



**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**  
**DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

Laboratoire d'étude et recherche en technologie industrielle

Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du Diplôme de Master en  
Fabrication mécanique et productique

Titre  
Etude vibratoire d'une plaque en flexion par éléments finis  
(ANSYS)

Proposé et encadré par :

**Dr.KIRAD Abdelkader**

Réalisé par :

**Mr.ZEDDAM Loukmane**

**Mr.GUENNAZ Redhouane**

Année universitaire 2019/2020

## Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Département de Mécanique de l'université Saad Dahlab de Blida.

Tous d'abord, nous tenons à remercier Dieu clément et Miséricordieux de nous avoir données la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Nous remercions profondément l'encadreuse du mémoire Dr. Kirad et les membres de jury qui nous font l'honneur de présider et d'examiner ce modeste travail.

Nous sommes reconnaissantes à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation avec beaucoup de dévouement et de compétence en n'oubliant jamais les personnes qui ont participé de près ou de loin à ce modeste travail.

Sans oublier en dernier, nos remerciements à tous nos familles nos amis pour leur aide, leurs patientes compréhensions et leur encouragement.

## Dédicaces 01

*Avant tout je remercie Allah qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail que je dédie : A ma chère et tendre mère*

*A celle qui a tant souffert sans me faire souffrir qu'elle trouve dans ce mémoire le témoignage de ma reconnaissance de son affection pour les sacrifices, l'extrême amour et de bonté qu'elle m'a offerts. Et particulièrement à mon père*

*A qui je dois ma réussite et tout le respect, qu'il trouve ici l'expression de mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi.*

*A ma femme et à toute ma famille, A mon binôme loukmane et tous mes amis de l'université*

*A tous ceux que J'aime et qui m'aiment et qui me sont très chers.*

**GUENNAZ  
REDHOUANE**

## Dédicaces 02

*Avant tout je remercie Allah qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail que je dédie : A ma chère et tendre mère*

*A celle qui a tant souffert sans me faire souffrir qu'elle trouve dans ce mémoire le témoignage de ma reconnaissance de son affection pour les sacrifices, l'extrême amour et de bonté qu'elle m'a offerts. Et particulièrement à mon père*

*A qui je dois ma réussite et tout le respect, qu'il trouve ici l'expression de mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi.*

*A ma femme et à toute ma famille, A mon binôme Redhouane et tous mes amis de l'université*

*A tous ceux que J'aime et qui m'aiment et qui me sont très chers.*

**ZEDDAM  
LOUKMANE**

## ملخص

تعتبر دراسة سلوك اللوحات موضوعاً مهماً جداً ليس فقط في مجال الهندسة المدنية ولكن أيضاً في مجال الميكانيكا والملاحة الجوية والميكانيكا الحيوية وما إلى ذلك. دراسة الصفائح تحتل مكاناً مهماً جداً في البحث عالمي. يتكون العمل المقدم من اهتزاز الصفائح ، من ناحية أخرى ، خضع بحث قيم الضغوط والنزوح لجسم معين يتعرض لقوة يحدد المرء توزيع الضغط في نهاية التوطيين الحد الأقصى للضغط. خارجية متعامدة. يتم فحص التردد الطبيعي هو تردد الإثارة ، حتى لا يكون هناك صدى. الكلمات المفتاحية: العناصر المحدودة ، الإجهاد ، الإزاحة ، القوة ، الصفيحة ، التردد ، الرنين.

## RESUME

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important non seulement dans le domaine de génie civil mais aussi dans le domaine de mécanique, aéronautique, biomécanique etc..... L'étude des plaques occupe une place très importante dans la recherche scientifique.

Le travail présenté consiste à vibration des plaques, D'autre part la recherche des valeurs des contraintes et déplacements subi un corps donné soumise aune force extérieure perpendiculaire. On détermine la distribution de la contrainte a fin de localisation la contrainte maximale.

Est vérifié la fréquence propre est la fréquence excitation, pour ne pas avoir une résonance.

Mots clés : éléments finis, contrainte, déplacement, force, une plaque, fréquence, résonance.

## ABSTRACT

The study of the behavior of plates is a very important subject not only in the field of civil engineering but also in the field of mechanics, aeronautics, biomechanics etc. .... The study of plates occupies a very important place in research scientist.

The presented work consists in vibration of the plates, On the other hand the research of the values of the stresses and displacements undergone a given body subjected to a perpendicular external force. One determines the distribution of the stress at the end of localization the maximum stress.

Is checked the natural frequency is the excitation frequency, so as not to have a resonance.

Keywords: finite elements, stress, displacement, force, a plate, frequency, resonance.

# Table de matière

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I

### Généralités sur les plaques

I-1 : introduction.....	2
I-2 : problématique.....	3
I-3 : Recherche bibliographique.....	3
I-4 : Définition des plaques.....	6
I-5 : Différents types de plaques.....	7
I-6 : Définition d'éléments finis.....	7
I-7 : Types d'éléments finis.....	7
I-8 : Solution par éléments finis des problèmes physiques.....	8
I-9 : Attributs d'un élément finis.....	10

## Chapitre II

### Éléments finis

II-1 : introduction.....	11
II-2 : hypothèses fondamentales.....	11
II-3 : définition et notations générales.....	13
II-4 : élément basé sur la théorie de Kirchhoff.....	16
II-5 : matrice de rigidité de flexion basée sur la théorie de Kirchhoff.....	17
II-6-1 : introduction à la dynamique des structures.....	28
II-6-2 : principe de la méthode des éléments finis en dynamique.....	28
II-6-2-1 : Discrétisation spatiale.....	28
II-6-2-2 : Formulation élémentaire.....	28
II-6-2-3 : formulation globale.....	29
II-7 : Méthode de calcul des matrices masse.....	30

II-7-1 : Application du théorème de l'énergie cinétique.....	30
II-7-2 : Application du théorème de travaux virtuels.....	31
II-8 : Matrice de masse élémentaire.....	33
II-8-1 : Flexion des plaques.....	33

## **CHAPITRE III**

### **APPLICATION PAR ANSYS ET RESULTAT**

III-1 : Introduction.....	34
III-2 : Préprocesseur.....	35
III-3 : Solution processor.....	35
III-4 : Support étudié (EX1).....	36
III-5 : Support étudié (EX2).....	48
Conclusion générale.....	55
Bibliographie.....	56
ANNEX.....	57

## Liste des figures

Figure1-1 : processus de l'analyse par éléments finis.....	09
Figure2-1 : plaque en 3D.....	11
Figure2-2 : variation des contraintes suivant l'axe OZ.....	11
Figure2-3 : Notation d'une plaque.....	13
Figure2-4 : Eléments de plaque en flexion.....	17
Figure2-5 : Repère cartésien.....	17
Figure2-5 : Repère adimensionnel.....	17
Figure2-6 : Elément rectangulaire à huit degrés de liberté.....	33
Figure3-1 : Support étudiant (EX1).....	36
Figure3-2 : Déplacement total .....	37
Figure3-3 : Contraintes total .....	37
Figure3-4 : Déplacement total en fonction de long.....	38
Figure3-5 : la contrainte total en fonction de long.....	39
Figure3-6 : Déplacement total en fonction de long.....	40
Figure3-7 : la contrainte total en fonction de long.....	40
Figure3-8 : les fréquences propres .....	41
Figure3-9 : Amplitude en fonction de fréquence .....	47
Figure3-10 : Support étudié (Ex2) .....	48
Figure3-11 : Déplacement total.....	49
Figure3-12 : Contrainte total .....	49
Figure3-13 : Déplacement total en fonction de long.....	50
Figure3-14 : Contrainte total en fonction de long.....	51
Figure3-15 : Déplacement total en fonction de long.....	52
Figure3-16 : Contrainte total en fonction de long.....	52
Figure3-17 : les fréquences propres .....	53
Figure3-18 : Amplitude en fonction de fréquence .....	53



Figure1(l'annexe) : Pont tacoma.....	57
Figure2(l'annexe) : exemple réel sur la fréquence Natural .....	57

## Liste des symboles

$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  : vecteur de déformation.

$\{\boldsymbol{\sigma}\}$  : vecteur de contraintes.

$\{\boldsymbol{q}\}$  : vecteur de déplacement.

$\{ \}$ : Transposé d'un vecteur

[K] : Matrice de rigidité.

$K_{ij}$ : Coefficients de la matrice de rigidité.

[ ]: Transposé d'une matrice.

$\partial$  : Dérivée partielle.

$\delta$  : Symbole de Kronecker.

E : Module de « Young »

$\nu$  : Coefficient de poisson

$\beta$  : représente l'angle de battement [rad]

$\xi$  : représente l'angle de trainée [rad]

$\theta$  : représente l'angle de torsion [rad]

$t$  : Le temps [s]

$T$  : Période qui s'exprime en seconde [s]

$f$  : La fréquence exprimée en Hertz [Hz] ou [1/s]

$A$  : L'amplitude maximale[m]

$\omega$  : La pulsation [rad/s]

$\varphi$  : Déphasage [rad]

$L$  : Lagrangien du système [Joule]

$T$  : L'énergie cinétique du système [Joule]

$U$  : L'énergie potentielle du système [Joule]

$q(t)$  : La vitesse généralisée du système [m/s]

$\dot{q}(t)$  : L'accélération généralisée du système [m/s<sup>2</sup>]

$x$  : Mouvement unidimensionnel [m]

$\theta$  : Mouvement rotationnel [rad]

$P^{\rightarrow}$  : Poids de la masse  $m$ . [N]

$\Delta l$  : Allongement [mm]

$M$  : La masse [Kg]

$\omega_0$ : La pulsation propre [rad/s]

$E$  : L'énergie totale (mécanique) [joule]

$l$  : La longueur du ressort. [M]

$\alpha$  : Coefficient de frottement visqueux. [N.s/m]

$D$  : Énergie de dissipation [joule]

$\vec{u}, \vec{v}$  : Les vecteurs unitaires [sans unité]

$\{u\}^e$  : Vecteur des déplacements en un point de l'élément.

$[u(x, y, z)]$  : Matrice des fonctions base de l'approximation spatiale

(Généralement des fonctions polynomiales en x, y et z).

$[N(x, y, z)]$  : Matrice des fonctions d'interpolation pour l'élément.

$\{f(t)\}^e$  : Vecteur des coordonnées généralisés, fonctions inconnues du temps.

$\{q(t)\}$  : Vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément.

$\delta$  : Masse volumique de l'élément.

$[K]$  : La matrice de rigidité de la structure obtenue par assemblage des matrices élémentaires.

$[M]$  : La matrice de masse de la structure obtenue par assemblage des matrices élémentaires.

$F(t)$  : La force extérieure appliquée sur la structure.

$v$  : La vitesse de la masse élémentaire

$s$  : la section de la poutre

$A$  : l'aire de l'élément triangulaire.

$E$  : épaisseur de l'élément

# Introduction générale

## **I.1 : Introduction :**

Le calcul des structures complexes nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux-structures. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification des structures complexes.

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant à obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Top, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des Eléments Finis.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent selon la nature du problème à résoudre en trois catégories. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, où on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides

Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur, qu'à l'ingénieur, pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamique des plaque est indispensable.

Le travail réalisé est organisé en trois 3 chapitres :

Dans un premier temps, le chapitre1 effectue une revue historique sur plaques du fait de leur importance, ensuite en autre plus définition est différents types des plaques est solution par éléments finis des problèmes physique.

Dans le chapitre 2 effectue une hypothèse fondamentales (théorie Kirchhoff, théorie de hencky-mindlin), principe de méthode de calcul des matrices masse, et application du théorème de travaux virtuels, est flexion des plaque.

Dans le chapitre3 présente une simulation numérique de la support par le code de calcul éléments finis ANSYS, pour déterminer les fréquences propres, les modes propres, les contraintes, les déplacements est les réponses vibratoires, Son objectif est la modulation des fréquences pour éviter la résonance

**Chapitre : I**  
**Généralités sur les plaques**

## **I-1 : introduction :**

Une plaque est une structure solide limitée par deux plans parallèles. Les faces de la plaque et un bord cylindrique qui est perpendiculaire aux faces, c'est-à-dire le bord de la plaque. La distance entre les faces de la plaque est l'épaisseur  $h$  de la plaque et la surface équidistance des deux faces de la plaque est connue sous le nom de la surface moyenne. Les éléments de plaques peuvent être utilisés pour des modélisations variées :

- Soit pour présenter des solides dont une dimension reste petite devant les autres et pour lesquels la surface moyenne peut être assimilée à un plan, ou à un ensemble des plans.
- Soit pour approcher des surfaces moyennes modérément courbes par des assemblages de facette planes.

Les plaques sont sollicitées dans leur plan, de façon membranaire, ou dans la direction perpendiculaire au plan moyen, c'est à dire en flexion. Elles constituent certainement le type de structures le plus répandu et servent au calcul des tôles planes, des hourdis, des dalles, des planchers, des semelles des fondations et des radiers. Les plaques peuvent avoir des formes très compliquées et présenter des conditions d'appuis ou des liaisons (appui simple, articulation et encastrement) et des chargements quelconques (charges concentrés ou réparties, charges appliquées dans le plan ou perpendiculairement au plan), tout ça pour des raisons liées à la destination des ouvrages,

Les hypothèses cinématiques et statiques aboutissent à trois familles d'éléments finis de plaques.

- 1- Les éléments finis des plaques minces, basées sur l'hypothèse de Kirchhoff [1], l'énergie de déformation due aux cisaillements transversaux est négligée.
- 2- Les éléments finis des plaques d'épaisseur modérée vérifier l'hypothèse Mindlin-Reissner
- 3- les éléments finis des plaques très épaisses (éléments de volumes). Le développement des éléments finis du type déplacement en utilisant la théorie classique des plaques (théorie des plaques minces) induit une difficulté supplémentaire. Cette difficulté supplémentaire provient des hypothèses qui ont été introduites pour de convertir les équations élastiques tridimensionnelles en un modèle théorique de plaque dans lequel la déformation de toute la plaque est exprimée uniquement en fonction de la flèche  $w$  de la surface moyenne. La plus importante de ces hypothèses est l'hypothèse de Kirchhoff concernant les lignes droites qui sont normales avant déformation et qui restent droites et normales à la surface moyenne après déformation. Du fait que la théorie classique des plaques est caractérisée par une seule variable  $w$  a des avantages considérables mais implique aussi que la théorie classique des plaques diffère d'une manière significative de la théorie élastique bidimensionnelle ou tridimensionnelle. Par exemple les équations différentielles d'équilibre quand elles sont exprimées en fonction des déplacements sont d'ordre deux pour la théorie élastique alors qu'elles le sont d'ordre quatre pour dans la théorie des plaques. Pour être admissible, le champ des déplacements des éléments développés dans le cadre de la théorie classique des plaques doit avoir une continuité  $C1$  c'est à dire que  $w$  et les

## Chapter I: Généralités sur les plaques

dérivées premières de  $w$  doivent être continus, ceci complique considérablement le développement des éléments et dans certains cas cette condition de continuité peut être assouplie tout en permettant le développement d'éléments utiles (non conformes).

### **I-2 : problématique :**

L'analyse numérique des plaques par la méthode des éléments finis a connu ces dernières années une évolution considérable. La formulation des éléments ne se limite pas à l'utilisation du champ des déplacements, mais récemment, à l'utilisation du champ de déformation pour la formulation des nouveaux éléments, qui a connu également une nouvelle évolution.

Dans cette recherche, premièrement, on s'intéresse à l'étude de certains éléments à travers diverses applications et la détermination des problèmes rencontrés (blocage) dans le domaine

D'application. Deuxièmement, une nouvelle contribution dans la formulation des éléments à base du champ de déformation dans le but d'enrichir la bibliothèque existante.

### **I-3 : Recherche bibliographique :**

La première impulsion ayant un énoncé mathématique de problèmes de plaque a été probablement faite par Euler, qui en 1776, a effectué une analyse des problèmes des vibrations libres de plaque. Chladni, physicien allemand a découvert les différents modes de vibrations libres. Dans les expériences sur les plaques horizontales, il a utilisé une poudre uniformément répartie, qui faisait régulièrement des schémas après induction d'une vibration.

La poudre accumulée le long des lignes nodales, où il n'y a pas eu lieu des déplacements verticaux. J. Bernoulli a tenté de justifier en théorie, les résultats de ces expérimentations acoustiques. La solution de Bernoulli est basée sur les précédents travaux aboutissant à la théorie de la flexion de faisceau d'Euler-D. Bernoulli a présenté la plaque en tant que système de bandes droites perpendiculaires l'une à l'autre, chaque bande considérée fonctionnant comme un faisceau. Mais l'équation différentielle régissant, à distinguer des approches actuelles, ne contient pas le moyen terme.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle de plaque, dans laquelle le phénomène de voilement est négligé, il a reçu un prix par l'Académie de Paris en 1816 pour ce travail. Le chercheur Lagrange, a été l'un des commentateurs de ce travail, il a corrigé les résultats de Germain en ajoutant le terme manquant, donc, il fut la première personne qui à présenter correctement l'équation de plaque.

Cauchy et Poisson étaient les premiers à formuler le problème de plaque en flexion sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. Expansion toutes les grandeurs caractéristiques en série, ils ont conservé seulement les termes du premier ordre de petitesse.

De cette manière, ils ont obtenu l'équation différentielle régissant pour la flexion qui coïncide entièrement avec la célèbre équation de Germain-Lagrange. En 1829, Poisson élargi avec succès l'équation de plaque de Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique. Dans cette solution, cependant, la rigidité de la plaque en flexion  $D$  est définie comme étant égale à un terme constant.



## Chapter I: Généralités sur les plaques

Poisson a également suggéré l'établissement de trois conditions aux limites pour n'importe quel point sur une frontière libre. Les conditions aux limites dérivées de Poisson et la question sur le nombre et la nature de ces conditions a fait l'objet de beaucoup de controverses et a fait l'objet d'une recherche plus poussée.

La première théorie de la flexion des plaques est associée au chercheur Navier, qui a examiné l'équation générale de plaque en fonction de la rigidité «  $D$  » de plaque épaisse. Il a également mis en place une méthode "exacte" qui transforme l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation des séries trigonométriques de Fourier.

En 1850, Kirchhoff a présenté une thèse sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de bases indépendantes, qui sont désormais largement

Reconnues dans la théorie de la flexion des Plaques et sont connues sous le nom « hypothèses de Kirchhoff ». En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié, l'énergie fonctionnelle 3D de la théorie d'élasticité des plaques pliées. En exigeant qu'elle soit stationnaire, il a obtenu l'équation de Lagrange-Germain comme l'équation d'Euler. Il a également fait observer qu'il existe seulement deux conditions aux limites sur le bord d'une plaque. D'autres contributions importantes de Kirchhoff sont la découverte l'équation de la fréquence des plaques et de l'introduction de la méthode des déplacements virtuels dans la solution des problèmes de plaque. Kirchhoff a contribué à la théorie physique clarifiée de la théorie de flexion de plaque et a promu son utilisation très répandue dans la pratique.[2]

Lord Kelvin (Thomson) et Tait ont donné un aperçu supplémentaire relatif à la condition de la limite d'équation en convertissant les moments de torsion, le long d'une plaque dans les forces de cisaillement. Ainsi, les bords ne sont soumis qu'aux deux forces : cisaillement et moment. Un livre de Kirchhoff qui contient la traduction de nombreux commentaires précieux par Saint-Venant : Le plus important étant l'extension de l'équation différentielle des plaques minces de Kirchhoff, qui a considéré, d'une manière mathématique exacte, l'action combinée de la flexion et de l'effort tranchant. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy et Poisson en règle générale, sont divergentes.

La solution de plaques rectangulaires, avec deux simples appuis en parallèle et les deux autres appuis arbitraires, a été résolue par Levy à la fin du 19ème siècle.

A la fin du 19ème et début du 20ème siècle, les chantiers navals ont changé leurs méthodes de construction avec le bois en le remplaçant par l'acier. Ce changement dès les matériaux de structure, a été extrêmement fructueux dans le développement des différentes théories de plaque. Des scientifiques russes ont apporté une contribution significative à l'architecture navale en étant les premiers à remplacer les anciennes traditions commerciales avec les théories mathématiques de solides. En particulier, Krylov et son élève Boubnov ont largement contribué à la théorie des plaques minces en flexion et en extension des rigidités.

Boubnov a mis les bases de la théorie des plaques souples, et il a été le premier qui a introduire une classification moderne de plaque. Boubnov a proposé une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles de l'élasticité et il a composé des tables des déplacements maximaux et de moment de flexion maximal pour les plaques de diverses propriétés. Ensuite, Galerkin a développé cette méthode et l'appliquée à l'analyse de plaque en

## Chapter I: Généralités sur les plaques

flexion. Galerkin a recueilli de nombreux problèmes de flexion pour les plaques de forme arbitraire dans une monographie.

Timoshenko (1921) a apporté une importante contribution à la théorie et à l'application de l'analyse de plaque en flexion. La théorie de Timoshenko est parmi les nombreuses contributions importantes de solutions de plaques circulaires compte tenu de grands déplacements et la formulation des problèmes de stabilité élastique. Timoshenko et Woinowsky-Krieger ont publié une monographie fondamentale qui représentait une profonde analyse de divers problèmes de la flexion des plaques. [3] [4]

Des études vastes dans le domaine de la théorie des plaques en flexion et de ses diverses applications ont été effectuées par des savants éminents, tels que Hencky, Huber, von Karman, Nadai, Foppl. Hencky a fait une contribution à la théorie des grandes déformations et à la théorie générale de la stabilité élastique des plaques minces. Nadai a largement associé la théorie et l'expérimentale à une vérification de l'exactitude de la théorie de plaque de Kirchhoff. Il a traité les différents types de singularités de plaques à raison d'une application de la force concentrée, des effets de point d'appui, etc. Les équations générales pour les grands déplacements des plaques de très mince épaisseur ont été simplifiées par Foppl qui a utilisé la fonction de contrainte agissant dans le plan médian de la plaque. La forme définitive de l'équation différentielle de la théorie de grand déplacement, cependant, a été développée par von Karman. Il a aussi fait des recherches sur le comportement en voilement de plaques.

Huber, a développé une théorie de l'approximation de plaques orthotropes et a soumis à résoudre les plaques ayant une distribution non symétrie des charges et des moments ponctuels. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropes ont été élaborées par Gehring et de Boussinesq. Lekhnitskii a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et l'application des analyses linéaires et non linéaires des plaques anisotropes. Il a également mis au point la méthode des variables complexes appliquée à l'analyse des plaques anisotropes.

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une autre impulsion forte vers des recherches analytiques plus rigoureuse des problèmes des plaques. Les plaques soumises à une force dans plan, le comportement en voilement, et des problèmes de vibration, les plaques raidies, etc., ont été analysés par un certain nombre de scientifiques et d'ingénieurs.

E.Reissner a mis au point une théorie rigoureuse de plaque qui a considère les déformations provoquées par les forces de cisaillement transversal. [5] [6]

Les œuvres de Volmir et Panov ont été consacrés essentiellement à la solution des problèmes non linéaires de plaque en flexion.

L'équation gouvernante d'une plaque mince rectangulaire soumise à des forces de compression directe  $N_x$  a d'abord été retirée par Navier. Le problème pour un voilement de plaque simplement appuyée et soumis directement à la compression constante des forces agissant dans un seul et deux directions a été résolu par Bryan en utilisant la méthode de l'énergie. Cox, et Hartmann, ont présenté des solutions de divers problèmes de voilement des plaques minces rectangulaires en compression, tandis que Dinnik Nadai, Meissner, etc., ont

## Chapter I: Généralités sur les plaques

achevé le problème de flambement des plaques circulaires compressées. Un effet des forces de cisaillement direct sur le flambement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée a d'abord été étudié par Skan et Southwell. Le comportement d'un voilement d'une plaque rectangulaire sous une charge non uniforme et des forces de compression, ont été étudiés par Timoshenko, Gere et Boubnov. Le comportement en voilement des plaques de différentes formes on été analysées par Kannan et al. Levy, Marguerre,... Une analyse complète de flambement linéaire et non-linéaire pour les problèmes des plaques minces de différentes formes dans le cadre de divers types de charges, ainsi que d'une présentation de résultats disponibles pour la critique des forces et les modes de Flambement, qui peut être utilisé dans la conception technique, ont été présentés par Timoshenko et Gere, Gerard et Becker, Volmir, Cox.

