# RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE





## UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1 FACULTE DE TECHNOLOGIE DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes Pour l'obtention du Diplôme de Master en Construction Mécanique

#### Titre

## Torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique homogène par un disque rigide circulaire collé à la surface

Proposé et encadré par : Réalisé par :

Mr.MADANI Fateh

BOUSSANDEL Noureddine
BENFODIL Mohamed

Année universitaire 2019/2020

## Remerciements

Le plus grand merci revient à 'ALLAH' qui m'a donné la force et la patience pour mettre à terme ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos profonds remerciements et notre sincère gratitude à notre encadreur Mr F. Madani à qui revient le mérite de ce travail.

Nous remercions aussi les membres de notre jury pour avoir accepté d'assister à la présentation de notre projet, prouvant ainsi l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

#### **Résumé**

Dans ce travail, nous étudions le problème de torsion axisymétrique d'un milieu élastique fissurée par un disque rigide adhésif. A l'aide de la transformation intégrale de Hankel, le problème étudié est ramené, en tenant compte des conditions limites mixtes, à un système d'équations intégrales duales. Le problème de valeur aux limites doublement mixte correspondant associé au disque rigide et à la fissure est réduit à un système d'équations intégrales doubles, qui sont transformées, en équations intégrales de Fredholm du deuxième type. En utilisant la règle de quadrature, le système résultant est converti en un système d'équations algébriques. La variation de déplacement, de contrainte et du facteur d'intensité de contrainte est présentée pour certains cas particuliers du problème.

#### Mots Clés:

Couche élastique, torsion axisymétrique, équations intégrales duales, équations intégrales de Fredholm, facteur d'intensité de contrainte.

#### **Abstract**

In this work, we study the problem of axisymmetric torsion of an cracked elastic medium by a rigid adhesive disc. With the aid of the integral transformation of Hankel, the studied problem is reduced, by taking account of the mixed boundary conditions, to a system of dual integral equations. The corresponding doubly mixed boundary value problem associated with the rigid disc and the penny–shaped ctack is reduced to a system of dual integral equations, which are transformed, to a Fredholm integral equations of the second kind. Using the quadrature rule, the resulting system is converted to a system of infnite algebraic equations. The variation in the displacement, stress and stress intensity factor are presented for some particular cases of the problem.

#### **Keywords:**

Elastic layer, Axisymmetric torsion, Dual integral equations, Fredholm integral equation, stress intensity factor.

#### ملخص

في هذا العمل ، ندرس مشكلة الالتواء المحوري لوسط مرن متشقق بواسطة قرص لاصق صلب بمساعدة التحويل المتكامل لهانكل ، يتم تقليل المشكلة المدروسة ، من خلال مراعاة شروط الحدود المختلطة ، إلى نظام معادلات تكاملية مزدوجة .يتم تقليل مشكلة القيمة الحدية المختلطة المقابلة المرتبطة بالقرص الصلب و والشق الدائري إلى نظام من المعادلات التكاملية المزدوجة ، والتي يتم تحويلها إلى معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني باستخدام قاعدة التربيع ، يتم تحويل النظام الناتج إلى نظام من المعادلات الجبرية اللانهائية .يتم تقديم التباين في عامل الإزاحة والإجهاد وشدة الإجهاد لبعض الحالات الخاصة للمشكلة.

:الكلمات الدالة

الطبقة المرنة ، الالتواء المحوري ، المعادلات التكاملية المزدوجة ، معادلة فريدهولم المتكاملة ، عامل شدة الإجهاد

## Table des matières

intro	oduction generale
I. R	Rappels sur l'élasticité
I.1 I	ntroduction
I.2 I	Les modules élastiques
	I.2.1 Module de Young
	I.2.2 Coefficient de Poisson
	I.2.3 Module de Coulomb
	I.2.4 Relations entre les modules
	I.2.5 Valeurs de quelques constantes élastiques
I.3 I	Les équations de l'élasticité
	I.3.1 La loi de Hook
	I.3.2 Équations supplémentaires
	I.3.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques
I.4 I	Phénomène de la rupture
	I.4.1 La rupture fragile
	I.4.2 La rupture ductile
	I.4.3 Définition d'une fissure
	I.4.4 Fissure dans les matériaux élastiques
Con	clusion
II.	Rappels mathématiques
II.1	Introduction
	II.1.1 Définitions
	II.1.2 Équations de Fredholm
	II.1.3 Equations de Volterra
II.2	Équation intégrale d'Abel
II.3	Équation de Bessel
	II.3.1 Fonction de Bessel de première espèce

II.3.2 Fonction de Bessel de seconde espèce
II.4 Transformée de Hankel
II.5 Méthodes d'intégration numérique
II.5.1 Méthode des trapèzes
II.5.2 Méthode de Simpson
Conclusion
III. Résolution du problème
III.1 Introduction
III.2 Équations de base du problème
III.3 Conditions de limites et de continuités
III.3.1 Cas limitatif
III.4 Transformation des équations intégrales duales en un système algébrique linéaire 23
III.5 Procédure numérique de résolution du système algébrique
III.6 Facteurs d'intensité de contrainte
III.7 Le moment nécessaire pour produire la rotation du disque
III.8 Résultats numériques et discussions
III.8.1 Convergence
III.8.2 Résultats numériques et interprétations
III.8.2.1 Déplacements et contraintes
III.8.2.2 Facteur d'intensité de contrainte
III.8.2.3 Le moment nécessaire pour produire la rotation du disque
III.9 Validation numérique avec Ansys
III.10 Etapes de modélisation du problème
III.10.1 ANSYS Workbench
III.10.2 Géométrie du modèle
III.10.3 maillage du modèle
III.10.4 création de la fissure
III.10.5 Condition aux limite
III.10.6 lancement de la résolution

Conclusion	
Conclusion générale	
Perspectives	

## Liste des figures

## Introduction générale

Figure 1 – Problème de Dhawan
Figure 2 – Problème de Pak
Figure 3 – Problème de Madani et Kebli
I. Rappels sur l'élasticité
Figure I.1 – Courbe contrainte/déformation
Figure I.2 – Courbe contrainte déformation dans le cas de rupture fragile
Figure I.3 – Les différents modes de fissure
II. Rappels mathématiques
Figure II.1 – Graphe de la fonction de Bessel de première espèce
Figure II.2 – Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce
Figure II.3 – Méthode des trapèzes
Figure II.4 – Méthode de Simpson
III. Résolution du problème
Figure III.1– Géométrie et coordonnées de système
Figure III.2 – Courbe des valeurs numériques des déplacements normalisés en fonction de
nombre d'intervalle utilisés dans les calculs
Figure III.3 – Déplacement tangentiel $u_{\theta}^1$ versus $\rho = r/b$ pour divers $z/b$ , $0 \le z \le h \dots 32$
Figure III.4 – Déplacement tangentiel $u_{\theta}^2$ versus $\rho = r/b$ pour divers $z/b, z \ge h \dots 32$
Figure III.5 – Contrainte de cisaillement $\tau_{\theta z}^1$ versus $\rho = r/b$ pour divers $z/b$ , $0 \le z \le h$ 33
Figure III.6 – Contrainte de cisaillement $\tau_{\theta z}^2$ versus $\rho = r/b$ pour divers $z/b$ , $z \ge h$
Figure III.7 – La distribution de la contrainte de cisaillement à la lèvre de la fissure face à la
surface de la charge et le long de l'interface dans le demi-plan de la fissure 34
Figure III.8 – Variation du facteur d'intensité de contrainte normalisé au bord de la fissure
avec a / b
Figure III.9 – Variation du moment appliqué en fonction de a / b

Figure III.10 – Les mailles éléments finis du demi-espace dans la simulation numérique des
points de vue global (gauche) et local (droit)
Figure III.11 – Définition de la géométrie
Figure III.12 – Maillage du modèle
Figure III.13 – Modèle de la fissure
Figure III.14 – Maillage raffiné
Figure III.15 – condition aux limites
Figure III.16 – Champ de déplacement
Figure III.17 – Champ de déplacement au niveau de disque
Figure III.18 – Champ de déplacement
Figure III.19 – Champ de déplacement par l'isolation des surfaces
Figure III.20 – Champ de déplacement au niveau de la fissure
Figure III.21 – Contrainte de cisaillement au niveau de disque
Figure III.22 – Contrainte de cisaillement
Figure III.23 – Contrainte de cisaillement
Figure III.24 – Contrainte de cisaillement au niveau de la fissure
Figure III.25 – Déformation élastique équivalente
Figure III.26 – Facteurs d'intensité du contrainte $K_{III}$
Figure III.27 – Champ de déplacement
Figure III.28 – Champ de déplacement au niveau de disque
Figure III.29 – Champ de déplacement
Figure III.30 – Champ de déplacement par l'isolation des surfaces
Figure III.31 – Champ de déplacement au niveau de la fissure
Figure III.32 – Contrainte de cisaillement au niveau de disque
Figure III.33 – Contrainte de cisaillement
Figure III.34 – Contrainte de cisaillement
Figure III.35 – Contrainte de cisaillement au niveau de la fissure
Figure III.36 – Déformation élastique équivalente
Figure III.37 – Facteurs d'intensité du contrainte $K_{III}$

## Liste des Tableaux

### I. Rappels sur l'élasticité

Tableau I.1 – Relations entre les modules d'élasticité
Tableau I.2 – Valeurs de quelques constants élastiques
III. Résolution du problème
Tableau III.1- Exemples des valeurs numériques des déplacements normalisés par rapport au
nombre de termes utilisés dans les calculs
Tableau III.2 – Déplacement obtenus par le code de calcul ANSYS Workbench, $0 \le z \le h.51$
Tableau III.3 – Facteur d'intensité de contrainte obtenus par le code de calcul ANSYS
Workbench

## Introduction générale

#### Introduction générale

Classe des problèmes liés au comportement des inclusions des disques rigides encastrées dans un contact lié avec un milieu élastique, a été un sujet de grand intérêt pour la géo mécanique, génie civil et la mécanique appliquée. Ce travail est motivé par des intérêts théoriques et pratiques problèmes des disques des turbines, certains tuyaux, et des nombreuses applications industrielles. Il peut donner aussi une meilleure compréhension du comportement des fondations sous charges externes. Dans l'interaction structure-milieu problèmes surgissant dans l'ingénierie des fondations, la fondation est généralement modélisée à l'aide d'une inclusion ayant une forme circulaire, bande, rectangulaire ou arbitraire. De nos jours, les matériaux composites jouent un rôle très important dans l'ingénierie géo mécanique qui peuvent provoquer divers défauts à l'intérieur des composants (fissures, déformations, etc.) [1]. En plus de ce qui précède, il existe d'autres applications importantes dans de nombreuses applications industrielles, les ingénieurs rencontrent des analyses de contraintes de corps tridimensionnels où la géométrie et les charges sont symétriquement axiales. Dans des problèmes tels que les disques d'imprimante et de turbine, certains tubes, arbres, éléments de machine avec des géométries axisymétriques. En ingénierie, une étude de ce type couvre le forage de fondations, les essais in situ en géotechnique, la mécanique des composites (transferts de charges mécaniques et conceptions mécaniques.

Le problème de torsion d'un milieu élastique infini par une inclusion (profondément enfoncée) a été considéré par Selvadurai [2,3]. Ses résultats sont basés sur la dureté de rotation et de translation du disque intégré. Le problème de la torsion d'un demi-espace élastique a été examiné, dans une première fois, par Reissner et Sagoci [4]. Ils ont étudié l'interaction statique d'un disque rigide et d'un élastique demi-espace isotrope pour lequel ils ont obtenu la solution au moyen des coordonnées sphéroïdales. Le même problème a été résolu par Sneddon [5] par une méthode différente. Il a utilisé les transformées Hankel méthode pour réduire le problème à une paire des équations intégrales duales. Collins [6] a traité le problème de torsion d'un demi-espace élastique en supposant le déplacement en tout point dans la demi-espace être due à une distribution des sources de vagues sur la partie de la surface libre en contact avec le disque. La solution du problème des vibrations de torsion forcée de la couche élastique d'épaisseur finie lorsque la face inférieure est soit exempte de contraintes, soit rigidement serrée a été donnée par Gladwell [7]. Pak et Saphores[8] fourni une formulation analytique pour le problème

général de torsion d'un disque rigide noyé dans un demi-espace isotrope. En outre, Par ailleurs, Bacci et Bennati [9] ont considéré la torsion du disque rigide circulaire adhérant à la surface supérieure d'une couche élastique fixée sur un support indéformable. Plus récemment, Singh et coll [10] ont étudié la torsion d'un demi-espace isotrope non homogène par rotation partie circulaire de sa surface limite. Cai et Zue [11] ont discuté de la vibration de torsion d'un disque collé à un poro-élastique multicouche.

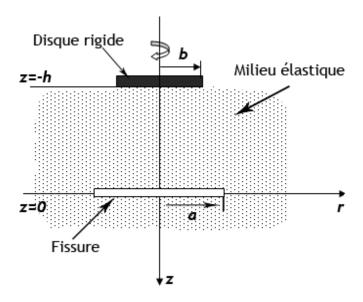


Figure 1 – Problème de Dhawan

Yu [12] a étudié les oscillations de torsion forcées à l'intérieur du solide multicouche. La fonction élastodynamique de Green du centre de rotation et une méthode de charge ponctuelle ont été utilisées pour résoudre le problème.

