

N° d'ordre :



Département de mathématiques

Mémoire de projet de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : DERNOUNI El Mahdi

Thème

**Contribution à l'étude du problème
 $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires**

Soutenu publiquement le //, devant le jury composé de :

M ^r M. Chellali	Professeur	Université de Blida 1	Président
M ^{me} N. Meddah	M.C.A	Université de Blida 1	Examinatrice
M ^{me} S. Kerdjoudj	M.C.A	Université de Blida 1	Encadreur

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents, pour tout leur amour, leurs sacrifices et leur soutien inconditionnel. Ils ont été ma source de motivation et le fondement de ma réussite académique.

À ma sœur Khadidja et son mari, mes deux frères Oussama et Abdeldjalil ainsi que leurs femmes, pour leurs soutien moral et encouragements.

À toute ma famille, mes amis(es) et mes camarades de l'Université SAAD DAHLAB de Blida1, ainsi qu'à toute la promotion de 2023.

DERNOUNI El Mahdi

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Allah pour m'avoir accordé la capacité d'écrire et de réfléchir, la force de croire en moi et la patience d'aller jusqu'au bout de mon rêve.

Je tiens à remercier vivement ma promotrice, Madame Samia KERDJOUJ, pour son précieux encadrement et son soutien tout au long de la réalisation de mon mémoire. Madame, votre expertise, vos conseils, votre gentillesse, votre patience et votre engagement ont été une aide précieuse pour mener à bien ce projet.

Je souhaite également exprimer ma gratitude à :

Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université SAAD DAHLAB de Blida 1, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury et d'examiner ce mémoire.

Madame Nacéra MEDDAH, MCA à l'Université SAAD DAHLAB de Blida 1, d'avoir accepté d'être membre du jury.

Aux enseignants du département des mathématiques, je vous remercie pour votre soutien tout au long de mon parcours académique.

DERNOUNI El Mahdi

Contribution à l'étude du problème $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires

Résumé : Un k - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage d'un graphe $G = (V, E)$ est une application f de l'ensemble des sommets V vers l'ensemble des entiers $\{0, 1, \dots, k\}$ telle que pour tout $x, y \in V$, $|f(x) - f(y)| \geq 4 - d(x, y)$, où $d(x, y)$ représente la distance entre les sommets x et y , et $1 \leq d(x, y) \leq 3$. Le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G , noté $\lambda_{3,2,1}(G)$, est le plus petit nombre k tel que G ait un k - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage. Dans [34], Lui et Shao ont montré que le $\lambda_{3,2,1}(G)$ de tout graphe planaire G de degré maximum Δ est au plus égal à $15(\Delta^2 - \Delta + 1)$. Dans ce travail, nous améliorons ce résultat pour les graphes planaires de degré maximum au moins 12, les graphes planaires extérieurs et les graphes Halin cubiques. De plus, nous étudions le $\lambda_{3,2,1}(G)$ de tout graphe G ayant un degré moyen maximum borné par $\frac{9}{4}$.

Mots-clé : Graphe planaire - $L(p, q)$ -étiquetage - Nombre d'étiquetage - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage.

Contribution to the study of the $L(3, 2, 1)$ -labeling problem of planar graphs

Abstract : An $L(3, 2, 1)$ -labeling of a graph $G = (V, E)$ is an assignment f from the vertex set V into the set of integers $\{0, 1, \dots, k\}$ such that $|f(x) - f(y)| \geq 4 - d(x, y)$, where $d(x, y)$ represents the distance between the vertices x and y , and $1 \leq d(x, y) \leq 3$. The $L(3, 2, 1)$ -labeling number of G , denoted by $\lambda_{3,2,1}(G)$, is the smallest number k such that G has a k - $L(3, 2, 1)$ -labeling. In [34], Lui et Shao showed that the $\lambda_{3,2,1}(G)$ of every planar G with maximum degree Δ is at most $15(\Delta^2 - \Delta + 1)$. In this work, we improve this result for planar graphs with maximum degree at least 12, outerplanar graphs, and Halin cubic graphs. Moreover, we study $\lambda_{3,2,1}(G)$ for every graph G with a maximum average degree at most $\frac{9}{4}$.

Keywords : Planar graph- $L(p, q)$ -labeling - labeling number - $L(3, 2, 1)$ -labeling.

المساهمة في دراسة مشكلة بطاقة $L(3,2,1)$ للرسوم البيانية المستوية.

ملخص:

البطاقة- $L(3, 2, 1)$ لرسم البياني $G=(V,E)$ هي تطبيق f من مجموعة الرؤوس الفرعية V الى مجموعة الاعداد الصحيحة الطبيعية $\{0,1,\dots,k\}$ بحيث $|f(x)-f(y)|\geq 4-d(x,y)$ ، $d(x,y)$ يمثل المسافة بين الرؤوس x و y ، حيث $1 \leq d(x,y) \leq 3$. عدد البطاقات $L(3,2,1)$ للبيان G المعبر عنه بواسطة $\lambda_{3,2,1}$ ، هو أصغر عدد k بحيث يحتوي G على $L(3, 2, 1)$ -بطاقة. في [34]، . اظهرا Shao وlui ان قيمة $\lambda_{3,2,1}$ لاي رسم بياني مستوي G ذو درجة قصوى Δ لا تتجاوز $(\Delta^2 - \Delta + 1) \cdot 15$. هذا في العمل، نقوم بتحسين هذه النتيجة للرسوم البيانية المستوية ذات درجة قصوى مساوية او أكبر من 12، وللرسوم البيانية المستوية الخارجية، و للرسوم Halin البيانية الثلاثية. بالإضافة، ندرس قيمة $\lambda_{3,2,1}$ لاي رسم بياني الذي يحتوي على درجة متوسطة قصوى محدودة ب $\frac{9}{4}$.

الكلمات المفتاحية: رسم بياني مستوي - البطاقة $L(p,q)$ - عدد البطاقات - البطاقة- $L(3,2,1)$.

Table des matières

Introduction	1
1 Éléments de la théorie des graphes	3
1.1 Définition et notations	3
1.1.1 Graphe non orientés	3
1.1.2 Graphe simple	4
1.1.3 Voisinage	4
1.1.4 Sous-graphe, sous-graphe partiel et sous-graphe induit	4
1.1.5 Degré	5
1.2 Chaînes, cycles et connexité	6
1.2.1 Chaîne	6
1.2.2 Cycle	7
1.2.3 Connexité et k -connexité	7
1.2.4 Distance et diamètre	7
1.3 Opérations sur les graphes	8
1.3.1 Contraction d'une arête	8
1.3.2 Subdivision d'une arête	8
1.3.3 Complémentaire d'un graphe	8
1.3.4 Graphe représentatif des arêtes	9
1.3.5 Carré d'un graphe	9
1.4 Quelques classes de graphes	10
1.4.1 Graphes complets et graphes réguliers	10
1.4.2 Graphes bipartis et graphes bipartis complets	10
1.4.3 Arbres et forêts	11
1.4.4 Graphes planaires	11
1.4.5 Graphes planaires extérieurs	12
1.4.6 Roues et graphes de Halin	13
1.5 Quelques invariants de graphes	13
1.5.1 Nombre de stabilité	13

1.5.2	Nombre de transversalité	13
1.5.3	Nombre de clique	14
1.5.4	Nombre de domination	14
2	$L(p, q)$-étiquetage dans les graphes	15
2.1	Nombre $L(p, q)$ -étiquetage	15
2.1.1	Exemple d'application	16
2.1.2	Complexité du problème $L(p, q)$ -étiquetage	16
2.2	Principaux résultats	17
2.2.1	Bornes supérieures	17
2.2.2	Bornes inférieures	17
2.2.3	Chaines et cycles	18
2.2.4	Arbres	18
2.2.5	Graphes planaires	18
2.2.6	Graphes planaires extérieurs	19
2.2.7	Graphes de Halin	19
2.3	Lien entre le $L(p, q)$ -étiquetage et la coloration dans les graphes	19
2.3.1	Coloration propre	20
2.3.2	Coloration injective	20
2.3.3	Coloration a distance deux	21
2.4	Conclusion	22
3	$L(3, 2, 1)$-étiquetage dans les graphes	24
3.1	Nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage	24
3.2	Résultats fondamentaux	25
3.3	$L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires	27
3.4	$L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires extérieurs	31
3.5	$L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes de degré moyen maximum borné	33
3.6	$L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes de Halin cubiques	35
3.7	Conclusion	37
	Conclusion et perspectives	38
	Bibliographie	39

Table des figures

1	Chapitre 1	3
1.1	Exemples de graphes non orientés	4
1.2	Exemples de sous-graphes	5
1.3	La chaîne P_5	6
1.4	Le Cycle C_7	7
1.5	Contraction de l'arête uv	8
1.6	Subdivision de l'arête uv	8
1.7	Le graphe C_5 et sont complémentaire $\overline{C_5}$	9
1.8	Graphe représentatif des arêtes.	9
1.9	Carré d'un graphe	9
1.10	Exemple d'un graphe complet et d'un graphe 3-régulier.	10
1.11	Exemples de graphe biparti, graphe biparti complet et l'étoile.	11
1.12	Exemple d'arbre T	11
1.13	Graphe planaires et graphe non planaire	12
1.14	Exemples de graphe planaire, planaire extérieur et planaire extérieur maximal.	12
1.15	Exemples de Graphes de Halin	13
2	Chapitre 2	15
2.1	$L(4, 2)$ -étiquetage de G	16
2.2	$\lambda_{1,0}(G) = \chi(G)$	20
2.3	$\lambda_{0,1}(G) = \chi_{inj}(G)$	21
2.4	$\lambda_{1,1}(G) = \chi_2(G)$	22
3	Chapitre 3	24
3.1	$\lambda_{3,2,1}(C_6) = 7$	25
3.2	Le contre exemple G contient un 1-sommet v	28
3.3	Le contre exemple G contient un 2-sommet.	29

TABLE DES FIGURES

3.4	Le contre exemple G contient un 3–sommet v et un 11–sommet v_1	30
3.5	Configurations inévitables dans un graphe planaire extérieur.	31
3.6	Configurations inévitables dans un graphe planaire extérieur 2-connexe . . .	33
3.7	Autour de la fin de la plus longue chaîne dans T	36
3.8	Le cas où $u = y_3$	36
3.9	Le cas où $uy_3 \in E(T)$	37

Introduction

La recherche opérationnelle est une discipline qui vise à résoudre des problèmes complexes en utilisant des méthodes scientifiques. Elle trouve ses origines pendant la seconde guerre mondiale, lorsque des scientifiques et des mathématiciens ont été mobilisés pour aider à résoudre des problèmes stratégiques et tactiques liés aux opérations militaires. Depuis lors, la recherche opérationnelle s'est étendue à de nombreux domaines, tels que la logistique, la gestion de la production, la planification des transports et la prise de décision [40, 45].

La théorie des graphes, quant à elle, est une branche des mathématiques discrètes qui étudie les relations entre les objets, représentés sous forme de graphes. Son développement remonte au XVIII^e siècle, avec les travaux de Leonard Euler [24] sur le problème des 7 ponts de Königsberg. Euler a réussi à résoudre ce problème en utilisant des graphes, marquant ainsi le début de la théorie des graphes en tant que discipline mathématique.

Au fil du temps, la théorie des graphes s'est développée de manière significative, avec des contributions importantes de nombreux mathématiciens et chercheurs. Des concepts fondamentaux tels que la domination, la coloration ou encore l'étiquetage dans les graphes ont été étudiés en détail. De plus, divers résultats et théorèmes ont été établis on peut citer à titre d'exemple le célèbre théorème des quatre couleurs.

L'étude des problèmes d'étiquetage dans les graphes a émergé comme un domaine de recherche important qui généralise la notion d'attribution d'étiquettes ou de valeurs spécifiques aux éléments d'un graphe, selon des règles définies. Ces problèmes varient en fonction des contraintes imposées, comme la différence minimale requise entre les étiquettes adjacentes ou la distance entre elles. Les problèmes d'étiquetage trouvent des applications pratiques dans des domaines tels que la planification de réseaux et l'ordonnancement des tâches.

Dans ce mémoire, notre attention se concentre sur un problème spécifique lié à l'étiquetage des graphes, à savoir le $L(3, 2, 1)$ -étiquetage. Ce type d'étiquetage consiste à attribuer des étiquettes aux sommets d'un graphe, de telle manière que les étiquettes adjacentes dif-

diffèrent par au moins 3, les étiquettes à distance deux diffèrent par au moins 2 et les étiquettes à distance trois diffèrent par au moins 1. Ce problème a suscité un intérêt croissant dans la littérature scientifique en raison de ses applications potentielles dans divers domaines, tels que la conception des réseaux de communication et la planification des fréquences.

Après une introduction, ce mémoire s'articule autour de 3 chapitres qui sont organisés comme suit :

– **Chapitre 1 : Élément de la théorie des graphes.**

Dans ce premier chapitre, nous présenterons les définitions et terminologies de la théorie des graphes, afin d'établir une base solide pour la compréhension de ce mémoire.

