

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE SAAD DAHLEB  
BLIDA  
FACULTE DES SCIENCES DE  
L'INGENIEUR**

**DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE**

**Projet de fin d'études pour l'obtention du Diplôme  
D'ingénieur d'état en aéronautique  
Option: construction**

**Thème**

**Conception d'un outil pédagogique multimédia.  
Application : TP de conduction thermique**

**Encadré par :**  
M<sup>me</sup> : KHELALFA .K

**Présenté par :**  
MAHROUK ABDELJALIL  
DENDAHL SALIM

**PROMOTION**

**2006-2007**



## Résumé :

Ce travail a pour but la réalisation d'un outil pédagogique en multimédia qui accompagnerait les élèves ingénieurs de la 4<sup>ème</sup> année aéronautique dans leurs apprentissages du transfert thermique par le mode de la conduction.

Pour cela, une simulation numérique ayant pour base la méthode des volumes finis a été nécessaire, suivie par la réalisation d'une interface qui a pour objectif de réaliser un TP de transfert de chaleur en virtuel.

Cela permettra ainsi à l'étudiants de comparer les résultats expérimentaux avec des résultats obtenus analytiquement et ou numériquement.

## Abstract:

The main purpose of this work is to develop e-learning tools for studying heat transfer by conduction to students in aeronautical engineering.

A conduction phenomena simulation must be conducted using a finite volume method.

Next, an interface must be built.

Our goals are to carry out "virtual «experiment work in heat transfer, which will be used by the students to compare with their experimental results.

## ملخص :

هدف هذا العمل هو انجاز أداة عمل بيداغوجية إعلامية ترافق الطلبة المهندسين من السنة الرابعة علم الطيران في دراستهم للتبادل الحراري عن طريق الناقلية .

لهذا من الضروري إيجاد محاكاة رقمية تعتمد على طريقة الحجوم المتناهية والمتبوعة بواجهة رقمية بهدف انجاز عمل تطبيقي للتبادل الحراري. مما يمكن الطلبة المقارنة بين النتائج التجريبية والنتائج المحصل عليها بالتحليل أو رقميا .

# SOMMAIRE

RESUME

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE ..... 08

Chapitre I L'ENSEIGNEMENT PAR MULTIMEDIA

I.1 Généralités..... 10

Chapitre II LES PRINCIPALES METHODES NUMERIQUES DE  
DISCRITISATION

II.1 Introduction ..... 12

II.2 Le processus de calcul ..... 13

II.3 présentation des méthodes ..... 13

II.3.1 Méthode des différences finies..... 13

II.3.1.1 Principe ..... 13

II.3.1.2 Avantages de la méthode ..... 13

II.3.1.3 Inconvénients de la méthode ..... 14

II. 3.2 Méthode des éléments finis (MEF) ..... 14

II. 3.2.1 Principe mathématique ..... 14

II.3.2.2 Etapes de la mise en oeuvre ..... 15

II.3.2.3 Avantages ..... 15

II.3.2.4 Inconvénients ..... 15

II.3.3/ Méthodes spectrales (MS)..... 16

II.3.3.1 Principe..... 16

II.3.3.2 Avantage ..... 16

II.3.3.3 Inconvénients ..... 16

II.3.4 Méthode des volumes finis (MVF) ..... 16

II.3.4.1 Processeur de calcul ..... 16

II.3.4.2 Discrétisation par la méthode des volumes finis ..... 17

II.3.4.3 Le concept de discrétisation ..... 18

II.3.4.4 Avantages ..... 20

II.3.4.5 Inconvénient .....	20
II.4 Génération de maillage par la (MVF).....	20
II.4.1 Différentes formes des volumes de contrôle en deux dimensions dans la MVF .....	22
II.4.1.1 Formes simples .....	22
II.4.1.2 Formes complexes .....	23
II.4.1.2.1 Volume de Contrôle Quadrilatère .....	23
II.4.1.2.2 Maillage de Triangle (TR) .....	24
II.4.1.2.3 Maillage Barycentrique (BA) .....	24
II.4.1.2.4 Maillage d'Eléments de Volume (VE) .....	25
II.4.1.2.5 Maillage de Volume Modifié (MV) .....	26
 <b>Chapitre III LA DESCRETISATION PAR LA MVF APPLIQUEE AUX PROBLEMES DE CONDUCTION THERMIQUE</b>	
III.1 Introduction.....	27
III.1.1 Conduction.....	27
III.1.2 Convection.....	28
III.2 Conduction thermique 1D stationnaire .....	29
III.2.1 Discrétisation du domaine de calcul .....	29
III.2.2 Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P .....	30
III.2.3 Choix d'un profil de température .....	30
III.2.4 Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique.....	31
III.2.5 Détermination de la conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle .....	32
III.2.5.1 Conservation du flux aux interfaces .....	33
III.2.6 Traitement des non linéarités.....	34
III.2.7 Traitement du terme source S .....	35
III.2.7.1. Les règles de base (règles de Patankar) .....	35
III.2.8 Traitement des conditions aux limites .....	36
III.2.8.1 Conditions aux limites de type Dirichlet.....	38

## Bibliographie :

- [1] **P.Brusilovskey**, "know ledge tree: A distributed architecture for adaptive e-learning". P8, journal of education.
- [2] **A.Kiyoshi and M.Chiba**, "developing an e-learning system which enhances students "
- [3] **R.Lanzilohi**,"Systematic Evaluation of e-learning systemes"p195, changing, Nordichi, 14-18 October 2006, Oslo, Norway Roles.
- [4] **LOAN C.POPA**," Modélisation numérique du transfert thermique par la méthode des volumes finis", UNIVERSITARIA CRAIOVA, 2002.
- [5] **A.JARDY et H.COMBEAU**," SIMULATION NUMERIQUE DES PHENOMENES DE TRASPORT".
- [6] **Ames .w.f**," Numerical methods for partial differential equations" par Barnes and noble, New York 1969.
- [7] **W.Malalasekera et Versteeg**, "computational fluids dynamique the finit volume methods" Pearson, prentice hall 1995.
- [8] **S .V. Patanker**, " Numerical heat transfert and Fluid flow", Series in computational methods in mechanics and thermal sciences.
- [9] **M.L.KHENE**, "Modélisation des phénomènes electromagnetique (Batna 2006).
- [10] **F. KREITH**, " Transmission de la chaleur et thermodynamique" Edition Masson et SIE. Editeur, paris, France 1967.
- [11] **F. Pascal**, " Sur des méthodes d'approximation effectives et d'analyse numérique pour les équations de la mécanique des fluides" , Habilitation a diriger des recherches spécialité mathématique .univ de Paris sud, centre d'orsay.2002
- [12] **V. Dolejsi, P. ANGOT**, " Finit volume méthodes on unstructured flows"
- [13] **A.DERVIEUX** ," Steady Euler simulation using unstructured meshes in partial differential equations of hyperbolic type and application" ,G.Geymant , Ed.World scientific publishing Co john Wiley and sons ltd ,1987, pp.33-111.

[14] **P.ROSTAND, B.STOUFFLET**, " TVD shemes to compute compressible viscous flows on unstructured meshes, in nolinear hyperbolic equations –theory, computation methods and application"

Eds, vol.24 of Notes numer, Fluid mesh, Vieweg, PP.510-520.

[15] **B.PERTHAME, Y.QIU**, " A variant of van leer's methode for multidimensional systems of conservation laws" , J.Comput, phys.112.2 (1994), 370-381.

[16] **F.BENKHLDOUN, R .VILSMEIER, D.HANEL, Eds**, " Finite volumes for complex applicationsII", Duisburg, 1999, Hermes : paris.

[17] **A, Bejan**" Heat transfer", by John. Wiley Inc 1993.

## LISTE DES SYMBOLES

- $\lambda$  : la conductivité thermique [W/m.K]
- $C_p$  : la chaleur spécifique à pression constante [j / kg m<sup>3</sup> k]
- $S$  : la puissance générée par l'unité de volume [W/m<sup>3</sup>.]
- $q$  : la densité du flux thermique [W/m<sup>2</sup>]
- $\rho$  : La densité du matériel [kg/m<sup>3</sup>]
- $t$  : le temps [s]
- $Q$  : Flux thermique [W]
- $h_c$  : Coefficient de convection [W/m<sup>2</sup>K]
- $V_c$  : volume de contrôle
- $P$  : Noeud considéré
- $W$ : Noeud voisine "West"
- $E$ : Noeud voisine "East"
- $N$ : Noeud voisine "North"
- $S$ : Noeud voisine "South"
- $w$  : interface "West" du volume de contrôle (VC)
- $e$  : interface "East" du VC
- $n$  : interface "North" du VC
- $s$  : interface "South" du VC
- $\Delta x$  : largeur du VC étudié. [m]
- $\Delta y$  : hauteur du VC étudié[m]
- $\vec{v}$  : Le vecteur vitesse
- $\vec{A}$  : Le vecteur l'aire de la surface
- $\Gamma_\Phi$  : Le coefficient de diffusion de la grandeur  $\Phi$
- $S_\Phi$  : Le terme source (la source de  $\Phi$  par unité de volume)
- $N_{\text{faces}}$  : Le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle
- $V_f$  : Le flux de masse à travers l'interface  $f$
- $V$  : Le volume du volume de contrôle. [m<sup>3</sup>]

Vs : Voisin.

$\Delta t$  : Le pas dans le temps [s]

Dx : le pas suivant x [m]

Dy = le pas suivant y [m]

NN = nombre de points du maillage

H : hauteur du domaine de calcul [m]

L = longueur du domaine de calcul [m]

T = Température [°C]

TI : température initiale [°C]

NNX : nombre de noeuds sur la direction X

NNY : nombre de noeuds sur la direction Y



## LISTE DES FIGURES

**Fig.II.1** : Maillage non centré (TYPE A)

**Fig.II.2** : Maillage centré (TYPE B)

**Fig.II.3** : Maillage cartésien pour la cavité carrée

**Fig.II.4** : Maillage cylindrique pour la cavité circulaire

**Fig.II.5** : Maillage du domaine d'étude en volume fini

**Fig.II.6** : Volume élémentaire dans le plan (x, y).

**Fig.II.7** : Volume de contrôle de type quadrilatère.

**Fig.II.8** : Volumes de contrôle (TR), (BA) construits sur un maillage donné

**Fig.II.9** : Volumes de contrôle (VE), (MV) construits sur un maillage donné

**Fig.III.1** : Maillage unidimensionnel

**Fig.III.2** : Choix du profil de température

**Fig.III.3**: Sur la détermination de la conductivité Thermique

**Fig.III.4** : Conductivité thermique à l'interface

**Fig.III.5**: Maillage 1D en volumes finis

**Fig.III.6** : Traitement d'une condition à la limite de type flux imposé (Neumann)

**Fig.III.7** Élément de volume pour l'équation de conduction thermique 1D.

**Fig.III.8** Température imposée aux frontières (conditions aux limites du premier type).

**Fig.III.9** Densité du flux imposée aux frontières (conditions aux limites du deuxième type).

**Fig.III.10** Volume de contrôle 1D

**Fig.III.11** Maillage 2D.

**Fig.IV.1** Maillage 1D pour l'application 01

**Fig. IV.2** Géométrie de la pratique B

**Fig.IV.3** Maillage utilisé pour la pratique B

**Fig.IV.4** Maillage pour le problème.

**Fig.IV.5** Maillage et conditions aux limites pour le problème de conduction thermique 2D.

**Fig.IV.6** Demi -volume de contrôle sur la frontière "W".

**Fig.IV.7** Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".

**Fig. IV.8** Demi volume de contrôle sur la frontière "South".

**Fig. IV.9** Quart de volume de contrôle (le coin W-S).

**Fig. IV.10** Quart de volume de contrôle (le coin E-S).

**Fig.IV.11** Maillage et conditions aux limites pour l'exemple E

**Fig.IV.12** Le domaine de calcul analytique

**Fig.V.1** Géométrie de l'application A

**Fig.V.2** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Fig.V.3** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Fig.V.4** Géométrie de l'application B

**Fig.V.5** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Fig.V.6** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique aux différents instants de temps

**FigV.7** les isothermes de solution numérique pour le pratiqueE

**FigV.8** les isothermes de solution numérique pour l'aluminium

**FigV.9** les isothermes de solution numérique pour l'acier doux

**FigV.10** les isothermes de solution numérique pour le liège

**FigV.11** les isothermes de solution numérique pour l'aluminium

**FigV.12** les isothermes de solution numérique pour l'acier doux

**FigV.13** les isothermes de solution numérique pour le liège

## LISTE DES TABLEAUX

**Tableau.V.1** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Tableau.V.2** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Tableau V.3** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

**Tableau V.4** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

## Introduction

De notre jour, les exigences du domaine de l'enseignement ne cessent de croître. L'enseignement du savoir a changer d'une manière radicale ces dernières années. Avec l'apport du multimédia (e-learning) et en utilisant les NTIC (Nouvelles Technologie de l'Information et de la Communication).

- \* Le savoir était rare et est devenu surabondant
- \* Le savoir était figé et est devenu dynamique.
- \* Le savoir était imprimé et est devenu électronique.

L'enseignement multimédia a pour objectif l'amélioration et l'accompagnement des pratiques au quotidien. C'est une voie nouvelle qui permet un apprentissage à distance et cela en utilisant les outils de l'information et de la communication (via Internet).

Le slogan « à n'importe quel moment et à n'importe quel lieu » traduit parfaitement l'objectif du e-learning.

Pour ces différentes raisons, nous nous sommes intéresser a ce domaine, et nous avons pense à concevoir un outil pédagogique à savoir un TP de transfert de chaleur qui accompagnerait les étudiants de 4eme année Aéronautique (Option construction) dans leurs apprentissage du domaine de la conductivité thermique ainsi que les étudiants en Génie Mécanique, Génie Civil et Chimie industrielle.

Pour cela notre travaille se compose de cinq chapitre :

Une étude bibliographique a été faite au premier chapitre ayant pour thème l'enseignement par multimédia en vue d'assimiler les connaissances actuelles, l'importance prise par cette technique dans l'enseignement et les dernières recherches réalisées.

Au second chapitre, nous donnons un aperçu des différentes méthodes numériques existantes et utilisées dans l'engineering.

La discrétisation numérique par la méthode des volumes finis sera détaillée dans le chapitre trois.

Le quatrième chapitre abordera la simulation numérique du phénomène de la conductivité thermique et décrira la conception de l'interface du TP ainsi que la présentation d'un guide d'utilisation.

Les résultats et leurs interprétations respectives sont présents dans le chapitre cinq. Une conclusion générale viendra finaliser notre étude.

# Chapitre I ---

L'ENSEIGNEMENT PAR  
MULTIMEDIA

## I.1 Généralité

L'enseignement est défini comme un processus de communication en vue susciter l'apprentissage.

L'accès au savoir devient interactif. Il évolue rapidement en même temps que les disciplines. L'introduction massive des techniques d'information et de la communication (TIC) dans le système éducatif va changer la façon d'enseigner. [1]

L'enseignement multimédia a pour objectif l'amélioration des pratiques de l'enseignant au quotidien et d'assurer une qualité d'accompagnement et de suivi des élèves ingénieurs en formation.

Des recherches de techniques très développées se sont faites autour des TIC et de nouvelles méthodes d'enseignement ont été créées. [2]

Avec l'avènement du système LMD dans nos universités, le régime de l'enseignement classique devrait changer petit à petit car il serait obligé d'être accompagné par l'enseignement multimédia et cela pour différentes raisons à savoir :

- Un savoir surabondant
- Un savoir dynamique
- Un savoir électronique.

La technique du multimédia permettra à l'enseignant qui a des classes où le nombre d'étudiants est très important, où il lui sera très difficile de s'occuper individuellement de chaque étudiant de le guider en dehors des cours délivrés pour cela des méthodes très performantes ont été développées. [3]

C'est dans cet ordre d'idée que l'on s'est intéressé à cette technique. Notre travail a pour but de réaliser un outil interactif qui viendra accompagner les travaux pratiques (TP) de transfert de chaleur (Cas de la conduction thermique) des élèves ingénieurs 4<sup>ème</sup> Aéronautique constructeur ainsi que les élèves ingénieurs du génie mécanique, génie civil ou chimie industrielle.

Cette interface leur permettra de visualiser l'évolution de la température dans le cas de la conduction pour un régime stationnaire ou instationnaire en cas unidimensionnel ou bidimensionnel.

Ils pourront ainsi comparer leurs résultats expérimentaux avec des résultats obtenus par résolution numérique (MVF) et /ou analytique et cela pour différents cas.

# Chapitre II---

LES PRINCIPALES METHODES  
NUMERIQUES DE  
DISCRITISATION



## II-1-INTRODUCTION

Le développement des méthodes numériques de discrétisation (différences finis, éléments finis, intégrales de frontière, volumes finis, etc.) est heureusement accompagné par les avancées du matériel informatique. Des programmes qui nécessitaient autrefois des calculateurs complexes et onéreux tournent à présent sur des PC d'un coût modeste. Cela a contribué à faciliter la mise au point de logiciels performants dont on cite quelques exemples, comme FLUX2D, FLUX3D, FLUX EXPERT, MAXWELL, FEMLAB et CFX, ainsi que l'émergence des logiciels dédiés et développés dans les laboratoires spécialisés. D'autres concepteurs proposent des logiciels utilisant une méthode particulière (souvent la méthode des éléments finis et comportant des modules permettant de traiter des problèmes physiques de nature différentes (mécanique, thermique, électromagnétique, mécanique des fluides etc.).

Dans ce cas, l'utilisateur n'a pas le choix des formulations, le type des conditions aux limites et doit s'adapter à celles existantes. A lui de connaître ses avantages et ses inconvénients de chacune des formulations et méthodes possibles. C'est pourquoi la tendance future est de réaliser des logiciels capables de choisir la meilleure méthode en fonction des spécificités du problème posé et des données fournies par l'utilisateur, et de lui fournir la possibilité de traiter les problèmes.

Il y a deux grandes familles de méthodes de discrétisation : [5]

- Les méthodes d'approximation des équations : Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis) [6].

- Les méthodes d'approximation des solutions : Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes. Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).

## II-2 Le processus de calcul

Réalisé, en général, en utilisant quatre méthodes numériques distinctes : la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, les méthodes spectrales et la méthode des volumes finis. [4]

La méthode numérique comporte trois pas distincts :

- L'approximation de la variable inconnue par différents types de fonctions simples.
- Discrétisation par la substitution de l'approximation dans les équations différentielles et l'obtention d'un système d'équations algébriques ;
- Résolution du système d'équations algébriques.

La principale différence entre les quatre méthodes numériques consiste dans le type d'approximation de la variable inconnue et dans le processus de discrétisation.

## II-3 présentation des méthodes [7]

### II.3.1 Méthode des différences finies (MDF)

#### II.3.1.1 Principe

La variable inconnue  $\Phi$  est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage.

Le développement de l'inconnue en séries de Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations différentielles par différences finies on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage.

#### II.3.1.2 Avantages de la méthode

- mise en œuvre simple pour les géométries simples ;
- grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul ;
- encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

### II.3.1.3 Inconvénients de la méthode

- le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation ;
- l'apparition d'instabilités numériques ;
- difficulté pour traiter les géométries complexes ;
- difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue ;
- En général absence de résultats de majoration d'erreurs.

### II.3.2 Méthode des éléments finis (MEF)

#### II.3.2.1 Principe mathématique

Dans la méthode des éléments finis on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de l'inconnue  $\Phi$ . Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation de  $\Phi$  dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne vérifient pas exactement, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé en le multipliant par une fonction de pondération et en l'intégrant. Le résultat de l'intégration est un set d'équations algébriques pour les coefficients des fonctions d'approximation.

Le principe mathématique est basé sur les méthodes suivantes :

- Méthodes variationnelles (minimisation d'une fonctionnelle) ;
- Méthodes des résidus pondérés.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie. Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à l'autre mais reste en général faible. Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier).

Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

### II.3.2.2 Etapes de la mise en oeuvre

- Discrétisation du domaine en un nombre fini d'éléments ;
- Choix d'un modèle d'interpolation (variation de la variable  $\Phi$  sur l'élément);
- Écriture des équations modèles sous forme algébrique au niveau local (dans un élément): détermination des vecteurs et matrices caractéristiques ;
- Assemblage des vecteurs et matrices locaux en un vecteur global B et une matrice globale A ;
- Résolution du système  $AX = B$ .

### II.3.2.3 Avantages

- Adapté aux géométries complexes ;
- Détermination plus naturelle des conditions aux limites ;
- possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

### II.3.2.4 Inconvénients

- Formalisme mathématique plus compliqué et plus difficile à mettre en oeuvre ;
- Difficultés pour résoudre les terme non linéaires ;
- Coûteux en stockage mémoire (matrices pleines) et en temps de calcul (Inversion) ;
- Caractère conservatif des équations non forcément assuré.

### II.3.3 Méthodes spectrales (MS)

#### II.3.3.1 Principe

L'inconnue est approchée par des séries de Fourier tronquées ou par des séries de Polynômes Chébichev. Par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis l'approximation n'est pas locale mais elle est valide sur tout le domaine de calcul. On utilise également le concept du résidu pondéré comme dans la méthode des éléments finis où en imposant que l'approximation doit correspondre à la solution exacte pour les points du maillage.

On remplace, dans les équations modèles l'inconnue  $\Phi$  par des développements tronqués sur des bases de fonctions orthogonales (Fourier) et en utilisant leur propriété d'orthogonalité on se ramène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre.

#### II.3.3.2 Avantage

- Permet d'obtenir des solutions d'une très grande précision.

#### II.3.3.3 Inconvénients

- Formalisme mathématique plus complexe et mise en oeuvre délicate ;
- Difficultés pour traiter les géométries complexes et des conditions aux limites non académiques.

### II.3.4 Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding [8].

#### II.3.4.1 Processus de calcul

Au début, la méthode a été développée comme une formulation spéciale de la méthode des différences finies. L'algorithme numérique est le suivant :

- Le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en volumes finis (génération du maillage) ;

- L'intégration formelle des équations sur tous les volumes de contrôle ;
- La discrétisation, qui implique la substitution des différentes approximations de type différences finies pour les termes intégrés en représentant différents processus d'écoulement comme la convection, la diffusion et le terme source ;
- Le résultat est la conversion des intégrales dans un système d'équations algébriques ;
- La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative. Le premier pas qui est l'intégration sur le volume de contrôle, fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique,  $\Phi$ , sur chaque volume de contrôle. Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis ou de la méthode spectrale.

#### II .3.4.2 Discrétisation par la méthode des volumes finis [7]

Le résultat obtenu à partir de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles est un ensemble fini de valeurs qui permet de reconstruire la forme de la solution. Dans ce sens, une méthode numérique peut être considérée comme un laboratoire expérimental, à l'intérieur duquel des instruments de mesure ont été implantés. Ces derniers doivent permettre de remonter à la grandeur que l'on veut étudier dans le domaine considéré.

Ainsi le numéricien, tout comme l'expérimentateur, ne peuvent travailler qu'avec un nombre discret de valeurs, cet ensemble de valeurs devant être correctement choisi pour décrire fidèlement le comportement du domaine continu. L'ingénieur doit donc garder à l'esprit qu'il n'est pas seulement important d'obtenir une solution numérique, mais qu'il faut également s'assurer de la qualité de la discrétisation.

La méthode des volumes finis permet d'obtenir un système d'équations algébriques, ou système discrétisé, dont les inconnues sont les valeurs de la grandeur recherchée en un nombre fini de points du domaine d'étude. Il s'agira ensuite de savoir résoudre ce système d'équations algébriques.

#### II.3.4.3 Le concept de discrétisation

Le système d'équations algébriques est obtenu à partir de l'équation aux dérivées partielles de départ. Pour ce faire, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la façon dont la variable  $\Phi$  (par exemple) varie entre deux points du système discret, c'est-à-dire de choisir une loi de variation locale et le choix du maillage, ainsi le nombre de points pris en compte dans l'équation discrétisée.

Nous sommes donc amené, pour obtenir un système discrétisé à subdiviser le domaine d'étude. C'est cette discrétisation de l'espace et du temps, associée à la façon de prendre en compte les variations de  $\Phi$  entre deux points de maillage, qui permet de passer une équation aux dérivées partielles à un système d'équations algébriques qui contient la même information physique et met en relation des points voisins dans le maillage ; de ce fait, la valeur de  $\Phi$  en un point influence essentiellement celle de ses voisins immédiats.

