A titre d'exemple le graphe biparti G , de la Figure 3.2, où on a $\beta(G) = \gamma(G) = 3$, et G contient un couplage maximum M de cardinalité $\gamma(G)$ avec $\phi_{\geq 2} = 0$, mais $\gamma_{ve}(G_I) = 4$.

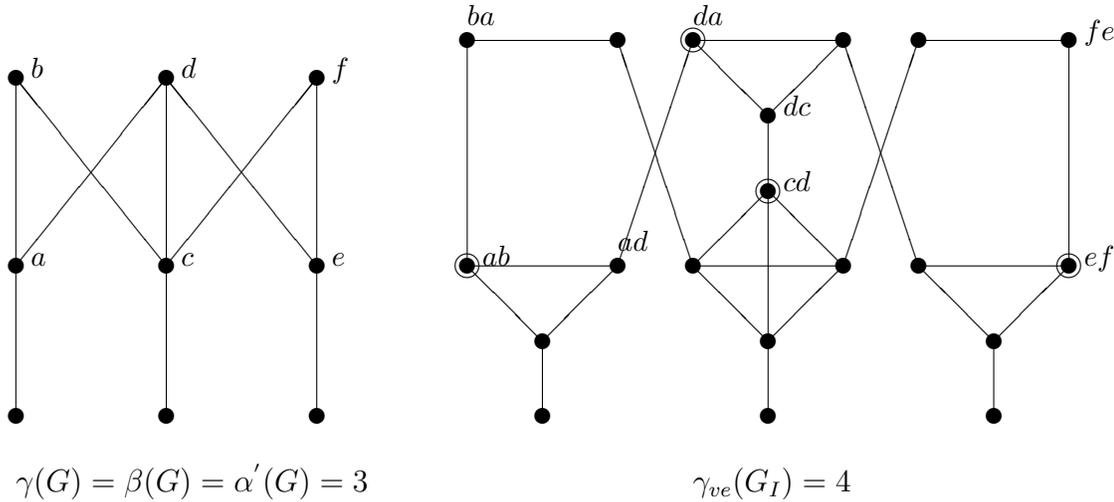


FIGURE 3.2 – Un graphe biparti G et son graphe gonflé G_I .

Dans ce qui suit, on s'intéresse à caractériser les graphes G dont le nombre de domination est égal au nombre de ve -domination de G_I . Pour cela on donne un ensemble de résultats antérieurs pour les graphes où on a le nombre de domination est égal au nombre du transversal.

Proposition 3.7 (L. Volkmann [33]) *Si G est un graphe connexe avec $\gamma(G) = \beta(G)$, alors $\delta(G) \leq 2$.*

Corollaire 3.8 *Si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(G_I) > \gamma(G)$.*

Preuve. D'après la Proposition 3.7, on a si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 3$, alors $\gamma(G) < \beta(G)$ et donc $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) > \gamma(G)$. ■

Théorème 3.9 (L. Volkmann [34]) *Si G est un graphe cnt avec $\delta(G) = 2$, alors $\gamma(G) = \beta(G)$ si et seulement si G est biparti sachant que pour chaque pair de sommets x et y appartenant à la plus petite partie de G , et qui sont à distance 2, il existe **au moins deux** voisins communs de x et y de degré 2.*

Corollaire 3.10 *Si G est un graphe cnt avec $\delta(G) = 2$, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$ si et seulement si $G = C_4$.*

Preuve. Soit G un graphe cnt avec $\delta(G) = 2$ et $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$. D'après le Théorème 3.9, $G = ((A, B), E(G))$ est un graphe biparti avec $1 \leq |A| \leq |B|$. Soient x et y deux sommets à distance 2 appartenant à A . Supposons que $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des voisins communs de x et y de degré 2 dans B . Soit M un couplage maximum de cardinal $\gamma(G)$, alors d'après le Théorème 3.6, un des trois sommets, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, serait non saturé par le couplage maximum M de cardinal $\gamma(G)$, i-e $\phi_{\geq 2} \neq 0$, ce qui implique que $\gamma_{ve}(G_I) > \gamma(G)$.

Si de plus, il existe z qui est dans A avec $d_G(x, z) = 2$, alors, d'après la discussion précédente, il existe deux sommets $\bar{x} \neq \bar{y}$ et \bar{z} dans B tels que $N_G(\bar{x}) = N_G(\bar{z}) = \{x, z\}$. De même que précédemment, un des deux sommets, \bar{x} ou \bar{y} , sera non saturé par le couplage maximum M de cardinal $\gamma(G)$, i-e $\phi_{\geq 2} \neq 0$, ce qui implique que $\gamma_{ve}(G_I) > \gamma(G)$. Par conséquent $G = C_4$.

Inversement, si $G = C_4$, alors il est évident que $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I) = 2$. ■

Notre prochain objectif est de caractériser les arbres cnt avec $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$. Pour cela, nous devons rappeler le résultat de base dû à L. Volkmann [35], Stracke [36]. Ainsi, nous présentons quelques définitions supplémentaires qui nous seront utiles dans les deux caractérisations données par les deux Corollaires 3.12 et 3.14. Soit G^* l'ensemble des sommets d'un graphe G qui ne sont ni des feuilles ni des supports dans G . Aussi, soit $T(S(G), G^*)$ l'ensemble des arêtes reliant les sommets support de G , aux sommets de G^* .

Théorème 3.11 (L. Volkmann [35], Stracke [36]) *Soit G un arbre d'ordre $n \geq 2$. Alors $\gamma(G) = \beta(G)$ si et seulement si :*

1. $G^* = \emptyset$, ou
2. chaque composante de G^* est un sommet isolé, ou
3. une étoile, où les centres de ces étoiles ne sont pas adjacents à un sommet support.

Corollaire 3.12 Soit G un arbre d'ordre $n \geq 2$. Si G possède s sommets support, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$ si et seulement si :

1. $G^* = \emptyset$, ou
2. chaque composante de G^* est un sommet isolé, ou
3. une étoile, où les centres de ces étoiles ne sont pas adjacents à un sommet support.

Preuve. Soit D un $\gamma(G)$ -ensemble et soit $S(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ l'ensemble des sommets support de G . La condition suffisante du Corollaire 3.12 est simple à vérifier si $G^* = \emptyset$ (item 1), car ceci signifie que G est une forêt dont chaque composante est une chenille $C(t_1, \dots, t_{s'})$ avec $s' \leq s$ et $t_i \geq 1$. Donc $\gamma(G) = |S(G)| = \gamma_{ve}(G_I) = s$.