– **Chapitre 2 : $L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes.**

Dans ce deuxième chapitre, nous exposerons un état de l'art sur le problème $L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes. Nous commencerons par définir le $L(p, q)$ -étiquetage et discuterons du problème décision qui lui est associé. Ensuite, nous illustrerons ce concept à l'aide d'un exemple concret. Nous passerons en revue les principaux résultats existants dans la littérature concernant $L(p, q)$ -étiquetage de quelques classes de graphes. Enfin, nous établirons un lien entre le problème du $L(p, q)$ -étiquetage et les problèmes de colorations des graphes.

– **Chapitre 3 : $L(3, 2, 1)$ -étiquetage dans les graphes.**

Le troisième chapitre se concentrera à notre contribution sur l'étude du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage. Nous explorerons le nombre de $L(3, 2, 1)$ -étiquetages pour différents types de graphes, tels que les graphes planaires, les graphes planaires extérieurs, les graphes Halin cubiques et les graphes de degré moyen borné.

Ce mémoire se conclut par une synthèse des travaux réalisés ainsi que quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

Éléments de la théorie des graphes

La théorie des graphes possède son propre vocabulaire spécifique, tout comme d'autres domaines d'étude. Dans ce chapitre, nous explorons quelques définitions et concepts fondamentaux de la théorie des graphes, ainsi que certaines classes de graphes. Ces notions sont standards et peuvent être retrouvées dans des ouvrages de référence tels que [4, 5, 7].

1.1 Définition et notations

1.1.1 Graphe non orientés

Un graphe non orienté $G = (V(G), E(G))$ est constitué d'un ensemble non vide fini de sommets, noté $V(G)$ et un d'ensemble fini d'arêtes, noté $E(G)$, qui sont des paires non-ordonnées de sommets. Dans la suite, on utilisera V et E au lieu de $V(G)$ et $E(G)$ pour simplifier.

- L'ordre d'un graphe G , noté $n = |V|$, désigne le nombre de sommets de G .
- La taille d'un graphe G , noté $m = |E|$, représente le nombre d'arêtes de G .
- Lorsqu'une arête $e = uv$ est présentée dans G , on dit que les sommets u et v sont *voisins* ou *adjacents* et que l'arête e est *incidente* aux sommets u et v . Deux arêtes e et f sont dites *adjacentes* (ou *voisines*) si elles partagent une extrémité.
- Une arête uv de G est *une boucle* si $u = v$. Autrement dit, les deux extrémités de l'arête sont identiques.
- Un ensemble d'arêtes ayant les mêmes extrémités est appelée une *arête multiple*.

Exemple :

- Le graphe $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ représenté dans la Figure 1.1(a) est un graphe non orienté. Il est composé de l'ensemble de sommets $V(G_1) = \{a, b, c, d\}$ et de l'ensemble d'arêtes

$E(G_1) = \{ab, bc, ca, bd\}$. Ce graphe est d'ordre $n = |V(G_1)| = 4$ et de taille $m = |E(G_1)| = 4$. Les sommets b et d sont les extrémités de l'arête bd . Le graphe G_1 ne contient ni boucles ni arêtes multiples.

- Le graphe $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ illustré dans la Figure 1.1(b) est un graphe non orienté. Il contient une boucle en v et une arête multiple uw (il s'agit ici d'une arête double).

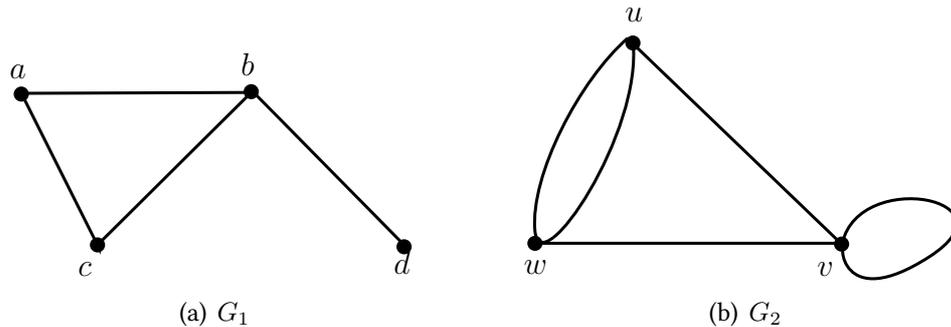


FIGURE 1.1 – Exemples de graphes non orientés

1.1.2 Graphe simple

Un graphe $G = (V, E)$ est considéré comme simple s'il ne contient ni boucle ni arête multiple. Il est qualifié de fini lorsque l'ensemble V est fini. Le graphe représenté dans la Figure 1.1(a) ne possède ni boucle ni arête multiple, ce qui en fait un graphe simple.

Tous les graphes considérés dans la suite de ce mémoire sont simples et finis.

1.1.3 Voisinage

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le voisinage ouvert d'un sommet $v \in V$ est l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et son voisinage fermé dans G est l'ensemble $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Pour le graphe G_1 de la Figure 1.1(a), le voisinage du sommet $N_{G_1}(a) = \{b, c\}$ et son voisinage fermé est $N_{G_1}[a] = \{a, b, c\}$.

1.1.4 Sous-graphe, sous-graphe partiel et sous-graphe induit

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe.

- Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un sous-graphe de G (on note alors $H \subseteq G$) lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, et toutes les extrémités des arêtes de H se trouvent dans $V(H)$. (Voir Figure 1.2(b)).

- Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un sous-graphe partiel de G lorsque $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. (Voir Figure 1.2(c))
- Étant donné $S \subseteq V(G)$. Le graphe $G' = (S, E(G'))$ où $E(G')$ est l'ensemble des arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S est appelé un sous graphe induit par S , on le note par $G[S]$. Le graphe représenté dans la Figure 1.2(e) est le sous-graphe induit par les sommets $G[z, y, x, w]$.
- Le sous graphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets v et u (respectivement, les arêtes yx et wx) est noté $G - \{v, u\}$ (respectivement, $G - \{yx, wx\}$). (Voir Figure 1.2(d) et Figure 1.2(e)).

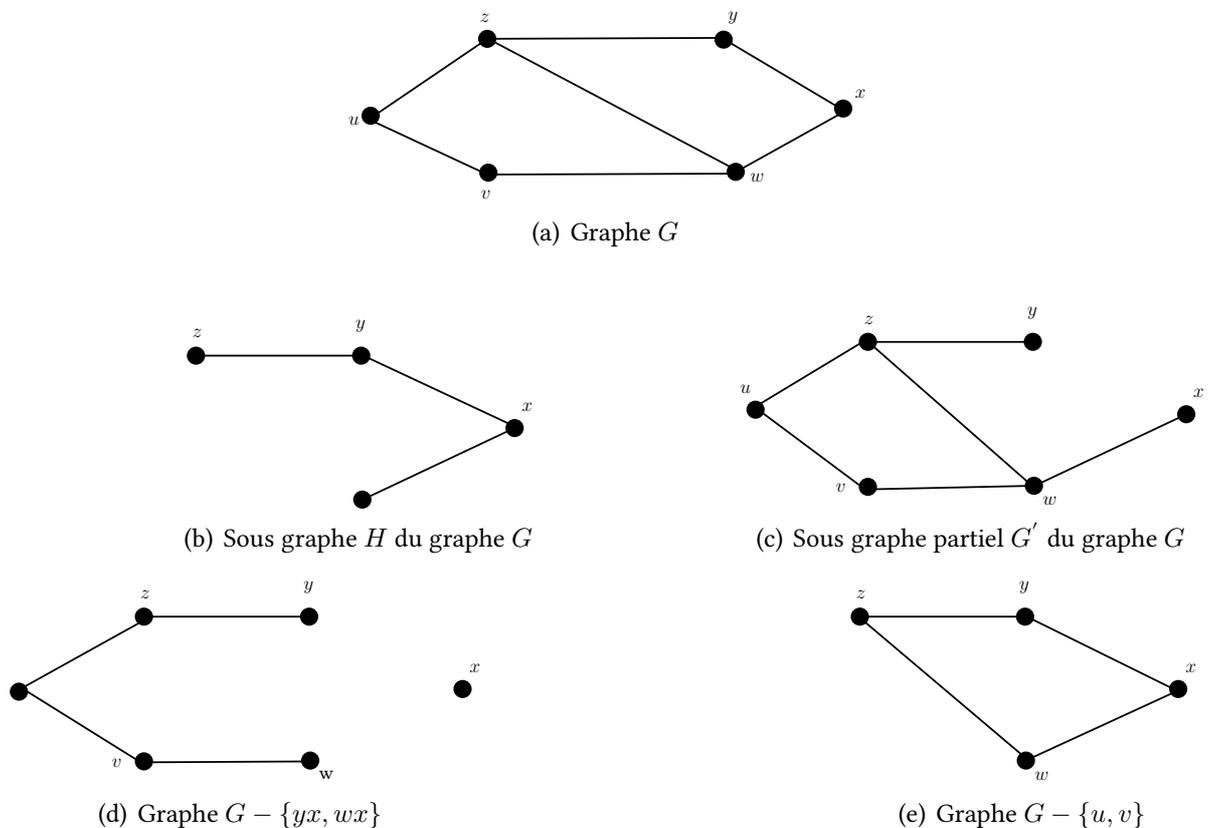


FIGURE 1.2 – Exemples de sous-graphes

1.1.5 Degré

Dans un graphe $G = (V, E)$, le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$ ou simplement $d(v)$, est le nombre de sommets voisins de v , c'est-à-dire, $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Lemme 1.1 (Lemme des poignées de mains, [24]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

- Un sommet de degré 0 est dit *isolé*
- Un sommet de degré 1 est appelé *feuille* ou *sommet pendant*.
- Un sommet de degré k (respectivement, au plus k , au moins k) est appelé un k -sommet (respectivement, un k^- -sommet, un k^+ -sommet).
- Le *degré maximum* de G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G . Autrement dit, $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V\}$.
- Le *degré minimum* de G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G . Autrement dit, $\delta(G) = \min\{d(v), v \in V\}$.
- Le degré moyen d'un graphe G , noté $Ad(G)$, est la moyenne des degrés de tous les sommets de G . Autrement dit,

$$Ad(G) = \frac{\sum_{v \in V} d_G(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$$

- Le *degré moyen maximum* d'un graphe G , noté $mad(G)$, est le maximum parmi les degrés moyens de tous les sous graphes H de G . Autrement dit

$$mad(G) = \max\{Ad(H), H \subseteq G\}$$

Exemple : Dans le graphe G représenté dans la Figure 1.2(a), on a : $d(u) = d(v) = d(y) = d(x) = 2$, $d(w) = d(z) = 3$, $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 2$ et $Ad(G) = \frac{14}{6}$.

1.2 Chaînes, cycles et connexité

1.2.1 Chaîne

Une *chaîne* P_n dans un graphe G est une séquence (v_1, v_2, \dots, v_n) de sommets telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. La *longueur* d'une chaîne P_n est le nombre d'arêtes qui la compose (dans la Figure 1.3 on représente la chaîne P_5 de longueur 5). Les sommets v_1 et v_n sont les extrémités de P_n et v_1, \dots, v_n sont ses sommets internes.

Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet et dite *chaîne élémentaire*.



FIGURE 1.3 – La chaîne P_5

1.2.2 Cycle

Un cycle C_n dans un graphe G est une chaîne élémentaire (u_1, u_2, \dots, u_n) où les extrémités se confondent ($u_1 = u_n$). Dans la Figure 1.4 un cycle de longueur 7 est représenté.

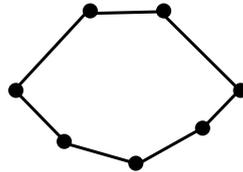


FIGURE 1.4 – Le Cycle C_7

Une arête reliant deux sommets non adjacents sur un cycle est appelée *corde*. La *maille* d'un graphe G , noté $g(G)$, est la plus petite longueur d'un cycle contenue dans G . Par convention la maille d'un graphe sans cycle est infinie.

1.2.3 Connexité et k -connexité

- Un graphe G est dit connexe si, pour chaque paire de sommets u et v dans G , il existe une chaîne reliant u à v .
- Si un graphe G est non connexe, alors une *composante connexe* de G ; est un sous graphe maximal connexe.
- Un *ensemble d'articulation* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $S \subset V$ tel que $G - S$ n'est plus connexe. On note $\kappa(G)$ la taille minimale d'un ensemble d'articulation d'un graphe G :

$$\kappa(G) = \min\{|S| : S \subset V \text{ tel que } G - S \text{ n'est pas connexe ou réduit à un sommet}\}$$

- Un graphe G est dit k -connexe si $\kappa(G) \geq k$. Par exemple, si $n \geq 3$ alors $\kappa(C_n) = 2$. D'où le cycle d'ordre n est un graphe 2-connexe. Si G n'est pas connexe, alors $\kappa(G) = 0$.

1.2.4 Distance et diamètre

- La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v)$ ou simplement $d(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v . Si aucune chaîne ne relie u à v , on pose par convention $d_G(u, v) = \infty$.
- Le *diamètre* d'un graphe G , noté $diam(G)$, est la plus grande distance possible entre deux sommets quelconques de G . Formellement, $diam(G) = \max_{x, y \in V} \{d(x, y)\}$.

1.3 Opérations sur les graphes

1.3.1 Contraction d'une arête

Soit $e = uv$ une arête d'un graphe G . La *contraction* de uv est l'opération qui consiste à supprimer l'arête uv et à remplacer les sommets u et v par un unique sommet w puis à relier ce dernier à l'ensemble des voisins de u et v . On note ce graphe G/uv .

