الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Analyse Mathématiques et Applications**

Présenté par :

KAHLA SARAH

Thème :

Les semi-groupes intégrés et leurs applications à la résolution des problèmes d'évolution abstraits

Soutenue publiquement, le **20/ 07 / 2023**, devant le jury composé de :

M. Hachama Mohammed	**Professeur**	**Université de Blida1**	**Président**
M. Talbi Mohamed El Amine	**MCA**	**Université de Blida1**	**Examinateur**
Mme Boutaous Fatiha	**MCA**	**Université de Blida1**	**Promotrice**

Année universitaire : **2022-2023**

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier ma promotrice **Mme Fatiha Boutaous**, pour m'avoir proposé ce thème de recherche intéressant. Sa disponibilité, ses précieux conseils, ses encouragements et son soutien moral, sans réserve, ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier également Messieurs les membres de Jury : **M. Hachama Mohammed** et **M. Talbi Mohamed El Amine** d'avoir bien voulu examiner ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance.

Finalement, j'exprime mes sincères gratitudes à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce Mémoire.

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui ont toujours veillé sur mon bonheur, je leur exprime toute ma reconnaissance.
A ceux que j'aime beaucoup, ma sœur , mes frères , toute ma famille , tous les gens qui m'aiment
je vous dis merci pour tout vos encouragement , soutien moral, Mille mercis.

⋆ SARAH ⋆

Table des matières

الملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بدراسة و حل المشاكل التطورية المجردة التي يتم النظر فيها في فضاء باناخ .
هناك عدة طرق لدراسة هذا النوع من المشاكل ، من بينها في هذه المذكرة نحن مهتمون بتلك المبنية على نظرية أنصاف المجموعات المتكاملة بحيث نبرهن الوجود، الوحدانية لحلول هذه المشاكل التطوريةالمجردة .

الكلمات المفتاحية أنصاف المجموعات ، أنصاف المجموعات المتكاملة ، المعادلات التطورية ، نموذج ديناميكيات السكان ، حل كلاسيكي ، حل محلي ، حل شامل .

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude et la résolution des problèmes d'évolution abstraits considéré dans un espace de Banach.
Il existe plusieurs méthodes d'étude de ces problèmes, parmi lesquelles, on s'intéresse dans ce mémoire à celle basée sur la théorie des semi groupes intégrés.
On montre des résultats d'existence, d'unicité des solutions de ces problèmes .
Mots clés *: Semi-groupes, semi-groupes intégrés, équation d'évolution, modèle dynamique de populations, solution locale, solution globale.*

Abstract

In this work, we are interested in the study and the resolution of abstract evolution problems considered in a Banach space.
There are several methodes of studying this type of problems , Among which, we are interested in that based on the theory of integrated semigroup.
And we show results of existence, uniqueness of the solutions of these problems .
Keywords *: Semigroups,integrated semigroups, evolution equations , population dynamics model , classical solution, local solution, global solution.*

Notations générales

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (le corps des nombres réels ou complexes).

X : Espace de Banach.

X' : Espace dual de X.

$\|.\|_X$: Norme de l'espace X .

$\mathcal{L}(X, Y)$: L'espace des opérateurs linéaires continus de l'espace X vers l'espace Y.

A : Opérateur linéaire.

$D(A)$: Le domaine de définition d'un opérateur linéaire A.

$\overline{D(A)}$: L'adhérence de l'ensemble $D(A)$.

A^{-1} : L'inverse d'un opérateur linéaire A.

$\rho(A)$: L'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A.

$R_\lambda(A)$. : La résolvante d'un opérateur linéaire A.

$\sigma(A)$: Le spectre d'un opérateur A.

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$: Semi-groupe intégré.

$\langle ., . \rangle$: Le produit scalaire.

$C^k(]a, b[)$: L'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur l'intervalle $]a, b[$.

Abréviations :

EDP : Équation aux dérivées partielles.

C.à.d : C'est à dire.

tq : telle que.

i.e : identiquement équivalent

Introduction

Les problèmes d'évolution abstraits apparaissent dans de très nombreuses applications : en finances (équation de Black-Scholes), en traitement d'images (méthode des level-set), en mécanique quantique (équation de Schroedinger), en mécanique des solides et des fluides (équation de Navier-Stokes),...etc.
On entend, ici, par problèmes abstraits, des problèmes à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) dans un espace de Banach.

Parmi les méthodes les plus utilisées pour étudier de tels problèmes, on a la méthode basée sur la théorie des semi-groupes. Cette théorie a eu sa naissance vers les années 1940, avec le fameux théorème de **HILLE-YOSIDA** dû à **Einar HILLE** (1894 - 1980) et **Kosaku YOSIDA** (1909- 1990) qui a caractérisé les générateurs infinitésimaux des C_0-semi-groupes.

Dans les années **(1970 - 1980)** et grâce aux efforts de plusieurs écoles de recherches et chercheurs cette théorie a atteint un certain degré de **perfection** dans les monographies de A.PAZY et d'autres...

En algèbre abstraite, un semi groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, et c'est bien le cas d'une famille d'opérateurs $\{G(t), t \geq 0\}$, munie de la loi de composition.
Un semi-groupe à un paramètre d'opérateurs linéaires sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs linéaires bornés $G : [0, +\infty[\rightarrow B(X)$, vérifiant les deux conditions :
▷ $G(0) = I$ (opérateur identité),
▷ $G(t+s) = G(t)G(s), \forall t, s \geq 0$.
Cette nomination est d'origine algébrique.
Ainsi le semi-groupe $\{G(t), t \geq 0\}$, défini par une propriété algébrique et une propriété de continuité, résout une équation différentielle abstraite.

Le moment le plus important concernant le généralisation des semi-groupes de classe C_0 est marqué **par l'introduction des semi-groupes intégrés** à la fin des années 80 (voir ARENDT [1]) . Dans la théorie des semi-groupes intégrés un rôle important revient à un théorème classique de représentation de Laplace pour une fonction avec valeurs réelles, prouvé par WIDDER [11], [12] .
Dans les années 1960, ZAIDMAN [13] a prouvé que le théorème de Widder ne peut etre étendu aux fonctions **à valeurs dans un espace de Banach** arbitraire. Difficilement, en 1987 il a donné une deuxième version du théorème de WIDDER pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, avec lequel il a obtenu une **caractérisation complète pour le générateur d'un semi-groupe intégré.** Dans le cas des semi-groupes intégrés on peut voir que le générateur n'est pas nécessairement à domaine dense.

Plan du mémoire

Ce mémoire comporte quatre chapitres et est organisé comme suit :
▷ **Le premier chapitre** contient des rappels des notions et résultats de base d'analyse fonctionnelle : espace de Banach, espace de Hilbert, espace de Sobolev, les opérateurs linéaires bornés, les opérateurs linéaires non bornés et leurs différentes propriétés.
▷ **Le deuxième chapitre** concerne la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires, y compris les différents types des semi-groupes (différentiables, compacts et analytiques), ainsi que leurs propriétés.
▷ **Le troisième chapitre** est consacré à la théorie des semi-groupes intégrés et leurs différentes propriétés.
▷ **Le quatrième chapitre** contient des exemples d'applications des semi-groupes intégrés à quelques problèmes d'évolution abstraits (problème de Cauchy abstrait linéaire, problème de Cauchy abstrait semi-linéaire et son application à un modèle de dynamique de populations structurées en âge).
On termine ce travail avec une **conclusion générale**.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre est consacré aux rappels des notions et résultas de base qui nous seront utiles par la suite.En particulier, nous rappelons les espaces fonctionnels et les opérateurs linéaires avec leurs différentes propriétés.

1.1 Les espaces fonctionnels

1.1.1 Norme- Espace normé

Définition 1.1 *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $N : X \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur l'espace X si pour tous $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, elle vérifie :*
1)$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2)$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3)$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
L'espace X muni d'une norme N est dit espace vectoriel normé et on le note (X, N).