Toute bonne méthode de discrétisation doit être consistante, c'est-à-dire qu'elle doit conduire à la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles quand on augmente indéfiniment le nombre de points de maillage. En effet, une augmentation du nombre de points entraîne une diminution de la distance entre deux points voisins, ce qui réduit l'influence de la loi de variation locale. Il en découle que s'il n'est pas toujours possible de mailler finement tout un domaine, il faut s'attacher à mailler le plus finement possible les zones soumises à des fortes variations de  $\Phi$ .

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire  $\Phi$ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\int_A (\rho \Phi \vec{v}) d\vec{A} = \int_A (\Gamma_{\Phi} \text{grad} \Phi) d\vec{A} + \int_{V_c} S_{\Phi} dV \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$\text{grad} \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}$$

L'équation (II.1) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_f^{N_{\text{faces}}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \Gamma_{\Phi} (\nabla \Phi)_n + S_{\Phi} V \quad (\text{II.2})$$

$$\left( \left| \vec{A} \right| = \left| A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \right| \right) \text{ En 2D}$$

$(\vec{\nabla} \Phi)_n$  - la valeur de  $\vec{\nabla} \Phi$  normal (perpendiculaire) à l'interface  $f$

$V$  - le volume du volume de contrôle.

Les différentes étapes de la mise en oeuvre sont :

- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les noeuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un noeud donné sont évaluées en approchant la variation de  $\Phi$  par des profils ou des lois d'interpolation entre les noeuds voisins du point considéré ;
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de  $\Phi$  aux noeuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.



#### II.3.4.4 Avantages

- Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (Continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage ;
- Mise en oeuvre relativement facile ;
- Applicable aux géométries complexes ;
- Approche très physique : bilan des flux ;
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non linéaires hyperbolique
- Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande).

#### II.3.4.5 Inconvénient

- Moins précis que les méthodes spectrales.

#### II.4 Génération de maillage par la (MVF) [7]

Il existe deux méthodes pour générer le maillage dans le domaine de calcul. La première, consiste à placer d'abord les nœuds et de placer ensuite les faces des volumes de contrôles à mi-distance de deux nœuds consécutif (figII.1). Ceci donne des volumes de contrôles réguliers autour des points internes du maillage, et des demi volumes près des frontières. Cette pratique exige des équations supplémentaires pour le traitement des nœuds frontières.

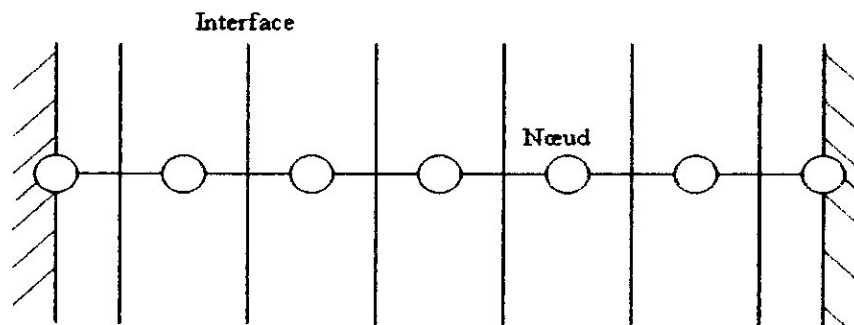
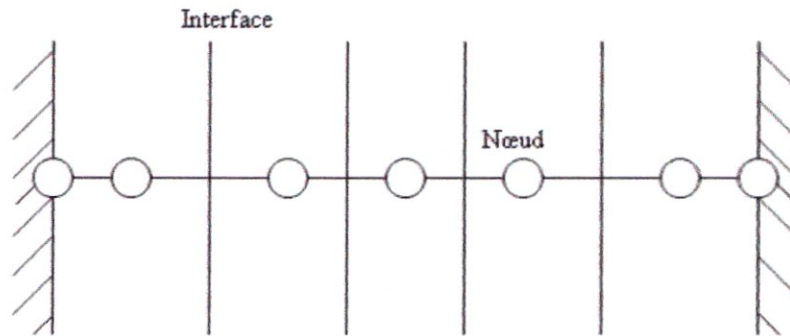


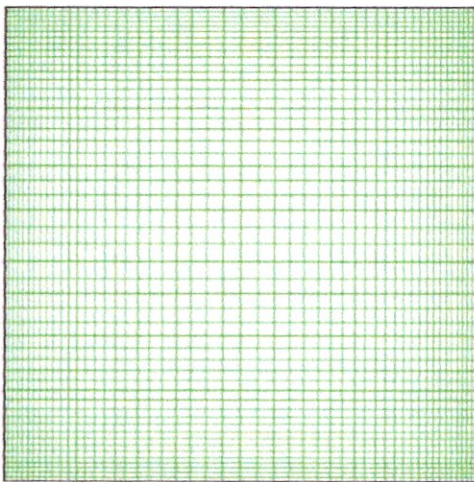
Fig II.1 Maillage non centré (TYPE A)

La deuxième, consiste à partager le domaine en un ensemble de volumes élémentaires, puis les nœuds sont placés au centre des volumes (fig II.2) Cette pratique est souvent utilisée en raison de sa simplicité et ne nécessite pas un traitement spécial pour les nœuds frontières.

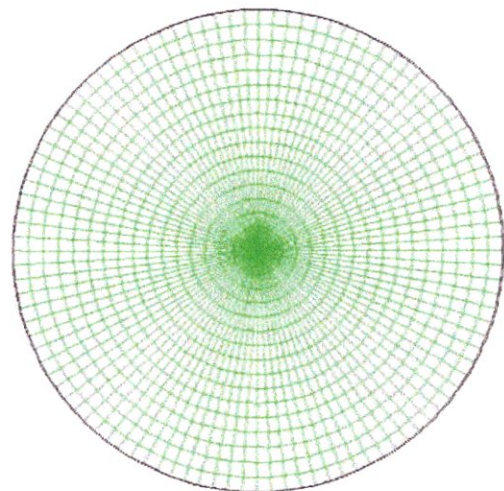


**FigII.2** Maillage centré (TYPE B)

Il existe le maillage du domaine carré et cercle. Pour la fig (II.3) ; un maillage cartésien pour la cavité carrée [5] (maillage a pas spatial variable) et pour la fig (II.4) un maillage cylindrique pour la cavité circulaire [5] (maillage structuré a pas constat).



**FigII.3** maillage cartésienne pour la cavité carrée



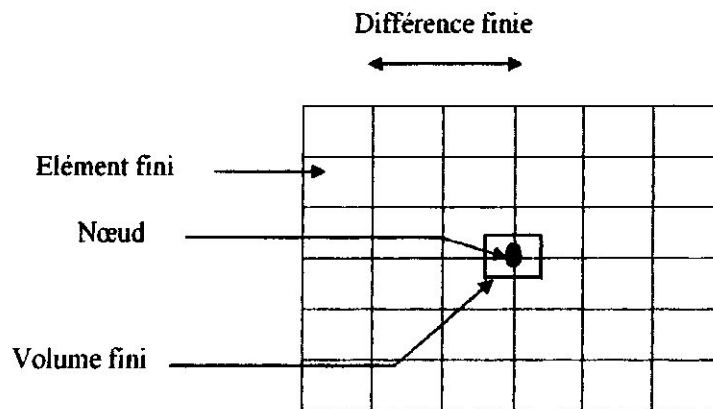
**FigII.4** maillage cylindrique pour la cavité circulaire

## II.4.1 Différentes formes des volumes de contrôle en deux dimensions dans la MVF

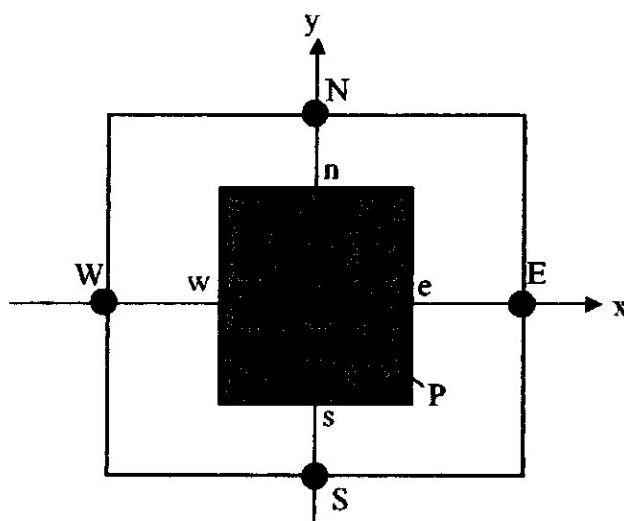
### II.4.1.1 Formes simples

La méthode des volumes finis peut être vue comme une version spéciale de la méthode des résidus pondérés dont la fonction de projection  $\Phi$  est prise égale à l'unité. Elle consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires dits de contrôle (figure II.5) [9], de forme simple (rectangulaire en bidimensionnel) et adjacents.

Chaque volume de contrôle (figure II.6) entoure un noeud principal P est limité par des noeuds voisins (E, W, S, N) et quatre interfaces (e, w, s, n).



FigII.5 Maillage du domaine d'étude en volume finis.



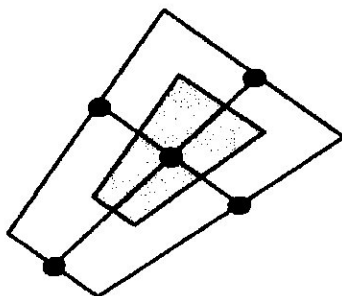
FigII.6 Volume élémentaire dans le plan  $(x, y)$ .

#### II.4.1.2 Formes complexes

Il existe plusieurs types des volumes de contrôle sur lesquels la solution est approchée.

##### II.4.1.2.1 Volume de Contrôle Quadrilatère

Les éléments quadrilatéraux sont utilisés dans des logiciels qui modélisent par la méthode des volumes finis des écoulements dans des configurations complexes [10].



FigII.7 Volume de contrôle de type quadrilatère.

#### II.4.1.2.2 Maillage de Triangle (TR)

La première façon (Figure II.8.a) consiste à prendre les triangles eux-mêmes. La méthode qui en résulte correspond dans la littérature aux volumes finis au schéma (cellcentered).

Ce type de volume a pour avantage de ne pas nécessiter la construction d'un maillage adjoint que le maillage primal soit conforme ou pas (au sens éléments finis), anisotrope ou adapté à la solution. Par contre, la discrétisation des opérateurs du second ordre comme ceux intervenant dans les problèmes visqueux présente des difficultés [11].



**FigII.8** Volumes de contrôle (TR), (BA) construits sur un maillage donné

#### II.4.1.2.3 Maillage Barycentrique (BA)

Ce type de maillage (Fig II.8.b) consiste à associer à chaque arête, un volume construit en joignant les barycentres des triangles adjacents à cette arête avec les sommets de cette arête. Ces volumes dits barycentriques ont été introduits par Dolejsi et Angot [12] et permettent de combiner facilement la méthode de volumes finis pour la convection avec une méthode d'éléments finis pour la diffusion si le maillage primal est conforme [11]

Ce choix présente l'inconvénient de travailler sur un maillage auxiliaire et de conduire à des volumes déformés dans le cas d'un maillage primal anisotrope ou non conforme.

#### II.4.1.2.4 Maillage d'Eléments de Volume (VE)

Il s'agit ici d'associer à chaque sommet "S" du maillage primal, le volume s'appuyant sur les centres de gravité des triangles ayant pour sommet "S" et sur les milieux des arêtes ayant "S" pour extrémité (Fig II.9.a) [11]

Dans la littérature des volumes finis, cela correspond à la méthode (cell-vertex centered) et à la méthode (mixed élément méthode). Ce volume utilisé par Der vieux [13] pour discrétiser les équations d'Euler et par Rostand et Stoufflet [14] pour approcher la solution des équations de Navier Stokes compressibles est très répandu dans la communauté volumes finis et mécanique des fluides car il permet de traiter facilement les termes visqueux [11]

Ce choix nécessite la construction d'un maillage dual et peut conduire à des volumes déformés dans le cas de maillages anisotropes. On notera que le nombre de volumes égal au nombre de sommets est plus petit que pour les deux choix précédentes et que le nombre d'interfaces est lui plus grand.



a) VE



b) MV

**FigII.9** Volumes de contrôle (VE), (MV) construits sur un maillage donné

#### II.4.1.2.5 Maillage de Volume Modifié (MV)

Il est question ici d'un volume de contrôle légèrement modifié par rapport au précédent (FigII.9.b) puisque il est obtenu en joignant les centres des gravités des triangles ayant un sommet en commun. Utilisé par Perthame et Qui [15] ce type de volumes réduit, par rapport aux volumes (VE), le nombre d'interfaces par volume [11].

Les volumes de contrôles (type MV et quadrilatère) utilisés dans le maillage de la méthode des volumes finis ont récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante.

Les méthodes de discrétisation par volumes finis se sont montrées robustes et efficaces : elles permettent d'assurer les lois de conservation à un niveau discret, de préserver le principe du maximum et la monotonie, de capturer les discontinuités grâce à des techniques de décentrement et de traiter des géométries ou des maillages complexes [16] et [10].

# **Chapitre III---**

**LA DESCRETISATION PAR LA  
MVF APPLIQUEE AUX  
PROBLEMES DE CONDUCTION  
THERMIQUE**



### III.1 INTRODUCTION

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur: la conduction, la convection et le rayonnement. [10] et [17]

Le phénomène de la conduction, a lieu dans les solides. La convection se rencontre spécialement dans les fluides.

L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu dans tous les milieux transparents aux ondes électromagnétiques. En réalité la distribution de la température, dans un milieu, est la conséquence des effets de ces trois modes de transfert thermique ; il est impossible d'isoler un mode de transfert thermique d'un autre mode. Pourtant, pour la simplicité de l'étude, on considère ces modes de transfert thermique séparément. Par exemple, on peut étudier la conduction couplée avec la convection et on néglige le rayonnement.

Une grandeur souvent utilisée dans l'étude du transfert thermique est la densité du flux thermique qui représente la chaleur traversant l'unité de surface et par unité de temps.

#### III.1.1 Conduction

La conduction thermique est le phénomène de transport de la chaleur mis en jeu dans les solides ; elle est également présente dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz. Le phénomène microscopique (à l'échelle atomique) intervenant dans la conduction thermique est la propagation de l'agitation thermique des particules des zones plus chaudes vers celles des zones plus froides.

Le mécanisme microscopique consiste dans la vibration moléculaire ou atomique (liquides, gaz) et la vibration cristalline ainsi que dans le déplacement des électrons libres (métaux). La conduction thermique est donc le phénomène par lequel l'énergie est transférée des zones à haute température vers des zones à basse température.

La loi de Fourier (pour un milieu isotrope, à travers une surface isotherme) montre que le flux thermique, par conduction, dans une direction donnée est proportionnel à l'aire  $A$  normale à la direction du flux thermique et au gradient de température à cette direction.

Le flux thermique, dans la direction  $x$ , par exemple, conformément à la loi de Fourier est donné par la relation :

$$Q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} A \quad [W] \quad (III-1)$$

Ou si l'on exprime la densité du flux thermique :

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad [W / m^2] \quad (III-2)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\lambda$ , appelée coefficient de conductivité thermique, dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.) ; il se mesure en  $Wm^{-1}K^{-1}$  et il est toujours positif car la chaleur se transmet des zones chaudes vers les zones froides. Si la température décroît dans la direction positif  $x$ , alors  $\frac{dT}{dx}$  est négatif.

Le flux thermique  $Q_x$  et la densité du flux thermique  $q_x$  étant des quantités positives dans la direction positive  $x$ , alors il est nécessaire d'introduire le signe moins dans le membre droite des expressions (III-1) et (III-2). Si le membre droite des expressions (III-1) et (III-2) est négatif alors le flux thermique (et également la densité du flux thermique) est orienté dans la direction négative  $x$ .

Dans le cas général, dans l'espace à plusieurs dimensions, la loi de Fourier est donnée par la relation :

$$Q = -\lambda \nabla T \vec{A} \quad (III-3)$$

Où  $\vec{A}$  Est le vecteur normal à l'aire  $A$ . La densité du flux thermique est :

$$q = -\lambda \nabla T \quad (III-4)$$

En général la conductivité thermique  $\lambda$  varié en fonction de la température. À des basses températures, cette variation peut être négligée.

### III.1.2 Convection

Dans le cas d'un écoulement d'un fluide en contact avec une paroi solide, s'il y a une différence de température entre la paroi et le fluide, il y a alors un transfert thermique entre le fluide et la paroi comme une conséquence du mouvement du fluide par rapport à la surface de la paroi. Ce phénomène de transfert de chaleur est

appelé convection. La propagation de la chaleur est réalisée par transport des particules. Il existe deux types de transport :

- Naturel (libre), dû aux différences de densité qui sont générées par les gradients de température (si le fluide est isotherme, il n'y a pas de mouvement) ;
- Forcé, dû à l'action mécanique (ventilateur, etc.).

Pour permettre ce type de transport, la matière doit donc se déplacer facilement.

Le phénomène de convection libre se rencontre couramment lorsque le fluide s'étant échauffé au contact d'un corps chaud, qui s'élève et est remplacé par le fluide froid.

Le mouvement du fluide a lieu à cause de la différence de densité. Lorsque le fluide est mis mécaniquement en mouvement, il y a convection forcée.

La densité du flux thermique  $q$  est donné par la loi de Newton

$$q = h_c (T_P - T_f) \tag{III-5}$$

Où

$h_c$  : Coefficient de convection dépend d'un grand nombre de facteurs et en particulier de l'écart de température  $\Delta T = T_p - T_f$  entre le solide et le fluide.

### III.2 Conduction thermique 1D stationnaire

L'équation différentielle est la suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \tag{III-6}$$

#### III.2.1 Discrétisation du domaine de calcul

La façon de discrétisation est présentée à la figure (III.1)

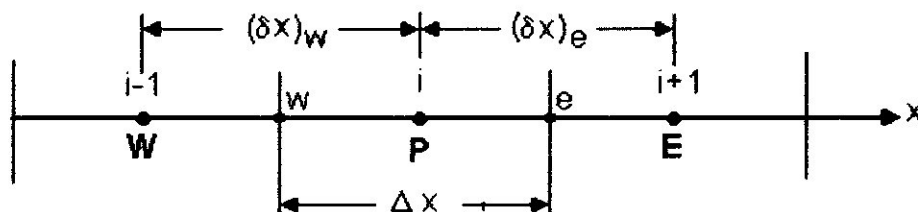


Fig III-1 Maillage unidimensionnel.

### III.2.2 Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P

En intégrant l'équation (III-6) sur le volume de contrôle fig (III.1) on obtient

Successivement

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III-7})$$

$$\left[ \lambda \frac{dT}{dx} \right]_w^e + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{III-8})$$

$$\lambda_e \left( \frac{dT}{dx} \right)_e - \lambda_w \left( \frac{dT}{dx} \right)_w + \bar{S} [x]_w^e = 0 \quad (\text{III-9})$$

Où  $\bar{S}$  est une valeur moyenne du terme source  $S$  sur le volume de contrôle. En tenant compte de la loi de Fourier  $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$  ;  $\vec{q}$  étant la densité du flux thermique, l'équation (III-9) peut être écrite ainsi :

$$-q_e + q_w + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{III-10})$$

Où  $q_e$  et  $q_w$  sont les densités du flux thermique aux interfaces du volume de contrôle.

### III.2.3 Choix d'un profil de température

Il y a deux types de profils [7] [8] qu'on peut envisager, l'un étant le profil constant (fig III.3.a) et l'autre le profil linéaire (fig III.2.b).

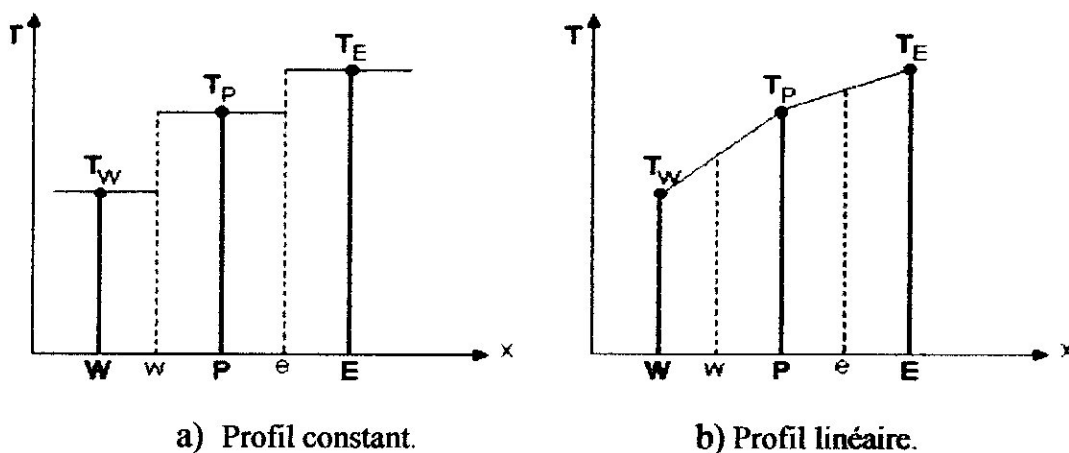


Fig III.2 Choix du profil de température.

Dans le cas d'un profil constant de température Fig(III.2.a), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de T aux interfaces w et e du volume de contrôle. De plus, la dérivée dT / dx n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas. Dans le cas d'un profil linéaire de température Fig (III.2.b), entre les noeuds du maillage, la discontinuité de T n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies comme suite :

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \quad \text{(III-11)}$$

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \quad \text{(III-12)}$$

### III.2.4 Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique

L'équation (III-10) s'écrira ainsi :

$$\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad \text{(III-13)}$$

Où  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de S sur le volume de contrôle.

Finalement, après le regroupement des termes, l'équation algébrique s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \quad \text{(III-14)}$$

Avec

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} ; \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} ; \quad a_P = a_E + a_W$$

$$b = \bar{S} \Delta x \quad \text{(III-15)}$$

#### Remarques

1. La forme générale des équations discrétisées est la suivante :

$$a_P T_P = \sum a_{VS} T_{VS} + b \quad \text{Vs = voisin} \quad \text{(III-16)}$$

2. La dérivée dT / dx aurait pu être évaluée avec d'autres fonctions d'interpolation ;

3. Toutes les quantités ne doivent pas forcément être évaluées avec les mêmes fonctions d'interpolation ;
  4. Pour une même variable, les mêmes fonctions d'interpolation ne doivent pas être forcément utilisées pour tous les termes dans l'équation modèle.
- En général  $\delta x_w \neq \delta x_e$ , le maillage pouvant être non uniforme. Le raffinement du maillage est fait dans les zones de forts gradients.

### III.2.5 Détermination de la conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle [7]

En général  $\lambda_e \neq \lambda_w$ , la conductivité thermique étant en fonction de la température,  $\lambda = \lambda(T)$ , ou même  $\lambda = \lambda(x)$  pour les matériaux composites.

La conductivité thermique à l'interface "e" peut être déterminée par l'interpolation linéaire entre les points P et E :

$$\lambda_e = f_e \lambda_P + (1 - f_e) \lambda_E \tag{III-17}$$

Avec

$$f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e} \quad \text{et} \quad 1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$$

Si l'interface "e" (fig III.3) est située à mi-distance de P et E, alors  $f_e = 1/2$  et on obtient :

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2} \tag{III-18}$$

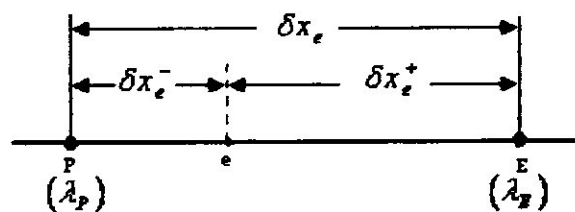


Fig III.3 Sur la détermination de la conductivité Thermique.