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant soit le principe D'Alambert ou la formulation de travail basé sur la conservation de l'énergie. La première solution exacte du problème des vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont deux côtés opposés sont simplement appuyés, a été réalisée par Voight. Ritz a utilisé le problème de vibration d'une plaque rectangulaire avec des bords libres et à démontrer la fameuse méthode libre de Rayleigh pour l'extension du principe d'obtention de bornes supérieures sur les fréquences de vibration. Poisson a analysé l'équation des vibrations libres de plaques circulaires. Les monographies par Timoshenko et Young, Den Hanog, Thompson, etc., contiennent une analyse et de conception des vibrations libres et forcées des plaques de différentes formes. Un ouvrage de référence par Leissa présente une série de résultats disponibles pour les fréquences et les modes des formes des vibrations libres de plaques pourraient être fournis pour la conception et pour un chercheur dans le domaine de vibrations des plaques. [7]

La tendance récente dans le développement des théories de plaque se caractérise par une forte dépendance moderne des ordinateurs à grande vitesse et le développement de l'ordinateur le plus complet axée sur les méthodes numériques, ainsi que par l'introduction de plus de rigueur les théories à l'égard de divers effets physiques, types de chargement, etc. Le résumé ci-dessus est un très bref aperçu de l'historique de la plaque de flexion théorie et son application. [8]

### **I-4** :Définition des plaques :

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan) et par une petite épaisseur (notée  $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. [9]

### **I-5 : Différents types de plaques :**

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories.

1) Les plaques isotrope : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (: respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions mécaniques.

2) Les plaques orthotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique. Des bâtiments et d'ouvrages d'art .[10]

3) Les plaques anisotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

### **I-6 : Définition :**

- ANSYS est l'un des grands développeurs et logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis afin de résoudre des modèles discrétisés.
- La MEF est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier des structures continues ayant des propriétés géométriques et des conditions de charges appliquées. Donc, elle est bien adaptée à l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces. Puisqu'elle seule aujourd'hui est capable de résoudre ce type de problème et toute généralité. Elle est donc auxiliaire aux plus précieux pour l'ingénieur.

### **I-7 : types d'éléments finis :**

Les différents types d'éléments finis sont classés selon leur forme géométrique. On distingue :

- les éléments unidimensionnels : barres, poutres, rectiligne...
- les éléments bidimensionnels : élasticité plan (contrainte plane, déformation plane), plaque de flexion, coque courbes de forme triangulaire ou quadrangulaire,
- les éléments tridimensionnels : éléments de volume, coques épaisses
- les éléments axisymétriques : qui consistent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques.

### **I-8 : Solution par éléments finis des problèmes physiques :**

La méthode des éléments finis est employée pour résoudre des problèmes physiques en engineering et de conception. Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées des ensembles aux géométries diverses : barres, poutres, plaque, coques, etc....

Le schéma 1 récapitule le processus de l'analyse par la M.E.F. le problème physique implique typiquement une structure réelle ou un composant structural soumis à certaines charges. L'idéalisation du problème physique a un modèle mathématique exige certaines prétentions qui mènent à un ensemble d'équation régissant le modèle mathématique l'analyse par éléments résout ce modèle mathématique. La procédure numérique des éléments finis nécessite d'évaluer l'exactitude de la solution.

Il est clair que la solution par éléments finis résoudra seulement le modèle mathématique choisi et que toutes les hypothèses du modèle seront reflétées dans la réponse prévue. Nous ne pouvons-nous attendre à plus d'information dans la prévision des phénomènes physiques que l'information contenue dans le modèle mathématique. Par conséquent le choix d'un modèle mathématique approprié est crucial et détermine complètement l'aperçu du phénomène physique réel.

Soulignons que, par notre analyse, nous pouvons seulement obtenir un aperçu du problème physique à considérer : nous ne pouvons pas prévoir la réponse exacte du problème physique parce qu'il est impossible de reproduire dans le modèle mathématique toutes les informations qui sont présentes et contenue dans le problème physique naturel.

Une fois le modèle mathématique a été résolu exactement et les résultats ont été interprétés, nous pouvons raffiner ce modèle mathématique afin d'augmenter notre perspicacité dans la réponse du problème physique. En outre, un changement du problème physique peut être nécessaire, et celui-ci à son tour mènera également aux modèles mathématiques additionnels et aux solutions des éléments finis (voir le figure1- 1).

L'étape principale dans l'analyse de l'ingénieur est le choix des modèles mathématiques appropriés. Ces modèles seront clairement choisis en fonction des phénomènes à prévoir, et il est plus important de choisir les modèles mathématiques qui sont fiables et efficaces en prévoyant les quantités recherchées. Pour définir la fiabilité et l'efficacité d'un modèle choisi, nous pensons à un modèle mathématique complet du problème physique et mesurons la réponse de notre modèle choisi par rapport à la réponse du modèle complet. En général, le modèle mathématique complet est une description entièrement tridimensionnelle qui inclut également des effets non-linéaires.

a) Efficacité d'un modèle mathématique :

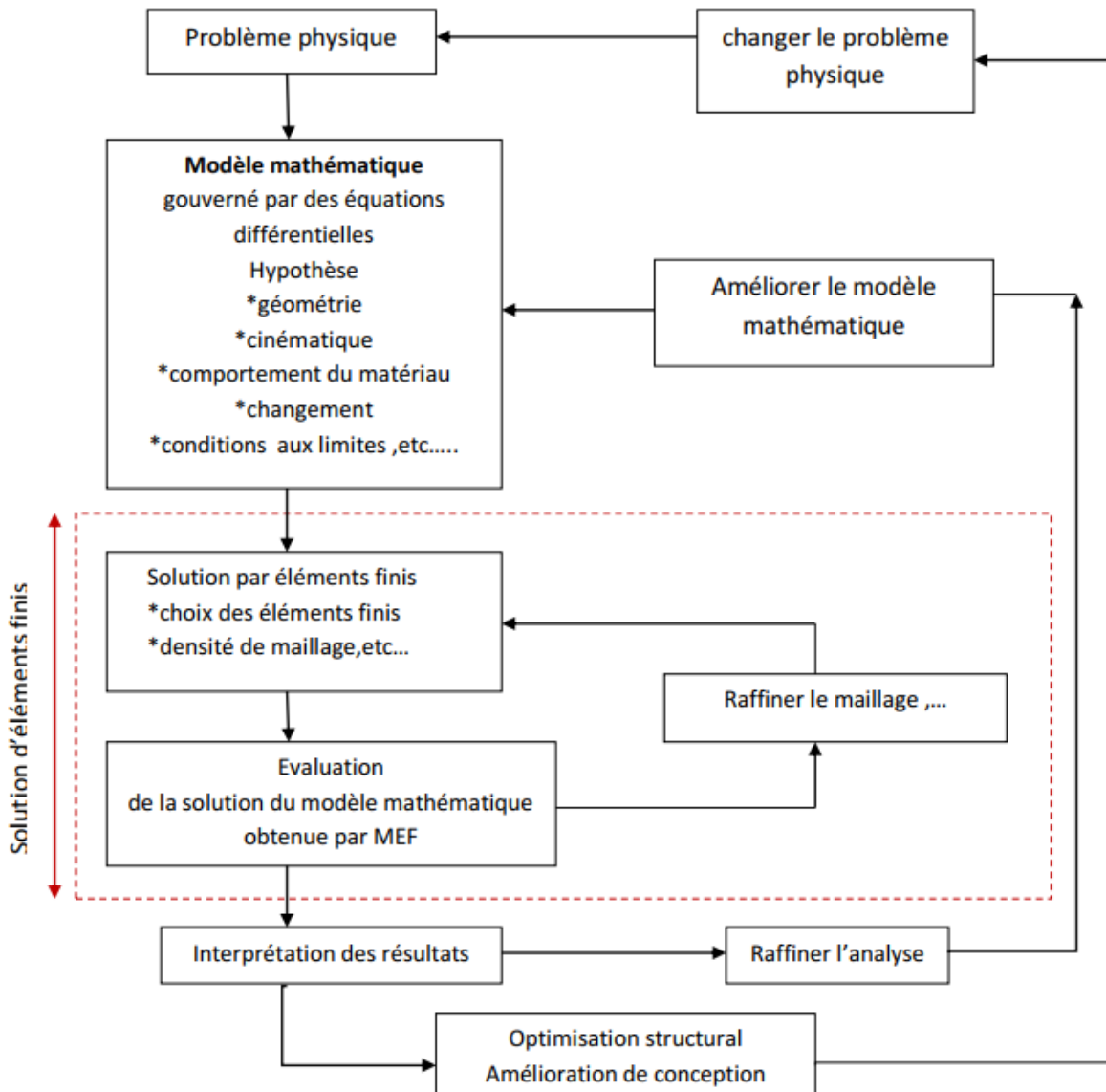
Le modèle mathématique le plus efficace pour l'analyse est celui qui rapporte la réponse demandée à une exactitude suffisante et à moindre frais.

b) Fiabilité d'un modèle mathématique :

# Chapter I: Généralités sur les plaques

Le modèle mathématique choisi est fiable si la réponse exigée est connue pour être prévue dans un niveau choisi d'exactitude mesuré sur la réponse du modèle mathématique complet

Figure 1.1: Processus de l'analyse par éléments finis



### **I-9 : Attributs d'un élément finis :**

Un découpage, artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants.

- **Géométrie** : un élément fini peut être segment de droit ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre. Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droit ou de courbes, des faces planes ou courbes
  - **Matériau** : le matériau d'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke)
  - **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.
  - **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certaines règles, dites critère de convergence
  - **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température.)
- Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini que sont sa matrice de rigidité et son vecteur force. [11]

Chapitre : II  
Eléments finis



### II.1 : introduction :

Les éléments de plaque en flexion et de coque jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures

Ce chapitre sera plus spécialement consacré aux éléments de plaque en flexion

### II.2 : hypothèses fondamentales :

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyen  $S_m$ . Par convention, cette surface moyenne sera le plan XY, l'axe OZ correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur

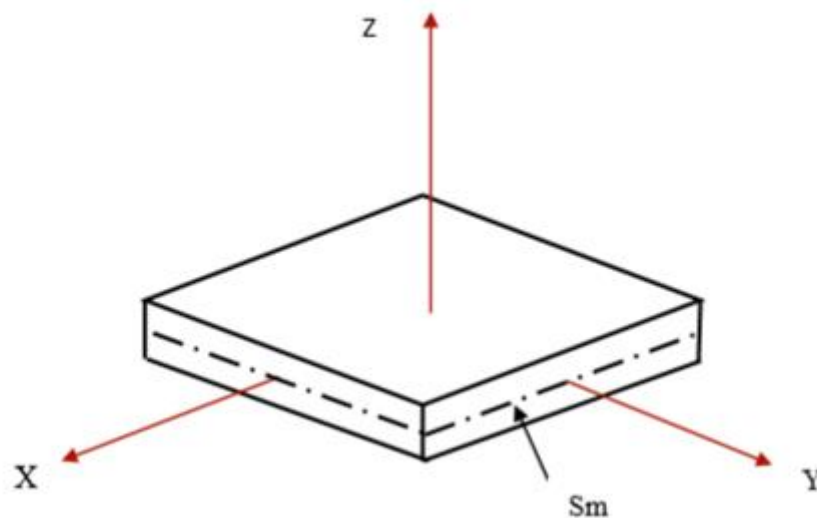


Figure2-1 : plaque en 3D

La théorie des plaques repose sur les hypothèses suivantes :

1°) les contraintes normales  $\sigma_z$  sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes

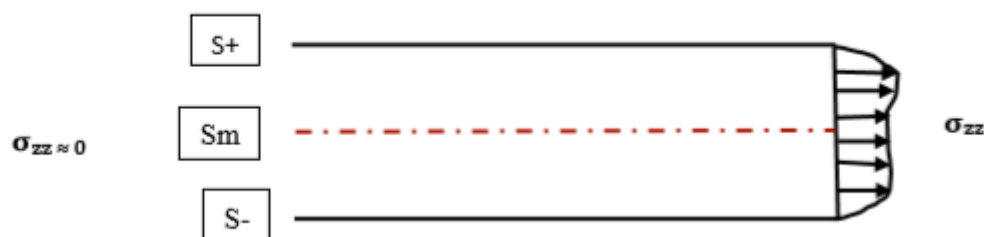


Figure2-2 : variation des contraintes suivant l'axe OZ

## Chapitre II: Eléments finis

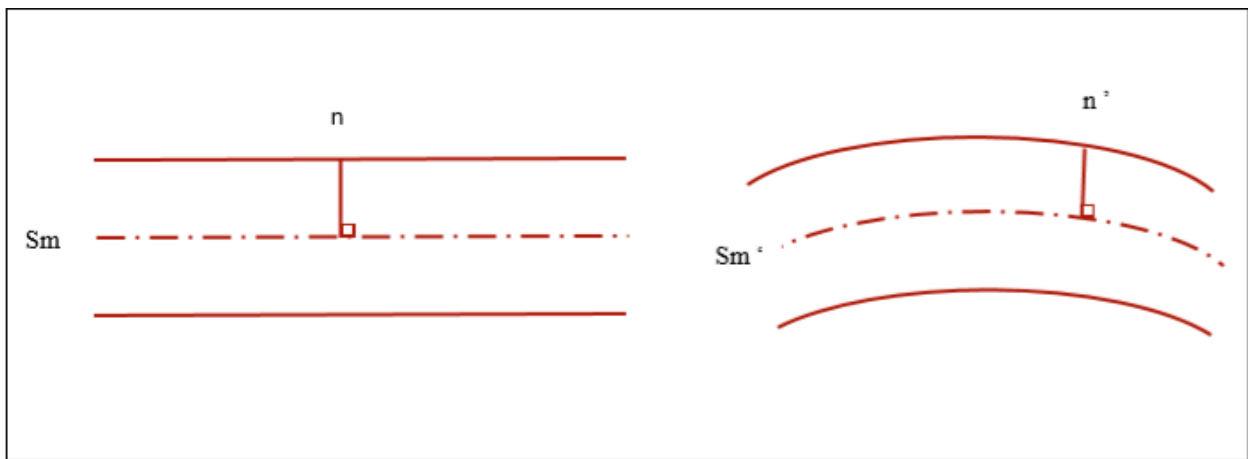
2°) les pentes de la surface moyenne  $S_m$  après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.

3°) on néglige l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grandeurs déplacements.

4°) les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation.

Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse

$$\varepsilon_{Zx} = \varepsilon_{Zy} = 0$$



Les éléments de plaques en flexion de type déplacement peuvent être classés en trois catégories :

a°) les éléments basés sur la **théorie de Kirchhoff** (sans effet de cisaillement transverse), qui sont en principe les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces, leurs formulation ne nécessite que l'approximation à une seule composante  $W(x, y)$  ce qui est d'une simplicité apparente.

b°) les éléments basés sur la **théorie de hencky-mindlin** (avec effet de cisaillement transverse), qui sont les mieux adaptés, dans le cas des plaques d'épaisseur modérés. Leur formulation est basée sur une approximation à trois variables indépendantes : Le déplacement transversal  $W$  et les deux rotations transversales  $\beta_x$  et  $\beta_y$

c°) les éléments obtenus à partir d'éléments iso paramétriques de volume sont également très intéressants le principe de leur formulation consiste à spécialiser un élément de volume par exemple (élément à 8 nœuds ou cube à 8 nœuds), au cas des plaques, pour éviter le problème de mauvaise conditionnement numérique que l'on rencontre lorsque l'épaisseur est petit par rapport à la longueur de l'élément.

La géométrie de la structure joue un rôle fondamental dans le choix du type d'élément pour lequel on aura une bonne modélisation, c'est pour cela qu'il faut poser toutes les hypothèses

possibles concernant la géométrie afin de faire un bon choix de la théorie qui respecte ces hypothèses.

Le troisième choix est plus général par rapport aux deux autres, parce qu'il n'y a pas d'hypothèses et de conditions pour son application, mais il est comme même le plus difficile à appliquer.

Concernant notre étude qui traite des plaques minces, notre choix s'est porté sur la **théorie de Kirchhoff**.

### II.3 : définition et notations générales :

Les notations adoptées dans cette étude pour les déplacements sont définies dans la figure suivante :

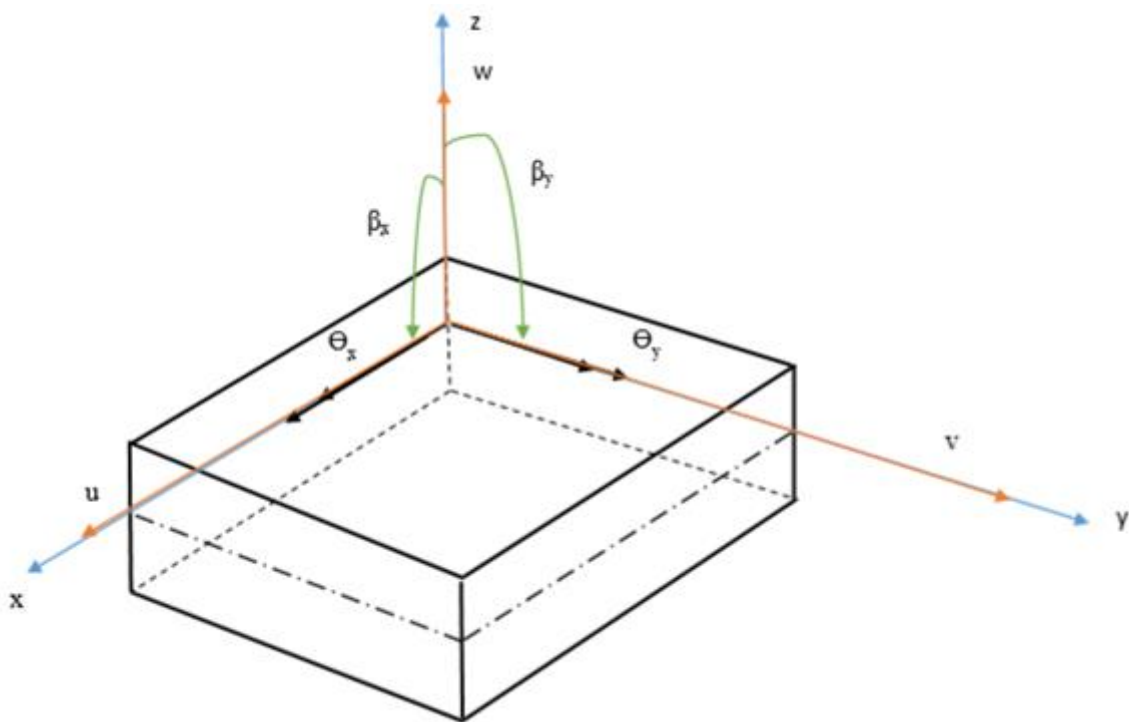


Figure2-3 : Notation d'une plaque

Soient les déplacements dans le plan  $u$  et  $v$ , le déplacement transversale  $W$  et les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  ou  $\theta_x$  et  $\theta_y$  ;

Pour la formulation des théories des plaques, nous utiliserons les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$ , on peut ramener aux conventions  $\theta_x$  et  $\theta_y$  s'il est nécessaire pour le cas d'assemblage.

L'état de déformation d'une plaque peut être considéré comme la superposition de déformation de membrane et de flexion.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_F \quad (2.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}_F \quad (2.2)$$

**Avec :**

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

**a°) théorie de hencky-mindlin :** (prise en compte du cisaillement transverse).

Dans cette théorie, on donne un modèle de déplacement basé sur trois variables indépendantes

Le déplacement transverse  $W(x,y)$

Les deux rotations  $\beta_x(x,y), \beta_y(x,y)$ .

Le champ de déplacement s'exprime alors de la façon suivante :

$U = Z. \beta_x(x, y)$	(2.4)
$V = Z. \beta_y(x, y)$	
$W = w(x, y)$	

L'état de déformation en fonction de  $W, \beta_x$  et  $\beta_y$  est le suivant :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

### b°) théorie de Kirchhoff :

Dans la théorie de Kirchhoff, on néglige l'effet de cisaillement transverse :

On a donc :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

On aura donc d'après la théorie de hencky – mindlin :

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = 0 &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \iff \beta_x = \frac{-\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 0 &= \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \iff \beta_y = \frac{-\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable : le déplacement transverse W en effet :

$$\begin{aligned} u &= -Z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -Z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y) \end{aligned}$$

$$(2.6)$$

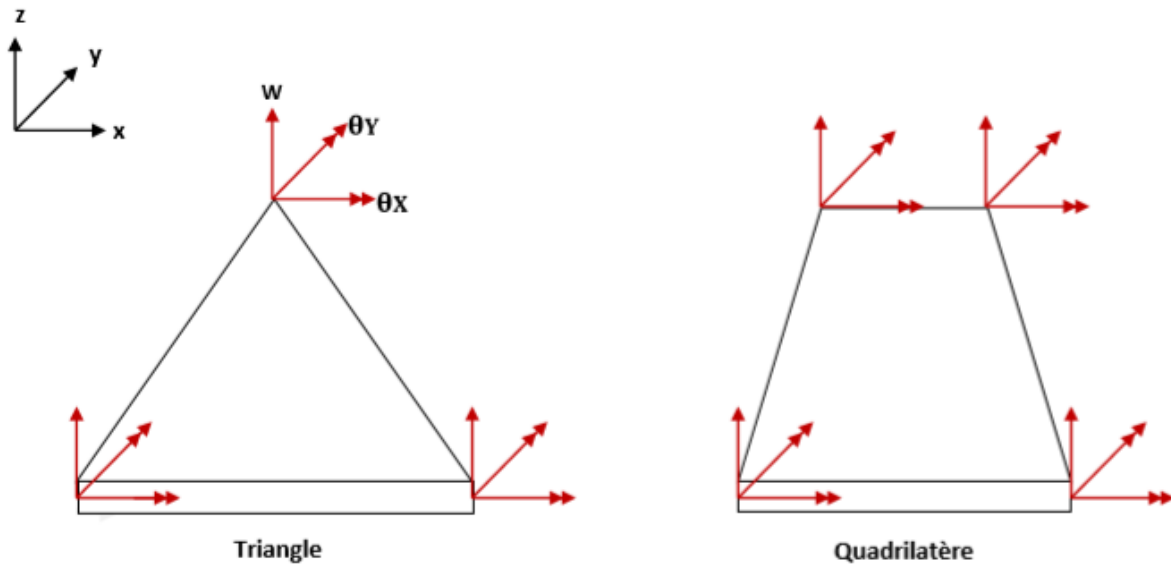
Et les déformations deviennent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

### II.4 :élément basé sur la théorie de Kirchhoff :



les éléments mixte (Hybride) :

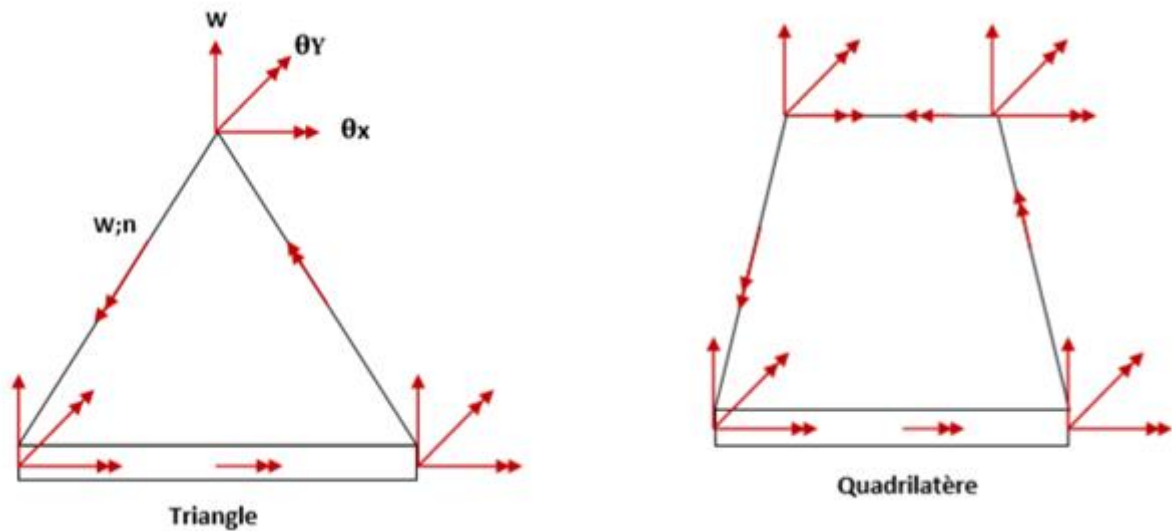


Figure2-4 : Eléments de plaque en flexion

**II.5 : matrice de rigidité de flexion basé sur la théorie de Kirchhoff :**

Pour simplifier l'étude, considérons un élément rectangulaire a quatre nœuds de dimension (a, b, e) avec cette fois trois (03) D.D.L