Pal et Mandal [13] ont considéré les oscillations de torsion forcées d'un demi-espace élastique transversalement isotrope sous l'action d'un disque rigide intérieur. Un problème similaire avec la rotation à bascule a été résolu plus tard par Ahmadi et Eskandari [14]. Ils ont utilisé une fonction de Green appropriée pour écrire le problème des valeurs aux limites mixtes posé comme une équation intégrale double. Tous ces problèmes sont basés sur la théorie de la transformation intégrale de Hankel afin d'amener le problème des valeurs aux limites mixtes dans un système d'équations intégrales doubles. Ensuite, la solution correspondante est recherchée à partir d'une équation intégrale de type Fredholm.

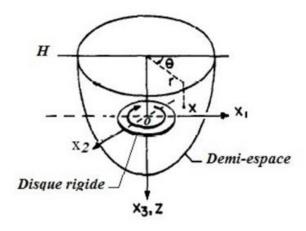


Figure 2 – Problème de Pak

La torsion des couches élastiques avec des fissures circulaires a été envisagée par certains chercheurs. Sih et Chen [15] ont étudié le problème d'une fissure circulaire dans un composite stratifié sous une contrainte de torsion uniforme. Les champs de déplacement et de contrainte dans tout le composite ont été obtenus en résolvant une équation intégrale de Fredholm standard du deuxième type. Low [16] a examiné un problème des effets de défauts incrustés sous forme d'une inclusion ou d'une fissure dans un demi-espace élastique soumis aux déformations torsionnelles. Les équations intégrales Fredholm correspondantes ont été résolues numériquement approche par quadrature. La même méthode a été utilisée par Dhawan [17] pour résoudre le problème d'un disque rigide fixé à un demi-espace élastique avec une fissure interne.

En utilisant les transformées de Hankel et Laplace et en prenant l'inversion numérique de la transformée de Laplace, Basu et Mandal [18] ont traité la charge de torsion sur une fissure en forme de penny dans une couche élastique prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques.

Une méthode similaire a été utilisée dans les travaux récemment publiés Madani et Kebli [19], traitant avec le cas d'un problème de fissure en forme de penny à l'intérieur d'un matériau élastique homogène au plan de symétrie, sous une torsion axisymétrique par deux disques rigides circulaires symétriquement situé dans le milieu élastique.

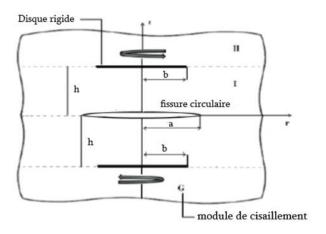


Figure 3 – Problème de Madani et Kebli

# Chapitre I Rappels sur l'élasticité

#### I.1 Introduction

Les expériences scientifiques ont montré que si la déformation d'un matériau est suffisamment faible, il reprend son état primitif non déformé lors de la suppression des efforts extérieurs ayant provoqué sa déformation ce qui est connu par le comportement élastique. L'élasticité parfaite correspond à une réversibilité mécanique parfaite. Le tenseur des déformations  $\varepsilon$  est alors une variable d'état et sa donnée détermine, de manière biunivoque, le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Le travail de déformation développée entre deux états d'équilibre est alors indépendant du chemin suivi entre ces deux états [20].

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe. Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe d'axisymetrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à  $\theta$  sont nulles.

#### I.2 Les modules élastiques

#### I.2.1 Module de Young

Le module de Young est une constante élastique qui, pour un matériau homogène isotrope, lie la contrainte à la déformation, vers 1800, Young a défini ce coefficient par :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{I.1}$$

En effet, ce coefficient caractérise la raideur de la matière. A contrainte égale, un matériau ayant un module d'élasticité élevé subira une déformation plus faible qu'un matériau ayant un module d'élasticité petit. Le module de Young *E* a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa [21].

#### I.2.2 Coefficient de Poisson

Le Coefficient de Poisson  $\nu$  est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle  $\{0; \frac{1}{2}\}$ , et nous pouvons le définir par le coefficient de la proportion entre l'allongement  $\varepsilon_1$  dans la direction de traction et le raccourcissement  $\varepsilon_2$  dans les directions perpendiculaires.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{I.2}$$

Il faut noter que dans le cas de la plupart des matériaux isotropes continus le coefficient de Poisson est compris dans l'intervalle {0.25; 0.35}. [21]

#### I.2.3 Module de Coulomb

Le module de Coulomb G ou parfois dit le module de cisaillement est définit par la proportion entre le glissement  $\gamma_{xy}$  et le cisaillement appliqué  $\tau_{xy}$ .

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \tag{I.3}$$

Le module de Coulomb à la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian [21].

#### **I.2.4 Relations entre les modules**

Module	Symbole	Équivalence
Coefficient de Lamé ou module de	μ, G	E
Coulomb		$2(1 + \nu)$
Deuxième coefficient de Lamé	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
Coefficient de Poisson	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$
Module de Young	E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$

Tableau I.1 – Relations entre les modules d'élasticité.

#### I.2.5 Valeurs de quelques constants élastiques

	E(GPa)	G(GPa)	ν
Acier	207	80.2	0.30
Cuivre	124	33.4	0.34
Aluminium	68.9	25.7	0.33
Béton	27.6	11.5	0.20

Tableau I.2 – Valeurs de quelques constants élastiques.

#### I.3 Les équations de l'élasticité

Pour résoudre un problème d'élasticité, il faut trouver un champ de déplacements  $u_i$ et un champ de contraintes  $\sigma_i$  vérifiant les équations du mouvement ou d'équilibre.

#### I.3.1 La loi de Hooke

La relation entre les composantes du tenseur de déformations et les composantes du tenseur des contraintes a été établie expérimentalement et elle est connue par la loi de *Hooke*. Considérant l'exemple d'un élément de volume cubique soumis à l'action de contrainte normale uniformément répartie sur ses côtés. Les expériences ont montré que dans le cas d'un matériau isotrope ces contraintes normales ne produisent aucune distorsion d'angles de l'élément et elles sont données par l'équation :

$$\sigma = E\varepsilon \tag{I.4}$$

Où E est le module de Young et  $\sigma$  est la contrainte. Cette loi peut aussi être donnée sous forme indicielle comme suit :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v} \varepsilon_{ij} + \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$
 (I.5)

Où E est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. [20]

 $\varepsilon_{kk}$  est la trace du tenseur de déformation et  $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker.

#### I.3.2 Équations supplémentaires

Grâce à la loi de *Hooke*, nous aurons suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité mais il peut être utile d'employer des équations supplémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique. Parmi ces équations nous trouvons l'équation de *Navier* et l'équation de *Beltrami*.

#### **Équations de Navier**

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations d'équilibre en termes de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations—déplacements.

$$\mu\Delta(\vec{u}) + (\mu + \lambda)\overline{grad}(div(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0}$$
 (I.6)

$$(\lambda + 2\mu)\overline{grad}(div(\vec{u})) - \mu \overline{rot}(\overline{rot}(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0}$$
 (I.7)

#### Équations de Beltrami

Lorsque l'on désire résoudre le problème en contrainte, sans vouloir à priori définir les champs de déplacement et de déformation, on utilise une méthode dite « inverse ». Il convient alors, en plus de la vérification des équations d'équilibre, de s'assurer que l'état de contrainte conduit, par l'intermédiaire de la loi de comportement, à un état de déformation compatible avec un champ de déplacement.

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk} = 0 \tag{I.8}$$

 $\sigma_{kk}$  est la trace de tenseur des contraintes.

Cette équation est appelée équation de Beltrami simplifiée, elle traduit les équations de compatibilité pour les contraintes dans le cas où les forces de volume sont nulles.

#### I.3.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques

Pour un corps défini dans un repère de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ , Nous pouvons écrire les relations entre les composantes du tenseur déformation, déplacement et contrainte tel que :

 $u_r, u_\theta, u_z$ sont les composantes du déplacement,  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}$ sont les composantes du tenseur déformation, et  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}$ sont les composantes du contraintes [22].

#### Déformation - déplacement

1) 
$$\varepsilon_{r} = \frac{\partial u_{r}}{\partial r}$$
2)  $2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{r}}{\partial \theta} - u_{\theta} \right)$ 
3)  $\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_{r} \right)$ 
4)  $2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}$ 
(I.9)
5)  $\varepsilon_{z} = \frac{\partial u_{z}}{\partial z}$ 
6)  $2\gamma_{zr} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}$ 

#### **Contrainte – déformation**

1) 
$$\sigma_r = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_r + v(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)]$$
  
2)  $\sigma_\theta = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_\theta + v(\varepsilon_r + \varepsilon_z)]$   
3)  $\sigma_z = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_z + v(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)]$ 

#### Contrainte tangentielle – déplacement

1) 
$$\tau_{r\theta} = G(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r}}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta}}{r})$$
  
2)  $\tau_{\theta z} = G(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z}}{\partial \theta})$   
3)  $\tau_{rz} = G(\frac{\partial u_{r}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z}}{\partial r})$  (I.11)

#### I.4 Phénomène de la rupture

D'énormes progrès ont été accomplis ces dernières décennies dans l'analyse et la modélisation des mécanismes de rupture d'un matériau. La mécanique linéaire élastique de la rupture fournit en particulier un cadre théorique qui permet de décrire la propagation des fissures. La courbe contrainte / déformation (figure. (I.1)) issue, par exemple, d'essais de traction sur des éprouvettes jusqu'à la rupture, fait souvent apparaître deux zones lors de la déformation du matériau :

• Une zone élastique, dans laquelle contraintes et déformations sont liées proportionnellement. Le matériau revient à son état d'origine lorsque cesse la sollicitation.

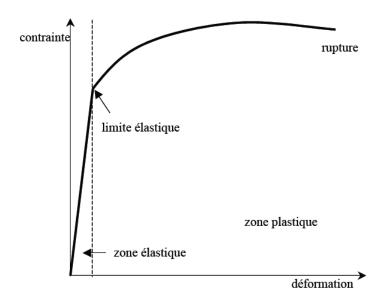


Figure I.1 – Courbe contrainte/déformation

• Une zone plastique, pour laquelle le matériau ne revient pas à son état d'origine lorsque cesse la sollicitation.

Les déformations élastiques et permanentes respectent la cohésion de la matière. De ce fait, la rupture survient lorsque cette cohésion est détruite. Elle opère par création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière. Il s'agit de microfissures de l'ordre du micron,

qui deviennent des microfissures en atteignant des dimensions de l'ordre du millimètre, et enfin, des fissures, à l'échelle des structures mécaniques. Deux mécanismes de rupture locale sont décrits : la rupture fragile et la rupture ductile.

#### I.4.1 La rupture fragile

La rupture fragile est caractérisée par une cassure sans déformation plastique, ou avec une déformation plastique faible. La déformation avant rupture est donc presque exclusivement élastique. L'énergie de rupture, qui est représentée par l'aire sous la courbe contrainte déformation (obtenue par essai de traction), est faible, comme le montre la figure (I.2).

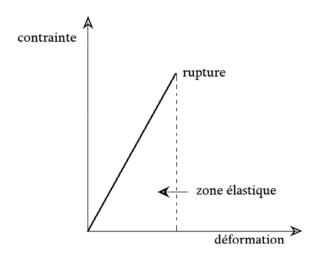


Figure I.2 – Courbe contrainte déformation dans le cas de rupture fragile

#### I.4.2 La rupture ductile

La rupture ductile est caractérisée par une forte déformation plastique après la phase élastique (figure. (I.1)). L'énergie de rupture est alors beaucoup plus élevée. La rupture ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales engendrées au voisinage des défauts cristallins. Au voisinage de ces défauts, les sollicitations extérieures créent des concentrations de contraintes qui engendrent de grandes déformations plastiques.

#### I.4.3 Définition d'une fissure

Une fissure est définie comme la surface séparant localement un solide en deux parties. Le champ de déplacement est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de fissure représentés dans la figure (I.3): [23]

- **Mode I :** mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation,
- Mode II : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation,
- **Mode III** : mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

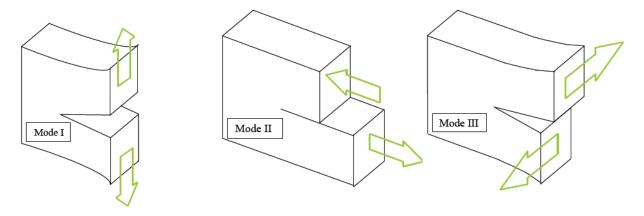


Figure I.3 – Les différents modes de fissure

Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration des matériaux sont de deux natures : mécaniques et métallurgiques. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, de déformations et de contraintes, les conditions d'environnement telles que la température. Les facteurs métallurgiques concernent les impuretés, les tailles de grains, les états de surface . . .