III.2.5.1 Conservation du flux aux interfaces

Si l'on considère le flux à l'interface "e" (figIII.4) on peut écrire  $T_e \rightarrow T_P$  :

$$q_e = -\lambda_e \left( \frac{dT}{dx} \right)_e = \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{\delta x_e} = \frac{\lambda_P (T_P - T_e)}{\delta x_e^-} = \frac{\lambda_E (T_e - T_E)}{\delta x_e^+}. \quad (III-19)$$

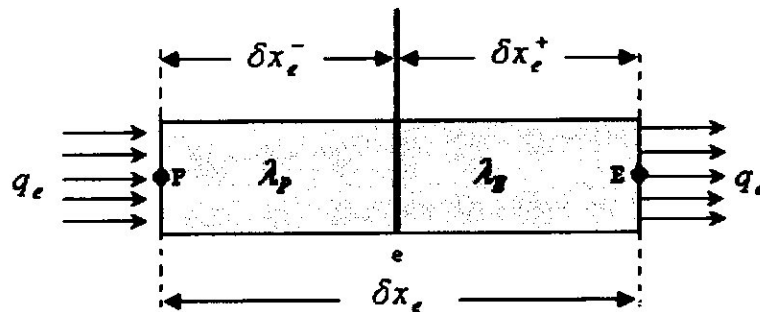


Fig III.4 Conductivité thermique à l'interface.

La densité du flux thermique à l'interface peut, également, être écrite ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{\lambda_P} + \frac{\delta x_e^+}{\lambda_E}} = \frac{T_P - T_E}{\delta x_e}. \quad (III-20)$$

De la relation (III-20) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\lambda_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{\lambda_P} + \frac{\delta x_e^+}{\lambda_E}} \quad (III-21)$$

Si l'on tient compte de la définition du coefficient  $f_e$ , la relation (III-21) devient :

$$\lambda_e = \frac{1}{\frac{1 - f_e}{\lambda_P} + \frac{f_e}{\lambda_E}}. \quad (III-22)$$

Si l'on considère le cas particulier avec  $f_e = 1/2$  la conductivité thermique à l'interface est :

$$\lambda_e = \frac{2 \lambda_P \lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E}. \quad (III-23)$$

Qui est la moyenne harmonique des conductivités thermiques des noeuds voisins du maillage.

## Remarque

La formule (III-23) est plus recommandée que la formule (III-18)

- Si  $\lambda_E \rightarrow 0$  dans la formule (III-18), ce qui signifie qu'on a un matériau isolant en  $\delta x_e^+$ , ce qui implique  $q_e \approx 0$ , alors  $\lambda_E \rightarrow f_e \lambda_p \neq 0$ , et la densité du flux thermique est donnée, à la limite, par la relation suivante :

$$q_e \rightarrow \frac{f_e \lambda_p (T_p - T_E)}{\delta x_e} \neq 0, \quad (\text{III-24})$$

Ce qui ne convient pas.

- Si  $\lambda_E \rightarrow 0$  (dans la formule (III-23), on obtient que  $q_e \rightarrow 0$  ce qui convient.
- Si  $\lambda_E / \lambda_p \rightarrow 0$  (dans la formule (III-18), ce qui signifie que  $\lambda_p \gg \lambda_E$   $\lambda_e = f(\lambda_E)$ , et que la température ( $T_e \approx T_p$ ) alors  $\lambda_e \rightarrow f_e \lambda_p$  ce qui ne convient pas.
- Si  $\lambda_E / \lambda_p \rightarrow 0$  (dans la formule (III-23), alors  $\lambda_e \rightarrow \lambda_E / f_e$  et la densité du flux thermique à l'interface "e", à la limite, devient :

$$q_e \rightarrow \frac{\lambda_E (T_p - T_E)}{f_e \delta x_e} = \frac{\lambda_E (T_p - T_E)}{\delta x_e^+}, \quad (\text{III-25})$$

Ce qui implique  $T_e \rightarrow T_p$ , et ce qui convient.

## III.2.6 Traitement des non linéarités

Si dans l'équation (III-6)  $\lambda = \lambda(T)$  et  $S = S(T)$  alors on a dans l'équation discrétisée :

$$b = b(T) \quad a_p = a_p(T) \quad a_{\text{S}} = a_{\text{S}}(T) \quad (\text{III-26})$$

Donc l'équation discrétisée (III-14) est une équation non linéaire.

La résolution du système d'équations algébriques, dans ce cas, se fait par une procédure itérative. Les étapes qui doivent être parcourues sont les suivantes :

1. On donne des conditions initiales pour les  $T_i$  pour tous les points "i" du maillage.



2. On calcule les coefficients  $a_p(T_i)$ ,  $a_{vs}(T_i)$  et  $b(T_i)$ .
3. On résout le système d'équations algébriques linéaires pour obtenir les nouvelles valeurs des  $T_i$ .
4. On itère (retour en 2.) jusqu'à ce que les valeurs de  $T_i$  se stabilisent c'est à dire atteinte de la Convergence).

### III.2.7 Traitement du terme source S [8]

Le terme source  $\bar{S}(T)$  a une dépendance non linéaire de la température. Il faut alors linéariser en  $T$ , pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires, ainsi :

$$\bar{S}(T) = S_c(T_p^*) + S_p(T_p^*)T_p \quad (\text{III-27})$$

Où

$T_p^*$  est la température obtenue à l'itération précédente. En même temps il faut respecter la règle N°3, c'est-à-dire  $S_p(T_p^*) \leq 0$

Lors de la linéarisation de  $\bar{S}(T)$  en  $S_c + S_p T_p$  on peut avoir :

- $S_{p \rightarrow optimum}$  Donné par la pente de la courbe  $S = f(T)$  en  $T_p^*$  (si cette pente est Négative).
- $S_p > 0$ , on a la divergence du processus itératif (la règle N°3 n'est pas vérifiée).
- $0 > S_p > S_{p \rightarrow optimum}$  il y a le risque de divergence
- $S_p \leq S_{p \rightarrow optimum} < 0$ , convergence plus lente mais assurée.

#### III.2.7.1. Les règles de base (règles de Patankar)

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar [8]

Règle N°1 : Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

Règle N°2 : Tous les coefficients  $a_p$  et  $a_{vs}$  doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.

Règle N°3 : Pente négative dans le terme source linéarisé.

Lors de la linéarisation du terme source  $\bar{S} = S_c + S_p T_p$  la pente  $S_p$  doit être  $\leq 0$  car sinon on peut avoir  $a_p < 0$  avec des  $a_{vs} > 0$  (contraire à la règle N°2).

Règle N°4 : Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :

### III.2.8 Traitement des conditions aux limites

On considère l'équation de conservation de l'énergie (III-6) dans le domaine  $0 < x < L$  et le maillage unidimensionnel présenté à la figure (III.5)

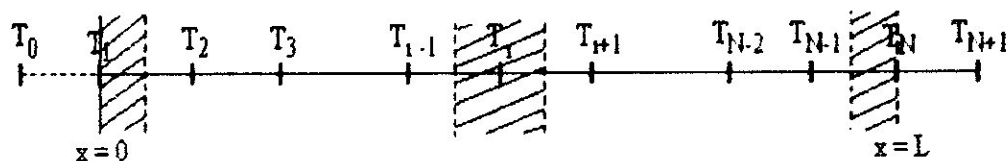


Fig III.5 Maillage 1D en volumes finis

L'intégration de l'équation (III-6) sur un volume de contrôle (VC) autour d'un nœud intérieur "i" donne :

$$\left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{i+1/2} - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{i-1/2} + \bar{S}_i(T_i) \Delta x = 0 \quad \text{(III-28)}$$

En exprimant les dérivées sous la forme discrète, on obtient :

$$\lambda_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \lambda_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + \bar{S}(T_i) \Delta x = 0 \quad i=2; \dots; N-1 \quad (\text{III-29})$$

Où  $\bar{S}_i$  est la valeur moyenne de  $S_i$  sur le volume de contrôle autour du point "i".

En regroupant les termes l'équation (III-29) peut être écrite ainsi :

$$\lambda_{i-1/2} T_{i-1} - (\lambda_{i+1/2} + \lambda_{i-1/2}) T_i + \lambda_{i+1/2} T_{i+1} = \bar{S}_i (T_i) (\Delta x)^2 \quad (\text{III-30})$$

Si  $\lambda_{i-1/2} = \lambda_{i+1/2} = \lambda$  l'équation (III-30) prend la forme suivante

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -G_i \quad i=2; \dots; N \quad (\text{III-31})$$

Où

$$G_i = \frac{\bar{S}_i (\Delta x)^2}{\lambda}$$

Pour les points 1 et N situés aux frontières du domaine de calcul on intègre l'équation (III-6) sur un demi volume de contrôle.

Les trois cas typiques de conditions aux limites rencontrées pour les problèmes de conduction thermique sont :

1. Température imposée (connue) à la frontière (condition de type Dirichlet)
2. Densité du flux thermique imposée, donc  $dT / dx$  connue (condition de type Neumann)
3. Densité du flux thermique spécifiée par un coefficient d'échange (h) et une Température du fluide environnant ( $T_f$ ) ou par un flux radiatif (condition mixte ou de type Fourier)

$$Q_N = \left( -\lambda \frac{dT}{dx} \right)_N = \left\{ \begin{array}{l} h (T_f - T_N) \\ \varepsilon \sigma (T_f^4 - T_N^4) \end{array} \right\} \quad (\text{III-31})$$

Où  $\varepsilon$  est le coefficient d'émission et  $\sigma$  est la constante de Stefan Boltzmann.

### III.2.8.1 Conditions aux limites de type Dirichlet

Dans ce cas, si la température  $T_1$  ou/et  $T_N$  est connue, il n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire au noeud 1 ou/et N. Quand on a une seule condition de type Dirichlet (au noeud 1 ou N) le nombre d'équations à résoudre est N - 1. Si l'on a deux conditions aux limites de type Dirichlet (dans les points de frontière 1 et N) alors le nombre d'équations à résoudre est N - 2. Pour  $i = 2$  de l'équation (III-30) on obtient:

$$\lambda_{2-1/2}T_1 - (\lambda_{2+1/2} + \lambda_{2-1/2})T_2 + \lambda_{2+1/2}T_3 = -\overline{S_2}(T_2)(\Delta x)^2 \quad (\text{III-32})$$

La température  $T_1$  étant connue, le terme  $\lambda_{(N-1)+1/2}T_1$  passe comme un terme source, au membre droite de l'équation, et la première équation à résoudre devient

$$-(\lambda_{2+1/2} + \lambda_{2-1/2})T_2 + \lambda_{2+1/2}T_3 = -\overline{S_2}(T_2)(\Delta x)^2 - \lambda_{2-1/2}T_1 \quad (\text{III-33})$$

Pour  $\lambda = \text{cte}$ , l'équation (III-33) devient :

$$-2T_2 + T_3 = \frac{-\overline{S_2}(T_2)(\Delta x)^2}{\lambda} - T_1 \quad (\text{III-34})$$

Pour  $i = N-1$  de l'équation (III-30) on obtient

$$\begin{aligned} -\overline{S_{N-1}}(\Delta x)^2 &= \lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} \\ &\quad + \lambda_{(N-1)+1/2}T_N \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

La température  $T_N$  étant connue, le terme  $\lambda_{(N-1)+1/2}T_N$  passe comme un terme source et la dernière équation à résoudre devient :

$$\lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} = -\overline{S_{N-1}}(\Delta x)^2 - \lambda_{(N-1)+1/2}T_N \quad (\text{III-36})$$

Pour  $\lambda = \text{cte}$ , l'équation (III-36) devient :

$$T_{N-2} - 2T_{N-1} = \frac{-\overline{S_{N-1}}(\Delta x)^2}{\lambda} - T_N \quad (\text{III-37})$$

III.2.8.2 Conditions aux limites de type Neumann

En intégrant l'équation (III-6) sur le demi volume de contrôle (VC) illustré à la figure (III.6) on obtient :

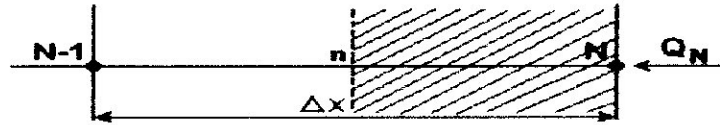


Fig III.6 Traitement d'une condition à la limite de type flux imposé (Neumann)

$$\int_{v_c} \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{v_c} S dV = 0 \tag{III-38}$$

Ce qui donne pour  $dV = A \cdot dx = 1 \cdot dx$  (le cas unidimensionnel) :

$$\int_n^N \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_n^N S dx = 0 \tag{III-39}$$

Et finalement après l'intégration, on obtient :

$$\left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_N + \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_n = 0 \tag{III-40}$$

Et finalement après l'intégration, on obtient :

$$\left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_N + \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_n + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0 \tag{III-41}$$

Comme la densité du flux thermique  $Q_N$  au point N s'exprime :

$$Q_N = - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_N \tag{III-42}$$

L'équation (III-42), en exprimant la dérivée au point "n" avec différences centrales, devient:

$$-Q_N - \lambda_n \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (\text{III-43})$$

En regroupant les termes dans l'équation (III-43), on obtient l'équation discrétisée, valable pour le point de frontière N, pour la condition à la limite de type Neumann (flux imposé) :

$$T_{N-1} - T_N = -\frac{\bar{S}_N (\Delta x)^2}{2\lambda_{N-1/2}} + \frac{Q_N \Delta x}{\lambda_{N-1/2}} \quad (\text{III-44})$$

Pour la condition à la limite de type Neumann homogène on a  $Q_N = 0$ . Le terme  $\bar{S}_N$  est en fait la moyenne arithmétique entre le terme source du point N et le terme source de l'interface n du demi volume de contrôle.

### III-3 Conduction thermique 1D instationnaire

#### III-3-1 Équations de la conduction thermique

##### III-3-1-1 Équation de la conduction thermique unidimensionnelle (1D)

Dans ce paragraphe on démontre l'obtention de l'équation de la conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées cartésiennes. On considère une paroi solide où la température  $T(x, t)$  est en fonction du temps et varie dans une direction seulement, le long de la coordonnée  $x$ . On a vu au paragraphe (III.1.1) que lorsque la température varie le long de la coordonnée  $x$ , on a une densité du flux thermique dans la direction de l'axe  $x$  donné par la loi de Fourier sous la forme :

$$q = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad \text{w/m}^2 \quad (\text{III-45})$$

Pour généraliser l'analyse, on suppose aussi une source à l'intérieur de la plaque (par exemple, les pertes par l'effet Joule) ayant le taux de génération  $S = S(x, t)$  en  $\text{w/m}^3$ . On considère un élément de volume ayant l'épaisseur  $\Delta x$  et l'aire  $A$  perpendiculaire à l'axe  $x$ , illustré à la figure (III.7).

L'équation de bilan sur cet élément de volume est la suivante :

$$\left( \begin{array}{l} \text{le taux net d'énergie} \\ \text{transmise par} \\ \text{conduction thermique} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{le taux net} \\ \text{de l'énergie} \\ \text{générée} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{le taux net} \\ \text{de croissance} \\ \text{de l'énergie interne} \end{array} \right) \quad \text{(III-46)}$$

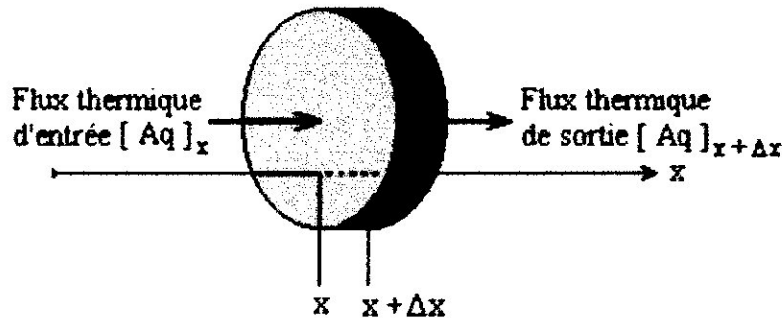


Fig III.7 Élément de volume pour l'équation de conduction thermique 1D.

Soit  $q$  la densité du flux thermique au point  $x$  dans la direction positive de la Coordonnée  $x$  sur la surface  $A$  de l'élément de volume. Alors le taux du flux thermique qui entre dans l'élément de volume par la surface  $A$  au point  $x$  est :

$$[Aq]_x \quad \text{(III.47)}$$

De même, le taux du flux thermique qui sort de l'élément de volume au point  $x + \Delta x$  est :

$$[Aq]_{x+\Delta x} \quad \text{(III-48)}$$

Le taux net de gain de flux thermique par l'élément de volume, par conduction, est la différence entre ces deux quantités :

$$[Aq]_x - [Aq]_{x+\Delta x} \quad \text{(III-49)}$$

Le taux d'énergie générée dans l'élément de volume ayant le volume  $A \times \Delta x$  est donné par :

$$SA\Delta x \quad \text{(III-50)}$$

Le taux de croissance de l'énergie interne sur l'élément de volume résultant de la variation dans le temps de la température est :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, T)}{\partial t} A \Delta x \quad \text{(III-51)}$$

Les termes des équations (III-49) à (III-51) sont introduits dans l'équation de bilan (III-46) et ensuite on peut l'écrire sous la forme suivante

$$-\frac{1}{A} \frac{[Aq]_{x+\Delta x} - [Aq]_x}{\Delta x} + S = \rho C_p \frac{\partial T(x, T)}{\partial t} \quad (\text{III-52})$$

Si l'on introduit la densité  $q$  du flux thermique donnée par la relation (III-45) dans l'équation (III-52) on obtient :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (\text{III-53})$$

Pour l'équation (III-53) on n'a pas spécifié le système de coordonnées mais il est nécessaire de connaître la dépendance de l'aire  $A$  en fonction de la coordonnée  $x$ .

### III.3.1.2 Coordonnées cartésiennes

Si l'aire  $A$  ne varie pas tout au long de la coordonnée  $x$  alors l'équation (III-53) devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (\text{III-54})$$

qui est l'équation de conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées cartésiennes.

### III.3.1.3 Conditions aux limites

Pour la résolution d'une équation de transfert thermique, des conditions initiales et aux limites adéquates sont nécessaires. Les conditions initiales spécifient la distribution de la température à l'instant  $t = 0$ . Les conditions aux limites spécifient les conditions thermiques aux frontières du domaine de calcul. Par exemple, sur une frontière, on peut spécifier la distribution de la température, ou la distribution de la densité du flux thermique, ou un transfert thermique par convection vers le fluide environnant ayant une température connue et un coefficient de transfert thermique aussi connu.

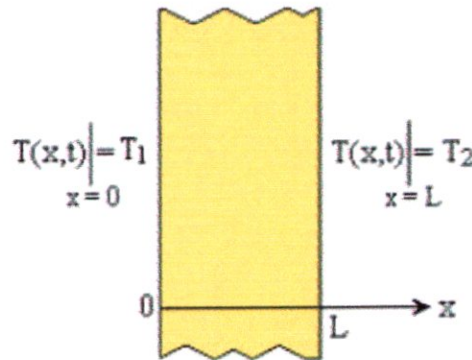
Par la suite on présente la représentation mathématique des trois types de conditions aux limites appelées température imposée, densité du flux thermique imposée et condition à la limite par convection.



### III.3.1.4 Conditions aux limites de type "température imposée" (Dirichlet)

Dans de ce type de conditions la température est considérée connue sur les frontières du domaine de calcul..

On considère une plaque d'épaisseur  $L$  illustrée à la figure (III.8) On suppose que la surface de la frontière à  $x = 0$  est maintenue à la température uniforme  $T_1$  et la surface de frontière à  $x = L$  à la température uniforme  $T_2$ .



**Fig III.8** Température imposée aux frontières (conditions aux limites du premier type).

Les conditions aux limites peuvent être écrites ainsi :

$$T(x, t)|_{x=0} = T(0, t) = T_1 \quad (\text{III-55})$$

$$T(x, t)|_{x=L} = T(L, t) = T_2 \quad (\text{III-56})$$

Dans certains cas, la distribution de la température aux frontières est spécifiée en fonction de la position et du temps. Quand la valeur de la température est spécifiée à la frontière, on dit que la condition à la limite est du premier type.

### III.3.1.5 Conditions aux limites de type "densité du flux thermique imposée"

(Neumann)

Dans certains cas, à la frontière d'un domaine de calcul, la densité du flux thermique est connue. Par exemple, quand une surface du domaine d'analyse est chauffée à l'aide d'une installation électrique la densité du flux thermique sur la surface est connue.

Soit un domaine de calcul illustrée à la figure (III.9) On suppose que par la surface de la frontière du domaine de calcul, à  $x = 0$ , on a une densité de flux thermique  $q_0$  ( $w / m^2$ ) Et par la surface de la frontière à  $x = L$  on a  $q_L$  ( $w / m^2$ )

À  $x = 0$ , la source de chaleur extérieure  $q_0$  qui entre par la surface de la frontière doit être égale à la densité du flux thermique de conduction de la plaque :

$$q_0 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (III-57)$$

A  $x = L$  de chaleur extérieure  $q_L$  qui entre par la surface de la frontière doit être égale à la densité du flux thermique de conduction de la plaque :

$$q_L = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} \quad (III-58)$$

Dans les équations (III-57) et (III-58) une valeur positive pour  $q_0$  et  $q_L$  signifie que la source de chaleur (la densité de flux thermique) entre dans la plaque tandis qu'une valeur négative de  $q_0$  et  $q_L$  signifie que la source de chaleur sort de la plaque. Ces conditions aux limites s'appellent conditions aux limites du deuxième type.

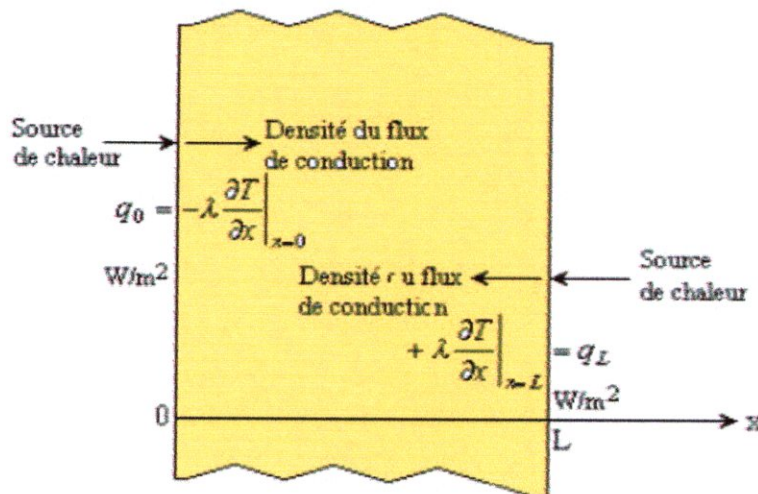


Fig III.9 Densité du flux imposée aux frontières (conditions aux limites du deuxième type).

### III.3.1.6 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \quad (\text{III-59})$$

Où  $\rho$  est la densité de masse,  $C_p$  étant la chaleur spécifique à pression constante.

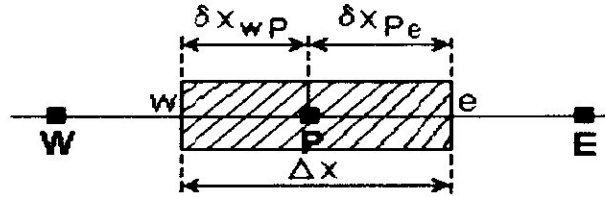


Fig III.10 Volume de contrôle 1D

On considère le volume de contrôle unidimensionnel de la figure (III.10). L'intégration de l'équation (III-59) sur le volume de contrôle et sur un intervalle de temps de  $t$  au  $t + \Delta t$  donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dV dt \quad (\text{III-60})$$

L'équation intégrée (III-60) peut être écrite ainsi :

$$\int_w^e \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt \quad (\text{III-61})$$

Où  $A$  est l'aire transversale du volume de contrôle,  $\Delta V$  étant le volume de celui-ci égale à  $A\Delta x$ .

Si la température du noeud  $P$  est supposée la même sur le volume de contrôle, la partie gauche de l'équation (III-61) peut être écrite ainsi :

$$\int_{VC} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt \right] dV = \rho C_p (T_P - T_P^0) \Delta V \quad (\text{III-62})$$

Où  $T_P^0$  est la température à l'instant  $t$  et  $T_P$  à l'instant  $t + \Delta t$ .