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel X normé et complet. Autrement dit : l'espace X est muni d'une norme et toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans l'espace X pour la norme $\|.\|_X$.*

Exemple 1.1 • *Les espaces* $(\mathbb{R}, \|.\|)(\mathbb{C}, \|.\|)$ *sont de Banach.*
• *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3 *On appelle espace de Hilbert* X*, tout espace de Banach* X *dont la norme provient d'un produit scalaire* $\langle ., . \rangle$ *sur* X*.*

1.1.4 Espace $C^k(I; X)$

Définition 1.4 *Soit* I *un ouvert de* $\mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$ *et* X *un espace de Banach.*
1)$C^0(I; X)$ *est l'espace des fonctions* $f : I \to X$ *continues.*
2)$C^k(I; X)$ *est l'espace des fonctions* $f : I \to X$ *dont toutes ses dérivées jusque à l'ordre* k *sont continues, c-à-dire* $f^{(n)} \in C^0(I; X)$ *pour* $0 \leq n \leq k$*.*

1.1.5 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.5 *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$*, pour tous* $1 \leq p < \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha u$ *désigne la dérivée partielle d'ordre* α *de* u *au sens des distributions. Cet espace est muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} =$$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Remarque 1.2 *Pour* $m = 0$*, l'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est l'espace de Lebesgue* $L^p(\Omega)$*, où pour* $1 \leq p < \infty$*,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \quad u \quad est \quad mesurable \quad et \quad \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

est muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.6 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.6 *Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), Du \in L^p(\Omega)\},$$

où Du désigne la dérivée partielle d'ordre 1 de u au sens des distributions.

1.1.7 Espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

Définition 1.7 *L'espace de Sobolev d'ordre 1, noté $H^1(\Omega)$, est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \overline{1,n}\right\}.$$

Théorème 1.3 *$H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

et de la norme :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.1.8 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.8 *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit :*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \exists \theta_n \in D(\Omega) \text{ tel que } \theta_n \to u \text{ dans } H^1(\Omega)\}.$$

1.1.9 Espace de Sobolev $H^2(\Omega)$

Définition 1.9 *On définit l'espace de Sobolev d'ordre 2 par :*

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2\}.$$

On munit l'espace $H^2(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 2} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et on note $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ sa norme correspondante.

Proposition 1.1 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Si Ω est un ouvert borné (au moins dans une direction) alors il existe une constante C_Ω telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Définition 1.10 ***(Formules de Green)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 . Soit $u, v \in$ deux fonctions de classe $C^2(\overline{\Omega})$. Alors*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} ds - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx,$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}$ designe la dérivée normale de v.

1.2 Les opérateurs linéaires

Soit X et Y deux espaces de Banach.

Définition 1.11 ***(Opérateur linéaire)*** *Un opérateur linéaire A de X dans Y est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ et à valeurs dans Y, telle que pour tous $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

1. $A(x + y) = Ax + Ay$.
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

L'ensemble $D(A)$, défini par : $D(A) = \{x \in X \ / \ Ax$ ait un sens$\}$ est appelé le domaine de l'opérateur linéaire A.

Définition 1.12 ***(Opérateur borné)*** *Un opérateur linéaire A de X dans Y est dit borné s'il existe une constante $M > 0$, telle que*

$$\forall x \in X, \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Théorème 1.4 *Un opérateur linéaire A de X dans Y est continu si, et seulement s'il est borné.*

On note $\mathcal{L}(X, Y)$: l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
Si $X = Y$, on note l'ensemble $\mathcal{L}(X, X)$ par $\mathcal{L}(X)$.
Un des ingrédients essentiels pour la théorie des semi-groupes est la notion d'opérateurs linéaires non bornés :

Définition 1.13 ***(Opérateur non borné)*** *soient X et Y deux espaces normés et $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que A est un opérateur non borné s'il existe une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que :*

$$\|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|_X.$$

Définition 1.14 ***(Opérateur à domaine dense)*** *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné. L'opérateur A est dit à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.*

Définition 1.15 ***(Graphe d'un opérateur)*** *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire non borné. Le graphe de l'opérateur linéaire est un sous-espace vectoriel de $X \times X$, défini par*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

Définition 1.16 ***(Opérateur fermé)****. Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset X \to X$ est dit fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $X \times X$.*

Proposition 1.2 *Soit $A :\ D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire non borné. L'opérateur A est fermé si : $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :*

$$(u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u \text{ dans } X) \text{ et } (Au_n \underset{n\to+\infty}{\to} v \text{ dans } Y) \ \Rightarrow u \in D(A) \text{ et } v = Au.$$

Exemple 1.5 *Soit l'opérateur linéaire A, défini par :*
$A : C^1([0,1];\mathbb{R}) \subset C([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$,
$f \mapsto Af = f'$,
A est un opérateur linéaire fermé non borné.

Définition 1.17 ***(Ensemble compact)*** *Soit (X,τ) un espace topologique.*

1. *On appelle* ***recouvrement*** *ouvert de X, une famille $A_i, i \in I$ des ouverts de X , telle que $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*
2. *L'espace topologique séparé (X,τ) est* ***compact****, si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.18 ***(Ensemble relativement compact)*** *Une partie M d'un espace métrique X est dite relativement compacte, si sa fermeture $\overline{M}$ est compacte.*

Définition 1.19 ***(Opérateur compact)*** *Un opérateur linéaire continu $A : X \to Y$ est dit compact s'il transforme tout ensemble borné M de X en un ensemble relativement compact de Y.*

Définition 1.20 ***(Ensemble résolvant, spectre et résolvante d'un opérateur)***
• *On appelle ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, défini par :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

• *On appelle spectre d'un opérateur linéaire A le complémentaire de l'ensemble résolvant de A dans $\mathbb{C}$, défini par :*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

• *La résolvante d'un opérateur linéaire A est définie par $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.*

Lemme 1.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit f, g et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité suivante : pour tout $t \in [a,b]$,*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds.$$

Alors , pour tout t de $[a,b]$:

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds.$$

Chapitre 2

Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappellons les notions et résultats de base de la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires qui jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes d'évolution.

2.1 Semi-groupe d'opérateurs linéaires

2.1.1 Semi-groupe d'opérateurs linéaires

Définition 2.1 *Soit X un espace de Banach. On dit qu'une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ constitue **un semi-groupe** d'opérateurs linéaires de $\mathcal{L}(X)$, si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $G(0) = I_X = I$ *(l'opérateur identité),*
2. $\forall t, s \geq 0, G(t+s) = G(t) \circ G(s) = G(t)G(s).$

Exemple 2.1 ***Semi-groupe de translation***
On considère l'espace $X = C(\mathbb{R})$ ou bien $X = L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$ et on définit sur l'espace X, l'opérateur T_t :
$T_t(f)(x) = f(x+t)$ *alors $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de $\mathcal{L}(X)$. En effet :*
• *Pour $t = 0$, on a :*

$T_0(f)(x) = f(x+0) = f(x) \Rightarrow T_0(f)(x) = If(x) \Rightarrow T_0 = Id$

• $\forall t, s \geq 0$, *on a*

$$T_{t+s}(f)(x) = (T_t \circ T_s)f(x)$$

On a

$$T_{t+s}(f)(x) = f(x+t+s)..........(1)$$

et

$$(T_t \circ T_s)f(x) = T_t(f(x+s)).$$

Posons $z = x + s$, *alors*

$$T_t(f(z)) = f(z+t) = f(x+s+t)..........(2)$$

D'où $(1) = (2)$

Donc $T(t)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe de* $\mathcal{L}(X)$ *.*

2.1.2 Semi-groupe fortement continu (C_0-semi-groupe)

Définition 2.2 *soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de* $\mathcal{L}(X)$*, s'il vérifie la condition suivante :*

$$\lim_{t\to 0^+} G(t)x = x, \forall x \in X$$

alors la famille d'opérateurs $\{G(t)_{\}}t \geq 0$ *est dite* ***semi-groupe fortement continu*** *ou* C_0*-semi-groupe.*

Proposition 2.1 *Si* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe alors il existe deux constantes* $M \geq 1$, $w \geq 0$ *tels que :*

$$\forall t \geq 0, \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}.$$

2.1.3 Semi-groupe de contraction

Définition 2.3 *: Si on prend les constantes M et W de la proposition précédente par M=1 et w=0 alors :*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \text{ , pour tout } t \geq 0.$$

On dira que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe de contraction .*

2.1.4 Semi-groupe uniformément continu

Définition 2.4 *: Soit X un espace de Banach et $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. alors $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue si*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Remarque 2.2 *Un semi-groupe uniformément continu est un C_0-semi-groupe, la réciproque est fause en général.*

2.1.5 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe

Définition 2.5 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X, \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe}\} \\ \text{et} \\ Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \end{cases}$$

est appelé le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ et $D(A)$ est le domaine de définition de l'opérateur A.

