

LA REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Saad Dahlab Blida 1

Institut d'Aéronautique et des Études

Spatiales

Département Construction Aéronautique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Aéronautique

Option : PROPULSION SPATIAL

THEME :

ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT VISQUEUX SUR UN CONE EN  
REGIME SUPERSONIQUE ET HYPERSONIQUE

Proposé et dirigé par :

**Mr. CHEGRANI Ahmed**

Réalisé par :

**Mohamed Abd Essalam OUDDANE**

**Abdel Djebbar RAMDANE**

Soutenue devant le jury composé de :

Mr. Azzen Mohamed      Président

Mr. Bakka Nadir      Examineur

Promotion : 2022 / 2023

## ملخص

يتم إجراء تحليل التدفق اللزج وغير اللزج من خلال مخروط لكلا النظامين ؛ تفوق سرعة الصوت وفرط الصوت.

في الجزء الأول ، نحن مهتمون بالقضية غير اللزجة (المتساوية) المتعلقة بالنظامين ؛ تفوق سرعة الصوت وفرط الصوت. يتم إجراء الحسابات لتحديد خصائص التدفق خلف موجة الصدمة المائلة على طول المخروط.

من ناحية أخرى ، يتعامل الجزء الثاني مع الحالة اللزجة وأيضاً للنظامين: الأسرع من الصوت والفوق الصوتي. يتم الحصول على تحديد خصائص التدفق وراء موجة الصدمة المائلة وهذه المرة في وجود الطبقة الحدودية على طول المخروط بواسطة برنامج Matlab.

أخيراً ، يتم التحقق من صحة البرنامج المستخدم والنتائج التي حصل عليها الباحثون في هذا المجال..

## الكلمات الرئيسية

التدفق اللزج، المخروط، أسرع من الصوت، فرط الصوت، موجة الصدمة ، الطبقة الحدودية ،  
نظرية TAYLOR-MACCOL

## **Résumé**

L'analyse de l'écoulement non visqueux et visqueux est effectuée à travers un cône pour les deux régimes ; supersonique et hypersonique.

Dans la première partie, on s'intéresse au cas non visqueux (isentropique) concernant les deux régimes ; supersonique et hypersonique. Les calculs sont effectués pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement derrière l'onde de choc oblique le long du cône.

D'autre part, la deuxième partie traite le cas visqueux et également pour les deux régimes : supersonique et hypersonique. La détermination des caractéristiques de l'écoulement derrière l'onde de choc oblique et cette fois-ci en présence de la couche limite le long du cône est obtenue par un programme Matlab.

Finalement, une validation est faite entre le programme exploité et les résultats obtenus par des chercheurs dans ce domaine.

## **Mots Clés**

Écoulement visqueux, cône, supersonique, hypersonique, onde de choc, couche limite, Théorie de TAYLOR-MACCOL.

## **Abstract**

The analysis of the inviscid and viscous flow is carried out through a cone for the two regimes; supersonic and hypersonic.

In the first part, we focus on the inviscid (isentropic) case for the supersonic and hypersonic regimes. Calculations are carried out to determine the characteristics of the flow behind the oblique shock wave along the cone.

The second part deals with the viscous case, also for the supersonic and hypersonic regimes. A Matlab program is used to determine the flow characteristics behind the oblique shock wave, this time in the presence of the boundary layer along the cone.

Finally, a validation is carried out between the programme used and the results obtained by researchers in this field.

## **Keywords**

Viscous flow, cone, supersonic, hypersonic, shock wave, boundary layer, TAYLOR-MACCOL theory

## **Remerciement**

Ils s'adressent tout d'abord à Allah le tout puissant pour nous avoir donné la vie et toutes les belles choses, expériences et personnes qu'il nous y a envoyé.

Ensuite bien-sûr, ils vont à nos parents et familles pour leur soutien et leur aide aussi minime soit-elle.

Ils vont également à notre promoteur CHEGRANI AHMED pour ses multiples conseils et ces efforts déployés afin de nous assurer une formation de qualité son soutien moral, sa rigueur au travail, ses multiples conseils, ses orientations.

Aussi, nous remercions les professeurs qui nous ont accompagnés, chacun de son côté ou ensemble, le long de notre cursus scolaire et universitaire.

Et enfin, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce document.

# *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude :*

*A mon cher père et ma chère mère, ma raison de vivre, en témoignage de ma reconnaissance pour leur patience, leur amour et ses sacrifices.*

*A vous mes parents, je dis merci d'avoir fait de moi celui que je suis aujourd'hui. Aucune dédicace ne pourra exprimer mes respects, mes considérations et ma grande admiration pour vous. Puisse ce travail vous témoigne mon affection et mon profond amour.*

*A mes sœurs qui m'ont toujours soutenu et encouragé durant mes études. Que Dieu exhausser vos rêves.*

*A la mémoire de mes grand parents paternels que Dieu vous accueille dans son vaste paradis.*

*Pour finir, à tout qui j'aime et qui m'aiment, je dédie ce mémoire.*

## ***Dédicace***

*Je dédie ce travail :*

*A la famille RAMDANE et HADJ-ABDEL KADER, qu'elles trouvent en ce travail l'expression de ma profonde gratitude pour tout son soutien et tous ses encouragements.*

*A mes grands-parents, MILOUD et ABDESSALAM et ma grand-mère, que Dieu ait pitié d'eux et leur accorde une place au paradis, pour mon grand-mère que Dieu prolonge sa vie.*

*A ma mère et mon père pour leurs aides et encouragement multiples durant tout mon parcours et mes sœurs.*

*A mes camarades, amis et connaissances.*

***RAMDANE ABDEL DJEBBAR***

# SOMMAIRE

Introduction.....	15
<b>Chapitre 1Écoulement supersonique</b>	
1. Écoulement supersonique : .....	19
1.1 Écoulement Isentropique : .....	19
1.2 Onde de choc Normal : .....	22
1.3 Onde de choc Oblique :.....	27
1.4 Onde de Détente :.....	34
1.5 Théorie de TAYLOR-MACCOL pour un écoulement autour du cône :.....	40
1.5.1 Equation Gouvernante:.....	40
3.2 Conditions Limites: .....	41
1.2.1 Procédure Numérique : .....	43
<b>Chapitre 2Écoulement hypersonique</b>	
2. Écoulement hypersonique .....	45
2.1 Écoulement hypersonique non visqueux.....	45
2.1.1 Les équations gouvernantes : .....	45
2.1.2 Théorie des petites perturbations en hypersonique : .....	46
2.1.3 Théorie hypersonique des petites perturbations :.....	50
2.1.4 Théorie de couche de choc mince : .....	56
2.2 Écoulement hypersonique visqueux .....	61
<b>Chapitre 3Couche limite</b>	
3. Couche limite .....	74
3.1 Concept de la couche limite:.....	74
3.2 Couche limite laminaire sur une plaque plane à incidence nulle: .....	75
3.2.1 Estimation de l'épaisseur de la couche limite: .....	76
3.2.2 Épaisseur du déplacement:.....	77
3.2.3 Estimation des forces de frottement : .....	78
3.3 Couche limite turbulente sur une plaque plane à incidence nulle:.....	79
3.3.1 Forces de frottements : .....	81
3.3.2 Sous-couche visqueuse: .....	82
<b>Chapitre 4Résultat et interprétation</b>	
4.4 Simulation d'un cône .....	85
4.4.1Écoulement non visqueux :.....	85
4.4.1.1 Géométrie et maillage.....	85



4.4.1.2 Résultat de validation .....	85
<b>4.2.2 Écoulement visqueux : .....</b>	<b>89</b>
4.2.2.1 Géométrie et maillage.....	89
4.2.2.2 Résultat de validation .....	89
4.2.2.2.1 Cas supersonique.....	89
4.2.2.2.2 Cas hypersonique : .....	93
4.2.2.3 Couche limite : .....	97
4.2.2.3.1 Cas supersonique : .....	97
4.2.2.3.1 Cas hypersonique : .....	98
<b>Conclusion .....</b>	<b>99</b>
<b>ANNEXES .....</b>	<b>101</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>113</b>

## Liste des figures

Figure 1.1 Écoulement d'un gaz sur un cône .....	19
Ici $V_1$ et $V_2$ sont les valeurs du module de vitesse en amont et en aval du choc. Voir figure	
Figure 1.2 .....	22
Figure 1.2 Illustration d'une onde de choc normale. ....	23
Figure 1.3 Onde de choc oblique. ....	28
Figure 1.4 Polaire de choc calculée pour $\lambda_1 = 1,6$ et $\gamma = 1,4$ .....	31
Figure 1.5 Écoulement supersonique à travers une sphère.....	33
Figure 1.6 Onde de détente de Prandtl-Meyer.....	34
Figure 1.7 Construction géométrique pour les changements infinitésimaux à travers une onde infiniment faible (onde de Mach).....	35
Figure 1.8 Triangle rectangle associé à l'angle de Mach. ....	36
Figure 1.9 Système de coordonnées sphériques .....	42
Figure 1.10 Système de coordonnées sphériques pour un cône .....	42
Figure 1.11 Géométrie de la solution numérique de l'écoulement sur un cône .....	42
Figure 2. 1 Écoulement autour d'un cône mince.....	47
Figure 2. 2 Modèle d'écoulement autour d'un cône en présence d'onde de choc oblique..	55
Figure 2. 3 Modèle de couche de choc pour l'analyse de la couche de choc mince par Maslen.....	57
Figure 2. 4 Détails pour l'analyse de Maslen .....	59
Figure 2. 5 Couche d'entropie et couche limite autour d'un corps émoussé dans un écoulement hypersonique .....	62
Figure 2. 6 Interaction d'écoulement hypersonique autour d'une plaque plane.....	65
Figure 2. 7 Chauffage aérodynamique maximal avec et sans la ligne de changement d'entropie de la navette à $40^\circ$ angle d'attaque .....	71
Figure 2. 8 Interaction de la couche limite et choc : une variation physique(a), la pression en utilisant la variation du nombre de Stanton (b).....	71
Figure 3. 1 Écoulement le long d'une fine plaque plane L. Prandtl; O. Tietjens(1931).....	75
Figure 3. 2 Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle .....	76
Figure 3. 3 Épaisseur du déplacement $\delta_1$ de la couche limite.....	77
Figure 3. 4 . Dépendance de l'épaisseur de la couche limite en fonction de la distance.....	80
Figure 4. 1 Génération de maillage.....	85
Figure 4. 2 Résultat de convergence .....	86
Figure 4. 3 Comparaison de contour de pression statique entre les résultats de la simulation par ANSYS et la référence [40].....	86
Figure 4. 4 Comparaison de contour de Mach entre la simulation par ANSYS .....	87
Figure 4. 5 Comparaison de contour de masse volumique entre les résultats de la simulation par ANSYS et la référence [40].....	87
Figure 4. 6 Génération de maillage.....	89
Figure 4. 7 Courbe de convergence .....	90

Figure 4. 8	Contour du nombre de Mach.....	90
Figure 4. 9	Comparaison de la courbe du nombre de Mach obtenu par ANSYS et la .....	91
Figure 4. 10	Contour de la température statique.....	91
Figure 4. 11	Comparaison de la courbe de température statique entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41] .....	92
Figure 4. 12	Contour de la pression statique .....	92
Figure 4. 13	Courbe de convergence .....	93
Figure 4. 14	Contour du nombre de Mach.....	94
Figure 4. 15	Comparaison du la courbe de nombre de mach entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41] .....	94
Figure 4. 16	Contour du la température statique.....	95
Figure 4. 17	Comparaison du la courbe de température entre les résultats obtenus par.....	95
Figure 4. 18	Contour de la pression statique .....	96
Figure 4. 19	Comparaison du la courbe de pression statique entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41] .....	96
Figure 4. 21	Comparaison de la courbe du nombre de Mach entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41] .....	97
Figure 4. 22	Comparaison de la courbe de la température statique (T) et total (Tt) entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41] .....	97
Figure 4. 23	Comparaison de la courbe du nombre de Mach entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41] .....	98
Figure 4. 24	Comparaison de la courbe dutempérature statique (T) et total (Tt) entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41] .....	98

# Liste des tableaux

Tbleau 3. 1 Épaisseur de la couche limite $\delta$ et l'épaisseur de la sous-couche visqueuse....	83
Tableau 4. 1 Comparaison entre les résultats de la simulation par ANSYS, MATLAB .....	88
Tableau 4. 2 Comparaison entre les résultats de la simulation par ANSYS, MATLAB .....	88
Tableau A. 3 Qualité orthogonale.....	102

## La nomenclature

Symboles	Désignation	Unité
<b>A</b>	Section	m <sup>2</sup>
<b>C</b>	Célérité du son	m/s
<b>V</b>	Vitesse	m/s
<b>C<sub>p</sub></b>	Chaleur spécifique à pression constante	J/kg · K
<b>C<sub>v</sub></b>	Chaleur spécifique à volume constante	J/kg · K
<b>Fe</b>	Force extérieure	N
<b>q<sub>m</sub></b>	Débit massique	kg/s
<b>H</b>	Enthalpie	J/kg
<b>H<sub>t</sub></b>	Enthalpie totale	J/kg
<b>M</b>	Nombre de Mach	1
<b>P</b>	Pression	Pa
<b>P<sub>t</sub></b>	Pression totale	Pa
<b>P<sub>s</sub></b>	Pression statique	Pa
<b>Q</b>	Quantité de chaleur	Joule
<b>R</b>	Constante des gaz parfait	J/molK
<b>T</b>	Température	°C ou K
<b>V</b>	Vitesse	m/s
<b>W</b>	Travail	J
<b>γ</b>	Coefficient isentropique	1

$\rho$	Masse volumique	kg/m <sup>3</sup>
$\beta$	Angle de déviation de l'onde de choc oblique	°ou rad
$\theta$	Angle de déflexion	°ou rad

# Introduction

Les premières études d'écoulement supersonique autour du cône ont été faites par Maccoll en 1938 [1] puis en 1947 [2], l'auteur a fourni un tableau des paramètres d'impact du cône supersonique. En 1949, Neice [3] a publié un tableau des paramètres thermodynamiques pour une collision oblique. Depuis, Stone [4] a également étudié l'écoulement supersonique autour du cône mince de faible inclinaison de. Kopal [5] s'est occupé du choc conique en 1949. En 1951, Ferri [6] a calculé pour la première fois le flux supersonique de autour du cône droit à incidence nulle. L'étude a été réalisée en utilisant la méthode des différences finies. Dans son article de 1952 [7], Maslen a également présenté un écoulement supersonique autour d'un cône sans incidence. D'autre part, Hord en 1955 dans [8] a réalisé une étude grossière de l'écoulement supersonique autour d'un cône circulaire avec une représentation conique des ondes de choc.

En 1960, Mauger [9] a modifié la forme du cône. Il a calculé un cône circulaire à courbure progressive. On a vu s'intéresser à cette géométrie dans les applications aérospatiales. En 1960, Briggs [10] a été le premier à étudier et à calculer numériquement l'écoulement supersonique autour du cône de base droit à base elliptique. L'auteur a utilisé la méthode des différences finies dans son modèle numérique. Stocker et Mauger [11] ont à leur tour prolongé les recherches de Briggs [10] en 1962, mais avec une section circulaire du cône droit devant le jet supersonique. D'autre part, en 1963, Simon et Walker [12] ont établi l'approche pour calculer l'écoulement supersonique autour du cône. Cette approche consiste à simplifier les équations non linéaires pour la petite inclinaison du cône pour obtenir une approximation de la solution analytique.

Sims [13] a fait un tableau en 1964 pour une onde de choc conique autour de du cône droit à incidence nulle pour un gaz caloriquement parfait et pour un gaz thermiquement parfait. South [14] a présenté une étude de l'écoulement conique et dièdre, une méthode appelée la méthode des relations intégrales. En 1965, Eastman et Omar [15] ont utilisé la méthode inverse pour calculer le choc du cône. Cette méthode prend en compte la déviation des chocs du cône et trouve ensuite la déviation du cône correspondante. Belotserkovskiy [16] a étudié l'écoulement supersonique autour du corps rond en 1967. L'auteur a déterminé l'impact détaché provoqué au sommet de l'obstacle. Il a effectué ses calculs en utilisant la méthode des différences finies et la technique de "capture de choc ». Moretti [17] s'intéresse plus à l'étude de l'écoulement non visqueux autour d'un sommet cône à

incidence nulle selon la méthode des différences finies. Gonidou [18] a rejoint Briggs [10] dans ses recherches en 1968, sauf qu'il a changé la méthode de calcul pour la méthode des volumes finis. Jones [19] a étudié le même problème d'écoulement autour du cône à impact nul, mais cette fois en utilisant la méthode des différences finies.

En 1969, Jones [20] a trouvé une table pour l'écoulement supersonique autour d'un cône circulaire à  $\gamma=1,4$ .

Les résultats rapportés sont des paramètres thermodynamiques post-impact pour angles d'incidence différents. Ndefo [21] a présenté une étude numérique de l'écoulement supersonique autour d'un cône de base tridimensionnel arbitraire accompagné d'un choc. Rakich [22], pour sa part, a d'abord présenté la méthode des caractéristiques 3D pour calculer l'écoulement supersonique autour un corps tournant. Woods [23] a présenté le même travail que la référence Briggs [10], mais avec une méthode des caractéristiques et de comparaison avec les résultats du présentés dans [10]. Kegel en analysant les paramètres obtenus à partir de South et Klunker [24] ont développé une nouvelle méthode analytique approchée pour calculer l'écoulement supersonique autour d'un cône. Cette méthode consiste à linéariser le comportement des équations du mouvement et ainsi approximer les deux composantes du vecteur vitesse pour une petite différence de vitesse d'écoulement. En 1971, les mêmes auteurs Klunker, South et Ruby [25] ont développé une méthode appelée « StreamlineMethod ». Cette méthode examine les lignes de courant et les propriétés physiques de ces lignes de courant pour déterminer le débit, à la fois subsonique et supersonique, dans le cône dans le sens des aiguilles d'une montre. En 1985, Amidon [26] a présenté les propriétés aérodynamiques de l'écoulement supersonique autour d'un corps de section elliptique. Ces propriétés sont la distribution du nombre de Mach sur la surface du fuselage, le coefficient de traînée, la portance et le moment de tangage supersonique. Tatur [27] est mené des études en 1996 et 1997 sur les paramètres et les propriétés du choc oblique autour d'un angle à haute température. Ces références constituent la base de notre travail de calcul du choc oblique. Chen et Li [28] en 2000 ont déterminé l'écoulement supersonique autour du cône pointu avec une surface curviligne. L'écoulement hypersonique à travers des cônes est un sujet d'étude depuis plus de 60 ans. Des tables pour l'écoulement hypersonique symétrique, comme celle de Bartlett [29], et l'écoulement hypersonique en lacet, comme celle de Kopal [2], ont été générées à l'aide de divers modèles mathématiques d'approximation. Ferri [6] a montré que la théorie du premier ordre pour un écoulement supersonique au-dessus d'un cône circulaire correspond



bien aux données expérimentales, même jusqu'à un angle de lacet de  $12^\circ$ . L'écoulement hypersonique à travers des cônes en lacet a été examiné plus en détail par Sapunkov [30], qui a obtenu des solutions pour le champ d'écoulement entre le choc et la surface du cône. Sa méthode présentait toutefois des singularités à la surface et n'était donc pas applicable à proximité de la surface du cône. Au cours des dernières décennies, la CFD a été largement utilisée pour analyser les écoulements hypersoniques au-dessus des géométries coniques et d'autres véhicules spatiaux. Moss, LaBeau et Glass [31] ont examiné l'écoulement à Mach 10 dans une soufflerie à faible densité au-dessus d'un double cône pointu en utilisant la méthode de simulation directe de Monte Carlo (DSMC). Ils ont constaté que le solveur était particulièrement sensible à la résolution de la grille. Gosse et Kimmel [32] ont effectué des simulations de Mach 8 au-dessus d'un cône elliptique, avec une bonne concordance entre la CFD et l'expérience.

Le premier chapitre est consacré aux l'écoulement supersonique et les caractéristiques de les couches limites.

Le deuxième chapitre consiste à l'écoulement hypersonique et les méthodes de démonstration de ce régime.

Le troisième chapitre de la thèse parle sur les couches limites et leurs formules mathématiques.

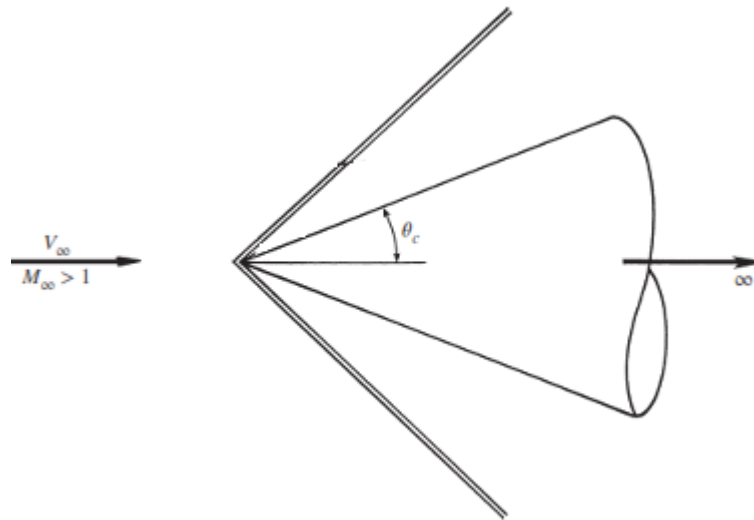
# **CHAPITRE 1**

## **Ecoulement supersonique**

# 1. Écoulement supersonique :

## 1.1 Écoulement Isentropique :

La transformation est dite isentropique signifie que l'entropie est constante. Dans ce cas, nous considérerons qu'elle est également adiabatique, c'est-à-dire sans transfert de chaleur. Considérez le gaz circulant dans une conduite dont la taille varie. La pression et la température du gaz peuvent changer.



**Figure** Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document..1écoulement d'un gaz sur un cône

En appliquant l'équation d'énergie à flux constant entre (1) et (2), nous avons:

$$Q - W = \Delta U + \Delta F \cdot E + \Delta K \cdot E + \Delta P \cdot E \quad (1.1)$$

Pour un écoulement adiabatique,  $Q = 0$  et si aucun travail n'est effectué alors  $W = 0$

$$\Delta H + \Delta K \cdot E + \Delta P \cdot E = 0 \quad (1.2)$$

Nous obtenons:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (1.3)$$

Pour un gaz,  $h = C_p T$ , nous obtenons l'équation de Bernoulli pour le gaz qui est:

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (1.4)$$

Notez que T est la température absolue en Kelvins :  $T = 0C^\circ + 273K^\circ$

(1.5)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p/R}$$

Cependant, d'après l'équation (1.5),

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (1.6)$$

et donc l'équation (1.5) est écrite comme suit :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.7)$$

De la même manière, on écrit pour un processus isentropique :

$$0 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.8)$$

Donc,

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (1.9)$$

et l'équation s'écrit comme suit :

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (1.10)$$

Puisque :

$$\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2,$$

L'équation devient :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (1.11)$$

En combinant les équations (1.7) et (1.8), nous pouvons résumer les relations isentropiques comme suit :

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.12)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (1.13)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1 + \gamma} \quad (1.14)$$

Le rapport de pression :

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{1 + \gamma}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.15)$$

Masse volumique :

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{1 + \gamma}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (1.16)$$

On peut également donner l'expression du rapport entre la section et la section au col sonique en fonction du nombre de Mach Ma[33]:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[ \frac{2}{1 + \gamma} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma - 2}} \quad (1.17)$$

## 1.2 Onde de choc Normal :

Si le choc est normal à la direction de l'écoulement, la composante tangentielle de la vitesse est nulle des deux côtés du choc,  $V_{1\tau} = V_{2\tau} = 0$  et les conditions de saut prennent la forme suivante :

$$H = h + \frac{1}{2} V^2 \quad (1.18)$$

$$\rho_2 V_2^2 + p_2 = \rho_1 V_1^2 + p_1 \quad (\text{momentum equation}) \quad (1.19)$$

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} \quad (\text{energy equation}), \quad (1.20)$$

$$\rho_2 V_2 = \rho_1 V_1 \quad (\text{continuity equation}). \quad (1.21)$$

Ici  $V_1$  et  $V_2$  sont les valeurs du module de vitesse en amont et en aval du choc. Voir figure Figure1.2

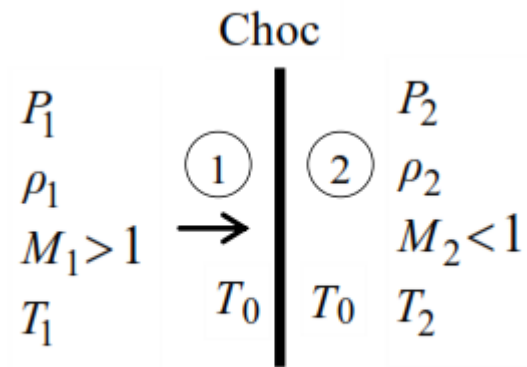
$$h_2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (1.22)$$

On peut noter tout d'abord que, d'après l'équation de l'énergie (1.20), la vitesse critique  $V_*$  définie par l'équation de Bernoulli, reste inchangée à travers le choc. Nous pouvons exprimer le côté gauche de l'équation d'énergie (1.20) comme suit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{V_*^2}{\gamma-1} + \frac{V_*^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} V_*^2 \quad (1.23)$$

Par conséquent, dans l'écoulement derrière le choc,

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} V_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} V_2^2 \quad (1.24)$$



**Figure 1.3** Illustration d'une onde de choc normale.

De même, devant le choc,

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} V_*^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} V_1^2 \quad (1.25)$$

Nous passons maintenant à l'équation de la quantité de mouvement (1.19). Nous divisons ses deux côtés respectivement par  $\rho_2 V_2$  et  $\rho_1 V_1$  qui sont égaux selon l'équation de continuité (1.21). Nous avons

$$V_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{1}{V_2} = V_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{V_1} \quad (1.26)$$

A l'aide de (1.18) et (1.19),  $p_2/\rho_2$  et  $p_1/\rho_1$  peuvent être éliminés de (1.26), ce qui conduit à

$$\frac{V_2}{V_*} + \frac{V_*}{V_2} = \frac{V_1}{V_*} + \frac{V_*}{V_1} \quad (1.27)$$

Les valeurs de la vitesse normalisée avant et après le choc sont désignées par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement, nous pouvons exprimer l'équation (1.27) sous la forme d'une équation quadratique pour  $\lambda_2$  :

$$\lambda_2^2 - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\lambda_2 + 1 = 0 \quad (1.28)$$

Sa première racine,  $\lambda_2 = \lambda_1$  représente une solution triviale des équations (1.19), (1.20), (1.21) :

$$V_2 = V_1, \rho_2 = \rho_1, p_2 = p_1, h_2 = h_1 \quad (1.29)$$

qui décrit l'écoulement sans onde de choc.