#### I.4.4 Fissure dans les matériaux élastiques

L'analyse d'une fissure statique en régime purement élastique permet de constater que l'état de contrainte et de déformation autour d'une fissure est connu à un facteur près, qui est  $K_I$ ,  $K_{II}$ , ou  $K_{III}$  (facteurs d'intensité de contraintes) suivant le mode d'ouverture de la fissure. Ces facteurs d'intensité de contraintes interviennent dans l'expression des solutions comme des mesures de singularités des champs mécaniques en pointe de fissure. [23] Seul le facteur d'intensité de contrainte K caractérise le champ de contrainte. Il dépend de la géométrie du problème et du chargement lointain appliqué à la structure fissurée et pour les trois modes nous avons :

#### Mode I

$$K_I = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \,\sigma_y(r, 0, 0)$$
 (I.9)

#### **Mode II**

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \, \tau_{xy}(r, 0, 0) \tag{I.10}$$

#### **Mode III**

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \, \tau_{yz}(r, 0, 0) \tag{I.11}$$

Dans Notre problème de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques d'où l'expression du facteur d'intensité de contrainte en Mode III est donnée par :

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r} \, \tau_{\theta z}(r, 0, 0) \tag{I.12}$$

#### **Conclusion**

Ce chapitre a présenté les notions de base et les lois de la mécanique de rupture et d'élasticité, qui vont être utilisés dans la résolution de notre problème. Grâce aux équations de Navier et la loi de comportement nous pouvons donner les relations entre les déplacements et les contraintes, ainsi que le facteur d'intensité de contrainte qu'on va le calculer à l'aide des relations de fissuration.

# Chapitre II Rappels mathématiques

#### II.1. Introduction

#### II.1.1. Définitions

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans l'intégrante (la fonction que l'on intègre) [24].

#### Exemple:

$$f(x) = \int_{a}^{b} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.1a)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.1b)

Où  $\varphi$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, f est le terme de source et K est appelé le noyau.

Nous pouvons classer les équations intégrales suivant les bornes d'intégrale en deux catégories :

- Les équations intégrales dont les limites d'intégrale sont fixes, et ils sont appelés équations intégrales de Fredholm, (eq.II.1a).
- Les équations intégrales de Voltera où nous pouvons remarquer l'apparition d'un inconnu sur les bornes d'intégrale, (eq.II.1b).

#### II.1.2 Équations de Fredholm

Étudiées pour la première fois par le mathématicien *Erik Ivar Fredholm* (1866–1927), leur principale caractéristique est que les bornes d'intégration sont constantes.

#### Exemple:

$$f(x) = \int_{a}^{b} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.2a)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.2b)

Les équations sont appelées équations de Fredholm de première espèce et de deuxième espèce respectivement. Dans la première équation, la fonction inconnue est introduit sous l'intégrale alors que dans la seconde équation, elle apparaît également à l'extérieur de l'intégrale ; [24]

#### II.1. 3 Equations de Volterra

De manière analogue aux équations de *Fredholm*, les équations intégrales étudiées par le mathématicien italien *Vito Volterra* (1860–1940), et ont la forme :

$$f(x) = \int_{a}^{x} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.3a)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (II.3b)

Sont appelées équations de Volterra de première espèce et de deuxième espèce respectivement, contrairement aux équations de Fredholm ils ont un inconnu sur les bornes d'intégration. [24]

#### II.2 Équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel a eu lieu comme l'une des premières équations intégrales de l'histoire des mathématiques, nous pouvons écrire sa forme générale d'après l'équation de Volterra suivante [24] :

$$\int_{a}^{x} \frac{f(t)}{[h(x) - h(t)]^{\alpha}} dt = g(x), 0 < x < b$$
(II.4)

Si nous posons  $h(\tau) = \tau^2$  dans , nous obtenons :

$$\int_{a}^{x} \frac{f(t)}{[x^{2} - t^{2}]^{\alpha}} dt = g(x), \qquad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b$$
 (II.5)

Que l'on appelle l'équation intégrale d'Abel, dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1 - \alpha}} d\tau \right], \qquad a < t < b$$
 (II.6)

Les équations ensemble sont connus par la transformation d'Abel intérieure. Dans un autre cas, l'équation:

$$\int_{x}^{b} \frac{f(t)}{[t^{2} - x^{2}]^{\alpha}} dt = g(x), \qquad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b$$
 (II.7)

Et sa solution:

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \qquad \alpha < t < b$$
 (II.8)

Sont connus par la transformation d'Abel extérieure.

#### II.3 Équation de Bessel

L'équation différentielle de second ordre donnée par :

$$r^{2}\frac{d^{2}y}{dr^{2}} + r\frac{dy}{dr} + (r^{2} - n^{2})y = 0$$
 (II.9)

Est connu comme l'équation de Bessel, et la solution de cette équation donne les fonctions de Bessel de première et seconde espèce, comme suit [25] :

$$y(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r)$$
 (II.10)

Où:

- $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes arbitraires.
- $J_n$ et  $Y_n$ sont les fonctions de Bessel d'ordre n de première et seconde espèce respectivement.

#### II.3.1 Fonction de Bessel de première espèce

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre *n* peut être déterminée en utilisant un développement en série de puissance de la façon suivante [24] :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(1+n)} (\frac{x}{2})^n 1 - \frac{(x/2)^2}{1(1+n)} (1 - \frac{(x/2)^2}{2(2+n)} (1 - \frac{(x/2)^2}{3(3+n)} (1 - \cdots))$$
(II.11)

Notons que  $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ , nous pouvons écrire :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!}$$
 (III. 12)

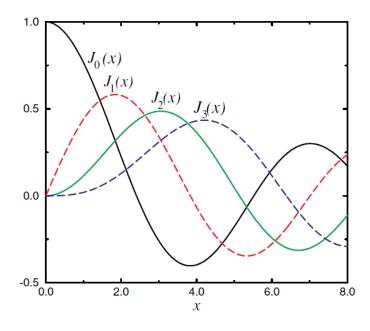


Figure II.1 – Graphe de la fonction de Bessel de première espèce

#### Quelques propriétés de la fonction de Bessel de première espèce

1) 
$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), n = 1,2,3 ...$$

2) 
$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), n = 1,2,3...; J'_0(z) = -J_1(z)$$

3) 
$$\frac{d}{dz}[z^nJ_n(z)] = z^nJ_{n-1}(z), n = 1,2,3...$$

4) 
$$\frac{d}{dz}[z^{-n}J_n(z)] = -z^{-n}J_{n+1}(z), n = 1,2,3...$$

#### II.3.2 Fonction de Bessel de seconde espèce

La fonction de Bessel de seconde espèce  $Y_n(x)$  et parfois dit la fonction de Weber ou la fonction de Neumann (notée $N_n(x)$ ) est liée à la fonction de Bessel de première espèce par la relation [24]:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$
(II.13)

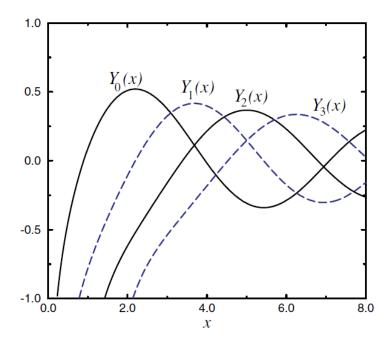


Figure II.2 – Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce

#### Quelques propriétés de la fonction de Bessel de seconde espèce

1) 
$$Y_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Y_n(z) - Y_{n-1}(z), n = 1,2,3 ...$$

2) 
$$Y'_{n+1}(z) = \frac{1}{2} [Y_{n-1}(z) - Y_{n+1}(z)], n = 1,2,3 ...$$

3) 
$$Y'_n(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z}Y_n(z), n = 1,2,3...$$

4) 
$$Y'_n(z) = \frac{n}{z} Y_n(z) - Y_{n+1}(z), n = 1,2,3 ...$$

#### II.4 Transformée de Hankel

La transformée de Hankel est une transformation intégrale, qui a été développée par le mathématicien  $Hermann\ Hankel$ , elle est aussi connue par la transformée de Fourier-Bessel car cette transformation se base sur la transformation bidimensionnelle de Fourier. La transformée de Hankel exprime une fonction donnée f(z) comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel  $J_v(kz)$  de première espèce, elle est donnée par [26] :

$$F_{\nu}(k) = \int_0^\infty f(z)J_{\nu}(kz)zdz \tag{II.14}$$

où  $F_v$ est la fonction transformée et  $J_v(kz)$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre vavec  $v \ge -1/2$ .

Ainsi, la transformée inverse de  $Hankel F_v(k)$  est bien définie comme suite :

$$f(z) = \int_0^\infty F_v(k) J_v(kz) k dk \tag{II.15}$$

Qui peut être facilement vérifié en utilisant la relation d'orthogonalité.

Où  $\delta_{mn}$ est le coefficient de Kronecker.

#### II.5 Méthodes d'intégration numérique

L'intégration numérique est d'une manière générale un calcul numérique pour déterminer, le mieux possible, une valeur approchée de l'intégrale au sens de Riemann.

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{II.16}$$

Où a et b sont des réels.

Les problèmes de quadrature (intégration) numérique se rencontrent lorsque la fonction f est continue mais n'a pas de primitive explicite connue, ou lorsque la fonction f n'est donnée que par un nombre fini de couple  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \le i \le n$ . Une idée importante consiste à utiliser les méthodes d'interpolation polynomiale, puisque les primitives des fonctions polynômes sont faciles à calculer [27].

#### II.5.1 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à diviser l'intervalle [a,b] en n parties égales et à approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous-intervalle. La fonction est donc remplacée par une droite sur chaque sous-intervalle.

$$I \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{2}$$
 (II.17)

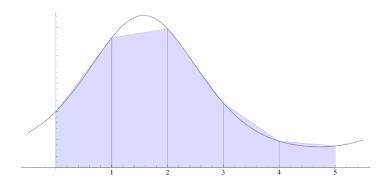


Figure II.3 – Méthode des trapèzes

#### II.5.2 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à diviser l'intervalle [a, b] en n parties égales et à approximer la fonction sur chaque "tranche" par une parabole construite à partir des points de la fonction aux bornes et au milieu de chaque sous intervalle.

$$I \simeq \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[ f(x_{i-1}) + 4 \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{2} + f(x_i) \right]$$
 (II.18)

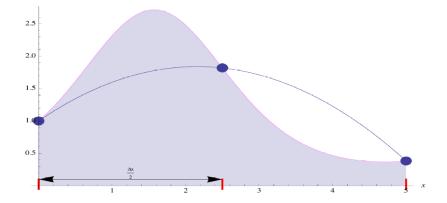


Figure II.4 – Méthode de Simpson

#### Conclusion

L'étude des problèmes de valeurs limites mixtes nécessite la connaissance de l'outil mathématique qui va nous permettre à l'aide des fonctions spéciales et les équations intégrales de simplifier la solution et d'obtenir analytiquement les expressions de déplacement et de contrainte en utilisant les méthodes numériques sur ordinateur.

# Chapitre III Résolution du problème

#### **III.1 Introduction**

Dans cette partie, nous traitons analytiquement l'exemple proposé en mécanique des solides de torsion axisymétrique d'un disque attaché à la surface d'un demi-espace isotrope et homogène. Le milieu ayant une fissure circulaire interne parallèle au plan du disque.

Des comparaisons sur le plan quantitatif avec des résultats obtenus par le code de calcul *ANSYS Workbench* sont présentées.

#### III.2 Équations de base du problème

Compte tenu de la symétrie axiale du problème, il est naturel de considérer  $(r, \theta, z)$  des coordonnées polaires cylindriques. Nous considérons ici la torsion d'un disque circulaire rigide sur surface libre (z=0) de contrainte d'un demi-espace élastique fissuré intérieurement. La fissure de rayon r en forme de penny (cercle) située au plan (z=h) qui sépare la couche supérieure et la moitié inférieure de l'espace. Les faces de la fissure sont supposées libres de contraintes tandis que le disc tourne avec un angle égal  $\omega$  sur l'axe z passant par leur centre comme indiqué sur la (figure III.1).

Dans ce cas de problème de torsion axisymétrique, le vecteur de déplacement prend la forme  $(0,u_{\theta},0)$  dans le système de coordonnées polaires cylindriques  $(r,\theta,z)$ . Il est commode d'identifier une région de couche (exposant (1)) occupant la région  $r \in (0,\infty); z \in (0,h^-)$  et une région de couche (exposant (2)) occupant la région  $r \in (0,\infty); z \in (h^+,\infty)$ . Les signes  $h^+$ et  $h^-$  désignent les variables dans la surface supérieure et la surface inférieure du plan (z=h), respectivement. Les seuls composants non nuls de la contrainte sont donnés par :

$$\tau_{\theta z}^{i} = G \frac{\partial u_{\theta}^{i}}{\partial z}, \tau_{\theta r}^{i} = G r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_{\theta}^{i}}{r} \right) , i = 1, 2 \tag{III.1}$$

Où  $u_{\theta} = u_{\theta}(r, z)$  et  $G_i$  est le module de cisaillement du matériau. Comme la torsion de l'homogène matériau est statique, le déplacement  $u_{\theta}(r, z)$  doit satisfaire :

$$\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{\theta}}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} = 0$$
 (III.2)

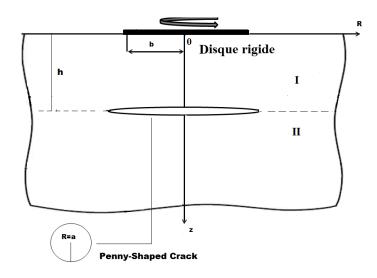


Figure III.1- Géométrie et coordonnées de système

Au moyen de l'intégrale de transformation de Hankel et son inverse donné en [28] :

$$F(\lambda, z) = \int_0^\infty f(r, z) r J_1(\lambda r) dr$$
 (III.3)

Et

$$f(r,z) = \int_0^\infty F(\lambda,z)\lambda J_1(\lambda r)d\lambda \tag{III.4}$$

La solution de 2 pour les régions  $I(0 \le z \le h)$  et  $II(z \ge h)$  est exprimée en :

$$u_{\theta}^{(i)}(r,z) = \int_0^{\infty} [A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad i = 1,2$$
 (III.5)

Où  $\lambda$  est la variable de transformation;  $J_1$  est la fonction de Bessel de la premier type d'ordre un et  $A_i$  et  $B_i$  sont des fonctions inconnues.