Dans le Figure 1.5, on représente un graphe G et le graphe G/uv obtenu à partir de G en contractant l'arête uv .

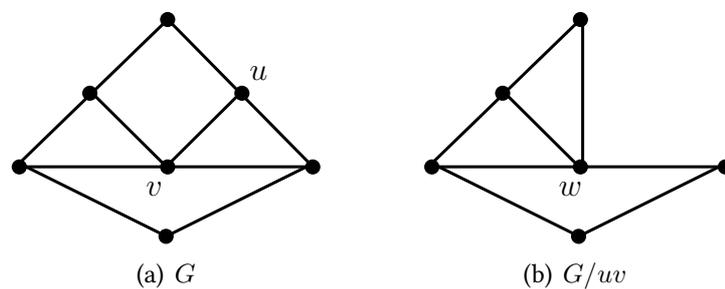


FIGURE 1.5 – Contraction de l'arête uv

1.3.2 Subdivision d'une arête

Subdiviser une arête uv dans un graphe G revient à remplacer cette arête par un sommet w et deux arêtes uw et wv .

Dans le Figure 1.6, on représente un graphe G et le graphe H obtenu à partir de G en subdivisant l'arête uv .

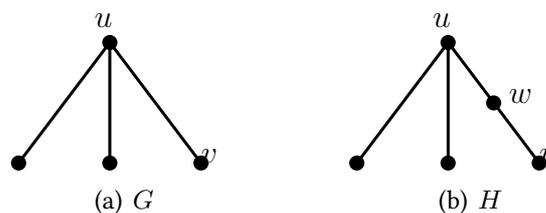


FIGURE 1.6 – Subdivision de l'arête uv .

1.3.3 Complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire d'un graphe simple $G = (V, E)$, noté $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, est le graphe défini comme suit : $V = \overline{V}$ et une arête appartient à \overline{E} si elle n'appartient pas à E .

Dans la Figure 1.7 on représente le cycle d'ordre 5 et son graphe complémentaire.

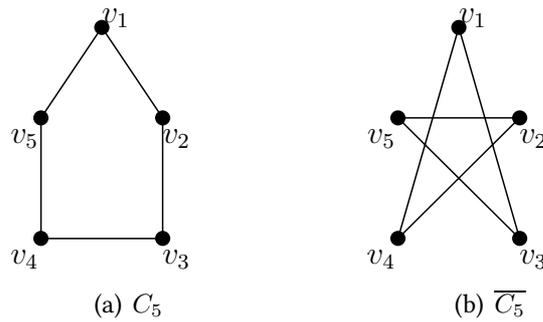


FIGURE 1.7 – Le graphe C_5 et son complémentaire $\overline{C_5}$.

1.3.4 Graphe représentatif des arêtes

Le graphe représentatif des arêtes (Line graph) d'un graphe G est le graphe, noté $L(G)$, tel que chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G . Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G sont adjacentes. (voir la Figure 1.8)

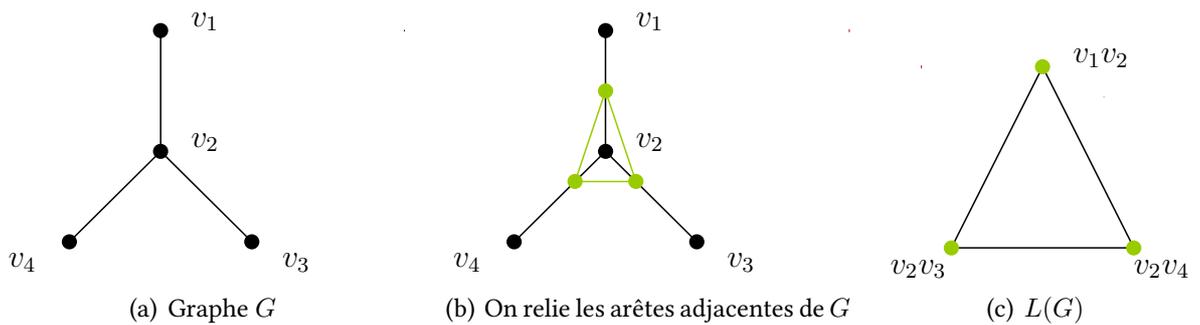


FIGURE 1.8 – Graphe représentatif des arêtes.

1.3.5 Carré d'un graphe

Le carré d'un graphe G est le graphe noté G^2 obtenu à partir de G en reliant par une arête toute paire de sommets à distance au plus 2 dans G (voir la Figure 1.9).

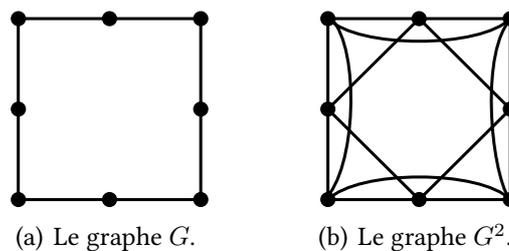


FIGURE 1.9 – Carré d'un graphe

1.4 Quelques classes de graphes

Il existe différentes familles de graphes, et nous mentionnons quelques unes d'entre elles.

1.4.1 Graphes complets et graphes réguliers

- Un graphe *complet* d'ordre n , noté K_n , est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une arête. Dans la Figure 1.10(a) on représente le graphe K_4 .
- Un graphe est dit k -régulier lorsque tous ses sommets sont de degré k . En particulier, un graphe 3-régulier est appelé un graphe cubique. Les deux graphes représentés dans la Figure 1.10 sont des graphes 3-réguliers.

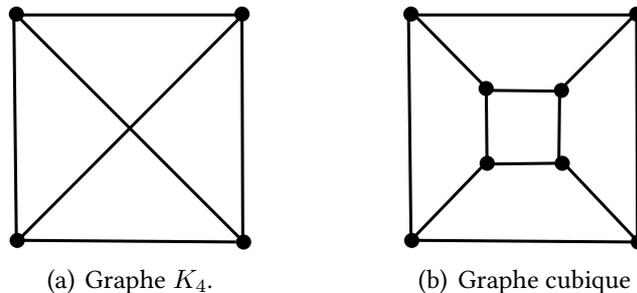


FIGURE 1.10 – Exemple d'un graphe complet et d'un graphe 3-régulier.

1.4.2 Graphes bipartis et graphes bipartis complets

- Un graphe G est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . Un exemple de graphe biparti est représenté dans la Figure 1.11(a).
- Un graphe biparti est dit *biparti complet* si chaque sommet de V_1 est adjacent à chaque sommet de V_2 . Si $|V_1| = n$ et $|V_2| = p$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{n,p}$. Un exemple d'un graphe biparti complet est le graphe $K_{2,3}$ illustré dans la Figure 1.11(b).
- Une *étoile*, notée S_n , est le graphe biparti complet $K_{1,n}$. Dans la Figure 1.11(c), on illustre l'étoile S_4 .

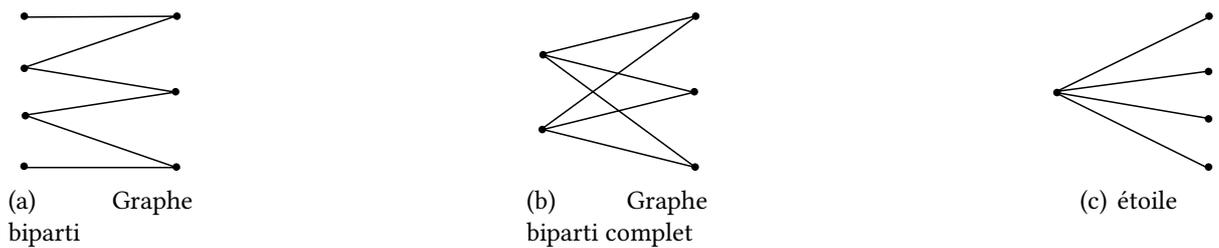


FIGURE 1.11 – Exemples de graphe biparti, graphe biparti complet et l'étoile.

1.4.3 Arbres et forêts

Un graphe G ne contenant pas de cycle est une forêt. Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre. Les sommets de degré 1 d'un arbre sont appelés sommets pendants (ou feuilles), et les sommets adjacents à des feuilles sont des sommets supports. La Figure 1.12 représente un arbre T .

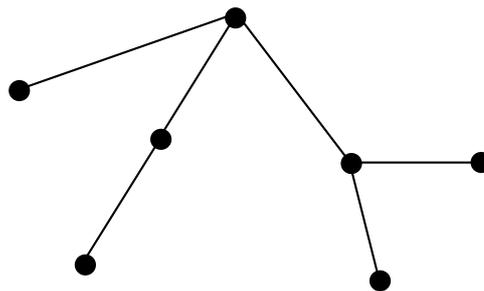


FIGURE 1.12 – Exemple d'arbre T

1.4.4 Graphes planaires

Un graphe G est dit *planaire* s'il peut être représenté dans un plan de telle manière que ses arêtes ne se croisent pas.

Le graphe K_4 représenté dans la Figure 1.13(a) est un exemple de graphe planaire. En revanche, le graphe K_5 illustré dans la Figure 1.13(b) n'est pas planaire.

Une face f d'un graphe planaire G est une région maximale du plan délimité par un ensemble d'arêtes de G , et qui n'en contient aucune. L'ensemble des faces de G est noté $F(G)$. Pour chaque face f de $F(G)$, la frontière de f est l'ensemble des sommets et des arêtes qui forment sa délimitation.

En 1930, Kazimierz Kuratowski [32] a établi une caractérisation fondamentale des graphes planaires. Cette caractérisation fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit planaire.

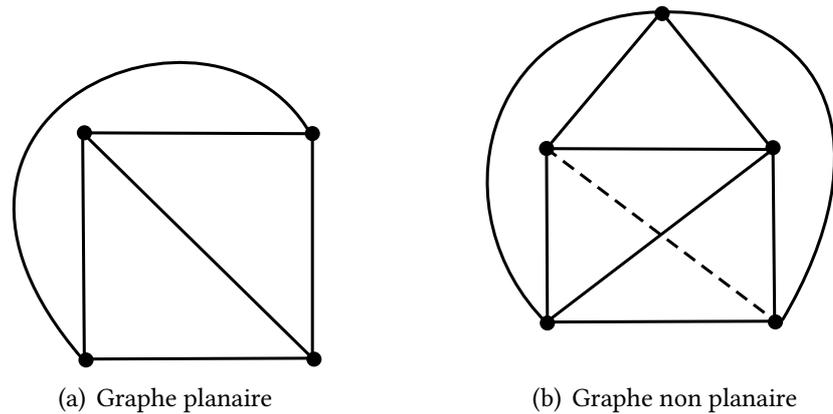


FIGURE 1.13 – Graphe planaires et graphe non planaire

Théorème 1.2 (Kuratowski,[32]). *Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision K_5 ou en $K_{3,3}$.*

La proposition suivante qui nous sera très utile dans le chapitre 3, montre le lien entre le degré moyen maximum d'un graphe planaire et sa maille

Proposition 1.3. *Soit G est un graphe planaire de maille g , on a $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$.*

1.4.5 Graphes planaires extérieurs

- Un graphe G est dit planaire extérieur s'il est planaire et s'il est possible de le représenter dans un plan de façon telle que tous les sommets soient sur la frontière de la face extérieure.
- Un graphe planaire extérieur maximal est un graphe planaire extérieur pour lequel l'ajout d'une arête supplémentaire le rendrait non extérieur.

Le graphe représenté dans la Figure 1.14(a) est un graphe planaire extérieur, car tous les sommets appartiennent à la face extérieure du plan. En revanche, le graphe de la Figure 1.14(b), n'est pas un graphe planaire extérieur, car il existe un sommet qui n'appartient pas à la face extérieure. Enfin, Le graphe illustré dans la Figure 1.14(c) est un exemple de graphe planaire extérieur maximal, car l'ajout de n'importe quelle arête le rendrait planaire non extérieur.

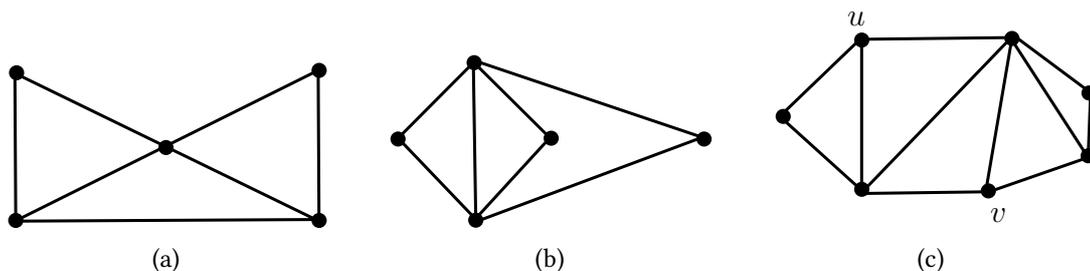


FIGURE 1.14 – Exemples de graphe planaire, planaire extérieur et planaire extérieur maximal.