Comme nous nous intéressons ici à la description des propriétés des chocs, nous devons considérer la deuxième racine de l'équation (1.28),

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} \quad (1.30)$$

Il s'agit d'une loi fondamentale de la théorie des chocs, connue sous le nom de relation de Prandtl. Selon l'équation (1.30), tout écoulement supersonique ( $\lambda_1 > 1$ ) traversant un choc normal devient subsonique ( $\lambda_2 < 1$ ).



Cette solution satisfait automatiquement les équations de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que la loi de conservation de la masse, et est donc toujours possible. A l'aide de l'équation (1.30), on peut facilement calculer le rapport des vitesses à travers le choc :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V_*}{V_1/V_*} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1^2} \quad (1.31)$$

qui peut être exprimée en termes de nombre de Mach avant le choc :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (1.32)$$

En utilisant l'équation de continuité (1.21), nous trouvons le rapport de densité :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \quad (1.33)$$

Pour déterminer le rapport de pression, nous revenons à l'équation de la quantité de mouvement(1.19). Nous avons

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2 V_2^2}{\rho_1 V_1^2}\right). \quad (1.34)$$

Compte tenu de l'équation de continuité (1.21), on peut l'écrire comme suit

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \quad (1.35)$$

Substitution de (1.32) dans (1.34) donne

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 \frac{2M_1^2-2}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (1.36)$$

En divisant les deux côtés de cette formule, on obtient et on calcule  
La substitution de (1.32) dans (1.34) donne

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (1.37)$$

En divisant les deux côtés de cette équation par  $p_1$  et en utilisant la formule pour calculer la vitesse du son avant le choc, nous trouvons finalement

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (1.38)$$

Enfin, pour calculer le rapport des températures, nous appliquons l'équation de Clapeyron au gaz avant et après le choc. Nous avons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} \quad (1.39)$$

La substitution de (1.33) et (1.35) dans (1.36) donne

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (1.40)$$

Il convient de noter que, bien que l'équation n'exclue pas la possibilité d'un "choc de détente" par lequel un écoulement subsonique avec  $\lambda_1 < 1$  accélère jusqu'à une vitesse supersonique  $\lambda_1 > 1$  mais de telles situations ne sont jamais observées dans les écoulements réels. Pour expliquer cela, considérons la variation d'entropie  $\Delta S$  à travers le choc. Nous pouvons écrire

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (1.41)$$

En utilisant (1.33) et (1.35), on peut encore écrire

$$\Delta S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \right] + \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]. \quad (1.42)$$

En particulier, il découle de l'équation (1.37) que  $\Delta S = 0$  à  $M_1 = 1$ . Afin de prédire le comportement de l'entropie dans l'onde de choc pour  $M_1 \neq 1$  nous différencions l'équation (1.37) par rapport à  $M_1$  :

$$\frac{d(\Delta S)}{dM_1} = \frac{4\gamma R}{M_1} \frac{(M_1^2 - 1)^2}{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][2 + (\gamma - 1)M_1^2]} \quad (1.43)$$

Comme la pression doit être positive à la fois en amont et en aval du choc, l'équation (1.35) suggère que nous devons supposer que  $2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) > 0$  et il découle de l'équation

(1.38) que la dérivée  $d(\Delta S)/dM_1$  est positive pour toutes les valeurs de  $M_1$  sauf  $M_1 = 1$ . Cela signifie que l'entropie augmente à travers le choc pour toutes les valeurs de  $M_1 > 1$  et est supposée diminuer pour  $M_1 < 1$ . Ce dernier point est toutefois en contradiction avec la deuxième loi de la thermodynamique, également connue dans la théorie cinétique des gaz sous le nom de théorème de Boltzmann. Ce théorème stipule que, si un corps de gaz est thermiquement isolé, son entropie ne peut jamais décroître. En effet, si un gaz subit une transformation, tout en restant dans l'état d'équilibre thermodynamique, alors l'entropie restera inchangée. C'est exactement ce qui se passe dans l'écoulement en amont et en aval du choc. Cependant, la transformation à l'intérieur du choc est trop rapide pour que les particules de fluide puissent s'adapter rapidement aux conditions environnantes. Par conséquent, l'entropie doit augmenter dans l'onde de choc, ce qui n'est possible que si le nombre de Mach avant le choc  $M_1 > 1$ . Il découle de l'équation (1.33) que  $\rho_2/\rho_1 > 1$  pour tout  $M_1 > 1$ . C'est pourquoi ces ondes de choc sont appelées ondes de compression, par opposition aux ondes de détente ( $M_1 < 1$ ) qui sont possibles mathématiquement, mais ne peuvent être observées dans les écoulements réels [34].

### **1.3 Onde de choc Oblique :**

Revenons maintenant au problème initial de l'écoulement supersonique rencontrant une onde de choc oblique. Pour étudier le choc oblique, nous pouvons traiter directement les équations. Sinon, les résultats de l'analyse pour le choc normal peuvent être adoptés pour nos besoins. Le fait est que le problème du choc oblique, représenté à la figure 1.3(a), peut facilement être ramené au problème correspondant pour le choc normal. Pour ce faire, nous suivons la procédure suivante en deux étapes. Tout d'abord, nous effectuons une rotation de l'écoulement d'un angle  $(\pi - \alpha)$ . Le résultat de cette opération est illustré. On sait d'après la théorie cinétique des gaz que, à moins que  $M_1$  est proche de l'unité, l'épaisseur de l'onde de choc est comparable au libre parcours moyen des molécules et, par conséquent, la condition d'équilibre dans la figure 1.3(b). Ensuite, nous introduisons un nouveau cadre de coordonnées qui se déplace le long du choc  $SS'$  avec la vitesse  $V_{1\tau}$ . Le vecteur vitesse semble être normal au choc de part et d'autre de celui-ci, comme le montre la figure 1.2. Il est évident que la transformation des coordonnées laisse les quantités thermodynamiques du gaz inchangées. La composante de vitesse normale au choc est également préservée. Par conséquent, lors du calcul du rapport de densité à travers le choc, il suffit de modifier la formule (1.33) comme suit

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_{1n}^2}{2+(\gamma-1)M_{1n}^2}. \quad (1.44)$$

Ici  $M_{1n}$  est la composante normale du nombre de Mach, définie comme suit

$$M_{1n} = \frac{V_{1n}}{a_1} \quad (1.45)$$

La vitesse du son avant le choc,  $a_1$  est calculée :

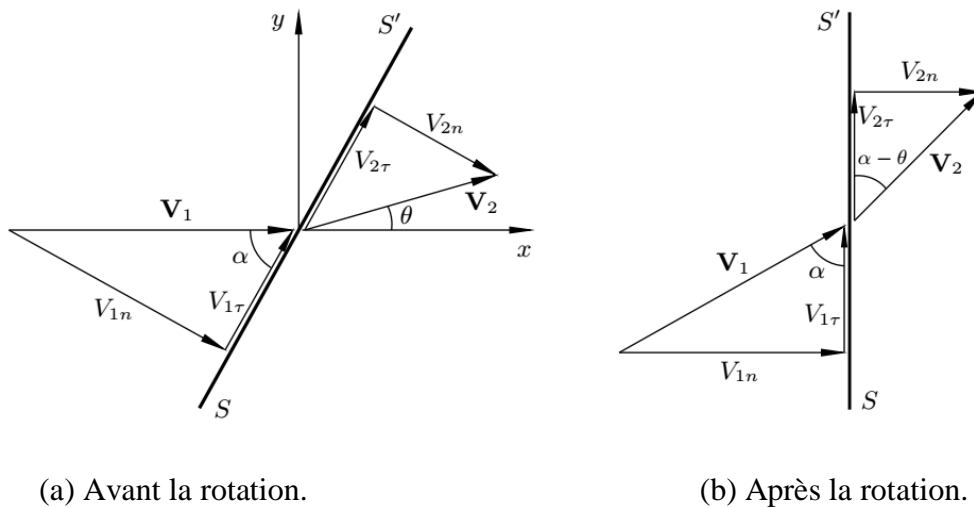
$$a_1 = \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \quad (1.46)$$

et s'avère indépendant du cadre de coordonnées utilisé. Si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle d'inclinaison du choc par rapport au vecteur vitesse (voir figure 1.3), alors

$$M_{1n} = \frac{V_{1n}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \alpha}{a_1} = M_1 \sin \alpha \quad (1.47)$$

Ce qui nous permet d'exprimer l'équation (1.39) sous la forme

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \alpha}{2+(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (1.48)$$



**Figure 1.4** Onde de choc oblique.

De même, en utilisant (1.35) et (1.32), nous trouvons que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \alpha - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{V_{2n}}{V_{1n}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (1.49)$$

Les relations de choc oblique (1.48)-(1.49) nous permettent de déterminer les deux composantes de la vitesse et l'état thermodynamique du gaz derrière le choc, à condition que l'angle de choc  $\alpha$  soit donné. Cependant, dans la plupart des cas, l'orientation du choc dans le champ d'écoulement n'est pas connue à l'avance. Elle doit être trouvée dans le cadre de la résolution du problème de dynamique des gaz correspondant. En tenant compte de cela, il est utile de déduire une équation de choc qui n'implique pas  $\alpha$ . Comme le choc réduit toujours la composante normale de la vitesse, laissant la composante tangentielle inchangée, le vecteur vitesse change de direction au niveau du choc. Avec  $\theta$  étant l'angle de déviation du vecteur vitesse (voir figure 1.3), nous pouvons écrire

$$V_{2n} = V_2 \sin(\alpha - \theta) = V_2 (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta). \quad (1.50)$$

Introduisons maintenant un système de coordonnées cartésiennes avec  $x$  orienté parallèlement au vecteur vitesse devant le choc et  $y$  dans la direction normale, comme le montre la figure 1.3(a). Les composantes de la vitesse par rapport à ces coordonnées sont calculées comme suit

$$u_2 = V_2 \cos \theta, \quad v_2 = V_2 \sin \theta \quad (1.51)$$

et

$$V_{2n} = u_2 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha \quad (1.52)$$

En substituant (1.52) à (1.50) et en tenant compte du fait que  $V_{1n} = V_1 \sin \alpha$  on obtient

$$\frac{u_2}{V_1} - \frac{v_2}{V_1} \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (1.53)$$

Afin d'éliminer  $\alpha$  de (1.53) qui peut s'écrire comme suit

$$V_1 \cos \alpha = V_2 \cos(\alpha - \theta) = V_2 (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = u_2 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha \quad (1.54)$$

et il s'ensuit que

$$\tan \alpha = \frac{V_1 - u_2}{v_2}, \sin^2 \alpha = \frac{(V_1 - u_2)^2}{(V_1 - u_2)^2 + v_2^2} \quad (1.55)$$

Substitution de (1.55) dans (1.53) conduit à

$$\frac{u_2}{V_1} - \frac{v_2^2}{V_1(V_1 - u_2)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2} \frac{(V_1 - u_2)^2 + v_2^2}{(V_1 - u_2)^2} \quad (1.56)$$

Enfin, il convient d'exprimer  $M$ ,  $v$  est la vitesse normalisée  $A$ .

$$\frac{1}{M_1^2} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{1}{\lambda_1} - \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v_2^2}{V_1^2} - \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{\gamma}{2} \quad (1.57)$$

En substituant (1.57) dans (1.56) et en résolvant la équation pour  $v_2^2$ , on trouve

$$v_2^2 = \frac{(V_1 - u_2)^2 (V_1 u_2 - V_2^2)}{V_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} V_1^2 - V_1 u_2} \quad (1.58)$$

Une forme non dimensionnelle de l'équation (1.58) peut facilement être obtenue en divisant les deux côtés par 13

$$\lambda_{2y}^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_{2x})^2 (\lambda_1 \lambda_{2x} - 1)}{1 + \frac{2}{\gamma + 1} \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_{2x}} \quad (1.59)$$

Ici  $\lambda_{2x}$  et  $\lambda_{2y}$  sont les deux composantes de la vitesse normalisée derrière le choc :

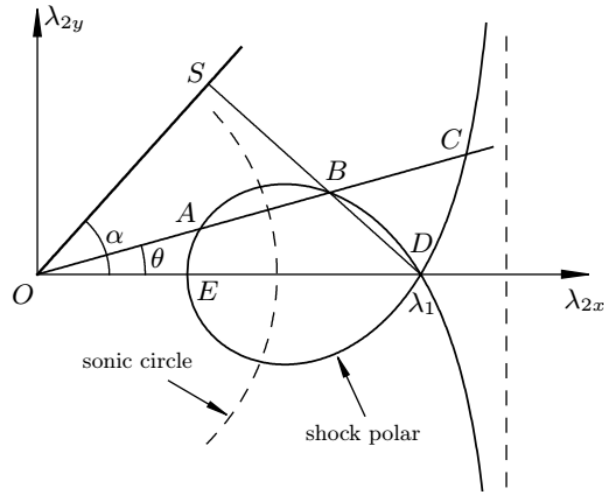
$$\lambda_{2x} = \frac{u_2}{V_*}, \lambda_{2y} = \frac{v_2}{V_*} \quad (1.60)$$

La figure 1.4 donne une représentation graphique de l'équation (1.60) dans le plan de l'hodographe  $(\lambda_{2x}, \lambda_{2y})$ -dans le plan de l'hodographe. Chaque point de ce plan doit être considéré comme l'extrémité du vecteur vitesse normalisé tracé à partir de l'origine des coordonnées  $O$ . Étant donné  $\lambda_1$  l'équation (1.60) nous permet de calculer  $\lambda_{2y}$  pour tout  $\lambda_{2x}$  de l'intervalle

$$\lambda_{2x} \in \left[ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_1} + \frac{2}{\gamma + 1} \lambda_1 \right] \quad (1.61)$$

La restriction de la plage de  $\lambda_{2x}$  découle de l'observation selon laquelle le côté droit de

l'équation (1.60) ne peut jamais devenir négatif. Lorsque  $\lambda_{2x}$  change dans la plage



**Figure** Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document..5 Polaire de choc calculée pour  $\lambda_1 = 1,6$  et  $\gamma = 1,4$ .

De l'équation (1.60), le point dans le plan de l'hologramme se transforme en un lieu appelé polaire choc voir la figure 1.4. Elle montre toutes les positions possibles de la pointe du vecteur vitesse normalisé derrière le choc oblique pour différentes orientations possibles du choc. Point D. où  $\lambda_2$  a  $\lambda_1$  représente l'état de l'écoulement devant le choc. Au point mince, le numérateur du côté droit de (1.60) devient nul. Le deuxième degré du numérateur est atteint au point E qui représente l'onde de choc normale avec  $\lambda_{2,1}/\lambda_1$ . Ce point se trouve à la limite inférieure de l'intervalle de l'équation (1.61). La limite supérieure est donnée par le zéro du dénominateur en (1.60) qui définit l'asymptote de la polaire de choc, représentée à la figure 1.4 par la ligne verticale en pointillés.

En supposant que l'angle de déviation du vecteur vitesse  $\theta$  est connu, on peut facilement déterminer l'état de l'écoulement derrière le choc. Pour ce faire, un rayon partant de l'origine O doit être tracé à un angle de  $\theta$  par rapport à l'axe  $\lambda_{2x}$  et l'axe -. Il coupe la polaire du choc en trois points : A, B et C. Au point C la vitesse d'écoulement est évidemment plus grande qu'au point D. Ce qui signifie que le point C représente un "choc de détente" et doit être négligé. Néanmoins, deux solutions, à savoir celles données par les points A et B sont

possibles pour chaque angle de déviation  $\theta$  sauf s'il dépasse une valeur maximale  $\theta_{\max}$ , cette dernière dépendant de  $\lambda_1$ .

Si l'on considère, par exemple, le point B la position de ce point dans le plan de l'hodographe détermine non seulement la vitesse normalisée derrière le choc, mais aussi l'orientation du choc. Pour trouver l'angle de choc  $\alpha$  la procédure suivante peut être utilisée. Nous traçons une ligne droite entre les points Det B. Ensuite, en tenant compte du fait que la vitesse tangentielle reste inchangée à travers le choc, nous pouvons conclure que le choc O.S doit être perpendiculaire à cette ligne, comme le montre la figure 1.4.

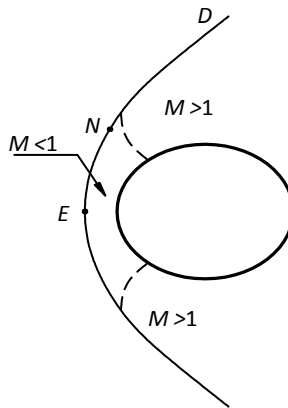
La même procédure peut, bien entendu, être utilisée pour le point A. La principale différence entre les solutions représentées par les points A et B est que cette dernière présente un choc oblique avec un angle plus petit  $\alpha$  ce qui se traduit par une réduction plus faible de la vitesse d'écoulement. C'est pourquoi on dit que cette solution a un choc faible. En revanche, la solution représentée par le point A présente une réduction plus importante de la vitesse d'écoulement, et on dit qu'elle comporte un choc fort.

Au moyen d'une analyse numérique de la polaire de choc (1.60) ), on peut démontrer que le point A se trouve toujours à l'intérieur du cercle sonique, ce dernier étant défini par l'équation  $\lambda = \sqrt{\lambda_{2x}^2 + \lambda_{2y}^2} = 1$ . Le choc fort agit de la même manière que le choc normal, c'est-à-dire qu'il réduit l'écoulement supersonique en amont du choc à une vitesse subsonique en aval de celui-ci. La situation au point B est un peu plus compliquée. Il se trouve à l'extérieur du cercle sonique à condition que l'angle de déviation  $\theta$  ne soit pas très proche de  $\theta_{\max}$ . Cela signifie que, bien que la composante normale de la vitesse soit inférieure à la vitesse du son derrière le choc, la vitesse totale semble être supersonique. Cependant, pour tout  $\lambda_1$  il existe un voisinage de  $\theta_{\max}$  où les deux solutions, avec la solution forte (point ) et faible (point B ), réduisent la vitesse de l'écoulement à un niveau subsonique.

Il convient de noter que non seulement les deux solutions décrites ci-dessus peuvent être observées dans des écoulements réels, mais qu'elles apparaissent souvent ensemble dans le même écoulement. A titre d'exemple, nous pouvons considérer l'écoulement le long d'une sphère. Cet écoulement est reproduit schématiquement à la figure 1.5. Au point E situé directement devant la sphère, le choc est normal à l'écoulement entrant, et l'angle de



déviations de la vitesse  $\theta$  est nul. Lorsque le point d'observation se déplace le long du choc, disons vers le haut, l'angle de choc  $\alpha$  diminue, entraînant l'angle de déviation  $\theta$  augmente.



**Figure 1.6** Écoulement supersonique à travers une sphère.

Cependant, à mesure que le choc devient de plus en plus oblique, il diminue d'intensité progressivement, ce qui réduit l'augmentation de la vitesse normale. Par conséquent, on atteint un point (représenté par le point N dans la figure 1.5) où l'angle de déviation  $\theta$  atteint une valeur maximale  $\theta_{\max}$  puis  $\theta$  décroît de façon monotone, tendant vers zéro lorsque la distance à la sphère tend vers l'infini (point D sur la figure 1.5), où l'onde de choc dégénère en une ligne de Mach. En conséquence, le point dans le plan de l'hodographe (figure 1.4) se déplace de la position normale du choc E jusqu'au point de choc faible D en couvrant toutes les solutions possibles sur la branche supérieure de la polaire de choc. La branche inférieure correspond évidemment à la moitié inférieure du choc dans le plan physique (figure 1.5).

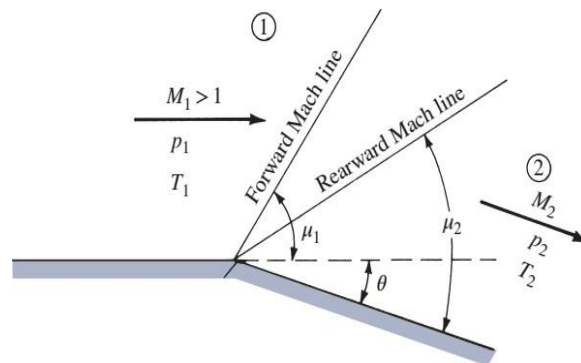
Une caractéristique intéressante de l'écoulement devant une sphère est qu'il représente un type d'écoulement mixte contenant à la fois des régions subsoniques et supersoniques. La région subsonique se situe à l'avant de la sphère. L'écoulement s'accélère ensuite à partir du point de stagnation avant et devient supersonique. Les lignes soniques, représentées sur la figure 1.5 par des lignes en pointillés, servent de limites entre les parties subsoniques et supersoniques de l'écoulement.

Enfin, il convient de noter que la présence du choc rend l'écoulement irréversible. L'entropie augmente lorsque le gaz traverse l'onde de choc, puis reste constante le long de chaque ligne de courant. En conséquence, un sillage entropique se forme derrière le corps. Lorsque la distance par rapport au corps devient importante, la pression dans le sillage revient à sa valeur dans l'écoulement libre  $p_\infty$ . Toutefois, en raison de l'augmentation de l'entropie, la densité  $\rho$  reste inférieure à  $\rho_\infty$ . Il découle de l'équation de Bernoulli que

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (1.62)$$

que la vitesse  $V$  reste également inférieure à sa valeur dans l'écoulement libre  $V_\infty$ . Par conséquent, un déficit de quantité de mouvement est observé dans le sillage, ce qui suggère que le corps subira forcément une force de traînée. Compte tenu du fait qu'elle provient des pertes d'énergie mécanique dans l'onde de choc, cette force est appelée traînée d'onde [34].

#### 1.4 Onde de Détente :

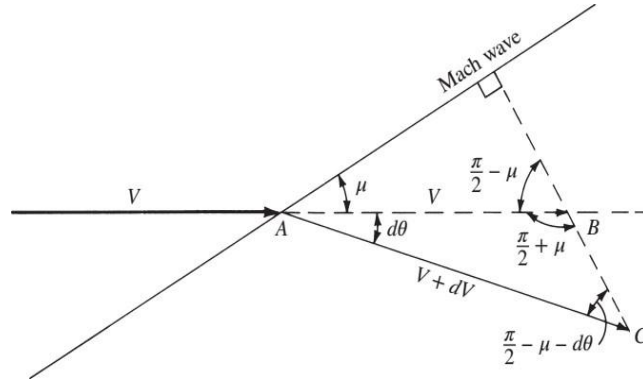


**Figure** Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document..7Onde de détente de Prandtl-Meyer.

Ludwig Prandtl et son élève Theodor Meyer ont élaboré pour la première fois une théorie sur les ondes de détentes en 1907-1908, c'est pourquoi ces ondes sont communément appelées ondes de détente de Prandtl-Meyer.