Soient $S_1(G)$ et $S_2(G)$ une partition de l'ensemble de sommets support de G , où $S_1(G)$ est le sous-ensemble de sommets support qui sont reliés à au moins un sommet de G^* et $S_2(G) = S(G) - S_1(G)$.

Supposons maintenant que G^* vérifié l'item 2, i-e G^* contient m sommets isolé a_i : $i = \overline{1, m}$. D'après le Théorème 3.11, $\gamma(G) = \beta(G) = s$ avec $D = S(G)$. Considérant la correspondance entre D dans G , et D' dans G_I , avec $D' = D_1 \cup D_2$ où :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_j a_i \mid x_j \in S_1(G) \text{ et } (x_j, a_i) \in E(G) : i \in \{1, \dots, m\}\}, \\ D_2 &= \{x_j x_i \mid x_j \in S_2(G) \text{ et } (x_j, x_i) \in E(\langle S(G) \rangle)\}. \end{aligned}$$

Il est clair que toutes les arêtes des m cliques rouges dans G_I , correspondantes aux m sommets isolés dans G^* , ainsi que les cliques correspondantes aux s sommets support, et les arêtes pendantes de G_I , seront ve -dominées par l'ensemble D' de cardinal s . D'où $\gamma_{ve}(G_I) \leq |D'| = \gamma(G)$. Comme $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) = \gamma(G)$, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$.

Finalement, supposons que G^* vérifié l'item 3, i-e G^* contient m étoiles, R_i avec des centres a_i et des feuilles $y_j^i : j = \overline{1, L(a_i)}$ dans G^* . Alors d'après le Théorème 3.11, $\gamma(G) = \beta(G) = |D|$ avec $D = S(G) \cup \{a_1, \dots, a_m\}$. Dans le graphe gonflé G_I , considérant toujours la correspondance entre D et D' de G_I , avec $D' = D_1 \cup D_2 \cup D_a$ où :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_j y_k^i \mid x_j \in S_1(G), (x_j, y_k^i) \in T(S(G), G^*) \text{ et } y_k^i \in L(a_i) \text{ pour un } i \in \{1, \dots, m\}\}, \\ D_2 &= \{x_j x_i \mid x_j \in S_2(G) \text{ et } (x_j, x_i) \in E(\langle S(G) \rangle)\}, \\ D_a &= \{a_i y_j^i : i = \overline{1, m} \text{ pour un } j \in \{1, \dots, |L(a_i)|\}\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $|D'| = |S_1(G)| + |S_2(G)| + m = s + m$. Aussi, il est clair que toutes les arêtes des m cliques rouges A_i dans G_I , correspondantes aux m centres a_i , ainsi que toutes les arêtes bleues incidentes à la clique A_i , sont ve -dominées par l'ensemble des sommets D_a .

Les arêtes des cliques rouges correspondantes aux feuilles, des m étoiles R_i dans G^* , ainsi que les cliques correspondantes aux sommets support et les arêtes pendantes de G_I , sont ve -dominées dans G_I , par l'ensemble des sommets de $D_1 \cup D_2$. Par conséquent D' est un ve -dominant de G_I , d'où $\gamma_{ve}(G_I) \leq |D'| = \gamma(G)$. Et comme $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) = \gamma(G)$, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$.

Pour la réciproque, supposons G est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$. Il est clair que si aucun des trois items : 1), 2) et 3) n'est vérifié, alors d'après le Théorème 3.11, $\gamma(G) < \beta(G) \leq \gamma_{ve}(G_I)$, contradiction. D'où les trois items sont vérifiés. ■

Ainsi, on s'intéresse à caractériser les graphes cnt avec $\gamma(G) = \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$ et $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$. Cette caractérisation est donnée par le Corollaire 3.14. Pour cela, nous rappelons le résultat de base dû à B. Randerath, L. Volkmann [34], suivant.

Théorème 3.13 (B. Randerath, L. Volkmann [34]) *Soit G un graphe cnt avec $\gamma(G) = \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$ et $\beta(G) = \gamma(G)$. Si G possède s sommets support et ℓ feuilles, alors les cas suivants sont possibles :*

- a) *Si $n(G)$ est pair, alors $G = C_4$ ou $G = H \circ K_1$ pour un graphe connexe H .*
- b) *Si $n(G)$ est impair et $\delta(G) = 2$, alors G est un C_4 -cactus graphe, constitué de deux cycles ou G est un C_4 avec un autre sommet adjacent à deux sommets non adjacents du C_4 , c'est-à-dire le graphe biparti complet $K_{2,3}$.*
- c) *Si $n(G)$ est impair et $\delta(G) = 1$, alors les cinq cas suivants sont possibles :*
 - 1) $s = \ell - 1$ et $G^* = \emptyset$.
 - 2) $s = \ell$ et G^* est un sommet isolé.
 - 3) $s = \ell$ et G^* est une étoile d'ordre trois.
 - 4) $s = \ell$ et G^* est un graphe biparti d'ordre 5, $\gamma(G^*) = \beta(G^*) = \delta(G^*) = 2$ et le sous-graphe induit par les sommets de G^* qui ne sont pas adjacent à un sommet support, est un C_4 .
 - 5) $s = \ell$ et G^* est un graphe biparti avec un sommet pendant u , qui est un sommet d'articulation de G , et $G^{*'} = G^* - u = C_4$.

Corollaire 3.14 Soit G un graphe cnt avec $\gamma(G) = \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor$ et $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$. Si G possède s sommets support et ℓ feuilles, alors les cas suivants sont possibles :

- a) Si $n(G)$ est pair, alors $G = C_4$ ou $G = H \circ K_1$ pour un graphe connexe H .
- b) Si $n(G)$ est impair et $\delta(G) = 1$, alors les quatres cas suivants sont possibles :
 - 1) $s = \ell - 1$ et $G^* = \emptyset$.
 - 2) $s = \ell$ et G^* est un sommet isolé.
 - 3) $s = \ell$ et G^* est une étoile d'ordre trois.
 - 4) $s = \ell$ et G^* est un graphe biparti avec un sommet pendant u , qui est un sommet d'articulation de G , et $G^{*'} = G^* - u = C_4$.