Théorème 2.3 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ Si et seulement si A est borné .*

Démonstration. $\Leftarrow$) Supposons que l'opérteur A est borné et montrons que qu'il est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{G(t)\}$.
Posons $\{G(t)\}_{t\geq 0} = \{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ avec $e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$. Montrons que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t) - I}{t} = A \iff \lim_{t\to 0^+} \|\frac{G(t) - I}{t} - A\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|\frac{G(t)-I}{t}-A\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|\frac{G(t)-I-tA}{t}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tA)^n}{n!}-I-tA}{t}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(tA)^n}{n!}t\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\|A\|^n.t^n}{n!}=\frac{1}{t}\left(e^{t\|A\|}-1-t\|A\|\right)
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on aura

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+}\|\frac{G(t)-I-tA}{t}\| \leq \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{t\|A\|}-1}{t}\right)-\|A\|=0.$$

D'où

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)-I}{t}=A.$$

Donc A est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{G(t)\}_{t\geq 0}$.

$\Rightarrow$) On suppose que le semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu et qu'il possède un générateur infinitésimal A.

Pour cela, On détermine son générateur infinitésimal A et on montre que A est borné. On a

$$\lim_{t\to 0^+}\|G(t)-I\|=0.$$

De plus l'application $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto G(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue, alors elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\int_0^t G(s)ds \in \mathcal{L}(X).$$

La suite de la preuve nécessite l'utilisation des propriétés suivantes :

$$\textbf{1)}\ \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\int_0^t G(s)ds\right)=G(0)=I.$$

$$\textbf{2)}\ \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\int_h^{t+h} G(s)ds\right)=G(h).$$

Montrons la première propriété (la deuxième se fait de la même manière). Il suffit de montrer que

$$\lim_{t\to 0^+}\|\frac{1}{t}\int_0^t G(s)ds-I\|_{\mathcal{L}(X)}=0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{t}\int_0^t G(s)ds - G(0)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|\frac{1}{t}\int_0^t (G(s)-G(0))ds\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|(G(s)-G(0))\|_{\mathcal{L}(X)}ds.\end{aligned}$$

Puisque l'application : $\mathbb{R}_+ \ni s \mapsto G(s) \in \mathcal{L}(X)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors elle est continue en 0.

Donc $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0$ tel que

$$0 < s < \sigma \Rightarrow \|G(s) - G(0)\| < \epsilon.$$

D'où :

$$\|\frac{1}{t}\int_0^t (G(s)ds) - I\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{t}\int_0^t \epsilon ds = \frac{\epsilon t}{t} = \epsilon \text{ ....}(*)$$

Donc

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\int_0^t G(s)ds) = G(0) = I.$$

Ainsi, on obtient 1).

D'après $(*)$, il existe $\sigma > 0$ (fixé) suffisamment petit tel que :

$$\|I - \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma G(s)ds\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

D'où

$$\frac{1}{\sigma}(\int_0^\sigma G(s)ds)$$

est inversible .

Posons $v = \int_0^\sigma G(s)ds$ et montrons que $v \in D(A)$ i.e :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{G(h)-I}{h}v = Av.$$

C.à.d on montre que

$$\lim_{h\to 0^+}(\frac{G(h)-I}{h})v existe \iff v \in D(A).$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{G(h)-I}{h}v &= \frac{G(h)-I}{h}.\int_0^\sigma G(s)ds \\ &= \frac{1}{h}[\int_0^\sigma G(h)G(s) - G(s)ds] \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\sigma G(h+s)ds - \int_0^\sigma G(s)ds.\end{aligned}$$

Le changement de variable $\alpha = h + s$ avec $d\alpha = ds$

$$\begin{cases} s = 0 \Rightarrow \alpha = h, \\ s = \sigma \Rightarrow \alpha = \sigma + h, \end{cases}$$

permet d'écrire

$$\frac{G(h) - I}{h} v = \frac{1}{h} \int_0^{h+\sigma} G(\alpha) d\alpha - \frac{1}{h} \int_0^{\sigma} G(s) ds.$$

On simplifie encore l'intégrale :

$$\begin{aligned} -\int_0^{\sigma} G(s)ds &= -\int_0^{h} G(s)ds - \int_h^{\sigma} G(s)ds \\ &= \int_{\sigma}^{h} G(s)ds - \int_0^{h} G(s)ds. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$(\frac{G(h) - I}{h})v = \frac{1}{h}[\int_h^{h+\sigma} G(s)ds + \int_{\sigma}^{h} G(s)ds - \int_0^{h} G(s)ds]$$

$$= \frac{1}{h}(\int_{\sigma}^{\sigma+h} G(s)ds - \int_0^{h} G(s)ds).$$

En multipliant par v^{-1}, on aura

$$\frac{G(h) - I}{h} = \frac{1}{h}(\int_{\sigma}^{\sigma+h} G(s)ds - \int_0^{h} G(s)ds).(\int_0^{\sigma} G(s)ds)^{-1}$$

Donc

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(h) - I}{h} = (G(\sigma) - G(0)) \int_0^{\sigma} G(s)ds)^{-1} = A.$$

D'où l'opérateur linéaire A est générateur infinitésimal du semi-groupe $G(t)_t \geq 0$ uniformément continu. $\square$

Théorème 2.4 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continu. Si*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t},$$

alors $G(t) = S(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Théorème 2.5 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal alors :*
a)$\forall x \in X$ *:*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)xds = G(t)x,$$

b)$\forall x \in X$ *,*

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A)$$

et

$$A(\int_0^t G(s)xds) = G(t)x - x,$$

c)$\forall x \in D(A), G(t)x \in D(A)$ *et*

$$\frac{d^+G(t)}{dt}x = AG(t)x = G(t)Ax,$$

d)$\forall x \in D(A)$ *:*

$$G(t)x - G(s)x = \int_s^t G(\tau)Axd\tau = \int_s^t AG(\tau)xd\tau.$$

Démonstration. voir [7], page 13. □

Théorème 2.6 ***(Théorème de Hille-Yosida)*** *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) l'opérateur A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$, où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A et

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda - \omega},\ pour\ Re\lambda > \omega.$$

Démonstration. Voir [7]. □

Le résultat suivant généralise le théorème de Hille-Yosida :

Théorème 2.7 ***(Théorème de Phillips-Miyadera-Feller)***
Un opérateur linéaire A vérifie les deux conditions suivantes :
(i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) Il existe deux nombres $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$, tels que l'ensemble résolvant de A,

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\} \textit{ et } \|(A-\lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \textit{ pour } Re\lambda > \omega, n = 1, 2, ...$$

si, et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, tels que

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

2.2 Quelques semi-groupes particuliers

2.2.1 Semi-groupe différentiable

Définition 2.6 • *Un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est dit différentiable pour $t > t_0$, si pour tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.*
• *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit différentiable, s'il est différentiable pour $t > 0$.*

2.2.2 Semi-groupe compact

Dans les applications aux équations différentielles, on rencontre souvent des semi-groupes d'opérateurs qui sont compacts. Ceci est certainement très utile dans l'étude de l'existence de solutions de certaines équation d'évolution, alors nous présentons les conditions qui garantissent la compacité des C_0 semi-groupe.

Définition 2.7 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe dans un espace de Banach X. On dit que $G(t)$ est compact si :*

$$\textit{Pour tout } t > t_0, G(t) \textit{ est un opérateur compact.}$$

Propriétés 2.8
Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe dans un espace de Banach X et A son générateur infinitésimal.
Si $G(t), t \geq 0$ est compact , alors X doit être un espace de Banach de dimension finie .

Remarque 2.8 *Lorsque nous parlerons de semi-groupes compacts, nous comprendrons toujours que cette propriété n'est valable que pour* $t > 0$.