Le problème d'une onde de détente est le suivant : étant donné l'écoulement en amont (région 1) et l'angle de déviation  $\theta$  calculez l'écoulement en aval (région 2). Poursuivons.

Considérons une onde très faible produite par une déviation infiniment petite de l'écoulement  $d\theta$ . Nous considérons la limite lorsque  $d\theta \rightarrow 0$ . Par conséquent, l'onde est essentiellement une onde de Mach à l'angle  $\mu$  par rapport à l'écoulement en amont. Lorsque l'écoulement est dévié vers le bas par l'angle  $d\theta$ , la vitesse est augmentée d'une quantité infinitésimale de  $dV$ , par conséquent, la vitesse de l'écoulement derrière l'onde est  $V + dV$  inclinée à l'angle  $d\theta$ .



**Figure 1.8** Construction géométrique pour les changements infinitésimaux à travers une onde infiniment faible (onde de Mach).

Dans la figure 1.7 le segment de droite horizontal  $AB$  de longueur  $V$  est tracé derrière la l'onde. Le segment de droite  $AC$  est tracé pour représenter la nouvelle vitesse  $V + dV$  derrière l'onde. La ligne  $BC$  est normale à l'onde car elle représente la ligne le long de laquelle le changement de vitesse se produit. En examinant la géométrie de la figure 1.7, à partir de la loi des sinus appliquée au triangle  $ABC$ , on trouve que

$$\frac{V+dV}{V} = \frac{\sin(\pi/2+\mu)}{\sin(\pi/2-\mu-d\theta)} \quad (1.63)$$

Cependant, à partir des identités trigonométriques,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \cos \mu \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta\right) = \cos(\mu + d\theta) \\ &= \cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta \end{aligned} \quad (1.64)$$

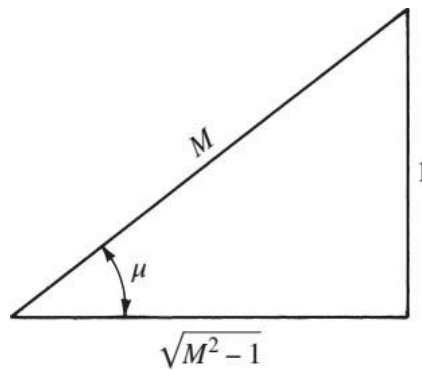
Substitution des équations (1.64) dans (1.63) on obtient :

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta} \quad (1.65)$$

Pour les petits  $d\theta$  on peut faire les hypothèses de petit angle  $\sin d\theta \approx d\theta$  et  $\cos d\theta \approx 1$ .

L'équation (1.65) devient :

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu} \quad (1.66)$$



**Figure 1.9** Triangle rectangle associé à l'angle de Mach.

Notez que la fonction  $1/(1 - x)$  peut être développée dans une série de puissances (pour  $x < 1$ ) sous la forme

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Par conséquent, l'équation (1.66) peut être développée comme suit (en ignorant les termes du second ordre et plus)

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan \mu + \dots \quad (1.67)$$

Ainsi, d'après l'équation (1.67),

$$\partial\theta = \frac{dV/V}{\tan\mu} \quad (1.68)$$

Nous savons que  $\mu = \arcsin(1/M)$ . Par conséquent, le triangle droit de la figure 9.28 démontre que :

$$\tan\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \quad (1.69)$$

En substituant l'équation (1.69) dans (1.68), on obtient :

$$d\theta = \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} \quad (1.70)$$

L'équation (1.70) relie la variation infinitésimale de la vitesse  $dV$  à la déviation infinitésimale  $d\theta$  à travers une onde de force décroissante. Dans la limite précise d'une onde de Mach, bien sûr  $dV$  et donc  $d\theta$  sont nulles. En ce sens, l'équation (1.70) est une équation approximative pour une onde de Mach finie.  $d\theta$  mais elle devient une véritable égalité lorsque  $\theta \rightarrow 0$ . Étant donné que la détente est une région composée d'un nombre infini d'ondes de Mach, l'équation (1.70) est une équation différentielle qui décrit précisément l'écoulement à l'intérieur de l'onde de détente. Intégrons l'équation (1.70) de la région 1, où l'angle de déflexion est nul et le nombre de Mach égal à  $M_1$  à la région 2, où l'angle de déviation est de  $\theta$  et le nombre de Mach est  $M_2$ :

$$\int_0^\theta d\theta = \theta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} \quad (1.71)$$

Pour réaliser l'intégrale du côté droit de l'équation (1.71),  $dV/V$  doit être obtenue en termes de  $M$  comme suit. D'après la définition du nombre de Mach,  $\mathbf{M} = \mathbf{V}/a$  nous avons  $V = Ma$ , ou :

$$\ln V = \ln M + \ln a \quad (1.72)$$

En faisant la différence avec l'équation (1.72), on obtient

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \quad (1.73)$$

Nous avons

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (1.74)$$

En résolvant l'équation (1.74), nous obtenons

$$a = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2} \quad (1.75)$$

En faisant la différence avec l'équation (1.75), on obtient

$$\frac{da}{a} = -\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} dM \quad (1.76)$$

En substituant l'équation (1.76) dans (1.73), on obtient

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + [(\gamma-1)/2]M^2} \frac{dM}{M} \quad (1.77)$$

L'équation (1.77) est une relation pour  $dV/V$  strictement en termes de  $M$ , c'est précisément ce que l'on souhaite pour l'intégrale de l'équation (9.33). Par conséquent, en substituant l'équation (1.77) dans (1.71), on obtient :

$$\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + [(\gamma-1)/2]M^2} \frac{dM}{M} \quad (1.78)$$

$$v(M) \equiv \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+[(\gamma-1)/2]M^2} \frac{dM}{M} \quad (1.79)$$

Dans l'équation (1.78) l'intégrale est appelée fonction de Prandtl-Meyer. En effectuant l'intégration, l'équation (1.79) devient :

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (1.80)$$

La constante d'intégration qui apparaîtrait normalement dans l'équation (1.80) n'est pas importante, car elle disparaît lorsque l'équation (1.80) est utilisée pour l'intégrale définie de l'équation (1.78). Pour des raisons de commodité, elle est choisie égale à zéro, de sorte que  $v(M) = 0$  lorsque  $M = 1$ . Enfin, nous pouvons maintenant écrire l'équation (1.78), combinée avec (9.41), comme suit

$$\theta = v(M_2) - v(M_1) \quad (1.81)$$

où  $v(M)$  est donné par l'équation (1.80) pour un gaz caloriquement parfait. La fonction de Prandtl-Meyer  $v$  est très importante ; elle est la clé du calcul des changements à travers une onde de détente. En raison de son importance, la fonction de Prandtl-Meyer  $v$  est présentée sous forme de tableau en fonction du nombre de Mach  $M$ . Pour plus de commodité, les valeurs de  $\mu$  sont également présentées.

L'onde de détente est isentropique ; par conséquent,  $p_0$  et  $T_0$  sont constantes tout au long de l'onde. C'est-à-dire que  $T_{0,2} = T_{0,1}$  et  $p_{0,2} = p_{0,1}$

Alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_{0,2}}{T_1/T_{0,1}} = \frac{1+[(\gamma-1)/2]M_1^2}{1+[(\gamma-1)/2]M_2^2} \quad (1.82)$$

Et :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p_0}{p_1/p_0} = \left( \frac{1+[(\gamma-1)/2]M_1^2}{1+[(\gamma-1)/2]M_2^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (1.83)$$

Puisque nous connaissons à la fois  $M_1$  et  $M_2$  ainsi que  $T_1$  et  $p_1$  les équations (1.82) et (1.83) permettent de calculer  $T_2$  et  $p_2$  en aval de l'onde de détente [35].

## 1.5 Théorie de TAYLOR-MACCOLL pour un écoulement autour du cône :

### 1.5.1 Equation Gouvernante:

L'équation gouvernante de l'écoulement conique est obtenue en appliquant l'équation de continuité, l'équation d'Euler et les relations thermodynamiques du processus adiabatique en coordonnées sphériques figure (1.9), (1.10) et (1.11). En outre, les hypothèses d'écoulement conique sont utilisées:

$$\text{Écoulement axisymétrique } \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$$

Les propriétés d'écoulement sont constantes le long d'un rayon à partir du sommet du cône  $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$

$$\text{Écoulement irrotationnel } \nabla \times V \equiv 0$$

Le résultat est l'équation de Taylor-Maccoll pour la solution de l'écoulement conique

$$\frac{\gamma-1}{2} \left[ V_{\max}^2 - V_r^2 - \left( \frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \right] \left[ 2V_r + \frac{dV_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right] - \frac{dV_r}{d\theta} \left[ V_r \frac{dV_r}{d\theta} + \frac{dV_r}{d\theta} \frac{d^2V_r}{d\theta^2} \right] = 0 \quad (1.84)$$

Notez qu'il s'agit d'une équation différentielle ordinaire, avec une seule variable dépendante,  $V$ , Sa solution donne  $V_r' = f(\theta)$ .

La vitesse normale peut être calculée à l'aide de la relation choisie à partir de l'équation de continuité:

$$V_2 = \frac{dV_r}{d\theta} \quad (1.85)$$

Le champ de pression est évalué à l'aide de la relation (1.84):



$$\frac{p}{p_{03}} = \left[ 1 - \left( \frac{V_r}{a} \right)^2 - \left( \frac{V_\theta}{a} \right)^2 \right]^{1/\gamma-1} \quad (1.86)$$

### 3.2 Conditions Limites:

L'équation (1.84) est une équation différentielle ordinaire (EDO) de second ordre qui nécessite deux conditions aux limites pour que le modèle mathématique soit bien posé.

#### Surface du cône solide :

C'est la surface commune non pénétrable B.C., qui stipule qu'aucun écoulement ne traverse la surface:

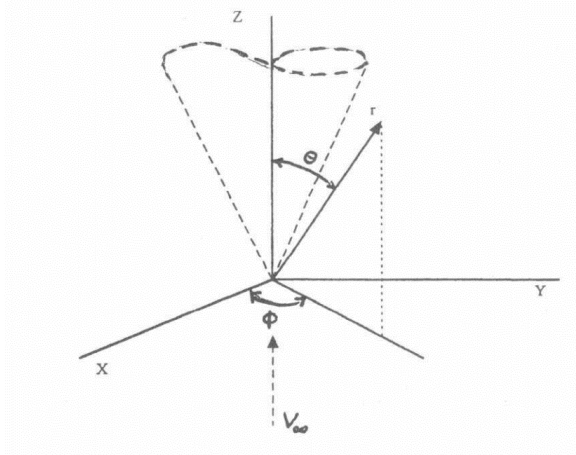
$$\vartheta = \vartheta_c V_y = \frac{dV_y}{d\vartheta} = 0 \quad (1.87)$$

#### Condition de l'onde de choc :

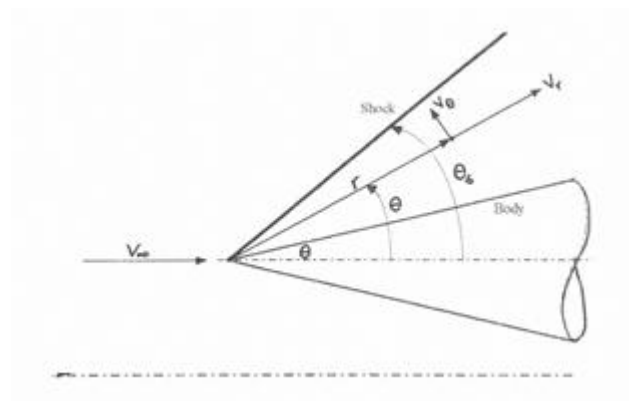
En calculant le choc polaire, on peut prouver graphiquement une relation entre l'angle de l'onde de choc et le vecteur vitesse :

$$\vartheta = \theta \frac{-1}{6} \frac{1 - \left( \frac{V_y}{V_{\max}} \right)^2}{\left( \frac{V_y}{V_{\max}} \right) \left( \frac{V_\theta}{V_{\max}} \right)} = \tan \vartheta_s \quad (1.88)$$

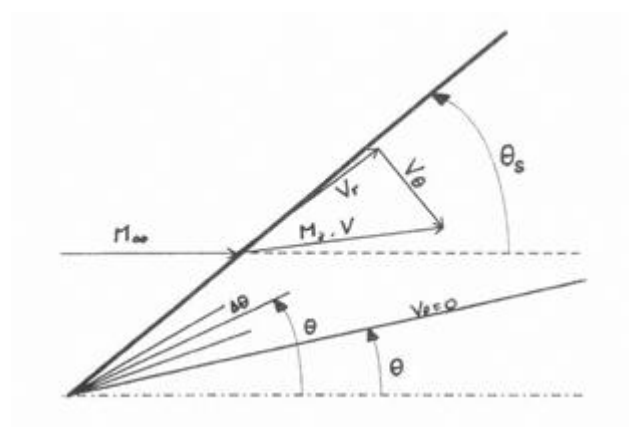
Les équations (1.87 et 1.88) forment un ensemble complet mais peu pratique des conditions aux limites pour l'équation différentielle. Une difficulté majeure étant que nous n'avons pas de méthode directe pour détecter l'angle de l'onde de choc  $\vartheta_s$  avant de résoudre le problème. En conséquence, une sorte d'itération doit être utilisée. De plus, l'équation différentielle est non linéaire, de second ordre, et avec des coefficients variables. Cela fait qu'une solution analytique fermée pour ce système n'est pas une option et une technique numérique pour résoudre le système ci-dessus est présentée et discutée.



**Figure 1.10** Système de coordonnées sphériques



**Figure 1.11** Système de coordonnées sphériques pour un cône



**Figure 1.12** Géométrie de la solution numérique de l'écoulement sur un cône

### 1.2.1 Procédure Numérique :

Lisez le nombre de Mach de l'écoulement libre  $M_\infty$  et l'angle de semi-sommet du cône  $\vartheta$ . Supposez la valeur de la vitesse radiale à la surface du cône  $V_r$  résolvez (1.89) avec des étapes  $\Delta\vartheta$  s'éloignant de la surface du cône jusqu'à ce que (1.88) soit satisfait. L'angle obtenu est l'angle de l'onde de choc correspondant à la vitesse  $V$  sur la surface. Calculez également le nombre de Mach correspondant après l'onde de choc  $M_2$  en utilisant les équations suivantes :

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)M^2} + 1}} \quad (1.89)$$

En utilisant les relations de choc oblique, calculer le nombre de Mach en écoulement libre correspondant à  $M_2$  et  $\vartheta_s$  obtenu à partir de l'étape 2.

$$M_{n2}^2 = \frac{M_{n1}^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_{n1}^2 - 1} \quad (1.90)$$

Comparez le nombre de Mach obtenu avec le nombre requis. Modifiez la valeur supposée de la vitesse radiale sur la surface du cône  $V$  et répétez l'opération 1.87 – 1.89 jusqu'à ce que vous obteniez le nombre de Mach requis [36].

# **CHAPITRE 2**

## **Ecoulement Hypersonique**

## 2. Écoulement hypersonique

### 2.1 Écoulement hypersonique non visqueux

Pour des considérations d'écoulement hypersonique plus importantes, une analyse détaillée du champ d'écoulement est nécessaire. Les détails de chaque champ d'écoulement sont régis par un ensemble d'équations comportementales qui peuvent être exprimées sous forme d'équations différentielles intégrales ou partielles. Des solutions approximatives à ces équations existent pour diverses applications hypersoniques. Ces solutions approximatives sont basées sur des théories pures de la dynamique des fluides. La solution au champ d'écoulement hypersonique était disponible grâce à des considérations théoriques avant l'avènement des grands ordinateurs à haute vitesse. Formulations analytiques ou techniques approximatives. Cependant, bon nombre de ces analyses plus anciennes impliquant des approximations pour résoudre les équations sont aussi pertinentes pour la théorie hypersonique moderne aujourd'hui qu'elles l'étaient dans les années 1950. Le principal avantage des approximations de la théorie de l'écoulement hypersonique est qu'elles illustrent la physique. Résultats de plus de méthodes de résolution exactes (numériques).

#### 2.1.1 Les équations gouvernantes :

L'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Les équation de quantité de mouvement:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.4)$$

Equation d'énergie:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Dans ce qui précède,  $\rho$  est la masse volumique ;  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement les composantes de la vitesse selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  ;  $p$  est la pression et  $s$  est l'entropie.

Les équations (2.1-2.5) sont les équations bien connues d'Euler, qui régissent les écoulements non visqueux.

L'entropie à partir de l'équation d'énergie peut être à nouveau remplacée par:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{Cte} \quad (2.6)$$

Qui s'applique pour un processus isentropique dans un gaz idéal le long d'une ligne de courant. Par conséquent, l'équation énergétique peut s'écrire:

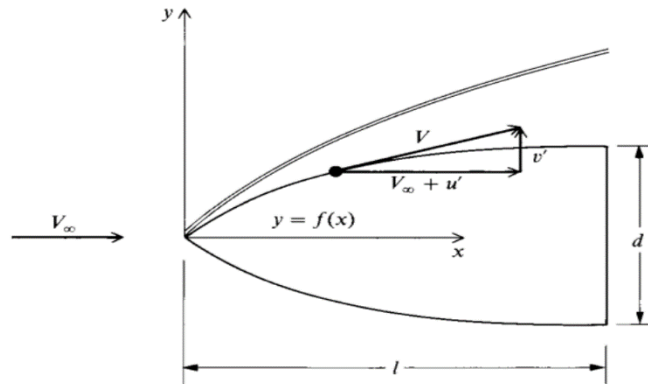
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad (2.7)$$

La solution des équations ci-dessus pour un problème dépend des conditions aux limites et initiales de ce problème.

### 2.1.2 Théorie des petites perturbations en hypersonique :

Certaines applications hypersoniques spéciales nécessitent des configurations d'avions à faible traînée et à haute portance ou à haute portance et à haute traînée ( $L/D$ ). Par

conséquent, les configurations à fuselage mince sont généralement préférées dans ce cas. Spécifiquement pour ces contraintes, équations peuvent être dérivées. Cette formulation est appelée équations de petites perturbations hypersoniques. Considérez un corps mince typique comme le montre la figure (2.1)



**Figure 2. 1**Écoulement autour d'un cône mince.

La vitesse de l'écoulement de l'infini amont  $V_\infty$  est modifiée derrière le choc puis sur le corps. On suppose que le changement de cette vitesse est plus tout en traversant le choc en comparaison avec le changement qui se produit pendant la trajectoire du fluide sur le corps.

Soit  $u'$  et  $v'$  le changement des composantes du vecteur vitesse le long de  $x$  et  $y$ . Ainsi, la vitesse en tout point de la surface du corps peut être donnée par :

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} = \hat{i}u + \hat{j}v = \hat{i}(V_\infty + u') + \hat{j}v' \quad (2.a)$$

Les composantes de la vitesse :

$$u = V_\infty + u' \quad (2.b)$$

$$v = v' \quad (2.c)$$

Les changements de vitesse, c'est-à-dire  $u'$  et  $v'$  sont appelés vitesses de perturbation. Ces changements peuvent ne pas être toujours faibles. Cependant, pour un écoulement hypersonique sur un corps mince, nous supposons que ces changements sont faibles par rapport à la vitesse de l'écoulement amont non perturbé.

$$u' \ll V_\infty \quad (2.d)$$

$$v' \ll V_\infty \quad (2.e)$$

La surface du corps élané suivre un profil représenté mathématiquement par  $y = f(x)$ . Puisque la vitesse  $V$ , en tout point de la surface du corps est tangente en ce point de la surface, la pente de la vitesse et la pente de la tangente à la surface sont identiques. Par conséquent, cette condition de tangence peut s'écrire :

$$\frac{v'}{V_\infty + u'} = \frac{dy}{dx} \quad (2.8)$$

Cependant, en examinant la figure 2.3, on remarque que:

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{O}\left(\frac{d}{l}\right) \quad (2.9)$$

où le symbole  $\mathcal{O}$  signifie "ordre de". On Définit le rapport d'élanement  $\tau$  par:

$$\frac{d}{l} = \tau \quad (2.f)$$

A partir des équations (2.7) et (2.8) :

$$\frac{v'}{V_\infty + u'} = \frac{dy}{dx} = \theta(\tau) \quad (2.10)$$

Puisque  $u' \ll V_\infty$ , alors l'équation (2.9) est approximée par :

$$\frac{v'}{V_\infty} = \mathcal{O}(\tau) \quad (2.11)$$

Soit  $a_\infty$ , la vitesse de l'écoulement amont non perturbé du son. A partir de l'équation (2.10) :

$$\frac{v'}{a_\infty} = \frac{V_\infty}{a_\infty} [\mathcal{O}(\tau)] \quad (2.i)$$



ou

$$\frac{v'}{a_\infty} = \mathcal{O}(M_\infty \tau) \quad (2.12)$$

D'où l'intensité de la perturbation de l'écoulement par rapport à  $a^\circ(v')/V_\infty$  est d'ordre de  $M_\infty \tau$ . Cette expression indique également que  $M_\infty \tau$  est un paramètre de similitude hypersonique. Ces informations sont extraites uniquement des conditions aux limites.

Nous pouvons exprimer les équations d'Euler en état stationnaire en termes de vitesses de perturbation,  $u'$  et  $v'$  pour un écoulement stationnaire.

$$\frac{\partial[\rho(V_\infty + u')]}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v')}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w')}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

$$\rho(V_\infty + u') \frac{\partial(V_\infty + u')}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial(V_\infty + u')}{\partial y} + \rho w' \frac{\partial(V_\infty + u')}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\rho(V_\infty + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \rho w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$\rho(V_\infty + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \rho w' \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$\rho(V_\infty + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial w'}{\partial y} + \rho w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.17)$$

$$(V_\infty + u') \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + w' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.18)$$

De l'équation (2.17)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau^2} + \bar{u}' \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x} \bar{\rho}^\gamma} \left[ V_\infty \tau^4 \gamma p_\infty M_\infty^2 \rho_\infty^\gamma \right] + \bar{v}' \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y} \bar{\rho}^\gamma} \left[ \frac{\gamma V_\infty \tau^3 p_\infty M_\infty^2 \rho_\infty^\gamma}{\tau} \right] \\ + \bar{w}' \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z} \bar{\rho}^\gamma} \left[ \frac{V_\infty \tau^3 \gamma p_\infty M_\infty^2 \rho_\infty^\gamma}{\tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.A)$$

Ou:

$$(1 + \tau^2 \bar{u}') \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) + \bar{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) + \bar{w}' \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) = 0 \quad (2.19)$$

En examinant attentivement les équations (2.13-2.18). En raison de notre choix de variables adimensionnelles, chaque terme dans ces équations est de l'ordre de grandeur unité sauf pour ceux multipliés par  $\tau^2$ , qui est très petit. Par conséquent, les termes impliquant  $\tau^2$ , peuvent être ignoré par rapport aux termes restants et les équations (2.13-2.18) peuvent être écrit comme :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}')}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w}')}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.20)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{y}} + \bar{\rho}\bar{w}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (2.21)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{y}} + \bar{\rho}\bar{w}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (2.22)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{w}'}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial \bar{y}} + \bar{\rho}' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\bar{v}'} \right) + \bar{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\bar{v}'} \right) + \bar{w}' \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}\bar{v}'} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Les équations (2.19 – 2.23) sont les équations hypersoniques des petites perturbations. Ils approximent l'écoulement hypersonique sur des corps élancés. Ils sont limités à des écoulements sur des corps élancés car nous avons négligé les termes d'ordre  $\tau^2$ .

Les équations (2.19 – 2.23) présentent une propriété intéressante. Recherchez  $\bar{u}'$  dans ces équations ; vous ne pouvez le trouver que dans l'équation (2.20). Par conséquent, dans les équations des petites perturbations hypersoniques,  $\bar{u}'$  est découplé du système.

En principe, les équations (2.19) et (2.21 – 2.23) constituent quatre équations pour les quatre inconnues,  $\bar{p}, \bar{v}', \bar{v}'$  et  $\bar{w}'$ . Une fois ce système résolu,  $\bar{u}'$  découle directement de l'équation (2.20). Les équations (2.19 – 2.23) ont été obtenues à partir des équations générales non linéaires régissant l'écoulement (2.1 – 2.5). Mais bien qu'elles contiennent l'hypothèse des petites perturbations, les équations (2.19 – 2.23) sont toujours non linéaires.