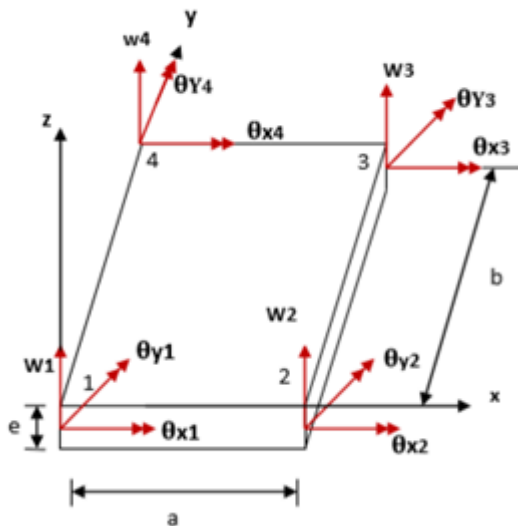


Figure2-5 : Repère cartésien

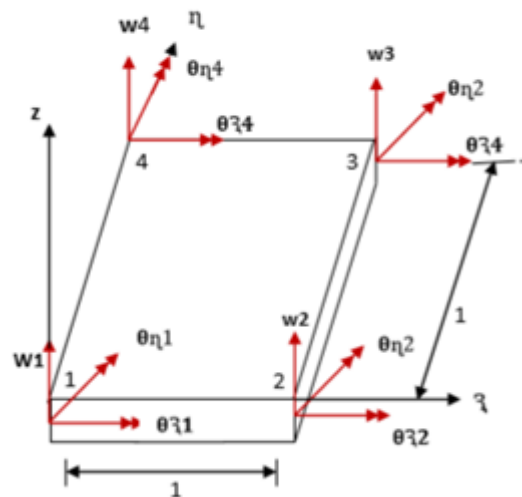


Figure2-5 : Repère adimensionnel

Pour chaque nœud, ( $W, \theta_x$  et  $\theta_y$ ) comme cet élément possède 12 D.D.L, on aura le même membre de coordonnées généralisées. De cet effet, on peut approximer les déplacements à :

## Chapitre II: Eléments finis

$$w(x, y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^3 + d_8x^2y + d_9xy^2 + d_{10}y^3 + d_{11}x^3y + d_{12}xy^3$$

on faisant le changement de variable suivant :

$$\xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Alors la fonction  $w(x,y)$  devient :

$$w(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi^2 + C_5\xi\eta + C_6\eta^2 + C_7\xi^3 + C_8\xi^2\eta + C_9\xi\eta^2 + C_{10}\eta^3 + C_{11}\xi^3\eta + C_{12}\xi\eta^3$$

Avec :

$$C_1 = d_1 \ ; \ C_2 = ad_2 \ ; \ C_3 = bd_3 \ ; \ C_4 = a^2d_4 \ ; \ C_5 = abd_5$$

$$C_6 = b^2d_6 \ ; \ C_7 = a^3d_7$$

$$C_8 = a^2bd_8 \ ; \ C_9 = ab^2d_9 \ ; \ C_{10} = b^3d_{10} \ ; \ C_{11} = a^3bd_{11} \ ; \ C_{12} = ab^3d_{12}$$



## Chapitre II: Eléments finis

La relation entre  $C_i$  et  $d_i$  n'a pas une importance.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{b} \{C_3 + C_5 \xi + 2C_6 \eta + C_8 \xi^2 + 2C_9 \xi \eta + 3C_{10} \eta^2 + C_{11} \xi^3 + 3C_{12} \xi \eta^2\}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$= -\frac{1}{a} \{C_2 + 2C_4 \xi + C_5 \eta + 3C_7 \xi^2 + 2C_8 \xi \eta + C_9 \eta^2 + 3C_{11} \xi^2 \eta + C_{12} \eta^3\}$$

la fonction de déplacement s'écrit :

$$\{\delta(\xi, \eta)\}_F = \begin{Bmatrix} w(\xi, \eta) \\ \theta_x(\xi, \eta) \\ \theta_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [g(\xi, \eta)]_F \{C\} \quad (2.8)$$

Le vecteur de déplacement  $\{q\}$  s'écrit :

$$\{q\}_F^t = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}\} \quad (2.9)$$

D'autre part, sur chaque nœud le système de charge correspondant consistent aux deux (02) moments  $M_x, M_y$  et 1 une force de cisaillement  $P_z$  alors, l vecteur force s'écrit :

$$\{P\}^t = \{P_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, P_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, P_{z3}, M_{x3}, M_{y3}, P_{z4}, M_{x4}, M_{y4}\} \quad (2.10)$$

Les forces nodales et les déplacement sont reliés par :

$$\{P\} = [K]\{q\} \quad (2.11)$$

Pour trouver les constantes  $C_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 12$ ) il faut poser les conditions aux limites

**\*pour le nœud 1 :**  $(\xi=0, \eta=0) \rightarrow (x=0, y=0)$

## Chapitre II: Eléments finis

$$W_1 = C_1$$

$$\theta_{x1} = \frac{1}{b} C_3$$

$$\theta_{y1} = \frac{-1}{a} C_2$$

**\*pour le nœud 2 :** ( $\xi=1, \eta=0$ )  $\rightarrow$  ( $x=a, y=0$ )

$$W_2 = C_1 + C_2 + C_4 + C_7$$

$$\theta_{x2} = \frac{1}{b} (C_3 + C_5 + C_8 + C_{11})$$

$$\theta_{y2} = \frac{-1}{a} (C_2 + 2C_4 + 3C_7)$$

**\*pour le nœud 3 :** ( $\xi=1, \eta=1$ )  $\rightarrow$  ( $x=a, y=b$ )

$$w_3 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + C_{12}$$

$$\theta_{x3} = \frac{1}{b} (C_3 + C_5 + 2C_6 + C_8 + 2C_9 + 3C_{10} + C_{11} + 3C_{12})$$

$$\theta_{y3} = \frac{-1}{a} (C_2 + 2C_4 + C_5 + 3C_7 + 2C_8 + C_9 + 3C_{11} + C_{12})$$

**\*pour le nœud 4 :** ( $\xi=0, \eta=1$ )  $\rightarrow$  ( $x=0, y=b$ )

$$w_4 = C_1 + C_3 + C_6 + 3C_{10}$$

$$\theta_{x4} = \frac{1}{b} (C_3 + 2C_6 + 3C_{10})$$

$$\theta_{y4} = \frac{-1}{a} (C_2 + C_5 + C_9 + C_{12})$$

**Sous la forme matricielle :**

$$\{q\}_F = [H]_F \{C\}_F. \quad (2.12)$$

**Ce qui donne que :**

$$\{C\}_F = [H]_F^{-1} \{q\}_F. \quad (2.13)$$

**Alors :**

$$\{\delta(\mathfrak{z}, \eta)\}_F = [g(\mathfrak{z}, \eta)]_F [H]_F^{-1} \{q\}_F. \quad (2.14)$$

**Avec :**

$$[H]_F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2a & 3 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -b & a & 1 & b & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 2 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -b & 0 \\ 2 & 0 & -a & -2 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2a & -3 & 0 & -a & 3 & 0 & a & -3 & 0 & 2a \\ 3 & 2b & 0 & -3 & -2b & 0 & 3 & -b & 0 & -3 & b & 0 \\ 2 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & b & 0 \\ -2 & 0 & a & 2 & 0 & a & -2 & 0 & -a & 2 & 0 & -a \\ -2 & -b & 0 & 2 & b & 0 & -2 & b & 0 & 2 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

on pose :

$$[N(\mathfrak{z}, \eta)]_F = [g(\mathfrak{z}, \eta)]_F [H]_F^{-1}. \quad (2.15)$$

D'où :

$$\{\delta(\mathfrak{z}, \eta)\}_F = [N(\mathfrak{z}, \eta)]_F \{q\}_F. \quad (2.16)$$

Telle que :

$$[N(\mathfrak{z}, \eta)] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}]. \quad (2.17)$$

Avec, Pour  $0 \leq \mathfrak{z} \leq 1$  et  $0 \leq \eta \leq 1$

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta + 2\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3.$$

$$N_2(\xi, \eta) = b(\eta - 3\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - 3\eta^3).$$

$$N_3(\xi, \eta) = a(-\xi + 2\xi^2 + 3\eta - \xi^3 - 2\xi^2\eta + \xi^3\eta).$$

$$N_4(\xi, \eta) = 3\xi^2 + 3\eta - 2\xi^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3.$$

$$N_5(\xi, \eta) = b(3\eta - 2\xi\eta^2 + 3\eta^3).$$

$$N_6(\xi, \eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta).$$

$$N_7(\xi, \eta) = -3\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi\eta^3.$$

$$N_8(\xi, \eta) = b(-\xi^2\eta + 3\eta^3).$$

$$N_9(\xi, \eta) = a(\xi^2\eta - \xi^3\eta).$$

$$N_{10}(\xi, \eta) = 3\eta + 3\eta^2 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 - 2\eta^3 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3.$$

$$N_{11}(\xi, \eta) = b(-\eta^2 + 3\eta^2 + \eta^3 - 3\eta^3).$$

$$N_{12}(\xi, \eta) = a(-3\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta).$$

**\*Relation déformation déplacement :**

$$\varepsilon_x = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -Z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} w \quad (2.18)$$

Alors l'expression de déformation devient :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_\xi \\ \mathcal{E}_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{a^2 \partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{b^2 \partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} w \quad (2.19)$$

En calculant chaque terme on obtient :

$$\mathcal{E}_\xi = -Z \frac{1}{a^2} (2C_4 + 6C_7 \xi + 2C_8 \eta + 6C_{11} \xi \eta).$$

$$\mathcal{E}_\eta = -Z \frac{1}{b^2} (2C_6 + 2C_9 \xi + 6C_{10} \eta + 6C_{12} \xi \eta).$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -2Z \frac{1}{ab} (C_5 + 2C_8 \xi + 2C_9 \eta + 3C_{11} \xi^2 + 3C_{12} \eta^2).$$

Sous forme matricielle on a :

$$\{\mathcal{E}\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_\xi \\ \mathcal{E}_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -Z [\phi(\xi, \eta)]_F \{C\}_F \quad (2.20)$$

Remplaçant l'expression  $\{C\}_F = [H]_F^{-1} \{q\}$  dans la formule de déformation on obtient :

$$\{\mathcal{E}\} = -Z [\phi(\xi, \eta)]_F [H]_F^{-1} \{q\}_F \quad (2.21)$$

On pose :

$$[B(\xi, \eta)]_F = [\phi(\xi, \eta)]_F [H]_F^{-1} \quad (2.22)$$

D'où on obtient:

$$[\mathcal{E}(\xi, \eta)] = -Z [B(\xi, \eta)] \{q\}_F \quad (2.23)$$

Telle que :

$$[B(\zeta, \eta)]_F = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1\ 12} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2\ 12} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3\ 12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_{11}(\zeta, \eta) &= ((-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta)/a^2) & ; & B_{12} = 0 \\ B_{13}(\zeta, \eta) &= (4 - 6\zeta - 4\eta + 6\zeta\eta)/a & ; & B_{14}(\zeta, \eta) = (6 - 12\zeta - 6\eta + 12\zeta\eta)/a^2 \\ B_{15}(\zeta, \eta) &= 0 & ; & B_{16}(\zeta, \eta) = (2 - 6\zeta - 2\eta + 6\zeta\eta)/a \\ B_{17}(\zeta, \eta) &= (6\eta - 12\zeta\eta)/a^2 & ; & B_{18}(\zeta, \eta) = 0 \\ B_{19}(\zeta, \eta) &= (2\eta - 6\zeta\eta)/a & ; & B_{1\ 10}(\zeta, \eta) = (-6\eta + 12\zeta\eta)/a^2 \\ B_{1\ 11}(\zeta, \eta) &= 0 & ; & B_{1\ 12}(\zeta, \eta) = (4\eta - 6\zeta\eta)/a \\ B_{21}(\zeta, \eta) &= (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta)/b^2 & ; & B_{22} = (-4 + 4\zeta + 6\eta - 6\zeta\eta)/b \\ B_{23}(\zeta, \eta) &= 0 & ; & B_{24}(\zeta, \eta) = (-6\zeta + 12\zeta\eta)/b^2 \\ B_{25}(\zeta, \eta) &= (-4\zeta + 6\zeta\eta)/b & ; & B_{26}(\zeta, \eta) = 0 \\ B_{27}(\zeta, \eta) &= (6\zeta - 12\zeta\eta)/b^2 & ; & B_{28}(\zeta, \eta) = (-2\zeta + 6\zeta\eta)/b \\ B_{29}(\zeta, \eta) &= 0 & ; & B_{2\ 10}(\zeta, \eta) = (6 - 6\zeta - 12\eta + 12\zeta\eta)/b^2 \\ B_{2\ 11}(\eta, \zeta) &= (-2 + 2\zeta + 6\eta - 6\zeta\eta)/b & ; & B_{2\ 12}(\zeta, \eta) = 0 \\ B_{31}(\zeta, \eta) &= (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)/ab & ; & B_{32}(\zeta, \eta) = (-2 + 8\eta - 6\eta^2)/a \\ \\ B_{33}(\zeta, \eta) &= (2 - 8\zeta + 6\zeta^2)/b & ; & B_{34}(\zeta, \eta) = (2 - 12\zeta - 12\eta + 12\zeta^2 + 12\eta^2)/ab \\ B_{35}(\zeta, \eta) &= (2 - 8\eta + 6\eta^2)/a & ; & B_{36}(\zeta, \eta) = (-4\zeta + 6\zeta^2)/b \\ B_{37}(\zeta, \eta) &= (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)/ab & ; & B_{38}(\zeta, \eta) = (-4\eta + 6\eta^2)/a \\ B_{39}(\zeta, \eta) &= (4\zeta - 6\zeta^2)/b & ; & B_{3\ 10}(\zeta, \eta) = (2 - 12\zeta - 12\eta + 12\zeta^2)/ab \\ B_{3\ 11}(\zeta, \eta) &= (4\eta - 6\eta^2)/a & ; & B_{3\ 12}(\zeta, \eta) = (-2 + 8\zeta - 6\zeta^2)/b \end{aligned}$$

### \*Relation contraintes déformations :

$$\{\sigma(\zeta, \eta)\} = [E]\{\mathcal{E}(\zeta, \eta)\} \quad (2.24)$$

Substituant l'équation de l'expression  $\{\mathcal{E}\}$  on aura :

$$\{\sigma(\zeta, \eta)\} = -Z [E] [B(\zeta, \eta)] \{q\} \quad (2.25)$$

Si on pose dans cette équation  $Z=0$  ; on trouve :

$$\{\sigma(\zeta, \eta)\} = \{0\} \quad \forall \{\zeta, \eta\} \quad (2.26)$$

$Z=0$  ; représente alors la position de la surface neutre.

### \*détermination de la matrice de rigidité de flexion :

Le calcul de la matrice de rigidité se fait par la formule suivante :

$$[K]_F = \int_V [B]^t [E] [B] dV \quad (2.27)$$

Qui dévient :

$$\begin{aligned} [K]_F &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [B]^t [E] [B] dA dZ \\ &= \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 [B(\zeta, \eta)]^T [E] [B(\zeta, \eta)] d\zeta d\eta \end{aligned}$$

Les 78 valeurs de la matrice  $[K]$  se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$K_{ij} = \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 \{ (B_{1i}B_{1j})e_{11} + (B_{2i}B_{1j} + B_{1i}B_{2j})e_{12} + (B_{2i}B_{2j})e_{22} + (B_{3i}B_{3j})e_{33} \} d\zeta d\eta$$



**Pour**

$$i=1, 2, 3, \dots, 12$$

$$j=i, i+1, \dots, 12$$

Pour calculer les éléments  $K_{ij}$  on peut utiliser un programme qui calcule l'intégrale numérique des fonctions :

**Exemple:**  $K_{11} = ?$

\* On posant  $i=1, j=1$  dans la formule on trouve:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 \{B_{11}^2 e_{11} + 2B_{21}B_{11} e_{12} + B_{21}^2 e_{22} + B_{31}^2 e_{33}\} d\zeta d\eta \\ &= \frac{bh^3}{12a^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta)^2 d\zeta d\eta e_{11} \\ &\quad + \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\zeta + 6\eta - 12\zeta\eta) (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta) d\zeta d\eta e_{12} \\ &\quad + \frac{ah^3}{12b^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 6\zeta + 12\eta - 12\zeta\eta)^2 d\zeta d\eta e_{22} \\ &\quad + \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-2 + 12\zeta + 12\eta - 12\zeta^2 - 12\eta^2)^2 d\zeta d\eta e_{33} \end{aligned}$$

**On obtient le résultat suivant :**

$$K_{11} = \frac{h^3}{12} \left( \frac{4b}{a^3} e_{11} + \frac{2}{ab} e_{12} + \frac{4a}{b^3} e_{22} + \frac{28}{5ab} e_{33} \right) \quad (2.28)$$

Avec la méthode on peut calculer tous les éléments  $k_{ij}$  on introduisant les fonctions nécessaires de la matrice  $[B(\zeta, \eta)]$  dans la formule

### II-6-1 : Introduction à la dynamique des structures :

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par les méthodes d'analyse statique. Cependant, il existe également de nombreux cas où on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées, citons à titre d'exemple, la réponse d'un avion à une rafale.

### II-6-2 : Principe de la méthode des éléments finis en dynamique :

Comme en statique, nous allons considérer successivement :

- La discrétisation spatiale du domaine en éléments finis.
- La formulation au niveau de l'élément.
- La formulation globale après assemblage.

#### a) Discrétisation spatiale :

La phase de discrétisation consiste à découper la structure (domaine  $V$ ) en éléments finis (sous domaine  $V^e$ ) de forme géométrique simple. Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées d'espace et de temps, soit :

$$\{u(x, y, z, t)\}^e = [u(x, y, z)]\{f(t)\}; e : \text{élément}$$

Ou, dans le cas du choix des déplacements nodaux comme coordonnées généralisées :

$$\{u(x, y, z, t)\} = [N(x, y, z)]\{q(t)\}$$

Avec :

$\{u\}^e$  : Vecteur des déplacements en un point de l'élément.

$[u(x, y, z)]$  : Matrice des fonctions base de l'approximation spatiale (généralement des fonctions polynomiales en  $x, y$  et  $z$ ).

$[N(x, y, z)]$  : Matrice des fonctions d'interpolations pour l'élément.

$\{f(t)\}$  : Vecteur des coordonnées généralisées fonctions inconnues de temps.

$\{q(t)\}$  : Vecteur de déplacements aux nœuds de l'élément.

Ces formes d'approximation sont tout à fait analogues à celles de la M.E.F en statique, soit :  $[u(x, y, z)] = [N(x, y, z)]\{q\}$ . En statique, on ramène le problème continu à la résolution d'un système d'équations linéaire à  $n$  inconnues, alors qu'en dynamique on aboutit à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre à  $n$  fonctions inconnues du temps.

#### b) Formulation élémentaire :

La formulation au niveau de l'élément consiste à exprimer les énergies cinétique et potentielle en fonction respectivement, des vitesses et des déplacements aux nœuds,

$$\text{soit : } V^e = U^e - W^e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\} - q^{eT} \{F^e\}$$

$$\text{Avec : } [K^e] = \int_{V^e} [B]^T [E] [B] dV$$

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{F\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{P\} dS$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Force de volume}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Force de surface}}$$

Force de volume      Force de surface

On rappelle que l'on a :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$$

$$\{\delta\} = [E][B]\{q\}$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left( \int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\dot{q}\}$$

Sous une forme simplifiée:

$$T^e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^e [M]^e \{\dot{q}\}^e$$

Avec :

$$[M]^e = \int_V \rho [N]^T [N] dV : \text{Matrice Masse de l'élément}$$

Le calcul s'effectue par intégration numérique et ne fait intervenir que la masse volumique, la géométrie et la matrice d'interpolation de l'élément.

### **c) Formulation globale :**

La Formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir de l'expression des énergies cinétique et potentielle en fonction des vitesses et déplacement aux nœuds de la structure.

Soit  $\{q\}^T$  le vecteur ligne (transposé) des déplacements aux nœuds de la structure à N nœuds on a :

$$\{q\}^T = \{q_1^T, q_2^T, \dots, \dots, q_n^T\}$$

Le schéma d'assemblage des matrices de masses élémentaires est tout à fait identique à celui des matrices de rigidité élémentaires.

Les équations de Lagrange partant d'obtenir les équations discrètes du Mouvement, soit pour une structure sans amortissement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad i = 1, 2, 3 \dots N$$

D'où on obtient:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = F(t)$$

L'analyse dynamique d'une structure sans amortissement revient à résoudre le système d'équation différentielle du 2<sup>eme</sup> ordre.

Avec :

$[K]$  : La matrice de rigidité de la structure obtenue par assemblage des matrices élémentaires.

$[M]$  : La matrice de masse de la structure obtenue par assemblage des matrices élémentaires.

$F(t)$  : La force extérieure appliquée sur la structure.

On peut choisir les mêmes matrices des fonctions d'interpolation élémentaires en dynamique et en statique, même si ce n'est pas toujours le meilleur choix en dynamique, par exemple, les fonctions d'interpolation d'une poutre en flexion simple en statique (polynômes du 3<sup>eme</sup> degré)

Correspondant à des solutions exactes de la Résistance des matériaux (R, D, M), ce qui n'est évidemment plus le cas en dynamique.

La modélisation d'une poutre encadrée libre par exemple soumise à une force concentrée par un élément de ce type permet d'obtenir la solution statique exacte, alors que ce n'est pas vrai en dynamique. Malgré cet inconvénient, ce choix des mêmes fonctions d'interpolation en statique et dynamique est pratique dans la plupart des programmes généraux de calcul de structures.

En effet, dans ce cas, l'extension d'un programme statique à l'analyse dynamique nécessite un minimum d'additions au programme : il suffit de prévoir pour chaque type d'élément, la génération des matrices masse  $[M]^e$ .

L'assemblage de la matrice  $[M]$  et sa mise en mémoire sont les mêmes que pour la matrice de rigidité.

### **II.7 : Méthodes de calcul des matrices masses :**

Pour le calcul des matrices masses, on va présenter les deux méthodes couramment utilisées :

#### **II.7.1 : applications du théorème de l'énergie cinétique :**

L'énergie cinétique élémentaire d'un élément de masse ( $dm$ ) et de vitesse  $v$  à pour expressions.

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm \quad T : \text{Energie, cinétique.}$$

Comme :  $dm = \rho dV$   $dV$  : Volume élémentaire.

On obtient :  $dT = \frac{1}{2} \rho v^2 dV$   $\rho$  : Masse volumique.

$v$  : La vitesse de la masse élémentaire

Pour l'élément entier:

$$T = \int_V dT = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

Telle que:

$\{\dot{\delta}\}$  : La dérivée de la fonction de déplacement par rapport au temps.