Lemme 2.1 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe dans* X *,* $SiG(t), t > 0$ *est compact alors* $G(t), t > 0$ *est uniformément continu .*

Démonstration. : Voir [6], page 103. □

2.2.3 Semi-groupe analytique

Jusqu'à présent, nous avons traité des semi-groupes dont le domaine était l'axe réel non négatif . nous allons maintenant considérer la possibilité d'étendre le domaine du paramètre t des semi-groupes $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ aux régions du plan complexe qui incluent l'axe réel non négatif .

Dans cette section cependant , nous nous limiterons à des domaines complexes très particuliers , à savoir les angles autour de l'axe réel positif appelées angles autour de la demi-droite réelle positive, notées :

$$\triangle = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < argz < \theta_2, \theta_1 < 0 < \theta_2\}.$$

Définition 2.8 *Soit* $\triangle$ *un secteur dans* $\mathbb{C}$*. On appelle semi-groupe analytique la famille d'opérateurs linéaires bornés* $\{T(z), z \in \Omega\}$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *pour tous* $z_1, z_2 \in \triangle$.
2. $T(0) = I$*, où* I *désigne l'opérateur identité.*
3. *Pour chaque* $x \in X, \lim_{z\to 0} T(z)x = x$ *où* $z \in \triangle$.
4. *La fonction* $z \mapsto T(z)$ *est analytique dans* $\triangle$.

Proposition 2.2 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de classe* C^0 *différentiable pour* $t > t_0$ *et* A *son générateur infinitésimal dans* X *, alors :*
Pour $t > t_0, G(t) : X \to D(A)$ *et* $G^{'}(t) = AG(t) : X \to X$ *sont des opérateurs bornés.*

Chapitre 3

Les semi-groupes intégrés et leurs propriétés

Introduction

La théorie des semi-groupes intégrés a beaucoup d'applications aux équations différentielles, aux équations aux dérivées partielles et aux problèmes d'évolution. Pour cela, dans ce chapitre nous allons donner les définitions et les résultats de base concernant les semi-groupes-intégrés et leurs différentes propriétés. Pour plus de détails, voir [5].

3.1 Les Semi-groupes intégrés

Définition 3.1 *(**Semi-groupe intégré**) : Soit X un espace de Banach et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X. On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $S(0) = 0$,
2. *pour chaque $x \in X$, l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue sur l'intervalle $[0, \infty[$,*
3. *pour tous $t, s \geq 0$, on a*

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(r+s) - S(r)]dr.$$

Proposition 3.1 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ un semi-groupe intégré. Alors, pour tous $t, s \geq 0$:*

i)

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr.$$

ii) $S(t)S(s) = S(s)S(t)$ *(le produit est commutatif).*

Remarque 3.1 1) *pour tout* $t, s \geq 0$ *on a :*

$$\begin{aligned} S(t)S(s) &= \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr \\ &= \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^t S(r)dr - \int_0^s S(r)dr \\ &= \int_s^{t+s} S(r)dr - \int_0^t S(r)dr \\ &= \int_0^t S(r+s)dr - \int_0^t S(r)dr \\ &= \int_0^t [S(r+s) - S(r)]dr.\mathcal{L}(X) \end{aligned}$$

2) *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *un semi intégré , pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, nous désignerons par* C^n *l'ensemble :*

$$\{x \in X, S(.)x \in C^n([0, \infty[, X)\},$$

avec la convention $C^0 = X$.
alors la 3 ème propriété de la définition (3.1) *peut être remplacé par :*

$$S(t)x \in C^1,$$

et

$$S'(r)S(t) = S(r+t)x - S(r)x, \forall r, t \geq 0,$$

pour tout $x \in X$.

Proposition 3.2 *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi intégré alors :*
1) *pour tout* $x \in C^1$ *on a :*

$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x, \forall r, t \geq 0,$$

2) *pour tout* $x \in C^1$ *on a :*

$$S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x, \forall t \geq 0,$$

3) *pour tout* $x \in C^2$ *on a :*

$$S''(0)S(t)x = S(t)S''(0)x, \forall t \geq 0.$$

Exemple 3.2 *Soit* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *-semi-groupe sur un espace de Banach* X*. Alors la famille d'opérateurs* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *définie par :*

$$S(t) = \int_0^t G(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur X*. En effet :*

1)$SI(0) = 0$ *(vérifié) ,*

2)$S(t)$ *est continue (car* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *-semi-groupe) ,*

3) *pour tous* $t, s \geq 0$ *on a :*

$$S(t)S(s) = \int_0^t G(r)dr \int_0^s G(\sigma)d\sigma = \int_0^t \int_0^s G(r)G(\sigma)d\sigma dr = \int_0^t \int_0^s G(r+\sigma)d\sigma dr.$$

En posant $\tau = r + \sigma$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} S(t)SI(s) &= \int_0^t \int_r^{s+r} G(\tau)d(\tau)dr \\ &= \int_0^t \left[\int_0^{s+r} G(\tau) - \int_0^r G(\tau)d(\tau)\right] dr \\ &= \int_0^t SI(s+r) - S(r)dr. \end{aligned}$$

D'où $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe intégré .*

Exemple 3.3 *La famille d'opérateurs* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *définie sur un espace de Banach* X *par :*

$$S(t) = \begin{pmatrix} sin(t) & \int_0^t sin(s)ds \\ cos(t) - 1 & sin(t) \end{pmatrix}$$

est un semi-groupe intégré donné sur l'espace $X \times X$*, car :*

1)

$$S(0) = \begin{pmatrix} sin(0) & 0 \\ cos(0) - 1 & sin(0) \end{pmatrix} = 0,$$

2)$S(t)$ *est continue* $\forall \geq 0$ *, car* $cos(t)-1$ *et* $sin(t)$ *des fonctions continues .* ***3)*** *pour tout* $t,s\geq 0$ *et d'après la proposition* (3.2)*, on vérifie si :*

$$S(r+t)-S(r)=S'(r)S(t)$$

on a :

$$S(r+t)-S(r)=\begin{pmatrix} sin(r+t) & \int_0^{r+t} sin(s)ds \\ cos(r+t)-1 & sin(r+t) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} sin(r) & \int_0^{r} sin(s)ds \\ cos(r)-1 & sin(r) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} sin(r+t)-sin(r) & -cos(r+t)+cos(r) \\ cos(r+t)-cos(r) & sin(r+t)-sin(r) \end{pmatrix}$$

et

$$S'(r)S(t)=\begin{pmatrix} cos(r) & sin(r) \\ -sin(r) & cos(r) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sin(t) & \int_0^{t} sin(s)ds \\ cos(t)-1 & sin(t) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} cos(r)sin(t)+sin(r)cos(t)-sin(r) & cos(r)\int_0^t sin(s)ds+sin(r)sin(t) \\ -sin(r)sin(t)+cos(r)cos(t)-cos(r) & -sin(r)\int_0^t sin(s)ds+cos(r)sin(t) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} sin(r+t)-sin(r) & -cos(r)cos(t)+cos(r)+sin(r)sin(t) \\ cos(r+t)-cos(r) & sin(r)cos(t)-sin(r)+cos(r)sin(t) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} sin(r+t)-sin(r) & -cos(r+t)+cos(r) \\ cos(r+t)-cos(r) & sin(r+t)-sin(r) \end{pmatrix}$$

$$=S(r+t)-S(r).$$

D'où $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe intégré.*

Définition 3.2 ***(Espace dégénéré d'un semi-groupe intégré)***
On appelle espace dégénéré d'un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *l'ensemble défini par :*

$$\mathcal{N}=\{x\in X, S(t)x=0, \forall t\geq 0\}.$$

Proposition 3.3 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré alors :*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \{x \in C^1, S'(0)x = 0\}.$$

Définition 3.3 ***(Semi-groupe intégré non dégénéré)*** *: On dit que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est non-dégénéré si $\mathcal{N} = \{0\}$,*
i.e : si pour tout $t \geq 0$, $S(t)x = 0$, alors $x = 0$.