#### III.3 Conditions de limites et de continuités

Nous considérons les conditions de régularité à l'infini, la condition de la surface libre à z = 0, les conditions de limite et de continuité aux interfaces liées  $z = h^-$ et  $h^+$ . Par conséquent, nous trouvons les conditions suivantes :

$$\lim_{r,z\to\infty} u_{\theta}^{(i)}(r,z) = 0, \ \lim_{r,z\to\infty} \tau_{\theta z}^{(i)}(r,z) = 0 \tag{III.6a}$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,0) = 0, \quad r > b$$
 (III.6b)

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, h^{-}) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h^{+}) = 0, \quad r \ge a$$
 (III.6c)

$$u_{\theta}^{(1)}(r,h^{-}) - u_{\theta}^{(2)}(r,h^{+}) = 0, \quad r \ge a$$
 (III.6d)

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, h^+) = \tau_{\theta z}^{(1)}(r, h^-) = 0, \quad r < a$$
 (III.6e)

$$u_{\theta}^{(1)}(r,0) = \omega r, \quad r \le b \tag{III.6f}$$

En appliquant les conditions de régularité à l'infini données dans Eq. (III.6a), nous obtenons :

$$u_{\theta}^{(1)}(r,z) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda)e^{-\lambda z} + B_1(\lambda)e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda$$
 (III.7a)

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,z) = G \int_0^\infty \lambda [-A_1(\lambda) e^{-\lambda z} + B_1(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda$$
 (III.7b)

$$u_{\theta}^{(2)}(r,z) = \int_0^{\infty} [A_2(\lambda)e^{-\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda$$
 (III.7c)

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r,z) = -G \int_0^\infty \lambda [A_2(\lambda)e^{-\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda$$
 (III.7d)

Où  $A_1(\lambda)$ ,  $B_1(\lambda)$  et  $A_2(\lambda)$  sont des fonctions arbitraires qui doivent être déterminées en satisfaisant aux conditions de limite et de continuité.

Les conditions de limite et de continuité Eq.( III.6c) et Eq.( III.6e) mènent à :

$$\tau_{\theta_Z}^{(2)}(r, h^+) - \tau_{\theta_Z}^{(1)}(r, h^-) = 0 \tag{III.8}$$

L'équation ci-dessus implique :

$$A_2(\lambda) = A_1(\lambda) - B_1(\lambda)e^{2\lambda h}$$
 (III.9)

Les conditions limitent mixtes Eqs. (III.6e), (III.6d), (III.6f) et (III.6b) sont satisfaites si  $A_1$  et  $B_1$  sont des solutions de système d'équations intégrales duales doubles suivantes :

$$\int_0^\infty \lambda [B_1(\lambda) e^{\lambda h} - A_1(\lambda) e^{-\lambda h}] J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \qquad 0 \le r < a$$
 (III.10a)

$$\int_0^\infty \left[ 2e^{\lambda h} B_1(\lambda) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \qquad r \ge a$$
 (III.10b)

$$\int_0^\infty [A_1(\lambda) + B_1(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r, \qquad 0 \le r \le b$$
 (III.10c)

$$\int_0^\infty \lambda [B_1(\lambda) - A_1(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \qquad r > b$$
 (III.10d)

#### III.3.1 Cas limitatif

Prenons la limite  $a \to 0$ , on peut obtenir la solution de forme fermée pertinente à la torsion d'un demi-espace élastique homogène par un disque rigide circulaire (0 < r < a, z = 0) collé à la surface. Ceci est adapté au problème concernant la demi-espace isotrope considéré par Reissner et Sagoci [4].

# III.4 Transformation des équations intégrales duales en un système algébrique linéaire et infini

Les équations (III.10b) et (III.10d) sont satisfaites si nous introduisons la représentation :

$$e^{\lambda h}B_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \,\phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt \tag{III.11}$$

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \tag{III.12}$$

où  $J_{\frac{1}{2}}$  et  $J_{\frac{3}{2}}$  sont les fonctions de Bessel du premier type d'ordre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ , respectivement. Les fonctions inconnues sont données par les suivants :

$$A_1(\lambda) = e^{-\lambda h} \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \, \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt - \sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \tag{III.13}$$

$$B_1(\lambda) = e^{-\lambda h} \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \, \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt \tag{III.14}$$

où  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions continues inconnues de t, définies sur deux intervalles  $0 \le t < a$  et  $0 \le t \le b$  respectivement. En remplaçant  $A_1(\lambda)$  et  $B_1(\lambda)$  dans les équations Eq.( III.10a) et Eq.( III.10c), nous obtenons :

$$\textstyle \int_0^a \sqrt{t}\,\phi(t)dt \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} f_{11}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda + \\$$

$$\int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) dt \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} f_{12}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \ r < a \ (\text{III}.15)$$

$$\textstyle \int_0^a \sqrt{t}\,\phi(t)dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\,f_{21}(\lambda)J_{\frac{3}{2}}(\lambda t)J_1(\lambda r)d\lambda + \\$$

$$\int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \, f_{22}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r, \ r < b \quad \text{(III.16)}$$

Où

$$f_{11}(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda h}$$

$$f_{12}(\lambda) = e^{-\lambda h}$$

$$f_{21}(\lambda) = 2e^{-\lambda h}$$

$$f_{22}(\lambda) = -1$$

Eq.(III.15) peut être converti en équation intégrale d'Abel au moyen de la relation  $\lambda J_1(\lambda r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 J_2(\lambda r)]$  et ensuite en tenant compte de la formule intégrale :

$$\int_{0}^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{2}(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{r^{2}\sqrt{r^{2}-t^{2}}} & t < r \\ 0 & t > r \end{cases}$$
(III.17)

Nous obtenons l'équation d'Abel correspondant à l'équation Eq. (III.15)

$$\begin{split} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{r} \frac{t^{2} \phi(t)}{\sqrt{r^{2} - t^{2}}} dt + r^{2} \int_{0}^{a} \sqrt{t} \, \phi(t) dt \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} (f_{11} \, (\lambda) - 1) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{2}(\lambda r) d\lambda \, + \\ r^{2} \int_{0}^{b} \sqrt{t} \, \psi(t) dt \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} f_{12} \, (\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{2}(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad r < a \quad \text{(III.18)} \end{split}$$

Ensuite, nous inversons la dernière équation en appliquant la formule de transformation d'Abel :

$$\int_0^r \frac{f(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = g(r) \quad \text{Ensuite } f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{rg(r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr$$

Pour obtenir

$$t^{2}\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{0}^{t} \frac{r^{3}}{\sqrt{t^{2}-r^{2}}} \left[ -\int_{0}^{a} \sqrt{\delta} \phi(\delta) d\delta \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} (f_{11}(\lambda) - 1) \int_{\frac{3}{2}} (\lambda \delta) J_{2}(\lambda r) d\lambda \right]$$
$$-\int_{0}^{b} \sqrt{\delta} \psi(\delta) d\delta \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} f_{12}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda \delta) J_{2}(\lambda r) d\lambda dr \quad r < a \quad \text{(III.19)}$$

Pour le côté gauche de l'équation ci-dessus, l'intégrale est encore simplifiée en utilisant les relation :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} J_2(\lambda r) dr = \sqrt{\lambda} t^{\frac{5}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\lambda t)$$

Nous obtenons la première équation intégrale de Fredholm de deuxième type :

$$\phi(t) + \sqrt{t} \int_0^a \sqrt{\delta} \,\phi(\delta) K(t, \delta) d\delta + \sqrt{t} \int_0^b \sqrt{\delta} \,\psi(\delta) L(t, \delta) d\delta = 0, \qquad r < a \qquad \text{(III.20)}$$

Où

$$K(t,\delta) = \int_0^\infty \lambda(f_{11}(\lambda) - 1) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda \delta) d\lambda$$

$$L(t,\delta) = \int_0^\infty \lambda f_{12}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda \delta) d\lambda$$

En suivant la même procédure que précédemment, réduire Eq. (III.16) à la seconde équation intégrale de Fredholm. Utilisation de la formule :

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda} J_{\frac{1}{2}} \lambda t J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \frac{1}{r\sqrt{(r^2 - t^2)}} \\ 0 \end{cases} \qquad t < r$$

Nous obtenons l'équation de type Abel suivante :

$$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{t\psi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt + \int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} (f_{22} \, (\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda + \int_0^a \sqrt{t} \, \phi(t) dt \int_0^\infty \sqrt{\lambda} f_{21} \, (\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r \qquad r < b \quad \text{(III.21)}$$

Maintenant, nous inversons l'équation ci-dessus en appliquant la formule de transformation d'Abel pour obtenir :

$$t\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{0}^{t} \frac{r^{2}}{\sqrt{t^{2}-r^{2}}} \left[ \omega r - \int_{0}^{b} \sqrt{\delta} \, \psi(\delta) d\delta \int_{0}^{\infty} \sqrt{\lambda} (f_{22}(\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda \delta) J_{1}(\lambda r) d\lambda \right]$$
$$- \int_{0}^{a} \sqrt{\delta} \, \phi(\delta) d\delta \int_{0}^{\infty} \sqrt{\lambda} f_{21}(\lambda) J_{\frac{3}{2}}(\lambda \delta) J_{1}(\lambda r) d\lambda dr \qquad r < b \quad \text{(III.22)}$$

Utilisation des relations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^3}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dr = 2t^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2 J_1(\lambda r)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dr = t \sqrt{\lambda t} J_{\frac{1}{2}}(\lambda t)$$

Nous obtenons la deuxième équation intégrale de Fredholm :

$$\psi(t) + \sqrt{t} \int_0^a \sqrt{\delta} \, \phi(\delta) M(t, \delta) d\delta + \sqrt{t} \int_0^b \sqrt{\delta} \, \psi(\delta) N(t, \delta) d\delta = \frac{4\omega}{\sqrt{2\pi}} t, \quad 0 < t < b \quad \text{(III.23)}$$

avec le noyaux

$$M(t,\delta) = \int_0^\infty \lambda f_{21}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda \delta) d\lambda$$

$$N(t,\delta) = \int_0^\infty \lambda(f_{22}(\lambda) - 1) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda \delta) d\lambda$$

## III.5 Procédure numérique de résolution du système algébrique

Pour obtenir une équation sans dimension et pour que le système acceptera une solution sous cette forme on doit changer les bornes des intégrales entre 0 et 1 et cela est effectué par le changement des variables suivant :

$$\begin{cases} \delta = as, & 0 < \delta < a; \quad t = au \quad 0 < t < a \\ \delta = bs, & 0 < \delta < b; \quad t = bu \quad 0 < t < b \end{cases}$$

Ensuite, nous multiplions les deux équations ci-dessus du système, respectivement par  $\frac{\sqrt{2\pi}}{4a\omega}\phi(au)$  et  $\frac{\sqrt{2\pi}}{4b\omega}\psi(bu)$  et en utilisant les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} \Phi(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a\omega}\phi(au) & \Psi(u) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4b\omega}\psi(bu) \\ c = \frac{a}{b} & \lambda = \frac{x}{b} & H = \frac{h}{b} \end{cases}$$

Nous obtenons les équations suivantes :

$$\Phi(u) + c^2 \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \Phi(s) K(u, s) ds + \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \Psi(s) L(u, s) ds = 0, \qquad u < 1 \quad \text{(III.24)}$$

$$\Psi(u) + c^2 \sqrt{c} \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \, \Phi(s) M(u, s) ds + \sqrt{u} \int_0^1 \sqrt{s} \, \Psi(s) N(u, s) ds = u, \qquad u < 1 \quad \text{(III.25)}$$

Où

$$K(u,s) = \int_0^\infty x(f_{11}(x) - 1)J_{\frac{3}{2}}(xcu)J_{\frac{3}{2}}(xcs)dx$$

$$L(u,s) = \int_0^\infty x f_{12}(x) J_{\frac{3}{2}}(xcu) J_{\frac{1}{2}}(xs) dx$$

$$M(u,s) = \int_0^\infty x f_{21}(x) J_{\frac{1}{2}}(xu) J_{\frac{3}{2}}(xcs) dx$$

$$N(u,s) = \int_0^\infty x(f_{22}(x) - 1)J_{\frac{1}{2}}(xu)J_{\frac{1}{2}}(xs)dx$$

Après avoir résolu le système ci-dessus, les coefficients inconnus peuvent être obtenus approximation des fonctions inconnues  $A_1$  et  $B_1$  données par Eqs. (III.13) et (III.14)

$$A_{1}(x) = \frac{4b^{2}\omega}{N\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{u_{m}}\left[e^{-xH}c^{2}\sqrt{c}\Phi_{m}J_{\frac{3}{2}}(xcu_{m}) - \Psi_{m}J_{\frac{1}{2}}(xu_{m})\right] \tag{III.26}$$

$$B_2(x) = \frac{4b^2 \omega}{N\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} \sum_{m=1}^{N} \sqrt{u_m} \, c^2 \sqrt{c} \Phi_m J_{\frac{3}{2}}(xcu_m)$$
 (III.27)

Comme les noyaux K, L, M et N sont continus sur l'intervalle [0; 1], le système de Fredholm intégrale les équations peuvent être résolues par des techniques directes ou itératives [29]. La quadrature du milieu [30] est utilisée pour trouver la solution numérique pour le système donné par Eq. (III.24) et Eq. (III.25). Diviser l'intervalle [0; 1] dans N sous-intervalles égaux, de sorte que les points médians sont  $u=u_m=\frac{2m-1}{2N}s=u_n=\frac{2n-1}{2N}$  m,n=1,2...,N, et introduisant les notations suivantes :

$$\Phi(u_m) = \Phi_m \Psi(u_m) = \Psi_m \tag{III.28a}$$

$$K(u_m, u_n) = K_{mn}L(u_m, u_n) = L_{mn}$$
(III.28b)

$$M(u_m, u_n) = M_{mn} \text{ et } N(u_m, u_n) = N_{mn}$$
(III.28c)

Nous évaluons numériquement l'intégrale infinie K, L, M et N par la règle de Simpson. Après avoir résolu le au-dessus du système, les coefficients inconnus peuvent être obtenus.