1.4.6 Roues et graphes de Halin

- La roue, notée W_n , est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle (voir par exemple, la roue W_5 illustrée dans la Figure 1.15).
- Un graphe de Halin est un graphe planaire obtenu à partir d'un arbre sans sommets de degré 2, en reliant tous les sommets pendants de cet arbre par un cycle, appelé *cycle extérieur*, de telle façon que le graphe obtenu reste planaire. Par exemple, pour tout entier $n \geq 3$, la roue W_n est un graphe de Halin. Les graphes représentés dans la Figure 1.15 sont des graphes de Halin.

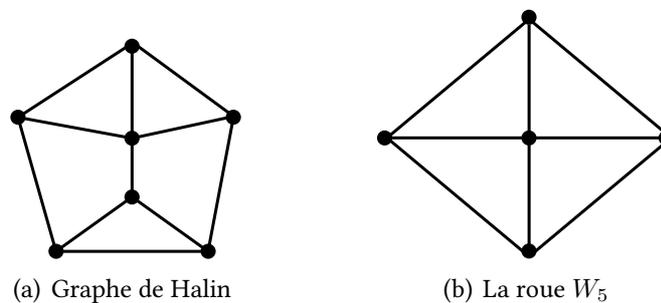


FIGURE 1.15 – Exemples de Graphes de Halin

1.5 Quelques invariants de graphes

1.5.1 Nombre de stabilité

Un stable (ou indépendant) S dans un graphe G est un ensemble sommets deux à deux non adjacents. Le nombre de stabilité, noté $\alpha(G)$ de G est le cardinal maximum d'un stable dans G .

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}.$$

1.5.2 Nombre de transversalité

Un transversal T dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute arête e de G , il existe $v \in T$, tel que v est une extrémité de e .

Le nombre de transversalité $\tau(G)$ de G est le cardinal minimum d'un transversal dans G .

$$\tau(G) = \min\{|T| : T \text{ est un transversal de } G\}.$$

1.5.3 Nombre de clique

Une clique K dans un graphe G est un sous-ensemble des sommets de G dont le sous-graphe induit est un graphe complet.

Le nombre de clique $\omega(G)$ de G est le cardinal maximum d'une clique dans G .

$$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ est une clique de } G\}.$$

1.5.4 Nombre de domination

Un ensemble dominant D dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour tout sommet $u \in V(G)$, $u \in D$ ou u a un voisin dans D .

Le nombre de domination $\gamma(G)$ de G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant dans G .

$$\gamma(G) = \min\{|D| : D \text{ est un ensemble dominant de } G\}.$$

Chapitre 2

$L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes

L'étiquetage des graphes est une notion de la théorie des graphes qui consiste à attribuer des étiquettes ou des valeurs à certains éléments d'un graphe, tels que les sommets et/ou les arêtes, selon certaines contraintes ou propriétés spécifiques. L'objectif de l'étiquetage est de trouver une assignation qui respecte les règles prédéfinies pour chaque type d'étiquetage considéré. Dans ce chapitre, nous présentons le problème $L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes. Nous commençons par définir l'invariant associé à ce problème, puis présentons les principaux résultats sur ce paramètre. Nous donnons par la suite les liens avec quelques paramètres de coloration.

2.1 Nombre $L(p, q)$ -étiquetage

Définition 2.1. Soient p, q et k des entiers positifs et $G = (V(G), E(G))$ un graphe.

– Un k - $L(p, q)$ -étiquetage de G est une application f définie de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers d'étiquettes $\{0, 1, \dots, k\}$ de telle sorte que pour tout sommets $x, y \in V(G)$, on a :

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \geq p & \text{si } d(x, y) = 1 \\ |f(x) - f(y)| \geq q & \text{si } d(x, y) = 2 \end{cases}$$

– Le nombre $L(p, q)$ -étiquetage de G , noté $\lambda_{p,q}(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet un k - $L(p, q)$ -étiquetage.

Exemple : Dans la Figure 2.1, nous donnons un 8 - $L(4, 2)$ -étiquetage du graphe G . Il est facile de voir que pour toute arête $xy \in E(G)$ on a $|f(x) - f(y)| \geq 4$ et que pour toute paire de sommet x et y à distance 2, on a $|f(x) - f(y)| \geq 2$. D'où, $\lambda_{4,2}(G) \leq 8$.

D'autre part, 8 étiquettes sont nécessaires pour étiqueter l'unique cycle d'ordre 3 dans G , donc $\lambda_{4,2}(G) \geq 8$. Ainsi $\lambda_{4,2}(G) = 8$.

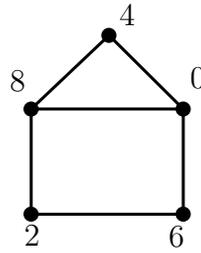


FIGURE 2.1 – $L(4, 2)$ -étiquetage de G .

2.1.1 Exemple d'application

La notion $L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes a été introduite, en 1992, par Griggs et Yeh [27] pour le cas particulier où $p = 2$ et $q = 1$, dans le but de modéliser le problème de l'assignation des fréquences dans un réseau radio.

Supposons que nous ayons un ensemble de stations radio (émetteurs-récepteurs) qui souhaite communiquer les uns avec les autres sur des fréquences pour éviter les interférences. Deux stations sont dites adjacentes si elles peuvent émettre directement l'une à l'autre. Si deux stations ne sont pas adjacentes mais qu'elles sont adjacentes à une même station, elles sont dites à distance deux. On distingue deux types d'interférences dans le réseau :

- des interférences directes : elles se produisent lorsque deux stations adjacentes transmettent l'une à l'autre simultanément.
- des interférences secondaires : elles se produisent lorsque deux émetteurs ou récepteurs à distance 2 ont la même fréquence.

Afin de réduire ou d'éliminer les interférences, un protocole basé sur une assignation de code aux fréquences dans le réseau radio a été élaboré. Cela signifie que deux stations adjacentes doivent se voir attribuer des codes séparés par p pour éviter les interférences directes, puis deux stations à distance deux doivent se voir attribuer des codes séparés par q pour éviter les interférences secondaires, ainsi que pour éviter les interférences directes.

Le problème ainsi défini peut être modélisé par un graphe $G = (V, E)$, tel que l'ensemble des sommets V représente l'ensemble des stations, et l'ensemble des arêtes E représente la relation entre deux stations adjacentes. La résolution de ce problème est équivalente à la recherche d'un $L(p, q)$ -étiquetage des sommets d'un graphe.

Pour plus d'exemples d'applications, nous renvoyons les lecteurs aux références [6, 31].

2.1.2 Complexité du problème $L(p, q)$ -étiquetage

Soit le problème de décision $L(p, q)$ -étiquetage qui détermine si un graphe G donné admet un k - $L(p, q)$ -étiquetage. Ce problème de décision est formellement défini comme suit :

Problème : $L(p, q)$ -étiquetage

Paramètres : deux entiers positifs p et q

Instance : Un graphe G non vide et un entier positif k ..

Question : Existe-t-il un k - $L(p, q)$ -étiquetage de G ?

Dans [25], les auteurs montrent que le problème de $L(p, q)$ -étiquetage restreint aux arbres n'est résolvable en temps polynomial que si q divise p , sinon il est NP-complet. Lloyd et Ramanathan [35] montrent que le problème est aussi NP-complet pour la classe des graphes planaires et même pour les graphes planaires de degré borné, d'où le recours à la recherche de bornes (supérieures/inférieures) ou des valeurs exactes dans des classes particulières de graphe.

2.2 Principaux résultats

Jacko [30] a borné le nombre $L(p, q)$ -étiquetage d'un graphe en fonction de degré minimum δ et son degré maximum Δ

2.2.1 Bornes supérieures

Théorème 2.2 (Jacko, [30]). *Soient p et q deux entiers positifs et G un graphe de degré maximum Δ . Alors*

1. $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta^2 + 2(p - q)\Delta$.
2. Si $p > q$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq q\Delta^2 + p\Delta$. De plus, si $\frac{p}{q}$ est un entier, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq q\Delta^2 + (p - q)\Delta$.
3. Si $p \leq q$ alors $\lambda_{p,q}(G) \leq q\Delta^2 + q\Delta$.

2.2.2 Bornes inférieures

Théorème 2.3 (Jacko, [30]). *Soient p et q deux entiers positifs et G un graphe connexe de degré minimum δ et de degré maximum $\Delta \geq 2$. Alors*

1. $\lambda_{p,q}(G) \geq p + (\delta - 1)q$.
2. $\lambda_{p,q}(G) \geq \begin{cases} p + (\Delta - 1)q, & \text{si } q \leq p \\ 2p + (\Delta - 2)q, & \text{si } p \leq q \leq 2p \\ (\Delta - 1)q, & \text{si } 2p \leq q \end{cases}$
3. Si $p > q$ et $\lambda_{p,q}(G) = p + (\Delta - 1)q$, alors tout sommet de degré Δ est étiqueté par 0 ou par $p + (\Delta - 1)q$ dans tout $L(p, q)$ -étiquetage optimal.

Dans le reste de cette section, nous donnons un $L(p, q)$ -étiquetage de quelque classes de graphes.

2.2.3 Chaines et cycles

Georges et Mauro [26] ont déterminé le $\lambda_{p,q}(G)$ sur les chaines et les cycles. Pour tous les entiers p et q tels que ($p \geq q$), ils montrent :

Théorème 2.4 (Georges et Mauro, [26]). *Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre n . Alors :*

$$\begin{aligned}
 1. \lambda_{p,q}(P_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ p, & \text{si } n = 2 \\ p + q, & \text{si } n = 3 \text{ ou } 4 \\ p + 2q, & \text{si } n \geq 5 \text{ et } p \geq 2q \\ 2p, & \text{si } n \geq 5 \text{ et } p \leq 2q \end{cases} \\
 2. \text{ Si } p > 2q \text{ alors } \lambda_{p,q}(C_n) &= \begin{cases} 2p, & \text{si } n \text{ est impair et } n \geq 3; \\ p + 2q, & \text{si } n \equiv 0(\text{mod}4); \\ 2p, & \text{si } n \equiv 2(\text{mod}4) \text{ et } p \leq 3q; \\ p + 3q, & \text{si } n \equiv 2(\text{mod}4) \text{ et } p > 3q. \end{cases} \\
 3. \text{ Si } p \leq 2q \text{ alors } \lambda_{p,q}(C_n) &= \begin{cases} 2p, & \text{si } n \equiv 0(\text{mod}3); \\ 4q, & \text{si } n = 5; \\ p + 2q, & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.2.4 Arbres

Théorème 2.5 (Calamoneri, Pelc et Petreschi, [12]). *Soit T un arbre de degré maximum Δ avec $p < q$ alors :*

1. Si $p \leq \frac{q}{2}$ alors $\lambda_{p,q}(T) = p + (\Delta - 1)q$.
2. Si $\frac{q}{2} \leq p \leq \frac{\Delta q}{2\Delta - 1}$ alors $\lambda_{p,q}(T) = (2\Delta - 1)p$.
3. Si $\frac{\Delta q}{2\Delta - 1} \leq p \leq q$ alors $\lambda_{p,q}(T) = \Delta q$.

2.2.5 Graphes planaires

Dans [42], Van den Heuvel et McGuinness ont donné la première majoration du nombre $L(p, q)$ -étiquetage de tout graphe planaire G . Ils montrent que pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ et pour tout entier p et q , tel que $p \geq q$, on a $\lambda_{p,q}(G) \leq (4q - 2)\Delta + 10p + 38q - 23$. Ce nombre d'étiquettes a été réduit, par Borodin *et al.* [9], à $\lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil (2q - 1) + 8p - 8q + 1$ pour tout graphe planaire G avec $\Delta \geq 47$. C'est finalement Molloy et Salavatipour [37] qui ont établi la meilleure majoration en prouvant le théorème suivant

Théorème 2.6 (Molloy et Salavatipour, [37]). *Pour tout graphe planaire G de degré maximum Δ , et pour chaque entiers positifs p et q , on a :*

$$\lambda_{p,q}(G) \leq q \left\lceil \frac{5}{3} \Delta \right\rceil + 18p + 77q - 18.$$

Ces majorations semblent particulièrement éloignées de la borne optimale, mais aussi très difficile à améliorer. Il paraît donc intéressant d'étudier le $L(p, q)$ -étiquetage des graphes planaires de maille donnée. Dans le théorème suivant, nous recueillons des résultats connus dans la littérature concernant le nombre $L(p, q)$ -étiquetage des graphes planaires de maille donnée :

Théorème 2.7 (Dong,[17]). *Soient p et q sont deux entiers positifs et G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille $g(G)$*

1. *Si $g(G) \geq 5$ et $p \geq q \geq 1$, alors $\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 10q - 8$.*
2. *Si $g(G) \geq 6$, $p \geq 1$ et $\Delta \leq 5328p^2 + 4088p + 784$ alors $\lambda_{p,q}(G) \geq (2q - 1)\Delta + 2p - 1$.*
3. *Si $g(G) \geq 6$, $p \geq q \geq 1$ et $\Delta \geq 5328 \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil^2 + 4088 \left\lceil \frac{p}{q} \right\rceil + 784$, alors $\lambda_{p,q}(G) \geq q\Delta + 2p + q - 2$.*

2.2.6 Graphes planaires extérieurs

Théorème 2.8 (Zhang et Ma, [47]). *Soit G un graphe planaire extérieur de degré maximum Δ alors*

$$\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 2(2p - 1)$$

2.2.7 Graphes de Halin

Théorème 2.9 (Zhang et Ma, [47]). *Soit G un graphe de Halin de degré maximum Δ alors*

$$\lambda_{p,q}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p - 4q - 1$$

Pour plus de résultats sur le nombre $\lambda_{p,q}(G)$, nous renvoyons le lecteur aux résumés mis en ligne par Tiziana Calamoneri en 2014 [11] et Roger K. Yeh en 2006 [46].