### 2.1.3 Théorie hypersonique des petites perturbations :

Quelques résultats pour commencer, considérons les équations hypersoniques des petites perturbations écrites pour un écoulement bidimensionnel et rappelons que l'équation de quantité de mouvement selon x est découplée des équations restantes dans le système. Pour ce cas, à partir de l'équation (2.19), (2.21) et (2.23), nous avons :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}')}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.25)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^{\gamma}} \right) + \bar{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^{\gamma}} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Qui sont trois équations à résoudre pour les trois inconnues  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$ . Cependant, ce système peut être réduit à une seule équation en termes d'une inconnue en introduisant une fonction de courant  $\psi$ , définie par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = \bar{\rho} \quad (2.28)$$

Et :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = -\bar{\rho}\bar{v}' \quad (2.29)$$

Pour qu'elle soit une fonction courant valide,  $\psi$  doit satisfaire l'équation de continuité. En substituant les équations (2.) et (2.) dans l'équation (2.), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Ou :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \equiv 0 \quad (2.31)$$

C'est-à-dire que  $\psi$  telle qu'elle est définie dans les équations (2.32) et (2.28) satisfait bien l'équation de continuité. En utilisant la notation en indice pour les dérivées partielles, les équations (2.33) et (2.28) deviennent :

$$\bar{\rho} = \psi_{\bar{y}} \quad (2.34)$$

Et :

$$\vec{v}' = -\frac{\psi_{\bar{x}}}{\bar{\rho}} = -\frac{\psi_{\bar{x}}}{\psi_{\bar{y}}} \quad (2.35)$$

Egalement, notons  $\bar{p}/\bar{\rho}^\gamma$  par  $\omega$ , où  $\omega$  est fonction de  $\psi$  uniquement. Cela est vrai car, pour un écoulement isentropique,  $\bar{p}/\bar{\rho}^\gamma$  est constant le long d'une ligne de courant, et par définition d'une fonction de courant,  $\psi$  est également constant le long d'une ligne de courant. Par conséquent :

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} = \omega(\psi) \quad (2.36)$$

Ou :

$$\bar{p} = \omega \bar{\rho}^\gamma = \omega(\psi_{\bar{p}})^\gamma \quad (2.38)$$

De l'équation (2.38):

$$\frac{\partial \vec{t}'}{\partial \bar{x}} = \frac{-\psi_{\bar{s}} \psi_{\bar{u}} + \psi_{\bar{x}} \psi_{\bar{x}}}{(\psi_{\bar{y}})^2} \quad (2.37)$$

Et:

$$\frac{\partial \vec{t}}{\partial y} = \frac{-\psi_i \psi_i + \psi_i \psi_z}{(\psi_i)^2} \quad (2.38)$$

De l'équation (2.392):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \omega \gamma (\psi_j)^{\gamma-1} \psi_{j\bar{y}} + (\psi_j) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} \quad (2.40)$$

Comme:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{y}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = \omega' \psi_{j\bar{y}} \quad (2.41)$$

Alors, l'équation (2.42) devient:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \gamma \omega (\psi_j)^{\gamma-1} \psi_{j\bar{y}} + \omega' (\psi_j)^{\gamma+1} \quad (2.43)$$

Ou bien:

$$(\psi_{j\bar{y}})^2 \psi_{\bar{x}\bar{x}} - 2\psi_{j\bar{x}} \psi_{j\bar{y}} \psi_{i\bar{x}} + (\psi_{\bar{x}})^2 \psi_{j\bar{y}} = (\psi_{j\bar{y}})^{\gamma+1} [\gamma \omega \psi_{j\bar{y}} + \omega' (\psi_j)^2] \quad (2.44)$$

L'équation (2.37) est une équation unique pour une seule inconnue, à savoir  $\psi$ , basée sur les hypothèses des petites perturbations en hypersonique. Elle est valable pour un écoulement bidimensionnel; par conséquent, elle peut être appliquée à des formes bidimensionnelles telles que des profils aérodynamiques.

Par contre, pour un corps axisymétrique, un système de coordonnées cylindriques ( $x, r, \phi$ ) est plus pratique, où  $x$  et  $r$  sont les coordonnées parallèles et perpendiculaires respectivement à l'axe du corps, et  $\phi$  est l'angle azimutal. Pour un corps axisymétrique à angle d'attaque nul, le champ d'écoulement est indépendant de  $\phi$  et ne dépend que de  $x$  et  $r$ . Dans ce cas, les équations de perturbation hypersoniques gouvernantes deviennent:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}')}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{p}}{\bar{r}} = 0 \quad (2.45)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}\bar{v}' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \bar{r}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) + \bar{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) = 0 \quad (2.46)$$

Elles sont semblables aux équations(2.24 – 2.26), à l'exception du terme supplémentaire dans l'équation (2.38). Dans ce qui précède,  $\bar{x} = x/l, \bar{r} = r/\tau l, \bar{v}'$  est la vitesse de perturbation non dimensionnelle dans la direction  $\bar{r}$  et toutes les autres quantités sont les mêmes qu'avant. Pour l'écoulement axisymétrique décrit par les équations (2.38) et (2.39), une fonction de courant  $\psi$  peut être définie par:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} = \bar{r}\bar{\rho}^2 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = -\bar{r}\bar{\rho}\bar{v}' \quad (2.48)$$

Une dérivation similaire à celle de l'équation (2.37) conduit à l'équation ci-dessous pour un écoulement axisymétrique:

$$\begin{aligned} & (\psi_{\bar{r}})^2 \psi_{\bar{x}} - 2\psi_{\bar{r}} \psi_{\bar{x}} \psi_{\bar{r}} + (\psi_{\bar{x}})^2 \psi_{\bar{r}} \\ & = \frac{(\psi_{\bar{r}})^{\gamma+1}}{\bar{r}^{\gamma-1}} \left[ \gamma \omega \left( \psi_{\bar{r}} - \frac{\psi_{\bar{x}}}{\bar{r}} \right) + \omega' (\psi_{\bar{r}})^2 \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'équation (2.43) présente une analogie axisymétrique avec l'équation (2.37). Comme précédemment, il s'agit d'une seule équation en termes d'une inconnue, à savoir  $\psi$ . En principe, l'équation (2.43) est plus facile à résoudre que le système couplé d'origine de trois équations, à savoir les équations (2.38-2.40).

Nous allons illustrer une solution de l'équation (2.43) pour le cas d'un écoulement sur un cône circulaire droit mince à angle d'attaque nul. Dans ce cas, nous profitons de la nature de l'écoulement conique, à savoir que les propriétés d'écoulement sont constantes le long de n'importe quel rayon émanant du sommet du cône.

$$\tau = \frac{r_c}{x} \quad (2.g)$$

Les variables transformés :

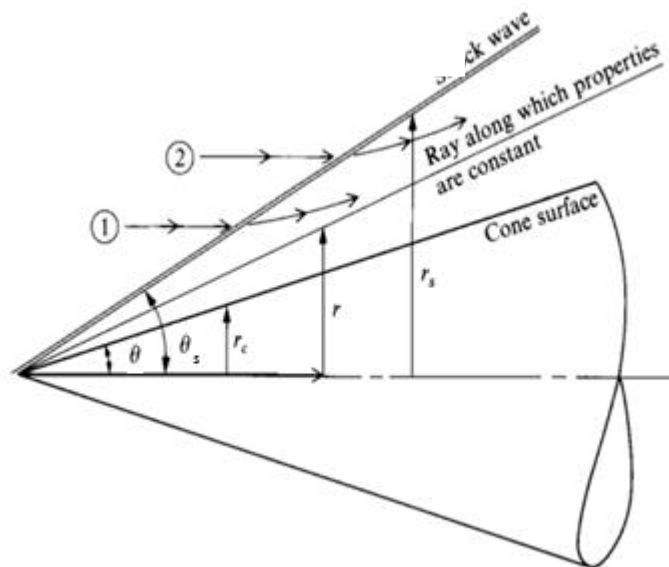
$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{r} = r/\tau \end{cases}$$

$\theta_c$  = angle de cône

$\beta$  = angle de Shock angle

Les variables transformés du cône :

$$\bar{\theta} = \tilde{r}/\tilde{x} = r/\tau x$$



**Figure 2.** 2Modèle d'écoulement autour d'un cône en présence d'onde de choc oblique.

$$\vec{\theta} \equiv \frac{\vec{r}}{\bar{x}} = \frac{r}{\tau x} \quad (2.50)$$

$$\psi = \bar{x}^2 f(\vec{\theta}) \quad (2.51)$$

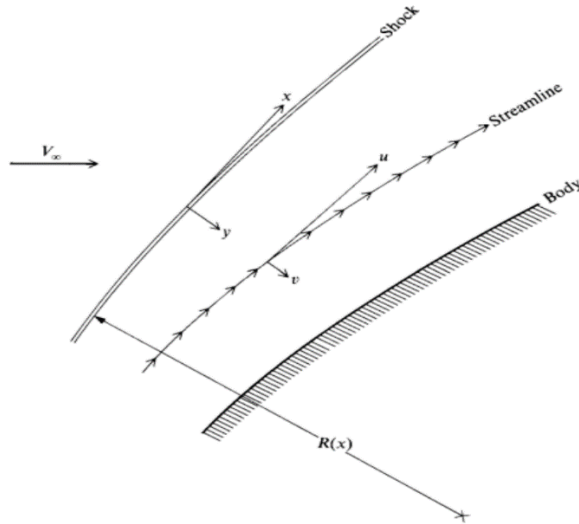
#### 2.1.4 Théorie de couche de choc mince :

La théorie de la couche de choc mince est basée sur l'hypothèse que le choc est beaucoup plus proche du corps, ce qui conduit à son tour à un petit volume entre le choc et le corps. Cette situation est typique pour les écoulements à un nombre de Mach très élevé à travers des configurations hypersoniques. Dans de telles situations, nous pouvons supposer que,  $M_\infty \rightarrow \infty$  et  $\gamma = 1$

Comme il a été observé que l'angle de choc et l'angle de déviation sont presque égaux pour le régime d'écoulement hypersonique, nous pouvons exprimer ce fait comme  $\beta \rightarrow \theta$ . Pour un tel état de nombre de Mach élevé dans la couche de choc, nous aurons la même équation pour le choc, le corps et toute ligne de courant dans le choc. C'est l'hypothèse de base de la théorie de couches de choc mince.

On considère le corps et le choc comme le montre la figure 2.3. Ici, le système de coordonnées est tel que l'axe x est parallèle au choc tandis que l'axe y est perpendiculaire au choc. Soit u et v les composantes de la vitesse dans les directions x et y respectivement et on suppose que l'écoulement est bidimensionnel pour la présente illustration.





**Figure 2. 3** Modèle de couche de choc pour l'analyse de la couche de choc mince par Maslen.

Dans un système de coordonnées basé sur une ligne de courant, l'équation de quantité de mouvement normale à une ligne de courant est :

$$\rho \frac{u^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.52)$$

Où  $R$  est le rayon de courbure de la ligne de courant locale. Pour les hypothèses précédentes, l'équation (2.53) devient :

$$\frac{\rho u^2}{R_s} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.54)$$

Où  $R_s$  est le rayon de courbure de choc. Définissez une fonction de courant  $\psi$  telle que;

$$\rho u = \frac{d\psi}{dy} \quad (2.55)$$

et remplacer  $y$  dans l'équation (2.56) par  $\psi$  [c'est-à-dire en introduisant une transformation de von Mises de telle sorte que les variables indépendantes sont  $(x, \psi)$  plutôt que  $(x, y)$ ] :

$$\rho \frac{u^2}{R_s} = \frac{\partial p}{\partial \psi} (\rho u) \quad (2.56)$$

Ou

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{u}{R_s} \quad (2.57)$$

Encore une fois, pour être cohérent avec ce qui se passe pour une couche de choc mince où toutes les lignes de courant sont essentiellement parallèles au choc,  $u \approx u_{s_t}$  la vitesse juste derrière le choc. Ainsi, l'équation (2.58) devient

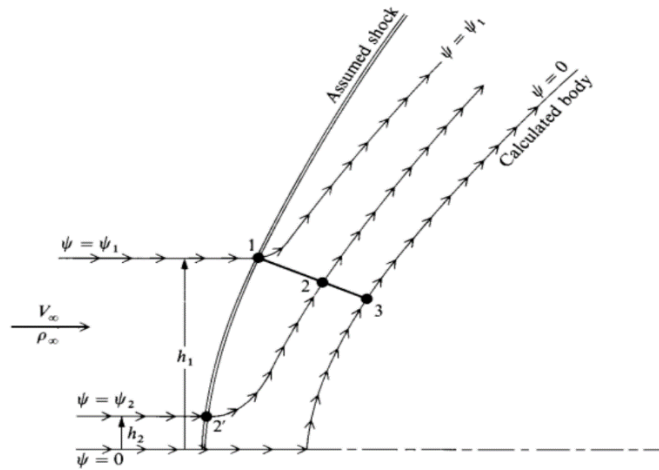
$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{u_s}{R_s} \quad (2.58)$$

En intégrant l'équation (2.59) entre un point de la couche de choc où la valeur de la fonction de flux est  $\psi$  et juste derrière l'onde de choc où  $\psi = \psi_s$ , on obtient:

$$p(x, \psi) = p_s(x) + \frac{u_s(x)}{R_s(x)} [\psi - \psi_s(x)] \quad (2.59)$$

L'équation (2.60) est au cœur de la méthode de Maslen. La solution du champ d'écoulement progresse comme suit:

1- On suppose la forme de l'onde de choc, comme le montre la figure 2.4. En ce sens, la méthode de Maslen est une méthode inverse, où une onde de choc est supposée et le corps qui supporte ce choc est calculé.



**Figure 2. 4**Détails pour l'analyse de Maslen

Par conséquent, toutes les quantités de l'écoulement sont connues au point 1 figure 2.4 juste derrière le choc en utilisant les relations de choc oblique. La valeur de  $\psi = \psi_1$  au point 1 est obtenue de:

$$\psi_1 = \rho_\infty V_\infty h_1 \quad (2.k)$$

2- On Choisi une valeur de  $\psi_2$ , où  $0 < \psi_2 < \psi_1$ . Cela identifie le point 2 à l'intérieur du champ d'écoulement le long de l'axe y, comme le montre la figure 2.4 , où  $\psi = \psi_2$  (valeur précise de la coordonnée physique  $y_2$  sera trouvée dans l'étape ultérieure).

3- Calculez la pression au point 2 à partir de l'équation (2.60).

$$p_2 = p_1 + \frac{u_1}{(R_1)} (\psi_2 - \psi_1) \quad (2.L)$$

4- L'entropie au point 2,  $s_2$  est connue car la ligne de courant au point 2, correspondant à  $\psi' = \psi_2$ , est passée par ce point sur l'onde de choc, point 2', où  $\psi_2 = \psi_2$  et où:

$$\psi_2 = \psi_2 = \rho_\infty V_\infty h_2$$

Ou

$$h_2 = \frac{\psi_2}{\rho_\infty V_\infty} \quad (2.60)$$

5- Par conséquent,  $h_2$  est obtenu à partir de l'équation (2.61), qui situe le point 2' sur le choc. Dans à son tour,  $s_2$  'est connu à partir des relations de choc oblique et parce que l'écoulement est isentropique le long d'une ligne de courant donnée  $s_2 = s_2$  :

6- Calculer l'enthalpie  $h_2$  et la densité  $\rho_2$  à partir des équations d'état thermodynamiques

$$h_2 = h(s_2, p_2) \quad (2. m)$$

$$p_2 = \rho(s_2, p_2) \quad (2. n)$$

7- Calculez la vitesse au point 2 à partir de l'équation d'énergie adiabatique (l'enthalpie totale est constant), par conséquent :

$$h_0 = h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (2.o)$$

où  $h_0$  est l'enthalpie totale, qui est constant tout au long du champ d'écoulement adiabatique. En ignorant  $v_2$ , à son tour:

$$h_0 = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.p)$$

Ou

$$u_2 = \sqrt{2(h_0 - h_2)} \quad (2.q)$$

8- Toutes les quantités de l'écoulement sont maintenant connues au point 2. En se référant aux figures 2.3 et 2.4 répéter les étapes précédentes pour tous les points le long de l'axe  $y$  entre le choc (point 1) et le corps (point 3). La surface du corps est définie par  $\psi = 0$ .

La coordonnée physique, qui correspond à une valeur particulière de  $\psi$ , peut maintenant être trouvée en intégrant la fonction de flux (qui est en réalité l'équation de continuité) :

$$\frac{d\psi}{dy} = \rho u \quad (2.r)$$

Alors :

$$y = \int_{\phi}^{\psi} \frac{d\psi}{\rho u} \quad (2. 61)$$

Où  $\rho$  et  $u$  sont connus en fonction de  $\psi$  à partir des étapes précédentes. Cela localise également les coordonnées du corps, où :

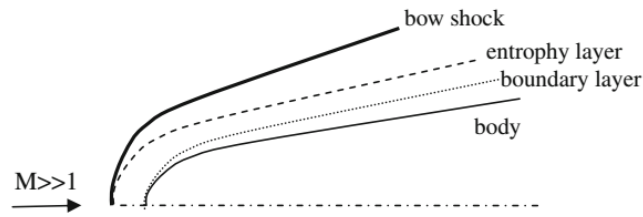
$$y_b = \int_0^{\psi_s} \frac{d\psi}{\rho u} \quad (2.s)$$

10- Cette procédure est répétée pour tout nombre souhaité de points le long de l'onde de choc spécifiée, générant ainsi le champ d'écoulement et la forme du corps qui supportent ce choc.

Encore une fois, rappelez-vous que dans ce qui a précédé, on a supposé que l'écoulement est bidimensionnel. L'extension à un corps axisymétrique est simple [37].

## 2.2 Écoulement hypersonique visqueux

Il y a deux raisons importantes de considérer les effets réels du gaz dans les écoulements hypersoniques. La première raison est de prédire la traînée visqueuse sur le corps, et la seconde est de déterminer l'échauffement causé par les gradients de vitesse très élevés de l'écoulement libre qui est le point d'arrêt sur le corps. L'effet de chauffage est beaucoup plus aux points de stagnation des corps minces par rapport à celui des corps émoussés. Par exemple, le chauffage au nez d'un corps mince rentrant est trois fois plus que celle de la navette spatiale (Anderson, 1989). D'autre part, la traînée causée par un choc fort détaché est très élevée. Toutefois, la traînée de frottement de la paroi devient plus élevée pour les corps minces en raison des couches limites plus minces par opposition aux couches limites des corps émoussés. En outre, nous devons garder à l'esprit qu'en raison de la faible densité produisant un nombre de Reynolds, les couches limites de l'écoulement hypersonique doivent être épaisses par rapport aux écoulements à basse vitesse, ce qui est quelque peu contraire à la pratique. De plus, derrière le choc détaché se produisant au nez d'un corps émoussé, il existe une couche dans laquelle le changement d'entropie est fort. Cette couche est plus épaisse que la couche limite et le gradient d'entropie dans cela provoque des vorticités même en dehors de la couche limite, comme le montre la figure 2.5.



**Figure 2. 5** Couche d'entropie et couche limite autour d'un corps émoussé dans un écoulement hypersonique

Le théorème donne la relation entre le gradient d'entropie et la vorticité générée par ce gradient comme suit (Liepmann et Roshko),

$$V_x \omega = -T \text{grad } S^2 \quad (2.62)$$

Pour cette raison, lors de l'étude de l'écoulement hypersonique autour d'un corps émoussé, le changement d'entropie doit être fort.

Maintenant, il devient nécessaire de dériver la formule de l'épaisseur de la couche limite en termes de nombre de Reynolds et de Mach de l'écoulement. Comme nous le rappelons de la théorie visqueuse incompressible, l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds, c'est-à-dire à la station l'épaisseur de la x couche limite:

$$\delta \propto x / \sqrt{R_e} \quad (2.t)$$

Dans la couche limite compressible, la densité et la viscosité changent considérablement avec la température. Par conséquent, écrivons le nombre de Reynolds en termes de viscosité et de densité à la station x sur la surface :

$$\delta \propto x / \sqrt{\rho_w U_{e,x} / \mu_w} \quad (2.u)$$

Ici, l'indice e fait référence à l'arête de la couche limite et w indique les conditions du mur. Maintenant, nous pouvons écrire l'épaisseur de la couche limite comme suit:

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{\rho_c U_c x / \mu_c}} \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_w}} \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_c}} = \frac{x}{\sqrt{R_c}} \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_w}} \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_c}} \quad (2.63)$$

Selon l'hypothèse de la couche limite, la pression reste constante à une station donnée. Par conséquent, avec l'hypothèse de gaz parfait, nous avons :

$$\rho_e / \rho_w = T_w / T_c \quad (2.v)$$

En supposant une dépendance linéaire de la viscosité sur la température absolue Eq. (2.65) devient :

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{R_e}} \frac{T_w}{T_e} \quad (2.64)$$

Si nous supposons que la température de paroi est la température de stagnation adiabatique à des nombres de Mach élevés, la relation entre le rapport de température et le nombre de Mach de bord devient :

$$T_w / T_c \cong (\gamma - 1) / 2 M_c^2 \quad (2.w)$$

L'épaisseur de la couche limite hypersonique se lit comme suit :

$$\frac{\delta}{x} \propto \frac{M_c^2}{\sqrt{R_c}} \quad (2.65)$$

Selon l'équation (2.67), l'épaisseur de la couche limite hypersonique est proportionnelle au carré du nombre de Mach.

Nous avons vu que l'épaisseur de la couche limite dans les écoulements hypersoniques devient très épaisse. Pour une plaque plane à angle d'attaque nul, en revanche, la pression reste la même le long de x. Est-ce encore possible pour de très grands nombres de Mach ? La réponse à cette question réside dans le paramètre défini par :

$$\bar{\chi} = \sqrt{C} \frac{M^3}{\sqrt{R_q}} \quad (2.y)$$

Si nous supposons que la viscosité change linéairement avec la température dans la couche limite, nous pouvons écrire :

$$\mu_d/\mu_w = CT_1/T_w \quad (2.z)$$

Désigne l'épaisseur de déplacement d'une couche limite à un angle d'attaque nul avec  $\delta^*$ . La pente de la surface due à l'épaisseur de déplacement se lit alors comme :

$$\theta_e = d\delta^*/dx \quad (2.a1)$$

Selon la théorie du piston, pour  $M\theta \ll 1$  une approche linéaire nous donne la distribution de pression de l'équation (2.42) comme suit :

$$p_w/p_\infty = 1 + \gamma M\theta = 1 + \gamma M d\delta^*/dx \quad (2.66)$$

Ici, à des nombres de Mach élevés, la pente pour  $\theta$  les conditions de paroi adiabatique peut être approximativement écrite comme :

$$d\delta^*/dx \cong (\gamma - 1)/2M^2\sqrt{C}/\sqrt{R_e} \quad (2.a2)$$

Lorsqu'elle est substituée dans l'équation (2.68) pour donner

$$p_w/p_\infty = 1 + \gamma(\gamma - 1)\bar{\chi}/2 \quad (2.67)$$

Cette interaction est appelée interaction faible.

Pour une interaction forte, c'est-à-dire pour  $M\theta \gg 1$ , on obtient

$$p_w/p_\infty \cong \gamma(\gamma + 1)M^2(d\delta^*/dx)^2/2 \quad (2.68)$$

La pente  $\theta$  de la plaque plate est :

$$d\delta^*/dx \cong [(\gamma - 1)/2]^{1/2}(M^2C/R_e)^{1/4} \quad (2.b1)$$

Par conséquent, pour la forte interaction que nous avons :

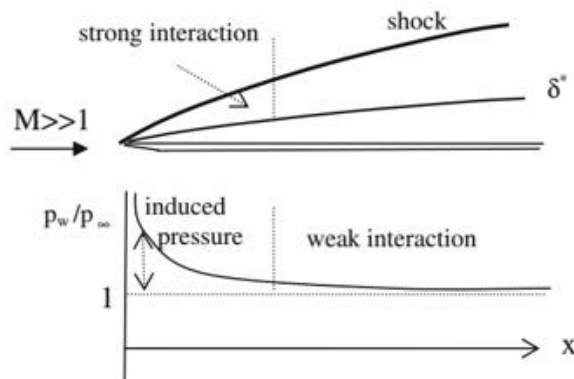
$$p_w/p_\infty \cong \gamma(\gamma^2 - 1)/2\bar{\chi} \quad (2.69)$$



Pour les deux, l'interaction faible et forte la formule de pression superficielle pour les rapports thermiques spécifiques de  $\gamma = 1.4$

$$p_w/p_\infty \cong 1 + 0.464\bar{\chi} \quad (2.70)$$

Le nombre de Reynolds dépend de  $x$ , et dans l'équation (2.72) le nombre de Reynolds est dans le dénominateur du deuxième terme, ce qui signifie autour du bord d'attaque que le terme devient très grand et que la pression de paroi devient très grande. En raison de l'interaction visqueuse, la pression autour du bord d'attaque devient très élevée par rapport à la pression de l'écoulement idéal. C'est l'indication d'une traînée très élevée et d'un échauffement intense autour du bord d'attaque pour le cas des écoulements hypersoniques. La représentation de cette interaction en termes de paroi à pression d'écoulement libre pour l'écoulement autour d'une plaque plate est montrée à la figure. 2.6.