En utilisant un schéma avec des différences centrales pour les termes de conduction de la part droite de l'équation (III-62) on obtient :

$$\rho C_P (T_P - T_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta x dt \quad (\text{III-63})$$

Pour calculer la partie droite de l'équation (III-63) il faut connaître la variation de  $T_P$ ,  $T_W$  et  $T_E$  dans le temps. Pour cela il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant  $t$ ,  $T_P^0$  à l'instant  $t + \Delta t$ ,  $T_P$  ou une combinaison linéaire des températures à l'instant  $t$  et  $t + \Delta t$ . La forme générale d'intégration temporelle s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \begin{cases} T_P^0 \Delta t \\ T_P \Delta t \\ (f T_P + (1-f) T_P^0) \Delta t \end{cases} \quad (\text{III-64})$$

Où  $0 \leq f \leq 1$  est un facteur de pondération.

En appliquant la forme générale d'intégration temporelle (III-64) aux points  $T_P$ ,

$T_W$  et  $T_E$  on obtient :

$$\rho C_P \left( \frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} \right) \Delta x = f \left[ \frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} \right] + (1-f) \left[ \frac{\lambda_e (T_E^0 - T_P^0)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P^0 - T_W^0)}{\delta x_w} \right] + \bar{S} \Delta x \quad (\text{III-65})$$

En regroupant les termes dans l'équation (III-65) et on obtient

l'équation (III-66) :

$$\left( \rho C_P \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) + f \left[ \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right] \right) T_P = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} [f T_E + (1-f) T_E^0] + \frac{\lambda_w}{\delta x_w} [f T_W + (1-f) T_W^0] + \left[ \rho C_P \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f) \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - (1-f) \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \right] T_P^0 + \bar{S} \Delta x \quad (\text{III-66})$$

Si l'on identifie les coefficients de  $T_W$  et  $T_E$  comme  $a_w$  et  $a_E$  on peut écrire

L'équation (III-65) sous la forme générale discrétisé

$$a_P T_P = a_w [f T_W + (1-f) T_W^0] + a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + [a_P^0 - (1-f) a_w - (1-f) a_E] T_P^0 + b \quad (\text{III-67})$$

Où  $a_p = f(a_w + a_E) + a_p^0$        $a_p^0 = \rho C_p \frac{\Delta x}{\Delta t}$  ;

$$a_w = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \qquad b = \bar{S} \Delta x .$$

La forme exacte de l'équation discrétisée dépend de la valeur du facteur  $f$ .

Lorsque  $f = 0$  On utilise seulement les températures :  $T_p^0, T_w^0$  et  $T_E^0$  à l'instant  $t$ , dans le membre droit de L'équation (III-67), pour calculer  $T_p$  à l'instant  $t + \Delta t$  ; un tel schéma s'appelle schéma explicite

Lorsque  $0 < f \leq 1$ , on utilise tant les températures à l'instant  $t$  que les températures à l'instant  $t + \Delta t$  ; le schéma obtenu s'appelle le schéma implicite.

- Le cas limite quand  $f = 1$  le schéma s'appelle totalement implicite.
- Si  $f = 1/2$  le schéma s'appelle schéma Crank-Nicolson ou semi implicite.

Dans notre étude, le schéma choisis est le cas implicite

### III.3.1.7 Schéma totalement implicite

Lorsque  $f = 1$ , dans l'équation (III.67) on obtient le schéma totalement implicite.

L'équation discrétisée est la suivant :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_E T_E + a_p^0 T_p^0 + S_C \tag{III-68}$$

Où

$$a_p = a_p^0 + a_w + a_E - S_p \qquad ; \qquad a_w = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad ; \qquad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} .$$

La règle N°2 est toujours vérifiée, donc le schéma totalement implicite (TI) est Inconditionnellement stable. La précision du schéma TI est de premier ordre dans le temps, donc un petit pas dans le temps est nécessaire pour augmenter la précision des résultats.

### III.4 Conduction thermique stationnaire en deux dimensions (2D)

#### III.4.1 Forme générale de l'équation discrétisée

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique 2D stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 \quad \text{(III-69)}$$

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représenté à la figure (III.11)

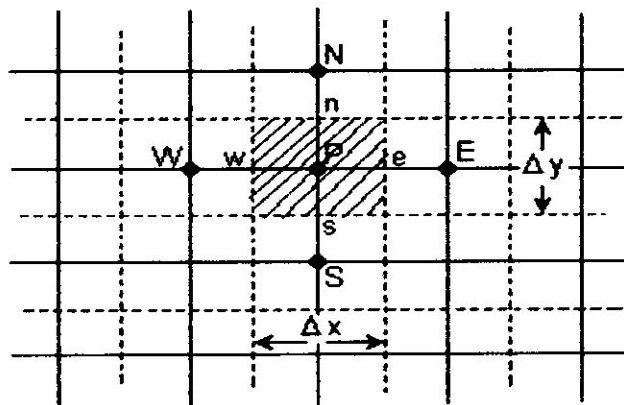


Fig III.11 Maillage 2D.

De plus, par rapport au maillage 1D, aux noeuds voisins, "East" (E) et "West" (W) du point P on ajoute les voisins "North" (N) et "South" (S).

L'intégration de l'équation (III.69), sur le volume de contrôle, donne :

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy + \int_{vc} S dv = 0 \quad \text{(III -70)}$$

Si l'on note  $A_e = A_w = \Delta y$  et  $A_n = A_s = \Delta x$ , on obtient :

$$\left[ \lambda_e A_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w A_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad \text{(III -71)}$$

L'équation (III -71) représente le bilan entre la génération de  $T$  dans le volume de contrôle et les flux aux faces du volume de contrôle. En utilisant la même approximation que dans le cas 1D, c'est-à-dire on suppose une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle :

$$\text{Le flux au face " w" } = \lambda_w A_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} \quad (\text{III -72})$$

$$\text{Le flux au face " e" } = \lambda_e A_e \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III -73})$$

$$\text{Le flux au face " s" } = \lambda_s A_s \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_s = \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} \quad (\text{III -74})$$

$$\text{Le flux au face " n" } = \lambda_n A_n \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_n = \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} \quad (\text{III -75})$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (III -71), on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} + \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III -76})$$

Si l'on tient compte que  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$  et  $\bar{S} = S_c + S_p T_p$  et finalement en regroupant

les termes, l'équation (III -76) peut s'écrire ainsi

$$\left( \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_p \Delta x \Delta y \right) T_P = \left( \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) T_W + \left( \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) T_E \quad (\text{III -77})$$

$$+ \left( \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) T_S + \left( \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) T_N + S_c \Delta x \Delta y$$

L'équation (III -77) peut être écrite donc sous la forme générale discrétisée pour un Noeud intérieur :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (\text{III -78})$$

Où :

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}}$$

$$a_N = \frac{\lambda_N A_N}{\delta y_{PN}}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P \Delta x \Delta y \quad b = S_c \Delta x \Delta y$$

Pour obtenir la distribution de la température  $T$  (ou pour une autre variable dépendante) dans une situation 2D on écrit l'équation discrétisée pour chaque noeud du maillage. Aux frontières du domaine d'analyse où la température ou le flux sont connus l'équation discrétisée est modifiée pour prendre en compte les conditions aux limites.



# **Chapitre IV---**

**SIMULATION NUMERIQUE DES  
PROBLEMES DE  
CONDUCTION THERMIQUE 1D**

## IV.1 CONDUCTION THERMIQUE STATIONNAIRE ET INSTATIONNAIRE

La simulation numérique est un outil indissociable actuellement dans le domaine d'étude universitaire [6] [8]

Son apport a pris de plus en plus d'importance au fur et à mesure que les méthodes numériques se développent et que l'outil informatique de calcul deviennent performants.

Dans notre étude la simulation numérique du phénomène de conductivité thermique sera développé dans ce qui suit et la méthode utilisée choisie est la MVF [7] et [17].

### IV.1.1 SIMULATION NUMERIQUE : Conduction 1D Stationnaire

On considérera l'étude de deux cas :

#### IV.1.1.1 Pratique A:

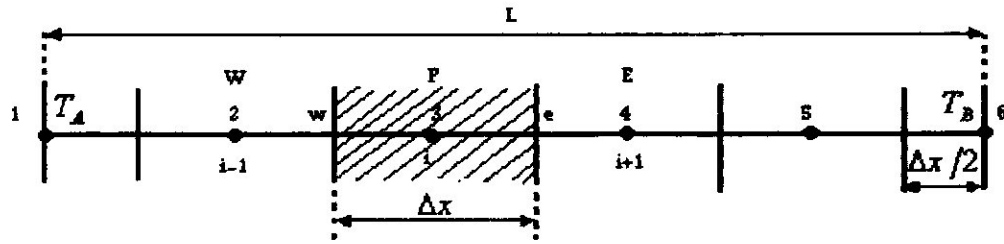
On considère une plaque très longue d'épaisseur  $L = 20$  mm, ayant la conductivité thermique constante  $\lambda = 0.5$  W/m.K et une source de chaleur uniforme,  $S = 1000$  kW/m<sup>3</sup>. Les faces de la plaque se trouvent à la température constante de 100°C et 200°C respectivement. En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions "y" et "z" soient très grandes et donc le gradient de la température est significatif dans la direction "x" seulement, en calcule la distribution de la température et en compare les résultats numériques avec la solution analytique.

#### IV.1.1.2 Traitement A:

L'équation différentielle qui gouverne la distribution de la température est la suivante:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{IV-a-1})$$

Le domaine d'analyse est divisé en six noeuds,  $Dx = 0.004$  m. L'aire  $A = 1$  est considérée dans le plan y - z.



FigIV.1 Maillage 1D pour l'application 01

L'intégration formelle, sur un volume de contrôle (VC), de l'équation (IV-a-1) donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{VC} S dV = 0 \quad (\text{IV-a-2})$$

La première intégrale est évaluée suivant la méthode décrite en chapitre II. La deuxième intégrale, qui contient le terme source, est évaluée en considérant une valeur moyenne de  $S$  sur le volume de contrôle. L'équation (IV-a-2) peut être écrite ainsi :

$$\left[ \left( \lambda A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{IV-a-3})$$

$$\left[ \left( \lambda_e A \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \left( \lambda_w A \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) \right] + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{IV-a-4})$$

En regroupant les termes on obtient la forme générale de l'équation discrétisée, valable pour les noeuds 3 et 4 ainsi

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b \quad (\text{IV-a-5})$$

Où :

$$a_P = a_W + a_E \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}$$

$$b = \bar{S} \Delta x$$

Pour le noeud 2 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin "W" correspond au noeud "1" où la température est connue  $T_w = T_1 = T_A$  et passe comme un terme source supplémentaire.

L'équation discrétisée est donc :

$$a_P T_P = a_W T_A + a_E T_E + b \quad (\text{IV-a-6})$$

Pour le noeud 5 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin "E" correspond au noeud "6" où la température est connue  $T_E = T_6 = T_A$  et passe comme un terme source supplémentaire.

L'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_B + b \quad (\text{IV-a-7})$$

En tenant compte que  $\lambda_w = \lambda_e = \lambda$

et :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{0,5}{0,004} = 125$$

$$a_P = a_W + a_E = 125 + 125 = 250$$

$$b = \bar{S} \Delta x = 1000000 \cdot 0,004 = 4000$$

Le système d'équations à résoudre est :

$$250T_2 = 125T_3 + 4000 + 125 \times T_A$$

$$250T_3 = 125T_2 + 125T_4 + 4000$$

$$250T_4 = 125T_3 + 125T_5 + 4000$$

$$250T_5 = 125T_4 + 4000 + 125 \times T_B$$

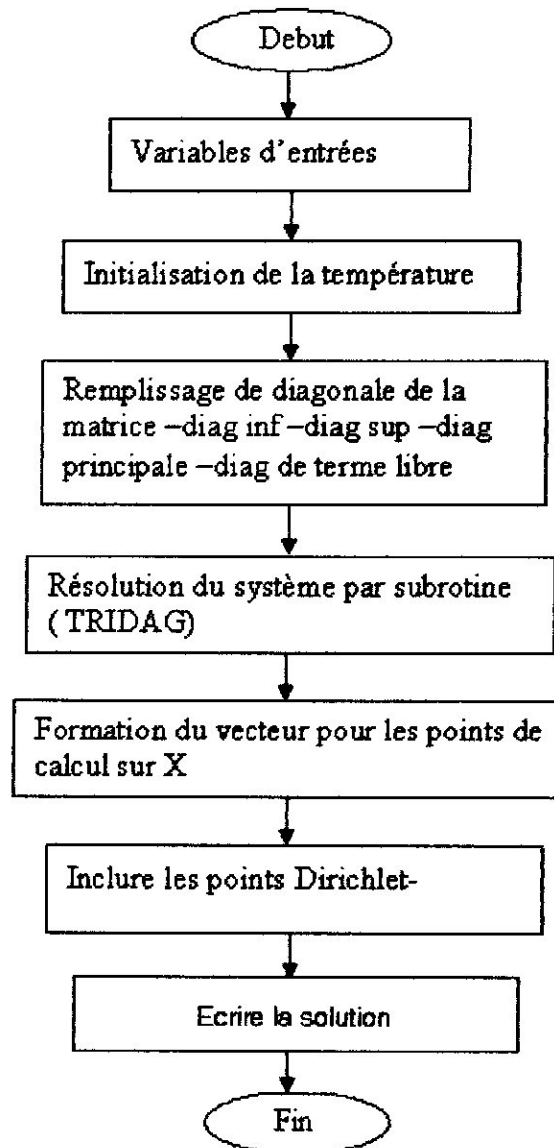
En regroupant les termes et en remplaçant les valeurs de  $T_A$  et  $T_B$  on obtient le système "Tri diagonal" à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 250 & -125 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & -125 & 250 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16500 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{pmatrix}$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (IV-a-1) et en imposant les Conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[ \frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda}(L-x) \right] x + T_A$$

#### IV.1.1.3 Organigramme de calcul



#### IV.1.1.4 Pratique B :

Pour une deuxième application on considère une barre cylindrique fig (IV.2) de l'aire  $A$  avec une extrémité maintenue la température constante de  $100^\circ\text{C}$  ( $T_B$ ) et l'autre extrémité est isolée (le flux de chaleur est nul). Sur le long de la barre il y a

un échange de chaleur par convection dépendante de la température. La température du milieu extérieur est de 20°C, avec  $L = 1 \text{ m}$ ,  $hP / \lambda A = 25 \text{ m}^{-2}$ .

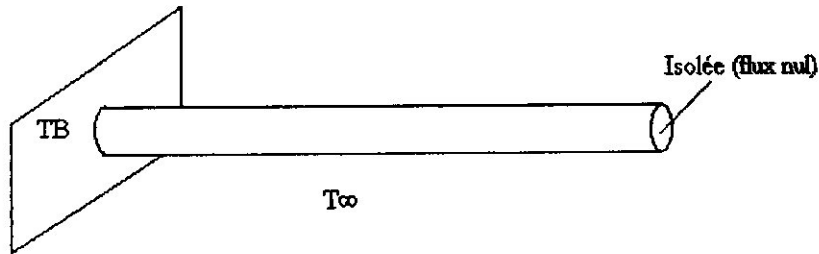


Fig. IV.2 Géométrie de la pratique B

IV.1.1.5 Traitement B :

L'équation différentielle qui gouverne le transfert thermique dans ce cas est :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda A \frac{dT}{dx} \right) - hP (T - T_{\infty}) = 0 \tag{IV-b-1}$$

Où h est le coefficient de transfert thermique par convection, P est le périmètre,  $\lambda$  est la conductivité thermique et  $T_{\infty}$  est la température du milieu extérieur.

La solution analytique est donnée par la relation suivante :

$$T(x) = (T_B - T_{\infty}) \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)} + T_{\infty} \tag{IV-b-2}$$

Où

$n^2 = hP / \lambda A$  (il faut noter que  $\lambda A = \text{cte}$ ). Le maillage utilisé est celui de la figure (IV.3)

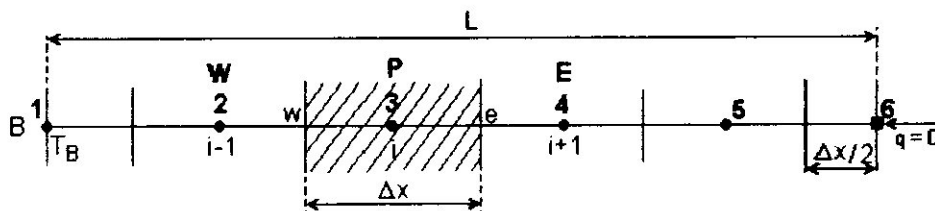


Fig.IV.3 Maillage utilisé pour la pratique B

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad \text{Ou} \quad n^2 = hP / \lambda A \quad (\text{IV-b-3})$$

L'intégration de l'équation (IV-b-3) sur le volume de contrôle, autour du point  $P$ , donne :

$$\int_{v_c} \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{v_c} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 \quad (\text{IV-b-4})$$

La première intégrale de l'équation (IV-b-4) sera traitée comme décrite dans le chapitre II. La deuxième intégrale, à cause du terme source, est évaluée en supposant que la quantité à intégrer est localement constante sur chaque volume de contrôle et donc :

$$\left( A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( A \frac{dT}{dx} \right)_w - [n^2 (T_P - T_\infty) A \Delta x] = 0 \quad (\text{IV-b-5})$$

Pour les noeuds intérieurs l'équation discrétisée est :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) \Delta x = 0 \quad (\text{IV-b-6})$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\left( \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \right) T_P = \frac{1}{\Delta x} T_W + \frac{1}{\Delta x} T_E + n^2 \Delta x T_\infty - n^2 \Delta x T_P = 0 \quad (\text{IV-b-7})$$

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3, 4 et 5) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b, \quad (\text{IV-b-8})$$

Où

$$a_W = a_E = \frac{1}{\Delta x} \quad a_P = a_W + a_E - S_P, \quad b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty$$

$$S_P = -n^2 \Delta x$$

Le terme source dans l'équation ci-dessus est identifié comme  $S = S_c + S_p T_p$

Pour le noeud 2 (pour le noeud 1 ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire, la température étant connue) est valable la même équation que pour un noeud intérieur où le voisin "W" correspond à la température du point "1",  $T_W = T_1 = T_B$ . Le terme qui contient la température du point "1" est interprété comme un terme source. L'équation discrétisée, pour le noeud "2", est

$$a_p T_p = a_w T_B + a_E T_E + b \quad (\text{IV-b-9})$$

Pour le noeud "6" on intègre l'équation (IV-b-1) sur le demi volume de contrôle :

$$\int_{1/2VC} \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{1/2VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 \quad (\text{IV-b-10})$$

$$\left( A \frac{dT}{dx} \right)_p - \left( A \frac{dT}{dx} \right)_w - n^2 (T_p - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0$$

Parce que le flux dans le point P est nul ( $q_p = -\lambda A \left( \frac{dT}{dx} \right)_p = 0$ ) on obtient

l'équation discrétisée suivante :

$$0 - A \frac{T_p - T_w}{\Delta x} - n^2 (T_p - T_\infty) A \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (\text{IV-b-11})$$

En regroupant les termes dans l'équation (IV-b-11) on obtient :

$$a_p T_p = a_w T_w + b \quad (\text{IV-b-12})$$

Où

$$a_w = a_E = \frac{1}{\Delta x} \quad a_p = a_w + a_E - S_p, \quad b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty$$

$$S_p = -n^2 \Delta x$$



En tenant compte que

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{0.2} = 5 \quad n^2 \Delta x T_{\infty} = 25 \times 0.2 \times 20 = 100$$

$$-n^2 \Delta x = -25 \times 0.2 = -5$$

Le système d'équations à résoudre est :

$$15T_2 = 5T_3 + 100 + 5T_B$$

$$15T_3 = 5T_2 + 5T_4 + 100$$

$$15T_4 = 5T_3 + 5T_5 + 100$$

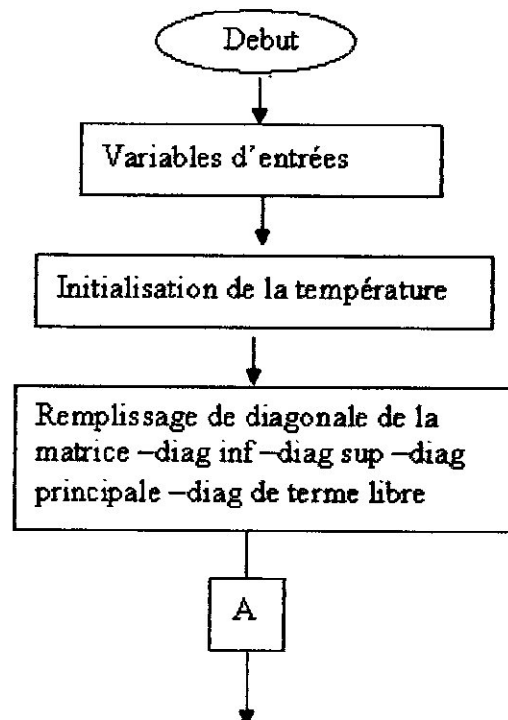
$$15T_5 = 5T_4 + 5T_6 + 100$$

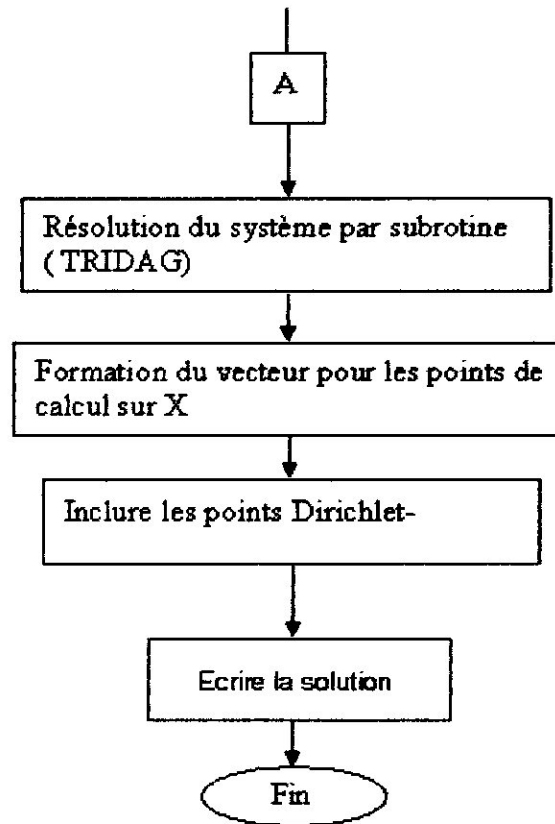
$$7.5T_6 = 5T_5 + 50$$

En regroupant les termes on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-b-13})$$

#### IV.1.1.6 L'organigramme de calcul





#### IV.1.2 SIMULATION NUMERIQUE : Conduction 1D Instationnaire

On traitera un cas pour la conduction monodimensionnelle en instationnaire.

##### IV.1.2.1 Pratique C :

Une plaque métallique mince se trouve initialement à une température uniforme de  $200^{\circ}\text{C}$ . À l'instant  $t = 0$  la température de la paroi "East" de la plaque est brusquement réduite à  $0^{\circ}\text{C}$ . Les autres surfaces de la plaque sont isolées.

En Utilisant le schéma implicite de la méthode des volumes finis, pour un pas de temps adéquat, on calculera la distribution transitoire de la température et l'on comparera les résultats avec la solution analytique afin de valider notre simulation et ce aux instants (i)  $t=40\text{s}$ , (ii)  $t=80\text{s}$ , (iii)  $t=120\text{s}$  ;

$$L=2 \text{ cm}, \lambda=10 \text{ W/m.K et } \rho c_p = 10^7 \text{ J/m}^3\text{k} .$$

##### IV.1.2.2 Traitement C :

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{IV-c-1})$$

La condition initiale est :

$$T = 200^\circ\text{C} \quad \text{à} \quad t = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{Pour} \quad x = 0, t > 0$$

$$T = 0 \quad \text{Pour} \quad x = L, t > 0$$

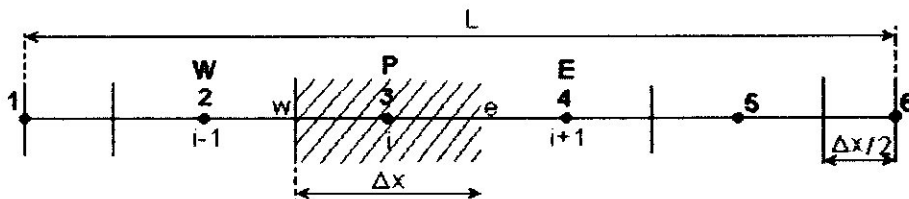
La solution analytique est donnée par la relation suivante [4]:

$$T(x, t) = T(x, 0) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp(-\alpha \lambda_n^2 t) \cos(\lambda_n x) \quad (\text{IV-c-2})$$

Où

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

On considère six points sur le domaine de calcul avec  $\Delta x = 0.004$  mm (fig. IV.4).