Preuve. Soient D un $\gamma(G)$ -ensemble, et $S(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ l'ensemble des sommets support de G . La condition suffisante du Corollaire 3.14 est simple à vérifier pour l'item a), i-e $n(G)$ est pair, et donc $G = C_4$ ou $G = H \circ K_1$ pour un graphe connexe H . Où on a $\gamma_{ve}((C_4)_I) = \gamma(C_4) = 2 = \frac{n(C_4)}{2}$ et

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ve}((H \circ K_1)_I) &= \gamma(H \circ K_1) \\
 &= |V(H)| \\
 &= |S(H \circ K_1)| \\
 &= \frac{n(H \circ K_1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Aussi, pour l'item b,1). Si $n(G)$ est impair et $\delta(G) = 1$, et donc $G^* = \emptyset$, car ceci signifie que G est une couronne $H \circ K_1$ pour un graphe connexe H , où on rajoute une feuille à un sommet support. Donc $\gamma(G) = |S(G)| = \gamma_{ve}(G_I) = s$.

Pour les deux items b,2) et b,3), le principe de démonstration est identique à celui utilisé dans la preuve de la suffisance du Corollaire 3.12, pour les des deux items 2) et 3).

Ainsi, pour l'item b,4), supposons que $s = \ell$ et G^* est un graphe biparti $((A, B), E(G^*))$ d'ordre 5, avec un sommet pendant u , qui est un sommet d'articulation de G , et $G^{*'} = G^* - u = C_4$. Donc le graphe G^* est un cycle C_4 , où l'un des quatre sommets est relié à un sommet u , qui est relié lui même à au moins un sommet support de G .

Supposons maintenant que $C_4 = G^{*'} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ où y_1 est le support de G^* dont la feuille est le sommet u . Considérant $A = \{y_1, y_3\}$ et $B = \{u, y_2, y_4\}$ comme partition de $V(G^*)$. Il est clair donc que $D = A \cup S(G)$ est à la fois un ensemble, dominant minimum et transversal minimum de G avec $\gamma(G) = \beta(G) = \lfloor \frac{n(G)}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2s+5}{2} \rfloor = s + 2 = |D|$.

Nous considérons la partition de $S(G)$ en deux sous-ensembles $S_1(G)$ et $S_2(G)$, où $S_1(G)$ est le sous-ensemble de sommets support qui sont reliés au sommet u et $S_2(G) = S(G) - S_1(G)$.

Dans le graphe gonflé G_I , considérant la correspondance entre D dans G et D' dans G_I , avec $D' = D_1 \cup D_2 \cup D_y$ où :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x_j u \mid x_j \in S_1(G), (x_j, u) \in T(S(G), G^*)\}, \\ D_2 &= \{x_j x_i \mid x_j \in S_2(G) \text{ et } (x_j, x_i) \in E(\langle S(G) \rangle)\}, \\ D_y &= \{y_1 y_2, y_3 y_4 : y_1 y_2 \in Y_1 \text{ et } y_3 y_4 \in Y_3\}. \end{aligned}$$

Il est clair que toutes les arêtes de la clique rouge U , ainsi que les arêtes des cliques X_j correspondantes aux sommets supports, et les arêtes bleues incidentes à X_j , seront ve -dominées par $D_1 \cup D_2$. Le reste des arêtes de $(G^*)_I$ dans G_I , seront ve -dominées par D_y . Donc l'ensemble D' est un ve -dominant de G_I . D'où

$$\gamma_{ve}(G_I) \leq |D'| = s + 2 = \left\lfloor \frac{2s + 5}{2} \right\rfloor = \gamma(G) = \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor.$$

Et comme $\gamma_{ve}(G_I) \geq \beta(G) = \gamma(G) = \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I) = \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$.

■

D'autres résultats, donnés par les Corollaires 3.16 et 3.17, sont dû au Théorème 3.15 suivant :

Théorème 3.15 (L. Volkmann [35]) *Pour un graphe G , r -régulier avec $r > 0$, on a $\gamma(G) = \beta(G)$ si et seulement si $G = K_2$ ou $G = C_4$.*

Corollaire 3.16 *Pour un graphe G , r -régulier avec $1 \leq r \leq 2$, on a $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G) = \frac{n(G)}{2}$ si et seulement si $G = K_2$ ou $G = C_4$. Pour $r > 3$, on a $\gamma_{ve}(G_I) > \gamma(G)$.*

Corollaire 3.17 *Si G est un graphe cnt avec $\delta(G) = 2$, alors $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$ si et seulement si $G = C_4$.*

Proposition 3.18 (B. Randerath, L. Volkmann [34]) *Soit G un C_4 -cactus cnt avec la partition des sommets A et B . Si $|A| \leq |B|$, alors $|A| = \gamma(G) = \beta(G)$ et $|B| = 2|A| - 2$.*

Corollaire 3.19 *Le graphe $G = C_4$ est l'unique graphe C_4 -cactus avec $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G_I)$.*

Preuve. Soit G un C_4 -cactus cnt avec la partition des sommets A et B . Si $|A| \leq |B|$, alors d'après la Proposition 3.18, on a $|A| = \gamma(G) = \beta(G)$ et $|B| = 2|A| - 2$. Et d'après le Théorème 3.6 on a $|B| = |A|$ pour ne pas avoir des sommets de degré au moins 2 non saturés par le couplage maximum, ceci implique forcément que $|B| = |A| = 2$. Par conséquent $G = C_4$. On note que si $|A| \geq 3$, alors $|B| > |A|$, et donc le couplage maximum ne sature pas tous les sommets de degré au moins deux. Donc $\gamma_{ve}(G_I) > \gamma(G)$. ■

D'après le Théorème de König-Egeváry, il est connu que pour tout graphe G d'ordre n , $\beta(G) + \alpha(G) = n(G)$. Une autre conséquence du Théorème 3.2, est donnée par le Corollaire 3.20 suivant :

Corollaire 3.20 *Si G est un graphe cnt d'ordre $n(G)$, alors $\gamma_{ve}(G_I) + \alpha(G) \geq n(G)$.*

Pour un graphe G cnt où $\delta(G) = 1$, on a $\gamma(G) \geq s(G)$. Sachant que $\gamma(G) = s(G)$ si et seulement chaque sommet de G est un support où adjacent à un support. A partir du Théorème 3.6 précédent, on déduit une autre conséquence donnée par le Corollaire 3.21 suivant.