2.3 Lien entre le $L(p, q)$ -étiquetage et la coloration dans les graphes

La coloration dans les graphes est un problème important de la théorie des graphes. L'objectif est d'attribuer des couleurs à des éléments spécifiques d'un graphe, tels que les sommets

ou les arêtes sous certaines conditions. Ce type de problème trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que l'optimisation des emplois du temps et la planification des réseaux de communication. Les premières avancées en coloration des graphes se sont principalement concentrées sur les graphes planaires. Le célèbre théorème des quatre couleurs a répondu à la question cruciale à savoir s'il est possible de colorer n'importe quelle carte géographique en utilisant seulement quatre couleurs [3].

2.3.1 Coloration propre

Définition 2.10. Soient k un entier et $G = (V, E)$ un graphe.

- Une k -coloration propre des sommets de G est une affectation de k couleurs aux sommets de G de telle sorte que deux sommets adjacents ne possèdent pas la même couleur.
- Le nombre chromatique de G , noté $\chi(G)$, est défini comme étant le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration propre des sommets.

Notons que dans le cas spécifique du $L(1, 0)$ -étiquetage, nous cherchons à attribuer des étiquettes aux sommets du graphe de telle sorte que chaque sommet ait une étiquette différente de celle de ses voisins directs. Autrement dit, deux sommets adjacents ne peuvent pas avoir la même étiquette. Ainsi, un $L(1, 0)$ -étiquetage d'un graphe est en réalité une coloration propre des sommets, c'est à dire $\lambda_{1,0}(G) = \chi(G)$ (voir Figure 2.2).

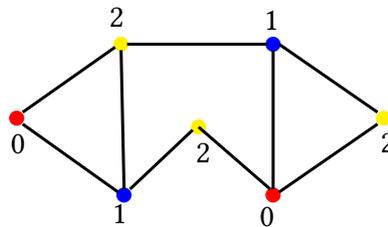


FIGURE 2.2 – $\lambda_{1,0}(G) = \chi(G)$

Parmi les résultats marquants liés au nombre chromatique, nous pouvons citer le célèbre théorème des quatre couleurs [3].

Théorème 2.11 (Appel et Haken, [3]). Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.

2.3.2 Coloration injective

Définition 2.12. Soient k un entier et $G = (V, E)$ un graphe.

- Une k -coloration injective de G est une affectation de k couleurs aux sommets de G telle que deux sommets ayant un voisin en commun reçoivent des couleurs différents. notons que cette coloration n'ai pas nécessairement propre, deux sommets adjacents peuvent avoir la même couleur.

– Le nombre chromatique injectif de G , noté $\chi_{inj}(G)$, est défini comme étant le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration injective.

Notons que dans le cas spécifique du $L(0, 1)$ -étiquetage, nous cherchons à attribuer des étiquettes aux sommets du graphe de telle sorte que chaque paire de sommets à distance exactement égale à deux l'un de l'autre possèdent des étiquettes différentes. Ainsi, un $L(0, 1)$ -étiquetage d'un graphe est en réalité une coloration injective des sommets c'est à dire $\lambda_{0,1}(G) = \chi_{inj}(G)$ (voir Figure 2.3).

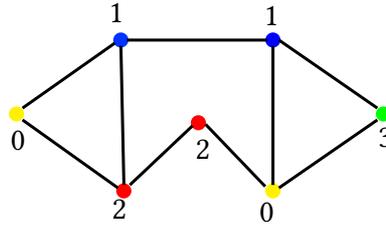


FIGURE 2.3 – $\lambda_{0,1}(G) = \chi_{inj}(G)$

Dans le cas des graphes planaires Hahn, Raspaud et Wang [28], ont montré que $\chi_{inj}(G) \leq \Delta(\Delta - 1)$ dans le cas où $\Delta \geq 3$. Dans le théorème suivants nous recueillons les principaux résultats qui concerne le nombre chromatique injectif des graphes planaires de maille donnée.

Théorème 2.13. Soit G un graphe planaire de maille g et de degré maximum Δ .

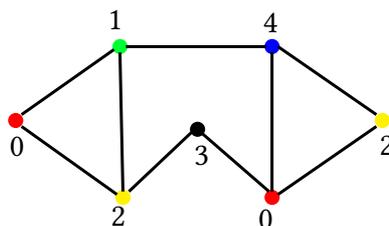
1. Si $g \geq 7$ alors $\chi_{inj}(G) \leq \Delta + 2$ [36, 15].
2. Si $g \geq 6$ alors $\chi_{inj}(G) \leq \Delta + 3$ [18].
3. Si $g \geq 5$ alors $\chi_{inj}(G) \leq \Delta + 6$ [19].

2.3.3 Coloration a distance deux

Définition 2.14. Soiet k un entier et $G = (V, E)$ un graphe.

- Une k -coloration à distance 2 d'un graphe G est une coloration des sommets de G telle que deux sommets u et v ont des couleurs différentes si $d_G(u, v) \leq 2$.
- On note $\chi_2(G)$ le plus petit nombre k de couleurs nécessaires pour colorer à distance deux le graphe G .

Notons que dans le cas spécifique du $L(1, 1)$ -étiquetage, nous cherchons à attribuer des étiquettes aux sommets du graphe de telle sorte que chaque deux sommets à distance au plus égale à deux l'un de l'autre possèdent des étiquettes différentes. Ainsi, un $L(1, 1)$ -étiquetage d'un graphe est en réalité une coloration à distance 2 des sommets de G , c'est-à-dire $\lambda_{1,1}(G) = \chi_2(G)$ (voir Figure 2.4).


 FIGURE 2.4 – $\lambda_{1,1}(G) = \chi_2(G)$

Wegner [44] a proposé la première conjecture pour le nombre de couleurs nécessaires pour colorer le carré d'un graphe planaire.

Conjecture 2.15 (Wegnar, [44]). *Soit G un graphe planaire avec un degré maximum Δ .*

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3 \\ \Delta + 5, & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7 \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1, & \text{si } \Delta \geq 8 \end{cases}$$

Très récemment, Hartke, Jahanbekam et Thomas [29] et Thomassen [41] ont, indépendamment, confirmé la conjecture 2.15 dans le cas où $\Delta = 3$. Pour le cas général, seulement certaines bornes supérieures ont été prouvées : Van Den Heuvel et McGuinness [42] ont montré que $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 25$; Agnarsson et Halldórsson [1] ont prouvé que $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 1$ si $\Delta \geq 750$; Borodin *et al.* [9] ont prouvé que $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 1$ si $\Delta \geq 47$; enfin Molloy et Salavatipour [37] ont prouvé que $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{5\Delta}{3} \rfloor + 78$, et $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{5\Delta}{3} \rfloor + 25$ si $\Delta \geq 241$.

Il existe de meilleures bornes pour les classes de graphes planaires sans certains cycles de petites longueurs. En effet, Wang et Lih [43] ont prouvé que pour tout graphe planaire de maille g et de degré maximum Δ on a

- Si $g(G) \geq 5$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 16$.
- Si $g(G) \geq 6$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 10$.
- Si $g(G) \geq 7$, alors $\chi(G^2) \leq \Delta + 5$.

Ces bornes ont été améliorées progressivement à $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$ si $g \geq 6$ par Bu et Zhu [10], à $\chi_2(G) \leq \Delta + 4$ si $g \geq 5$ et Δ assez grand par Dong et Lin [20, 21], puis à $\chi_2(G) \leq \Delta + 3$ si $g \geq 5$ et $\Delta \geq 339$ par Dong et Xu [22].

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au problème du $L(p, q)$ -étiquetage dans les graphes. Nous avons montré que ce problème est lié à quelques problèmes célèbres de colorations de graphes.

De manière générale, le problème du $L(p, q)$ -étiquetage, avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$, est équivalent au problème de la coloration à distance deux. Le $L(2, 1)$ -étiquetage est un modèle très utilisé dans la littérature pour résoudre les problèmes d'assignation de fréquences dans les stations radio. Avec la multiplication du nombre de stations radio au 21ème siècle, il est de plus en plus nécessaire de considérer les stations radios qui sont à distance plus éloignée, c'est ainsi que le concept du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage a été introduit, qui vise à minimiser davantage les interférences et à optimiser l'allocation des fréquences entre les stations. Cette nouvelle approche permet de mieux gérer les ressources radio et d'améliorer la qualité des transmissions dans un environnement radio de plus en plus encombré.

Chapitre 3

$L(3, 2, 1)$ -étiquetage dans les graphes

Les résultats obtenus dans ce chapitre constituent notre contribution. Tout d'abord, nous donnons la définition du problème $L(3, 2, 1)$ -étiquetage. Ensuite, nous présentons un certain nombre de résultats connus dans la littérature et qui concerne le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de graphes. Enfin, nous améliorons les majorations du nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de quelques classes de graphes planaires.

3.1 Nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage

La notion du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage à été introduite par Liu et Shao [34] en 2004, dans le but de généraliser le problème du $L(2, 1)$ -étiquetage.

Définition 3.1. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe.

- Un k - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G est une application f définie de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers d'étiquettes $\{0, 1, \dots, k\}$ de telle sorte que pour tout sommet $x, y \in V(G)$ on a :

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \geq 3 & \text{si } d(x, y) = 1 \\ |f(x) - f(y)| \geq 2 & \text{si } d(x, y) = 2 \\ |f(x) - f(y)| \geq 1 & \text{si } d(x, y) = 3 \end{cases}$$

- Un graphe qui admet un k - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage est dit k - $L(3, 2, 1)$ -étiquetable.
- Le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G , noté $\lambda_{3,2,1}(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet un $k - L(3, 2, 1)$ -étiquetage avec k l'étiquette maximale.
- Un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f de G est appelé un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage minimal de G si l'étiquette la plus élevée dans f pour tout sommet de G est $\lambda_{3,2,1}(G)$.

Remarque 3.2. Dans un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage minimal f d'un graphe G , si 0 n'est pas utilisé comme étiquette d'un sommet de G dans f , alors chaque étiquette de sommet peut être diminuée de un pour obtenir un autre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' de G . Par conséquent, dans un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage minimal, 0 apparaît nécessairement comme étiquette d'au moins un sommet.

Dans la Figure 3.1, nous proposons un 7- $L(3, 2, 1)$ -étiquetage d'un cycle d'ordre 6. Nous avons $\lambda_{3,2,1}(C_6) = 7$. En effet, soit un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage minimal f de C_6 et supposons que $\lambda_{3,2,1}(C_6) < 7$. Considérons $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ l'ensemble des sommets d'un cycle C_6 tel que v_i est adjacent à v_{i+1} pour $1 \leq i \leq 6$. Sans perte de généralités, posons $f(v_1) = 0$. Dans ce cas, les étiquettes possibles pour $\{f(v_2), f(v_6)\}$ sont $\{3, 5\}$ ou $\{3, 6\}$ ou $\{4, 6\}$.

1. Si $\{f(v_2), f(v_6)\} = \{3, 5\}$ alors $f(v_3) = 6$ et $f(v_4) = 1$. Ainsi, pour le sommet v_5 , on aura $f(v_5) = 8$ contradiction avec le fait que $\lambda_{3,2,1}(C_6) < 7$.
2. Si $\{f(v_2), f(v_6)\} = \{3, 6\}$ ou $\{4, 6\}$ alors $f(v_3) = 7$, contradiction.

D'où $\lambda_{3,2,1}(C_6) = 7$.

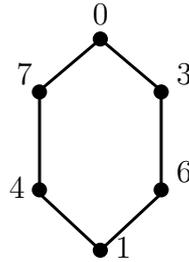


FIGURE 3.1 - $\lambda_{3,2,1}(C_6) = 7$

3.2 Résultats fondamentaux

Dans cette section, nous énoncerons quelques résultats fondamentaux sur le problème du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage qui ont été précédemment établis dans la littérature.

Supposons que nous essayons de construire un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f d'un graphe G . Soit v le sommet à étiqueter et $F(v)$ le nombre d'étiquettes interdites pour étiqueter le sommet v . Notons $\beta(v)$ (respectivement, $\gamma(v)$) le nombre de voisins à distance 2 (respectivement, 3) de v dans G . Pour chaque sommet étiqueté $x \in N(v)$, il y a 5 étiquettes consécutives $f(x) - 2$, $f(x) - 1$, $f(x)$, $f(x) + 1$ et $f(x) + 2$ qui sont interdites pour étiqueter v . De même, pour chaque sommet étiqueté y à distance 2 de v , il y a 3 étiquettes consécutives $f(y) - 1$, $f(y)$ et $f(y) + 1$ qui sont interdites pour étiqueter v . Enfin, pour chaque sommet étiqueté z à distance 3 de v , il y a une étiquette $f(z)$ qui est interdite pour étiqueter v . Ainsi, $F(v) \leq 5 \times d_G(v) + 3 \times \beta(v) + \gamma(v)$.