## III.6 Facteur d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte au bord de la fissure est défini par :

$$K_{III}^{a} = \lim_{r \to a^{+}} \sqrt{2\pi(r-a)} \, \tau_{\theta z}^{(1)}(r,z)|_{z=h} \tag{III.29}$$

Sur le plan z = h pour  $r \ge a$  l'expression de contrainte est donnée par :

$$\begin{split} \tau_{\theta z}^{(1)}(r,h) &= G \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{3}{2}} \left[ \left( 1 - e^{-2\lambda h} \right) \int_{0}^{a} \sqrt{t} \, \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt \right. \\ &+ e^{-\lambda h} \int_{0}^{b} \sqrt{t} \, \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right] J_{1}(\lambda r) d\lambda \end{split} \tag{III.30}$$

La deuxième partie des intégrales (III.30) convergent rapidement, leurs limites comme  $r \to a^+$  disparaît automatiquement, bien que, les limites des deux autres intégrales analysées asymptotiquement comme suit :

Utilisation de la relation  $J_1(\lambda R) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dR} J_0(\lambda R)$ , nous obtenons :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,h) = -G \int_{0}^{a} \sqrt{t} \phi(t) dt \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) J_{0}(\lambda r) d\lambda - G \int_{0}^{\infty} \lambda^{\frac{3}{2}} [e^{-2\lambda h} \int_{0}^{a} \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt + e^{-\lambda h} \int_{0}^{b} \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt] J_{1}(\lambda r) d\lambda$$
 (III.31)

Pour les grandes valeurs de  $\lambda$ , nous utilisons le comportement asymptotique de la fonction

Bessel du première type  $J_v(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda \pi}} \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})$ , alors on trouve:

$$J_{3/2}(\lambda t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda t \pi}} \cos(\lambda t - \pi) = -\sqrt{\frac{2}{\lambda t \pi}} \cos(\lambda t)$$
 (III.32)

Ensuite, en utilisant les formules intégrales suivantes pour la première partie intégrante infinie de la partie droite de l'Eq.(III.31) :

$$\int_0^\infty \cos(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} & r > t \\ 0 & r < t \end{cases}$$

Eq.(III.31) devient:

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,h) = G \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\phi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt + R_1(r)$$
 (III.33)

Où

$$R_1(r) = -G \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} \left[ e^{-2\lambda h} \int_0^a \sqrt{t} \, \phi(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt + e^{-\lambda h} \int_0^b \sqrt{t} \, \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right] J_1(\lambda r) d\lambda$$

Maintenant, en intégrant Eq.(III.33) par parties, nous obtenons :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,h) = -\frac{G\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{a\phi(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} - \int_0^a \frac{t\phi'(t)}{r\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right] + R_1(r)$$
 (III.34)

Nous remarquons que les intégrales infinies dans les expressions précédentes sont convergentes dans l'ensemble de la moyen sauf aux points singuliers  $r \to a^+$  qui occupent la limite de la fissure.

En utilisant la transformation suivante :

$$\phi(a) = \frac{4a\omega}{\sqrt{2\pi}} \Phi_N$$

On obtient le facteur d'intensité de contrainte au bord de la fissure :

$$K_{III}^{a} = \frac{-4G\,\omega\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}\,\Phi_{N} \tag{III.35}$$

## III.7 Le moment nécessaire pour produire la rotation du disque

Le couple requis pour maintenir le disque en rotation peut être calculé à l'aide de l'équation suivante:

$$T = 2\pi \int_0^b r^2 \, \tau_{\theta Z}^1(r,0) dr \tag{III.36}$$

En utilisant la relation:

$$\int_0^b r^2 J_1(\lambda r) dr = \frac{b^2}{\lambda} J_2(\lambda b) \tag{III.37}$$

On trouve:

$$T = 2\pi b^2 G \int_0^\infty [A_1(\lambda) + B_1(\lambda)] J_2(\lambda r) dr = \frac{b^2}{\lambda} J_2(\lambda b)$$
 (III.38)

Ici, comme le moment ne s'applique qu'à l'inclusion rigide, l'intégrale est exprimée en termes de  $\psi$  (t). Remplaçant les valeurs de A1 ( $\lambda$ ) et B1 ( $\lambda$ ) des équations (III.13) et (III.14) dans Eq.(III.38) et en utilisant le comportement asymptotique du Bessel fonction du premier type

$$J_{\frac{1}{2}}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \sin(\lambda)$$
, on trouve que:

$$T = 2\sqrt{2\pi}b^2G \int_0^b \psi(t) dt \int_0^\infty \sin(\lambda t) J_2(\lambda b) d\lambda$$
 (III.39)

En prenant en compte la relation :  $\int_0^\infty \sin{(\lambda t)} J_2(\lambda b) d\lambda = \frac{2t}{b^2}$ , on obtient le moment appliqué au disque:

$$T = 4\sqrt{2}\pi G \int_0^b \psi(t) dt \tag{III.40}$$

En utilisant les transformations suivantes: t=bu et  $(bu)=\frac{4b\omega}{\sqrt{2\pi}}\Psi_u$ , on trouve:

$$T = 16\omega b^3 G \int_0^b u \Psi(u) du \tag{III.41}$$

Le moment nécessaire pour effectuer la rotation  $\omega$ , lorsque le milieu ne contient aucune fissure, peut être formulé comme :  $T_0=\frac{16\omega b^3 G}{3}$ , L'équation (III.41) peut être exprimée comme :

$$\frac{T}{T_0} = 3 \int_0^b u \Psi(u) \, du$$
 (III.42)

Numériquement :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{3}{N} \sum_{m=1}^{N} m \Psi_m \quad \text{m=1,..., N}$$
 (III.43)

## III.8 Résultats numériques et discussions

## III.8.1 Convergence

Dans cette partie, afin de montrer l'efficacité et la précision de la présente méthode, nous donnons quelques résultats de calcul des déplacements et contraintes normalisés en fonction du nombre de sous-intervalles N dans ce problème. Nous prendrons ces cas avec: N = 5; 10; 20; 30; 40; 50; 55; 60; 62; 65; 70. De toute évidence, à mesure que le nombre d'intervalle N, augmente, la précision de notre solution à l'équation intégrale augmente également comme le montre le tableau (III.1). Pour évaluer la précision des solutions, chacune des équations intégrales (III.24) et (III.25) est discrétisée en utilisant N = 70 à quel point les résultats ont atteint une précision acceptable de 3 chiffres significatifs.

r/b	a/b	h/b	z/b	N	$u_{ heta}^{(1)}/\omega b$
1	1	0.5	0.2	5	0.003787264921137
				10	0.006870375067210
				20	0.013901690973081
				30	0.021781013824587
				40	0.030652097745282
				50	0.030592167159565
				55	0.052232782360060
				60	0.052250482281518
				62	0.052248716459883
				65	0.052241156092320
				70	0.052226622930449

Tableau III.1- Exemples des valeurs numériques des déplacements normalisés par rapport au nombre d'intervalle utilisés dans les calculs.

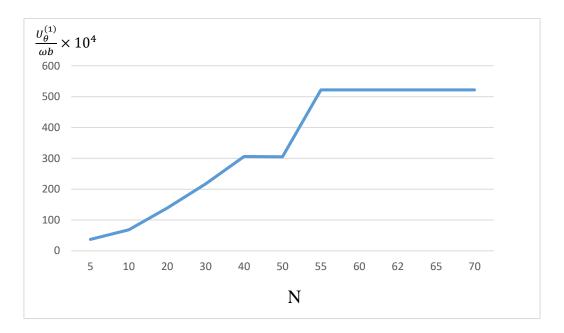


Figure III.2 – Courbe des valeurs numériques des déplacements normalisés en fonction de nombre d'intervalle utilisés dans les calculs.

## III.8.2 Résultats numériques et interprétations

Pour plus de commodité d'affichage, nous choisissons les quantités b,  $G\omega\sqrt{a}$ ,  $T_0$ ,  $\omega b$  et  $G\omega b$  comme échelles de référence pour les coordonnées spatiales, le facteur d'intensité de contrainte, le moment, les déplacements et les contraintes, respectivement.

Les paramètres de matériau suivants ont été utilisés dans les calculs du Ansys workbench (Acier standard) :

Module de Young E: 210 GPa

Coefficient de poisson : 0.3

Module de cisaillement : 76, 923 GPa

Masse volumique :  $2890 \text{ Kg}/m^3$ 

## III.8.2.1 Déplacements et contraintes

En remplaçant les Eqs. (III.13) - (III.14) dans les expressions des déplacements et des contraintes Eqs. (III.7a) -(III.7d), on obtient les résultats numériques des déplacements et des contraintes pour les deux régions.

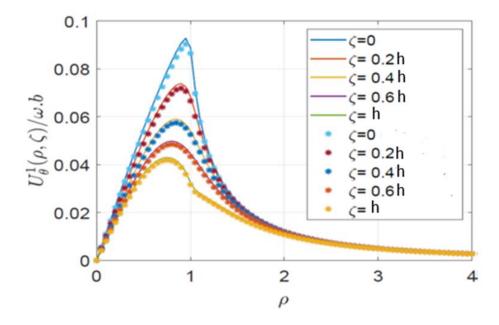


Figure III.3 – Déplacement tangentiel  $u_{\theta}^1$  versus  $\rho=r/b$  pour divers  $z/b,\ 0\leq z\leq h$ 

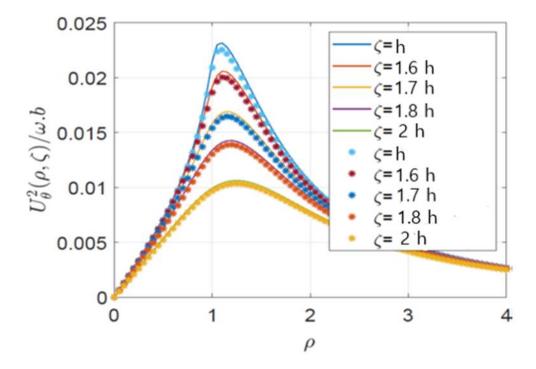


Figure III.4 – Déplacement tangentiel  $u_{\theta}^2$  versus  $\rho = r/b$  pour divers  $z/b, z \ge h$ 

La variation des déplacements normalisés est représentée sur la figure (III.3) et la figure (III.4). On remarque que les déplacements dans les deux régions augmentent d'abord, atteignent des valeurs maximales puis diminuent hors de la bande du disque avec l'augmentation de  $\rho$ , C'est parce que la charge statique agit sur la zone circulaire du disque avec le rayon  $\rho$ = 1.

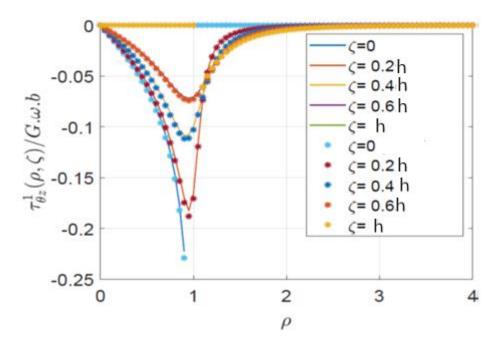


Figure III.5 – Contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta z}^1$  versus  $\rho = r/b$  pour divers z/b,  $0 \le z \le h$ 

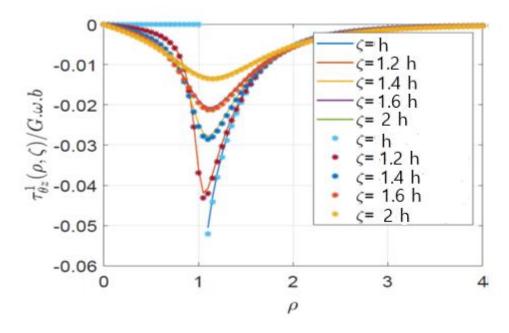


Figure III.6 – Contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta z}^2$  versus  $\rho = r/b$  pour divers  $z/b, z \ge h$ 

La distribution des contraintes de cisaillement dans le milieu élastique est également discutée et représentée sur la figure (III.5) et la figure (III.6). Les contraintes augmentent initialement, atteignent des valeurs maximales et avec l'augmentation de la valeur de  $\rho$ , les contraintes continuent à diminuer.