Définition 3.4 ***(Semi-groupe intégré dégénéré)*** *: En cas contraire , on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré dégénéré si $\mathcal{N} \neq \{0\}$.*

Remarque 3.4 *$\mathcal{N}$ est un sous espace fermé de C^1 .*

Proposition 3.4 *Un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est non dégénéré si et seulement si on a $S'(0)x = x$ pour tout $x \in C^1$*

Théorème 3.5 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non dégénéré , alors $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe sur C^1 .*

Démonstration. 1) D'après la proposition (3.3) et comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe intégré non dégénéré on est bien que $S'(0)x = x$ et donc $S'(0) = I$
(l'opérateur identité). 2) D'après la propriété 1 de la proposition (3.2), on a :

$$S(r)S'(t)x = S(r + t)x - S(t)x, \forall r, t \geq 0.$$

En dérivant par rapport à r, on aura :

$$S'(r)S'(t)x = S'(r + t)x, \forall r, t \geq 0.$$

3) L'application

$$\begin{cases} [0, \infty[\to C^1 \\ t \to S'(t)x \end{cases}$$

est continue et donc elle continue aussi en 0 i.e :

$$\lim_{t\to 0} S'(t)x = S'(0)x$$

Il résulte que $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe sur C^1 . □

3.2 Générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré

On considère le générateur du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$défini par l'opérateur linéaire A :

$$A : D(A) \subset X \to X,$$

et

$$A = \lambda I - R^{-1}(\lambda),$$

où

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt.$$

Remarque 3.6 *généralement , l'intégrale cettel'égalité n'existe pas. Pour cela, on définit :*

Définition 3.5 *On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur linéaire :*

$$A : D(A) \subset X \to X,$$

défini par : $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si, pour tout $t \geq 0$ on a

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r) y dr.$$

Remarque 3.7 *Il est clair que pour $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in C^1$ et*

$$S'(t)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0.$$

Proposition 3.5 *Soit l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors :*

$$C^2 \subseteq D(A) \subseteq C^1$$

et

$$Ax = S''(0)x, \forall x \in C^2.$$

Démonstration. Compte tenu de la remarque (3.7) on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si : $x \in C^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0.$$

De la 2 ème propriété de la proposition (3.2) on aura

$$S''(0)S(t)x + S'(0)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0.$$

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non dégénéré et compte tenu de la proposition (3.4) il résulte que

$$S'(0)x - x = 0.$$

D'où

$$S"(0)S(t)x = S(t)y, \forall t \geq 0$$

Pour tout $x \in C^1$, en utilisant la 3 ème propriété de la proposition (3.2) et pour tout $x \in C^2$, il s'ensuit que :

$$S(t)S''(0)x = S(t)y, \forall t \geq 0.$$

D'où

$$S(t)[S''0)x - y] = 0, \forall t \geq 0.$$

Par conséquent

$$S''(0)x = y, \forall x \in C^2$$

donc $Ax = S''(0)x, \forall x \in C^2$. □

Proposition 3.6 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors A est un opérateur **fermé**.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \; et \; \lim_{n\to\infty} Ax_n = y \;\; et \;\; montrons \;\; que \; Ax = y.$$

On a d'après les hypothèses

$$\|S(s)Ax_n - S(s)y\| \leq \|S(s)\|\|Ax_n - y\|$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} S(s)Ax_n = S(s)y,$$

Uniformément par rapport à $s \in [0, t]$ et pour $x_n \in D(A)$ nous avons

$$S(t)x_n - tx_n = \int_0^t S(s)Ax_n ds, \forall t \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} S(t)x_n - tx_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^t S(s)Ax_n ds, \forall t \geq 0.$$

D'où

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(s)yds, \forall t \geq 0.$$

Donc l'opérateur A est fermé. □

Proposition 3.7 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, Pour tout $x \in X$ il résulte :*

$$\int_0^t SI(\sigma)xd\sigma \in D(A)$$

et

$$A\int_0^t SI(\sigma)xd\sigma = S(t)x - tx, \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Voir[4], pages 69-70. □

3.3 semi-groupe intégrés non dégénéré exponentiellement borné

Définition 3.6 *On dit qu'un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné, s'il existe $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}.$$

Remarque 3.8 *Il existe des semi-groupes intégrés qui ne sont pas exponentiellement borné.*

Théorème 3.9 *Soient $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé, et $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt},$$

et ayant l'espace non dégénéré $\mathcal{N} = \{0\}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) *la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ est un semi-groupes intégré non-dégénéré exponentiellement*

borné ayant pour le générateur l'opérateur A.
ii)$A_w \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in A_w$ *on a :*

$$R(\lambda, A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt.$$

Démonstration. Voir [[4] , pages 74-76]. □

3.4 Semi-groupe intégrés localement Lipschitzien

Définition 3.7 *Un semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *est dit localement Lipschitzien si pour tout* $b > 0$ *il existe une constante* L*, telle que :*

$$\|S(t)S(s)\| \leq L|t-s|, \forall t, s \in [0, b].$$

Théorème 3.10 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) *A est le générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré et localement Lipschitzien.*
2) *A satisfait les conditions de Hille-yosida.*

Corollaire 3.11 *Chaque semi-groupe intégré localement Lipschitzien est exponentiellement borné.*

Théorème 3.12 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) *A est le générateur de semi-groupe intégré localement Lipschitzien .*
b) *il existe deux constantes réelles* M*,* w*, Telle que* $]0, \infty[\subset \rho(A)$ *et*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda > w.$$

3.5 Le Théorème de ARENDT

Soit A un opérateur linéaire tel que $A : D(A) \subset X \to X$ est le générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ pour lequel il existe $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ Telle que :

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq M e^{w(t+h)} h, \qquad \forall t, h \geq 0$$

si et seulement si :

1) l'opérateur A est fermé.

2) il existe $\alpha \geq max\{0, w\}$ Telle que $A_\alpha \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in A_\alpha$ on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. Voir [4], page 82-85.

□

3.6 Théorème de WIDDER - ARENDT

Dans la Théorie des semi-groupes intégrés, une grande importance revient à un théorème de représentation de la transformée de Laplace pour une fonctions avec des valeurs réelles , montré par WIDDER en 1934 .

Soit X un espace de Banach , $a > 0$, $R : A_\alpha \rightarrow X$ une fonction $M \geq 0$ et $w \in]-\infty, a]$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

$i)R \in C^\infty(A_\alpha, X)$ et pour tout $\lambda \in A_\alpha$ on a :

$$\|R(\lambda)^n\| \leq \frac{Mn!}{(Re\lambda - w)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

,

$ii)$ il existe une fonction $F : [0, \infty[\rightarrow X$ avec les propriétés :

$F(0) = 0$ et

$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq Me^{w(t+h)}h, \forall t, h \geq 0.$$

Chapitre 4

Applications des semi-groupes intégrés aux problémes d'évolution

Introduction

Dans ce chapitre nous allons appliquer la théorie des semi-groupes-intégrés aux problèmes d'évolution et nous allons voir le problème de Cauchy homogène dans un espace de Banach approprié, ainsi nous allons voir un problème concret basé sur l'utilisation des semi-groupes intégrés .

D'une manière simple, pour voir l'utilité de la théorie des semi-groupes intégrés, on commence par l'application au problème de Cauchy.

4.1 Problème de Cauchy homogène

Les problèmes de Cauchy homogènes sont généralement écrits sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0, \qquad\qquad (P) \\ u(0) = x, \end{cases}$$

A étant un opérateur fermé, supposé générateur d'un semi-groupe intégré non dégénéré. Le problème (P) peut être résolu dans le sens fort, i.e : u est une solution forte du problème de Cauchy.

Autrement dit, u verifie les propriétés :

u est différentiable, $u(t) \in D(A)$, et satisfait le problème (P) si $x \in C^3$.