En se basant sur cette remarque, Clipperton *et al.* [14] ont donné une majoration naturelle du $\lambda_{3,2,1}(G)$ en fonction du degré maximum Δ de G . Ils ont montré que pour tout graphe G ,

$\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + \Delta^2 + 3\Delta$. Plus tard, Chai *et al.* [13] ont amélioré ce résultat et ont montré le théorème suivant

Théorème 3.3 (Chai *et al.*, 2011 [13]). *Si G est un graphe de degré maximum Δ , alors*

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^3 + 2\Delta$$

Clipperton *et al.* [14] ont déterminé le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage pour les chaînes, les cycles, les graphes complets et les graphes bipartis complets.

Théorème 3.4 (Clipperton *et al.*, 2006 [14]). *Soient n et m deux entiers positifs. Si $P_n, C_n, K_n, K_{n,m}$ sont respectivement, la chaîne, le cycle, le graphe complet d'ordre n et le graphe biparti complet, alors*

$$1. \lambda_{3,2,1}(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1; \\ 3 & \text{si } n = 2; \\ 5 & \text{si } n = 3 \text{ ou } 4; \\ 6 & \text{si } n = 5, 6, 7; \\ 7 & \text{si } n \geq 8; \end{cases}$$

$$2. \lambda_{3,2,1}(C_n) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 3; \\ 7 & \text{si } n \text{ est un nombre pair}; \\ 8 & \text{si } n \text{ est un nombre impair et } n \neq 3, 7; \\ 9 & \text{si } n = 7 \end{cases}$$

$$3. \lambda_{3,2,1}(K_{m,n}) = 2(m + n) - 1.$$

$$4. \lambda_{3,2,1}(K_n) = 3n - 3.$$

En 2011, Ma-Lian Chia *et al.* [13] ont considéré le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des arbres. Ils montrent le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Pour tout arbre T de degré maximum Δ , on a*

$$2\Delta + 1 \leq \lambda_{3,2,1}(T) \leq 2\Delta + 3$$

Ces dernières années, de nombreux auteurs se sont également intéressés à l'étude du nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de plusieurs autres classes de graphes. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux références [2, 16, 39, 38].

Remarque 3.6. Dans toutes les figures et pour chaque configuration que nous présentons dans le reste de ce document, nous utilisons la convention graphique suivante : les sommets en blanc ont un degré fixe et les sommets en noir ont un degré quelconque.

3.3 $L(3, 2, 1)$ —étiquetage des graphes planaires

Lui and Shao [34] ont étudié $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires. Ils ont donné la majoration suivante

Théorème 3.7 (Lui and Shao, [34]). Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ . Alors

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq 15(\Delta^2 - \Delta + 1).$$

En 1990, Borodin [8] a prouvé le lemme structurel suivant concernant les graphes planaires :

Lemme 3.8 (Borodin, [8]). Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe planaire. Alors il existe un sommet $v \in V(G)$ adjacent à m sommets v_1, \dots, v_m tels que $d(v_1) \leq \dots \leq d(v_m)$, telle que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1. $m \leq 2$;
2. $m = 3$ avec $d(v_1) \leq 11$;
3. $m = 4$ avec $d(v_1) \leq 7$ et $d(v_2) \leq 11$;
4. $m = 5$ avec $d(v_1) \leq 6$, $d(v_2) \leq 7$ et $d(v_3) \leq 11$.

En attribuant une borne inférieure au degré maximum $\Delta(G)$ d'un graphe planaire G , il nous a été possible d'améliorer le résultat du Théorème 3.7. Nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 3.9. Si G est un graphe planaire de degré maximum $\Delta \geq 12$ alors :

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq 2\Delta^2 + 23\Delta + 63.$$

Démonstration. Montrons que si un graphe planaire G satisfait $\Delta(G) \geq C$, avec $C \geq 12$, alors $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 2C^2 + 23C + 63$.

On procède par contradiction. Supposons que le théorème est faux et soit G un plus petit contre exemple (en nombre d'arêtes). Sans perte de généralités, G est un graphe connexe et par conséquent $\delta(G) \geq 1$. Soit $B = \{0, 1, \dots, k^*\}$ un ensemble contenant $k^* + 1$ étiquettes où $k^* = 2C^2 + 23C + 63$.

D'après le Lemme 3.8, il existe un sommet $v \in V(G)$ ayant m voisins v_1, \dots, v_m tels que $d(v_1) \leq \dots \leq d(v_m)$. Nous avons 4 cas à considérer :

1. $m \leq 2$.

- (a) Si v est un 1-sommet alors soit v_1 son unique voisin (voir Figure 3.2). Par minimalité de G , le graphe $G' = G - \{v\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous étendons f' à un $k^* - L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G comme suit. Comme

$$F(v) \leq 5 + 3(C - 1) + (C - 1)^2 = C^2 + C + 3 < k^*$$

Il existe au moins une étiquette libre dans B qui peut être assignée à v . Ainsi, nous obtenons clairement un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f de G , ce qui constitue une contradiction.

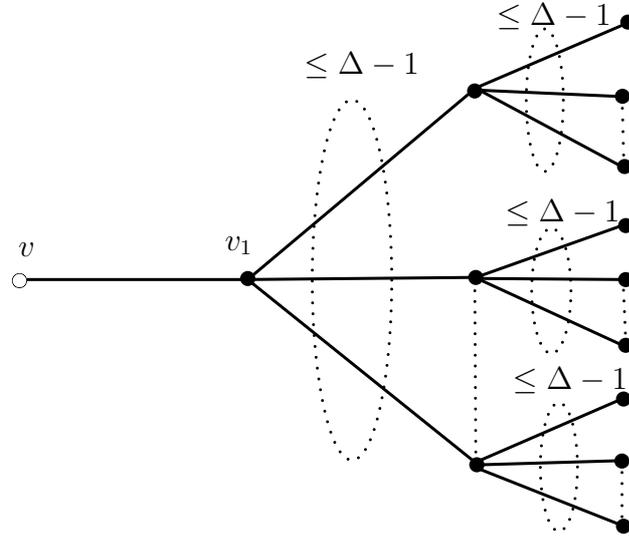


FIGURE 3.2 – Le contre exemple G contient un 1-sommet v

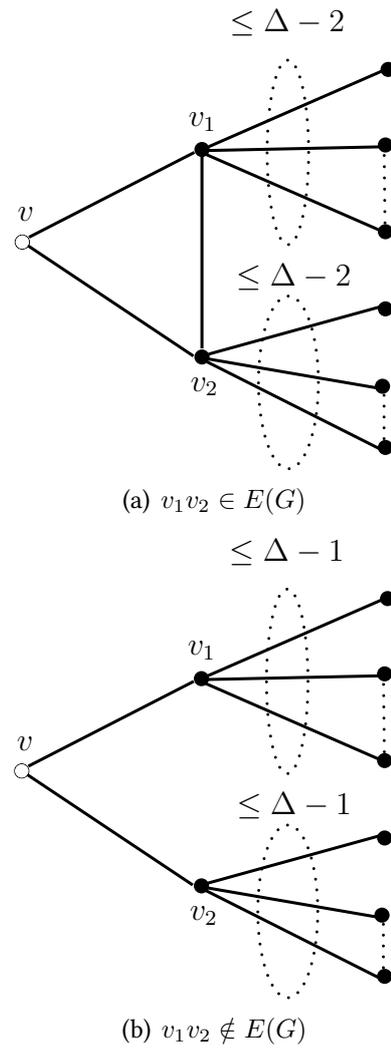
- (b) Si v est un 2-sommet alors soient v_1 et v_2 les deux voisins de v dans G .

- Si $v_1v_2 \in E(G)$ (voir Figure 3.3(a)), alors par minimalité de G , le graphe $G' = G - \{v\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous étendons f' à un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G comme suit. Comme

$$F(v) \leq 5 \times 2 + 3 \times 2(C - 2) + 2(C - 1)(C - 2) = 2C^2 + 2 < k^*$$

Il y a au moins une étiquette libre dans B qui peut être assignée à v . Ainsi, nous obtenons clairement un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f de G . Nous aboutissons alors à une contradiction.

- Si $v_1v_2 \notin E(G)$ (voir Figure 3.3(b)), alors par minimalité de G , le graphe $G' = G - \{v\} + \{v_1v_2\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous étendons f' à un k^* -


 FIGURE 3.3 – Le contre exemple G contient un 2-sommet.

$L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G comme suit. Comme

$$F(v) \leq 5 \times 2 + 3 \times 2(C - 1) + 2(C - 1)^2 = 2C^2 + 2C + 6 < k^*$$

Il y a au moins une étiquette libre dans B qui peut être assignée à v . Ainsi, nous obtenons clairement un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f de G . Nous aboutissons alors à une contradiction.

Ainsi, $m \geq 3$.

2. $m = 3$ avec $d(v_1) \leq 11$.

En contractant l'arête vv_1 à un nouveau sommet u , nous obtenons un graphe planaire G' dans lequel tous les sommets, à l'exception de u , ont un degré au plus égal à celui qu'ils avaient dans G , tandis que u a un degré au plus égal à 12 (voir Figure 3.4). En particulier, nous avons $\Delta(G') \leq C$. Par minimalité de G , le graphe G' admet un

k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous allons étendre f' à G comme suit. Nous étiquetons d'abord v_1 avec $f'(u)$. Maintenant, nous pouvons étiqueter v car le nombre d'étiquettes interdites pour étiqueter v est

$$F(v) \leq 5 \times 3 + 3 \times (2(C - 1) + 10) + 2(C - 1)^2 + 10(C - 1) = 2C^2 + 12C + 31 < k^*$$

Nous aboutissons alors à une contradiction.

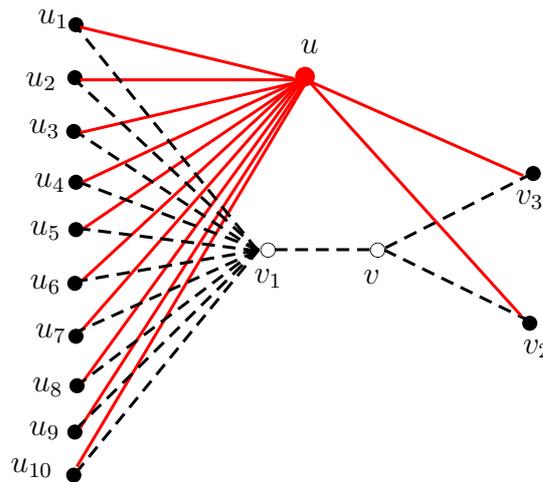


FIGURE 3.4 – Le contre exemple G contient un 3-sommet v et un 11-sommet v_1

3. Si $m = 4$ avec $d(v_1) \leq 7$ et $d(v_2) \leq 11$.

En contractant l'arête vv_1 à un nouveau sommet u , nous obtenons un graphe planaire G' dans lequel tous les sommets, à l'exception de u , ont un degré au plus égal à celui qu'ils avaient dans G , tandis que u a un degré au plus de 9. En particulier, nous avons $\Delta(G') \leq C$. Par minimalité de G , le graphe G' admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous allons étendre f' à G comme suit. Nous étiquetons d'abord v_1 avec $f'(u)$. Maintenant, nous pouvons étiqueter v car le nombre d'étiquettes interdites pour étiqueter v est

$$F(v) \leq 5 \times 4 + 3 \times (2(C - 1) + 6 + 10) + 2(C - 1)^2 + (C - 1)(6 + 10) = 2C^2 + 18C + 48 < k^*$$

Nous aboutissons alors à une contradiction.

4. Si $m = 5$ avec $d(v_1) \leq 6$, $d(v_2) \leq 7$ et $d(v_3) \leq 11$.

En contractant l'arête vv_1 pour former un nouveau sommet u , nous obtiendrons un graphe planaire G' dans lequel tous les sommets, à l'exception de u , ont un degré au plus égal à celui qu'ils avaient dans G , tandis que u a un degré au plus de 9. En particulier, nous avons $\Delta(G') \leq C$. Par minimalité de G , le graphe G' admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' . Nous allons étendre f' à G comme suit. Nous étiquetons d'abord v_1 avec $f'(u)$. Maintenant, nous

pouvons étiqueter v car le nombre d'étiquettes interdites pour étiqueter v est

$$F(v) \leq 5 \times 5 + 3 \times (2(C-1) + 5 + 6 + 10) + 2(C-1)^2 + (C-1)(5+6+10) = 2C^2 + 23C + 63 = k^*$$

Nous aboutissons alors à une contradiction.

Il est facile de vérifier que dans tous les cas, nous avons obtenu un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G , ce qui contredit notre hypothèse. \square

3.4 $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes planaires extérieurs

Lemme 3.10 (Esperet et Ochem, [23]). *Soit G un graphe planaire extérieur. Alors l'une des ces conditions suivantes est vérifiée :*

1. G contient un 1-sommet.
2. G contient deux 2-sommets adjacents.
3. G contient un 2-sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents et $d_G(v) = 3$.
4. G contient un 2-sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents, $d_G(v) = 4$ et ses deux autres voisins x et y (distincts de u et w) sont adjacents et $d_G(x) = 2$.