Pour illustrer la variation des contraintes de cisaillement sur la surface de la fissure correspondant à la surface du chargement, on l'a présentée uniquement sur ce plan comme des

surfaces 3D dans le demi-plan de la fissure sur la figure (III.7). Il apparaît que les contraintes de cisaillement deviennent infinies au bord de la fissure en raison de la singularité de la racine carrée explorée précédemment analytiquement et disparaissent au niveau des faces de la fissure.

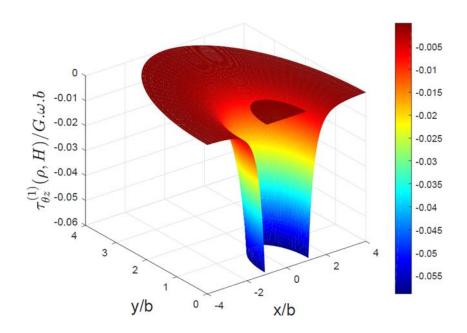


Figure III.7 – La distribution de la contrainte de cisaillement à la lèvre de la fissure face à la surface de la charge et le long de l'interface dans le demi-plan de la fissure

#### III.8.2.2 Facteur d'intensité de contrainte

La figure (III.8) montre la variation du facteur d'intensité contrainte au bord de la fissure défini par l'Eq. (III.35) en fonction de (a / b) pour différentes valeurs de l'épaisseur de couche H = 1, 0.75, 0,5. On observe que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmenter et atteindre des valeurs maximales à c = 1, et avec l'augmentation de la valeur de c, le facteur d'intensité de contrainte diminue. De plus, l'effet de la distance axiale entre la fissure et le disque H sur l'intensité de la contrainte facteur est également indiqué sur cette figure. L'augmentation de la la distance H induit la diminution du facteur d'intensité de contrainte pour toutes les valeurs du paramètre c.

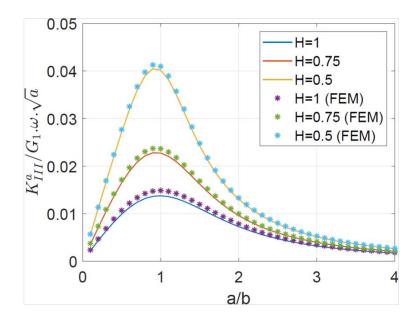


Figure III.8 – Variation du facteur d'intensité de contrainte normalisé au bord de la fissure avec (a / b) = c

## III.8.2.3 Le moment nécessaire pour produire la rotation du disque

Le moment est représenté sur la figure (III.9) en fonction de la taille de la fissure. Pour ce problème de cisaillement pur, On voit que le couple appliqué commence par des valeurs fixes qui présentent le couple requis pour un disque rigide seul dans le milieu élastique puis diminue avec l'augmentation de la taille de la fissure c après c> 1.

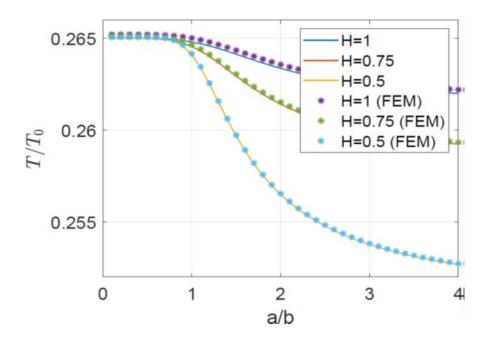


Figure III.9 – Variation du moment appliqué en fonction de a / b

## III.9. Validation numérique avec Ansys

Dans ce modèle, on définit la nature des éléments sélectionnés et leurs tailles, car dans une simulation numérique par la méthode des éléments finis, la qualité en forme et en taille des éléments du maillage est très importante.

La sous-région sphérique entourant la fissure  $\{(r,z) \mid -10 \le r \le 10, 0 \le z \le 20\}$ , est uniformément discrétisée par des éléments tétraèdres d'une dimension de 0,5, et la majeure partie de la sous-région restante est uniformément discrétisée par des éléments tétraèdres d'une dimension de 2 mm (voir Figure III.10).

Les deux types d'éléments quadratiques de tailles différentes sont fusionnés par des éléments tétraédriques quadratiques à nœuds médians qui peuvent très bien prédire la concentration de contrainte locale afin qu'ils puissent également être utilisés pour des problèmes de contact pour obtenir des résultats précis.

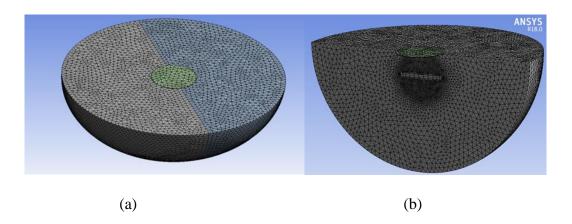


Figure III.10 – Les mailles éléments finis du demi-espace dans la simulation numérique des points de vue global (gauche) et local (droit)

Par la comparaison les résultats analytiques avec les résultats de calculs obtenus à partir de l'élément fini basé sur le code multi-physique, ANSYS Workbench, on a observé une bonne concordance, même au niveau des interfaces de fissures ou de disques, où le déplacement tangentiel et la contrainte de cisaillement varie considérablement. Cela valide la présente analyse.

## III.10 Etapes de modélisation du problème

#### III.10.1 ANSYS Workbench

Cette plate-forme propose une approche différente dans la construction d'un modèle en réutilisant le code ANSYS initial. Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièces) et aux utilisateurs non confirmés dans le

domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plateforme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la résolution. Le modèle éléments finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS. Il permet d'effectuer différents types d'analyses structurelles, thermiques, fluides et électromagnétiques. L'ensemble du processus de simulation est lié par un schéma de projet, à partir duquel on peut interagir avec des applications natives d'ANSYS Workbench ou des applications de lancement intégrées aux données avec ANSYS Workbench. ANSYS Workbench comprend une connectivité CAO bidirectionnelle, un maillage hautement automatisé, un mécanisme de mise à jour au niveau du projet, une gestion de paramètres omniprésente et des outils d'optimisation intégrés [31].

#### III.10.2 Géométrie du modèle

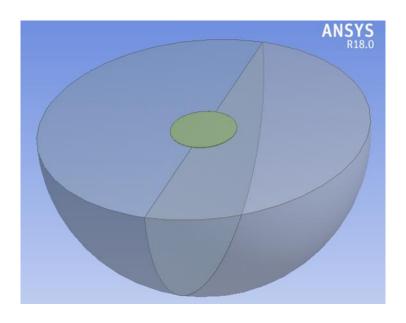


Figure III.11 – Définition de la géométrie

## III.10.3 maillage du modèle

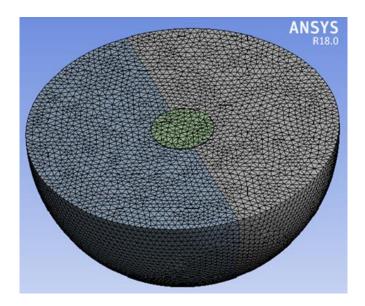


Figure II.12 – Maillage du modèle

## III.10.4 création de la fissure

On a créé une fissure circulaire interne dans le milieu de la demi espace.

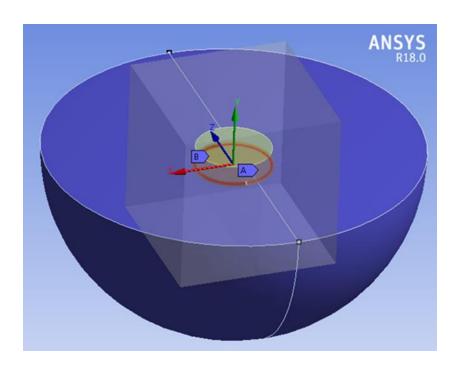
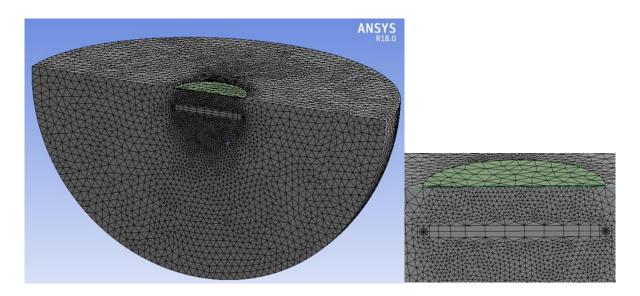


Figure II.13 – Modèle de la fissure

> Raffinement de maillage aux bord de la fissure



Figure~III.14-Maillage~raffin'e

## III.10.5 Condition aux limite

On applique une rotation sur le disque et on annule les déplacements de la demi espace.