Corollaire 3.21 *Si G est un graphe cnt où $\delta(G) = 1$, alors $\gamma_{ve}(G_I) \geq s(G)$, et cette borne est atteinte pour $G = C(t_1, \dots, t_s)$, une chenille de s supports.*

Dans le théorème suivant, on établit une nouvelle borne inférieure du nombre de ve -domination supérieur $\Gamma_{ve}(G_I)$, d'un graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles de graphe G . Pour cela, on considère la famille $\mathcal{N}(H)$ des graphes dont tout sommet est une feuille ou un support, sachant que deux supports forts ne soient pas adjacents. Rappelons que si G est une couronne $H \circ K_1$ d'un graphe connexe H , alors ceci signifie que chaque sommet de G est une feuille ou un sommet support faible. Notons que $H \circ K_1 \in \mathcal{N}(H)$. Comme exemple d'un graphe de la famille $\mathcal{N}(H)$, on considère le graphe de la Figure 3.3 suivante.

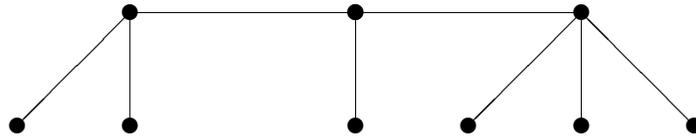


FIGURE 3.3 – Un graphe de la famille $\mathcal{N}(H)$.

Ainsi, une nouvelle borne inférieure pour le nombre de ve -domination supérieur, $\Gamma_{ve}(G_I)$, dans un graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles $\ell(G)$ dans le graphe G , est donnée

par le Théorème 3.22. Aussi une caractérisation descriptive de la famille $\mathcal{N}(H)$ des graphes G dont la borne du Théorème 3.22 est atteinte a été établie.

Théorème 3.22 *Soit G un graphe avec $\delta(G) = 1$. Si G ne contient pas deux supports forts adjacents, alors $\Gamma_{ve}(G_I) \geq \ell(G)$, avec égalité si et seulement si G est une étoile $K_{1,p} : p \geq 2$, ou $G \in \mathcal{N}(H)$ pour quelques graphes connexes H .*

Preuve. Soient D un $\Gamma_{ve}(G_I)$ -ensemble et x_k un sommet support de G . Si G est une étoile de centre x_k , alors pour ve -dominer toutes les arêtes de la clique rouge X_k , ainsi que les arêtes pendantes attachées à la clique X_k , il suffit de prendre, dans D , tous les sommets pendants de type $x_j x_k$ pour tout $x_j \in L(x_k)$, où on a $\Gamma_{ve}(G_I) = |D| = \ell(G)$.

Supposons maintenant que G est différente d'une étoile. Si G contient deux supports adjacents, disons x_t et x_k . Soient $x_i \in L(x_t)$ et $x_j \in L(x_k)$, respectivement. Puisque G ne contient pas deux supports forts adjacents, alors, au moins l'un des deux supports x_t ou x_k est faible. Sans perte de généralité, supposons que x_t est faible. De même que précédemment, pour ve -dominer toutes les arêtes des deux cliques rouges X_k et X_t , ainsi que les arêtes pendantes attachées aux deux cliques X_k et X_t , il suffit de prendre, dans D , les sommets pendants de types $x_j x_k$ pour tout $x_j \in L(x_k)$ et le sommet $x_i x_t$. Et pour ve -dominer l'arête bleue $(x_t x_k, x_k x_t)$, il suffit de remplacer le sommet $x_i x_t$ dans D par le sommet $x_t x_i$. Donc pour chaque feuille de G , il correspond un seul sommet dans D . Par conséquent $\Gamma_{ve}(G_I) = |D| \geq \ell(G)$.

Maintenant, si G ne contient pas de supports adjacents. Alors il existe au moins un sommet $x_r \in N_G(x_k)$, de degré au moins 2, qui n'est ni feuille ni support dans G . Donc, il est clair que pour ve -dominer les arêtes de la clique rouge X_k , ainsi que les arêtes pendantes attachées à la clique X_k , il suffit de prendre, dans D , les sommets pendants de type $x_j x_k$ pour tout $x_j \in L(x_k)$. Aussi pour ve -dominer les arêtes de la clique rouge X_r , ainsi que les arêtes bleues incidentes à X_r , il suffit de prendre un sommet de la clique rouge X_r . Par conséquent $\Gamma_{ve}(G_I) = |D| \geq \ell(G) + 1 > \ell(G)$. Par conséquent, à chaque feuille de G correspond un sommet unique dans G_I qui appartient à D . Ainsi, le résultat désiré $\Gamma_{ve}(G_I) = |D| \geq \ell(G)$.

Supposons maintenant que $\Gamma_{ve}(G_I) = \ell(G)$. Donc D est composé entièrement de ces $\ell(G)$ sommets pendants dans le graphe G_I , qui ve -dominent toutes les arêtes de G_I . Supposons que G n'est ni une étoile $K_{1,p} : p \geq 2$, ni un graphe de $\mathcal{N}(H)$. Par conséquent G contient au moins deux sommets adjacents x_t et x_k , de degré au moins 2. Puisque G n'appartient pas à la famille $\mathcal{N}(H)$, et que pour chaque feuille de G , il correspond un seul sommet dans D , nous pouvons donc discuter deux situations :

- x_t et x_k ne sont pas des sommets supports dans G : Pour ve -dominer toutes les arêtes des deux cliques rouges X_t et X_k , ainsi que les arêtes bleues incidentes aux deux cliques X_t et X_k , l'ensemble D contient au moins un sommet des deux cliques X_t ou X_k . Par conséquent $\Gamma_{ve}(G_I) \geq \ell(G) + 1 > \ell(G)$, contradiction.

- x_k est un support et x_t n'est pas support : De même que précédemment, pour ve -dominer toutes les arêtes de la clique rouge X_t ainsi que les arêtes bleues incidentes à la clique X_t , l'ensemble D contient au moins un sommet de la clique X_t . Par conséquent $\Gamma_{ve}(G_I) \geq \ell(G) + 1 > \ell(G)$, contradiction.

Inversement, si G est une étoile $K_{1,p}$: $p \geq 2$, ou G est un graphe de la famille $\mathcal{N}(H)$, alors en utilisant le principe de la preuve de cette borne, décrit ci-dessus, on aura $\Gamma_{ve}(G_I) = \ell(G)$.