**Figure 2. 6** Interaction d'écoulement hypersonique autour d'une plaque plane

Illustré à la figure 2.6 est l'interaction visqueuse hypersonique forte au bord d'attaque de la plaque plane pour créer une zone de pression induite. En cas de changement de pression considérable dans la région du bord d'attaque, l'analyse de la couche limite dans l'écoulement hypersonique doit être très différente de l'approche classique. En outre, étant donné que l'interaction dans la région du bord d'attaque est forte, l'effet du bord d'attaque sur les stations éloignées du point de stagnation se fait encore fortement sentir, même dans la zone d'interaction faible. Par conséquent, les solutions de couche limite obtenues dans la

région d'interaction faible dans l'écoulement hypersonique sont très différentes des solutions classiques de la couche limite.

Au bord d'attaque d'une plaque plane en raison du terme  $1/(x)^{1/2}$  dans l'équation (2.72), la pression va théoriquement à l'infini pour les nombres de Mach finis comme esquissé dans la figure 2.6. Dans la pratique, cependant, atteindre ces chiffres élevés de Mach ne se produit que lors de la rentrée à haute altitude où la densité de l'atmosphère est si faible. La faible densité à ces altitudes rend le libre parcours moyen des molécules d'air assez élevé par rapport aux dimensions du bord d'attaque, ce qui rend l'hypothèse du continuum plus valable. Pour cette raison, afin d'obtenir des résultats plus réalistes pour la pression autour du bord d'attaque, au lieu d'une approche continue, les modèles moléculaires sont préférés avec les conditions de glissement à la surface pour remplacer les conditions sans glissement comme conditions aux limites. L'utilisation de conditions de glissement aide à réduire les valeurs de pression avec le nombre de Mach et aide à donner des résultats en accord avec les valeurs expérimentales. Jusqu'à présent, nous avons vu l'interaction visqueuse de la plaque plate en écoulement hypersonique.

Maintenant, nous pouvons étendre davantage l'analyse d'interaction et donner un bref résumé pour différents types de corps dans l'écoulement hypersonique. Si nous connaissons la distribution de pression  $p_c$  sur une surface conique, alors, en raison de l'interaction visqueuse, la différence de pression induite se lit approximativement comme suit

$$\frac{p - p_c}{p_c} = 0.12 \bar{\chi}_c, \quad 0 \leq \bar{\chi}_c = M_c^3 \sqrt{C/R_{ec}} \leq 4 \quad (2.71)$$

Ici,  $c$  désigne les conditions d'écoulement potentielles à la surface conique.

Dans l'écoulement hypersonique, l'interaction visqueuse abaisse le rapport portance/trainée, en augmentant le nombre de Mach. Cet effet est plus pour les corps au nez émoussé avec des formes émoussées par opposition aux corps. Le rapport  $L/D$  maximal est de 1,7 pour un cône avec un demi-cône d'angle de  $9^\circ$  à  $M = 9$ , et il descend à  $L/D = 0.5$  à  $M = 19$  (Anderson 1989). Pour un type de corps de capsule spatiale, en revanche, les  $L/D$  plages comprises entre 0,4 et 0,2.

Le problème grave de l'interaction visqueuse dans l'écoulement hypersonique est le chauffage aérodynamique. Étudions d'abord le problème du transfert de chaleur pour une plaque plane en écoulement à grande vitesse. Si nous laissons  $q_w$  être le transfert de chaleur pour une unité de surface dans une unité de temps, nous avons :

$$q_w = S_t \rho_c U_e (h_{ad} - h_w) \quad (2.72)$$

Ici,  $S_t$  est le nombre de Stanton sans dimension,  $h_{ad}$  et  $h_w$  sont respectivement la température adiabatique de la paroi et la valeur de l'enthalpie au mur. La célèbre analogie de Reynolds stipule que le nombre de Stanton est lié au coefficient de frottement :

$$c_f = \tau_{11} / (1/2 \rho_e U_e^2) \quad (2.b3)$$

$$S_t \cong c_f / 2 \text{ (Schlichting)} \quad (2.b4)$$

La différence d'enthalpie  $h_{ad} - h_w$  dans l'équation(2.58) est le principal facteur de l'échauffement de surface dans les écoulements à grande vitesse. La valeur de l'enthalpie à la paroi est la valeur obtenue en résolvant l'équation d'énergie avec les conditions adiabatiques de la paroi. En utilisant l'approche d'ingénierie, le facteur de récupération  $r$  est utilisé pour définir les relations entre l'enthalpie de la paroi adiabatique, les conditions de bord de la couche limite et l'enthalpie de stagnation  $h_0$  pour obtenir ce qui suit :

$$h_{ad} = h_e + r U_e^2 / 2 \text{ and } h_0 = h_c + U_e^2 / 2 \quad (2.73)$$

De l'équation(2.75a, b), nous obtenons

$$r = \frac{h_{ad} - h_e}{h_0 - h_e} \quad (2.74)$$

Ici, l'enthalpie de stagnation de l'écoulement libre est toujours plus grande que l'enthalpie adiabatique du mur pour faire  $r$  est toujours inférieure à l'unité.

Définition du nombre de Prandtl comme le rapport entre la perte d'énergie visqueuse et la conduction thermique, c'est-à-dire :

$$Pr = \mu c_p / k \quad (2.c1)$$

Pour la plaque plate dans des conditions d'écoulement hypersonique que la solution de Blasius donne

$$r \cong \sqrt{Pr} \quad (2.75)$$

L'équation (2.79) est valable pour une large gamme de nombres de Mach avec une précision de 2% du nombre de Mach. Cela donne une relation entre le rapport de Stanton et de surface en termes de nombre de Prandtl comme suit :

$$S_t / c_f = 1/2 Pr^{-2/3} \quad (2.76)$$

L'équation (2.77) est également valide avec 2% précision pour une large gamme de nombres de Mach. Bien que l'équation (2.78) soit obtenue pour les écoulements autour de la plaque plate, elle a été appliquée pour déterminer l'échauffement aérodynamique causé par les corps minces tridimensionnels.

En cas d'écoulement hypersonique turbulent au-delà d'une plaque plane avec augmentation du nombre de Mach, il y a une diminution considérable du nombre de Stanton. Selon les données d'écoulement turbulent de Van Driest, alors que le nombre de Mach est compris entre 0 et 10, le nombre de Stanton diminue à 0,1 de sa valeur incompressible.

Jusqu'à présent, nous avons vu le chauffage aérodynamique pour les corps minces avec des bords d'attaque tranchants. La solution pour le point de stagnation de la plaque plane était singulière. Maintenant, nous pouvons analyser le chauffage aérodynamique pour les corps

avec des nez émoussés. L'analyse du transfert de chaleur au point de stagnation du cylindre circulaire et de la sphère a été faite par Van Driest, et la formule suivante pour le transfert de chaleur a été fournie :

$$\text{Cylinder : } q_w = 0.57 P_r^{-0.6} (\rho_c \mu_c)^{1/2} \sqrt{dU_c/dx} (h_{aw} - h_w) \quad (2.79a)$$

$$\text{Sphere : } q_w = 0.763 P_r^{-0.6} (\rho_c \mu_c)^{1/2} \sqrt{dU_c/dx} (h_{\alpha w} - h_w) \quad (2.80b)$$

Ici, est la vitesse de bord de la  $U_c$  couche limite et il prend naturellement la valeur de zéro au point de stagnation. La dérivée de la vitesse d'arrêt par rapport au point  $x$  de stagnation est non nulle, et elle est inversement proportionnelle au rayon de courbure local. En supposant l'écoulement newtonien, la dérivée de la vitesse de l'arête se lit comme suit :

$$\frac{dU_e}{dx} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2(p_e - p_\infty)}{\rho_e}} \quad (2.81)$$

Ici  $R$ , est le rayon de courbure au point de stagnation. Si nous remplaçons l'équation (2.80) par l'équation (2.81), le transfert de chaleur au point de stagnation du cylindre circulaire pour l'écoulement hypersonique se lit comme suit :

$$q_w = 0.57 P_r^{-0.6} (\rho_e \mu_e)^{1/2} \frac{1}{R^{1/2}} \left[ \frac{2(p_e - p_\infty)}{\rho_\infty} \right]^{1/4} (h_{aw} - h_w) \quad (2.82)$$

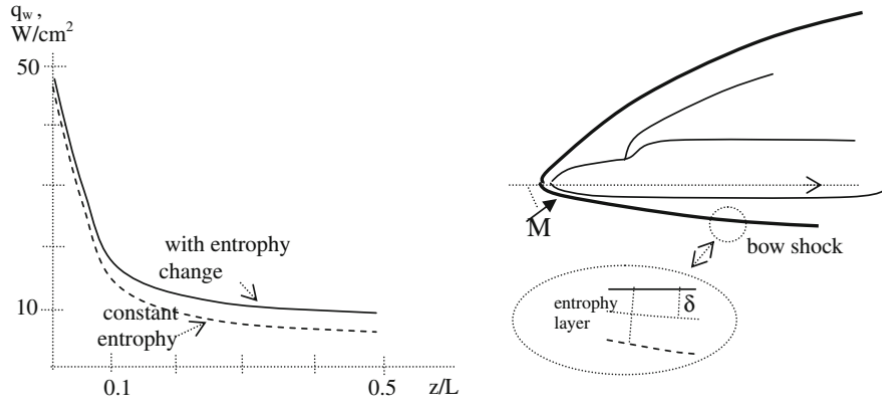
L'échauffement aérodynamique est inversement proportionnel au rayon de courbure du point de stagnation. Ce fait oblige les véhicules hypersoniques à avoir un nez rond de la capsule spatiale de rentrée. On observe expérimentalement que la variation du nombre de Stanton au point de stagnation d'un cylindre est proportionnelle à la racine carrée inverse du rayon de courbure donnée dans l'équation (2.81). Naturellement, à mesure que nous nous éloignons du point de stagnation, le chauffage aérodynamique diminue considérablement. En surface, à  $\psi = 45^\circ$  mi-chemin entre le point de stagnation et

l'épaulement, cette réduction descend à la moitié de la valeur du transfert de chaleur de stagnation, et à l'épaulement où  $\psi = 90^\circ$  chauffage devient le dixième de la valeur de stagnation.

Nous avons souligné le rôle de l'effet visqueux sur le chauffage aérodynamique. Dans la condition d'absence de glissement qui provoque des gradients de vitesse élevés, c'est-à-dire qu'une valeur de vorticité élevée est due à la viscosité. De plus, le gradient d'entropie élevé qui se produit derrière le fort choc d'arc génère une tourbillonnante comme donné par Eq. 7.48 et crée une couche d'entropie comme le montre la figure 2.5. La vorticité générée par le gradient d'entropie crée également un échauffement aérodynamique non négligeable à partir du point de stagnation. Illustré à la figure 2.7 sont les valeurs calorifiques aérodynamiques maximales sur la ligne, qui est la ligne de symétrie de la surface inférieure de la navette spatiale, avec et sans changement d'entropie considéré.

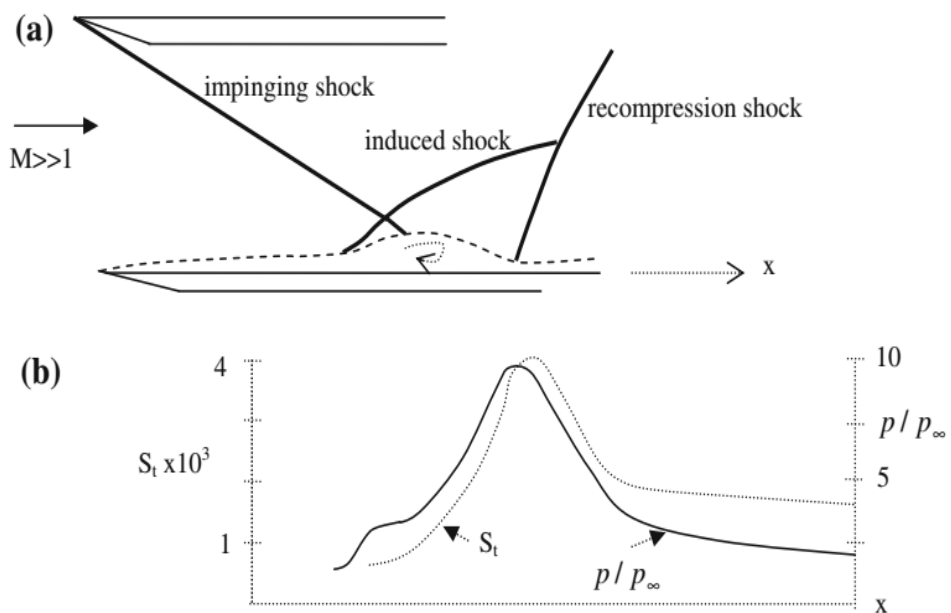
Selon la figure 2.7, la différence entre les résultats obtenus avec l'entropie et sans entropie est faible dans la région de stagnation, et elle augmente monotone dans la direction de l'écoulement à mesure que la couche d'entropie augmente. Les résultats obtenus en considérant le gradient d'entropie sont en accord avec les mesures expérimentales et devraient être préférés.

Le dernier sujet à étudier en chauffage hypersonique est lié à l'interaction du choc fort et de la couche limite. Ce type de chauffage est généralement généré par le choc oblique qui est créé à un bord d'attaque mince d'un corps externe de véhicule aérien hypersonique. Comme ce choc est incliné, il frappe une autre partie externe située en aval et réfléchit par la couche limite pour générer de la chaleur. Pour la première fois, ce type de chauffage estrencontr  en raison du choc oblique créé à l'admission d'un moteur interagissant avec la couche limite sur la jonction moteur-corps d'un avion hypersonique lors d'un vol d'essai. L'esquisse et l'effet du  $\lambda$  choc sont montrés à la figure 2.7a, b. La variation du nombre de Stanton et de la pression de surface est donnée à la figure 2.7b région où l'interaction de la couche limite de choc a lieu.



**Figure 2.7** Chauffage aérodynamique maximal avec et sans la ligne de changement d'entropie de la navette à  $40^\circ$  angle d'attaque

Comme on le voit à la figure 2.7b, la variation du nombre de Stanton est étroitement liée à la variation de la pression de surface. Juste après le choc de type  $\lambda$ , la valeur du nombre de Stanton à la surface augmente huit fois. Cette augmentation du nombre de Stanton est l'indication de l'échauffement aérodynamique dû à l'interaction de la couche limite et le choc. La pression superficielle est en augmentation.



**Figure 2.8** Interaction de la couche limite et choc : une variation physique(a), la pression en utilisant la variation du nombre de Stanton (b).

En écoulement laminaire, le coefficient de frottement de la paroi  $c_f$  est inversement proportionnel au nombre de Reynolds. Puisque le nombre de Stanton est proportionnel au coefficient de frottement de la paroi, la relation qui peut être déduite est :

$$S_t \propto 1/\sqrt{R_e} \propto 1/\sqrt{\rho_e} \quad (2. 83)$$

Puisque la pression est proportionnelle à la densité, la définition du chauffage de surface,  $q_w$  devient :

$$q_w \propto \sqrt{p_e} \quad (2. 84)$$

Ce qui montre la proportionnalité de l'échauffement aérodynamique avec pression.

Dans les écoulements turbulents, il existe une relation entre le frottement de surface et le nombre de Reynolds par la relation de schlichting suivante:

$$c_f \propto 1/(R_e)^{1/5} \quad (2.d1)$$

La relation entre le chauffage de surface et la pression superficielle pour l'écoulement turbulent devient [38] :

$$q_w \propto (p_e)^{4/5} \quad (2. 85)$$



# **CHAPITRE 3**

## **Couche limite**

## 3. Couche limite

### 3.1 Concept de la couche limite:

Les écoulements de fluides présentant de faibles valeurs de viscosité et des nombres de Reynolds très élevés se rencontrent dans de nombreuses applications techniques. Comme nous l'avons montré dans les exemples du dernier chapitre, la solution limite  $Re = \infty$  est souvent une bonne approximation. Un défaut notable de cette solution limite est que la condition de non-glissement n'est pas satisfaite, c'est-à-dire que les vitesses à la paroi ne sont pas nulles mais finies. La viscosité doit être prise en compte afin de satisfaire à la condition d'absence de glissement. Cela permet d'assurer la transition de la vitesse entre la valeur finie de la solution limite près de la paroi et la valeur zéro directement à la paroi. Aux grands nombres de Reynolds, cette transition a lieu dans une fine couche proche de la paroi, appelée par L. Prandtl (1904) la couche limite ou couche de frottement. Comme on le verra, la couche limite est d'autant plus mince que le nombre de Reynolds est élevé, c'est-à-dire que la viscosité est faible.

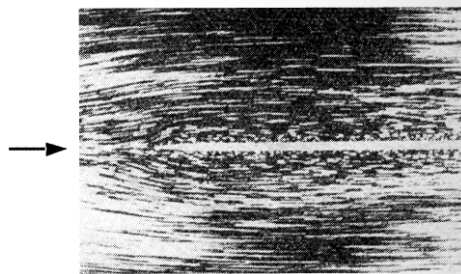
Le concept de couche limite implique que les écoulements à des nombres de Reynolds élevés peuvent être divisés en deux régions de taille inégale. Dans la majeure partie de la région d'écoulement, la viscosité peut être négligée et l'écoulement correspond à la solution limite non visqueux. C'est ce qu'on appelle l'écoulement extérieur non visqueux ou parfait. La seconde région est la couche limite très mince à la paroi, où la viscosité doit être prise en compte.

À l'intérieur de la couche limite, les deux formes d'écoulement mentionnées au chapitre précédent peuvent se produire, c'est-à-dire que l'écoulement peut être laminaire ou turbulent. On parle alors d'écoulements laminaires de la couche limite, ou de couches limites laminaires, et de manière équivalente de couches limites turbulentes.

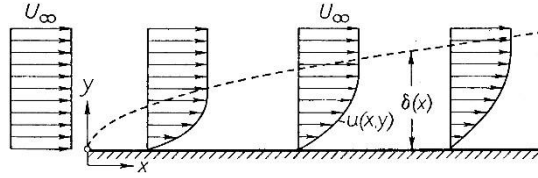
On verra que la division du champ d'écoulement en un écoulement extérieur non visqueux et une couche limite conduit à des simplifications considérables dans le traitement théorique des écoulements à nombre de Reynolds élevé. En fait, ce n'est que grâce à cette idée de Prandtl que des progrès théoriques ont pu être réalisés sur ces écoulements.

### 3.2 Couche limite laminaire sur une plaque plane à incidence nulle:

La figure 3.1 est un écoulement instantané le long d'une plaque plane mince entraînée dans l'eau. Des particules d'aluminium ont été saupoudrées sur la surface de l'eau pour rendre les lignes de courant visibles. La longueur de chaque traînée de particules est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement. On peut voir que directement sur la paroi se trouve une fine couche où la vitesse est considérablement plus faible qu'à une certaine distance de la paroi. L'épaisseur de cette couche augmente le long de la plaque d'avant en arrière. La figure 3.2 montre schématiquement la distribution de la vitesse dans cette couche limite sur la plaque, où la dimension dans la direction transversale est considérablement agrandie. Au niveau du bord d'attaque, la distribution des vitesses est constante et perpendiculaire à la plaque. À mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque, la couche de particules ralenties par le frottement devient de plus en plus grande, car de plus en plus de particules de fluide sont prises en compte par le ralentissement. L'épaisseur de la couche limite  $\delta(x)$  est une fonction monotone croissante de  $x$ . Il convient toutefois de préciser ici que la notion d'épaisseur de la couche limite  $\delta$  a été introduite artificiellement. Le passage de l'écoulement de la couche limite à l'écoulement extérieur, du moins dans le cas des écoulements laminaires, s'effectue de manière continue, de sorte qu'il n'est en principe pas possible de fixer une limite précise. Le concept d'épaisseur de la couche limite étant très vivant, il est très souvent utilisé dans la pratique. Souvent, la limite est arbitrairement fixée au point où la vitesse atteint un certain pourcentage de la vitesse extérieure, par exemple 99 %. Pour plus de clarté, un indice est souvent utilisé, par exemple  $\delta_{99}$ .



**Figure 3. 1**Écoulement le long d'une fine plaque plane L. Prandtl; O. Tietjens(1931)



**Figure3. 2**Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle

### 3.2.1 Estimation de l'épaisseur de la couche limite:

Pour les couches limites des plaques laminaires, l'épaisseur de la couche limite peut être facilement estimée comme suit: dans la couche limite, les forces d'inertie et les forces de frottement sont en équilibre. la force d'inertie par unité de volume est égale à  $\rho u \partial u / \partial x$ . Pour une plaque de longueur  $x$ ,  $\partial u / \partial x$  est proportionnelle à  $U_\infty / x$  où  $U_\infty$  est la vitesse de l'écoulement extérieur. La force d'inertie est de l'ordre de grandeur de  $\rho U_\infty^2 / x$ . D'autre part, la force de frottement par unité de volume est égale à  $\partial \tau / \partial y$  et, dans les écoulements laminaires, elle est égale à  $\mu \partial^2 u / \partial y^2$  par hypothèse. Le gradient de vitesse perpendiculaire à la paroi  $\partial u / \partial y$  est de l'ordre de  $U_\infty / \delta$ , de sorte que pour la force de frottement par unité de volume  $\partial \tau / \partial y \sim \mu U_\infty / \delta^2$ . En égalisant les forces d'inertie et de frottement, on obtient la relation suivante :

$$\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{\rho U_\infty^2}{x} \quad (3.d1)$$

ou, résolu pour l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_\infty}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (3.1)$$

Le facteur numérique inconnu restant dans cette équation peut être déterminé à partir de la solution exacte de H. Blasius (1908). Pour la couche limite laminaire sur une plaque à incidence nulle, nous avons:

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (3.2)$$

L'épaisseur de la couche limite sans dimension liée à la longueur de la plaque  $l$  est :

$$\frac{\delta_{99}(x)}{l} = \frac{5}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (3.3)$$

où le nombre de Reynolds de la plaque de la longueur  $l$  est :

$$Re = U_{\infty}l/\nu \quad (3.e1)$$

L'équation (3.3) montre que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, de sorte que dans le cas limite  $Re = \infty$  la couche limite disparaît effectivement. En outre, elle montre aussi que l'épaisseur de la couche limite augmente proportionnellement à  $\sqrt{x}$ .

### 3.2.2 Épaisseur du déplacement:

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'épaisseur de la couche limite a été introduite de manière arbitraire. Une mesure correcte et interprétable du point de vue de la mécanique des fluides pour l'épaisseur de la couche limite est l'épaisseur du déplacement  $\delta_1$ . Elle est définie par

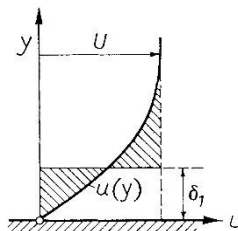
$$U\delta_1(x) = \int_{y=0}^{\infty} (U - u)dy. \quad (3.4)$$

$U$  est la vitesse sur le bord extérieur de la couche limite à la position  $x$ . Il en résulte que les deux zones ombrées de la figure 3.3 doivent être égales.

L'épaisseur de la couche limite nous indique jusqu'où les lignes de courant de l'écoulement extérieur sont déplacées par la couche limite. Pour une plaque à incidence nulle, nous avons

$$\frac{\delta_1(x)}{l} = \frac{1.721}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{x}{l}} \quad (3.5)$$

C'est-à-dire que l'épaisseur du déplacement  $\delta_1$  est d'environ 1/3 de l'épaisseur de la couche limite  $\delta_{99}$



**Figure 3.3** Épaisseur du déplacement  $\delta_1$  de la couche limite

### 3.2.3 Estimation des forces de frottement :

Comme pour l'épaisseur de la couche limite, la contrainte de cisaillement à la paroi  $\tau_w$  et l'ensemble de la traînée de frottement de la plaque peuvent également être estimés. Selon la loi de frottement de Newton, l'équation (3.2), nous avons :

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (3.6)$$

où l'indice  $w$  représente la valeur à la paroi. En utilisant  $\partial u / \partial y \sim U_\infty / \delta$  on trouve  $\tau_w \sim \mu U_\infty / \delta$  et en insérant la valeur de  $\delta$  de l'équation (3.1)

$$\tau_w(x) \sim \mu U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}} = \sqrt{\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x}}. \quad (3.7)$$

Par conséquent, la contrainte de cisaillement de la paroi est proportionnelle à  $U_\infty^{3/2}$  et, ce qui mérite d'être souligné, à  $1/\sqrt{x}$ . La contrainte de cisaillement de la paroi d'une plaque plane n'est donc pas une constante, mais une fonction qui décroît de façon monotone avec  $x$ . Les contraintes de cisaillement sont particulièrement importantes près du bord d'attaque de la plaque. En utilisant  $\tau_w \sim \mu U_\infty / \delta$ , il s'ensuit que la contrainte de cisaillement de la paroi est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire que plus la couche limite est mince, plus la contrainte de cisaillement de la paroi est élevée. La constante de proportionnalité dans l'équation (3.7) peut à nouveau être déterminée à partir de la solution exacte.