Et comme :  $\{\delta(x, y, z)\} = N(x, y, z)\{q\}$

Alors :  $v = \{\dot{\delta}(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{\dot{q}\}$

Ce qui donne :  $T = \int_V \frac{1}{2} \rho (v)^T (v) dV$

Qui peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\} [M] \{\dot{q}\}$$

Avec :

$$[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \dots (2.29)$$

### II.7.2 : Application du théorème des travaux virtuels :

L'application de ce théorème pour générer les matrices masse d'une structure qui est modélisé en éléments finis, nécessite le remplacement de la force d'inerties due à la masse de la structure par des forces d'inerties équivalentes appliquées aux nœuds. Les forces d'inerties par unité de volume dus aux vibrations des structures ont pour composantes :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{Bmatrix}$$

Avec :  $\{F_i\}$  : force inertie par unité de volume ;  $\rho$  : Masse volumique

Généralement, la fonction de déplacement dépend de quatre variables (trois variables d'espace  $x, y$  et  $z$  et une variable de temps  $t$ ).

Les variables, donc la fonction de déplacement s'écrit :

$$\{\delta(x, y, z, t)\} = \{\delta(x, y, z)\} f(t)$$

Connaissant :  $\{\delta(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{q\}$

Alors :  $\{\delta(x, y, z, t)\} = [N(x, y, z)]\{q\}f(t)$

Avec :  $(du, dv, dw)$  déplacements virtuel suivant les axes  $x, y, z$  respectivement

Autrement :

$$Q_v = \int_V (du, dv, dw) \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{Bmatrix} dV$$

$$Q_v = \int_V (d\delta)^T \{F_i\} dV$$

Remplaçant l'expression de  $\{F_i\}$  et  $\{\delta\}$  dans la formule ci-dessus on obtient :

$$Q_v = \int_V (f(t)[N(x, y, z)]\{dq\})^T (-\rho[N(x, y, z)]\{q\} \frac{d^2 f}{dt^2}) dV$$

$$Q_v = \int_V f(t)\{dq\}^T [N(x, y, z)]^T (-\rho[N(x, y, z)]\{q\} \frac{d^2 f}{dt^2}) dV$$

$$Q_v = -\rho \cdot f(t) \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} \{dq\}^T \int_V [N(x, y, z)]^T [N(x, y, z)] dV \{q\}$$

D'autres parts, le travail virtuel des forces d'inertie équivalentes appliquées aux nœuds est :

$$Q_p = \{dq\}^T \{p\} F(t)$$

Par identification on trouve:

$$\{p\} = -\rho \frac{d^2 F}{dt^2} \int_V [N]^T [N] dV \{q\}$$

Autrement on a:

$$\{p\} = [k] \{q\} F(t)$$

Par identification :  $-\rho \frac{d^2 F}{dt^2} \int_V [N]^T [N] dV \{q\} = [k] \{q\} F(t)$

$$[K] F(t) = -\rho \frac{d^2 F}{dt^2} \int_V [N]^T [N] dV$$

$$[K] F(t) + \left( \int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \frac{d^2 F}{dt^2} = 0$$

Pour les problèmes de vibrations libres on a :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0$$

Avec :  $\{q\} = \{q\} F(t)$  et  $F(t) = \sin \omega_n t$

$$\{\ddot{q}\} = \{q\} \frac{d^2 F}{dt^2}$$

Le problème devient :  $[M] \frac{d^2 F}{dt^2} + [K] F(t) = 0$

Par identification on a :  $[M] = \int_V \rho [N]^T [N] dV$

La solution de l'équation différentielle devient :

$$F(t) = \sin \omega_n t$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = -\omega_n^2 \sin \omega_n t$$

Alors equation différentielle devient:

$$[M] (-\omega_n^2 \sin \omega_n t) + [K] \sin \omega_n t = 0$$

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \sin \omega_n t = 0 \dots \dots \dots (2.30)$$

## II.8 :Matrice de masse élémentaire :

### II.8.1 Flexion des plaques :

Considérons l'élément rectangulaire

La matrice masse  $[M]$  de set élément se calcule par :

$$[M] = \int_V \rho [N]^t [N] dV$$

avec :  $dV = e dA = e dx dy = e ab d\xi d\eta$        $a \leq \xi \leq 1$

$e$  : épaisseur de l'élément       $b \leq \eta \leq 1$

Alors ;

$$[M] = e\rho ab \int_0^1 \int_0^1 [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] d\xi d\eta$$

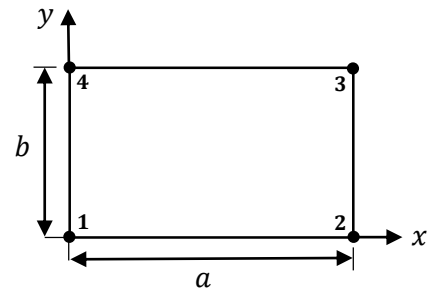
D'ou:

$$M_{ij} = e\rho ab \int_0^1 \int_0^1 [N(\xi, \eta)]^T [N(\xi, \eta)] d\xi d\eta$$

Compte tenu de la uniplexité de la forme des fonctions d'interpolations, on est obligé d'utiliser un programme qui calcul numériquement une intégrale définie pour minimiser le temp de calcul.

Rappelons que le vecteur  $\{q\}$  s'écrit :

$$\{q\}^t = \{w_1 \theta x_1 \theta y_1, w_2 \theta x_2 \theta y_2, w_3 \theta x_3 \theta y_3, w_4 \theta x_4 \theta y_4 \}.$$



**Figure2-6 :** Elément rectangulaire à huit degrés de liberté

# Chapitre III

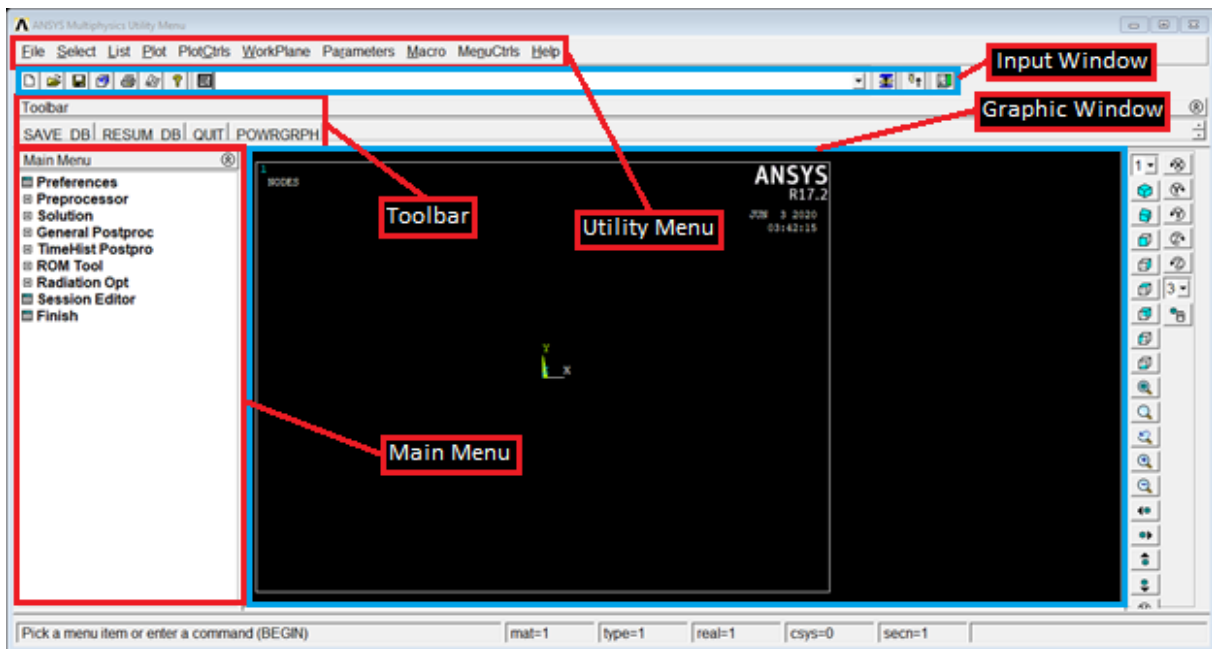
## Application par Ansys et résultants



## III.1 : Introduction :

La vue par défaut de ANSYS est bien adaptée pour des conceptions bidimensionnelles avec l'axe des abscisses indiqué horizontalement vers la droite. L'axe des ordonnées se dirigeant verticalement vers le haut, et l'axe z est perpendiculaire à l'écran. Zoom et repaint (or refresh screen) (ou régénérer l'écran) les commandes sont très semblables à celles utilisées dans la plupart des logiciels de traitement de DAO ou de texte.[14]

- a. **Utility menu:** auquel vous pouvez accéder et ajuster les propriétés au sujet de votre session, telle que les commandes de fichier, la liste et les commandes graphiques.
- b. **Toolbar :** Boutons poussoirs aux commandes utilisées généralement
- c. **Main menu :** ou vous pouvez trouver les processeurs utilisés en analysant votre problème
- d. **Graphics window :** dans la fenêtre graphique votre modèle est montré : la géométrie, éléments, visualisation des résultats etc...
- e. **Input window :** Vous pouvez introduire des commandes dans la fenêtre d'entrée.



### III.2 : Préprocesseur :

Dans le préprocesseur le modèle est installé, il inclut un certain nombre d'étapes ; habituellement dans l'ordre suivant :

- **Build geometry** : construction de la géométrie, suivant la géométrie du problème une, deux dimensions ou tridimensionnelle, la géométrie créée se compose des lignes, des sections ou des volumes, puis au besoin, on peut créer d'autres géométries en employant des opérations boolean. L'idée principale est que, quand on établit la géométrie on simplifie la génération de maillage. Par conséquent, cette étape est facultative mais souvent la plus employée. Des nœuds et des éléments peuvent cependant être créés par des coordonnées seulement.
- **Define materials (définir les matériaux)** : un matériau est défini par ses constantes matérielles. Chaque élément doit être assigné à un matériau particulier.
- **Generate element mesh (Génération de maillage)** : Le problème est discrétisé avec les points nodaux. Les nœuds sont reliés aux éléments finis de forme, qui constituent un ensemble du volume de matériau. Selon le problème et les hypothèses, le type d'élément doit être déterminé. Les types d'éléments communs sont truss, beam, plate, shell and solidéléments. Chaque type d'élément peut contenir plusieurs sous-types par exemple solide 2D-4 nœuds, solide 3D-20 nœuds. Par conséquent, le soin doit être pris quand le type d'élément est choisi.

Le maillage dans ANSYS peut être créé de plusieurs manières. La manière la plus commune est qu'elle soit automatiquement créée. Toutefois plus ou moins contrôlée. Par exemple vous pouvez spécifier un certain nombre d'éléments dans une section spécifique, ou vous pouvez forcer le générateur de maillage pour maintenir une taille spécifique d'élément dans une section. Certaines formes ou tailles d'élément ne sont pas recommandées es si ces limites sont dépassées, un avertissement sera affiché par ANSYS.

### III.3 : Solution processor :

Lorsque que vous résolvez le problème en recueillant toutes les informations spécifiques au sujet du problème :

- **Apply loads (appliquer les charges)** : Les conditions aux limites sont généralement appliquées sur des nœuds ou des éléments. La quantité Prescrite peut être par exemple force, traction, déplacement, moment, rotation, les charges peuvent être également dans ANSYS éditées du préprocesseur.
- **Optain solution (obtenir la solution)** : La solution du problème peut être obtenir si le problème entier est définir.

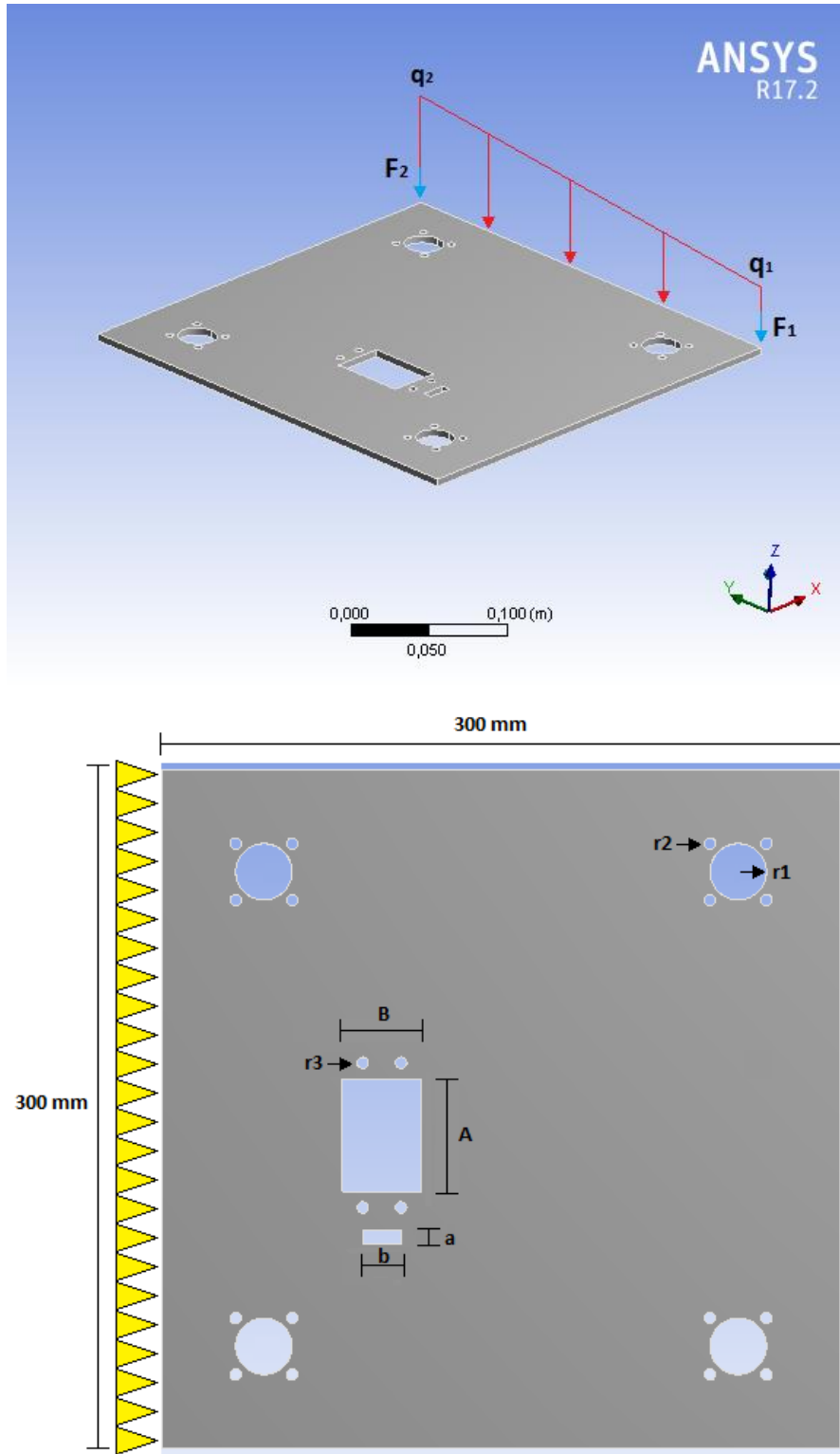
#### Postprocessor :

Dans la présente partie de l'analyse vous pouvez par exemple :

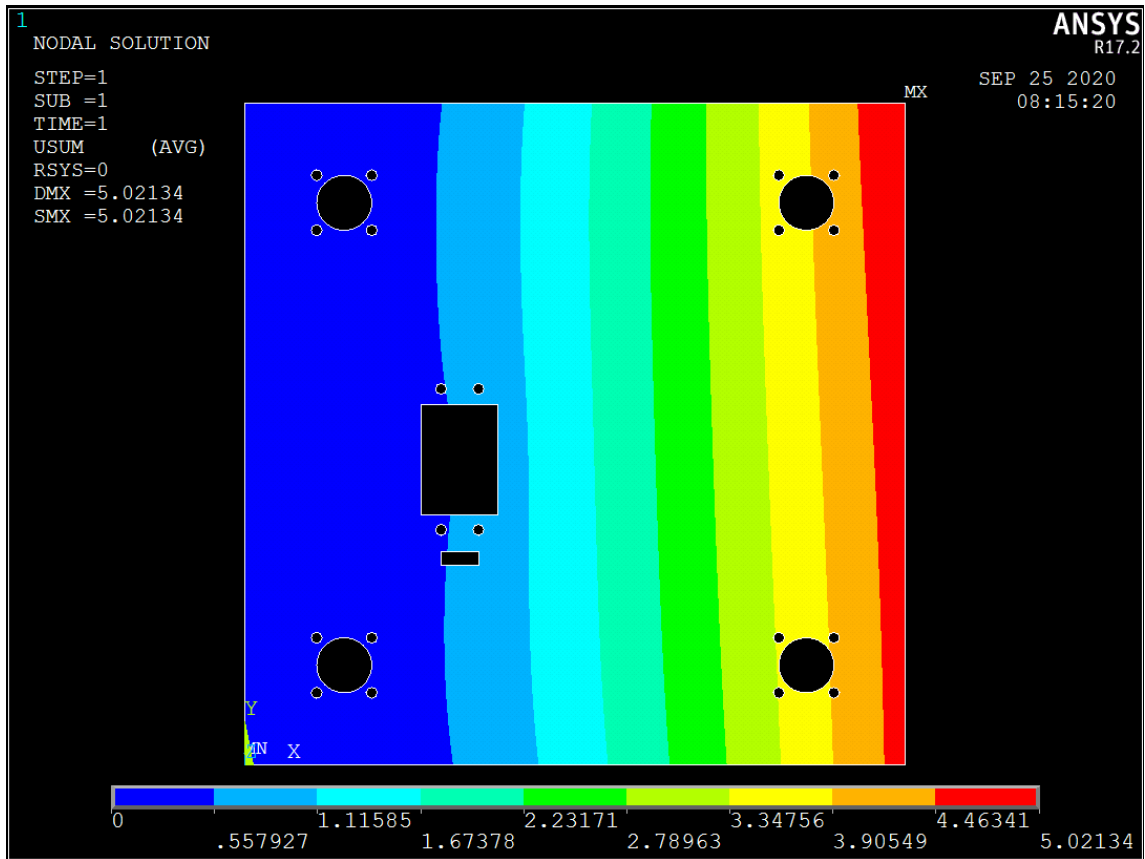
- **Visualise the results (Visualiser les résultats)** : Par exemple tracer la forme déformée de la géométrie ou des efforts.
- **Liste the results (Listes des résultats)** : si vous préférez les listes tabulaires ou classez la liste imprimée, il est possible.

**III.4 : Plaque étudié (EX1) :**

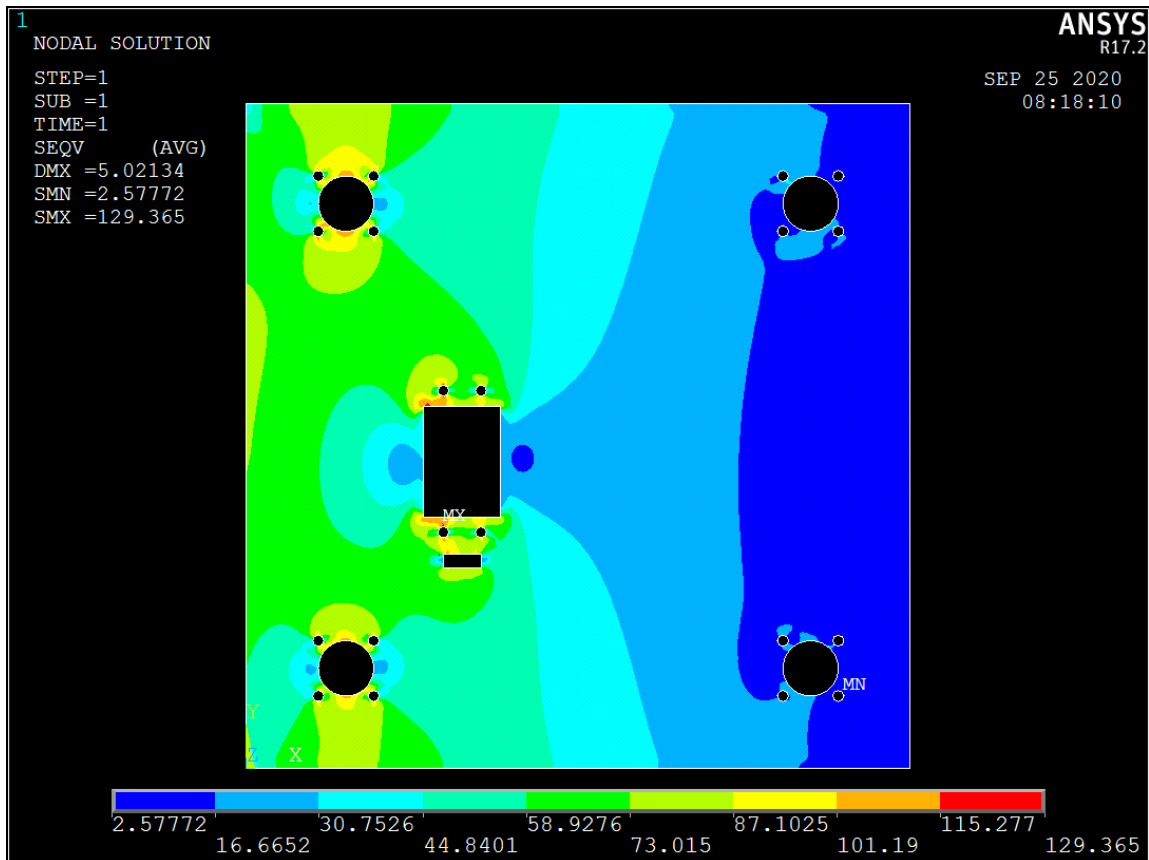
Matériaux : S275 ;  $e = 5\text{mm}$  ;  $F_1=F_2=50\text{N}$  ;  $q_1=0.4\text{ N}$  ;  $q_2=1\text{ N}$  ;  $r_1=12.5\text{mm}$   
 $r_2=r_3= 2.5\text{mm}$  ; la plaque possède un module de young de  $E=200\text{ GPa}$  ,  
 et un coefficient de poisson  $\nu=0.3$  ; et density =  $7.85 \cdot 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{mm}^3$  ;  $Re=275\text{ MPa}$