■

Remarque 3.23 *Le résultat du Théorème 3.22, ne peut être généralisé pour tout graphe. A titre d'exemple, le graphe $G = S_{p,q}$ où $2 \leq p \leq q$, pour lequel on a, $\Gamma_{ve}(G_I) = q + 1 < \ell(G) = p + q$.*

3.2.1 Relations de type Nordhauss-Gaddum

Théorème 3.24 *Si G est un graphe cnt avec $\delta(G) = 1$ et $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(\overline{G}) = 1$*

Preuve. Soit x_i une feuille dans le graphe G . Soit D un $\gamma_{ve}(\overline{G})$ -ensemble. Il est clair que le sommet x_i dans le graphe complémentaire \overline{G} du graphe G , est un ensemble ve -dominant de \overline{G} . Par conséquent $\gamma_{ve}(\overline{G}) = |D| = 1$. ■

Puisque $\delta(G_I) = \delta(G) = 1$, alors la conséquence suivante est évidente :

Corollaire 3.25 *Si G est un graphe cnt avec $\delta(G) = 1$ et $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(\overline{G_I}) = 1$.*

Comme conséquence directe du Théorème 3.1 et du Corollaire 3.25, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.26 *Si G est un graphe cnt d'ordre $n(G) \geq 3$ avec $\ell(G)$ feuilles, et $\delta(G) = 1$, alors :*

$$\begin{cases} \gamma_{ve}(G_I) + \gamma_{ve}(\overline{G_I}) \leq n(G) - \ell(G) + 1, \text{ et} \\ \gamma_{ve}(G_I) \times \gamma_{ve}(\overline{G_I}) \leq n(G) - \ell(G). \end{cases}$$

Théorème 3.27 Soit G un graphe cnt d'ordre $n(G) \geq 3$ et \overline{G} son graphe complémentaire, avec $\delta(G) = 1$, alors :

$$\begin{cases} \gamma_{ve}(G) + \gamma_{ve}(\overline{G}) \leq \frac{n(G)}{2} + 1, \text{ et} \\ \gamma_{ve}(G) \times \gamma_{ve}(\overline{G}) \leq \frac{n(G)}{2}. \end{cases}$$

Preuve. Vérifions d'abord la borne supérieure sur la somme. Soit G un graphe cnt avec $\delta(G) = 1$ et $n \geq 3$. Sachant que $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma(G)$, et d'après le Théorème d'Ore, pour un graphe sans sommets isolés on a $\gamma(G) \leq \frac{n(G)}{2}$, et ceci implique que $\gamma_{ve}(G) \leq \frac{n(G)}{2}$. D'autre part, d'après le Théorème 3.24, on a $\gamma_{ve}(\overline{G}) = 1$, d'où le résultat désiré.

Vérifions maintenant la borne supérieure pour le produit. Par les mêmes arguments utilisés précédemment, $\gamma_{ve}(\overline{G}) = 1$ et $\gamma_{ve}(G) \leq \frac{n(G)}{2}$, la borne est vérifiée. ■

Il est clair pour un graphe gonflé G_I d'un graphe G de taille $m(G)$, qu'on a $n(G_I) = 2m(G)$. Alors à partir du Théorème 3.27 on déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.28 Soit G un graphe cnt, avec $n(G) \geq 3$ et $\delta(G) = 1$, alors

$$\begin{cases} \gamma_{ve}(G_I) + \gamma_{ve}(\overline{G_I}) \leq m(G) + 1, \text{ et} \\ \gamma_{ve}(G_I) \times \gamma_{ve}(\overline{G_I}) \leq m(G). \end{cases}$$

3.2.2 Grilles gonflées

Dans ce qui suit, nous établissons une nouvelle borne supérieure du nombre de védomination dans le graphe gonflé de la grille $G_{2,c} : c \geq 2$, noté par $(G_{2,c})_I$. Ainsi que pour le graphe gonflé de la grille $G_{m,c} : m, c \geq 3$, notée par $(G_{m,c})_I$. Pour cela, nous rappelons le résultat suivant :

Théorème 3.29 (J.W.Peters [18]) Si $G = P_n$, alors $\gamma_{ve}(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$.

Soit $G_{2,c}$ une grille d'ordre $2c$. Il est clair que $V(G_{2,c}) = \{x_1, x_2, \dots, x_c\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_c\}$ et $E(G_{2,c}) = \{(x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}) : i = \overline{1, c-1}\} \cup \{(x_i, y_i) : i = \overline{1, c}\}$. Notons le graphe gonflé de la grille $G_{2,c}$, par $(G_{2,c})_I$.

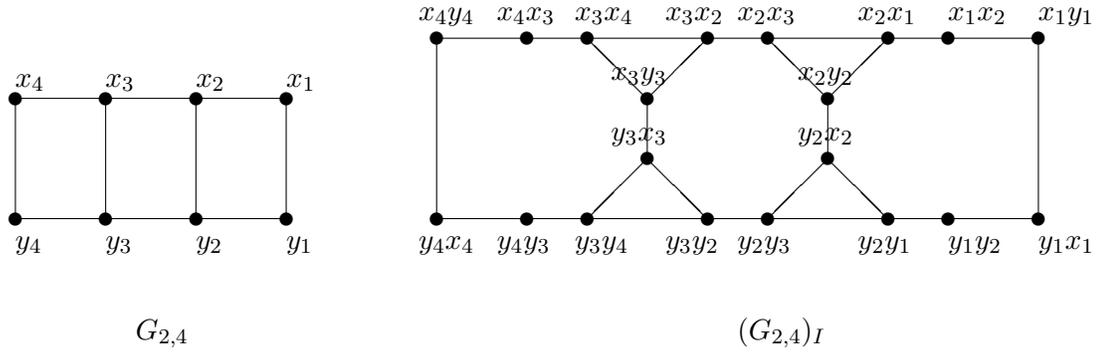


FIGURE 3.4 – La grille $G_{2,4}$ et la grille gonflée $(G_{2,4})_I$.

Processus de marquage des sommets :

Dans le graphe gonflé $(G_{2,c})_I$, considérant le cycle de contour de $(G_{2,c})_I$, qui ne passe pas par les sommets de type x_iy_i et y_ix_i pour $i = \overline{2, c-1}$. La longueur de ce cycle est donc égale à $4c$. Nous commençons le processus de marquage par le sommet x_2x_1 et considérons le sommet suivant à distance 3 par rapport à x_2x_1 le long de ce cycle, et ainsi de suite pour le reste de sommets jusqu'aux sommet de la clique X_{c-1} ou X_c , dont on choisit la distance 4 et non pas 3, pour avoir l'une des trois situations suivantes à la fin du marquage de la moitié supérieure du cycle C_{4c} .