FigIV.4 Maillage pour le problème.

Pour un noeud intérieur du domaine de calcul (les noeuds 2, 3, et 4) est celle décrite par l'équation (III-72) mais avec le terme source nul, c'est-à-dire :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 \quad (\text{IV-c-3})$$

Où

$$a_P = a_P^0 + a_W + a_E \quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} ;$$

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}$$

Pour les noeuds situés sur la frontière 1 et 5 un traitement spécial s'impose. Ainsi, pour le noeud 1 l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \quad (\text{IV-c-4})$$

Où

$$a_P = a_P^0 + a_E \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}$$

Pour le noeud 5 l'équation discrétisée, en tenant compte que  $T_E = T_6 = T_c$  (connue), est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + a_E T_c \quad (\text{IV-c-5})$$

Où

$$a_P = a_W + a_E + a_P^0, \quad a_P^0 = \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\Delta x}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{\Delta x}$$

Même si la méthode implicite permet d'utiliser un pas de temps quelconque, on choisit  $\Delta t = 2$  s

. On a donc :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \quad \rho c_P \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 ;$$

$$\rho c_P \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000 .$$

Après la substitution des valeurs numériques dans les équations (IV-c-3), (IV-c-34) et (IV-c-35) et après simplifications, on obtient :

$$\text{Noeud 1 : } 125T_P = 25T_E + 100T_P^0$$

$$\text{Noeud 2 \div 4 } 250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^0 \quad (\text{IV-c-6})$$

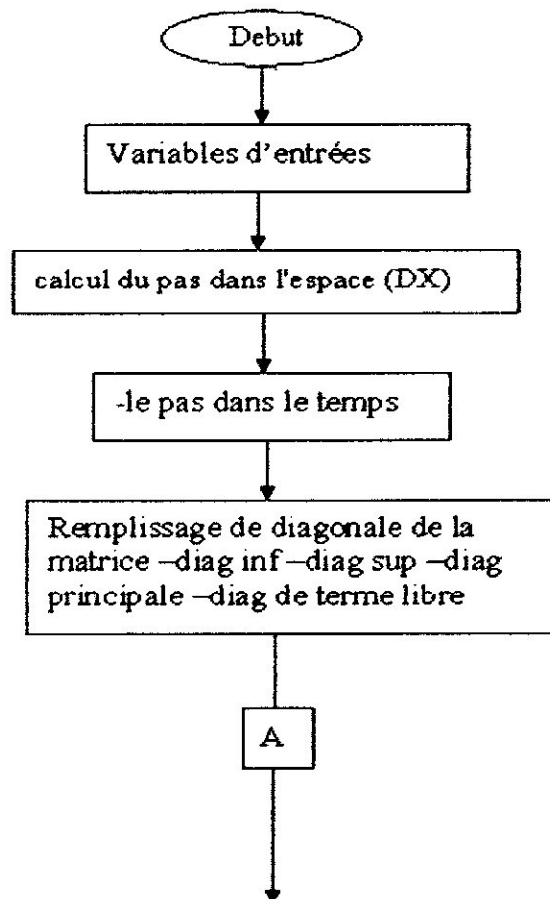
$$\text{Noeud 5 : } 250T_P = 25T_W + 200T_P^0 + 25T_C$$

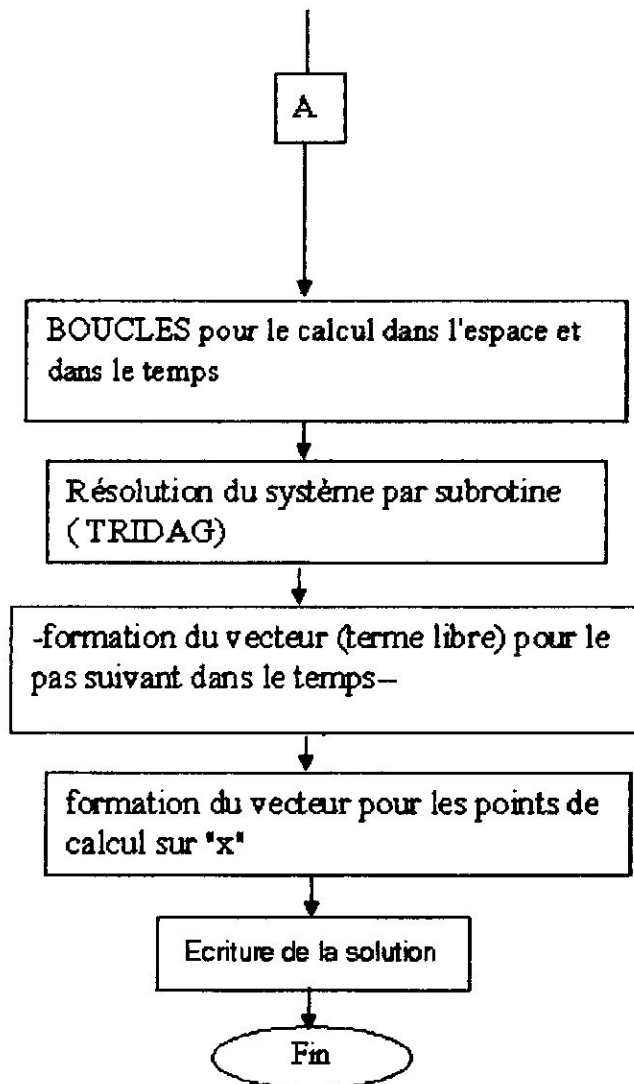
En tenant compte que  $T_C = 0$  le système d'équations algébriques à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 125 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100T_1^0 \\ 200T_2^0 \\ 200T_3^0 \\ 200T_4^0 \\ 200T_5^0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV - c -7})$$

On constate que l'équation pour chaque point contient les températures inconnues des points voisins. La méthode implicite nécessite la résolution simultanée du système d'équations (IV -c-7). Les valeurs de la température du pas de temps Précédent sont utilisées seulement pour le calcul du membre droit de l'équation matricielle (IV-c-7).

#### IV.1.2.3 Organigramme de calcul



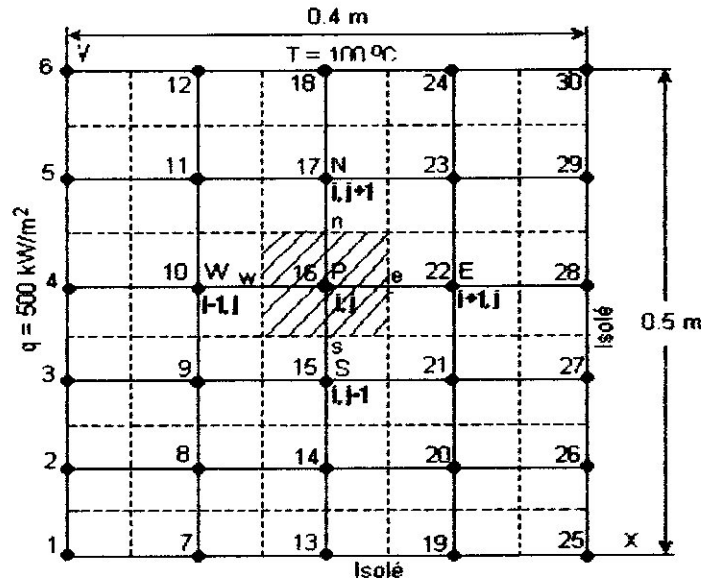


### IV.1.3 SIMULATION NUMERIQUE : Conduction 2D Stationnaire

Dans ce cas, nous allons traiter deux cas :

#### IV.1.3.1 Pratique D :

On considère une plaque rectangulaire (0.5 x 0.4 m) d'épaisseur 0.01 m (FigIV.5). La conductivité thermique du matériau de la plaque est  $\lambda = 1000 \text{ W/mK}$ . La frontière "West" de La plaque reçoit un flux constant  $q = 500 \text{ kW/m}^2$  et les frontières "South" et "East" sont isolées. La frontière "North" est maintenue à la température de  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calculons la distribution stationnaire de la température en utilisant le maillage présenté à la figure (IV.5) ( $\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ m}$ ).



FigIV.5 Maillage et conditions aux limites pour le problème de conduction thermique 2D.

IV.1.3.2 Traitement D :

L'équation de conduction thermique stationnaire 2D pour les conditions énoncées est:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \tag{IV-d-1}$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N \tag{IV-d-2}$$

$$a_W = \frac{\lambda A_w}{\Delta x} \quad ; \quad a_E = \frac{\lambda A_e}{\Delta x} \quad ; \quad a_S = \frac{\lambda A_s}{\Delta y} \quad ; \quad a_N = \frac{\lambda A_n}{\Delta y}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$$

Les valeurs des coefficients, des points voisins avec le point P, dans les conditions d'un maillage uniforme, sont :

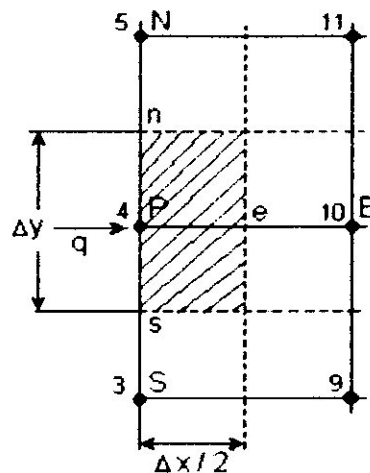
$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{1000 \cdot (0,1 \cdot 0,01)}{0,1} = 10$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds intérieurs (le noeud 8-11, 14-17, 20-23) sont :

$$\begin{aligned}
 40T_8 &= 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9 \\
 40T_9 &= 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} \\
 40T_{10} &= 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} \\
 40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\
 40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\
 40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\
 40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\
 40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\
 40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\
 40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\
 40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\
 40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24}
 \end{aligned}
 \tag{IV-d-3}$$

Pour les noeuds situés sur la frontière "West" (les noeuds 2, 3, 4 et 5) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique sur le demi volume de contrôle présenté à la figure(IV.6)



FigIV.6 Demi -volume de contrôle sur la frontière "W".

$$\int_{1/2V_c} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/2V_c} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0
 \tag{IV-d-4}$$



L'intégration de l'équation (IV.d.4) donne :

$$\left[ \lambda_e A_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] = 0 \quad (\text{IV-d-5})$$

Où  $A_e = A_p = \Delta y$  et  $A_n = A_s = \Delta x/2$ . En remplaçant les gradients de température dans les points e, P, n et s, on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_p q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0$$

Où

$$q = -\lambda_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad \text{est le flux imposé sur la frontière "West".}$$

En regroupant les termes, on obtient l'équation discrétisée pour les noeuds intérieurs de La frontière "West" ainsi :

$$a_p T_P = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \quad (\text{IV-d-6})$$

Où

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \quad ; \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} \quad ; \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$$

$$b = q A_p \quad ; \quad a_p = a_E + a_S + a_N$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0,1 \cdot 0,01)}{0,1} = 10$$

$$a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$b = q A_p = 500000 \cdot (0,1 \cdot 0,01) = 500$$

$$a_p = a_E + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 2, 3, 4 et 5 sont les suivantes :

$$20T_2 = 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500$$

$$20T_3 = 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500 \quad (\text{IV-d-7})$$

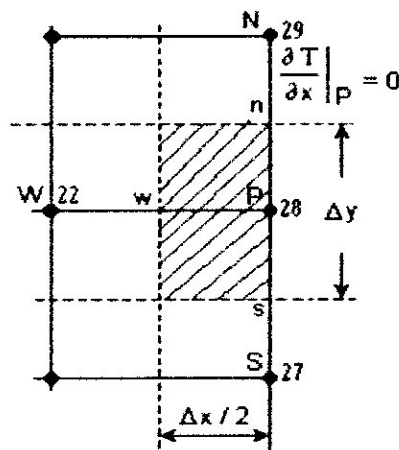
$$20T_4 = 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500$$

$$20T_5 = 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500$$

Pour les noeuds situés sur la frontière "East" (les noeuds 26, 27, 28 et 29) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique sur le demi volume de contrôle présenté à la figure (IV. 7).

$$\int_{1/2\Delta x}^{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/2\Delta y}^{\Delta y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{IV-d-8})$$

$$\left[ \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \lambda_w A_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_s A_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] = 0 \quad (\text{IV-d-9})$$



FigIV.7 Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".

Où  $A_w = \Delta_y \cdot 1$  et  $A_n = A_s = \Delta x / 2 \cdot 1$  En tenant compte que  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$  et en supposant

une variation linéaire du gradient de température, on obtient :

$$-\lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0 \quad (\text{IV-d-10})$$

En regroupant les termes de l'équation (IV-d-10) on obtient l'équation discrétisée pour un noeud intérieur sur la frontière "East" :

$$a_P T_P = a_W T_W = a_S T_S = a_N T_N, \quad (\text{IV-d-11})$$

Où

$$a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} \quad a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x}$$

$$a_P = a_W + a_S + a_N$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0,1 \cdot 0,01)}{0,1} = 10$$

$$a_P = a_W + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 26, 27, 28, et 29 sont les suivantes :

$$20T_{26} = 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27}$$

$$20T_{27} = 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28}$$

$$20T_{28} = 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29}$$

$$20T_{29} = 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30}$$

(IV-d-12)

Pour les noeuds situés sur la frontière "South" (les noeuds 7, 13, et 19) on obtient

L'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (IV-d-1) sur le demi volume de contrôle présenté à la figure (IV-8)

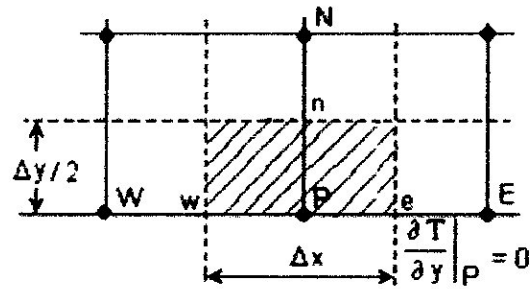


Fig IV.8 Demi volume de contrôle sur la frontière "South".

L'intégration de l'équation (IV-d-1) sur le demi volume de contrôle hachuré de la figure (IV.8)

On donne :

$$\left[ \lambda_e A_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w A_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right] = 0 \quad \text{(IV-d-13)}$$

Où  $A_w = A_e = \Delta y / 2$  et  $A_n = \Delta x$ . En rapprochant les gradients de température par une

Variation linéaire et en tenant compte de la condition à la limite  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p = 0$

on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0 \quad \text{(IV-d-14)}$$

En regroupant les termes dans l'équation (IV-d-14) on obtient finalement la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N, \quad \text{(IV-d-15)}$$

Où

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} \quad ; \quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \quad ; \quad a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x}$$

$$a_P = a_W = a_E = a_N$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0,1}{2} \cdot 0,01\right)}{0,1} = 5$$

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0,1}{2} \cdot 0,01\right)}{0,1} = 5$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot (0,1 \cdot 0,01)}{0,1} = 10$$

$$a_p = a_w = a_E = a_N = 5 + 5 + 10 = 20$$

Les équations discrétisée pour les noeuds 7, 13 et 19 sont :

$$20T7 = 5T1 + 5T13 + 10T8$$

$$20T13 = 5T7 + 5T19 + 10T14$$

(IV-d-16)

$$20T19 = 5T13 + 5T25 + 10T20$$

Les noeuds 1 et 25 sont traités aussi de façon particulière. Ainsi, pour le noeud 1 on intègre l'équation (IV-d-1) sur le volume de contrôle hachuré présenté à la figure (IV.9).

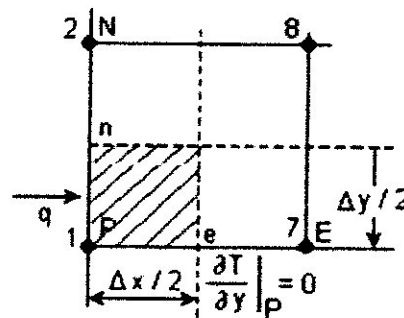


Fig IV.9 Quart de volume de contrôle (le coin W-S).

$$\int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{IV-d-17})$$

$$\left[ \lambda_e A_e \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right] = 0 \quad (\text{IV-d-18})$$

Où  $A_e = A_p = (\Delta y/2) \cdot 1$  et  $A_n = (\Delta x/2) \cdot 1$ . En tenant compte que :  $q = -\lambda_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$  et

$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p = 0$  On obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_p q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0 \quad (\text{IV-d-19})$$

En regroupant les termes, on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud de coin 1 :

$$a_p T_P = a_E T_E + a_N T_N + b, \quad (\text{IV-d-20})$$

$$\text{Où } a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$$

$$a_p = a_E + a_N \quad b = q A_p$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes

:

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_p = a_E + a_N = 5 + 5 = 10 \quad b = q A_p = \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right) \cdot 500 \cdot 10^3 = 250$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$10 T_1 = 5 T_7 + 5 T_2 + 250. \quad (\text{IV-d-21})$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin "E-S") on intègre l'équation (IV.d.1) sur le quart de volume de contrôle hachuré à la figure (IV.10).

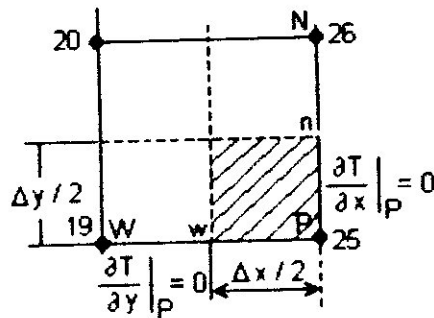


Fig IV.10 Quart de volume de contrôle (le coin E-S).

$$\int_{V_{CV}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_{V_{CV}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (IV-d-22)$$

Après l'intégration on a :

$$\left[ \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \lambda_w A_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \lambda_n A_n \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \lambda_p A_p \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right] = 0 \quad (IV-d-23)$$

Où

$$A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1 \text{ et } A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ En tenant compte que } \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = 0,$$

On obtient :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_n T_n - \lambda_w A_w \frac{T_p - T_w}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_n - T_p}{\Delta y} = 0 \quad (IV-d-24)$$

Finalement on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin) :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_n T_n \quad (IV-d-25)$$

$$a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} \quad a_n = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} \quad a_p = a_w + a_n$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_w = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_n = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left( \frac{0,1}{2} \cdot 0,01 \right)}{0,1} = 5$$

$$a_p = a_w + a_N = 5 + 5 = 10$$

L'équation à résoudre est la suivante :

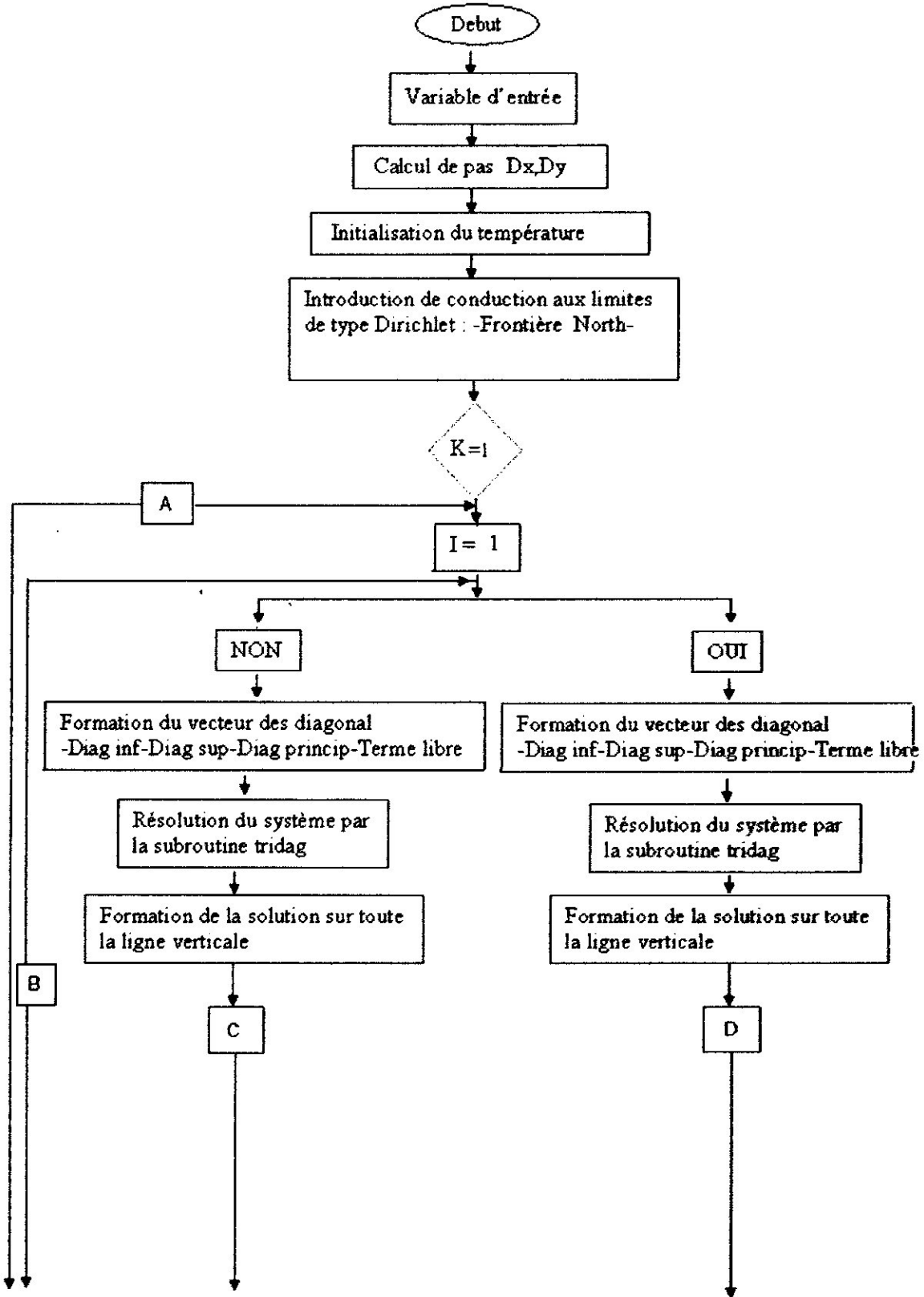
$$10 T_{25} = 5 T_{19} + 5 T_{26} \quad (\text{IV-d-26})$$