**Figure3-1 : Support étudié (Ex1)**



**Figure3-2 : Déplacement total**



**Figure3-3 : Contraintes total**

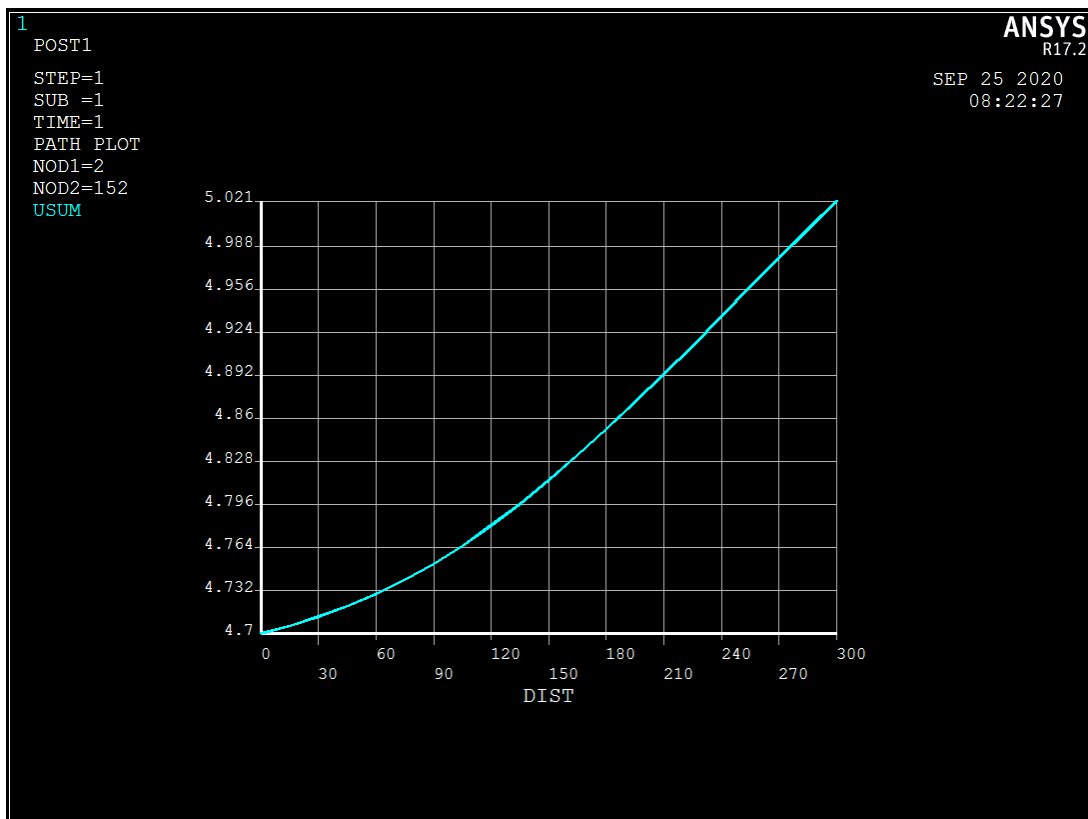
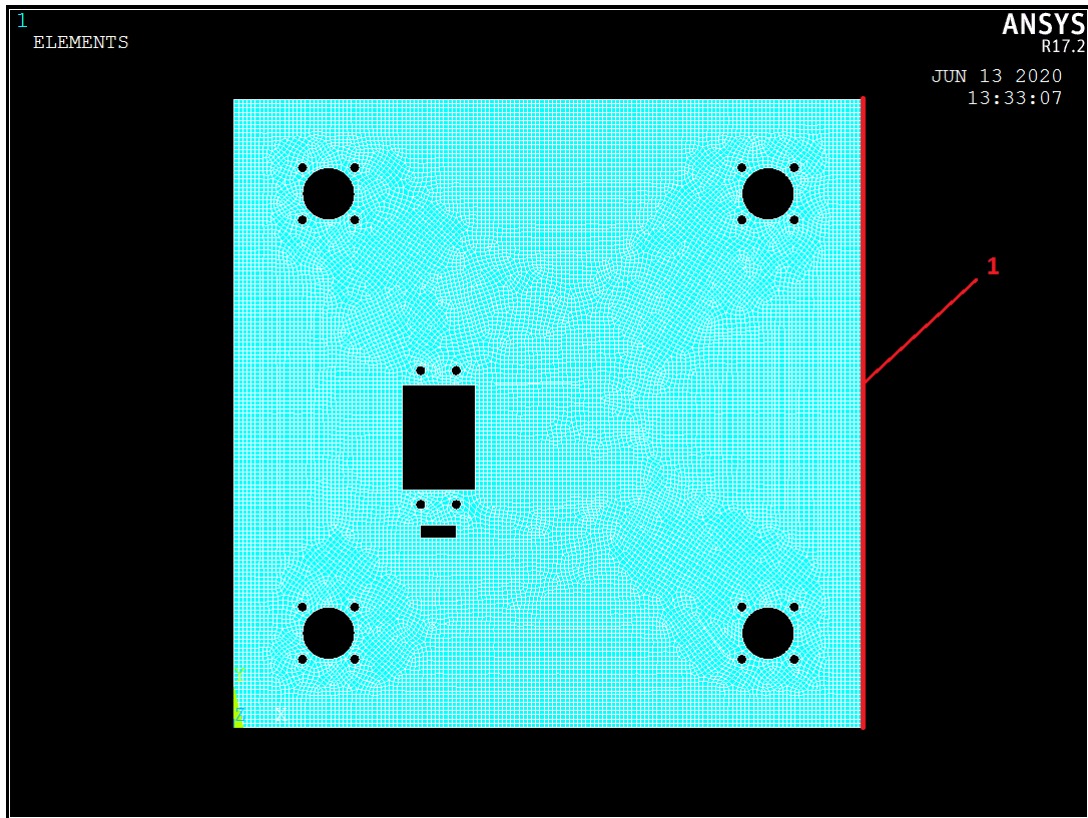


Figure3-4 : Déplacement total en fonction de long

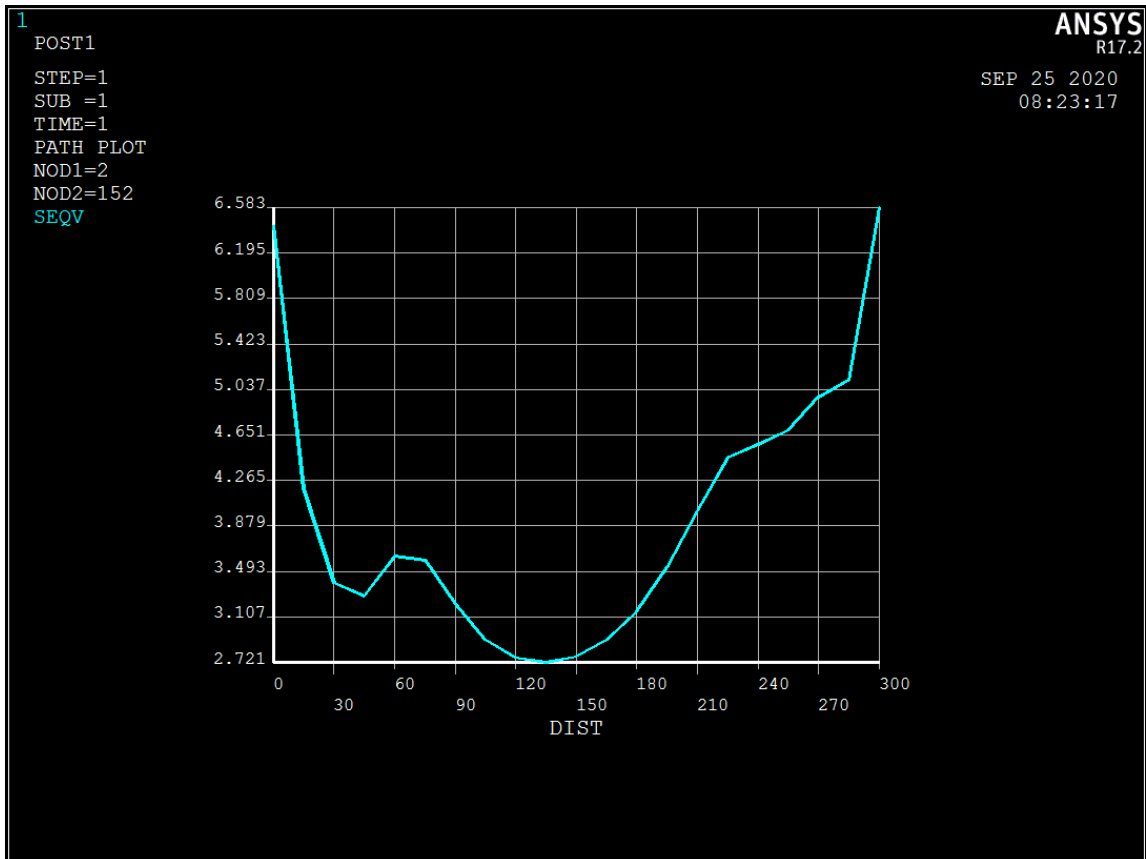
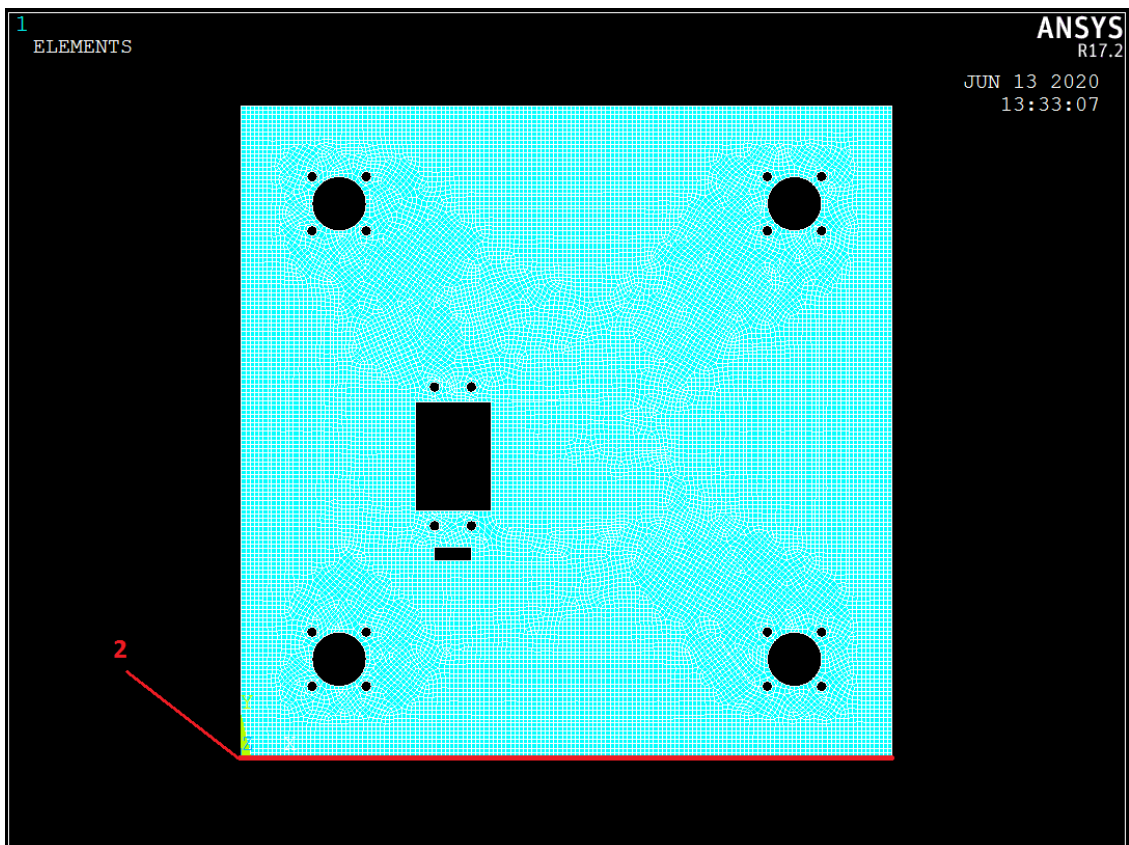


Figure3-5 : la contrainte totale en fonction de long



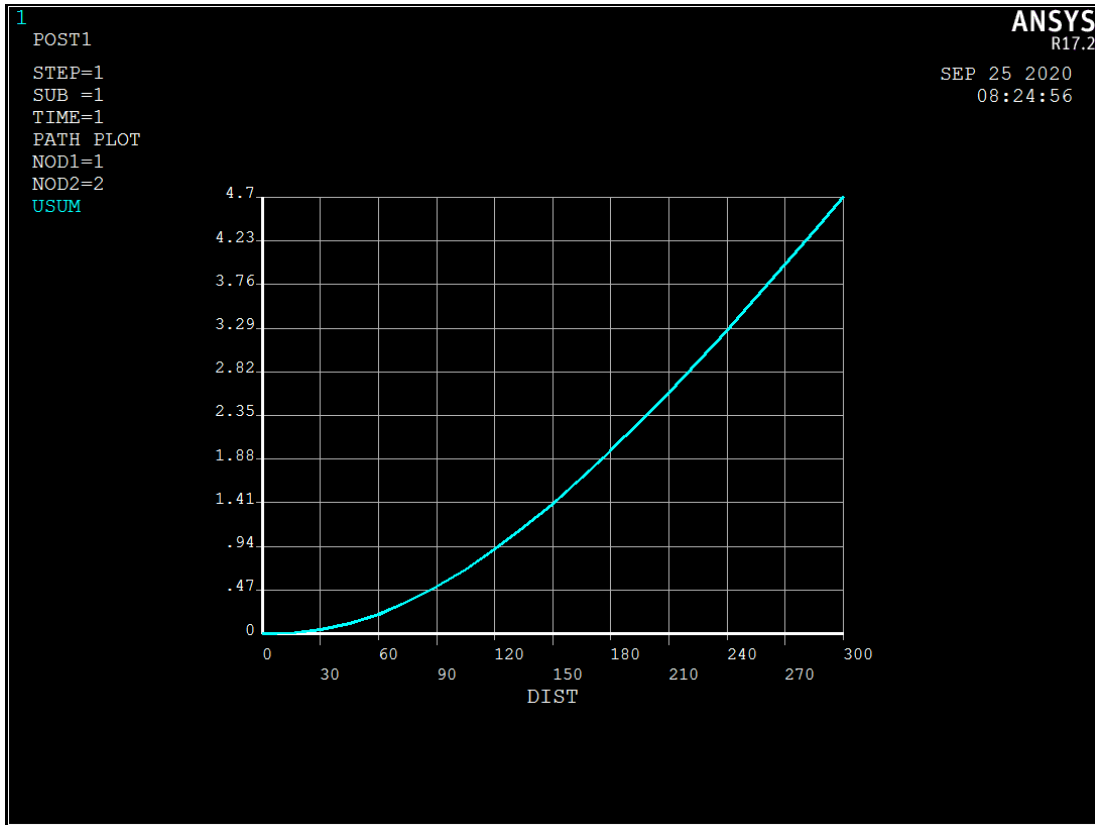


Figure3-6 : Déplacement total en fonction de long

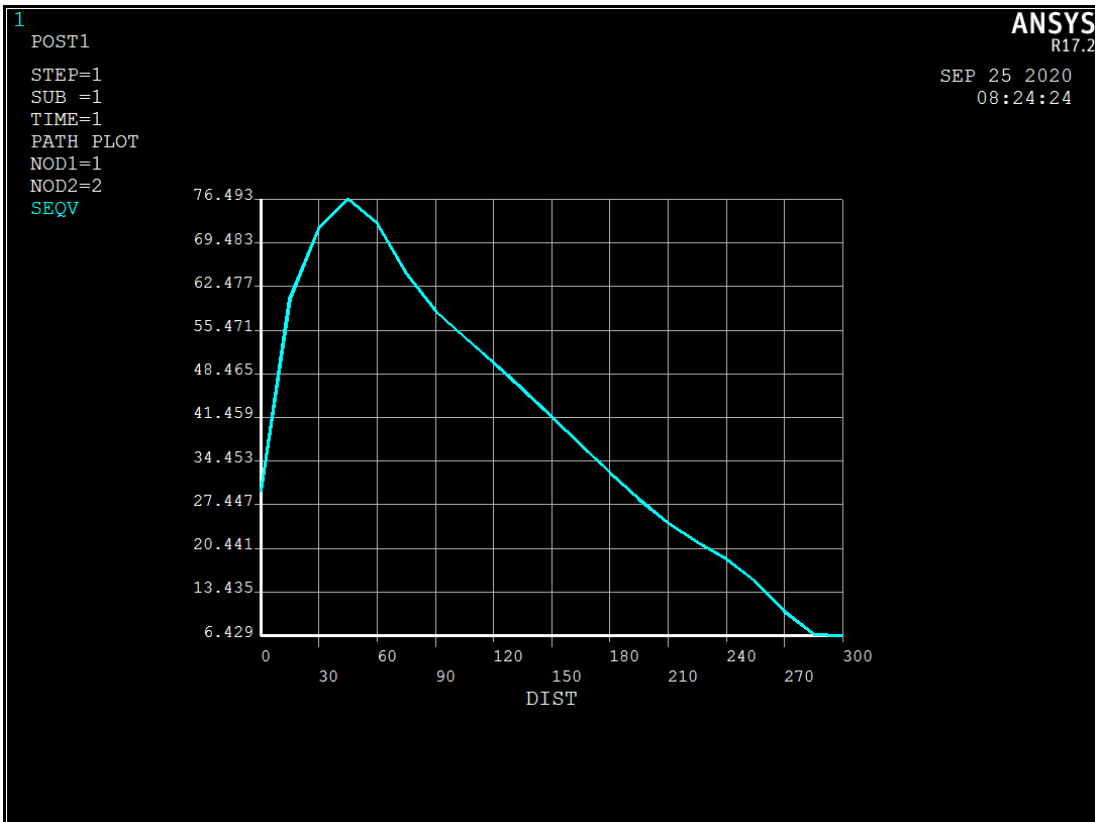
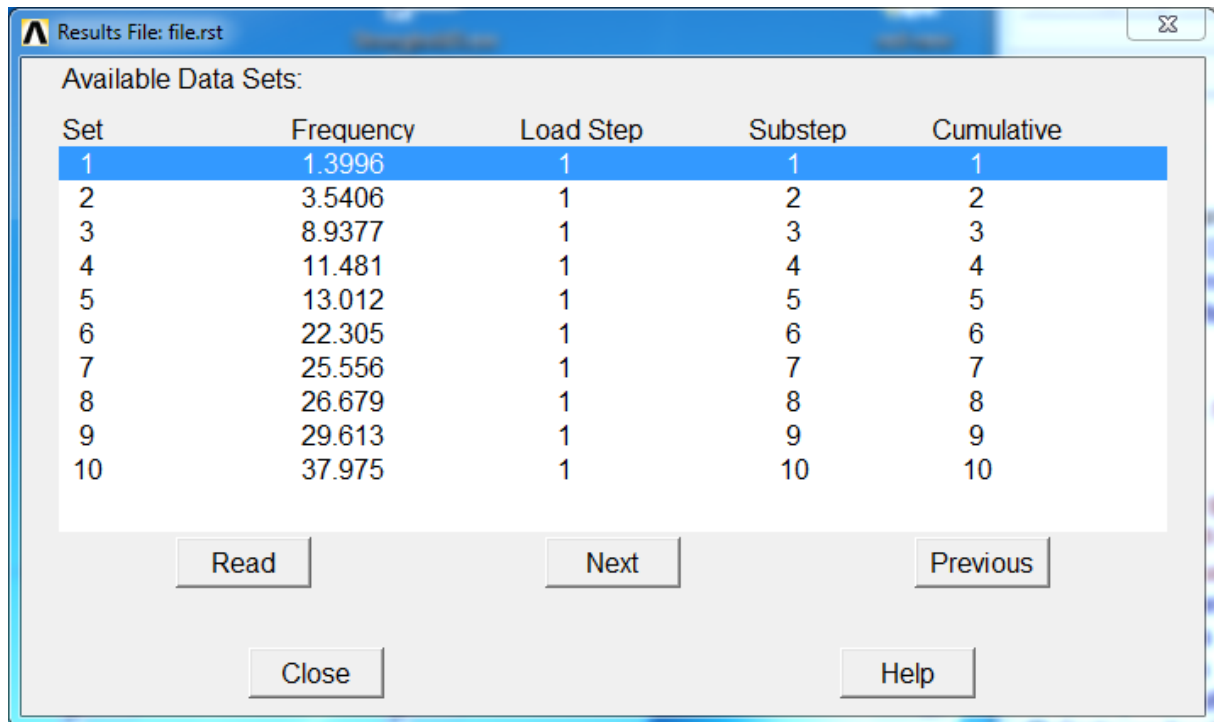


Figure3-7 : la contrainte totale en fonction de long



The screenshot shows a dialog box titled "Results File: file.rst" with a close button in the top right corner. The main content area is titled "Available Data Sets:" and contains a table with five columns: "Set", "Frequency", "Load Step", "Substep", and "Cumulative". The table lists 10 data sets, with the first row (Set 1) highlighted in blue. Below the table are five buttons: "Read", "Next", "Previous", "Close", and "Help".

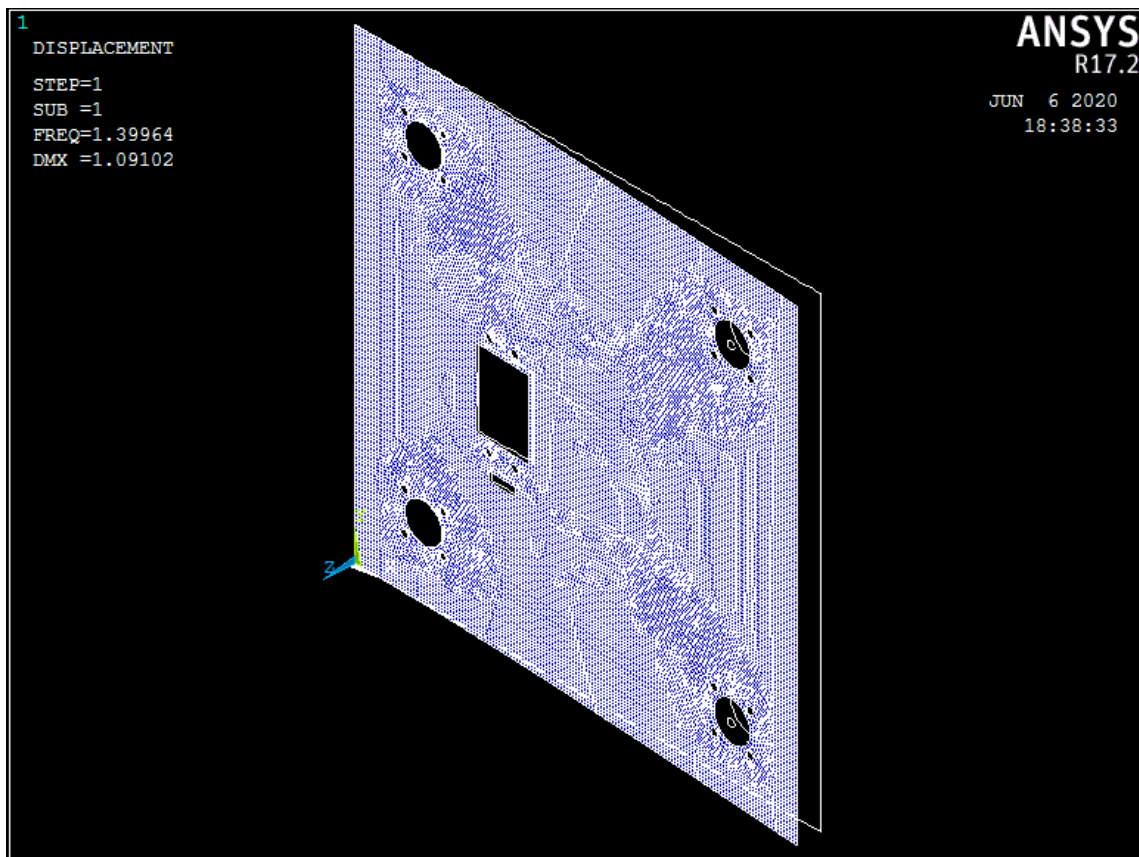
Set	Frequency	Load Step	Substep	Cumulative
1	1.3996	1	1	1
2	3.5406	1	2	2
3	8.9377	1	3	3
4	11.481	1	4	4
5	13.012	1	5	5
6	22.305	1	6	6
7	25.556	1	7	7
8	26.679	1	8	8
9	29.613	1	9	9
10	37.975	1	10	10