Si nous voulons détendre cette hypothèse de régularité sur X, on peut considérer des solutions intégrales dans le sens de Da Prato et Sinistrari :

$$u(t) = A\int_0^t u(s)ds + x, \qquad t \geq 0. \tag{4.1}$$

L'équation (4.1) signifie en particulier que $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$.
De plus $u(t) = S^{'}(t)x$ résout (4.1) si $x \in C^1$.
Nous intégrons (4.1) et puisque $v(t) = \int_0^t u(s)ds$, alors

$$v(t) = A\int_0^t v(s)ds + tx, \qquad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Nous avons besoin des résultats suivants :

Théorème 4.1 *Pour tout $x \in X$, $v(t) = S(t)x$ est l'unique solution continue de (4.2), de plus on a $\|v(t)\| \leq c(t)\|x\|$ avec c(t) ne dépendant pas de x .*

Théorème 4.2 *Un opérateur linéaire A sur X est le générateur d'un semi-groupe non dégénéré si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) *$v = 0$ est la seule solution continue de (4.2) pour $x = 0$.*
(ii) *Pour tout $x \in X$, l'équation (4.2) admet une solution continue v telle que $\|v(t)\| \leq c(t)\|x\|$ avec un certain $c(t) > 0$ ne dépendant pas de x.*

Démonstration. voir [9] pages 434-435 □

Corollaire 4.3 *Soit A un opérateur densément défini sur X, A engendre un semi-groupe intégré non dégénéré sur X si et seulement si l'équation*

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + x, \qquad t \geq 0, \tag{4.3}$$

$$v(0) = 0,$$

a une unique solution continue v pour tout $x \in D(A)$ et $\|v(t)\| \leq c\|x\|$ pour $t \geq 0$ dans des intervalles bornés avec c ne dépend pas de x et t.

Démonstration. ([9] pages 435-436) . □

4.2 Application à l'équation des ondes

Pour illustrer les résultats abstraits obtenus dans la section précédente, nous les appliquons à l'équation des ondes dans l'espace $L_2(\mathbb{R}^m)$.
Nous traitons d'abord les solutions faibles de l'équation des ondes homogène suivante :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_z)w(t,x) &= 0, \\ \partial_t w(0,x) &= \dot{u}_2(x), \\ w(0,x) &= \dot{u}_1(x) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^m, t > 0$. En posant $u_1 = w, u_2 = \partial_t w$ on peut écrire (4.4) de manière équivalente comme :

$$\begin{aligned} \partial_t(u_1,u_2) &= (u_2, \Delta u_1) = A(u_1,u_2), \\ (u_1,u_2)(0) &= (\dot{u}_1, \dot{u}_2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Soit l'espace de Banach :

$$X = L_2(\mathbb{R}^m) \times L_2(\mathbb{R}^m),$$

et A l'opérateur défini par :

$$A(u_1,u_2) = (u_2, \Delta u_1),$$

$$D(A) = H_2^2(\mathbb{R}^m) \times L_2(\mathbb{R}^m).$$

Ici, $H_2^2(\mathbb{R}^m)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions dans $L_2(\mathbb{R}^m)$ dont les dérivée au sens des distributions jusqu'à l'ordre n sont également représentées par des éléments dans $L_2(\mathbb{R}^m)$.
Soit

$$X_\omega = H_2^1(\mathbb{R}^m) \times L_2(\mathbb{R}^m).$$

Alors la partie A_ω de A dans X_ω est définie sur :

$$D(A_\omega) = H_2^2(\mathbb{R}^m) \times H_2^1(\mathbb{R}^m).$$

Il est bien connu que A_ω engendre un semi-groupe fortement continu T_ω sur X.
De plus, on vérifie facilement que les conditions (a) et (b) du théorème (3.12) sont satisfaites,

donc le théorème (3.12) implique que A est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné S sur X.
Il est montré aussi que

$$(u_1(t), u_2(t)) = T_\omega(t)(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$$

Pour $u_1 \in H_2^2(\mathbb{R}^m), u_2 \in H_2^1(\mathbb{R}^m)$ résout le problème

$$\frac{d}{dt}(u_1, u_2) = (u_2, \Delta u_1),$$
$$u_1(0) = \dot{u}_1, u_2(0) = \dot{u}_2.$$

En particulier

$$\frac{d^2}{dt^2}u_1 = \Delta u_1.$$

On note que

$$S(t)(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = \left(\int_0^t u_1(s)ds, u_1(t) - \dot{u}_1\right)$$

Pour $\dot{u}_1 \in H_2^1$. Ceci suggère que pour $\dot{u}_1, \dot{u}_2 \in L_2$, la fonction $w(t) = v_2(t) + \dot{u}_1$ avec :

$$(v_1(t), v_2(t)) = S(t)(\dot{u}_1, \dot{u}_2).$$

Devrait avoir un sens en tant que solution faible de (4.4) .
Soit :

$$(v_1(t), v_2(t)) = v(t) = S(t)(\dot{u}_1, \dot{u}_2). \tag{4.6}$$

D'après le théorème (4.2)

$$v(t) - tx = A\int_0^t v(r)dr \tag{4.7}$$

Avec $x = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ et d'après la définition de A dans (4.5) ,

$$v_1(t) - t\dot{u}_1 = \int_0^t v_2(r)dr, \tag{4.8}$$

$$v_2(t) - t\dot{u}_2 = \Delta \textstyle\int_0^t v_1(r)dr.$$

En particulier

$$\int_0^t v_1(r)dr \in H_2^2(\mathbb{R}^m)$$

En insérant la première équation de (4.8) dans la seconde on obtient

$$v_2(t) - t\dot{u}_2 = \Delta \int_0^t (t-r)(v_2(r) + \dot{u}_1 dr. \tag{4.9}$$

On a :

$$w(t) = v_2(t) + \dot{u}_1. \tag{4.10}$$

Fournit

$$w(t) - \dot{u}_1 - t\dot{u}_2 = \Delta \int_0^t (t-r)w(r)dr. \tag{4.11}$$

Soit maintenant, alors peut être deux fois différentiable en fournissant

$$\begin{aligned} &\tfrac{d^2}{dt^2}\langle w(t), u^*\rangle = \langle w(t), \Delta u^*\rangle \\ &\frac{d}{dt}\langle w(t), u^*\rangle\Big|_{t=0} = \langle \dot{u}_2, u^*\rangle, \\ &w(0) = \dot{u}_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Théorème 4.4 *Pour $\dot{u}_1, \dot{u}_2 \in L_2(\mathbb{R}^m)$ il existe une unique fonction continue $w \in H_2^2(\mathbb{R}^m)$ et w satisfait (4.12) définition $S(t)(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = (\int_0^t w(s)ds, w(t) - \dot{u}_1)$ fournit un semi-groupe intégré exponentiellement borné non dégénéré sur $L_2(\mathbb{R}^m) \times L_2(\mathbb{R}^m)$.*

Pour plus de détails voir [9].

4.3 Modèle de dynamique de populations structurées en âge

4.3.1 Introduction

Cette partie est consacrée aux modèles de dynamique de populations structurées en âge. Ces modèles ont été abondamment utilisés pour décrire l'âge chronologique des individus, ou plus généralement l'histoire des individus c'est par exemple le cas dans les modèles structurés en âge d'infection , dans lesquels l'age décrit le temps depuis l'infection . Les premiers travaux sur les modèles structurées en âge remontent au début du 20^{me} siècle avec Sharpe et Lotka [8] en 1911 et avec McKen-drick en 1926. Ces modèles linéaires ont été rigoureusement étudiés par Feller et Bellman et Cooke, en utilisant les équations intégrales de Volterra et la transformée de Laplace. Les modèles structurées en âge non linéaires ont été étudiés à partir des années 70 avec les traveaux de Gurtin et MacCamy [3], voir [2].