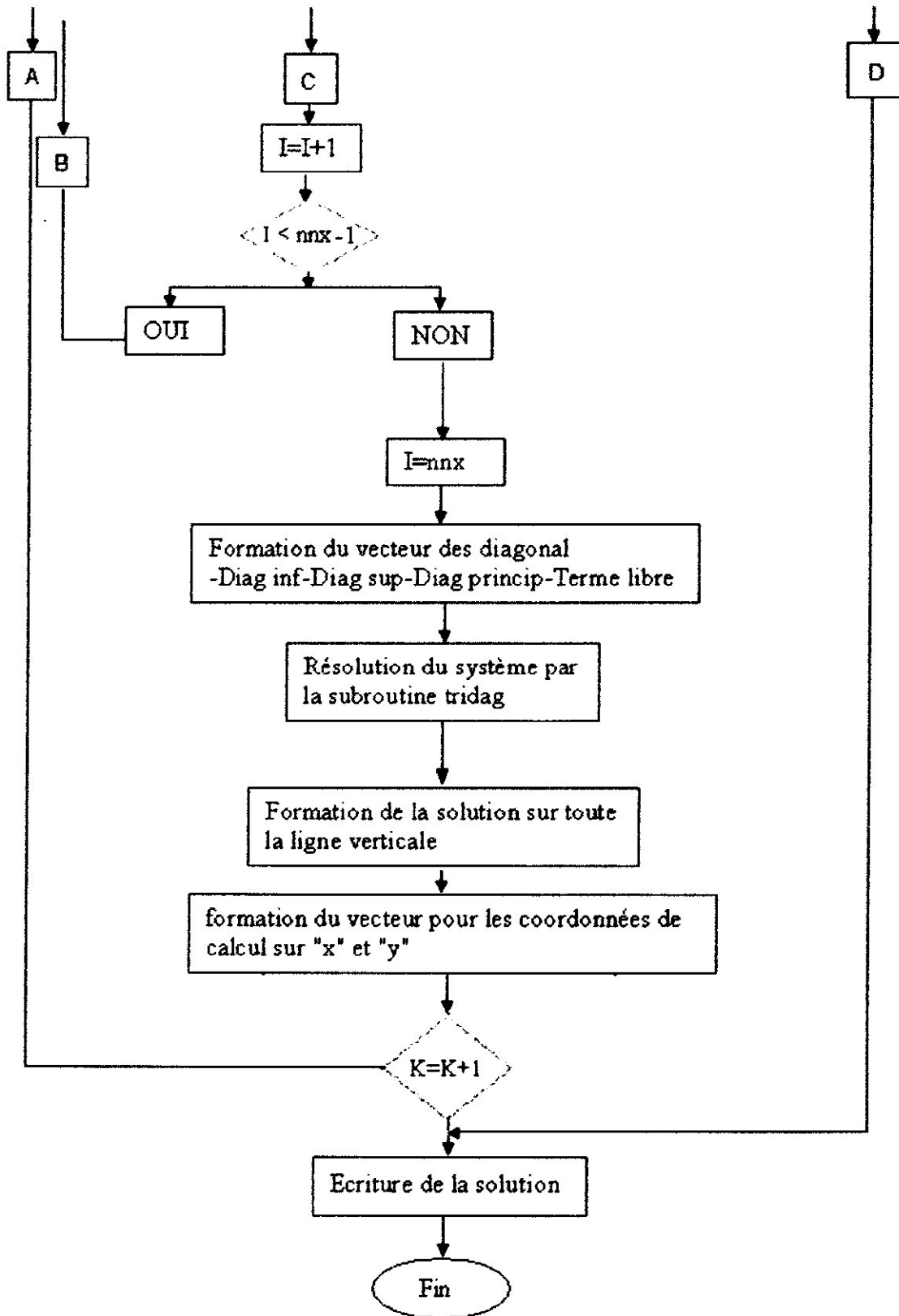
Finalement, le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 5T_7 + 5T_2 + 250 \\ 20T_2 &= 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500 \\ 20T_3 &= 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500 \\ 20T_4 &= 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500 \\ 20T_5 &= 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500 \\ 20T_7 &= 5T_1 + 5T_{13} + 10T_8 \\ 40T_8 &= 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9 \\ 40T_9 &= 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} \\ 40T_{10} &= 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} \\ 40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\ 20T_{13} &= 5T_7 + 5T_{19} + 10T_{14} \\ 40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\ 40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\ 40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\ 40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\ 20T_{19} &= 5T_{13} + 5T_{25} + 10T_{20} \\ 40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\ 40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\ 40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\ 40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24} \\ 10T_{25} &= 5T_{19} + 5T_{26} \\ 20T_{26} &= 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27} \\ 20T_{27} &= 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28} \\ 20T_{28} &= 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29} \\ 20T_{29} &= 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30} \end{aligned} \quad (\text{IV-d-28})$$



IV.1.3.3 L'organigramme de calcul





## IV.1.3.4 Pratique E :

On considère une plaque métallique rectangulaire (0.05 x 0.04 m). La conductivité thermique du matériau de la plaque est  $\lambda = 4 \text{ W/m.K}^{-1}$ . Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à la température de  $0^\circ\text{C}$  et le terme source est  $S = 40 \times 10^6 \text{ W/m}^3$ . Calculons la distribution stationnaire de la température dans la plaque en utilisant le maillage de la figure (IV 11) ( $\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$ ).

## IV.1.3.5 Traitement E :

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (\text{IV-e-1})$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (\text{IV-e-2})$$

$$a_W = \frac{\lambda A_W}{\Delta x} \quad a_E = \frac{\lambda A_E}{\Delta x} \quad a_S = \frac{\lambda A_S}{\Delta y} \quad a_N = \frac{\lambda A_N}{\Delta y}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N \quad b = \bar{S} \Delta x \Delta y$$

Le terme source,  $\bar{S}$  étant constant, ce n'est pas nécessaire d'être linéarisé. Les valeurs des coefficients voisins, pour le maillage choisi, sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{4.0,01.1}{0,01} = 4$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

$$b = \bar{S} \Delta x \Delta y = 40.10^6.0,01.0,01 = 4000$$

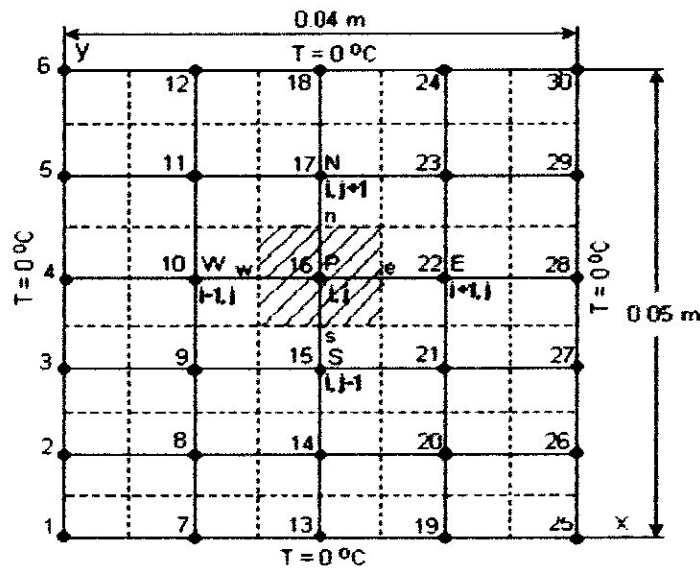


Fig.IV.11 Maillage et conditions aux limites pour l'exemple E

Pour les noeuds de frontière (noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30) la température étant connue ce n'est pas nécessaire d'écrire les équations discrétisées. Alors le nombre d'équations à résoudre est égal à 12, les équations discrétisées sont les suivantes :

$$4T_8 = T_{14} + T_9 + 1000$$

$$4T_9 = T_{15} + T_8 + T_{10} + 1000$$

$$4T_{10} = T_{16} + T_9 + T_{11} + 1000$$

$$4T_{11} = T_{17} + T_{10} + 1000$$

$$4T_{14} = T_8 + T_{20} + T_{15} + 1000$$

$$4T_{15} = T_9 + T_{21} + T_{14} + T_{16} + 1000$$

(IV- e -3)

$$4T_{16} = T_{10} + T_{22} + T_{15} + T_{17} + 1000$$

$$4T_{17} = T_{11} + T_{23} + T_{16} + 1000$$

$$4T_{20} = T_{14} + T_{21} + 1000$$

$$4T_{21} = T_{15} + T_{20} + T_{22} + 1000$$

$$4T_{22} = T_{16} + T_{21} + T_{23} + 1000$$

$$4T_{23} = T_{17} + T_{22} + 1000$$

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_8 \\
 T_9 \\
 T_{10} \\
 T_{11} \\
 T_{14} \\
 T_{15} \\
 T_{16} \\
 T_{17} \\
 T_{20} \\
 T_{21} \\
 T_{22} \\
 T_{23}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000
 \end{bmatrix}$$

IV.1.3.6 La solution analytique

La solution analytique du problème pour un quart du domaine d'analyse (fig. IV.12) est la suivante [4] :

$$T(x,y) = \frac{S(a^2 - x^2)}{2\lambda} - \frac{16a^2}{\pi^3\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \cosh\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{(2n+1)^3 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \quad (V-e-4)$$

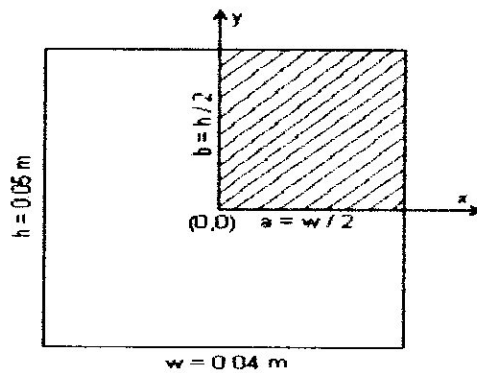
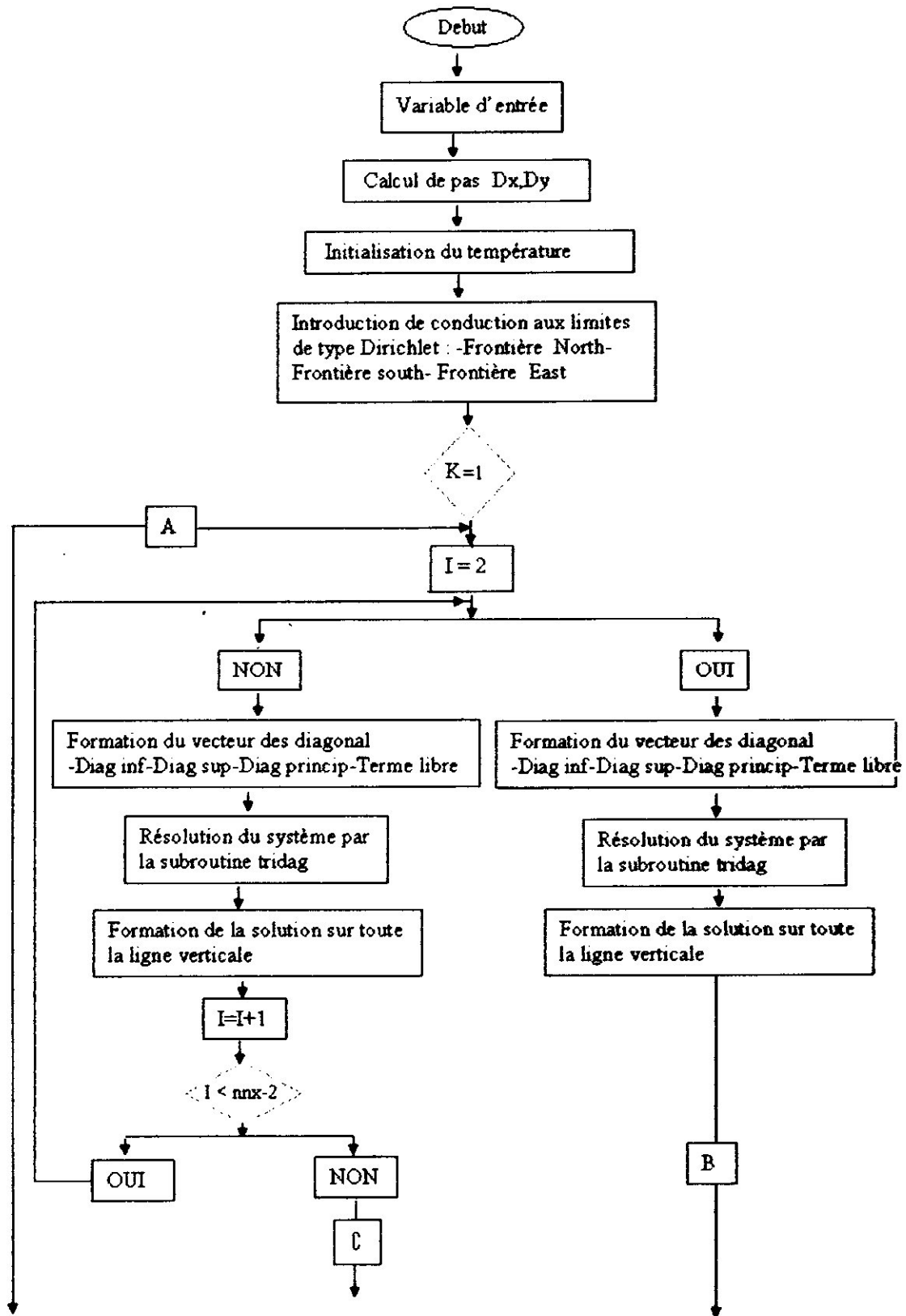
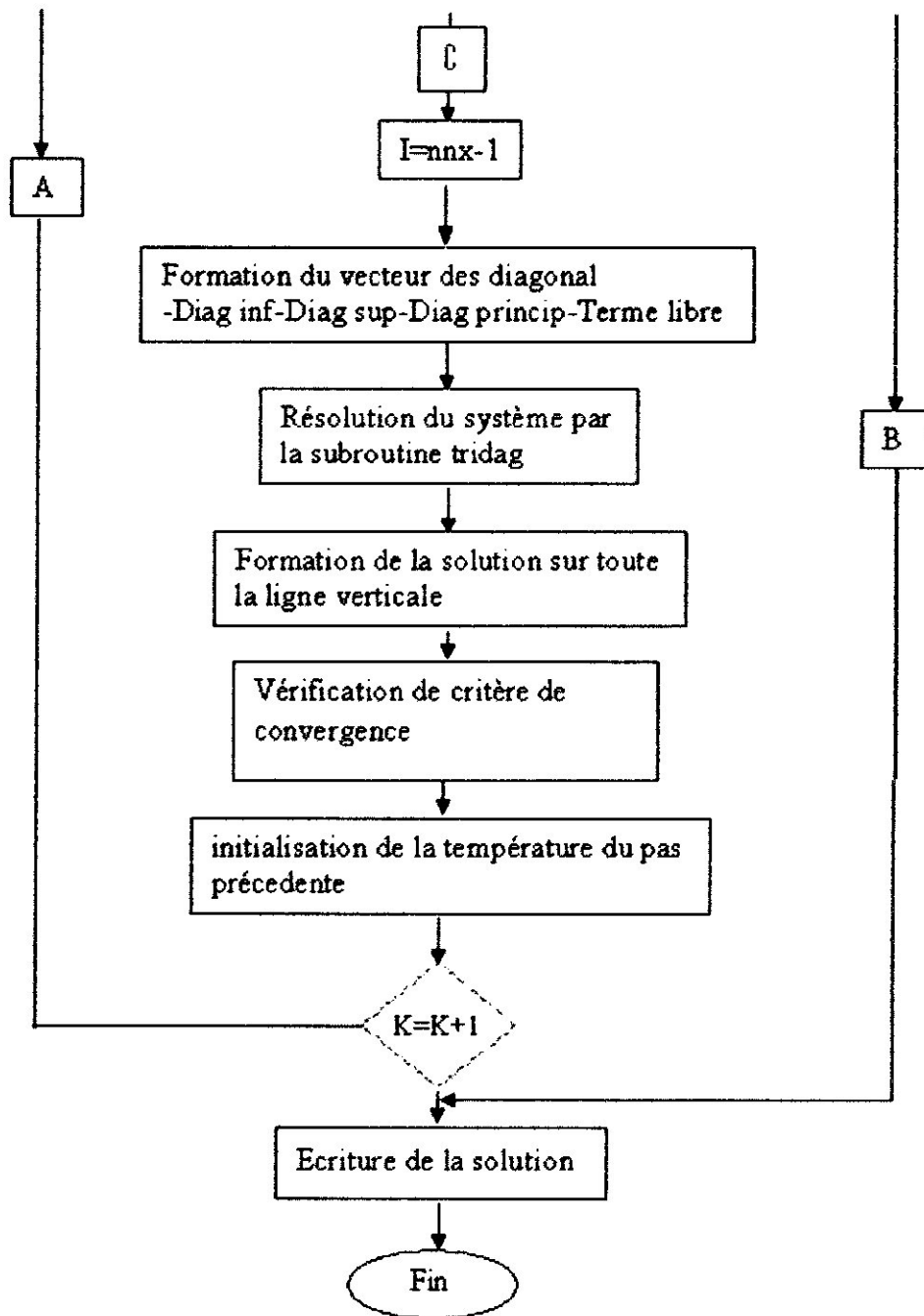


Fig.IV.12 Le domaine de calcul analytique

IV.1.3.7 Organigramme de calcul

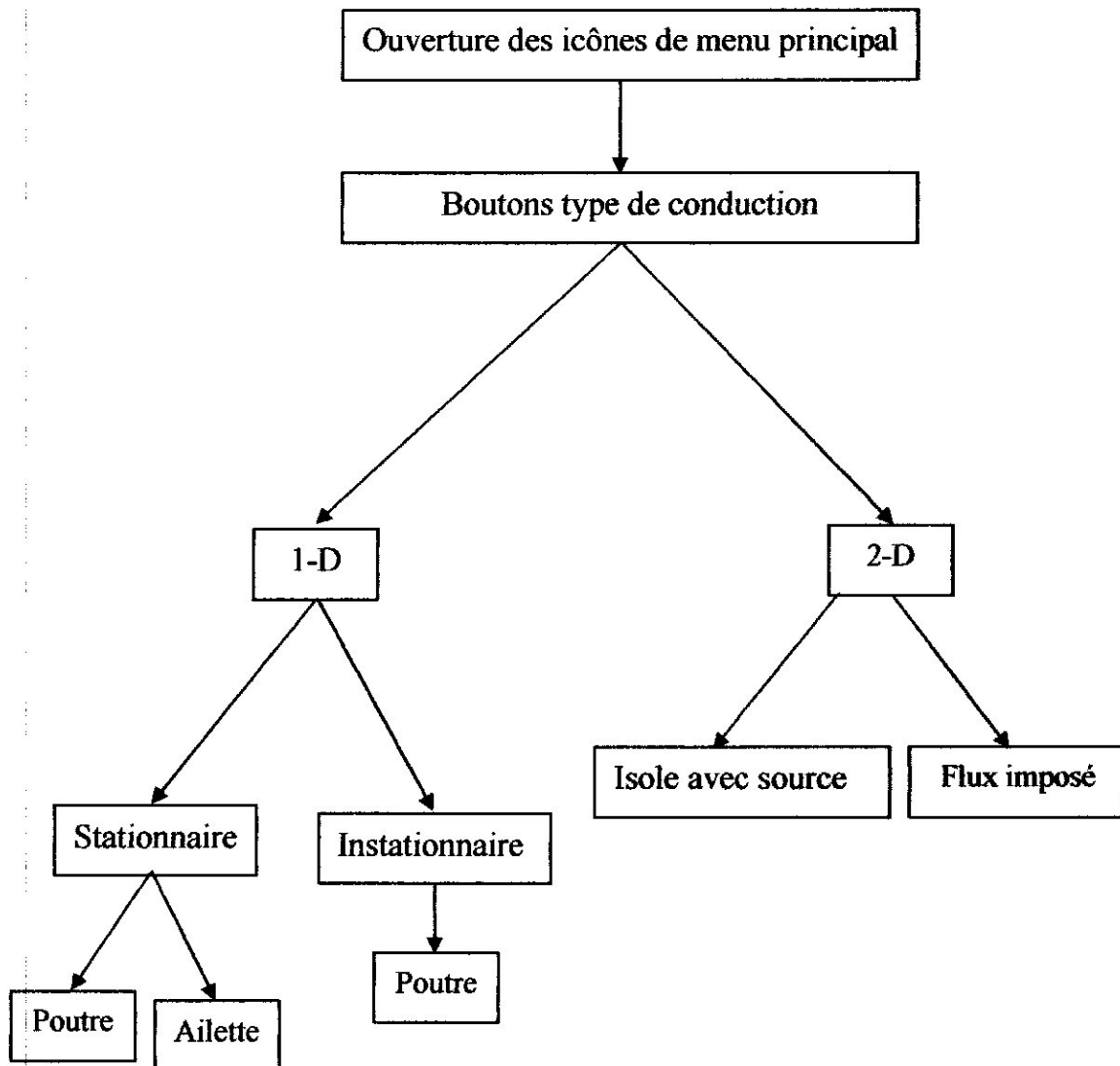




## IV.2 CONCEPTION ET GUIDE D'UTILISATION DE L'INTERFACE

La conception de l'interface s'est faite en plusieurs étapes .ces dernières seront décrite dans ce qui suit.

## IV.2.1 Organigramme de la conception de la page de garde de l'interface





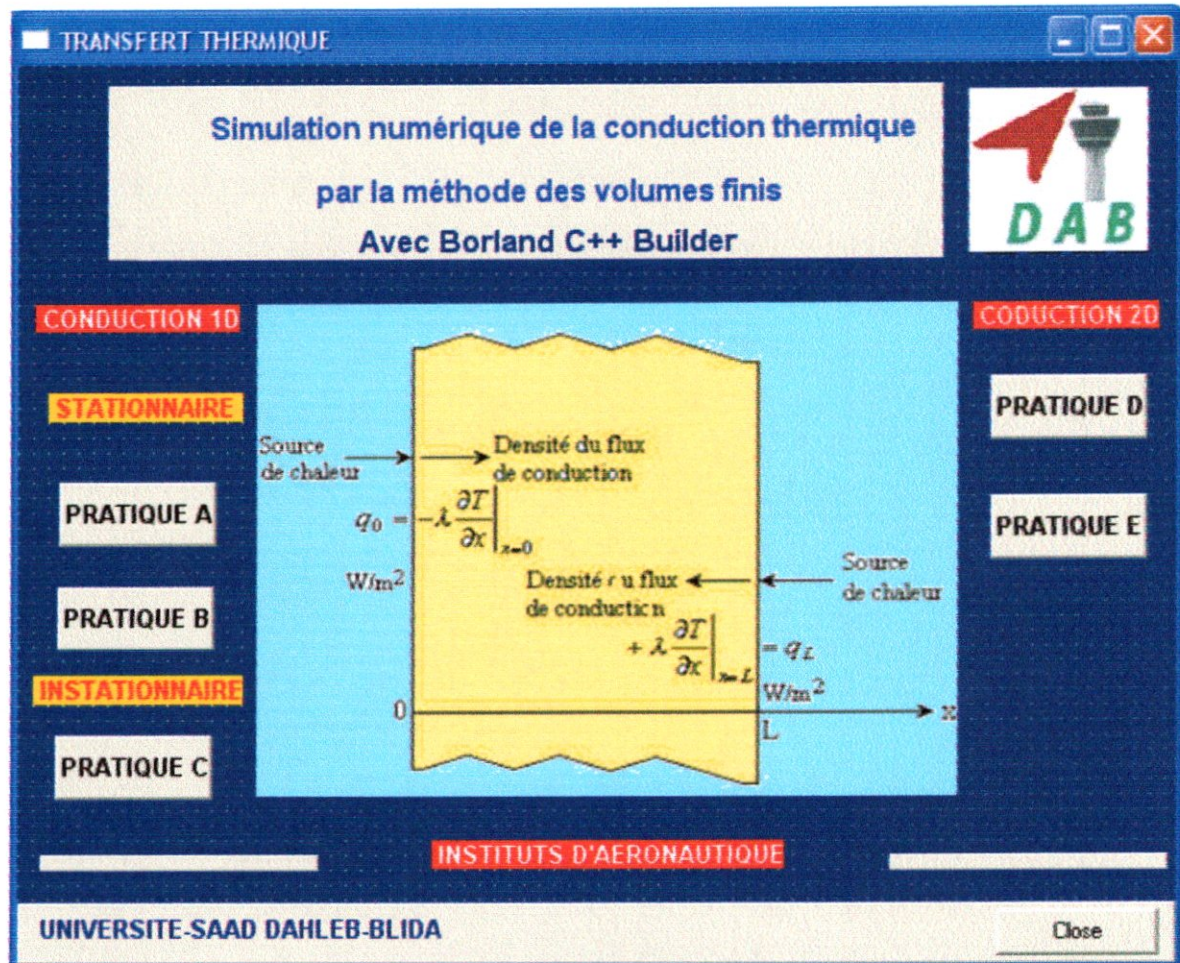
#### IV.2.1.1 Conception de la page d'utilisation de l'interface

- Apprentissage au C<sup>++</sup>
- Ecriture du programme de simulation en C<sup>++</sup>
- conception et construction de l'interface de TP.
  - Ouverture des différentes icônes et différentes commandes.
  - Installation et définition des différents boutons en relation directe avec l'architecture du programme de simulation.
    - ❖ Boutons des paramètres d'entrée.
      - ✓ Boutons des conditions limites.
      - ✓ Boutons de nombre de noeuds.
      - ✓ Boutons terme source.
      - ✓ Boutons conductivité.
    - ❖ Boutons des paramètres de sortie.
      - ✓ Résultat analytique en chaque noeud.
      - ✓ Résultat numérique en chaque noeud.
      - ✓ Résultat erreurs en chaque noeud.
    - ❖ Les outils graphiques.
    - ❖ Boutons d'information sur la méthode analytique et numérique de calcul de la pratique étudiée.