**Figure3-8** : les fréquences propres

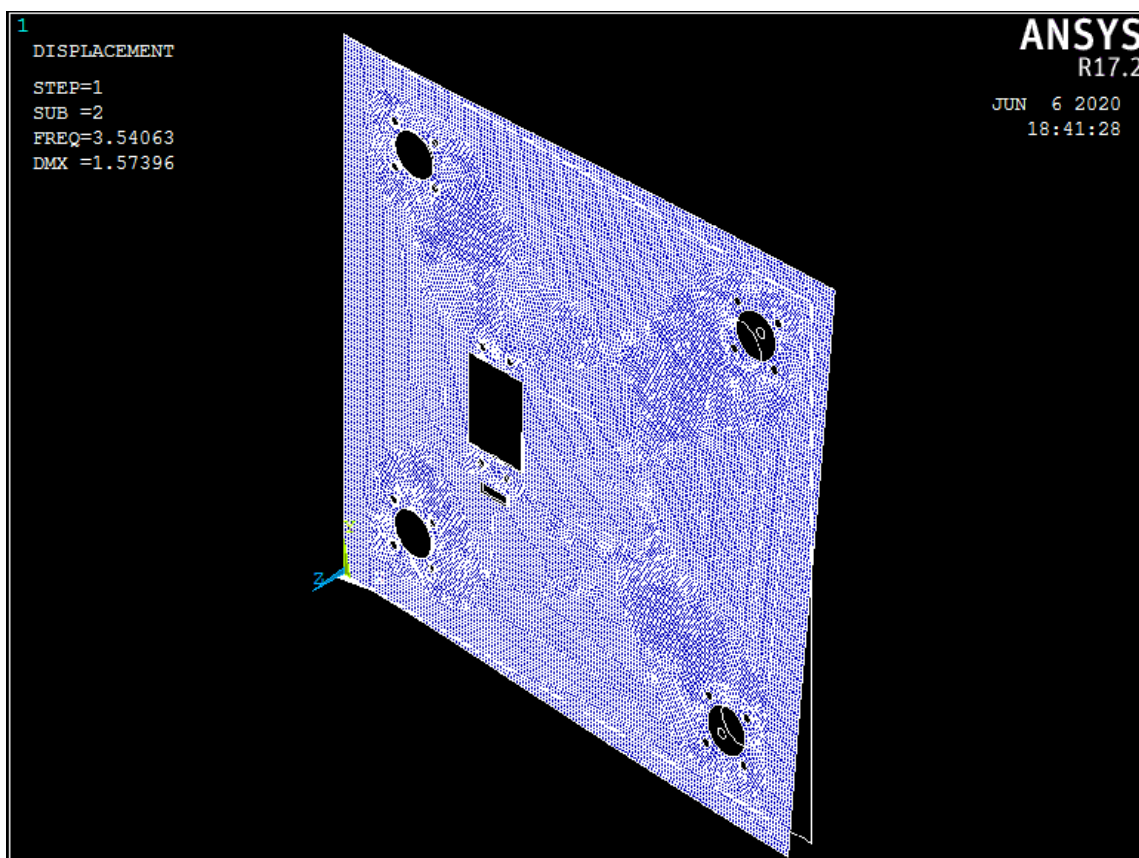
Les modes forment



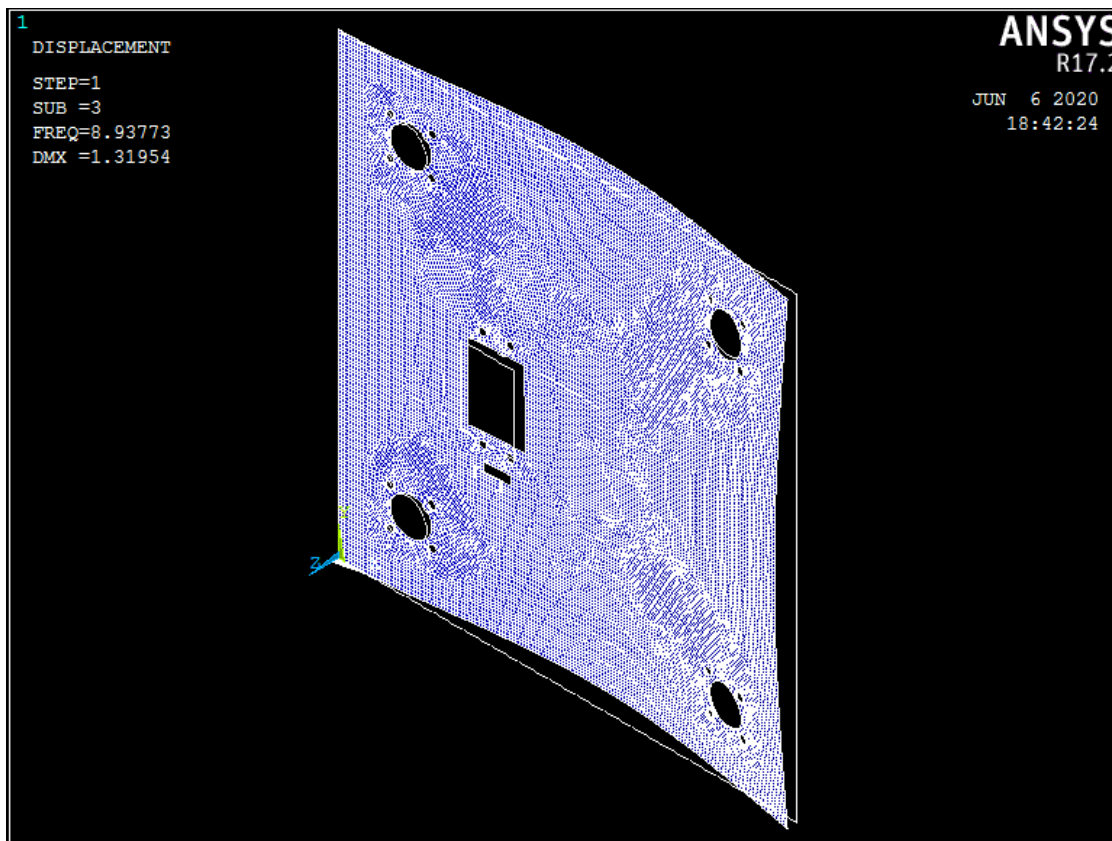
**Mode 1 :**



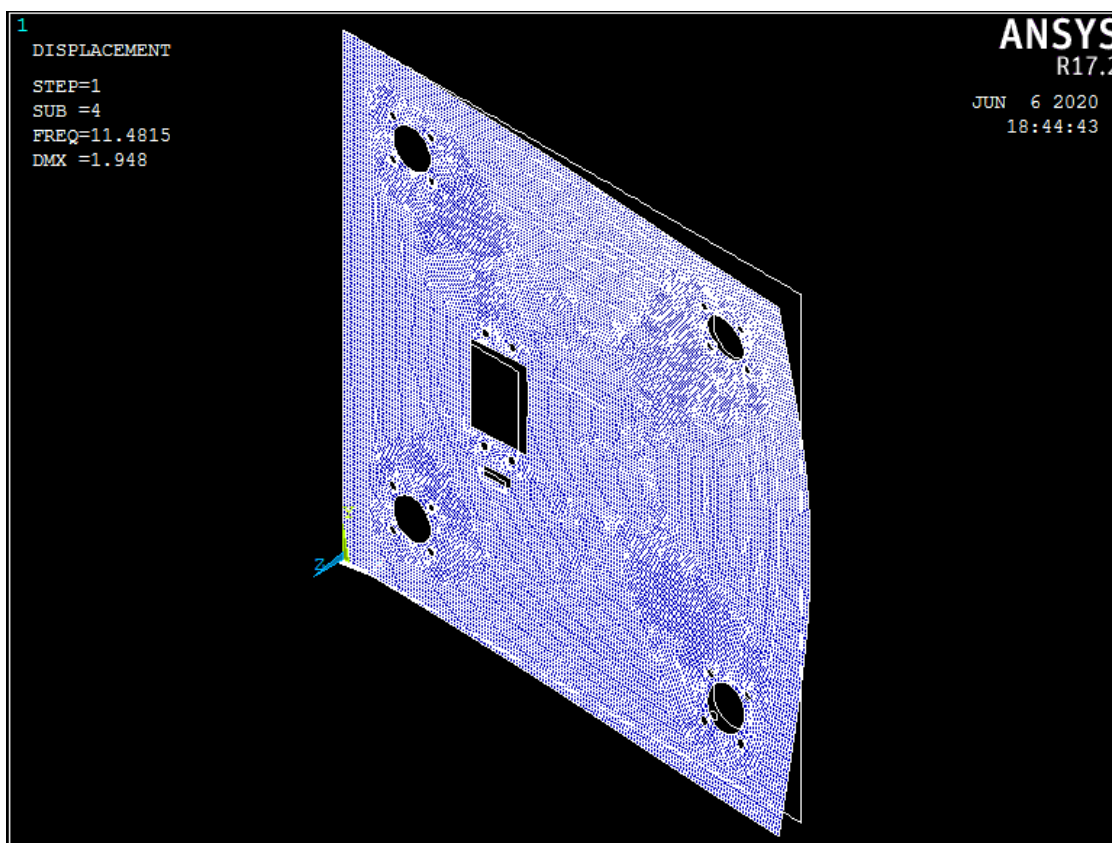
**Mode 2 :**



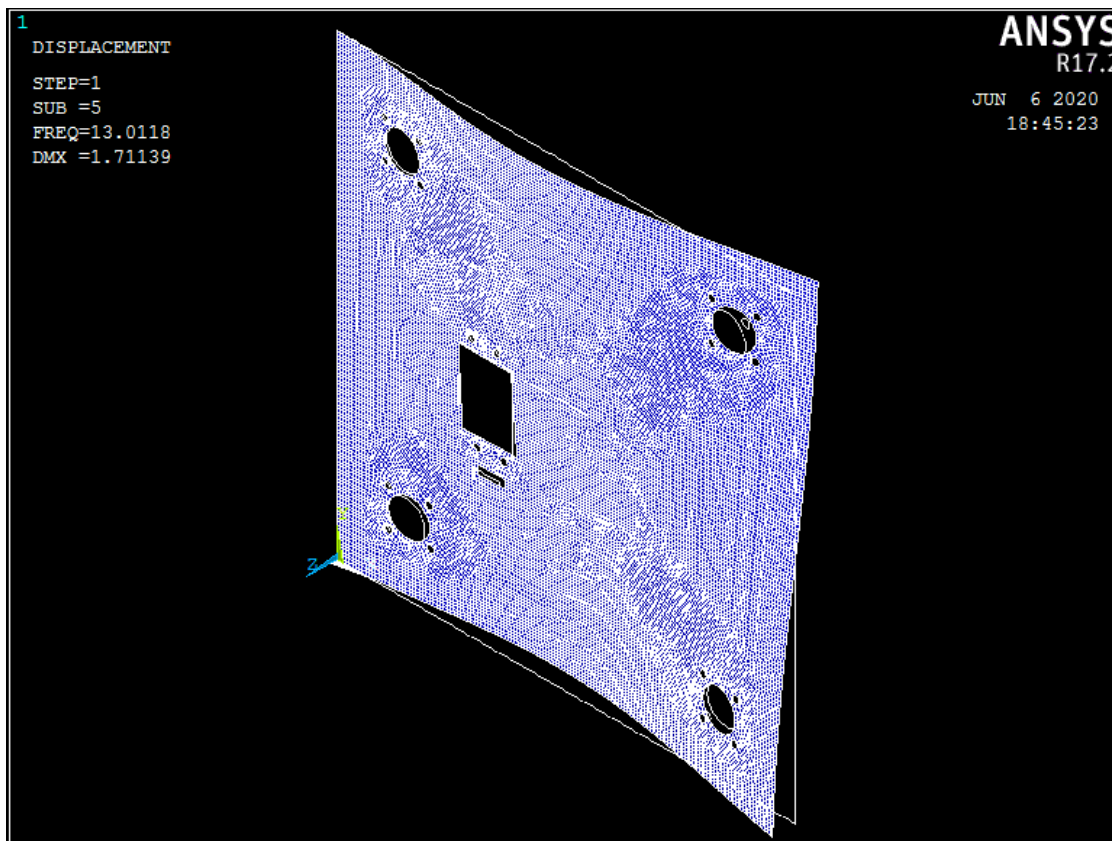
**Mode 3 :**



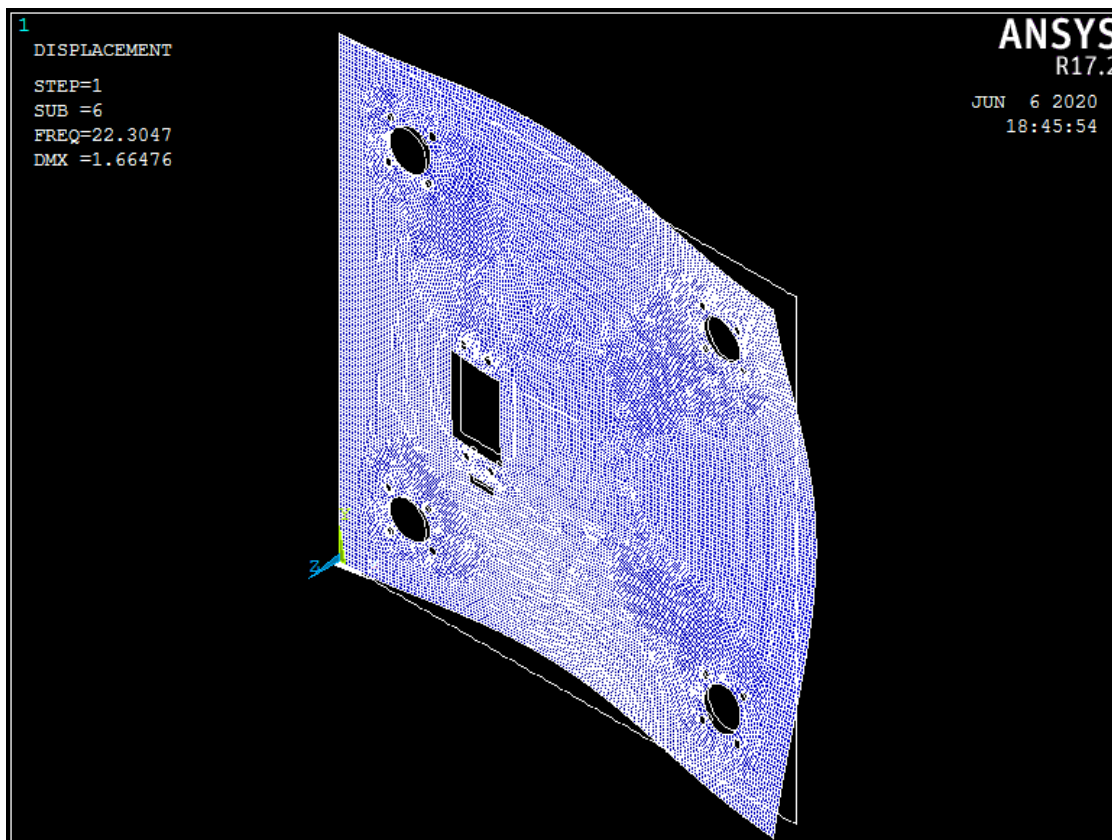
**Mode 4 :**



**Mode 5 :**

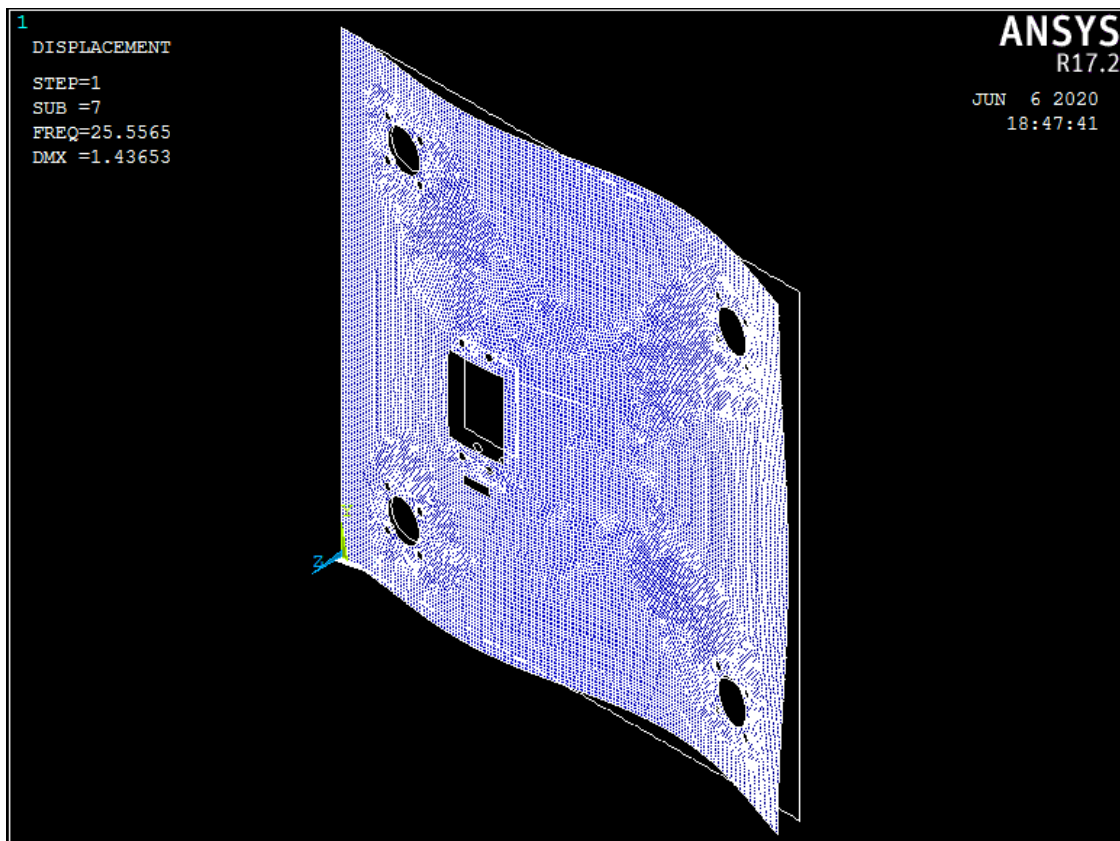


**Mode 6 :**

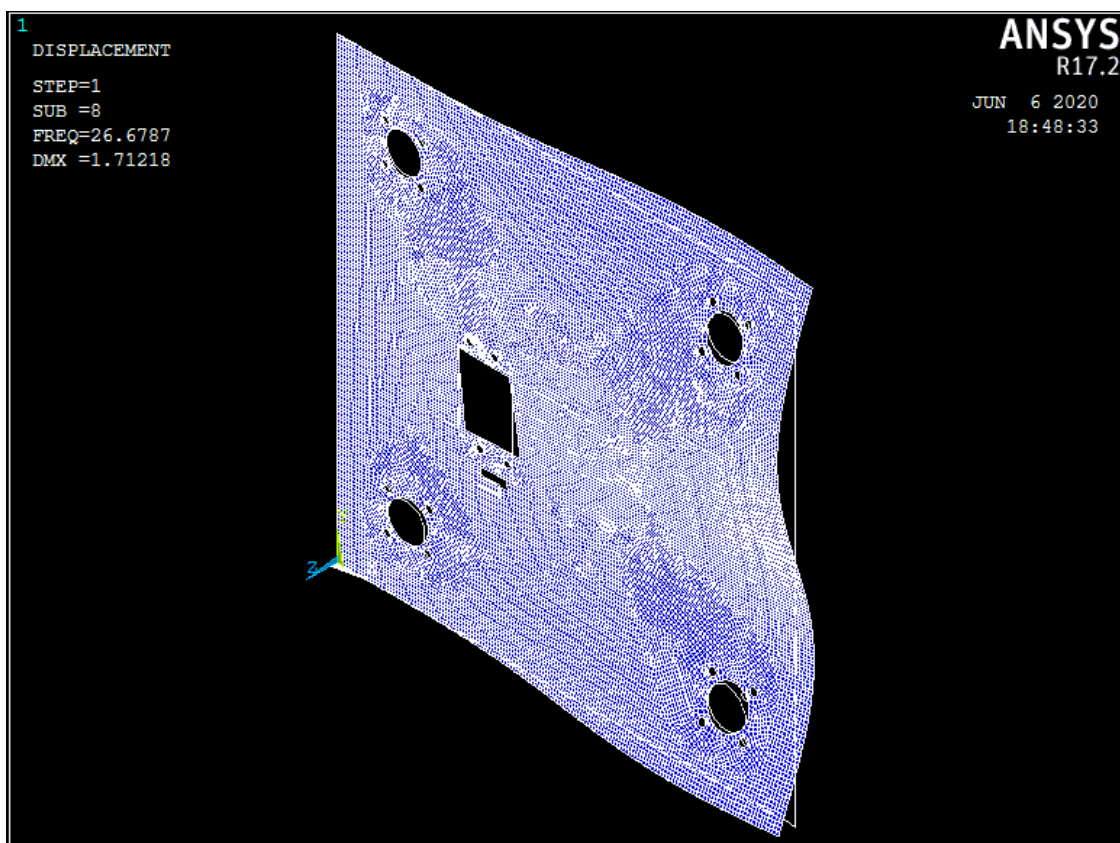




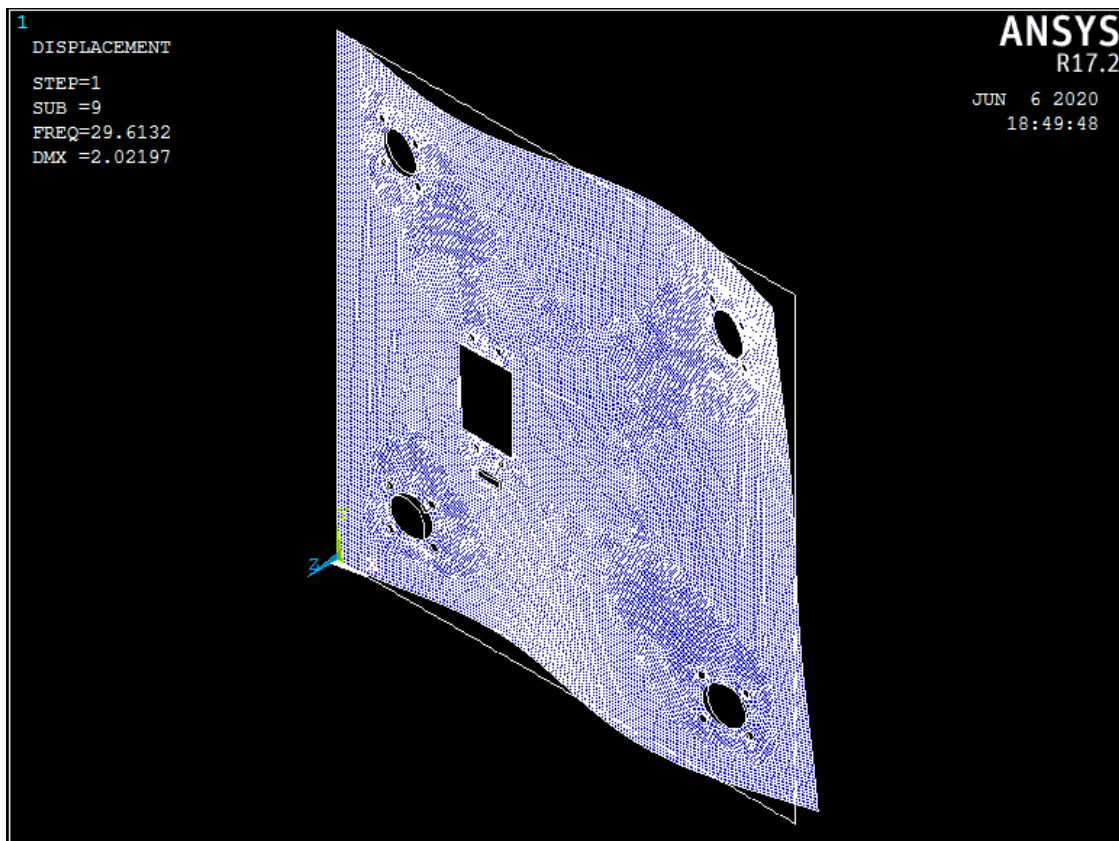
**Mode 7 :**



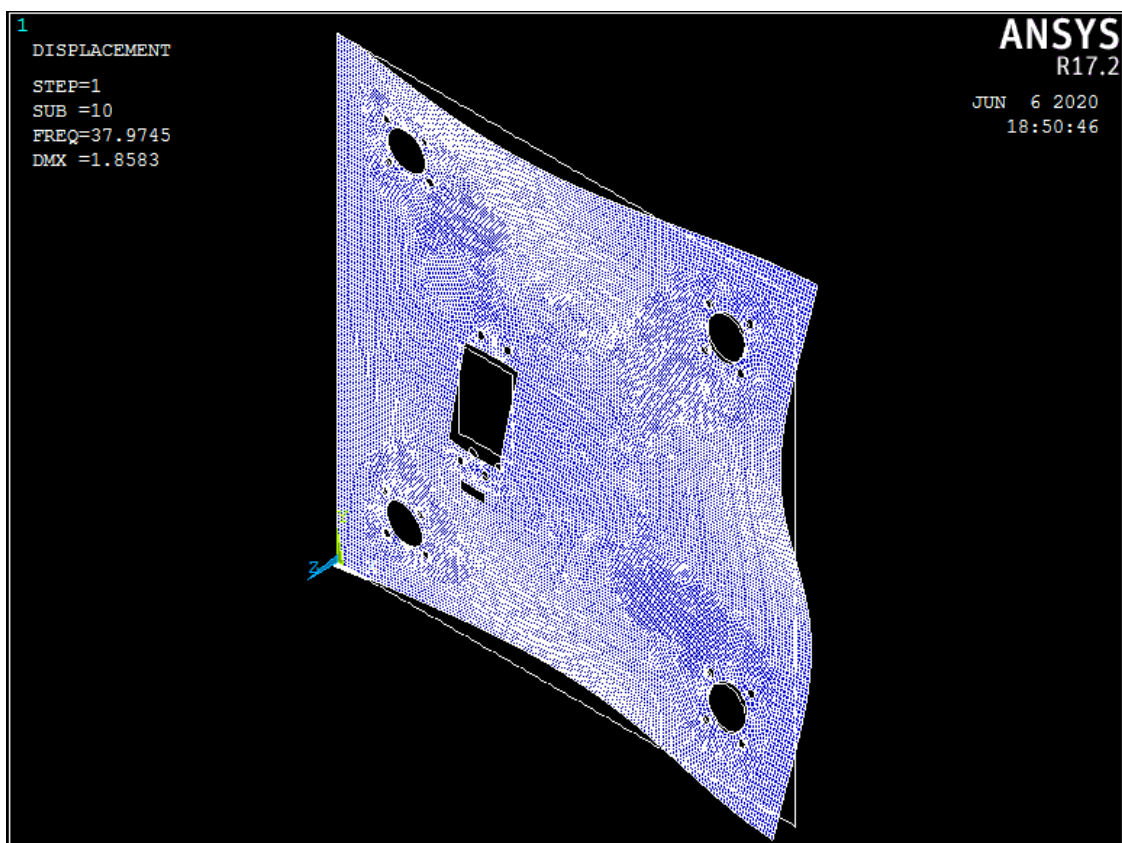
**Mode 8 :**



**Mode 9 :**



**Mode 10 :**



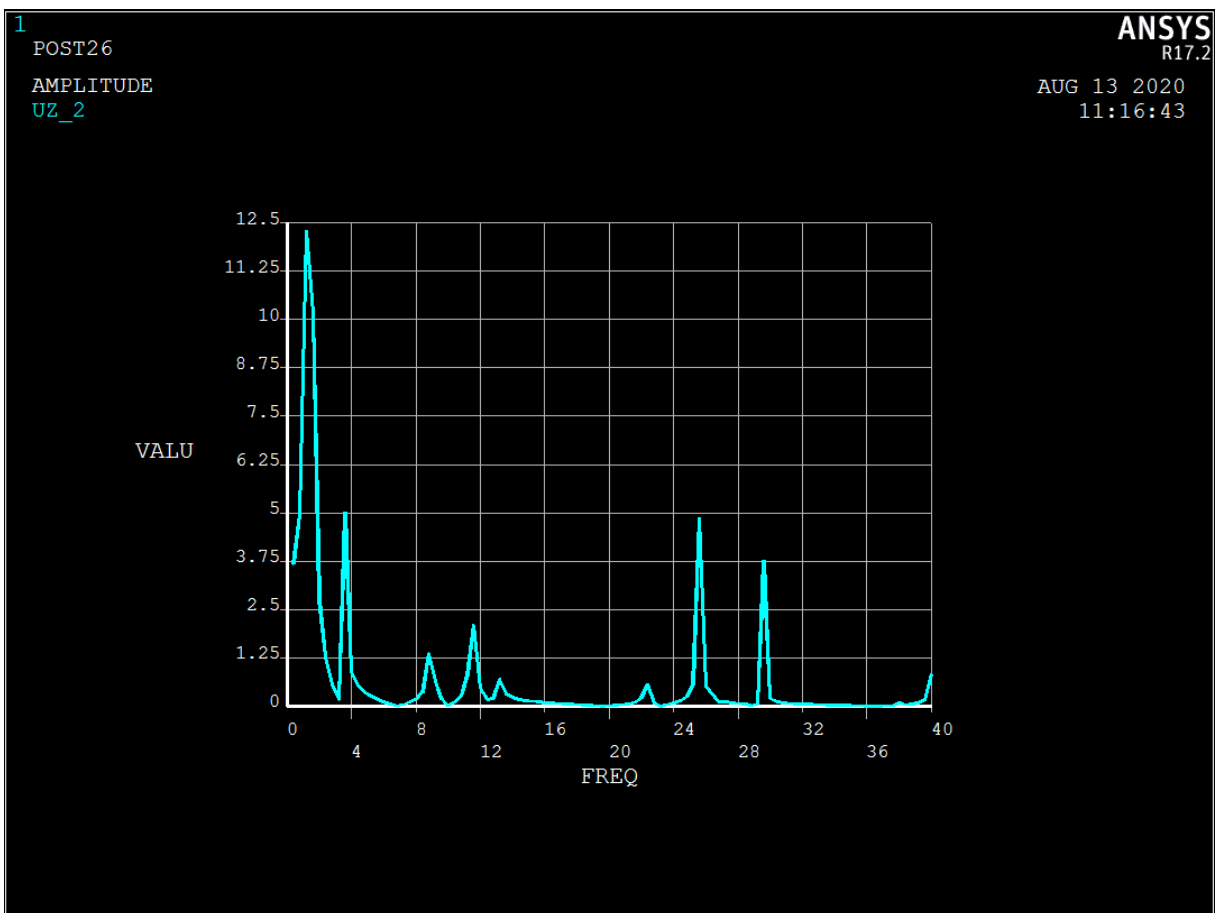