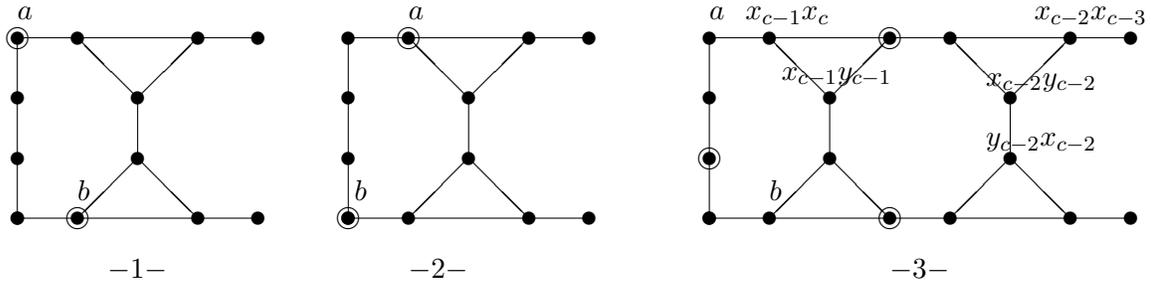


FIGURE 3.5 – Les trois situations du processus de marquage.

Il est clair qu'on peut fusionner les deux sommets a et b en un seul sommet et supprimer les sommets entre a et b , sans influencer la ve -domination des sommets suivants le long de cycle C_{4c} , on réserve dans l'espace mémoire un sommet. Et en faisant le marquage à nouveau à distance 3 à partir des points fusionnes. Remarquons que dans la situation -3- du processus du maquage, l'arête $(x_{c-2}y_{c-2}, y_{c-2}x_{c-2})$ n'est pas ve -dominée par les sommets marqués. En décalant le sommet de départ dans le processus de marquage de la position x_2x_1 à la position x_2x_3 , pour revenir vers la fin à la situations -2-. Donc on résout le problème, même pour d'autres arêtes non ve -dominées qui sont à la même position que l'arête $(x_{c-2}y_{c-2}, y_{c-2}x_{c-2})$ (s'il en existe). On répète cette opération de fusionner deux autres sommets l'orsqu'on arrive par le processus de marquage à la clique Y_2 ou Y_1 , où on fait le marquage à distance 4. En réservant dans l'espace mémoire un deuxièmes sommets. Notons le graphe gonflé après le

fusionnement par $(G_{2,c})_{IF}$ et l'ensemble des sommets marqués le long de cycle par S .

Un exemple illustratif du processus de marquage pour une grille gonflée $(G_{2,6})_I$, pour lequel on passe dans le processus du marquage de la situation -3- à la situation -2- pour ve -dominer l'arête en pointillés (voir la Figure 3.6 suivante).

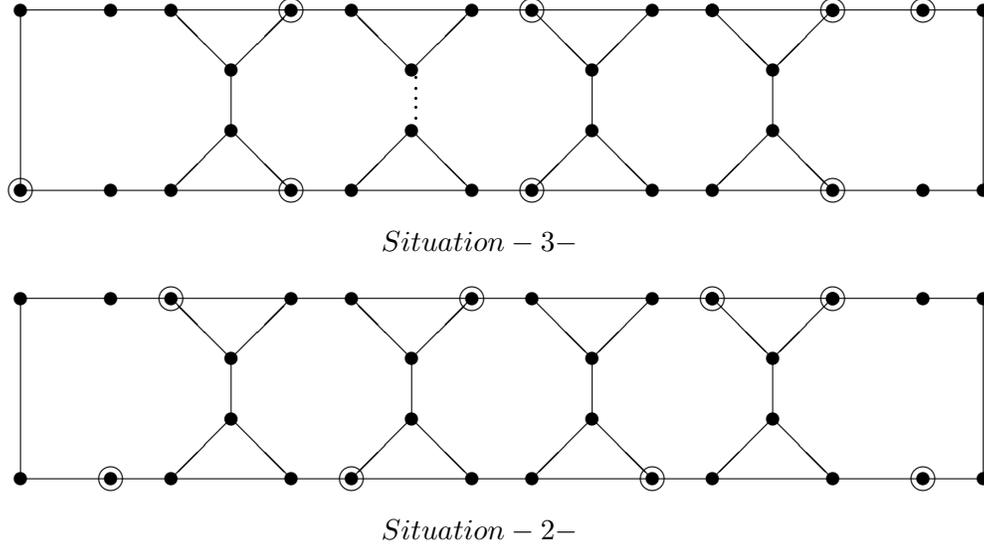


FIGURE 3.6 – Processus de marquage pour $(G_{2,6})_I$.

On établit ainsi le résultat suivant :

Théorème 3.30 *Pour toute grille $G_{2,c}$ d'ordre $2c$, on a $\gamma_{ve}(G_{2,c})_I \leq \lceil \frac{4c-2}{3} \rceil$.*

Preuve. Soit $G_{2,c}$ une grille d'ordre $2c$. En appliquant le processus de marquage décrit au dessus, on forme un ensemble de sommets marqués qu'on le note par S . Il est clair que S , qui est de cardinal $\lceil \frac{4(c-2)}{3} \rceil$, est un ensemble ve -dominant le graphe $(G_{2,c})_{IF}$. Et si on rajoute à S les deux sommets déjà stockés dans l'espace mémoire, on construit alors un ensemble ve -dominant minimal pour le graphe $(G_{2,c})_I$. D'où le résultat :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ve}((G_{2,c})_I) &\leq \gamma_{ve}((G_{2,c})_{IF}) + 2 \\
 &\leq \left\lceil \frac{4(c-2)}{3} \right\rceil + 2 \\
 &= \left\lceil \frac{4c-2}{3} \right\rceil
 \end{aligned}$$

Donc $\gamma_{ve}(G_{2,c})_I \leq \lceil \frac{4c-2}{3} \rceil$. ■

Conjecture 3.1 *Pour toute grille $G_{2,c}$ d'ordre $2c$, on a $\gamma_{ve}(G_{2,c})_I = \lceil \frac{4c-2}{3} \rceil$.*

Soit maintenant la grille $G_{3,c}$ d'ordre $3c$. Il est clair que $V(G_{3,c}) = \{x_1, x_2, \dots, x_c\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_c\} \cup \{z_1, z_2, \dots, z_c\}$ et $E(G_{3,c}) = \{(x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}), (z_i, z_{i+1}) : i = \overline{1, c-1}\} \cup \{(x_i, y_i), (y_i, z_i) : i = \overline{1, c}\}$. Notons le graphe gonflé de la grille $G_{3,c}$, par $(G_{3,c})_I$.