## IV.2.2 Guide utilisation

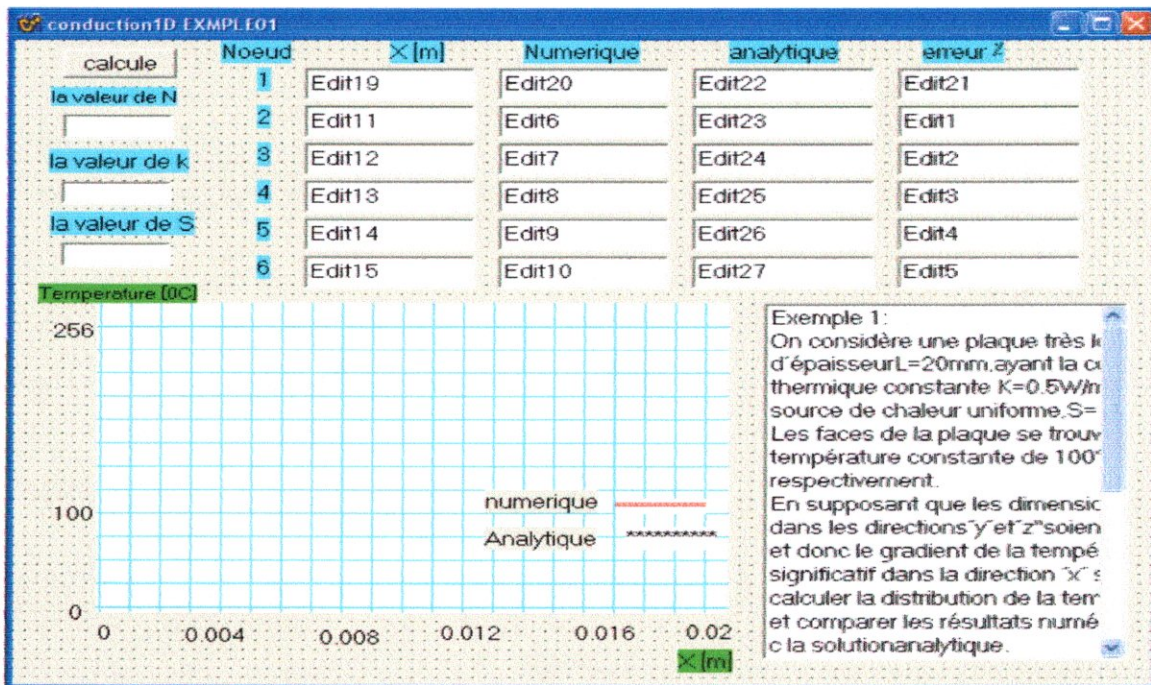
Pour utiliser l'interface il suffit de suivre les étapes suivantes

## 1/ Ouvrir le menu principal



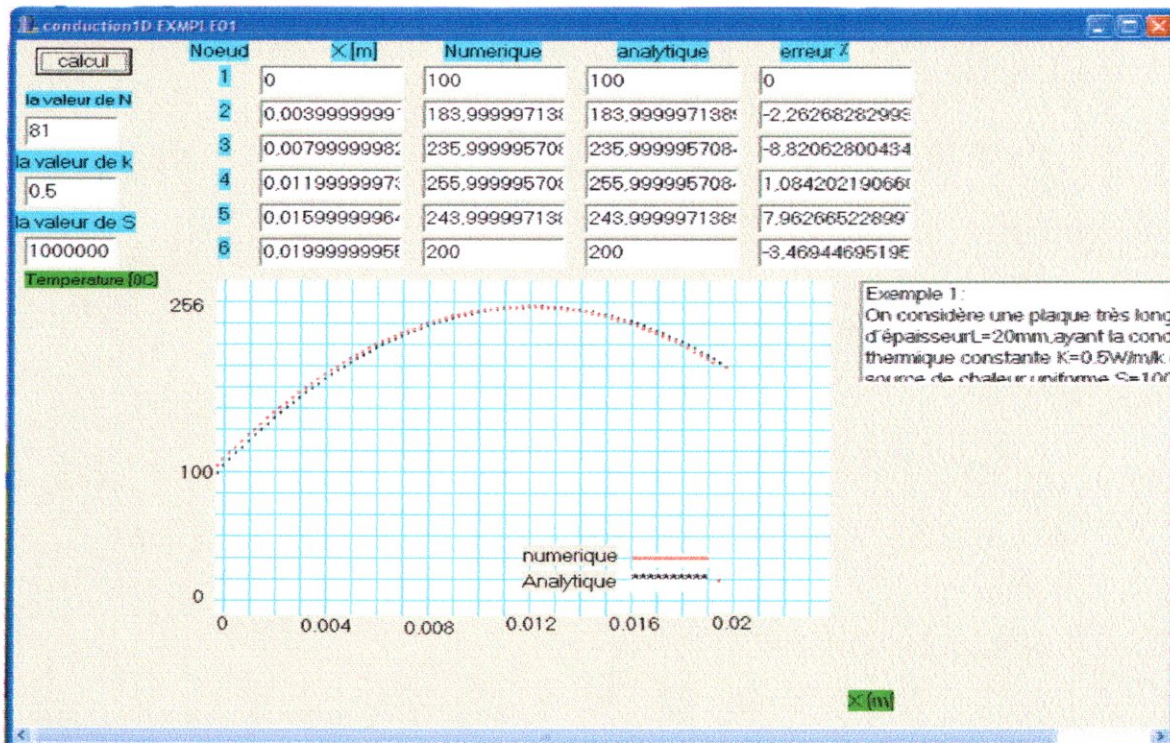
## 2/ Choisir la pratique désirée dans le menu

3/Après ouverture de l'icône, la page suivante va être affichée



3/Ensuite choisir les différents paramètres d'entrée et appuyez sur le bouton calcul.

4/Finalement les résultats afficher sur la même page précédente.



Une fenêtre explicative viendra donner des informations sur la méthode numérique utilisée pour la simulation.

# Chapitre V---

RESULTATS ET COMENTAIRES

Après la simulations des différents cas étudiés, Les résultats obtenus seront valider et commenter.

### V.1 CAS (1-D) STATIONNAIRE

La première partie de notre simulation s'est intéressée à la conduction thermique (1-D) et stationnaire. Plusieurs applications ont été faits.

#### V.1.1 Première cas (pratique A)

On considérera Deux cas :

##### VI.1.1.1 Première partie :

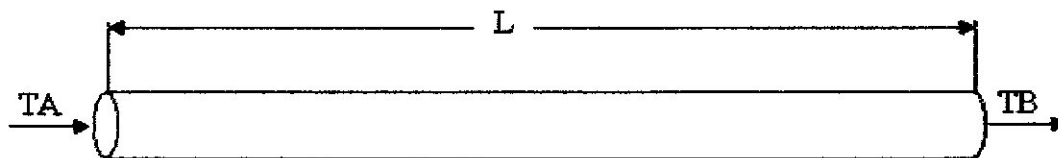


Fig.V.1 Géométrie de l'application A

Les conditions aux limites :

- $T_A = 100^\circ\text{C}$
- $T_B = 200^\circ\text{C}$

Caractéristiques :  $\lambda = 0.5 \text{ W/m K}$

Les résultats obtenus sont représenté dans le tableau (V.1) on constate que la solution analytique et numérique concordent fig (V.2)

N° de noeud	1	2	3	4	5	6
x [m]	0.00	0.004	0.008	0.012	0.016	0.02
Sol Numérique	100	183,913	235,957	255,919	243,929	200
Sol Analytique	100	183,919	235,918	255,927	243,914	200
Erreur %	0	0.3	1,6	0.3	0.6	0

Tableau.V.1 comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

## V.1.1.2 deuxième partie :

Les conditions aux limites :

- $T_A = 100^\circ\text{C}$
- $T_B = 200^\circ\text{C}$

Caractéristiques :

- $\lambda_1 (\text{Al}) = 430 \text{ W/m K}$
- $\lambda_2 (\text{Liège}) = 52 \text{ W/m K}$
- $\lambda_3 (\text{Acier doux}) = 0.05 \text{ W/m K}$

La figure (V.3) indique la répartition de température le long de la barre pour différents  $\lambda$ .

On remarque que l'évolution pour le cas Al est la plus rapide que pour le liège et encore moins pour l'acier doux.

Cela nous permet de classer les matériaux selon leurs coefficients de conductivité thermique.

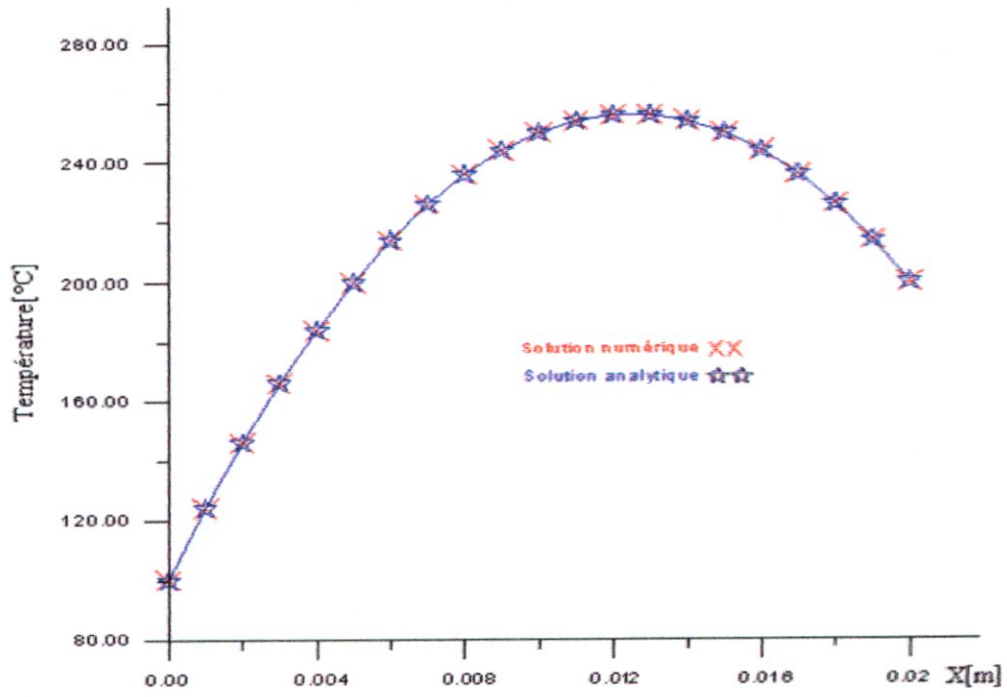


Fig.V.2 comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

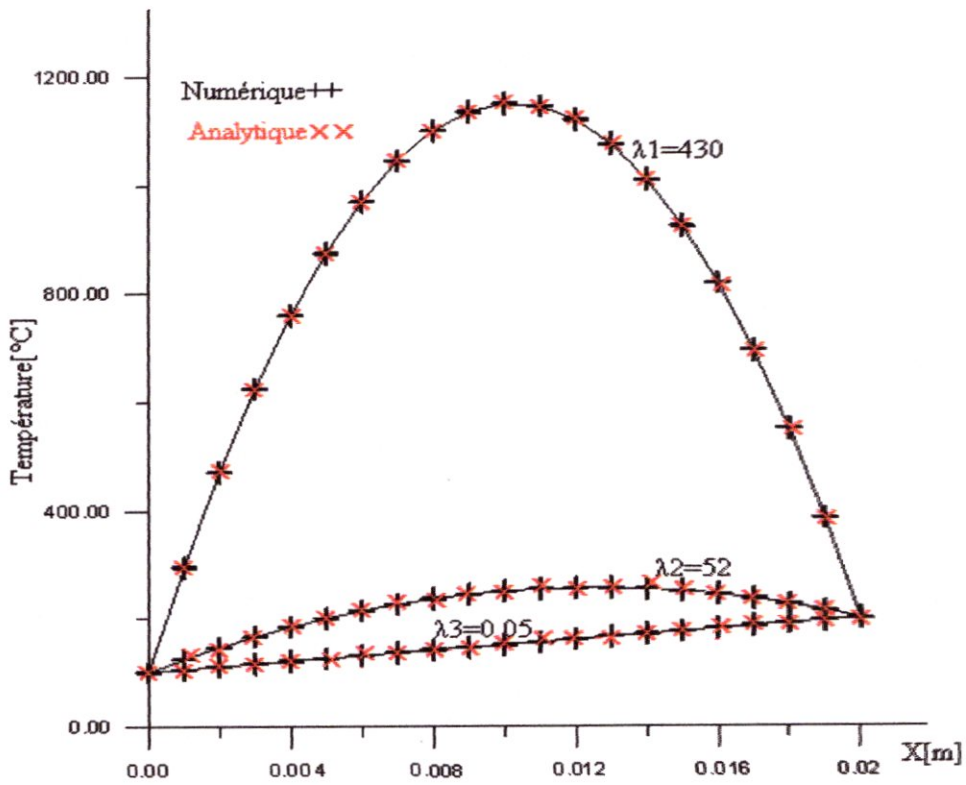


Fig.V.3 comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

### V.1.2 Deuxième cas (pratique B)

Il s'agit du cas d'une ailette :

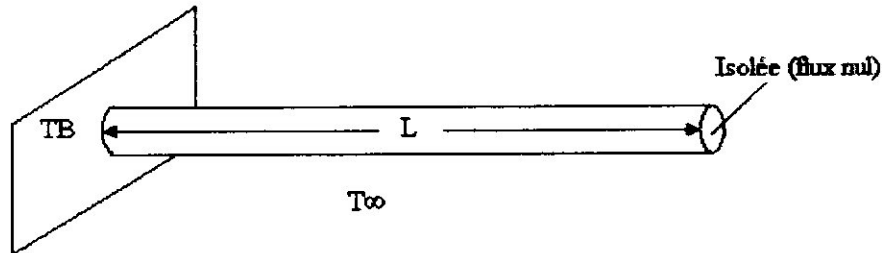


Fig.V.4 Géométrie de l'application B

Les conditions aux limites :

- $T_B = 100^\circ\text{C}$
- $T_\infty = 20^\circ\text{C}$

Caractéristiques :

- $L = 1\text{m}$
- $hp/\lambda A = 25\text{m}^{-2}$

La fig. (V.5) et le tableau (V.2) représente les résultats obtenus par la solution analytique et la solution numérique concordent. Nous remarquons que l'effet de convection prend de l'ampleur par rapport à la conduction.

Noeud	x [m]	Numérique	Analytique	Erreur %
1	0.0	100.0	100.0	0.0
2	0.2	50.569	49.439	2.28
3	0.4	31.707	30.853	2.76
4	0.6	24.553	24.056	2.06
5	0.8	21.951	21.663	1.33
6	1.0	21.301	21.078	1.05

Tableau.V.2 comparaison entre la solution numérique et la solution analytique



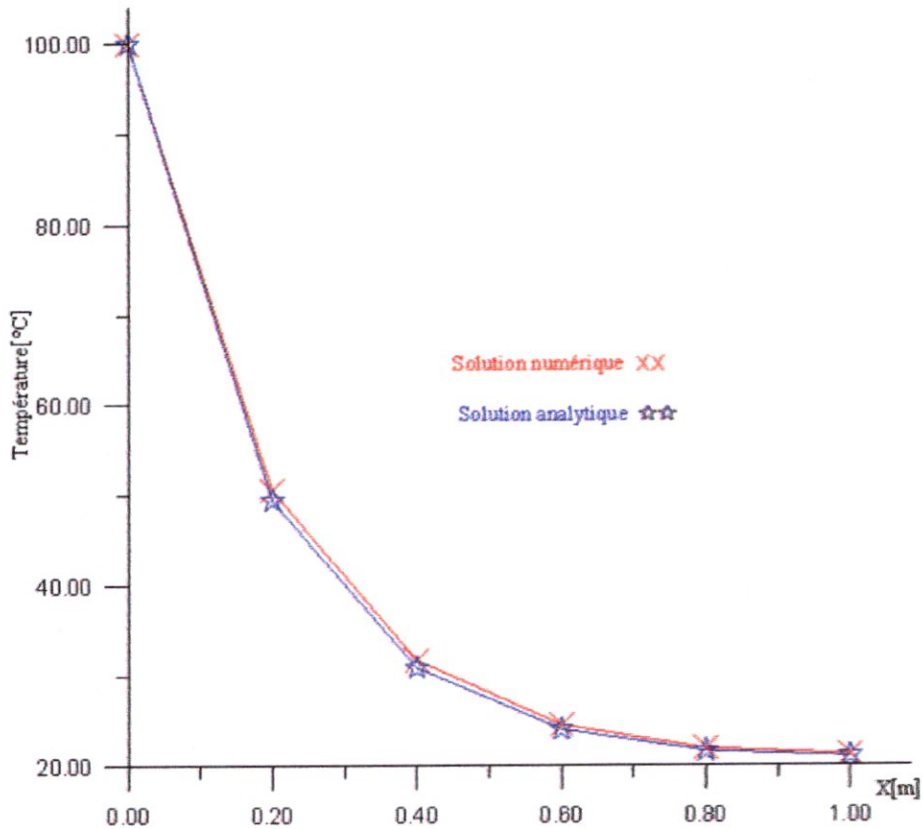


Fig.V.5 comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

## V.2 CAS (1-D) INSTATIONNAIRE

### V.2.1 Cas (pratique C)

On considère le cas d'un plaque mince (1-D) instationnaire le calcul se fera pour différents temps  $t = 40s$  ;  $t = 80s$  et  $t=120s$

Les conditions aux limites :

- $T_A = 200^\circ\text{C}$
- À  $t = 0 \rightarrow T_B = 0^\circ\text{C}$

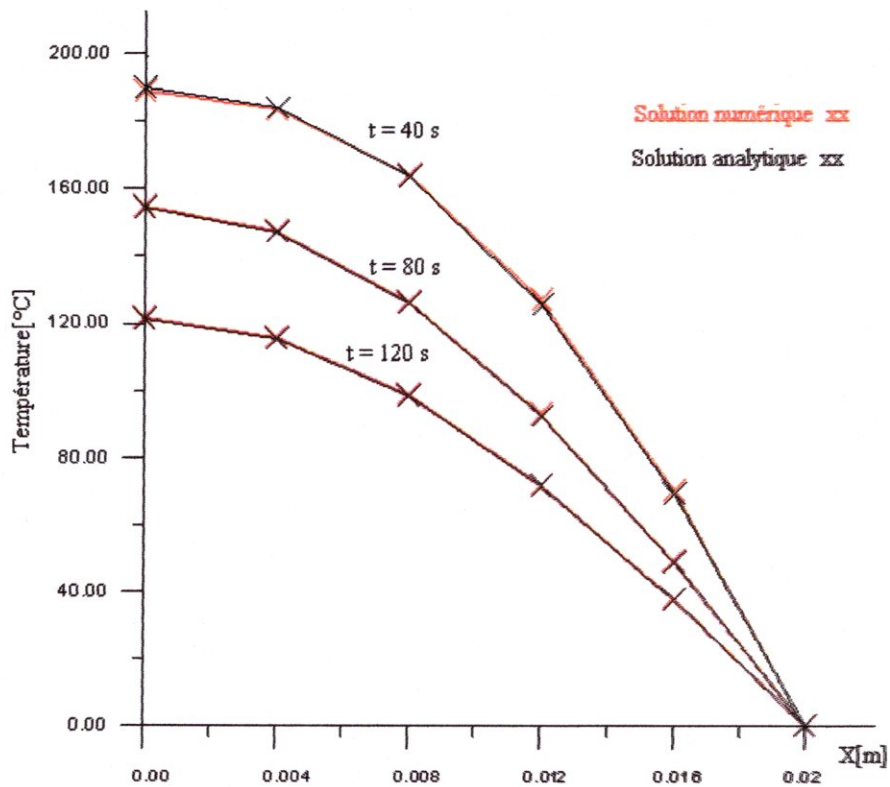
Caractéristiques :  $\rho c p = 10^7 \text{J/m}^3\text{k}$  ;  $L = 2\text{cm}$  ;  $\lambda = 10 \text{W/m.K}$ .

TEMP[S]	Noeud	Numérique	Analytique	Erreur
t = 40 s	1	187.419	189.861	1.28
	2	181.853	183.814	1.06
	3	163.162	163.708	0.33
	4	126.868	125.712	0.91
	5	70.605	69.045	2.25
	6	00.000	00.000	00.000
t = 80 s	1	153.719	154.462	0.48
	2	146.754	147.265	0.34
	3	126.087	126.080	0.005
	4	092.739	092.329	0.44
	5	049.241	048.850	0.8
	6	00.000	00.000	00.000
t = 120 s	1	121.524	121.361	0.13
	2	115.656	115.460	0.16
	3	098.559	098.304	0.25
	4	071.766	071.501	0.37
	5	037.797	037.624	0.45
	6	00.000	00.000	00.000

**Tableau V.3** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

Le tableau (V.3) indique que la précision obtenus entre la solution analytique et numérique pour différents  $\delta x$  temps est satisfaisante.

Le phénomène de conduction est plus rapide fig (V6) dans les première temps t = 40s que par rapport à t = 80s et encore plus à t = 120s (le temps considère est le temps réel).



**Fig.V.6** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique aux différents instants de temps

### V.3 CAS (2-D) STATIONNAIRE :

On considérera Deux cas :

#### V.3.1 Cas pratique E1

Les conditions aux limites :

- Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à  $T = 0^{\circ}\text{C}$

Caractéristiques :

- Métallique rectangulaire (0.04 x 0.05 m)
- $\lambda_1 = 4 \text{ W/m K}$
- $S = 40 \times 10^6 \text{ W/m}^3$

Ce cas étudié est décrit (IV.3.2). On constate, que la solution analytique et la solution numérique concordent Tableaux (V.4) et fig(V.7):

x = 0 y [mm]	T [K] Analytique	T [K] numérique MVF	Erreur [%]
1	1430.000	1428.26	0.12
3	1416.000	1414.27	0.12
5	1388.000	1385.97	0.14
7	1345.000	1342.71	0.17
9	1286.000	1283.49	0.19
11	1209.000	1206.97	0.16
13	1113.000	1111.47	0.14
15	996.558	994.92	0.16
17	856.310	854.90	0.16
19	689.757	688.63	0.16
21	493.798	493.01	0.16
23	265.067	264.66	0.15

**Tableau V.4** comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

### V.3.2 Cas pratique E2

#### V.3.2.1 Première Cas :

Les conditions aux limites

- Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à  $T = 0^{\circ}\text{C}$

Caractéristiques :

- Métallique rectangulaire (0.02 x 0.04 m)
- $\lambda_1 = 430 \text{ W/m K}$
- $S = 40 \times 10^6 \text{ W/m}^3$

. L'évolution de la température démarre du centre de la plaque (source) vers les frontières de la plaque d'une manière uniforme, fig. (V.3.2)

## V.3.2.2 deuxième cas:

Les conditions aux limites :

- Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à  $T = 0^{\circ}\text{C}$

Caractéristiques :

- Métallique rectangulaire (0.02 x 0.04 m)
- $\lambda_2 = 52 \text{ W/m K}$
- $S = 40 \times 10^6 \text{ W/m}^3$

Le profil de la température fig (V.9) est le même dans le cas (E1), sauf que  $\lambda_1 > \lambda_2$  l'écart des isothermes du première cas est  $0.2^{\circ}\text{C}$  tandis que pour  $\lambda_2$  l'écart est de  $20^{\circ}\text{C}$ .

Ce qui conclut que le matériau du première cas est plus conducteur que le second.