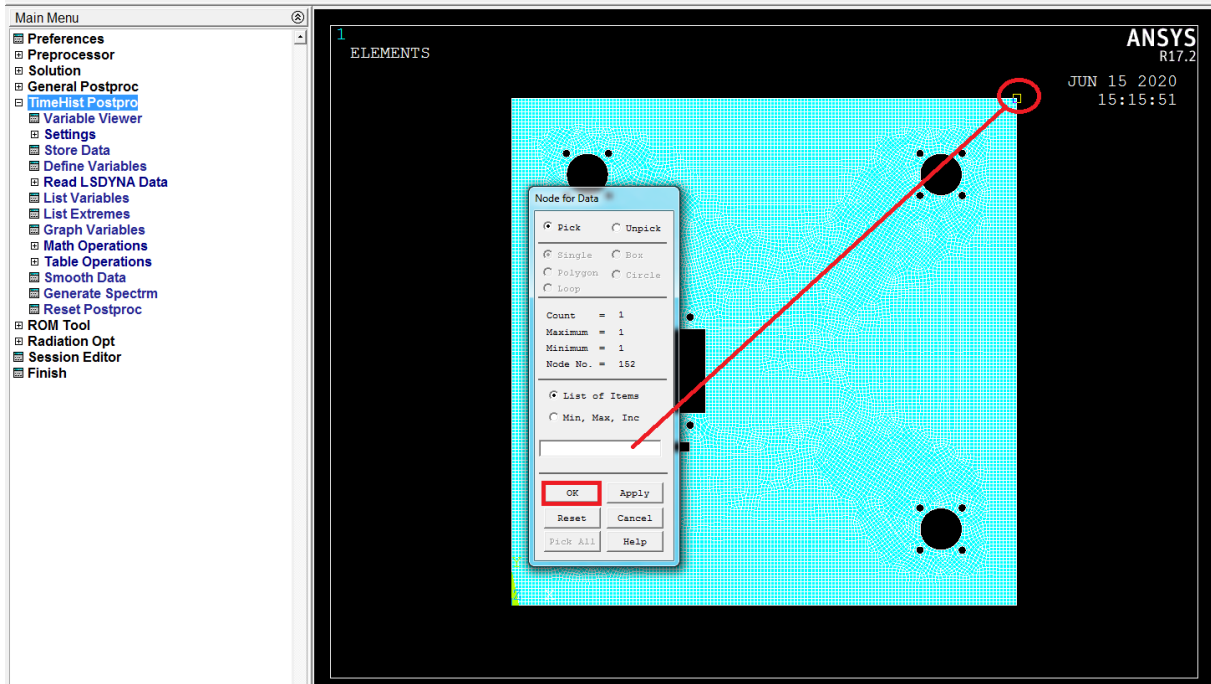
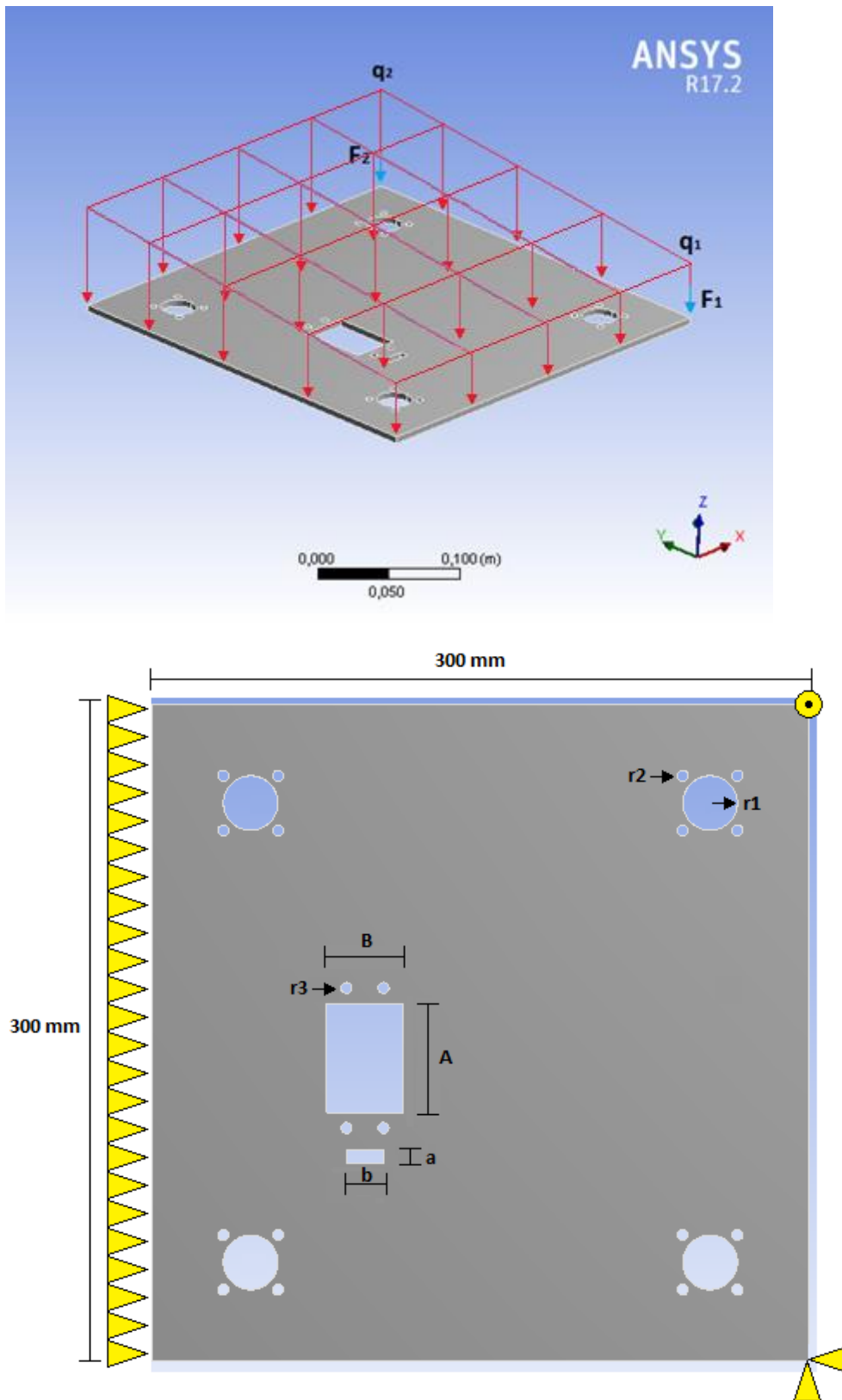


Figure3-9 : Amplitude en fonction de fréquence

**IV.5 : Plaque étudié (EX2) :**

Le même matériau que dans l'exemple précédent ;  $q_1=2 \text{ KN}$  ;  $q_2=5 \text{ KN}$  ;  $F_1=F_2=50\text{N}$



**Figure3-10 : Support étudié (Ex2)**



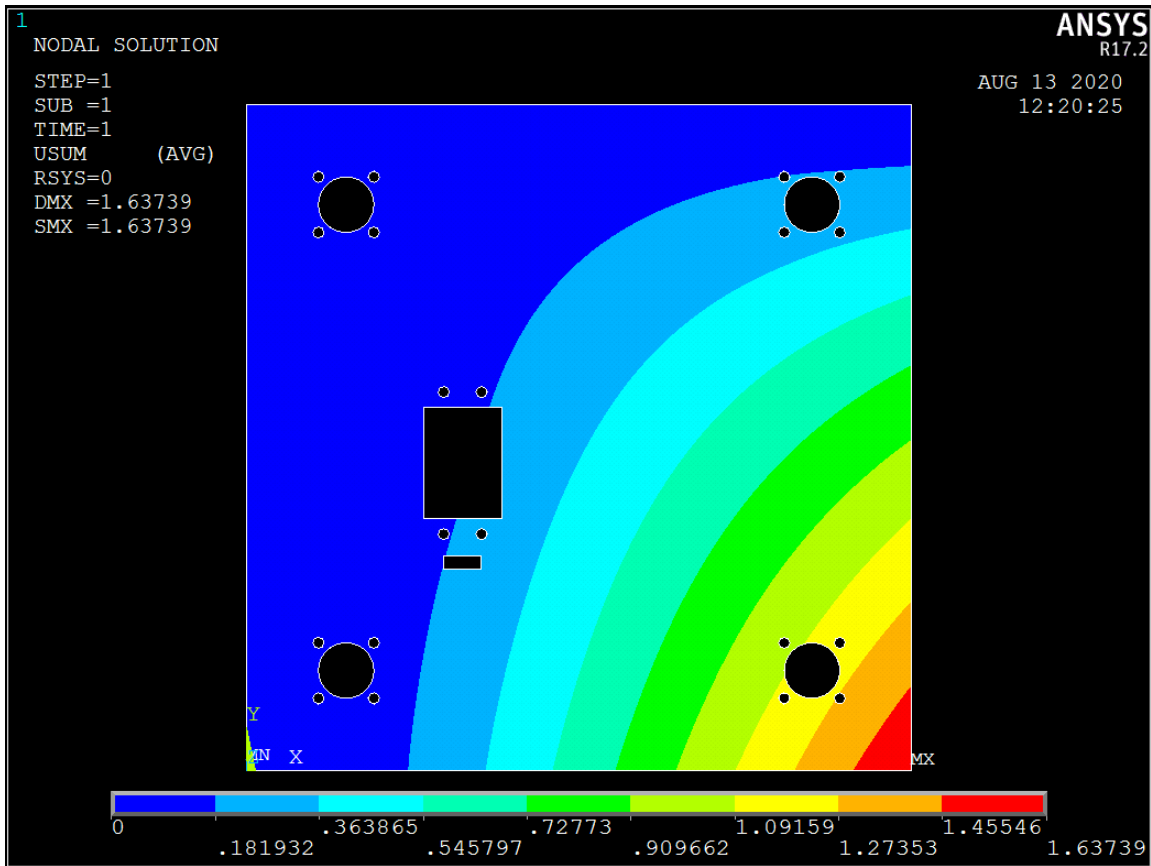


Figure3-11 : Déplacement total

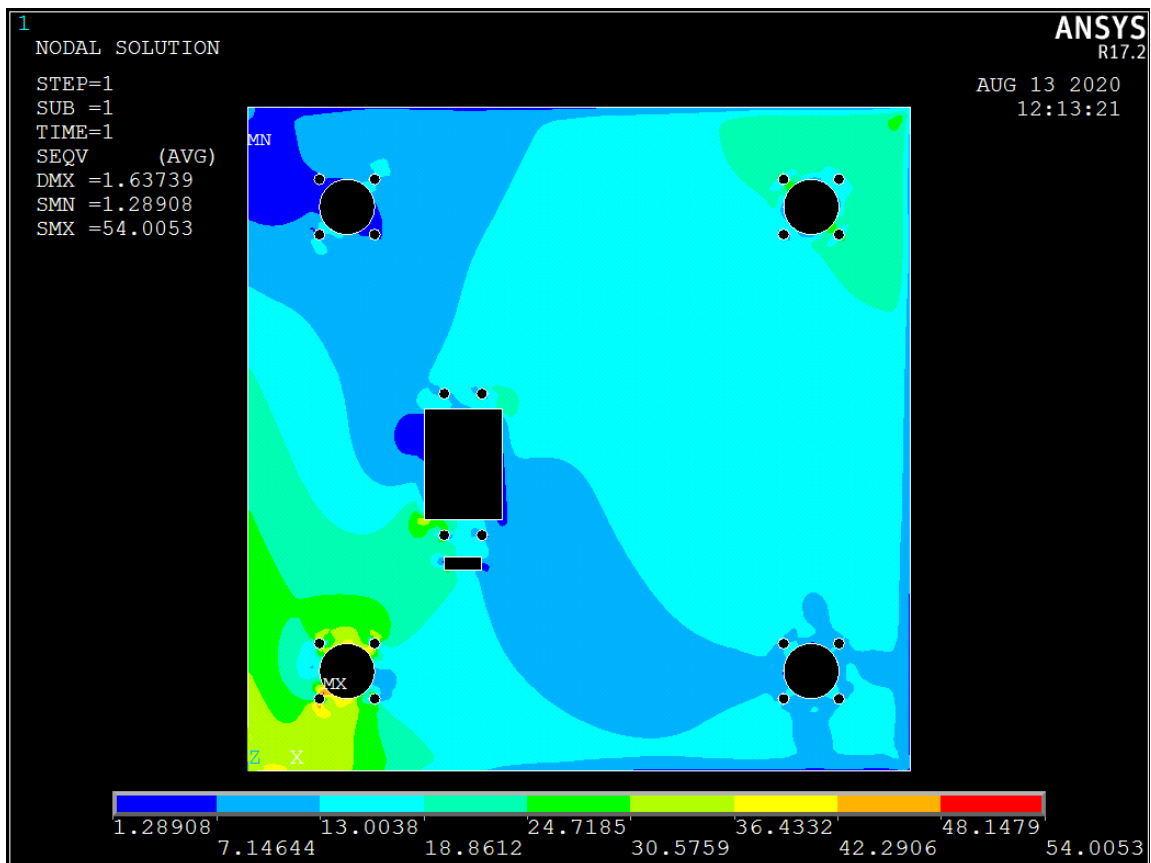


Figure3-12 : Contrainte total



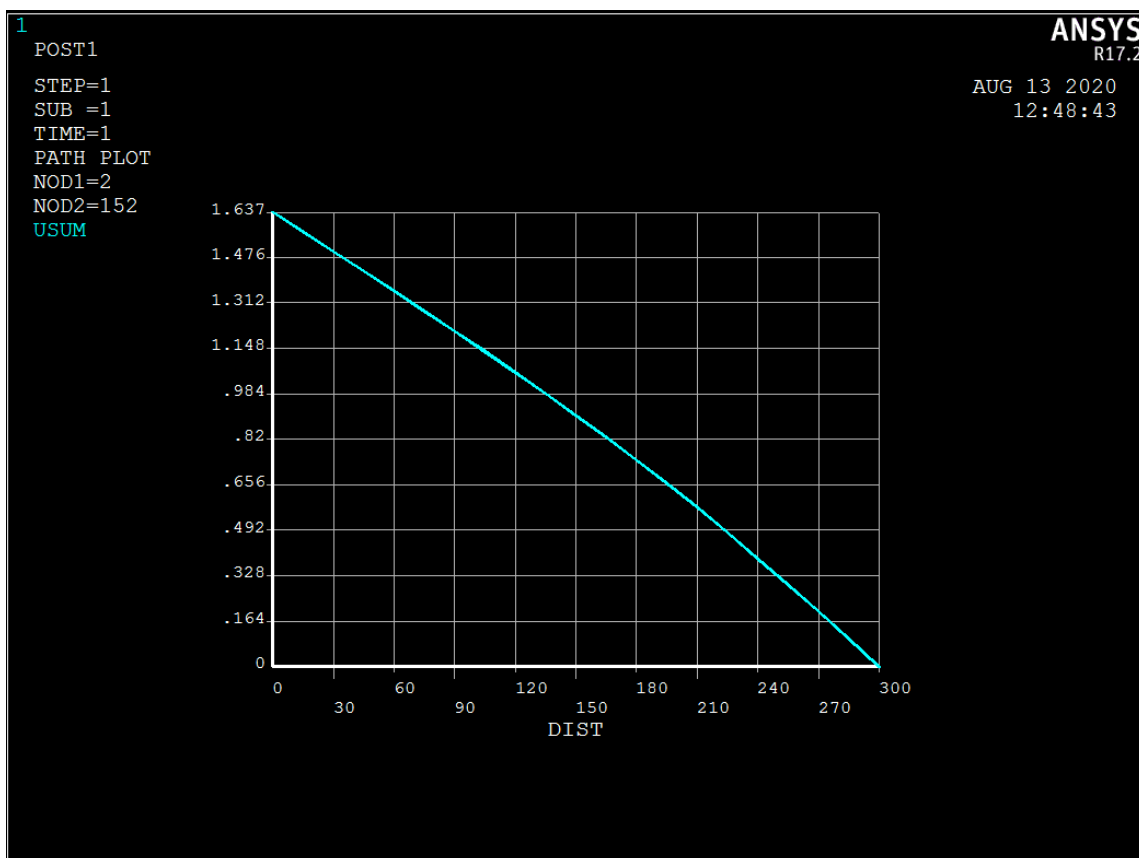
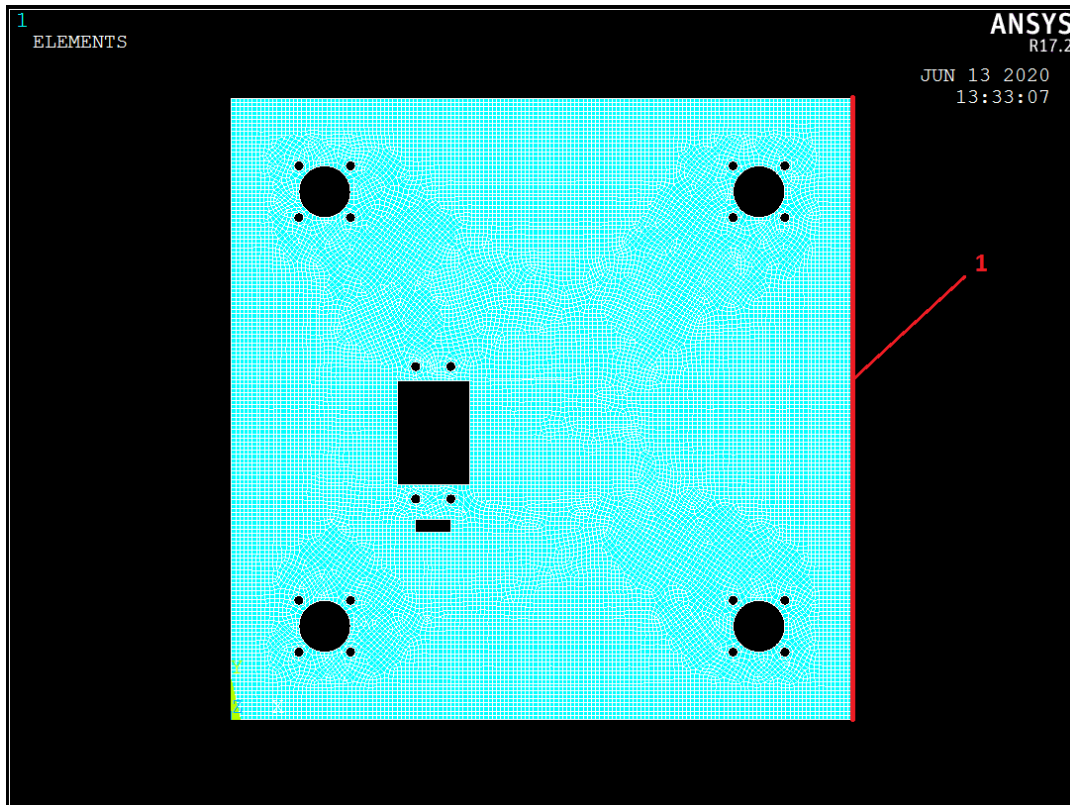