4.3.2 Présentation du modèle

Un modèle linéaire de base pour une population structurée en âge (chronologique) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)u(t,a), poura \geq 0 \\ u(t,0) &= \int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da \\ u(0,.) &= u_0 \in L^1_+((0,+\infty),\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{4.13}$$

Sachant que :
$-\mu(a)u(t,a)$ mortalités.
$\int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da$ naissances.
Interprétation
$\mu \in L^\infty_+(0,+\infty)$ et $\mu(x)$ est le taux de mortalité des individus, et $\beta \in L^\infty_+(0,+\infty)$ et $\beta(x)$ est le taux de reproduction.
Dans le contexte des problèmes de dynamique de populations structurées, la fonction $a \mapsto u(t,a)$ est la densité de population . Cela signifie que pour chaque $a_1, a_2 \in [0,+\infty]$, avec $a_1 < a_2$ la quantité

$$\int_{a_1}^{a_2} u(t,a)da$$

représente le nombre d'individus dans la population ayant un âge compris entre a_1 et a_2 (à l'instant $t \geq 0$). Donc en particulier

$$U(t) = \int_0^{+\infty} u(t,a)da$$

est le nombre total d'individus à l'instant $t \geq 0$. En intégrant l'équation (4.13) le long des caractéristiques on obtient alors

$$\begin{aligned} u(t,a) &= exp(-\int_{a-t}^{a} \mu(s)ds)u_0(a-t), \;\; si \;\; a \geq t, \\ u(t,a) &= exp(-\textstyle\int_0^a \mu(s)ds)B_0(t-a), \;\; si \;\; a \leq t. \end{aligned} \tag{4.14}$$

ou $B_0(t)$ est le flux des naissances . De plus, en observant que

$$B_0(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da = \int_t^{+\infty} \beta(a)u(t,a)da + \int_0^t \beta(a)u(t,a)da,$$

on déduit que $t \mapsto B_0(t)$ est l'unique fonction continue satisfaisant l'équation intégrale de Volterra (linéaire) :

$$B_0(t) = I(t) + \int_0^t \beta(a) exp\left(- \int_0^a \mu(s)ds\right) B_0(t-a)da,$$

ou

$$I(t) = \int_0^t \beta(a) exp\left(- \int_{a-t}^a \mu(s)ds\right) u_0(a-t)da.$$

Dans le contexte de l'écologie, pour prendre en compte certains mécanismes de limitation dans des populations animales ou végétales, on considère des modèles structurées en âges dits densité dépendant de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\left[\mu(a) + \textstyle\int_0^{+\infty} \kappa(s)u(t,s)ds\chi(a)\right] u(t,a), a \geq 0, \\ u(t,0) &= exp(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)u(t,s)ds) \int_0^{+\infty} B_a u(t,a)da, \\ u(0,.) &= u_0 \in L^1_+((0,+\infty),\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

sachant que :
$\int_0^{+\infty} \kappa(s)u(t,s)ds\chi(a)$: compétition pour les ressources.

ou $\kappa, \chi, \sigma \in L^\infty_+(0,+\infty)$
Le terme $\int_0^{+\infty} \kappa(s)u(t,s)ds\chi(a)$ rend compte de limitation par compétition des individus pour la nourriture, l'espace, etc.
Le terme $\chi(a)$ permet de sélectionner les stades (ou les classes d'âges pour lesquels cette compétition a lieu.
Le terme $exp(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)u(t,s)ds)$ décrit une limitation des naissances.
Les modèles structurés en âge ont été utilisés dans bien d'autres contextes comme la dynamique de populations cellulaires, l'épidémiologie, la démographie,...etc.
Plus généralement, ces modèles sont utiles pour décrire des changements au niveau individuel en fonction de l'histoire des individus.

4.3.3 Application au problème semi-linéaire abstrait

L'objet de cette partie est de considérer le problème (4.15) par la méthode des semi-groupes intégrés. Pour construire une théorie de la bifurcation, la première difficulté est de reformuler le problème comme un problème semi-linéaire abstrait classique (c'est à dire à domaine dense.) il y a deux cas :

Premier cas : Supposons que $\sigma = 0$ dans le système (4.15) , Dans ce cas le problème peut être reformulé comme un problème de Cauchy semi-linéaire classique.

Pour cela, on considère l'opérateur linéaire A, défini par :

$\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset L^1(0, +\infty) \to L^1(0, +\infty)$ par :

$$\tilde{A}\varphi = -\varphi^{'} - \mu\varphi, \forall\varphi \in D(\tilde{A}),$$

avec

$$D(\tilde{A}) = \left(\varphi \in W^{1,1}(0, +\infty) : \varphi(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\varphi(a)da\right),$$

et l'application non linéaire $\tilde{f} : L^1(0, +\infty) \to L^1(0, +\infty)$, définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = -\left(\int_0^{+\infty} \kappa(s)\varphi(s)ds\right)\chi\varphi.$$

Ainsi, lorsque $\sigma = 0$, on peut formuler le système (4.15) comme un problème de Cauchy à domaine dense, sous la forme suivante :

Problème 4.5

$$\frac{du(t)}{dt} = \tilde{A}u(t) + \tilde{f}(u(t)), \forall t \geq 0,$$
$$u(0) = u_0 \in L^1((0, \infty), \mathbb{R}).$$

La solution locale

Pour la solution locale, on donne le théorème suivant :

Théorème 4.6 *Soit X un espace de Banach et $V \subset X$ un ensemble ouvert, soit $-\tilde{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t), t \geq 0\}$. Si $0 < a \leq \infty$ et $\tilde{f} : [0, a[\times V \to X$ est continue alors pour tout $u_0 \in V$, il existe un $t_1 = t_1(u_0), 0 < t_1 < a$ tel que le problème aux valeurs initiales (4.5) ait une solution intégrale locale $u \in C([0, t_1], V)$.*

Démonstration. voir [7], pages 191-193. □

La solution globale

Pour la solution globale, on donne le résultat suivant :

Corollaire 4.7 *Supposons que $\tilde{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact, $\{T(t), t \geq 0\}$ sur X . Soit $\tilde{f} : [0, \infty[\times X \to X$ continue et transforme les ensembles bornés de $[0, \infty[\times X$ en borné dans X . Alors pour tout $u_0 \in X$ le problème aux valeurs initiales (4.5) admet une solution globale $u \in C([0, \infty[\times X)$ si l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :*
(i) il existe une fonction continue $k_0 : [0, \infty[\to]0, \infty[$ telle que $\|u(t)\| \leq k_0(t)$ pour tout t dans l'intervalle d'existence de u .
(ii) il existe deux fonctions localement intégrables $k_1(s)$ $k_2(s)$ telles que :
$\|\tilde{f}(s, x)\| \leq k_1(s)\|x\| + k_2(s$ *pour* $0 \leq s < \infty, x \in X$.

Démonstration. Voir [7], pages 194-195 . □

Deuxième cas Pour pouvoir étudier le cas $\sigma \neq 0$, Thieme [10] a introduit une formulation du système (4.15)comme un problème **à domaine non dense**. Pour prendre en compte la condition de bord non linéaire, on commence par considérer l'espace de Banach

$$X = \mathbb{R} \times L^1(0, +\infty),$$

muni de la norme produit usuelle

$$\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \| = |\alpha| + \|\varphi\|_{L^1}.$$

On considère $A : D(A) \subset X \to X$ l'opérateur défini par :

$$A \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi^{'} - \mu\varphi \end{pmatrix}$$

Avec le domaine

$$D(A) = \{0_{\mathbb{R}}\} \times W^{1,1}(0, +\infty).$$

Ainsi le domaine de A n'est pas dense dans X, puisque $\overline{D(A)} = \{0_{\mathbb{R}}\} \times L^1(0, +\infty) \neq X$

On considère l'opérateur$F : \overline{D(A)} \to X$, défini par :

$$F\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp(-\int_0^{+\infty} \sigma(a)da) \int_0^{+\infty} \beta(a)\varphi(a)da \\ -\int_0^{+\infty} \kappa(a)\varphi(a)da\chi\varphi \end{pmatrix}.$$

La première composante de l'application F est à rapprocher de la condition de bord non linéaire et permet ainsi de traiter ce type de condition de bord. Enfin, en identifiant $u(t,.)$ et $v(t) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ u(t,.) \end{pmatrix}$ on peut réécrire le système (4.15) comme un problème de Cauchy abstrait

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + F(v(t)), pour t \geq 0 \tag{4.16}$$

$$v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} = u_0 \in \overline{D(A)}$$

4.3.4 Existence, unicité et globalité de la solution positive

Pour étudier l'existence et l'unicité des problèmes de type (4.16), supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiés :

$(H1)$ A satisfait la condition de Hille-Yosida (puisque $\overline{D(A)} \neq X$, le reste du travail se fait sur le domaine $\overline{D(A)} = X_0$).