## V.3.2.3 troisième cas:

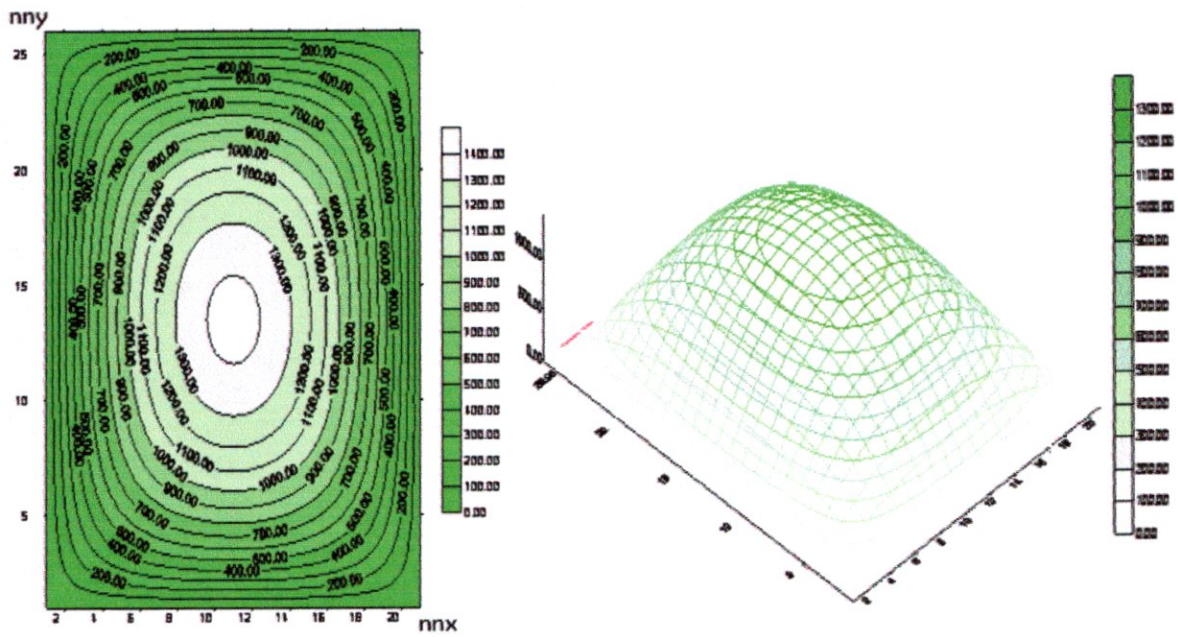
Les conditions aux limites :

- Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à  $T = 0^{\circ}\text{C}$

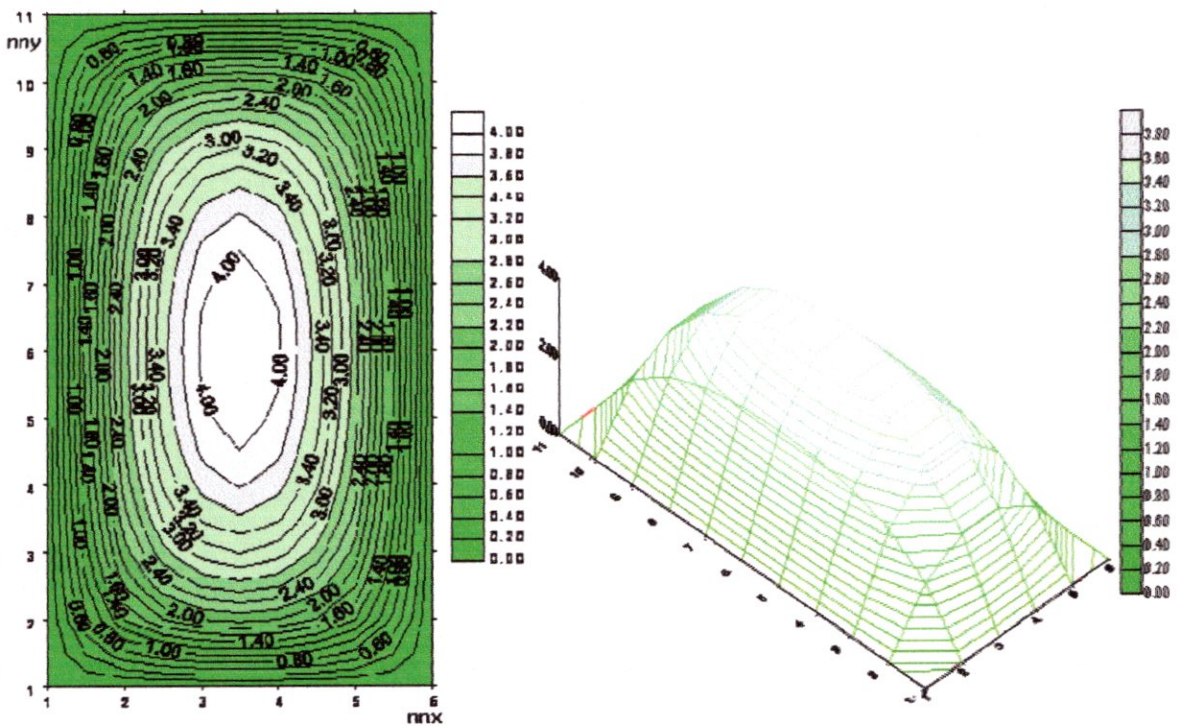
Caractéristiques :

- Métallique rectangulaire (0.02 x 0.04 m)
- $\lambda_3 = 0.05 \text{ W/m K}$
- $S = 40 \times 10^6 \text{ W/m}^3$

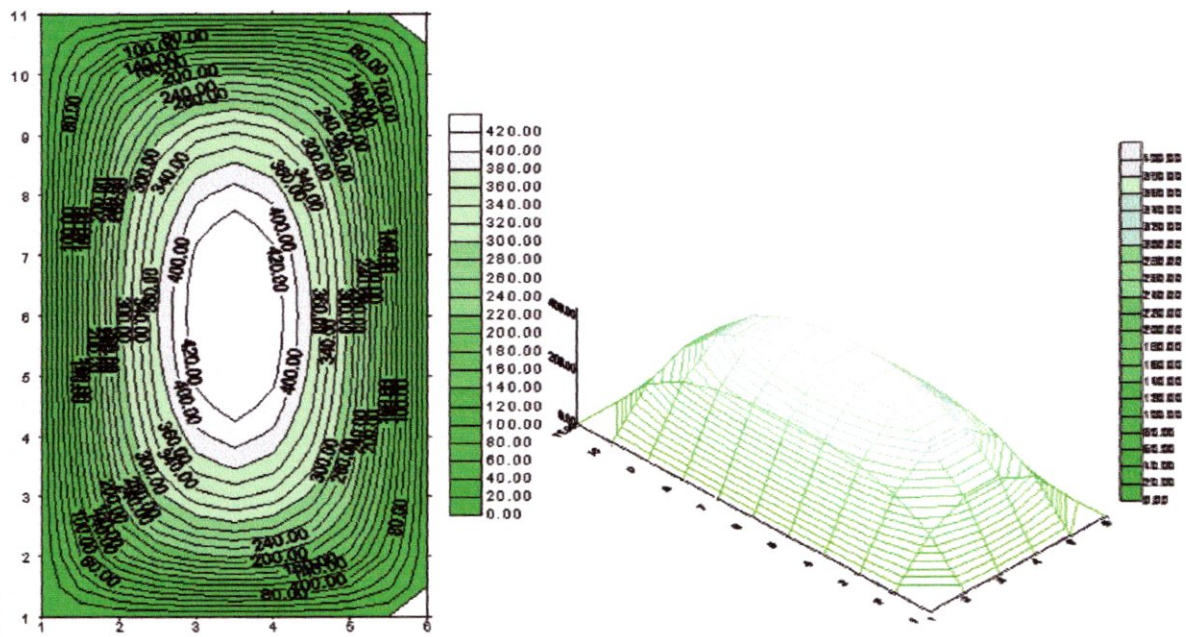
Le profil de la température fig. (V.10) est le même que le cas E1 et E2 , l'écart des isothermes est de  $1000^{\circ}\text{C}$  , ce qui entraîne que le matériau ( $\lambda_3$ ) est un bon isolant.



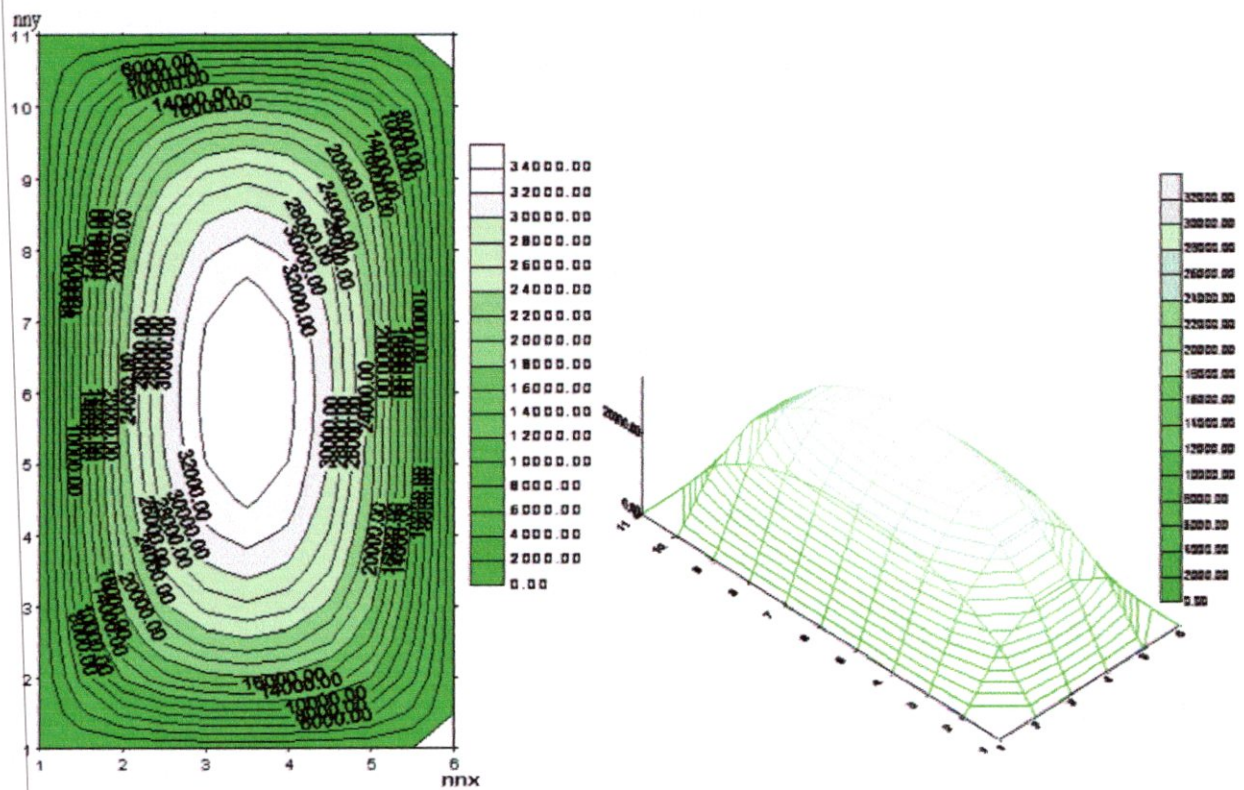
FigV.7 les isothermes de solution numérique pour le pratiqueE



FigV.8 les isothermes de solution numérique pour l'aluminium



FigV.9 les isothermes de solution numérique pour l'acier doux



FigV.10 les isothermes de solution numérique pour le liège

### V.3.3 Deuxième Cas Pratique D

Les conditions aux limites :

- La frontière nord  $T = 100^\circ\text{C}$
- Les frontières sud et l'est sont isolés

Caractéristiques :

- Plaque rectangulaire (0.02 x 0.04 m)
- $e = 0.01\text{m}$
- $q = 500\text{ kW/m}^2$

On remarque que les pentes des isothermes sont plus importantes à la frontière sud par rapport à la frontière nord

L'écart entre les isothermes augmente lorsque  $\lambda$  diminue fig. (V.11) ; fig. (V.12) ; fig. (V.13)

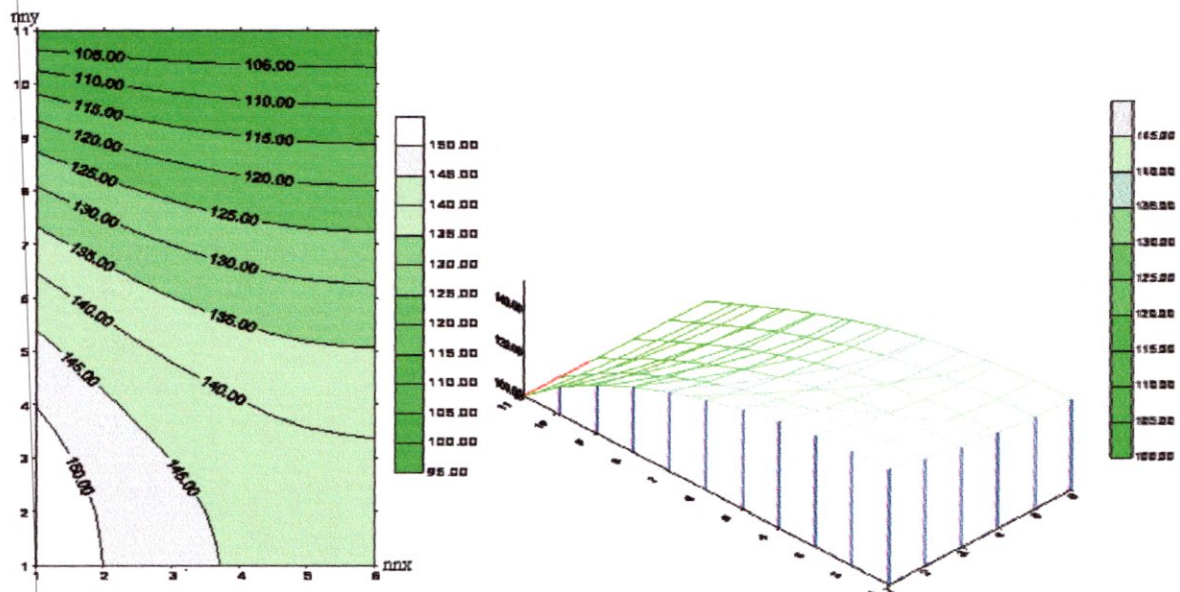
Pour

$$\lambda_1 = 430 \longrightarrow \Delta t = 5^\circ\text{C}$$

$$\lambda_2 = 52 \longrightarrow \Delta t = 50^\circ\text{C}$$

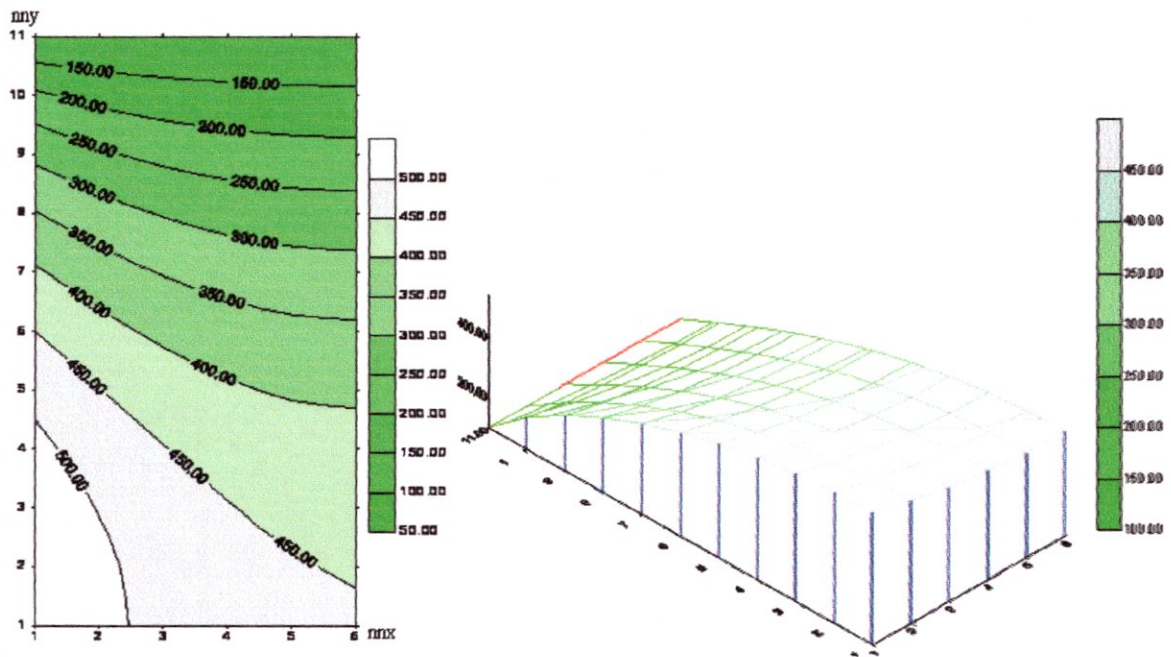
$$\lambda_3 = 0.05 \longrightarrow \Delta t = 50000^\circ\text{C}$$

On peut donc classer les matériaux du plus isolant au plus conducteur.

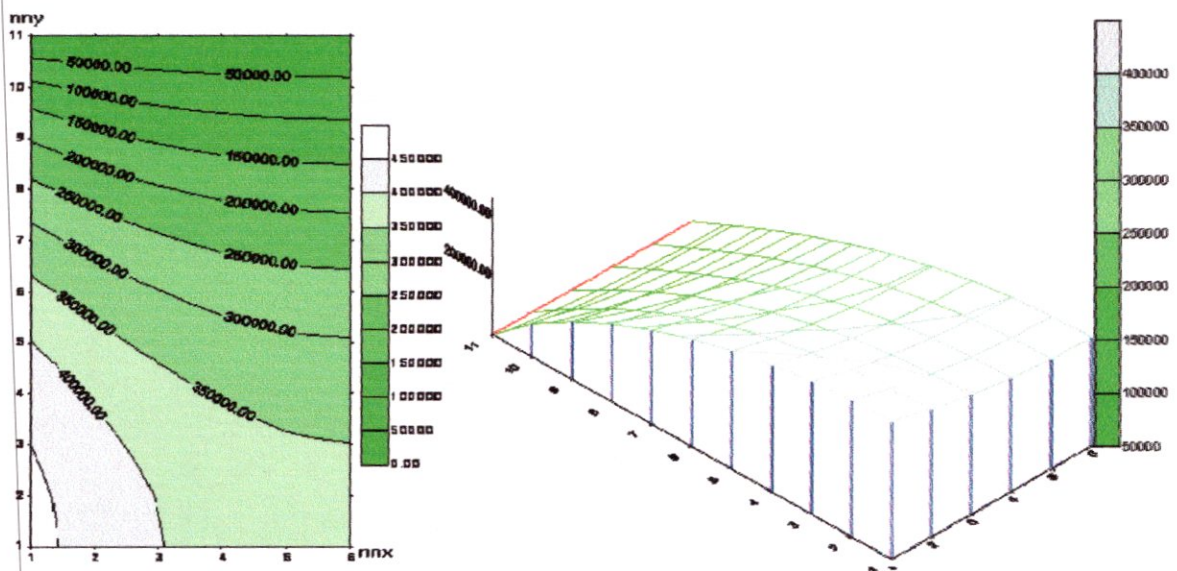


FigV.11 les isothermes de solution numérique pour l'aluminium





FigV.12 les isothermes de solution numérique pour l'acier doux



FigV.13 les isothermes de solution numérique pour le liège

## **Conclusion**

Dans ce présent travail a été élaboré un outil pédagogique multimédia à savoir un TP de transfert de chaleur virtuel pour le cas de la conduction thermique monodimensionnel, bidimensionnelle, stationnaire et instationnaire.

Le travail s'est basé en premier temps sur le multimédia et l'enseignement, suivie par une étude sur les différentes méthodes numérique existante dans l'engineering.

Une simulation numérique du phénomène de la conduction thermique pour différents cas a été réalisée. Une interface est venue clôturer cette étude.

Les résultats des simulations effectuées étaient donc à fait concordants avec les résultats analytique, ce qui confirme la validité des modèles utilisés et des programmes réalisés.

L'interface est bonne qualité vue sa facilité d'utilisation.

En perspective, il serait intéressant de réaliser d'autre TP virtuels utilisant les N.T.I.C pour différentes disciplines et ce pour accompagner la formation des étudiants.

## ANNEXE A

## Algorithme de Thomas ou TDMA (Tri Diagonal Matrix Algorithm)

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système linéaire lorsque la matrice est tri diagonal. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad 1 \leq i \leq N, \quad (\text{a-1})$$

Où le maillage est présenté à la figure.

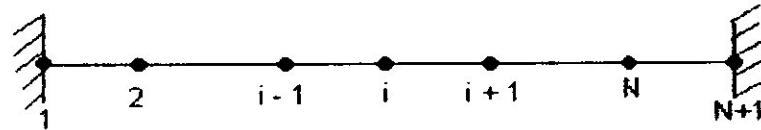


Fig a-1-Application du TDMA dans le cas 1D

La température  $T_i$  est exprimée en fonction des températures voisines  $T_{i-1}$  et  $T_{i+1}$ .

Pour prendre en compte la forme spéciale des équations pour les points de frontière 1 et N il faut que :

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0. \quad (\text{a-2})$$

Si, par exemple, la température  $T_1$  est connue on a  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$  et  $d_1 = T_1$ .

L'équation (a -1) pour  $i = 2$  est une relation entre  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , mais parce que  $T_1$  est exprimée en fonction de  $T_2$  ou est connue, la relation entre  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ , est réduite à une relation entre  $T_2$  et  $T_3$ , c'est-à-dire  $T_2$  peut être exprimée en fonction de  $T_3$ . Le processus de substitution continue jusqu'à quand  $T_N$  est exprimé en fonction de  $T_{N+1}$  qui ne joue aucun rôle ( $b_N = 0$ ), donc on obtient, dans cette étape, la valeur de la  $T_N$ . On commence ensuite le processus inverse où l'on détermine  $T_{N-1}$  en fonction de  $T_N$ ,  $T_{N-2}$  en fonction de  $T_{N-1}$  et ainsi de suite  $T_2$  en fonction de  $T_3$  et  $T_1$  en fonction de  $T_2$ . Dans le processus de substitution en avant les équations sont les suivantes :

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + 0 + d_1 \Rightarrow T_1 = f(T_2) = \frac{b_1}{a_1} T_2 + \frac{d_1}{a_1};$$

$$a_2 T_2 = b_2 T_3 + c_2 T_1 + d_2 \Rightarrow T_2 = f(T_3) \dots \dots$$

$$a_3 T_3 = b_3 T_4 + c_3 T_2 + d_3 \Rightarrow T_3 = f(T_4)$$

---


$$a_{N-1} T_{N-1} = b_{N-1} T_N + c_{N-1} T_{N-2} + d_{N-1} \Rightarrow T_{N-1} = f(T_N) \quad (\text{a-3})$$

$$a_N T_N = 0 + c_N T_{N-1} + d_N \Rightarrow T_N = Q_N$$

Dans cette étape on cherche les relations de type  $T_i = f(T_{i+1})$  sous la forme,

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i, \quad (\text{a-4})$$

Mais on peut écrire également la relation suivante :

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (\text{a-5})$$

En remplaçant l'équation (a-5) dans l'équation (a-1) on obtient :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i. \quad (\text{a-6})$$

En regroupant les termes dans l'équation (a-6) sous la forme générale (a-5) on obtient les coefficients  $P_i$  et  $Q_i$  en fonction des coefficients  $P_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$  :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{a-7})$$

Pour démarrer le processus de récurrence on constate que pour  $i=1$  l'équation (a-1) est déjà sous la forme (a-4) et les valeurs de  $P_1$  et  $Q_1$  sont données par les formules suivantes :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{Et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{a-8})$$

Il est bien de préciser que les relations (a-8) sont obtenues si l'on remplace  $C_1 = 0$  dans les relations (a-7).

À la fin du processus de récurrence on constate que  $b_N = 0$  et donc  $P_N = 0$  et de l'équation (a-4) on obtient :

$$T_N = Q_N. \quad (a-9)$$

À ce point, on est dans la situation de démarrer le processus de substitution en arrière en utilisant la relation (a-4).

#### Résumé de l'algorithme

1. Calculer  $P_1$  et  $Q_1$  en utilisant les relations (a-8).
2. Calculer  $P_i$  et  $Q_i$ , pour  $i = 2, \dots, N$ , avec les relations de récurrence (a-7).
3. Poser  $T_N = Q_N$ .
4. Utiliser l'équation  $T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$  de  $i = N - 1$  à 1 pour obtenir  $T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_1$ .