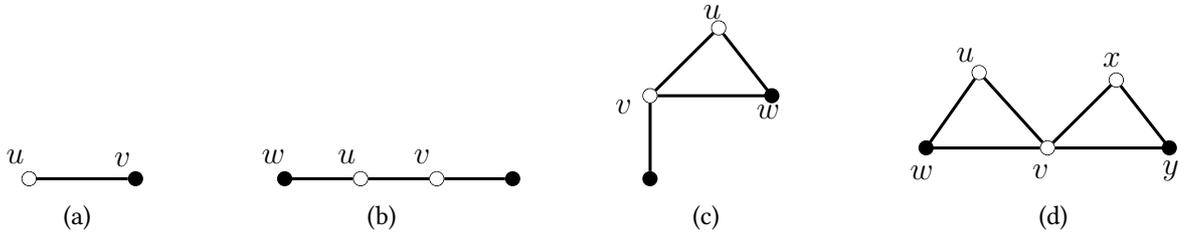


FIGURE 3.5 – Configurations inévitablement présentes dans un graphe planaire extérieur.

Théorème 3.11. *Pour tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta(G)$, nous avons*

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^2(G) + 2\Delta(G) + 10.$$

Démonstration. Supposons que le Théorème 3.11 est faux et soit G le plus petit contre-exemple. Soit $B = \{0, 1, \dots, k^*\}$ un ensemble contenant $k^* + 1$ étiquettes où $k^* = \Delta^2(G) + 2\Delta(G) + 10$. Selon le Lemme 3.10, nous avons 4 cas à considérer

1. G contient un 1-sommet u (voir la Figure 3.5(a)).

Par minimalité de G , le graphe $G' = G - \{u\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Il est facile de voir qu'au plus $\Delta^2(G) + \Delta(G) + 3 < k^*$ étiquettes sont interdites pour étiqueter u ce qui constitue contradiction.

2. G contient deux 2-sommets adjacent u et v (voir la Figure 3.5(b)).

Soit w le deuxième voisin de u . Par minimalité de G , le graphe $G - \{u\} + \{vw\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Comme

$$F(u) \leq 5 \times 2 + 3(\Delta(G) - 1) + 3 + (\Delta(G) - 1) + (\Delta(G) - 1)2 = \Delta^2(G) + 2\Delta(G) + 10 < k^*$$

il existe au moins une étiquette libre dans B qui peut être attribuée à u . Ainsi nous pouvons obtenir un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' de G , contradiction.

3. G contient un 2-sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents et $d_G(v) = 3$ (voir Figure 3.5(c)).

Par minimalité de G , $G' = G - \{u\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Comme

$$\begin{aligned} F(u) &\leq 5 \times 2 + 3(\Delta(G) - 2 + 1) + (\Delta(G) - 1) + (\Delta(G) - 1)(\Delta(G) - 2) \\ &\leq \Delta^2(G) + \Delta(G) + 8 < k^* \end{aligned}$$

il existe au moins une étiquette libre dans B qui peut être attribuée à u . Nous avons clairement obtenu un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' de G . Nous aboutissons alors à une contradiction.

4. G contient un 2-sommet u tel que ses voisins v et w sont adjacents, $d_G(v) = 4$ et ses deux autres voisins x et y (distincts de u et w) sont adjacents et $d_G(x) = 2$ (voir Figure 3.5(d)).

Par minimalité de G , $G' = G - \{u\}$ admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Comme

$$\begin{aligned} F(u) &\leq 5 \times 2 + 3(\Delta(G) - 2 + 2) + (\Delta(G) - 2) + (\Delta(G) - 1)(\Delta(G) - 2) \\ &\leq \Delta^2(G) + \Delta(G) + 10 < k^* \end{aligned}$$

il existe au moins une étiquette libre dans B qui peut être attribuée à u . Nous aboutissons alors à une contradiction.

Il est facile de vérifier que dans tous les cas, nous avons obtenu un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G , ce qui contredit notre hypothèse, et le théorème est ainsi prouvé.

□

En utilisant le résultat de Lih et Wang [33], nous pouvons affiner le Théorème 3.11, à condition que Δ soit suffisamment grand, pour le cas des graphes planaires extérieur 2-connexes.

Lemme 3.12 (Lih et Wang, [33]). *Tout graphe planaires extérieur 2-connexe avec un degré maximum $\Delta(G) \geq 7$ contient un 2-sommet u ayant au plus $\Delta(G) - 2$ sommets à une distance exactement deux.*

Nous montrons que

Théorème 3.13. *Pour tout graphe planaires extérieur 2-connexe G , avec un degré maximum $\Delta(G) \geq 7$. On a :*

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^2(G) + 6.$$

Démonstration. Supposons que le Théorème 3.13 est faux et soit G le plus petit contre-exemple. Soit $B = \{0, 1, \dots, k^*\}$ un ensemble contenant $k^* + 1$ étiquettes où $k^* = \Delta^2(G) + 6$. G contient un sommet u ayant la propriété décrite dans le Lemme 3.12 (voir Figure 3.6).

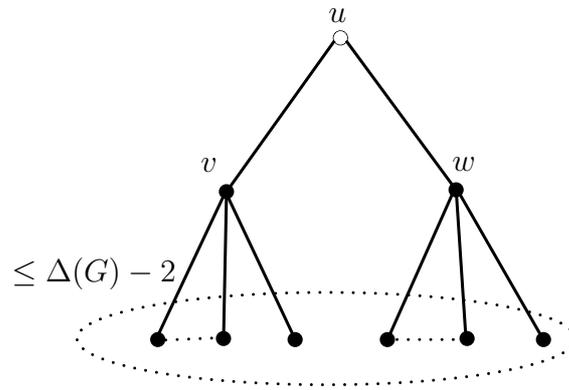


FIGURE 3.6 – Configurations inévitables dans un graphe planaire extérieur 2-connexe

Soient v et w les voisins de u . On considère le graphe G' tel que

$$G' = \begin{cases} G - \{u\} & \text{si } vw \in E \\ G - \{u\} + \{vw\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par minimalité de G , G' admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Il est facile de voir que

$$F(u) \leq 5 \times 2 + 3 \times (\Delta(G) - 2) + (\Delta(G) - 2)(\Delta(G) - 1) = \Delta^2(G) + 6 = k^*$$

Ainsi, l'étiquetage f de G' peut être étendu à un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G , ce qui contredit le choix de G , et le théorème est ainsi prouvé. □

3.5 $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes de degré moyen maximum borné

Dans cette partie nous nous intéressons à la question du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes de degré moyen maximum borné. Nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 3.14. Soit G un graphe de degré maximum Δ et de degré moyen maximum $mad(G)$.

$$\text{Si } mad(G) < \frac{9}{4} \text{ alors } \lambda_{3,2,1}(G) \leq \begin{cases} 20 & \text{si } \Delta \leq 3 \\ \Delta^2 + \Delta + 7 & \text{si } \Delta \geq 4 \end{cases}.$$

Démonstration. Supposons que le théorème est faux et soit H le plus petit contre exemple. On peut supposer que H est connexe, sinon par minimalité de H , on peut étiqueter indépendamment chaque composantes connexes. Soit $B = \{0, 1, 2, \dots, k^*\}$ un ensemble contenant $k^* + 1$ étiquettes avec $k^* = \max\{20, \Delta^2 + \Delta + 7\}$.

Fait 1. Le contre exemple H ne contient pas de 1-sommet.

Fait 2. Le contre exemple H ne contient pas une chaîne $xuvwy$ telle que $d_H(u) = d_H(v) = d_H(w) = 2$.

Preuve. Supposons que H contient une chaîne $xuvwy$ telle que u, v et w sont des 2-sommets. Considérons le graphe $H' = H - \{u, v, w\}$ qui par minimalité de H admet un k^* - $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f . Nous allons étendre l'étiquetage f à H comme suit. En comptant le nombre d'étiquettes disponibles pour étiqueter les sommets w et u dans cet ordre, on remarque que nous avons au moins 4 étiquettes libre dans B pour étiqueter u , puis au moins 1 étiquette libre dans B pour étiqueter w (et ce après avoir étiqueter u). Enfin, pour terminer nous étiquetons v , ce qui possible car

$$F(v) \leq 5 \times 2 + 3 \times 2 + 2(\Delta - 1) = 2\Delta + 14 < |B|$$

Nous pouvons donc étendre f à H , ce qui est une contradiction. \square

Maintenant, on définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - \frac{9}{4}$. D'après l'hypothèse émise sur le degré moyen maximum, la somme totale des poids est strictement négative. Dans la prochaine étape, on définit la règle de déchargement (**R**) puis on redistribue les poids, une fois le déchargement terminé, on obtient une nouvelle fonction poids ω^* . Durant la procédure de déchargement la somme totale des poids reste fixe. Néanmoins, nous pouvons montrer que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H)$. Ce qui nous donne la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

et nous pouvons conclure qu'aucun contre-exemple ne peut exister.

La règle de déchargement est définie comme suit :

(**R**) Tout 3^+ -sommet donne $\frac{1}{4}$ à son 2-sommet voisin.

Évaluons maintenant le nouveau poids de chaque sommet. Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. Par le Fait 1. $d \geq 2$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 2$. Observons que $\omega(v) = -\frac{1}{4}$.

D'après le Faît 2. v est adjacent à au moins un 3^+ -sommet. En appliquant **(R)** v reçoit au moins $\frac{1}{4}$, son nouveau poids est $\omega^*(v) \geq -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

Cas $d \geq 3$. Par **(R)** le sommet v satisfait $\omega^*(v) \geq d - \frac{9}{4} - d \times \frac{1}{4} \geq 0$.

à la fin de la procédure de déchargement, les nouveaux poids de tous les sommets sont positifs, nous avons bien la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

D'où, le contre-exemple H ne peut pas exister, ce qui conclut la preuve du Théorème. □

Étant donné que tout graphe planaire de maille g vérifie $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$, le corollaire suivant peut dériver du Théorème 3.14

Corollaire 3.15. *Soit G un graphe planaire de degré maximum Δ et de maille $g \geq 18$. Alors,*

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq \begin{cases} 20 & \text{si } \Delta \leq 3 \\ \Delta^2 + \Delta + 7 & \text{si } \Delta \geq 4 \end{cases}$$

3.6 $L(3, 2, 1)$ -étiqUetage des graphes de Halin cubiques

Dans cette section, nous attribuons une majoration du nombre $L(3, 2, 1)$ -étiqUetage de tout graphe de Halin cubique $G = (T \cup C, E)$. Rappelons qu'un sommet $v \in G$ est dit un sommet interne si $v \in T$ mais $v \notin C$.

Théorème 3.16. *Si $G = (T \cup C, E)$ est un graphe de Halin cubique alors :*

$$\lambda_{3,2,1}(G) \leq 31.$$

Démonstration. On prouve le théorème par induction sur le nombre de sommets internes de G . Soit $V_{int}(G)$ l'ensemble des sommets internes de G .

- Si $|V_{int}(G)| = 1$ alors $G = K_4$ et par conséquent la conclusion est évidente.

- Si $|V_{int}(G)| \geq 2$ alors on considère $P = u_0, u_1, \dots, u_\ell, \ell \geq 5$, la plus longue chaîne dans T . Comme P est de longueur maximum, tous les voisins de u_1 , excepté u_2 , sont des feuilles. Dans la suite de cette preuve, nous allons changer les notations en posant : $w = u_3, u = u_2, v = u_1$ et v_1, v_2 les voisins de v de C (Voir la Figure 3.7). Comme $d(u) = 3$, il existe une chaîne

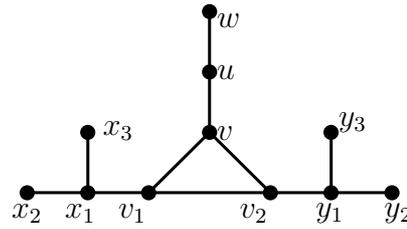


FIGURE 3.7 – Autour de la fin de la plus longue chaîne dans T

P_1 de u à x_1 ou y_1 telle que $P \cap P_1 = \{u\}$. Sans perte de généralités, on suppose que P_1 est une chaîne de u à y_1 . Étant donné que P est la plus longue chaîne dans T , P_1 est une chaîne de longueur au plus égale à 2.

1. Si P_1 est une chaîne de longueur 1 alors $u = y_3$ et $uy_1 \in E(T)$ (Voir Figure 3.8).

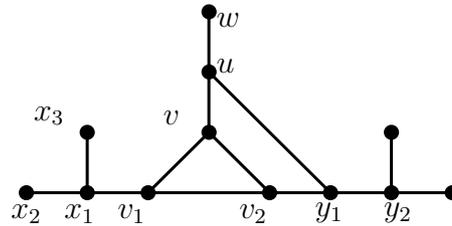
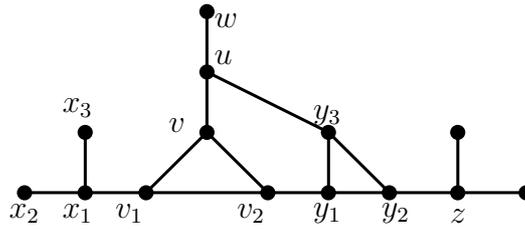


FIGURE 3.8 – Le cas où $u = y_3$

Considérons le graphe $G' = G \setminus \{v_1, v_2\} + \{vx_1, vy_1\}$. G' est un graphe de Halin cubique avec moins de sommets internes que G . Par hypothèse d'induction, G' admet un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f , utilisant des étiquettes dans l'ensemble $B = \{0, 1, 2, \dots, 31\}$. Nous allons étendre f à un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' de G , en utilisant des étiquettes dans B , comme suit. Premièrement, On pose $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v\}$. Ensuite, on affecte à v_1 l'étiquette de v dans f . Autrement dit, on pose $f'(v_1) = f(v)$. Enfin, nous allons étiqueter les sommets v et v_2 dans cet ordre. Comme $F(v) \leq 5 \times 2 + 3 \times 3 + 5 = 24 < |B|$, il existe au moins une étiquette disponible $a \in B$ pour étiqueter v , on pose $f'(v) = a$. De la même manière $F(v_2) \leq 5 \times 3 + 3 \times 3 + 5 = 29 < |B|$. D'où nous pouvons étiqueter v_2 et nous obtenons ainsi un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G avec 31 comme plus grande étiquette ce qui constitue une contradiction.