Par conséquent, le coefficient de frottement cutané est

$$c_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{l}{x}} \quad (3.8)$$

Connaissant la relation entre la contrainte de cisaillement de la paroi et la position  $\tau_w(x)$  l'intégration peut être utilisée pour déterminer l'ensemble de la traînée de frottement. Une plaque mouillée d'un côté avec une largeur  $b$  et de longueur  $l$  a une traînée de frottement :

$$D = b \int_0^l \tau_w(x) dx. \quad (3.9)$$

Avec l'équation (3.8), le coefficient de traînée lié à la surface mouillée :

$$C_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 \cdot b \cdot l} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}. \quad (3.10)$$

Avec :

$$S = b \cdot l \quad (f.1)$$

Cette loi de traînée est illustrée à la figure 1.3. Le caractère asymptotique de cette loi est visible, et pour les nombres de Reynolds  $Re > 10^4$  les mesures sont très proches de la théorie.

### 3.3 Couche limite turbulente sur une plaque plane à incidence nulle:

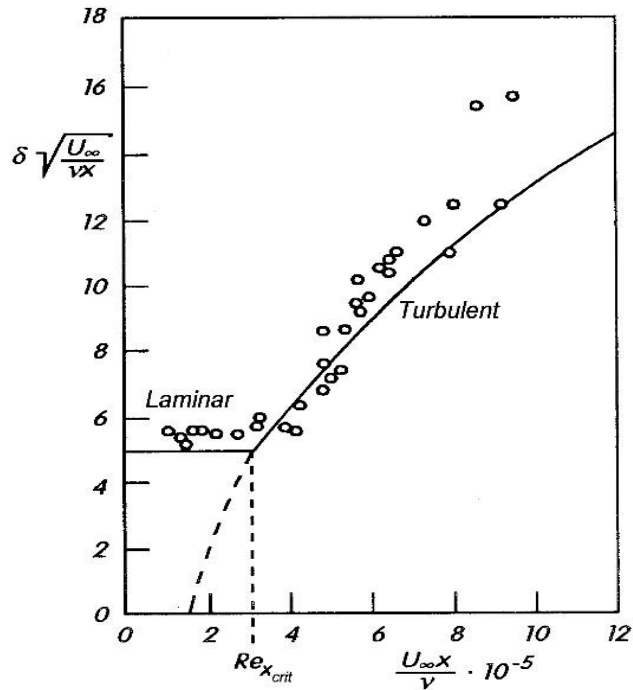
Dans la réalité, la couche limite sur une plaque ne reste pas toujours laminaire. Après une certaine distance (à partir du bord d'attaque de la plaque), la couche limite devient turbulente.  $x = x_{crit}$  à partir du bord d'attaque de la plaque, la couche limite devient turbulente. Par le nombre de Reynolds critique formé en fonction de la distance au point de transition est le suivant :

$$Re_{x_{crit}} = \left( \frac{Ux}{\nu} \right)_{crit} = 5 \cdot 10^5 \text{ (plate)} \quad (3.11)$$

La couche limite sur une plaque est laminaire près du bord d'attaque et devient turbulente plus en aval, la position du point de transition  $x_{crit}$  peut être déterminée par le nombre de Reynolds critique  $Re_{x_{crit}}$  donné. Bien que la transition de laminaire à turbulente soit une région de longueur finie, un point de transition est utilisé pour des raisons de simplicité et il est souvent supposé que la transition est soudaine. La valeur numérique de  $Re_{crit}$  dépend fortement du degré d'absence de perturbation de l'écoulement extérieur. Dans un écoulement fortement perturbé, la valeur de  $Re_{crit} = 3 \cdot 10^5$  est typique, alors que pour un écoulement particulièrement lisse, des valeurs de  $Re_{crit} = 3 \cdot 10^6$  ont été atteintes.

Les premières recherches sur la transition laminaire-turbulente dans la couche limite ont été menées par B.G. Van der HeggeZijnen (1924), J.M. Burgers (1924) et M. Hansen (1928). Le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent se traduit par une

forte augmentation de l'épaisseur de la couche limite et de la contrainte de cisaillement de la paroi. La figure 3.4 montre la combinaison sans dimension  $\delta_{99}/\sqrt{\nu x/U_\infty}$  représentée en fonction de la distance sans dimension  $Re_x = U_\infty x/\nu$  selon les mesures effectuées par M. Hansen



**Figure 3. 4 .** Dépendance de l'épaisseur de la couche limite en fonction de la distance le long d'une plaque à incidence nulle,d'après M. Hansen (1928) laminaire, turbulente avec origine fictive en  $Re_x = 1.5 \cdot 10^5$

(1928). D'après l'équation (3.2), dans les couches limites laminares, cette combinaison a approximativement la valeur constante 5. Pour  $Re_x = Re_{x,crit} = 3 \cdot 10^5$  les mesures montrent une forte augmentation soudaine. L'épaisseur de la couche limite turbulente sur la plaque est :

$$\frac{\delta U_\infty}{\nu} = 0.14 \frac{Re_x}{\ln Re_x} G(\ln Re_x). \quad (3.12)$$

La fonction  $G(\ln Re_x)$  ne dépend que faiblement de  $\ln Re_x$ . Elle a une valeur limite de 1 pour  $\ln Re_x \rightarrow \infty$ ; Dans la région qui nous intéresse ici  $10^5 < Re_x < 10^6$ ,  $G \approx 1.5$ . La dépendance de  $\ln Re_x$  qui apparaît dans l'équation (3.12) est typique des couches limites turbulentes qui est liée à une formule asymptotique pour les grands nombres de Reynolds. Selon cette formule, l'épaisseur de la couche limite croît comme suit  $\delta \sim x/\ln x$  pour les grands nombres de Reynolds  $x$ . À un nombre de Reynolds donné, l'épaisseur de la couche



limite diminue comme pour un nombre de Reynolds élevé.  $x$  l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, mais seulement très lentement avec  $\delta/x \sim 1/\ln Re$ . La combinaison correspondant à l'équation (3.12) présentée à la figure 2.4 est en bon accord avec les mesures de M. Hansen. Comme l'équation (3.12) s'applique au cas où une couche limite turbulente est déjà présente au bord d'attaque de la plaque, on a supposé que l'origine virtuelle de la couche limite se situait à  $Re_x = 1.5 \cdot 10^5$  pour tracer la courbe de l'équation (3.12). Cela signifie que précisément au point de transition  $Re_x = 3 \cdot 10^5$  la valeur de la combinaison est d'environ 5,0, et qu'il y a une transition continue de la couche limite de laminaire à turbulente. Les épaisseurs de la couche limite pour des cas typiques d'écoulement d'eau et d'air ont été calculées à partir de l'équation (3.12) et sont indiquées dans le tableau 3.1.

### 3.3.1 Forces de frottements :

La formule analogue à l'équation (3.8) pour le coefficient de frottement au niveau de la paroi d'une couche limite turbulente est la suivante :

$$c_f = 2 \left[ \frac{\kappa}{\ln Re_x} G(\ln Re_x) \right]^2 \quad (3.13)$$

où  $G(\ln Re_x)$  est à nouveau la fonction mentionnée dans l'équation (3.12). La quantité  $\kappa = 0.41$  appelée constante de Karman, est d'une importance fondamentale pour toutes les couches limites des parois turbulentes. Il s'agit d'une constante universelle. D'après l'équation (3.13), le coefficient de frottement de la paroi pour les couches limites de plaques turbulentes diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, mais d'une manière extrêmement lente, encore plus lentement que n'importe quelle petite puissance négative du nombre de Reynolds. Dans l'hypothèse d'une couche limite turbulente à partir du bord d'attaque de la plaque, l'intégration du coefficient de frottement sur la longueur de la plaque  $l$  donne le coefficient de traînée pour une plaque mouillée d'un côté:

$$c_D = 2 \left[ \frac{\kappa}{\ln Re} G(\ln Re) \right]^2 \quad (3.14)$$

où le nombre de Reynolds  $Re$  est maintenant formé avec la longueur de la plaque  $l$ . Le coefficient de traînée diminue également très lentement avec l'augmentation du nombre de

Reynolds. Il convient de noter que les fonctions  $G$  dans les équations (3.13) et (3.14) sont différentes.

### 3.3.2 Sous-couche visqueuse:

Une particularité des couches limites turbulentes sera indiquée à ce stade. Dans les couches limites laminaires, la couche limite est la région du champ d'écoulement affectée par la viscosité, ce qui n'est pas le cas dans les couches limites turbulentes. L'ensemble du champ d'écoulement est maintenant divisé entre l'écoulement extérieur sans turbulence et l'écoulement turbulent, caractérisé par un mouvement fluctuant aléatoire, à l'intérieur de la couche limite. Étant donné que des forces de frottement "apparentes" se produisent dans la couche limite turbulente, comme nous le verrons, une couche limite turbulente est également appelée couche de frottement. Dans cette couche de frottement turbulente, l'effet de la viscosité est limité à une couche directement au niveau de la paroi qui est beaucoup plus fine que la couche limite. C'est ce qu'on appelle la sous-couche visqueuse ou la couche visqueuse de la paroi. La couche limite turbulente présente donc une structure à deux couches. La partie la plus large est une couche de frottement uniquement en raison du "frottement apparent" dû au mouvement fluctuant turbulent et n'est pas affectée par la viscosité. Dans la sous-couche visqueuse très fine, les effets de la viscosité prennent la forme de "véritables" forces de frottement.

Bien que la transition entre les deux couches soit ici aussi continue, on utilise dans la pratique la notion d'épaisseur de la sous-couche visqueuse  $\delta_v$  est utilisée :

$$\frac{\delta_v}{x} = \frac{50}{Re_x \sqrt{\frac{c_f}{2}}} \quad (3.2)$$

où le coefficient de frottement de la paroi  $c_f$  est donné par l'équation (2.13). A partir de là,  $\delta_v \sim \ln x$  croît très lentement à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque. Il diminue également avec l'augmentation du nombre de Reynolds à une valeur fixe de  $x$  fixe.  $\delta_v \sim \ln Re_x / Re_x$ .

Le rapport entre l'épaisseur de la sous-couche  $\delta_v$  à l'épaisseur totale  $\delta$  découle des équations (3.12) et (3.15)

$$\frac{\delta_v}{\delta} = 680 \frac{\ln^2 Re_x}{Re_x} \quad (f.1)$$

Au fur et à mesure que  $Re_x$  augmente, la partie de la couche de frottement totale qui constitue la sous-couche visqueuse devient de plus en plus petite [39].

Des exemples numériques de l'épaisseur absolue de la sous-couche sont donnés dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1** Épaisseur de la couche limite  $\delta$  et l'épaisseur de la sous-couche visqueuse  $\delta_v$  à l'extrémité d'une plaque plane à incidence nulle dans un écoulement turbulent

	$\frac{U_\infty}{m/s}$	$\frac{l}{m}$	$Re = \frac{U_\infty l}{\nu}$	$\frac{\delta}{mm}$	$\frac{\delta_v}{mm}$
l'air	50	1	$3.4 \cdot 10^6$	8	0.4
	100	1	$6.6 \cdot 10^6$	8	0.2
	100	5	$3.3 \cdot 10^7$	36	0.2
	200	10	$1.3 \cdot 10^8$	69	0.1
l'eau	1	2	$2 \cdot 10^6$	17	1
	2	5	$1 \cdot 10^7$	39	0.6
	5	50	$2.5 \cdot 10^8$	321	0.4

# **CHAPITRE 4**

## **Résultat et interprétation**

## 4.4 Simulation d'un cône

### 4.4.1 Écoulement non visqueux :

#### 4.4.1.1 Géométrie et maillage

La géométrie utilisée pour valider nos résultats est prise de la référence [40], l'utilisation du logiciel GAMBIT permet de créer la géométrie désirée et de générer le maillage du type block structuré pour l'obtention d'une meilleure qualité. Ensuite, il est importé dans le logiciel ANSYS pour générer le processus de calcul et l'affichage des résultats.

La figure 4.1 montre la géométrie et le maillage généré.

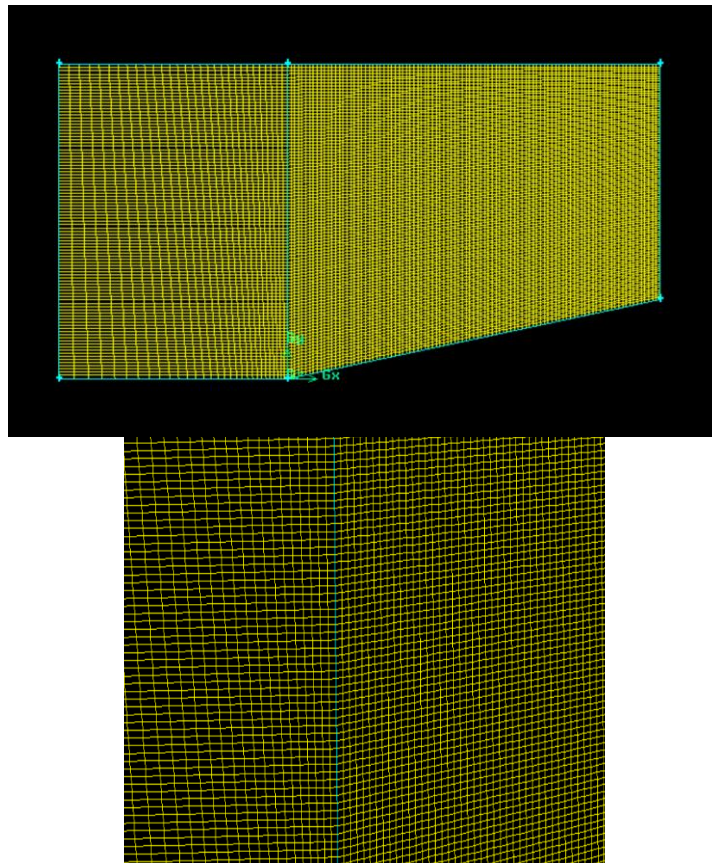


Figure 4. 1 Génération de maillage

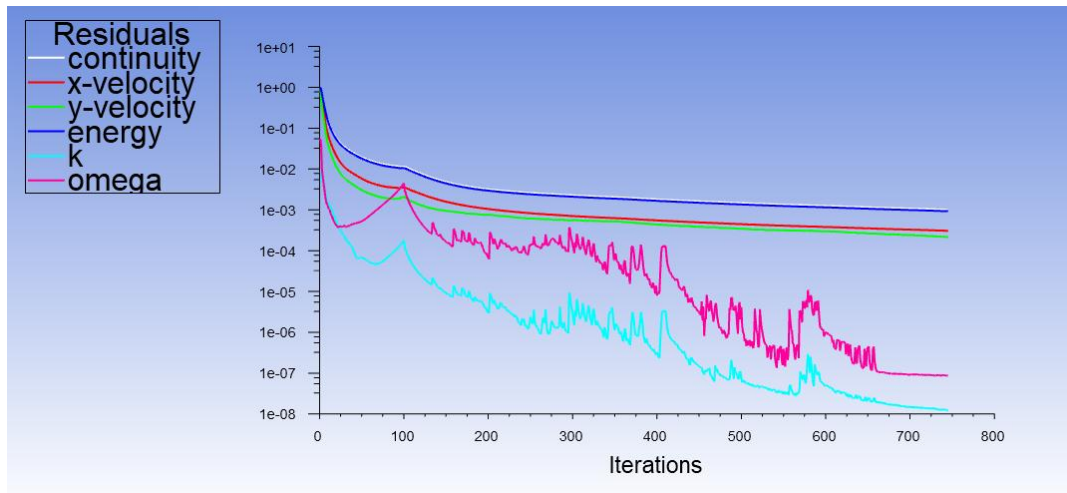
#### 4.4.1.2 Résultat de validation

- **Cas supersonique** ( $M_{\infty} = 2.5$ )

Le logiciel ANSYS Fluent est utilisé en choisissant un modèle de turbulence non visqueux avec les conditions aux limites suivantes :

$$T_{\infty} = 150 \text{ K}, \quad P_{\infty} = 50000 \text{ Pa}, \quad \rho_{\infty} = 1.1614 \text{ kg/m}^3, \quad \gamma = 1.4, \quad \theta = 12^{\circ}$$

$$T_t = 337.5 \text{ K (Equation 1.12)}$$



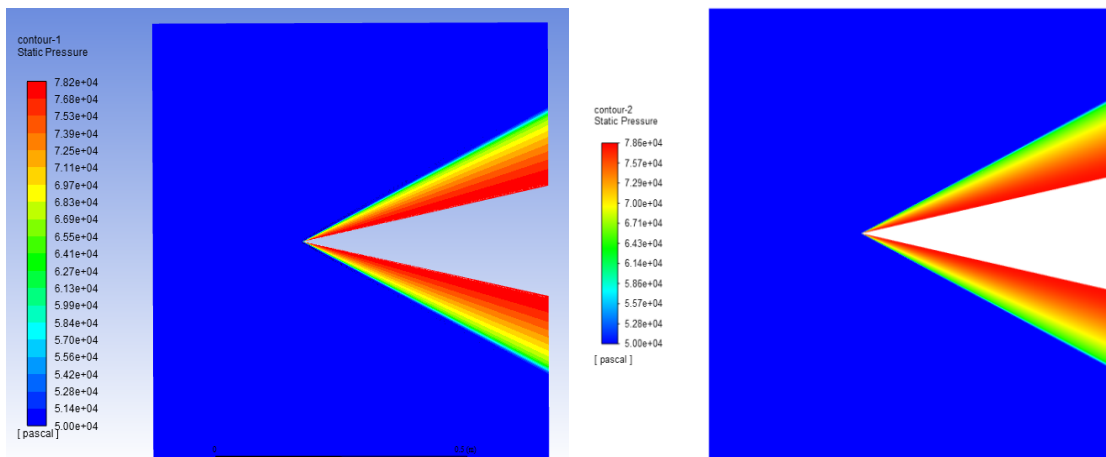
**Figure 4. 2**Résultat de convergence

La solution a convergé après 745 itérations et le temps de calcul est de 2 min et 14 sec.

- **Contour de pression statique**

Voilà le résultat obtenu :

Résultats de la simulation par ANSYS      Résultats obtenues par la référence [40]



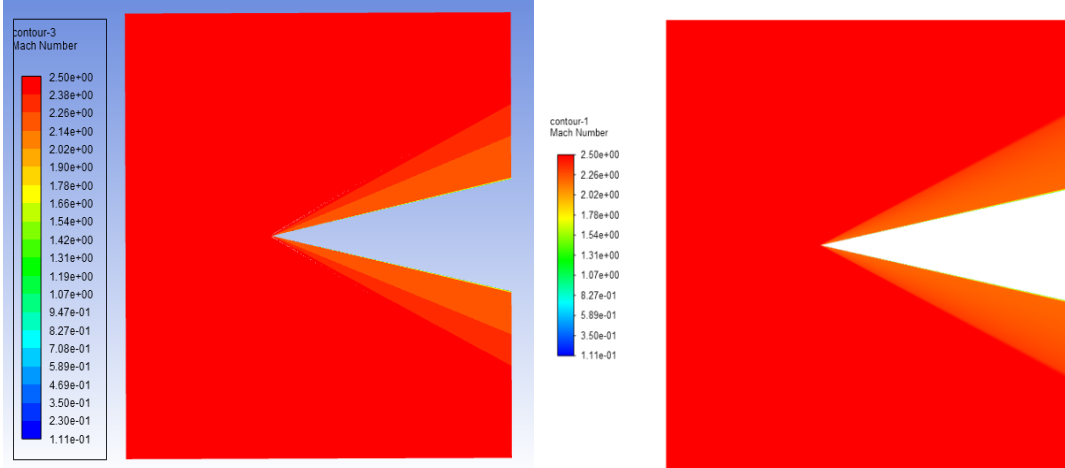
**Figure 4. 3**Comparaison de contour de pression statique entre les résultats de la simulation par ANSYS et la référence [40]

Le contour de la pression statique montre l'augmentation brusque de pression après le choc et en particulier cet effet tridimensionnel suite à une augmentation progressive de la pression statique à mesure que l'écoulement se rapproche de la paroi du cône.

- **Contour de Mach**

Résultats de la simulation par ANSYS

Résultats obtenues par la référence [40]



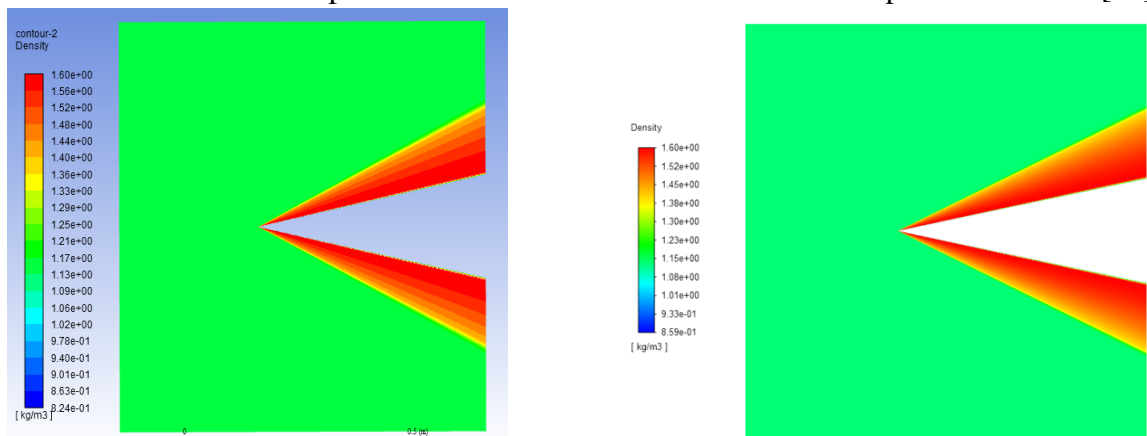
**Figure 4. 4** Comparaison de contour de Mach entre la simulation par ANSYS Et la référence [40]

La figure 4.4 représente les contours de Mach. Elle met en évidence le ralentissement de l'écoulement après le choc et à mesure que l'on se rapproche de la surface du cône.

- **Contour de masse volumique**

Résultats de la simulation par ANSYS

Résultats obtenue par la référence [40]



**Figure 4. 5** Comparaison de contour de masse volumique entre les résultats de la simulation par ANSYS et la référence [40]

Cette figure représente les contours de masse volumique qui nous aident à visualiser le choc. L'angle de choc observé pour le cône est  $\beta = 26.7^\circ$ . La masse volumique de l'écoulement augmente soudainement en aval du choc.

Les résultats numériques obtenus le long de la surface du cône en aval du choc par simulation sur ANSYS, la référence [40] et le programme MATLAB pour la résolution de l'équation de Taylor-Maccollen regime supersonique  $M_{\infty}= 2.5$  sont donnés par le tableau 4.1 :

**Tableau 4. 1** Comparaison entre les résultats de la simulation par ANSYS, MATLAB et la reference [40]

	Simulation (ANSYS)	Reference [40] RajputPankaj	Programmation Taylor-Maccoll (MATLAB)	Erreur Reference 40/ Taylor-Maccoll (%)	Erreur Reference [40]/ ANSYS (%)
$M_2$	2.214	2.216	2.233	0.76	0.09
$P_2$ (Pa)	77232	77782	81379	4	0.7
$\rho_2$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	1.5949	1.5941	1.6187	1	0.05

- **Cas hypersonique (  $M_{\infty}= 6$  )**

Les résultats numériques obtenus le long de la surface du cône en aval du choc par simulation sur ANSYS, la référence [40] et le programme MATLAB pour la résolution de l'équation de Taylor-Maccoll pour  $M_{\infty}= 6$  sont donnés par le tableau 4.2 :

**Tableau 4. 2** Comparaison entre les résultats de la simulation par ANSYS, MATLAB et la reference [40] en regime Hypersonique  $M_{\infty}= 6$

	Simulation (ANSYS)	Programmation Taylor-Maccoll (MATLAB)	Erreur ANSYS/ Taylor-Maccoll (%)
$M_2$	4.729	4.788	1
$P_2$ (Pa)	177420	130238	26
$\rho_2$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	2.7528	2.1985	20



## 4.2.2 Écoulement visqueux :

### 4.2.2.1 Géométrie et maillage

Le choix est porté sur un maillage structuré avec raffinement sur les bordures du cône en utilisant le logiciel GAMBIT avec un nombre des éléments de 7500 pour plus de précision ensuite toute est importé vers le logiciel de calcul ANSYS.