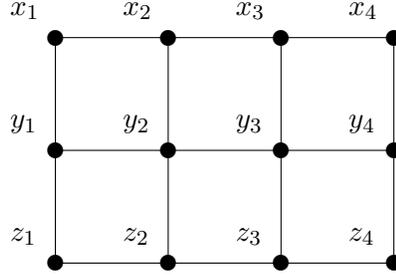


FIGURE 3.7 – Une grille $G_{3,4}$.

Théorème 3.31 *Pour toute grille $G_{3,c}$ d'ordre $3c$, on a $\gamma_{ve}((G_{3,c})_I) \leq \lfloor \frac{5c-1}{2} \rfloor$.*

Preuve. Soit $G_{3,c}$ une grille d'ordre $3c$. Soit $(G_{3,c})_I$ le graphe gonflé de $G_{3,c}$. Dans le graphe $(G_{3,c})_I$, nous considérons la chaîne $P' = \{z_{i+1}z_i, z_{i+1}z_{i+2} : i = \overline{1, c-2}\}$ d'ordre $2c-4$. Si D est un $\gamma_{ve}(P')$ -ensemble, alors d'après le Théorème 3.29, $\gamma_{ve}(P') = |D| = \lfloor \frac{2c-4+2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{c-1}{2} \rfloor$. Il est clair que l'ensemble de sommets $\{y_1x_1, z_1y_1, y_cx_c, z_cy_c\} \cup (\bigcup_{i=2}^{c-1} \{x_iy_i, y_iz_i\}) \cup D$ est un ve -dominant de graphe $(G_{3,c})_I$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((G_{3,c})_I) &\leq \left| \{y_1x_1, z_1y_1, y_cx_c, z_cy_c\} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{c-1} \{x_iy_i, y_iz_i\} \right) \cup D \right| \\ &= 4 + 2(c-2) + \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \\ &= 2c + \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{5c-1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré $\gamma_{ve}((G_{3,c})_I) \leq \lfloor \frac{5c-1}{2} \rfloor$. ■

Le résultat suivant est une généralisation du Théorème 3.31, pour une grille $G_{m,c}$. Soit $G_{m,c}$ une grille d'ordre mc avec $m \geq 3$. Soit $(G_{m,c})_I$ le graphe gonflé du graphe $G_{m,c}$. Notons $V(G_{m,c}) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^c \{a_i^j\}$ et $E(G_{m,c}) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{c-1} \{a_i^j a_i^{j+1}\} \cup \bigcup_{j=1}^c \bigcup_{i=1}^{m-1} \{a_i^j a_{i+1}^j\}$. (voir la Figure 3.8).

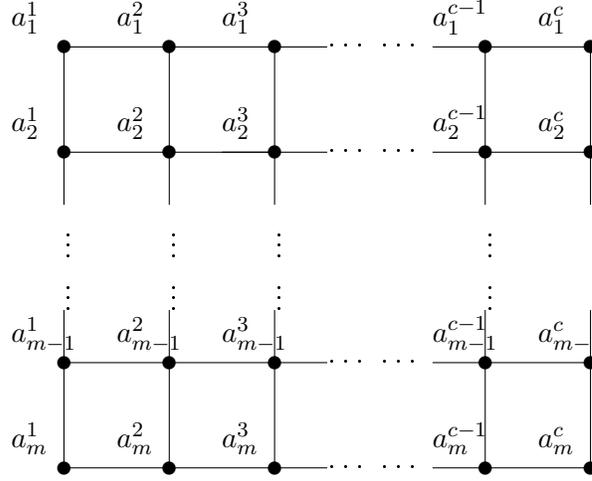


FIGURE 3.8 – Une grille $G_{m,c}$

Théorème 3.32 *Pour toute grille $G_{m,c}$ d'ordre mc , on a $\gamma_{ve}((G_{m,c})_I) \leq \left\lfloor \frac{(2m-1)c-1}{2} \right\rfloor$.*

Preuve. Soit $G_{m,c}$ une grille d'ordre mc . Soit $(G_{m,c})_I$ le graphe gonflé du graphe $G_{m,c}$. Dans le graphe $(G_{m,c})_I$, nous considérons le sous-ensemble de sommets marqués :

$$A' = \bigcup_{i=1}^{m-1} \bigcup_{j=2}^{c-1} \{a_{i+1}^1 a_i^1, a_i^j a_{i+1}^j, a_{i+1}^c a_i^c\}.$$

Il est clair que $|A'| = (m-1)c$. Aussi, considérons la chaîne $P' = \{a_m^{j+1} a_m^j, a_m^{j+1} a_m^{j+2} : j = \overline{1, c-2}\}$ d'ordre $2c-4$. De même que précédemment, si D est un $\gamma_{ve}(P')$ -ensemble, alors d'après le Théorème 3.29, $\gamma_{ve}(P') = |D| = \left\lfloor \frac{2c-4+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor$.

Il est clair que l'ensemble des sommets $A' \cup D$ est un ve -dominant de graphe $(G_{m,c})_I$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \gamma_{ve}((G_{m,c})_I) &\leq |A' \cup D| \\ &= (m-1)c + \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{(2m-1)c-1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré $\gamma_{ve}((G_{m,c})_I) \leq \left\lfloor \frac{(2m-1)c-1}{2} \right\rfloor$. ■

Remarque 3.33 *Il est à remarquer que la borne $\left\lceil \frac{4c-2}{3} \right\rceil$ établie dans le Théorème 3.30 pour la grille gonflée $(G_{2,c})_I$, est meilleure que $\left\lfloor \frac{(2m-1)c-1}{2} \right\rfloor_{m=2} = \left\lfloor \frac{3c-1}{2} \right\rfloor$, établie par le Théorème 3.32 dans le cas général, pour $c \geq 5$.*

Conclusion et perspectives

Parmi les recherches principales dans la théorie des graphes, nous avons choisis celle concernant la ve -domination dans les graphes gonflés. Pour cela et au cours de ce mémoire, nous avons introduit la ve -domination, où nous avons tenté de faire le point sur ce qui a été fait dans la ve -domination dans les graphes. Puis nous nous sommes orientés vers l'étude des graphes gonflés.

D'abord, nous avons établi une borne supérieure du nombre de ve -domination du graphe gonflé G_I , en terme du nombre de feuilles $\ell(G)$ et de l'ordre du graphe G , $n(G)$. Ainsi nous avons montré que le nombre de ve -domination du graphe G_I est borné inférieurement par le nombre de transversal $\beta(G)$ de G , et donc borné inférieurement par $\gamma(G)$.