2. Si P_1 est une chaîne de longueur 2 alors $uy_3 \in E(T)$ et $y_2y_3 \in E(T)$. Soit z le voisin de y_2 différent de y_1 et y_3 (Voir Figure 3.9).

Soit $G' = G \setminus \{v_1, v_2\} + \{vy_1, vx_1\}$. G' est un graphe de Halin cubique avec moins de sommets internes que G . Par hypothèse d'induction, G' admet un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f , utilisant des étiquettes dans l'ensemble $B = \{0, 1, 2, \dots, 31\}$. Nous allons étendre f à un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage f' de G , en utilisant des étiquettes dans B , comme suit. Premièrement, On pose $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v\}$. Ensuite, on affecte à v_1 l'étiquette


 FIGURE 3.9 – Le cas où $uy_3 \in E(T)$

de v dans f . Autrement dit, on pose $f'(v_1) = f(v)$. Enfin, nous allons étiqueter les sommets v et v_2 dans cet ordre. Comme $F(v) \leq 5 \times 2 + 3 \times 3 + 6 = 25 < |B|$, il existe au moins une étiquette disponible $a \in B$ pour étiqueter v , on pose $f'(v) = a$. De la même manière $F(v_2) \leq 5 \times 3 + 3 \times 4 + 4 = 31 < |B|$. D'où nous pouvons étiqueter v_2 et nous obtenons ainsi un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage de G avec 31 comme plus grande étiquette ce qui constitue une contradiction.

□

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème du $L(3, 2, 1)$ -étiquetage dans les graphes. À travers quelques résultats connus sur les propriétés structurales des graphes planaires, nous avons amélioré la borne déjà existante pour la classe des graphes planaires de degré maximum d'au moins 12, des graphes planaires extérieurs et des graphes Halin cubique. Enfin, nous avons considéré $L(3, 2, 1)$ -étiquetage d'un graphe ayant un degré moyen maximum au plus $\frac{9}{4}$, ce qui nous a permis de déduire que $\Delta^2 + \Delta + 7$ étiquettes sont suffisantes pour avoir un $L(3, 2, 1)$ -étiquetage pour tout graphes planaires de maille au moins égale à 18.

Conclusion et perspectives

Le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage est un invariant qui commence à susciter l'intérêt de nombreux chercheurs de la théorie des graphes. Notre attention s'est portée sur l'attribution d'une majoration, en fonction du degré maximum, des graphes planaires, planaires extérieurs, des graphes Halin cubiques et des graphes de degré moyen maximum borné.

En utilisant quelques résultats connus sur les propriétés structurelles des graphes planaires, nous avons montré que pour tout graphe planaire G de degré maximum $\Delta \geq 12$, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 2\Delta^2 + 23\Delta + 63$. Nous avons ensuite réduit cette borne pour la classe des graphes planaires extérieurs, nous avons montré que $\Delta^2 + 2\Delta + 10$ étiquettes sont suffisantes pour étiqueter tout graphe planaire extérieur. Si de plus, le graphe est planaire extérieur 2-connexe de degré maximum $\Delta \geq 7$, alors $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^2 + 6$.

Nous avons aussi prouvé, par un raisonnement par récurrence, que pour tout graphe de Halin cubique, $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 31$.

Enfin, en utilisant la méthode de déchargement, nous avons démontré que pour tout graphe G de degré maximum Δ et de degré moyen maximum $\text{mad}(G) < \frac{9}{4}$ on a $\lambda_{3,2,1}(G) \leq 20$ si $\Delta \leq 3$ et $\lambda_{3,2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta + 7$ sinon. Les résultats obtenus nous ont permis de déduire une nouvelle borne pour tout graphe planaire de maille au moins égale à 18.

Nous pensons que ce travail contient quelques résultats qui pourraient faire l'objet d'un article scientifique. Dans ce sens, nous proposons de les compléter par les problèmes suivants :

Question 1. Peut-on étendre la borne supérieure des graphes planaires pour tout degré maximum Δ ?

Question 2. Quel est le nombre $L(3, 2, 1)$ -étiquetage des graphes d -dégénérés et des graphes sans mineur K_4 ?

Question 3. Peut-on montrer que le problème de décider si un graphe planaire peut être étiqueté avec k étiquettes est un problème NP -complet ?

Bibliographie

- [1] G. Agnarsson. and M. Halldórsson. Coloring powers of planar graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(4) :651–662, 2003. (Cité en page 22)
- [2] S. Amanathulla. and M. Pal. $L(3, 2, 1)$ - and $l(4, 3, 2, 1)$ -labeling problems on interval graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 14 :205–215, 2017. (Cité en page 26)
- [3] K. Appel. and W. Haken. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. *Illinois J. Math.*, 20, page 218–297, 1976. (Cité en page 20)
- [4] C. Berge. *Graphs and hypergraphs*. 1973. (Cité en page 3)
- [5] C. Berge. *The theory of graphs*. Courier Corporation, 2001. (Cité en page 3)
- [6] A. A. Bertossi. and M. A. Bonuccelli. Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 3(4) :441–449, 1995. (Cité en page 16)
- [7] J. A. Bondy. and U. S. R. Murty. *Théorie des graphes*, 2008. (Cité en page 3)
- [8] O. V. Borodin. A generalization of kotzig’s theorem and prescribed edge coloring of planar graphs. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 48 :1186–1190, 1990. (Cité en page 27)
- [9] O. V. Borodin., H. J. Broersma., A. Glebov., and J. Van den Heuvel. Stars and bunches in planar graphs. part ii : General planar graphs and colourings. *CDAM Reserach Report*, 5 :2002, 2002. (Cité en pages 18 et 22)
- [10] Y. Bu. and X. Zhu. An optimal square coloring of planar graphs. *Journal of combinatorial optimization*, 24(4) :580–592, 2012. (Cité en page 22)
- [11] T. Calamoneri. The $L(h, k)$ -labelling problem : An updated survey and annotated bibliography. *Comput. J.*, 54(8) :1344–1371, 2011. (Cité en page 19)
- [12] T. Calamoneri, A. Pelc, and R. Petreschi. Labeling trees with a condition at distance two. *Discret. Math.*, 306(14) :1534–1539, 2006. (Cité en page 18)
- [13] M.-L. Chia., D. Kuo., H.-Y. Liao., C.-H. Yang., and R. K. Yeh. $L(3, 2, 1)$ -labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15(6) :2439–2457, 2011. (Cité en page 26)

- [14] J. Clipperton., J. Gehrtz., Z. Szaniszló., and D. Torkornoo. $L(3, 2, 1)$ -labeling of simple graphs. Technical report, VERUM, Valparaiso University, 2006. (Cité en pages 25 et 26)
- [15] W. D. Cranston., S-J. Kim., and G. Yu. Injective colorings of graphs with low average degree. *Algorithmica*, 60(3) :553–568, 2011. (Cité en page 21)
- [16] Z d. Shao. The $l(3, 2, 1)$ -labeling problem on graphs. *J. Qufu Normal University*, 30(3) :24–28, 2004. (Cité en page 26)
- [17] W. Dong. $L(p, q)$ -labeling of planar graphs with small girth. *Discrete Applied Mathematics*, 284 :592–601, 2020. (Cité en page 19)
- [18] W. Dong. and W. Lin. Injective coloring of planar graphs with girth 6. *Discrete Math*, 313(12) :1302–1311, 2013. (Cité en page 21)
- [19] W. Dong. and W. Lin. Injective coloring of planar graphs with girth 5. *Discrete Math*, (315–316) :120–127, 2014. (Cité en page 21)
- [20] W. Dong. and W. Lin. An improved bound on 2-distance coloring plane graphs with girth 5. *Journal of Combinatorial Optimization*, 32 :645–655, 2016. (Cité en page 22)
- [21] W. Dong. and W. Lin. On 2-distance coloring of plane graphs with girth 5. *Discrete Applied Mathematics*, 217 :495–505, 2017. (Cité en page 22)
- [22] W. Dong. and B. Xu. 2-distance coloring of planar graphs with girth 5. *Journal of Combinatorial Optimization*, 34 :1302–1322, 2017. (Cité en page 22)
- [23] L. Esperet. and P. Ochem. Oriented colorings of 2-outerplanar graphs. *Inform. Process. Lett.*, 101 :215–219, 2007. (Cité en page 31)
- [24] L. Euler. Solution problematics ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 128–140, 1741. (Cité en pages 1 et 5)
- [25] J. Fiala., P. A. Golovach., and J. Kratochvíl. Computational complexity of the distance constrained labeling problem for trees (extended abstract). volume 5125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 294–305. Springer, 2008. (Cité en page 17)
- [26] J. P. Georges. and D. W. Mauro. Generalized vertex labeling with a condition at distance two. *Congressus Numerantium.*, 109 :141–159, 1995. (Cité en page 18)
- [27] J. R. Griggs. and R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance 2. *SIAM J. Discrete Math.*, (5) :586–595, 1992. (Cité en page 16)
- [28] G. Hahn., A. Raspaud., and W. Wang. On the injective coloring of k_4 -minor free graphs. *Preprint*, 2006. (Cité en page 21)
- [29] S. G. Hartke, S. Jahanbekam., and B. Thomas. The chromatic number of the square of subcubic planar graphs. *arXiv preprint arXiv :1604.06504*, 2016. (Cité en page 22)

- [30] P. Jacko. *Distance Labelings of Graphs*. PhD thesis, P. J. Safarik University, 2003. (Cité en page 17)
- [31] A. Karen., P. M. van Hoesel Stan., M. C. A. Koster Arie., M. Carlo., and S. Antonio. Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Ann. Oper. Res.*, 153(1) :79–129, 2007. (Cité en page 16)
- [32] C. Kuratowski. Sur le probleme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta mathematicae*, 15(1) :271–283, 1930. pas de citations
- [33] K. W. Lih and W. F. Wang. Coloring the square of an outerplanar graph. *Taiwanese J. of Math.* 10, pages 1015–1023, 2006. (Cité en page 32)
- [34] J. Z. Liu. and Z. D. Shao. The $l(3, 2, 1)$ -labeling problem on graphs. *Mathematica Applicata*, 17(4) :593–602, 2004. (Cité en pages 0, 24, et 27)
- [35] E. L. Lloyd. and S. Ramanathan. On the complexity of distance-2 coloring. In *Computing and Information - ICCI'92, Fourth International Conference on Computing and Information, Toronto, Ontario, Canada, May 28-30, 1992, Proceedings*, pages 71–74. (IEEE) Computer Society, 1992. (Cité en page 17)
- [36] B. Lužar., R. Škrekovski., and M. Tancer. Injective colorings of planar graphs with few colors. *Discrete Math*, 309(18) :5636–5649, 2009. (Cité en page 21)
- [37] M. Molloy and M. R. Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 94(2) :189–213, 2005. (Cité en pages 18, 19, et 22)
- [38] M. Murugan., P. Sriraman., and M. Suriya. K-number of complete muti-partite graphs. *GANITA*, 71(1) :67–73, 2021. (Cité en page 26)
- [39] M. Murugan. and M. Suriya. K-number of special family of graphs. *International J.Math. Combin.*, 1 :77–85, 2020. (Cité en page 26)
- [40] H. A. Taha. *Operations research : an introduction*. Pearson Education India, 2013. (Cité en page 1)
- [41] C. Thomassen. The square of a planar cubic graph is 7-colorable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 128 :192–218, 2018. (Cité en page 22)
- [42] J. van den Heuvel. and S. McGuinness. Coloring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory*, 42(2) :110–124, 2003. (Cité en pages 18 et 22)
- [43] W-F. Wang. and K-W. Lih. Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 17(2) :264–275, 2003. (Cité en page 22)
- [44] G. Wegner. Graphs with given diameter and a coloring problem : Technical report. *University of Dortmund, Germany*, 1977. (Cité en page 22)
- [45] W. L. Winston. *Operations research : applications and algorithms*. Cengage Learning, 2022. (Cité en page 1)

BIBLIOGRAPHIE

- [46] R. K. Yeh. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discret. Math.*, 306(12) :1217–1231, 2006. (Cité en page 19)
- [47] S. Zhang. and Q. Ma. Labelling of some planar graphs with a condition at distance two. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 24 :421–426, 2007. (Cité en page 19)