La qualité de maillage présenté sur la figure 4.6

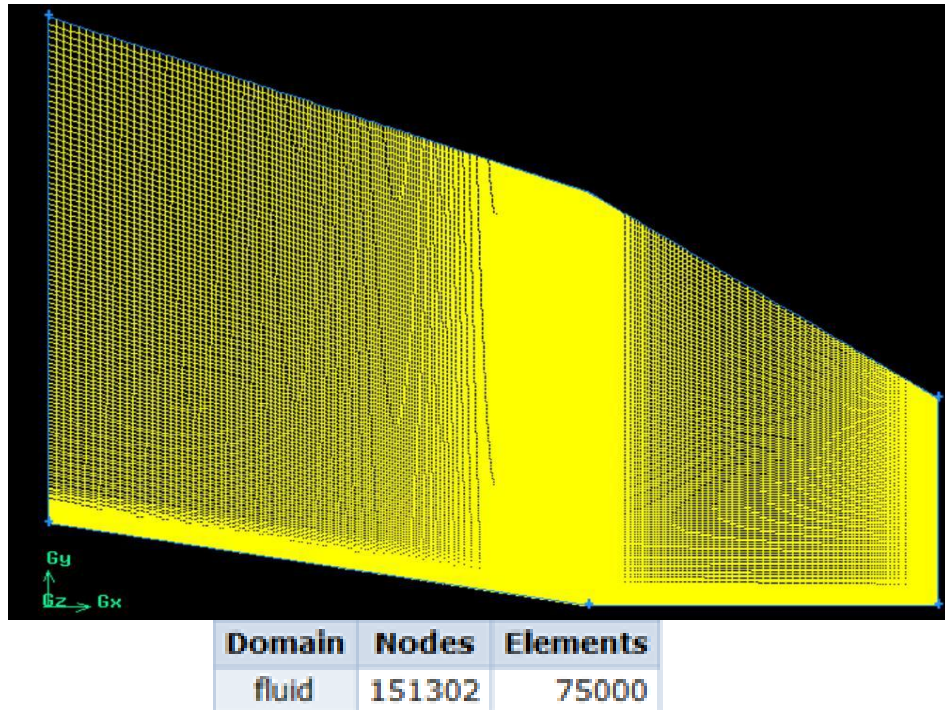


Figure 4. 6Génération de maillage

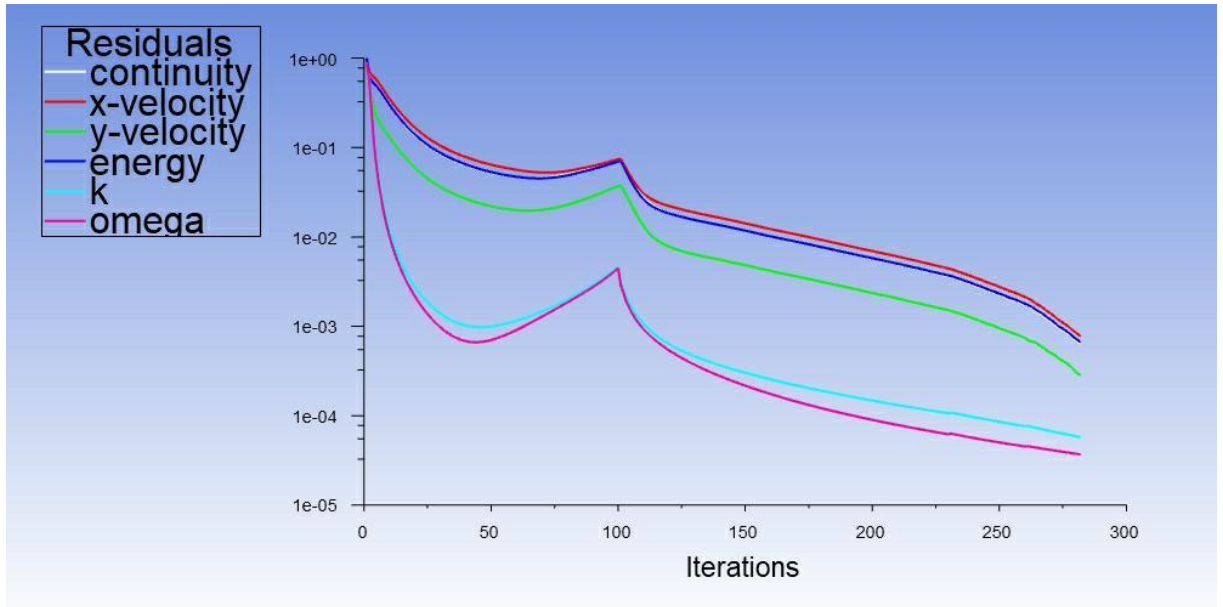
### 4.2.2.2 Résultat de validation

#### 4.2.2.2.1 Cas supersonique

L'utilisation du logiciel ANSYS avec un modèle de turbulence k-omega SST de l'écoulement d'air avec les conditions suivantes :

$$M_{\infty} = 4, \quad T_{\infty} = 220 \text{ K}, \quad P_{\infty} = 6 \text{ mbar}, \quad \mu_{\infty} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3,$$

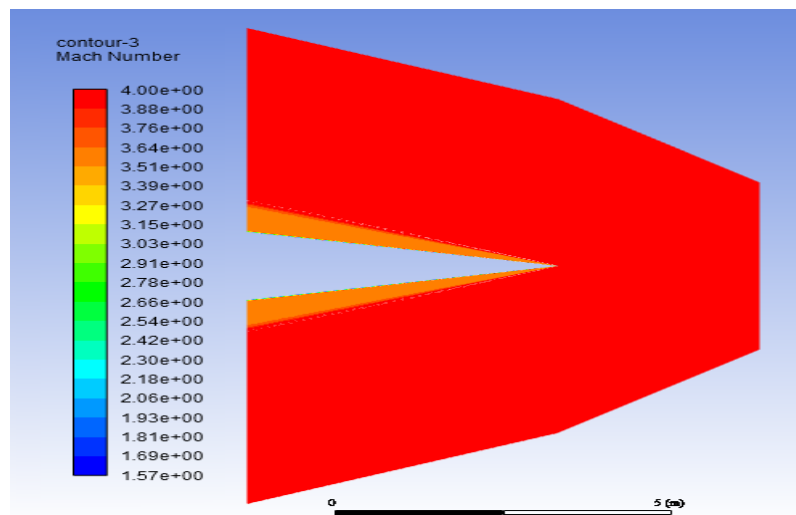
L'angle du cône :  $\theta = 10^{\circ}$



**Figure 4. 7** Courbe de convergence

La solution a convergé après 278 itérations avec un temps d'une 1 min et 54 sec.

- **Nombre de Mach :**

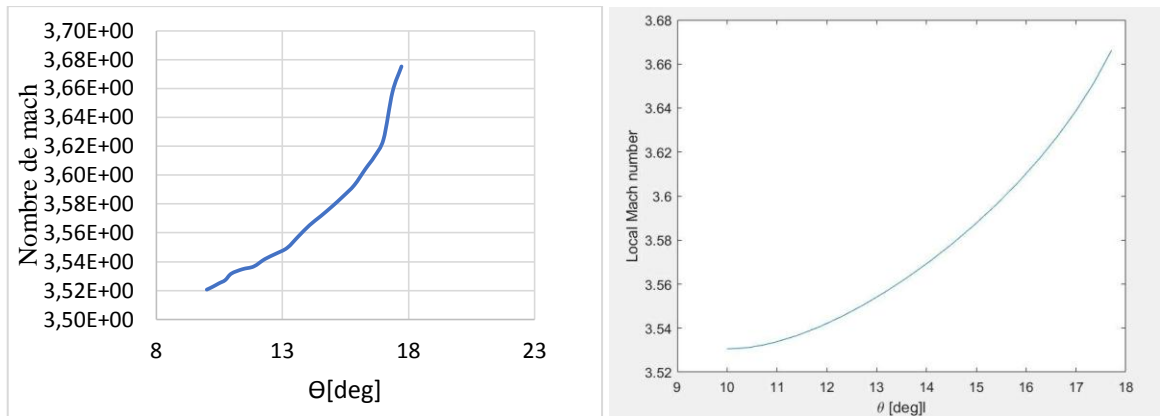


**Figure 4. 8** Contour du nombre de Mach

Le nombre de mach a diminué après l'onde de choc jusqu'à la surface du cône

Résultats obtenus par ANSYS

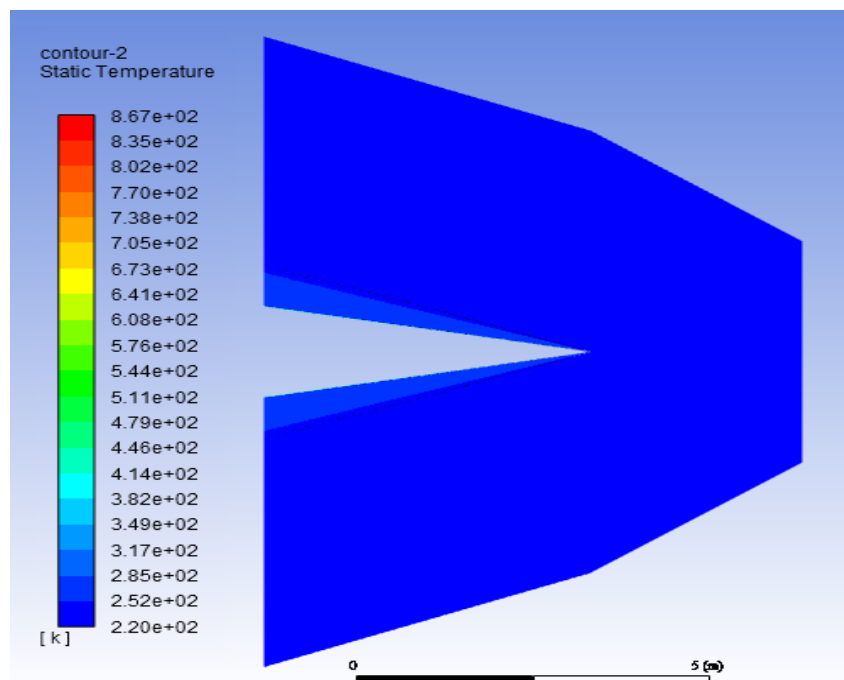
Résultats obtenus par la référence [41]



**Figure 4. 9** Comparaison de la courbe du nombre de Mach obtenu par ANSYS et la référence[41]

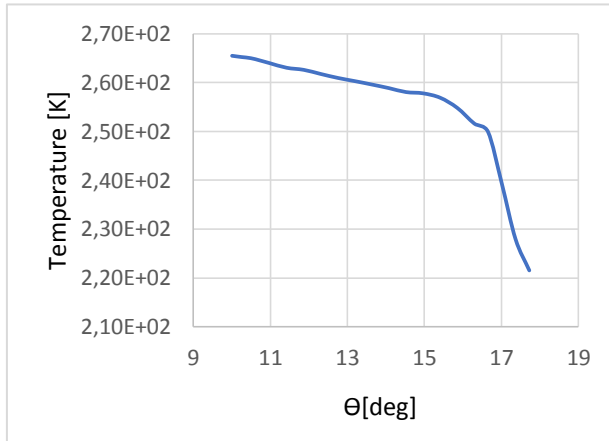
On observe une augmentation du nombre de Mach à mesure que l'on se rapproche de l'onde de choc. A l'avant du cône là où l'onde de choc se forme le nombre de mach est plus élevé en raison de la compression induit par l'onde de choc.

- **Température statique :**

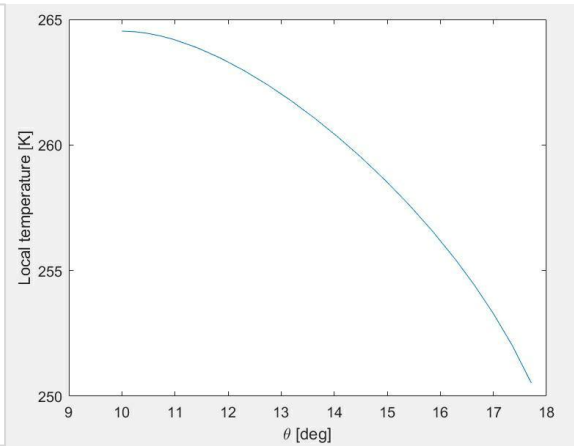


**Figure 4. 10**Contour de la température statique

Résultats obtenus par ANSYS



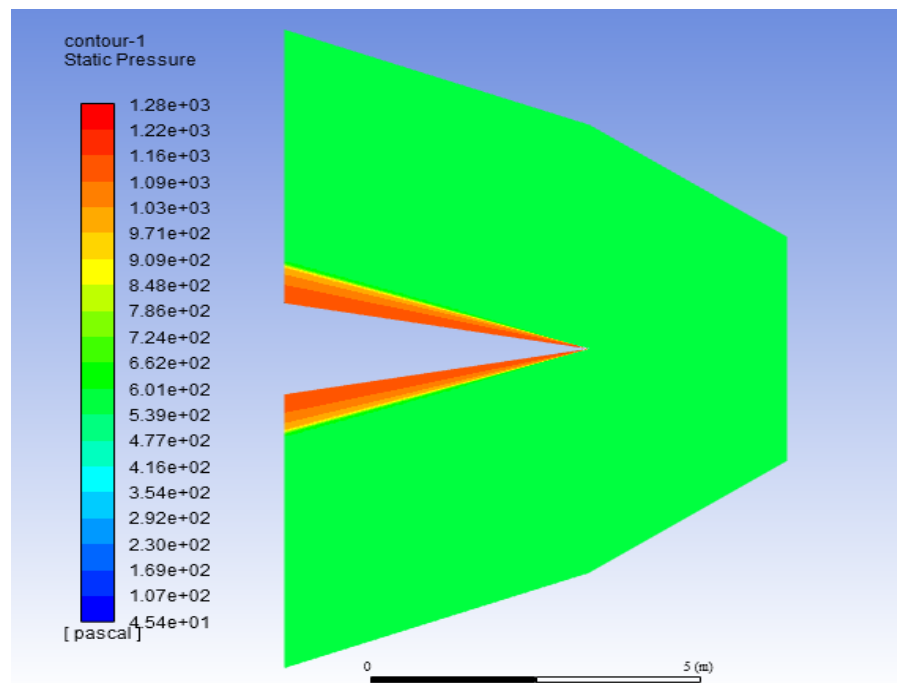
Résultats obtenus par la référence [41]



**Figure 4. 11** Comparaison de la courbe de température statique entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41]

On observe une augmentation de la température au voisinage de cône.

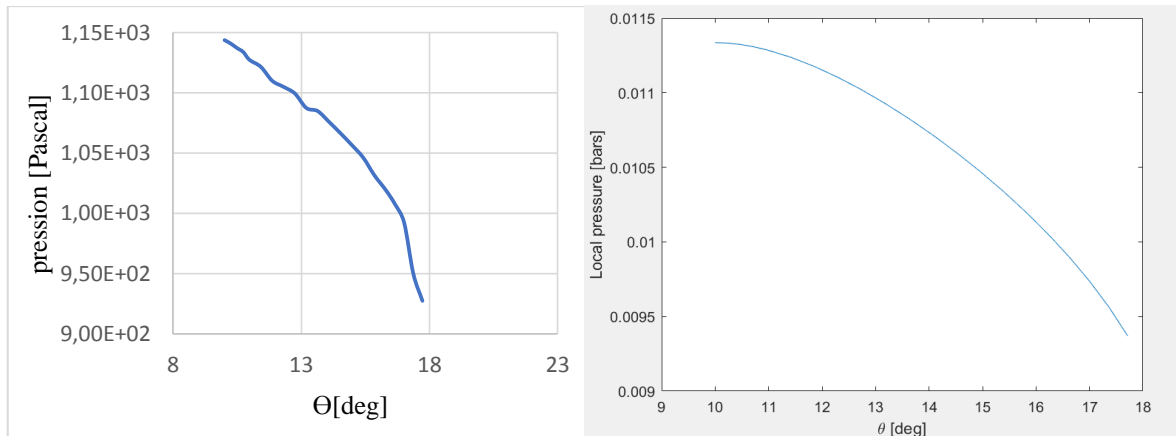
- **Contour de la pression statique :**



**Figure 4. 12** Contour de la pression statique

Résultats obtenus par ANSYS

Résultat obtenu par la référence [41]



**Figure 4.13** Comparaison de la courbe de la pression statique entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41]

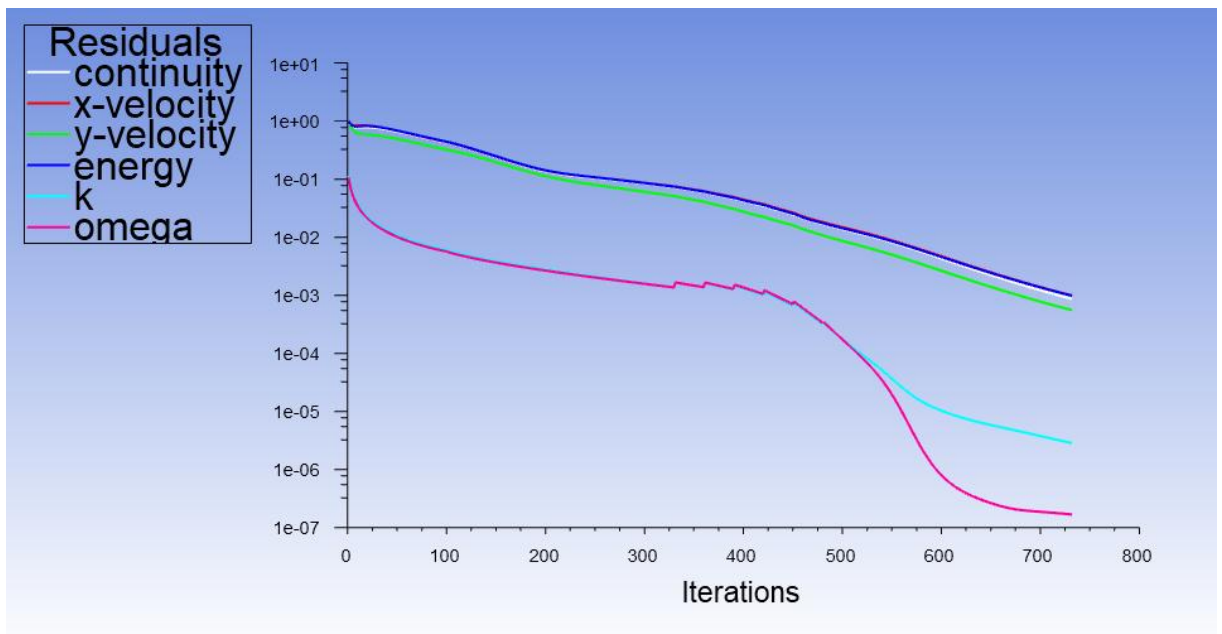
On remarque que la courbe du le contour de pression montre que la pression statique est plus élevée après l'onde de choc

#### 4.2.2.2.2 Cas hypersonique :

L'utilisation du logiciel ANSYS avec un modèle de turbulence k-omega SST de l'écoulement d'air avec les conditions suivantes :

$$M_\infty=7, \quad T_\infty= 220 \text{ K}, \quad P_\infty= 6\text{mbar}, \quad \mu_\infty= 1.4\text{e-}5 \text{ kg/m}^3 ,$$

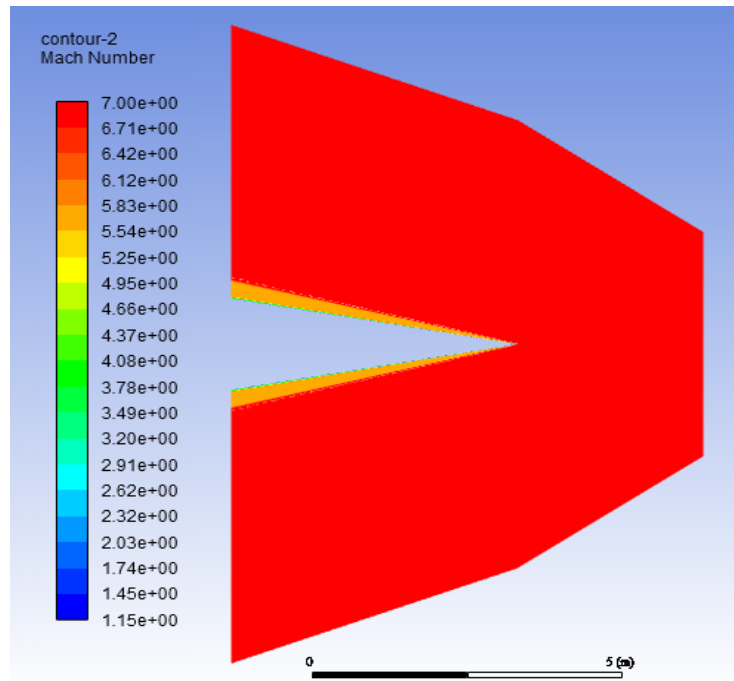
L'angle du cône :  $\theta= 10^\circ$



**Figure 4.13** Courbe de convergence

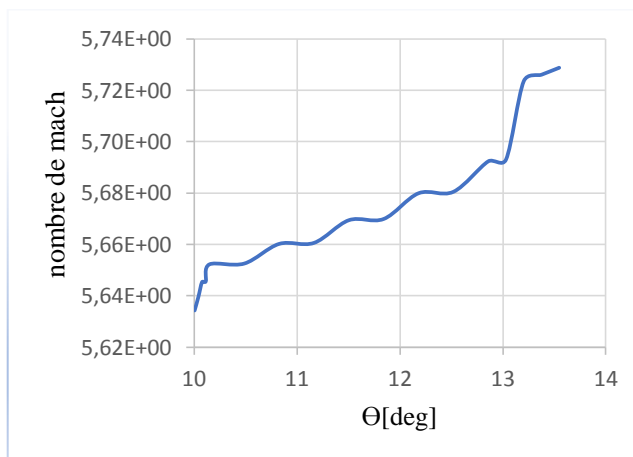
La solution a convergé après 232 itérations avec un temps de 6 min et 46 sec.