$(H2)$ La fonction $F : X_0 \to X$ est localement Lipschitzienne, i.e pour chaque compact de C X_0 il existe $K(C) > 0$, telle que

$$\|F(v) - F(u)\|_X \leq K(C)\|v - u\|_{X_0},\ \forall v, u \in X_0.$$

$(H3)$ Le semi groupe $H(t) = \frac{d}{dt}S(t)$ est exponentiellement bornée, i.e $\exists \omega \geq 0$ et $\exists M \geq 1$ deux constantes telle que :

$$\|H(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Pour prendre en compte la solution positive, revenons au système (4.15), qui est un cas particulier du système (4.16) , la valeur initial non négative

$u(x, 0) = u_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$, la solution du système (4.16) est positive ce qui énonce le théorème suivant :

Théorème 4.8 *Le problème de Cauchy (4.16) admet au moins une solution intégrale positive dans*

$$X_0 = \{0_{\mathbb{R}}\} \times L^1(0, +\infty).$$

En plus, elle est donnée par la forme :

$$v(t) = S^{'}(t)v_0 + \frac{d}{dt}S(t-s)F(v(s))ds, \forall t \in [0, T], \tag{4.17}$$

ou S(t) le semi-groupe intégré engendré par l'opérateur A .

Démonstration. Tout d'abord, transformons le problème en un problème de point fixe en considérant l'opérateur suivant :

$$\phi : C([0, T], X_0) \to C([0, T], X_0),$$

tel que $\forall c \in C([0, T], X_{0+})$,

$$\phi(v)(t) = S^{'}(t)v_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(v(s))ds, \forall t \geq 0.$$

Le problème de trouver une solution du système (4.16) revient à montrer que ϕ admet un point fixe unique dans l'espace

$$X = \{v \in C([0, T], X_0) : sup_t \|v(t)\| = L_T < \infty, \forall t \in [0, T]\},$$

telle que :

$\phi(v)(t) = v(t)$. Premièrement, on doit montrer que ϕ satisfait les conditions du théorème de Banach.

La preuve sera donnée en deux étapes :

Étape 1 : Montrons que $\phi(v)(t) \in X$, i.e il faut montrer que :

$$sup_{t\in[0,T]}\|\phi(v)(t)\| < \infty.$$

Nous avons

$$\|\phi(v)(t)\| = \|S^{'}(t)v_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(v(s))ds\|,$$

d'après de (H3) on trouve :

$$\|\phi(v)(t)\| \leq Me^{\omega t}\|v_0\| + Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|F(v(s)) - F(0)\|ds + \|F(0)\|,$$

ainsi
$$\|\phi(v)(t)\| \leq Me^{\omega t}\|v_0\| + Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}K(C)\|v(s)-0\|ds + \|F(0)\|,$$
par conséquent
$$sup_{t\in[0,T]}\|\phi(v)(t)\| \leq Me^{\omega t}\|v_0\| + Me^{\omega t}K(C)\int_0^t e^{-\omega s}\|v(s)\|ds + \|F(0)\|$$
$$= L_T < \infty, \forall T < \infty$$
Donc $\phi(v)(t) \in X$.
Étape 2 : Montrons que ϕ est une application contractante, i.e il faut montrer que , $\forall \lambda \in]0,1[$ tel que :
$$sup_{t\in[0,T]}\|\phi(v)(t)-\phi(u)(t)\|_X \leq \lambda\|v-u\|_X, \forall v,u \in X.$$
En effet supposons que $v, u \in X$ deux solution du problème (4.16) , alors :
$$\phi(v)(t) = S^{'}v_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(v(s))ds,$$
et
$$\phi(u)(t) = S^{'}u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds,$$
on désigne par le module, Calculons $\|\phi(v)(t)-\phi(u)(t)\|_X$
$$|\phi(v)(t)-\phi(u)(t)| = |\frac{d}{dt}\int_0^t SI(t-s)[F(v(s))-F(u(s))]ds|$$
A partir des hypothèses (H2) et (H3) on trouve
$$|\phi(v)(t)-\phi(u)(t)| \leq Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}K(C)|v(s)-u(s)|ds,$$
d'où
$$\|\phi(v)(t)-\phi(u)(t)\|_\infty \leq Me^{\omega t}TK(C)\|v(s)-u(s)\|_\infty.$$
car $e^{-\omega s} \leq 1$ et $|v-u| \leq \|v(s)-u(s)\|_\infty$.
Ainsi
ϕ est contractante si $Me^{\omega t}TK(C) \leq 1$, i.e si $T \leq \frac{e^{\omega t}}{K(C)M}$.
Donc l'existence et l'unicité d'une solution positive de la forme (F) pour le problème. (4.16)
□

La solution globale

On suppose que le semi groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné, et que la fonction F est Lipschitzienne.

Montrons l'existence de la solution globale par l'absurde.

Supposons que $\exists\, T < \infty$ tel que $\lim_{t\to T} |v(t)| = +\infty/$

On a :

$$\begin{aligned} |v(t)| &= |S^{'}(t)v_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)F(v(s)-F(0))ds + F(0)| \\ &\leq Me^{\omega t}|v_0| + Me^{\omega t}K(C)\int_0^t e^{-\omega s}|v(s)-0|ds + |F(0)| \\ &\leq (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) + Me^{\omega t}K(C)\int_0^t e^{-\omega s}|v(s)|ds. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme de Gronwall :

$$|v(t)| \leq (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) + \int_0^t (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|)\left(MK(C)e^{\omega(t-s)}e^{MK(C)\int_0^t e^{\omega(t-l)dl}}\right) ds.$$

On fait t tendre vers T :

$$\lim_{t\to T} |v(t)| \leq \lim_{t\to T} \left(Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|\right) + \int_0^t (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|)\left(MK(C)e^{\omega(t-s)}e^{MK(C)\int_0^t e^{\omega(t-l)dl}}\right) ds$$

On trouve :

$$+\infty \leq (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) + \int_0^T (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|)\left(MK(C)e^{\omega(T-s)}e^{MK(C)\int_0^T e^{\omega(T-l)dl}}\right) ds \leq +\infty.$$

Ce qui est absurde .

D'où la solution est globale .

Conclusion générale

En conclusion de ce travail, mentionnons que la théorie des semi-groupes intégrés a de très vastes applications aux équations différentielles abstraites linéaires ou non linéaires.

Cette théorie étend la théorie très importante des semi-groupes fortement continus aux problèmes abstraits de Cauchy avec des opérateurs qui ne satisfont pas les conditions de Hille-Yosida .

La méthode basée sur les semi-groupes intégrés permet de résoudre les problèmes d'évolution en cas des opérateurs qu'il ne sont pas à domaine dense.

En utilisant cette méthode, nous avons montré des résultats d'existence et d'unicité des solutions de quelques problèmes d'évolution abstraits.

Bibliographie

[1] W. Arendt. Resolvent positive operators. *Proc. London Math*, 54(3) :321–349, 1987.

[2] D. Djihen. Semi-groupes intégrés et applications. *Mémoire de Master , Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi*, 2021.

[3] M. Gurtin and R. Mac-Camy. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 54 :281–300, 1974.

[4] L. D. Lemile. Une étude comparative concernant les semi-groupes de classe $\mathcal{C}_0$ et les semi-groupes intégrés. *Lecturas Matematicas*, 26 :27–88, 2005.

[5] L. D. Lemile. Semi groupe intégres d'opérateurs , l'unicité des prégénérateurs et applications. *Thèse de Doctorat. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand*, 2007.

[6] N.U.Ahmed. Semigroup theory with applications to systems and control , longman scientific technical. 246, 1991.

[7] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. springer- Verlag , New York , Berlin , 1983.

[8] F. sharpe and A. Lotka. A problem age-distribution. *Philosophical Magazine 6*, pages 435–438, 1911.

[9] H. R. Thieme. Integrated semigroups and intregrated solutions to abstract cauchy problems. *journal of mathematical analysis ans applications* , 152 :416–447, 1989.

[10] H. R. Thieme. Semiflows generated by lipschitz perturbations of non-densely defined operators. *Differential and Integral Equations*, 3 :1035–1066, 1990.

[11] D. Widder. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. *Math. Soc.*, 36 :107–200, 1934.

[12] D. Widder. An introduction to Transform Theory. *Academic Press*, 1971.

[13] S. Zaidman. Sur un théorème de I.Miyadera concernant la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace. *Tohoku, Math.*, pages 12–47, 1960.