Figure3-13 : Déplacement total en fonction de long

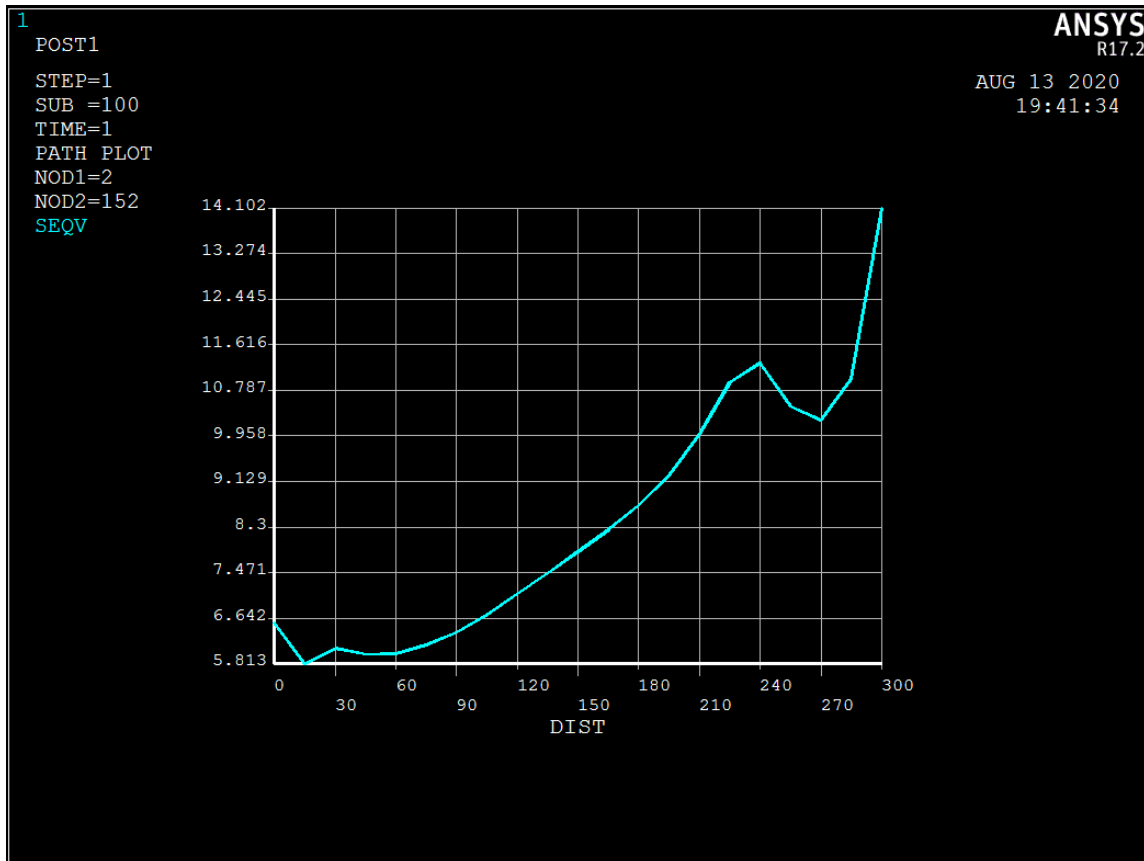
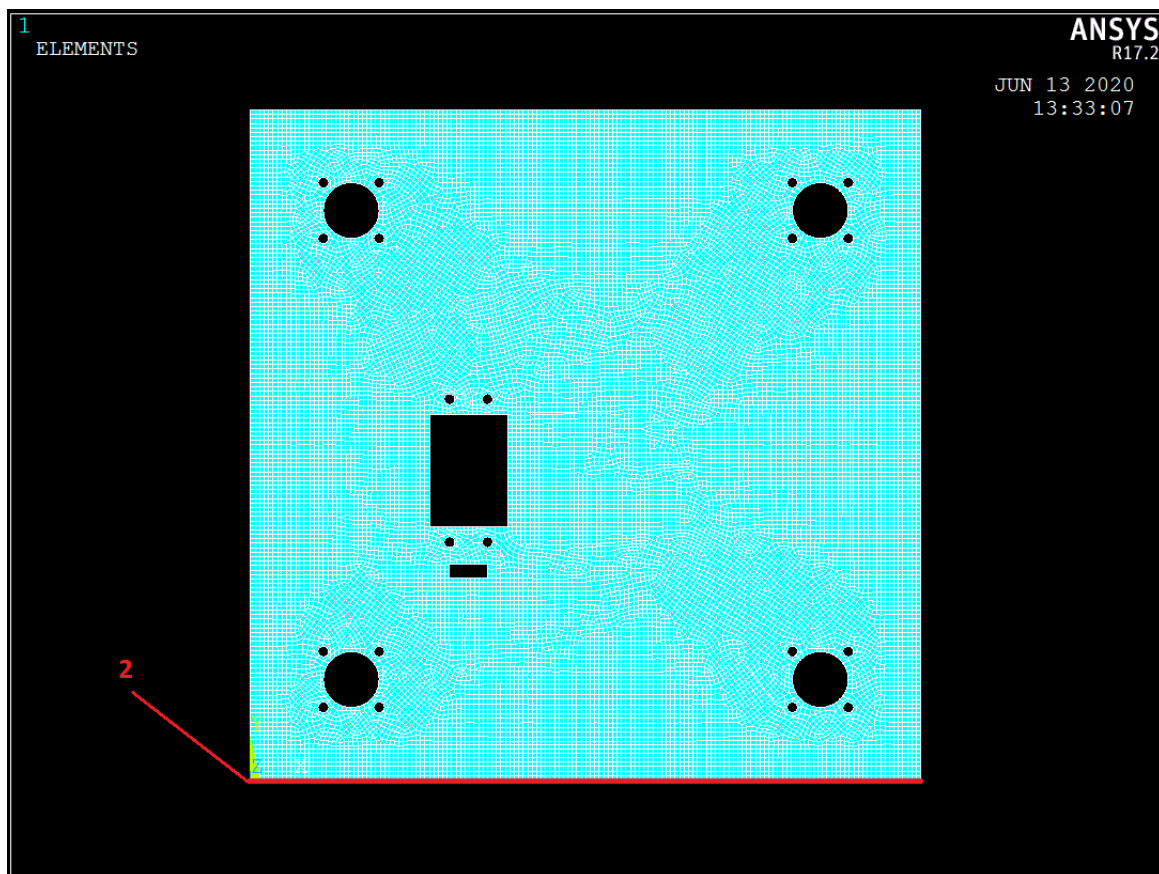


Figure3-14 : Contrainte total en fonction de long



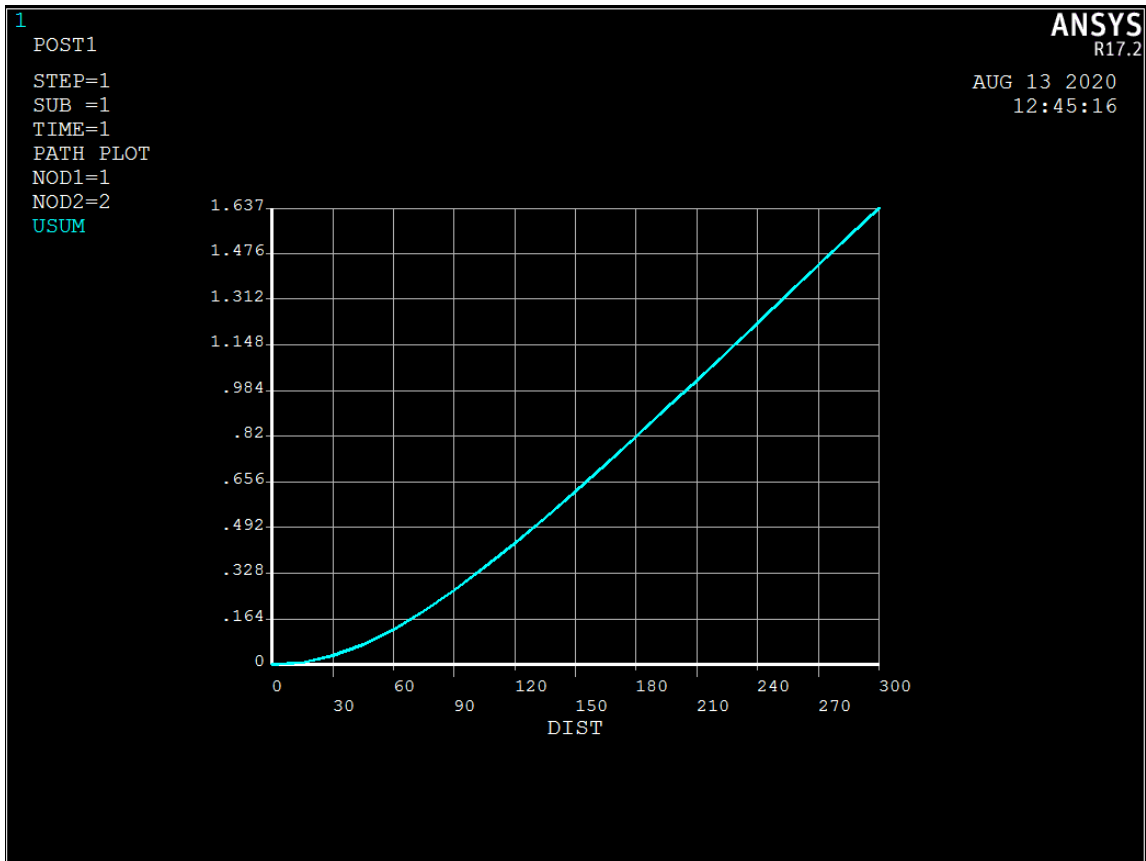


Figure3-15 : Déplacement total en fonction de long

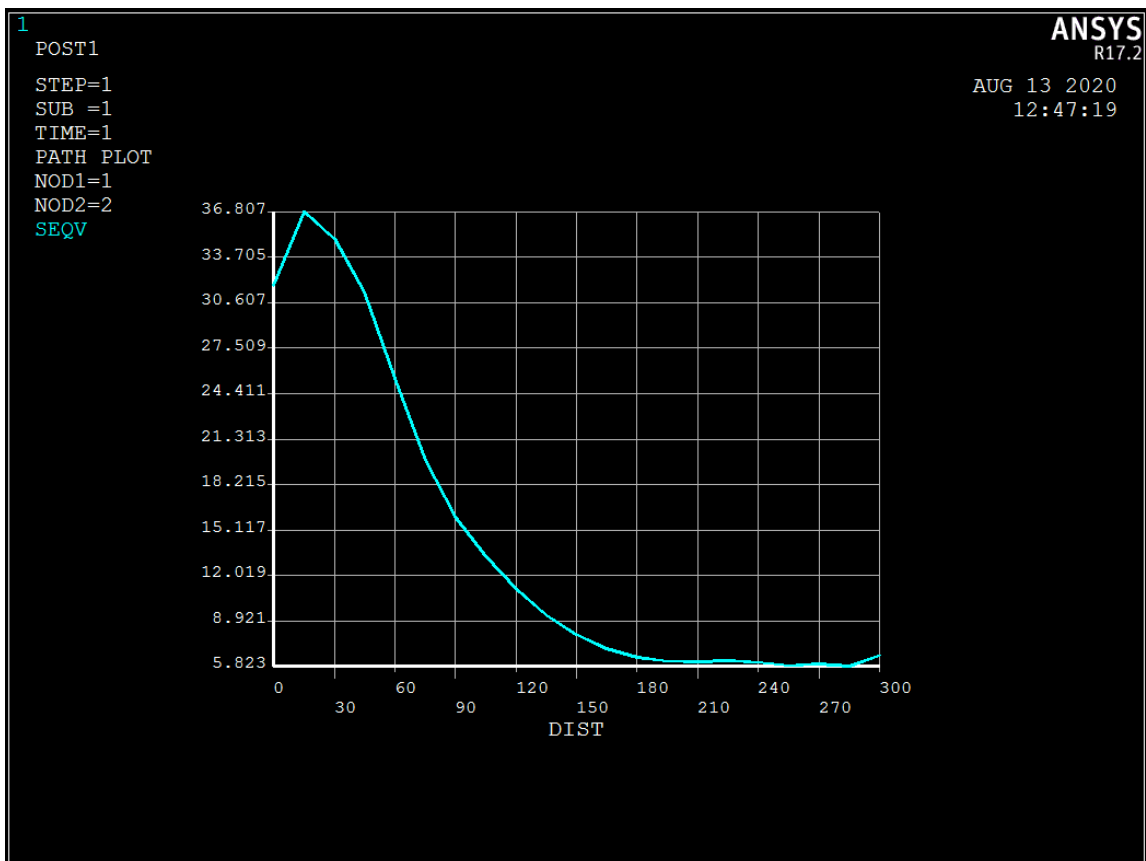


Figure3-16 : Contrainte total en fonction de long

Results File: projet.rst

Available Data Sets:

Set	Frequency	Load Step	Substep	Cumulative
1	2.1935	1	1	1
2	6.5875	1	2	2
3	9.1211	1	3	3
4	12.362	1	4	4
5	17.948	1	5	5
6	23.736	1	6	6
7	26.126	1	7	7
8	27.903	1	8	8
9	34.260	1	9	9
10	39.130	1	10	10

Read      Next      Previous

Close      Help

Figure3-17 : les fréquences propres

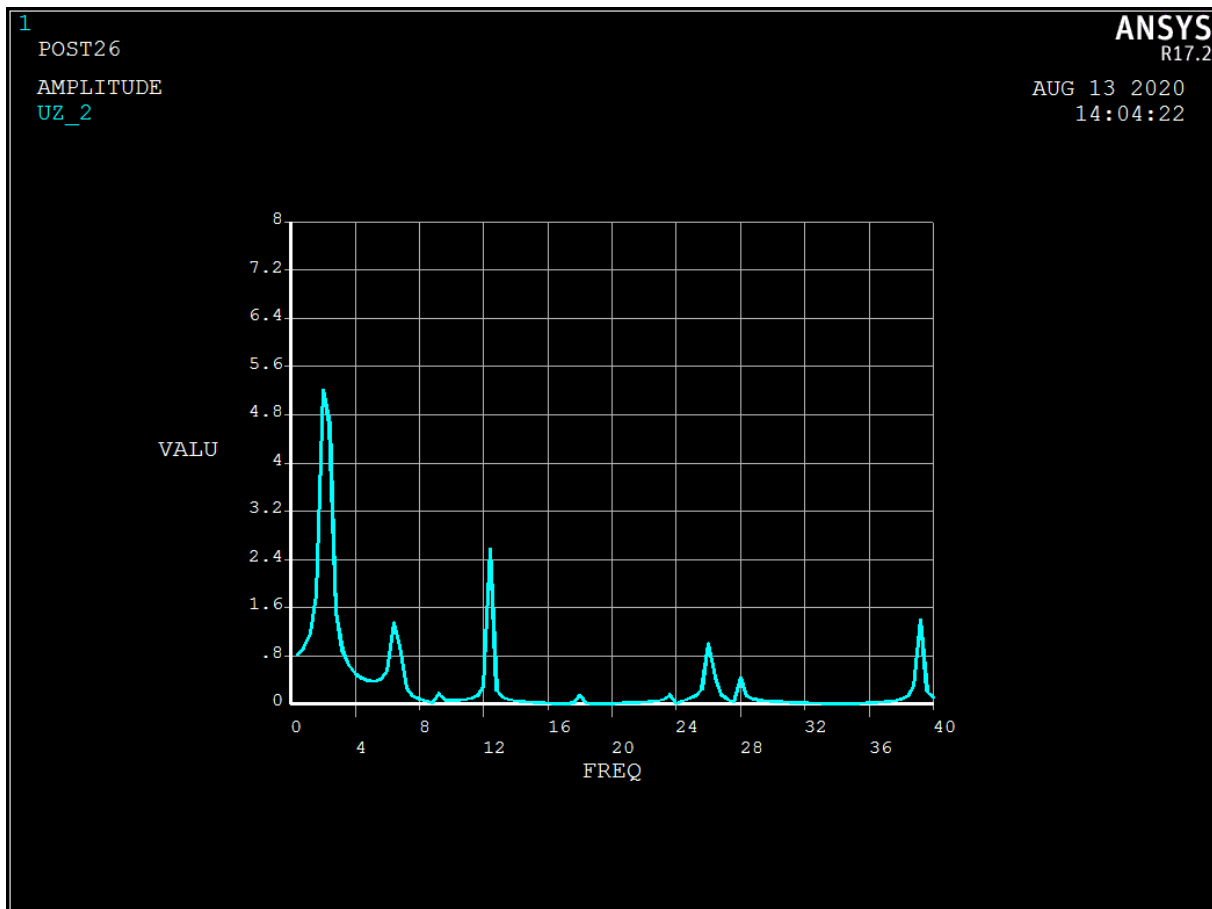


Figure3-18 : Amplitude en fonction de fréquence

### **CONCLUSION :**

Dans ce chapitre, nous avons effectué une analyse modale vibratoire d'un support, avec différents types de modes dans le but de déterminer leurs influences sur la structure.

Cette étude est nécessaire dans la conception des structures, car elle permet la détermination de leurs fréquences et modes propres pour pouvoir éviter les résonances.

L'analyse modale nous a permis de déterminer les fréquences et modes propres, leur nombre dépend du nombre de degrés de liberté de la structure, précisant aussi que les modes propres trouvés dans le cas statique sont imaginaires, mais dans le cas de l'excitation de la structure à une des fréquences associées à ces modes on obtiendra la combinaison du mode actuel qui sera dominant, avec les modes précédents

# **Conclusion générale Et Perspectives**

## **Conclusion générale**

L'étude du comportement de vibration des plaques est un sujet très important dans le domaine de calcul des structures.

Dans ce travail, après une synthèse théorique (chapitre 1, chapitre 2, chapitre 3) est une présentation de la méthode de formulation des éléments finis à travers les contraintes, les déplacements, et les fréquences des plaques.

Le travail effectué dans ce mémoire se rapporte à la modélisation aux méthodes des éléments finis d'un support.

La programmation de la méthode sous ANSYS a permis de déterminer les déplacements, les contraintes et les fréquences propres.

Ainsi on résout l'équation du mouvement pour déterminer les fréquences propres et forcées pour éviter le phénomène de la résonance.

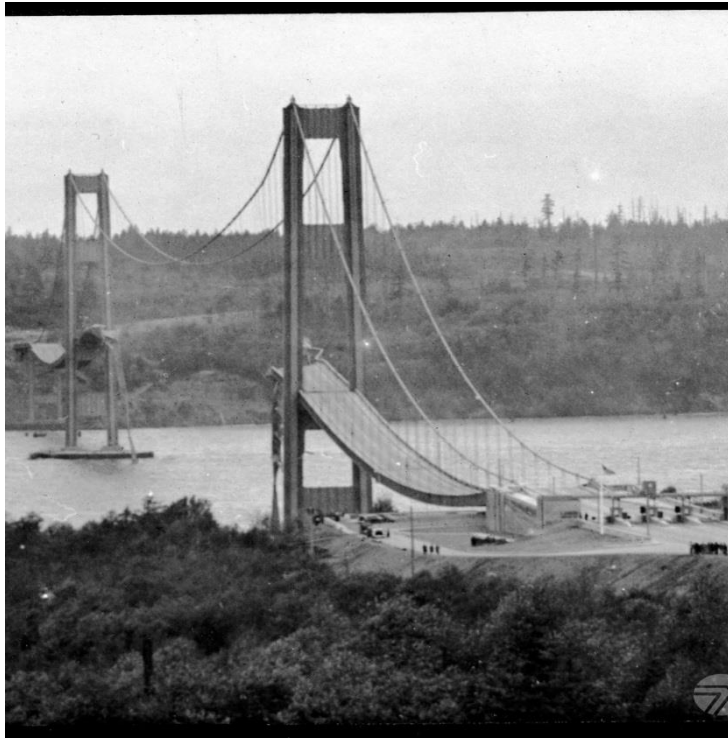
Dans l'étude, on a utilisé l'analyse structurale avec l'ANSYS APDL.

## Référence bibliographique

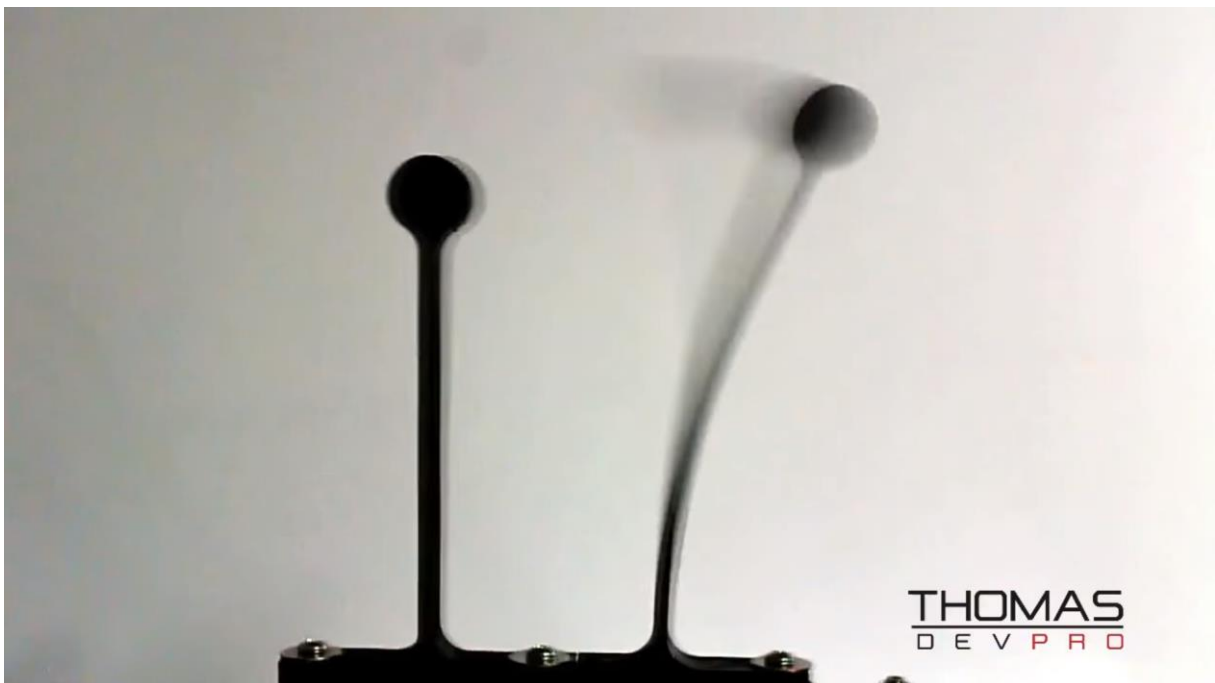
- [1] : Batoz j L et Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis, vol.2 : poutre et plaque, Edition Hermès, paris 1990.
- [2]: Love A. E. H. « On the small free vibrations and deformations of elastic shells ». Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. Série A, N° 17.
- [3]: Timoshenko S. « On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars ». Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6).
- [4]: Timoshenko S. « On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section ». Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6).
- [5]: Mindlin R. D. « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18.
- [6]: Reisner E. « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ». J. of Appl. Mech., 1945, Vol. 12 p. A69–A77.
- [7]: Rayleigh L. « Theory of sound ». Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945.
- [8]: EDUQRD VENTSEL & THORDOR KRANTHAMMER. « thin plates and shelles ».
- [9] : Jean-Luis Batoz, « Modélisation des structures par éléments finis », volume 2, Poutres et Plaques.
- [10]: K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internet ». J. Number. Methods Eng., 2003
- [11] : François. Frey « Analyse des structures et milieux continus (Mécanique des solides) », volume3 Presses polytechniques, édition (1999).
- [12] : Cours éléments finis Mr : KIRAD.
- [13] : Rahmani O et Kebdani S ,Introduction a la méthode des éléments Finis pour les ingénieur, 2éme éd . OPU, 1994.



## Les Annexes



**Figure1** : Pont tacoma



**Figure2** : exemple réel sur la fréquence Natural