- **Nombre de Mach :**

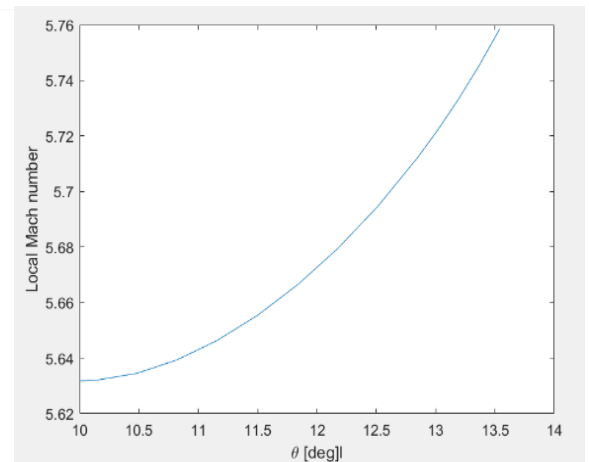


**Figure 4. 14**Contour du nombre de Mach

Résultats obtenus par ANSYS

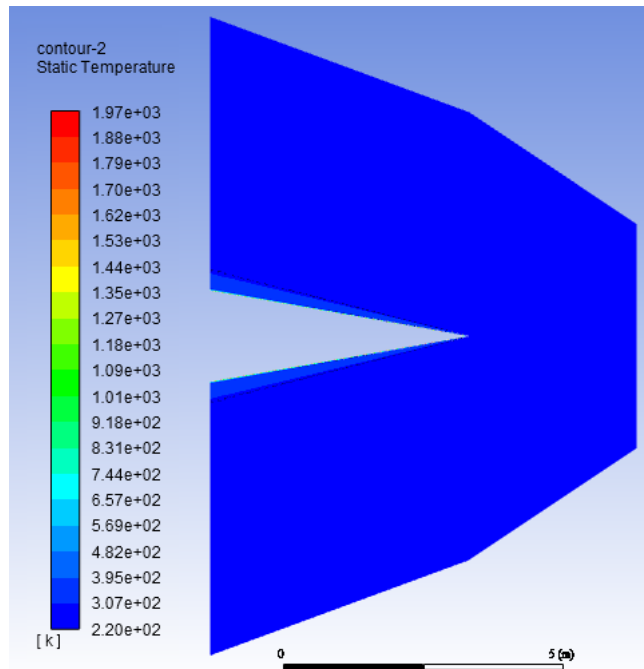


Résultats obtenus par la référence [41]



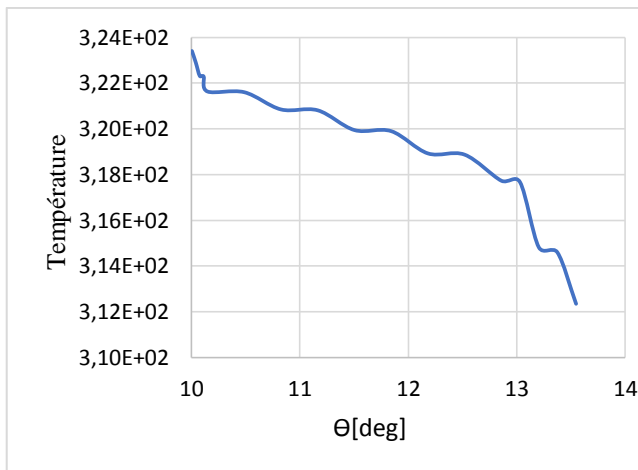
**Figure 4. 15**Comparaison du la courbe de nombre de mach entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41]

- Contour de température statique :

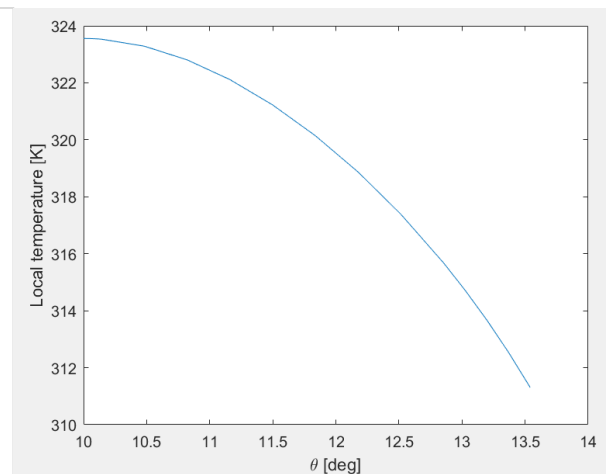


**Figure 4. 16**Contour du la température statique

Résultats obtenus par ANSYS

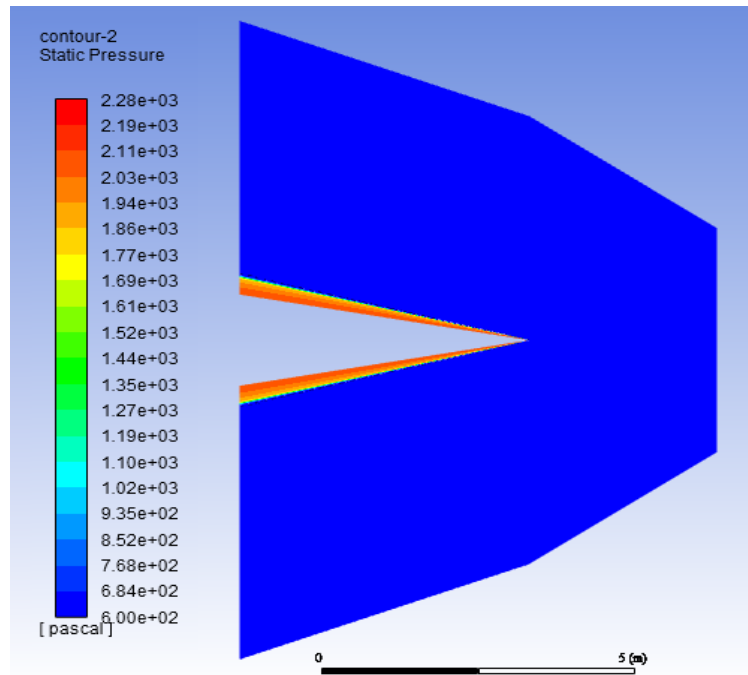


Résultats obtenus par la référence [41]



**Figure 4. 17**Comparaison du la courbe de température entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41]

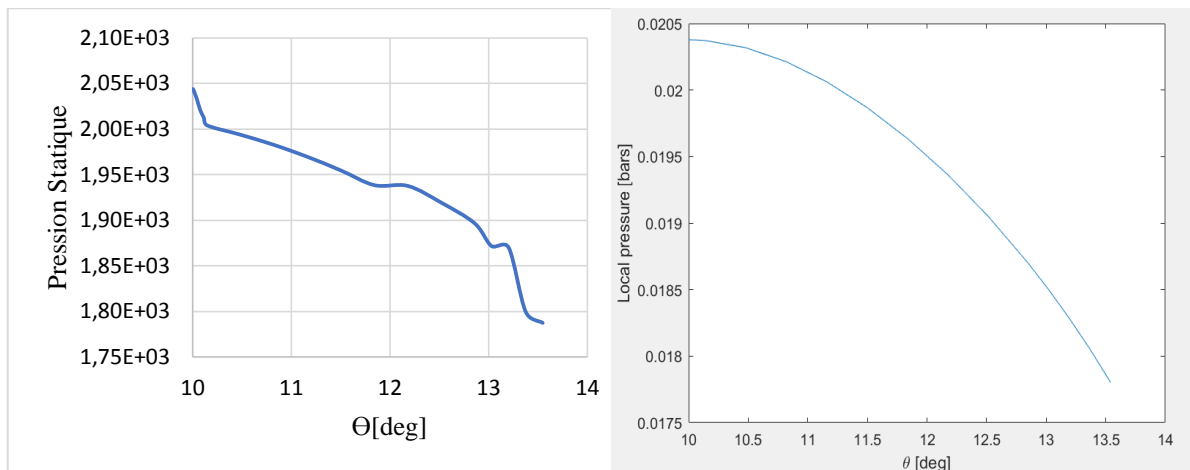
- Contour de la pression statique :



**Figure 4. 18**Contour de la pression statique

Résultats obtenus par ANSYS

Résultats obtenus par la référence [41]



**Figure 4. 19**Comparaison du la courbe de pression statique entre les résultats obtenus par ANSYS et la référence [41]

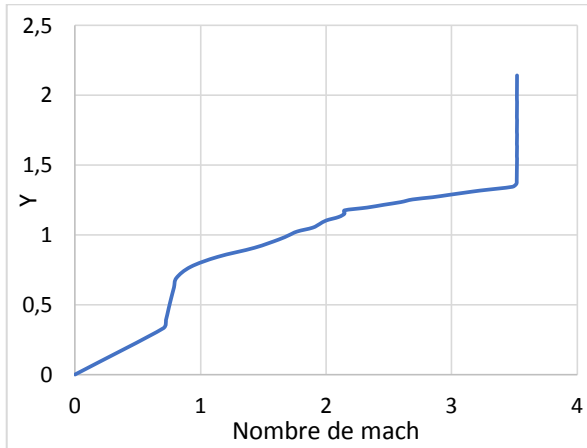


### 4.2.2.3 Couche limite :

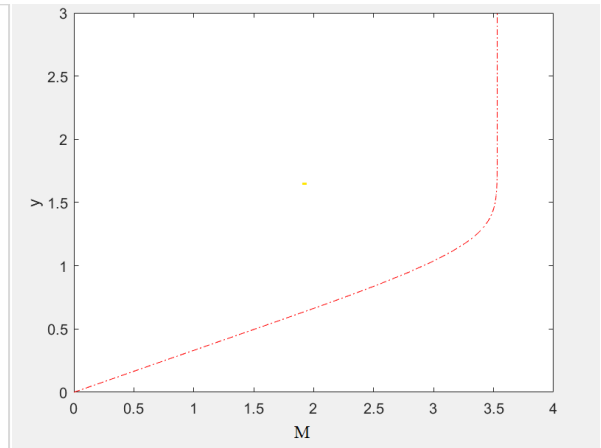
#### 4.2.2.3.1 Cas supersonique :

- Nombre de Mach :

Résultat obtenu par ANSYS



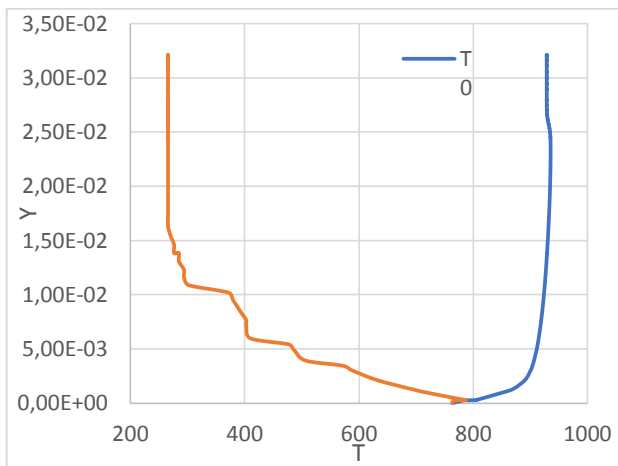
Résultat obtenu par la référence [41]



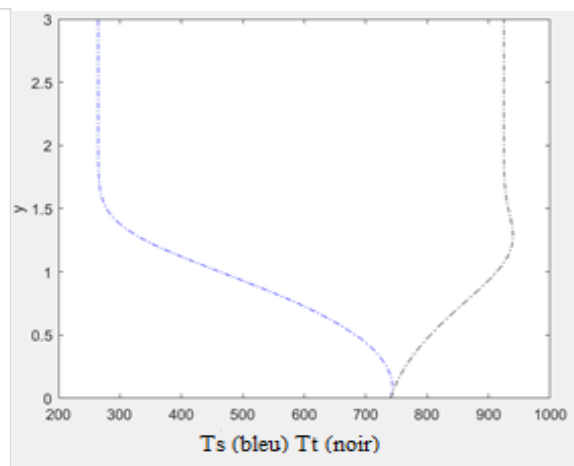
**Figure 4. 20** Comparaison de la courbe du nombre de Mach entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41]

- Température statique et total :

Notre résultat obtenu par ANSYS



Résultat obtenu par la référence [41]

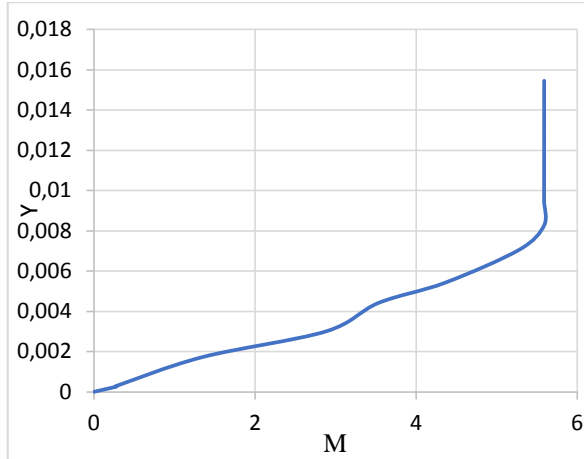


**Figure 4. 21** Comparaison de la courbe de la température statique (T) et total (Tt) entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41]

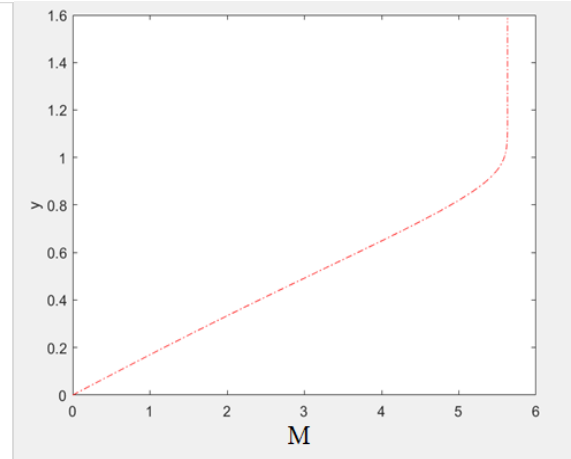
#### 4.2.2.3.1 Cas hypersonique :

- Nombre de Mach :

Résultat obtenu par ANSYS



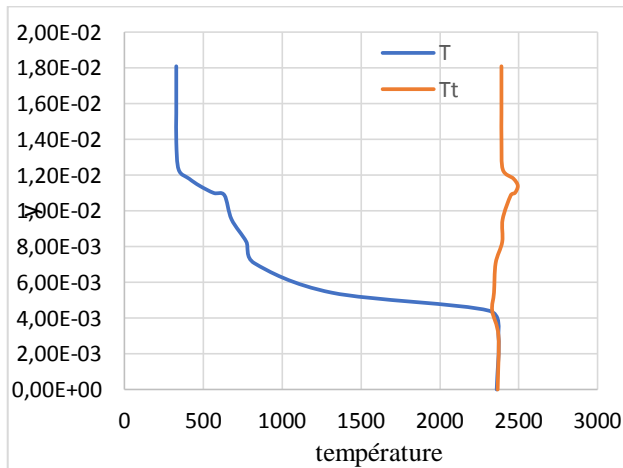
Résultat obtenu par la référence [41]



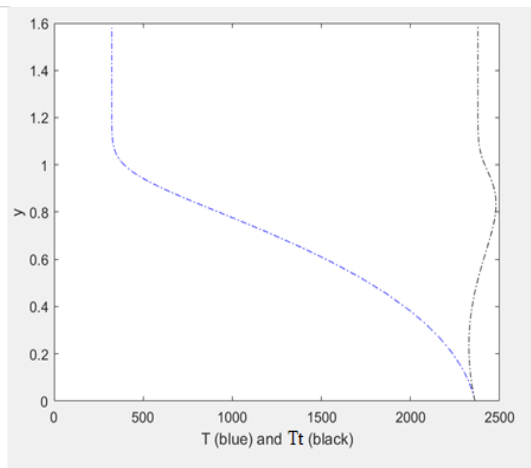
**Figure 4. 22** Comparaison de la courbe du nombre de Mach entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41]

- Température statique et total :

Résultat obtenu par ANSYS



Résultat obtenu par la référence [41]



**Figure 4. 23** Comparaison de la courbe du température statique (T) et total (Tt) entre le résultat obtenu par ANSYS et la référence [41]

# Conclusion

Ce travail a permis une compréhension plus approfondie sur le cône, tout en commençant d'abord, par l'état de l'art ainsi que la compréhension théorique des phénomènes physiques liés à notre étude.

L'influence du nombre de Mach en supersonique et hypersonique sur les paramètres d'écoulement non visqueux et visqueux telle que la pression statique et totale, la masse volumique et la température sont prédits et confirmés par la programmation en MATLAB et la simulation numérique avec ANSYS. De plus, la simulation numérique permet d'étudier les phénomènes locaux et donne accès à des grandeurs physiques difficiles voire impossible à mesurer expérimentalement.

La modélisation numérique, telle que l'utilisation de méthodes de simulation CFD (Computational Fluid Dynamics), est couramment utilisée pour étudier et analyser l'écoulement en régime supersonique et hypersonique. Ces simulations permettent de visualiser et de quantifier les phénomènes des écoulements complexes, d'évaluer les performances du cône et d'optimiser sa conception.

En régime supersonique, l'écoulement devient compressible, et des ondes de choc se forment à mesure que le fluide passe de régions subsoniques à supersoniques. L'interaction entre ces ondes de choc et la surface du cône peut entraîner des variations importantes de la pression et de la température, ce qui affecte l'aérodynamique et les performances du véhicule. L'analyse approfondie de ces phénomènes est essentielle pour la conception des véhicules supersoniques, tels que les avions de chasse et les missiles.

En régime hypersonique, où les vitesses sont beaucoup plus élevées que celle du son, des phénomènes encore plus complexes se produisent. L'écoulement devient fortement compressible, générant des ondes de choc fortement obliques et des régions d'écoulement transsoniques. La modélisation précise de ces phénomènes est cruciale pour la conception de véhicules hypersoniques, tels que les avions spatiaux réutilisables et les missiles balistiques.

L'analyse d'un écoulement visqueux autour d'un cône en régime supersonique et hypersonique offre des opportunités passionnantes pour explorer les phénomènes aérodynamiques complexes associés à ces vitesses élevées. Ces études sont essentielles pour la conception et l'amélioration des véhicules supersoniques et hypersoniques, et

contribuent à l'avancement de la technologie dans le domaine de l'aéronautique et de la propulsion.

# ANNEXE

## 1. La simulation on CFD (ANSYS)

### 1.1 C'est quoi le CFD ?

La simulation numérique en mécanique des fluides (CFD) est une discipline de la prédiction des écoulements de fluide, du transfert de chaleur et de la matière, des réactions chimiques et des phénomènes unis en résoudre des équations mathématiques représentant des lois physiques, à l'aide d'un processus numérique spécialisé:

- La CFD permet de visualiser des mécanismes invisibles et souvent impossibles à mesurer.
- L'analyse CFD est devenue un outil important pour le dimensionnement et l'optimisation des performances des équipements.
- L'analyse CFD complète les tests à moindre cout.
- maximisant le rendement et réduit l'effort total requis dans les laboratoires.

## 2. Présentation d'ANSYS

### 2.1 ANSYS workbench

ANSYS Workbench est une plate-forme de simulation intégrée qui comprend une large gamme de systèmes dans la boîte à outils, notamment des systèmes d'analyse, des systèmes de composants, des systèmes personnalisés et une exploration de la conception.

Il dispose également d'un schéma de projet où les détails du processus d'exécution des différents systèmes d'analyse sont disponibles. Ces détails de chaque système d'analyse dans le schéma du projet incluent les données d'ingénierie, la géométrie, le modèle, la configuration, la solution et les résultats. De plus, les propriétés des schémas sont disponibles pour la saisie de l'utilisateur.

### 2.2 ANSYS Fluent

ANSYS Fluent est un logiciel de calcul de dynamique des fluides écrit en langage C.

Fluent a de nombreuses capacités pour les simulations.

### 2.2.1 Avantage de model k-omega SST

Le modèle de turbulence k-omega SST présente des avantages importants en termes de précision, d'adaptabilité, de prise en compte de l'anisotropie, de robustesse numérique et de faible dépendance de la valeur initiale.

### 2.2.2 Qualité de maillage

On peut comparer notre qualité de maillage à partir de ce tableau :



Unacceptable	Bad	Acceptable	Good	Very good	Excellent
0-0.001	0.001-0.14	0.15-0.20	0.20-0.69	0.70-0.95	0.95-1.00

**Tableau A. 3**Qualitéorthogonale

## Références bibliographiques

- [1]Maccoll J. W., “The conical shock wave formed by a cone moving at high speed”Proceedings of the Royal Soceity of London A, N° 159, PP. 459-472, 1937.
- [2]Kopal Z., “ Tables of Supersonic Flow Around Cones”, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering Tech. Report No. 1, Cambridge, Mass., 1947
- [3]Neice M. M., “Table and Charts of Flow Parameters Across Oblique Shocks”, NACA TN 1673, 1948
- [4] Stone A. H., “On the Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone”, Part 1. Journal of Mathematics and Physics, Vol. 27, No. 1, PP. 67-81, 1948.
- [5]Kopal Z., “Tables of Supersonic Flow Around Cones of Large Yaw, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, Tech” Report No. 5, Cambridge, 1949
- [6]Ferri A., “Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack”, NACA Rep. 1045, 1951
- [7]Maslen S. H., “Supersonic Conical Flow”, NACA TN 2651, 1952.
- [8]Hord R. A., “An Approximate Solution for Axially Symmetric Flow Over a Cone With an Attached Shock Wave”, NACA TN 3485, 1955.
- [9]Mauger F. E., “Steady Supersonic Flow Past Conical Bodies”, A.R.D.E. Rep. (B)3/60, Brit. War Office, May 1960.
- [10] Briggs B. R., “The Numerical Calculation of Flow Past Conical Bodies Supporting Elliptic Conical Shock Waves at Finite Angles of Incidence”, NASA TN D-340, 1960
- [11] Stocker P. M. and Mauger F. E., “Supersonic Flow Past Cones of General Cross Section”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, N° 3, PP. 383-399, 1962.
- [12] Simon W. .E. and Walter A., “Approximations for Supersonic flow over cones”, AIAA Journal, Vol. 01, PP. 1696-1698, 1963.
- [13] Sims J. L., “Tables for Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack”, NASA SP-3004, 1964.
- [14] South J. C. Jr., “Application of the Method of Integral Relations to Supersonic Nonequilibrium Flow Past Wedges and Cones”, NASA TR R-205, 1964.
- [15] Eastman E. W., and Omar M. E., “Flow Fields About Highly Yawed Cones by the Inverse Method”, AIAA Journal, Vol. 3, N° 9, PP. 1782-1784, 1965.
- [16]Belotserkovskiy O. M., “Supersonic Gas Flow Around Blunt Bodies - Theoretical and Experimental Investigations”, NASA TT F-453, 1967.

- [17]Moretti G.“Inviscid Flow Field About a Pointed Cone at an Angle of Attack”, AIAA J., Vol. 5, N° 4, PP. 789-791, 1967
- [18]GonidouR.“Supersonic Flows Around Cones at Incidence”, NASA TT F11,473, 1968.
- [19] Jones D. J., “Numerical Solution of the flow field for conical bodies in a supersonic stream”, National Research Council of Canada, Aeronautical Report, LR-507, Ottawa, 1968.
- [20] Jones D. J.“Tables of Inviscid Supersonic Flow About Circular Cones at Incidence  $\gamma = 1.4$ ” AGARDograph 137, Pts. I and II, Nov. 1969.
- [21]Ndefo D. E“ A Numerical Method for Calculating Steady Unsymmetrical Supersonic Flow Past Cones”, Rep. No. AS-69-11 (AFOSR Grant 268-68), U.S. Air Force, May 1969. (Available from DDC as AD 691 270.)
- [22]Rakich J. V“ A Method of Characteristics for Steady Three-Dimensional Supersonic Flow With Application to Inclined Bodies of Revolution”, NASA TN D-5341, 1969.
- [23] Woods B. A“ The Supersonic Flow Past an Elliptic Cone”, AeronautQuart. VO~. XX, pt. 4, PP. 382-404, 1969.
- [24] South J. C. Jr. and Klunker E. B“ Methods for Calculating Nonlinear Conical Flows. Analytic Methods in Aircraft Aerodynamics”, NASA SP-228, 1970, PP. 131-155, Discussion, PP. 156-158, 1970.
- [25]Klunker E. B., South J. C. Jr. and Ruby M. D., “Calculation of nonlinear conical flows by the method of lines”, NASA TR R-374, 1971.
- [26]Amidon P. F., “Supersonic Aerodynamic Characteristics of Elliptic CrossSection Bodies,” AIAA Paper No.1607-1985.
- [27] Tatum K. E., “Computation of Thermally Perfect Oblique Shock Wave Properties”, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, AIAA-97- 0868, 1997.
- [28] Chen S. X. and Li D. N., “Supersonic flow past a symmetrically curved cone”, Indiana University Mathematical Journal, Vol. 49, PP. 1411-1435, 2000.
- [29] R. S. Bartlett, "Tables of Supersonic Symmetrical Flow around Right Circular Cones, with and without the Addition of Heat at the Wave", Ministry of Technology Aeronautical Research Council, London, 1968.
- [30] I. Sapunkov, "Hypersonic Flow Past a Circular Cone at An Angle of Attack", PMM, vol. 27, no. 5, pp. 930-939, 1963.
- [31] J. N. Moss, G. J. LeBeau and C. E. Glass,“Hypersonic Shock Interactions About a 25/65 Sharp Double Cone”, Rarified Gas Dynamics: 23rd International Symposium, pp. 425-432, 2003.



- [32] R. Gosse and R. Kimmel, "CFD Study of Three-Dimensional Hypersonic Laminar Boundary Layer Transition on a Mach 8 Elliptic Cone", American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [33] E. Belfodil et Y. Amamra, "Thèse de Conception d'une entrée d'air d'avion en régime subsonique et supersonique". UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA -1- Institut d'aéronautique et des études spatiales, 2020-2021.
- [34] Anatoly Jitesh S B Gajjar, "Fluid Dynamics and I Ruban: Part 1: Classical Fluid Dynamics" UNIVERCITY OF OXFORD, 2014.
- [35] John D Anderson and Jr P Christopher Cadou, "Fundamentals of Aerodynamics", 2023
- [36] Sherif Fouad Ali, "STEADY SUPERSONIC FLOW OVER RIGHT CIRCULAR CONE", 1999
- [37] Champs d'écoulement hypersoniques non visqueux : méthodes approximatives
- [38] Ülgen Gülçat, "Fundamentals of modern unsteady aerodynamics", 2011
- [39] Hermann Schlichting and Klaus Gersten, "Boundary-Layer Theory", Spring 2016
- [40] Rajput Pankaj and Goparaju Kalyan and Remella Karthik and Coderoni Marco, "Supersonic Flow over a Wedge and a Cone", ANSYS 2020
- [41] J. Urzay, "Hypersonic Aerothermodynamics course", Spring 2018