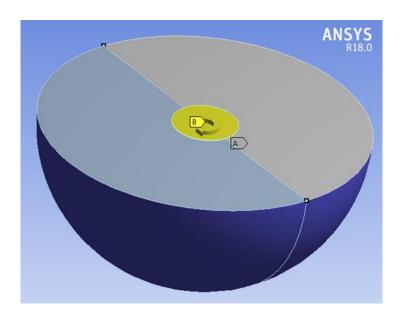


Figure III.15 – condition aux limites

## III.10.6 lancement de la résolution

- **❖** Pour h/b=0.5
- > Déplacement

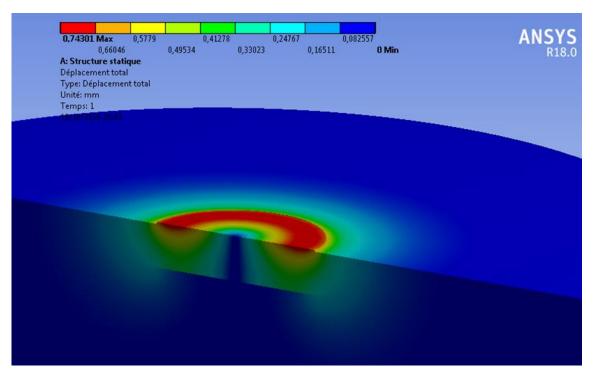


Figure III.16 – Champ de déplacement

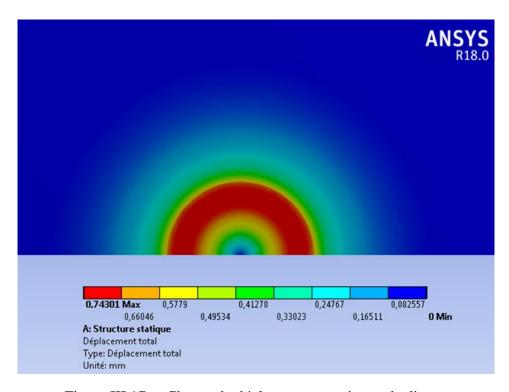


Figure III.17 – Champ de déplacement au niveau de disque

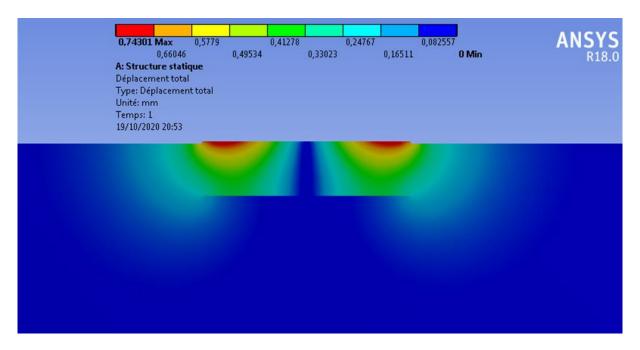


Figure III.18 – Champ de déplacement

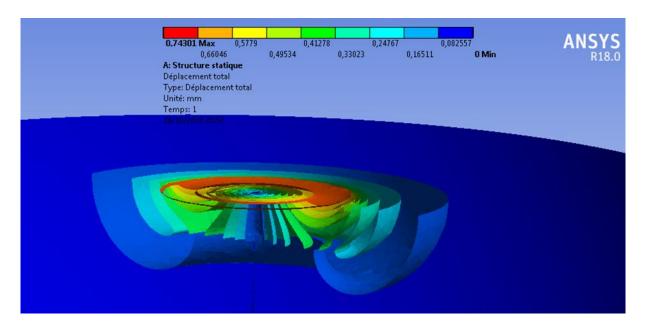


Figure III.19 – Champ de déplacement par l'isolation des surfaces

• Au niveau de la fissure

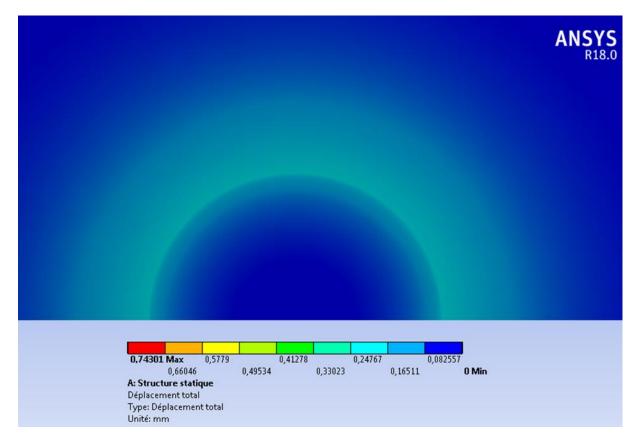


Figure III.20 – Champ de déplacement au niveau de la fissure

## > Contrainte de cisaillement

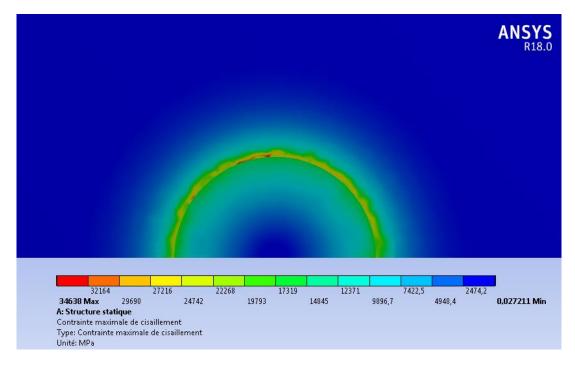


Figure III.21 – Contrainte de cisaillement au niveau de disque

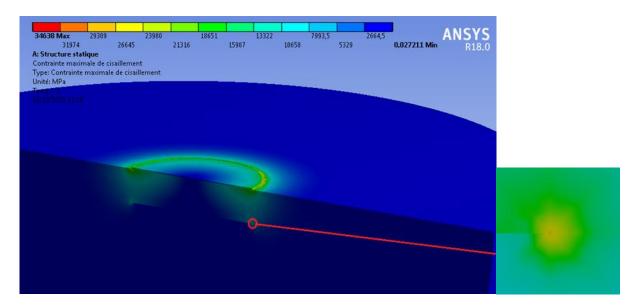


Figure III.22 – Contrainte de cisaillement

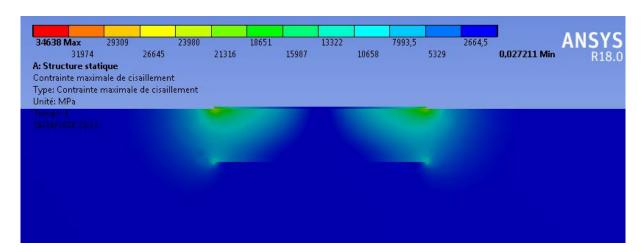


Figure III.23 – Contrainte de cisaillement

## • Au niveau de la fissure

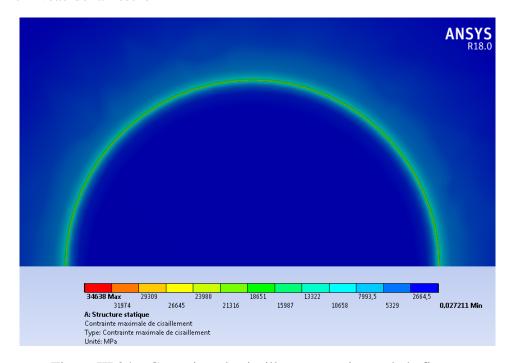


Figure III.24 – Contrainte de cisaillement au niveau de la fissure

## Déformation

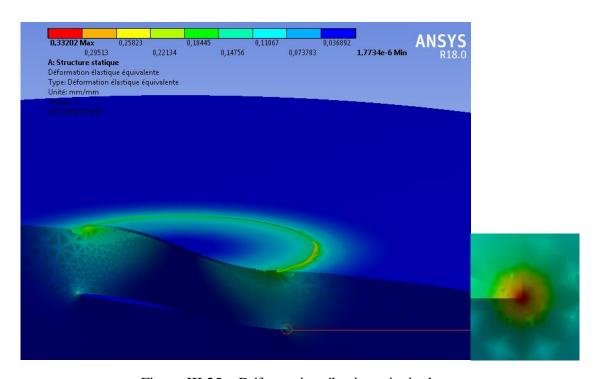


Figure III.25 – Déformation élastique équivalente

## > Facteurs d'intensité du contrainte

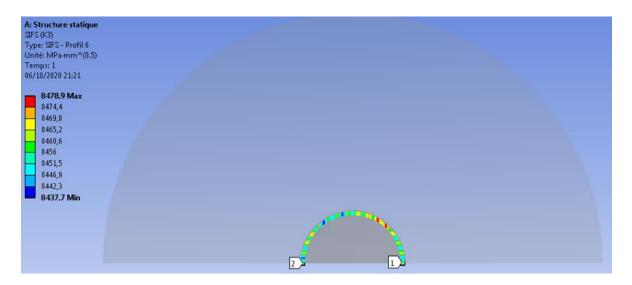


Figure III.26 – Facteurs d'intensité du contrainte  $K_{III}$ 

- ❖ Pour h/b=1
- > Déplacement

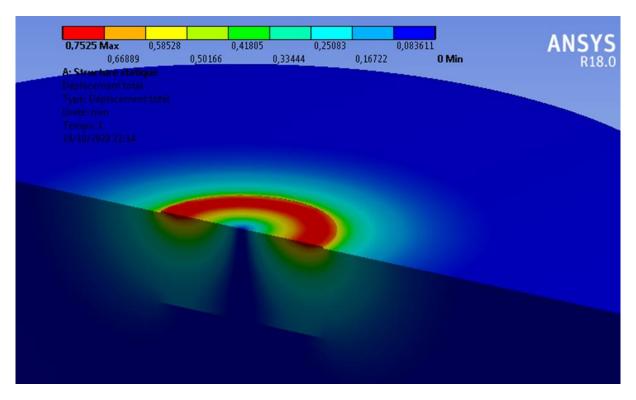


Figure III.27 – Champ de déplacement

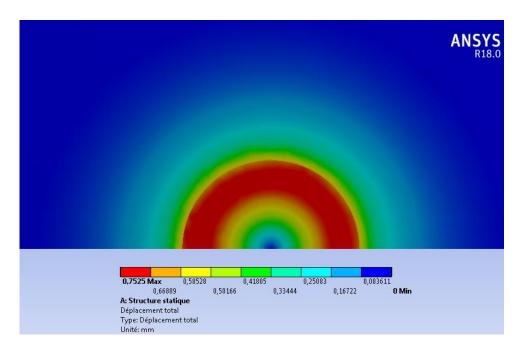


Figure III.28 - Champ de déplacement au niveau de disque

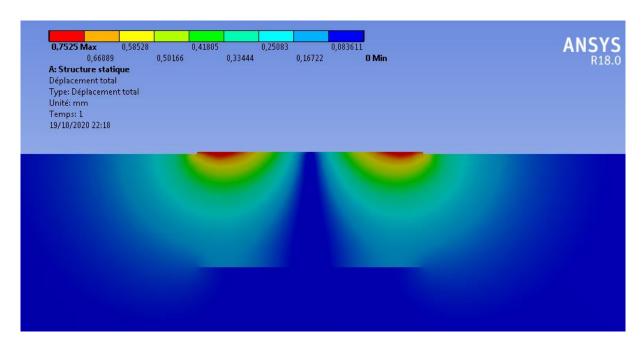


Figure III.29 – Champ de déplacement

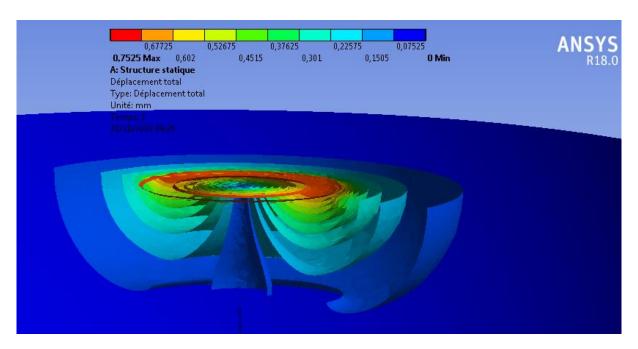


Figure III.30 - Champ de déplacement par l'isolation des surfaces

## • Au niveau de la fissure

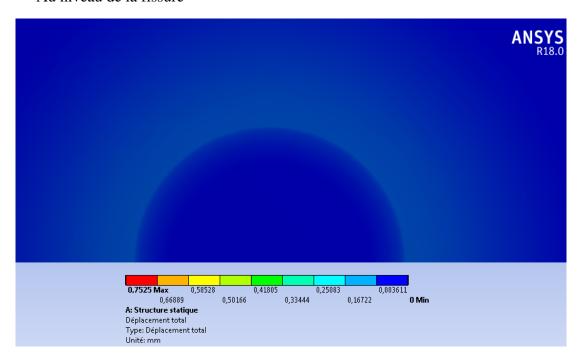


Figure III.31 – Champ de déplacement au niveau de la fissure

## > Contrainte de cisaillement

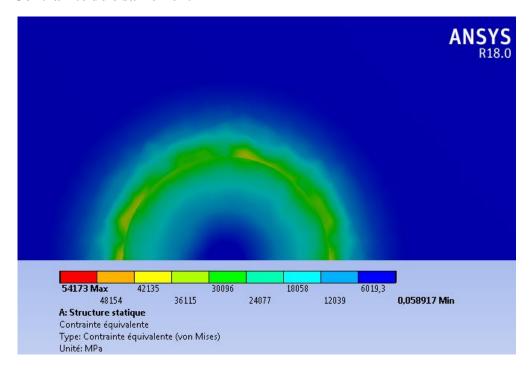


Figure III.32 – Contrainte de cisaillement au niveau de disque

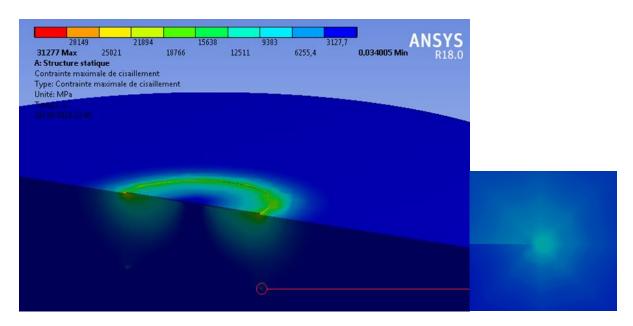


Figure III.33 – Contrainte de cisaillement

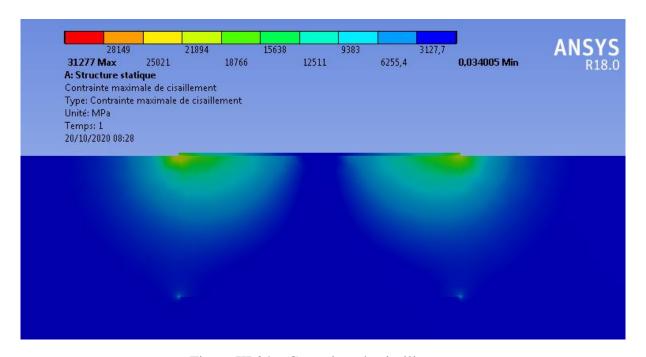


Figure III.34 – Contrainte de cisaillement

## • Au niveau de la fissure

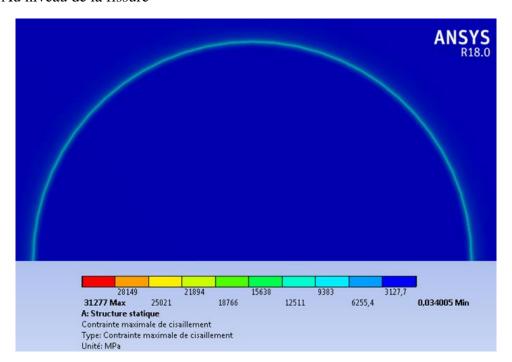


Figure III.35 – Contrainte de cisaillement au niveau de la fissure

## > Déformation

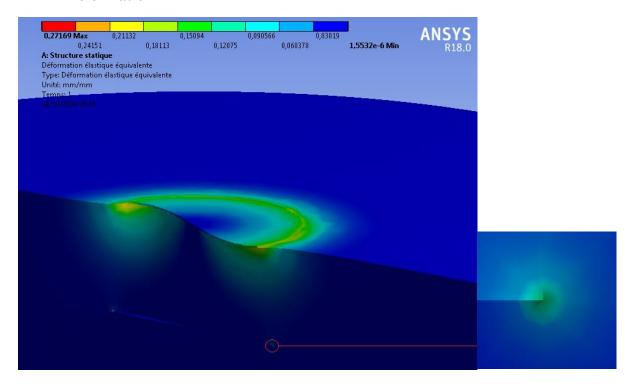


Figure III.36 – Déformation élastique équivalente

#### > Facteurs d'intensité du contrainte

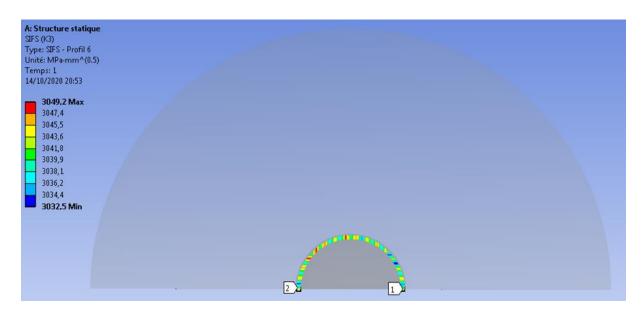


Figure III.37 – Facteurs d'intensité du contrainte  $K_{III}$ 

Afin de comparer les résultats, nous avons écrit les résultats obtenus par le code de calcul ANSYS Workbench sans dimensions.