Dans un second lieu nous avons donné une condition nécessaire sur un graphe G pour avoir $\gamma_{ve}(G_I) = \gamma(G)$. De plus nous avons fourni une caractérisation des arbres dont le nombre de domination de G est égal au nombre de ve -domination de G_I . Aussi, nous avons fourni une deuxième caractérisation des graphes dont le nombre de domination de G est égal à $\left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$, et est égal aussi au nombre de ve -domination du graphe G_I .

Enfin, nous avons donné une borne supérieure du nombre de ve -domination dans le graphe gonflé de la grille $G_{2,c}$: $c \geq 2$. Ainsi que pour le graphe gonflé de la grille $G_{m,c}$ pour $m, c \geq 3$.

Comme perspectives à notre travail, nous proposons notamment de :

- Trouver des relations entre les paramètres de domination du graphe G avec les paramètres de domination de G_I .
- Trouver également des relations entre les paramètres de ve -domination du graphe G avec les paramètres de ve -domination de G_I .
- Trouver la valeur exacte du nombre de ve -domination pour $(G_{m,c})_I$ avec $m, c \geq 2$.
- Ettore l'étude établie pour d'autres paramètres de ve -domination, tels que β_{ve} , i_{ve} .
- Ettore l'étude des bornes établies pour le nombre de ve -domination dans les graphes gonflés, pour d'autres classes de graphes, tels que les C_4 -cactus graphes.

Bibliographie

- [1] C.F. De Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*. Petro-grade (1862).
- [2] C. Berge, *Les problèmes de coloration en théorie des graphes* . Publ.Inst. Statist Univ.Paris 9, (1960)123 – 160.
- [3] E.J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination graphs*. Net-works, 7(1977)247 – 261.
- [4] K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput, 11(1982)191 – 199.
- [5] C. Berge, *Graphe et Hypergraphes*. Dunod, deuxième édition,1970.
- [6] G. Chartrand, et L. Lesniak, *Graphes and Diagraphs. Third Edition, Chapman Hall, London*, 1996.
- [7] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*.Marcel Dekker, New York, 1998.
- [8] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Domination in graphs. Advanced Topics*.Marcel Dekker, New York, 1998.
- [9] R.W. Frucht et F. Harary, *On the corona of two graphs*. *Journal : Aequationes Mathematicae*.4, 322 – 325(1970).
- [10] S.T. Hedetniemi and, R.S. Laskar, *Introduction, Discrete mathematics* (1990).
- [11] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards : A brief survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley,1995, pp.507 – 528.
- [12] C. Berge, *Théorie de graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.

- [13] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I. (1962).
- [14] R. Laskar et K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [15] E.J. Cockayne, R.M. Dawes, S.T. Hedetniemi. *Total domination in graphs*. Networks 10(1980)211 – 219.
- [16] T.W. Haynes and P.J. Slater, *Paired-domination in graphes*. Network 32(1998)199 – 206.
- [17] F. Haray and T.W. Haynes, *Double domination in graphs*, Ars combin 55(2000)201–213.
- [18] J.W. Peters, *Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity*, Ph. D. Thesis, Clemson University, Clemson, SC, 1986.
- [19] J.R. Lewis, *Vertex-edge and Edge-vertex Domination in Graphs*. Ph.D. Thesis, Clemson University, 2007.
- [20] D.W. Bange, A.E. Barkaukas et P.J Slater, *Efficient dominating sets in graphs*. In *Applications of Discrete Mathématiques*, R.D. Ringeisen et F.S. Roberts, editors, SIAM, Philadelphia, (1988)189 – 199.
- [21] J.R. Lewis, S.T. Hedetniemi, T.W. Haynes et G.H. Fricke, *Vertex-edge domination*. *Util. Math.* 81(2010)193 – 213.
- [22] R. Boutrig, *Etude des ensembles sommets-arêtes et arêtes-sommets dominants dans les graphes*, Ph.D. Thesis, Université de Saad Dahlab Blida 1, 2016.
- [23] Xue-gang Chen, Kai Yin, Ting Gao, *A note on independent vertex-edge domination in graphs*, Discrete Optimization 25(2017)1 – 5.
- [24] R. Boutrig et M. Chellali, *Total vertex-edge domination*. International Journal of Computer Mathematics, soumis en juin 2015.
- [25] R. Boutrig, M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi, *Vertex-edge domination in graphs*. *Aequationes Mathematicae*, 90(2016), 355 – 366.
- [26] B. Krishnakumari, Y.B.Venkatakrishnan et M. Krzywkowski, *Bounds on the vertex-edge domination number of a tree*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 352(2014)363 – 366..
- [27] Pawel Zylinski, *Vertex-edge domination in graphs*. *Aequationes Mathematicae*, 93(2019), 735 – 742.
- [28] W.F. Klostermeyer, M. Messinger, A. Yeo, *Dominating vertex covers : The vertex-edge domination problem*. *Discussiones Mathematicae, Graph Theory* 41(2021)123 – 132.

- [29] Y. B. Venkatakrisnan, H. Naresh Kumar, C. Natarajan, *Total domination and vertex-edge domination in trees*, *Proyecciones Journal of Mathematics* Vol. 38, No2, pp.295 – 304, June2019.
- [30] M.A. Henning, A.P. Kazemib, *Total domination in inflated graphs*, *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012) 164 – 169.
- [31] L. Kang, M. Young Sohn, T. C. E. Cheng, *Paired-domination in Inflated Graphs*, *Theoret. Comput. Sci.* 320 (2004) 485 – 494.
- [32] O. Favaron, *Irredundance in inflated graphs*, *J. Graph Theory* 28 (1998) 97 – 104.
- [33] L. Volkmann, *Fundamente der Graphentheorie*, Springer, Wien, 1996.
- [34] B. Randerath, L. Volkmann, *Characterization of graphs with equal domination and covering numbers*, *Discrete Mathematics* 191 (1998) 159 – 169.
- [35] Lutz. Volkmann, *On graphs with equal domination and covering numbers*, *Discrete Applied Mathematics* 51 (1994) 211 – 217.
- [36] C. Stracke, *Absorptionsmengen und Verallgemeinerungen*, Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1990.
- [37] Andrzej Lingas, Mateusz Miotk, Jerzy Topp, Paweł Zylinski, *Graphs with equal domination and covering numbers*, *Journal of Combinatorial Optimization* (2020) 39 : 55 – 71, <https://doi.org/10.1007/s10878-019-00454-6>.