On a:

Angle de rotation du disque : 5°

Rayon du disque : b = 10mm

Paramètre a = 10 mm

 $\omega = 0.87 \text{ rad}$ 

Module de cisaillement : G = 76,923 GPa

Déplacement (mm)	$U_{\theta}^{1}/_{\omega b}$
0,74301	0,085
0,5779	0,06
0,41278	0,04
0,24767	0,02

Tableau III.2 – Déplacement obtenus par le code de calcul ANSYS Workbench,  $0 \le z \le h$ 

	Facteur d'intensité de contrainte (MPa $\sqrt{mm}$ )	$K_{III}^a/G\omega\sqrt{a}$
h/b = 0.5	8478,9	0,04
h/b = 1	3049,2	0,014

Tableau III.3 – Facteur d'intensité de contrainte obtenus par le code de calcul ANSYS Workbench

## Conclusion

Après avoir comparé les résultats, nous avons découvert un bon accord des résultats.

## Conclusion générale

Nous avons étudié le problème de torsion axisymétrique par un disque rigide adhésif d'un milieu élastique.

Le but principal de ce problème est d'arrêter la propagation de la fissure lorsque la charge augmente. Ceci est accompli en calculant le facteur d'intensité de contrainte au bord de la fissure. A partir des résultats trouvés, les cas de réduction du facteur d'intensité de contrainte au bord de la fissure peuvent être déterminés selon différents critères.

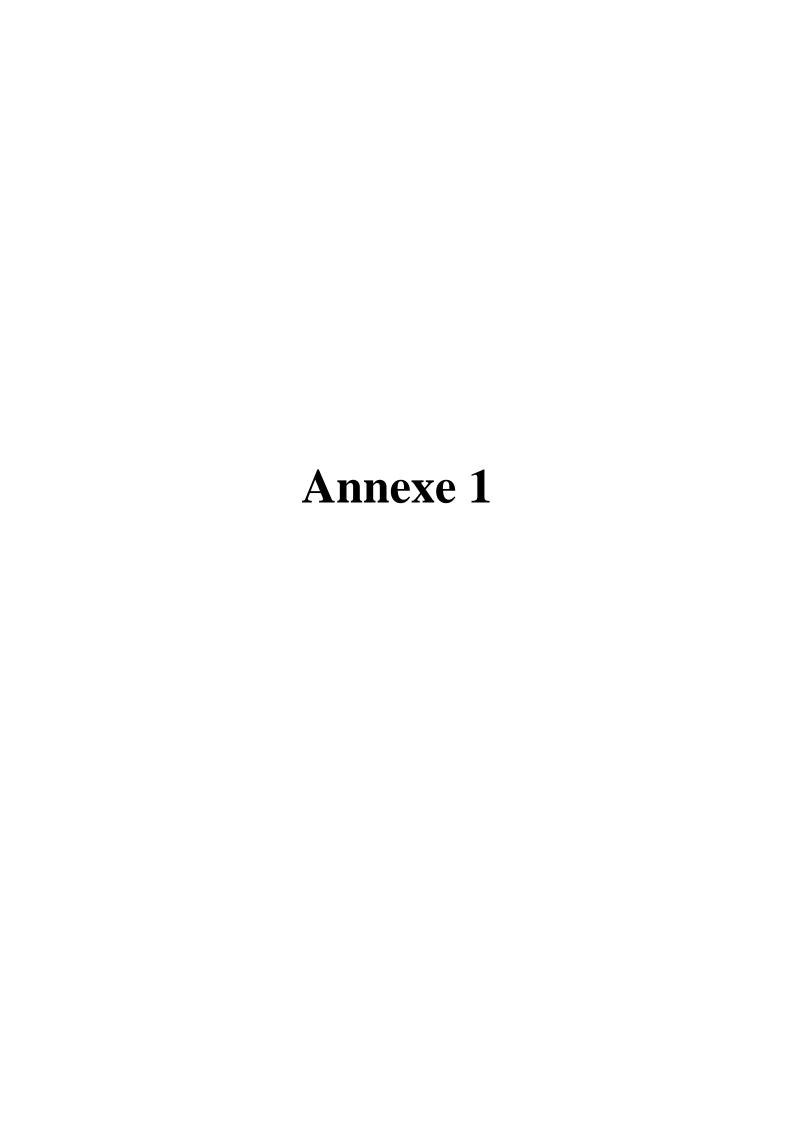
Sur la base de la symétrie du problème et de l'élasticité des matériaux transversalement isotropes, l'équation d'équilibre de l'élastique isotrope sous torsion est formulée. En combinant les caractéristiques de torsion du disque collé, la méthode de transformation intégrale de Hankel et en tenant compte des conditions aux limites liées au disque et à la fissure, le problème des valeurs aux limites mixtes aboutit à un système équations intégrales duales. Ensuite, les équations intégrales de Fredholm sont obtenues pour les fonctions auxiliaires  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$ . En utilisant la règle de quadrature, le problème est réduit à un système infini d'équations algébriques linéaires. Les résultats calculés numériquement des déplacements, des contraintes et des facteurs d'intensité des contraintes sont présentés graphiquement pour certains paramètres sans dimension. À partir de la formulation et des chiffres présentés, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les déplacements tangentiels et les contraintes de cisaillement ont la même régulation de changement, d'abord vers le haut puis vers le bas avec l'augmentation du paramètre r, c'est parce que la charge statique agit sur la zone circulaire du disque, l'axe de torsion axisymétrique appliqué au disque est linéaire avec r, et la plus grande valeur de la charge est à r = b.
- On observe une singularité de racine carrée au bord de la fissure.
- Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmentent et atteignent ses valeurs maximales à c = 1, et avec l'augmentation de la valeur de c, le facteur d'intensité de contrainte diminue.
- L'augmentation de la la distance H induit la diminution du facteur d'intensité de contrainte pour toutes les valeurs du paramètre c.
- Le couple nécessaire pour produire la rotation est stable au début puis diminue avec l'augmentation de la taille de la fissure c après c> 1.

## **Perspectives**

Nous envisageons l'application de la méthode développée dans le présent document à la résolution des problèmes de torsion axisymétrique triplement mixtes suivants :

- La torsion d'un milieu élastique fissuré par deux disques rigides dans le cas d'une fissure appartenant à une zone externe aux disques.
- La torsion par un seul disque rigide d'un cas où le milieu élastique est affaibli par deux fissures externes.



## 1. Equations intégrales linéaires et leurs classifications

On appelle équation intégrale linéaire une équation où la fonction inconnue figure sous le signe  $\int \,\, . \text{C'est en générale l'équation par rapport à } \, \varphi(t) \,\, .$ 

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{T} K(x, t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

Avec f(x), K(x; y) des fonctions connues,  $\lambda$  est un paramètre numérique et  $\varphi(x)$  la fonction inconnue. T un ensemble borné fermé d'un espace euclidien à n dimensions (x et t des points de cet espace), elles peuvent se mettre en première espèce commeen seconde espèce, homogène où non homogène, aussi elles peuvent être de Fredholm où bien de Volterra.

#### 1.1 Equations intégrales de Fredholm :

On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x, t)\varphi(t)dt$$
 (2)

Où  $\varphi(x)$  est la fonction inconnue, K(x; y) et f(x) des fonctions données. Si f(x) = 0, l'équation (2) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2) s'écrit :

$$\varphi(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)\varphi(t)dt$$
, et on dit qu'elle est homogène. Une équation intégrale de la forme :

$$f(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)\varphi(t)dt$$
(3)

Où la fonction inconnue  $\varphi(t)$  n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

#### 1.2 Equations intégrales de Volterra :

Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme  $x \in IR$ 

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x,t)\varphi(t)dt$$
(4)

est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce, en fait c'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K(x, t) = 0 pour x < t. Si f(x) = 0, l'équation (5) s'écrit :

$$\varphi(x) = \int_{a}^{x} K(x,t)\varphi(t)dt$$
 (5)

Et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce. Une équation, à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme :

$$f(x) = \int_{a}^{x} K(x,t)\varphi(t)dt$$
 (6)

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

## 2. Résolution numérique des Equations Intégrales du second type

Indiquons quelques méthodes classiques de résolution numérique des équations intégrales, pour des données assez régulières, en suite on prend la formule de quadrature suivante:

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)dx = \sum_{j=0}^{N} A_{j}\varphi(x_{j})$$
(7)

Donc l'idée est de remplacer l'intégrale par une somme finie, avec une subdivision de  $[a, b] = \{x_j, j = 1, 2, ..., N\}$ , et  $A_1, ..., A_n$ : sont des coefficients indépendants de la forme de la fonction  $\varphi$ , on pose  $x = x_j$  dans l'équation (1) et en utilisant la formule quadratique précédente, on obtient l'équation suivante :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{N} A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), i = 0, 1...N$$
(8)

Il s'agit donc d'un système linéaire algébrique de N+1 équations à N+1 inconnues et  $f(x_i)$ , j=0,1,2,...,N, sont les valeurs approchées de la solution f(x). Les coefficients  $A_j$  sont déterminés par l'une des formules suivantes:

1) La formule des rectangles

Pour les points 
$$x_i = a + ih$$
;  $i = 0, 1, 2, ..., N$ , on a  $A_0 = A_1 = ... = A_N = h = \frac{b - a}{N}$ . (9)

2) La formule des trapèzes

Pour les points 
$$x_i = a + ih$$
;  $i = 0, 1, 2, ..., N$ , on a  $A_0 = A_N = \frac{h}{2}, A_1 = ... = A_{N-1} = h$  (10)

3) La formule de Simpson (N est pair).

Pour les points  $x_i = a + ih$ ; i=0, 1,2....N, on a

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = A_5 \dots = A_{N-1} = \frac{2h}{3}, A_2 = A_4 = A_6 \dots = A_{N-2} = \frac{4h}{3}$$
 (11)

#### 2. 1 Méthode de Simpson

Le calcul approché de l'intégrale se fait par une méthode de Simpson :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{N} A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), i = 0, 1...N$$
(12)

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = A_5 \dots = A_{N-1} = \frac{2h}{3}, A_2 = A_4 = A_6 \dots = A_{N-2} = \frac{4h}{3}$$

Où N est pair et h = (b - a)/N

Si bien que pour chaque i, l'équation du problème approché s'écrit :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \frac{h}{3}(k(x_i, t_0)\varphi_0 + 2\sum_{i=0}^{N/2-1} k(x_i, t_{2j+1})\varphi_{2j+1} + 4\sum_{i=1}^{N/2-1} (x_i, t_{2j})\varphi_{2j} + k(x_i, t_N)\varphi_N), i = 0, 1...N (13)$$

Où  $\varphi_i$  est l'approximation de  $\varphi(x_i)$ , ce qui conduit au problème approché :

$$(I - \frac{h}{3}A_N)\Phi = F \tag{14}$$

 $A_{\scriptscriptstyle N}$  : Est la matrice  $K(x_{\scriptscriptstyle i},x_{\scriptscriptstyle j})$  , K est une fonction définie et continue sur R :

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N+1}))^T$$

Et:

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_2, \dots, \Phi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$$
 est l'inconnue.

#### 2. 2 Méthode de trapèze

Ainsi la formule générale de l'intégrale par la méthode de trapèze :

$$\int_{a}^{b} \varphi(t)dt = \frac{h}{2}(\varphi(0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_{i}) + \varphi(N))$$
(16)

Si bien que pour chaque i, l'équation du problème approché s'écrit :

$$\varphi_{i} = f(x_{i}) + \frac{h}{2}(k(x_{i}, x_{0})u_{0} + 2\sum_{i=1}^{N-1} k(x_{i}, x_{j})\varphi_{j} + k(x_{i}, x_{N})u_{N}), i = 0, 1, 2...N$$
(17)

Où  $\varphi_i$  est l'approximation de  $\varphi(x_i)$ , ce qui conduit au problème approché :

$$(I - \frac{h}{2}A_N)\Phi = F \tag{18}$$

 $A_N$ : Est la matrice  $K(x_i, x_j)$ , K est une fonction définie et continue sur R

$$A_{N} = \begin{pmatrix} k(x_{0}, x_{0}) & 2k(x_{0}, x_{1}) & \dots & k(x_{0}, x_{N}) \\ k(x_{1}, x_{0}) & 2k(x_{1}, x_{1}) & \dots & k(x_{1}, x_{N}) \\ & \dots & & \dots & & \\ & \dots & \dots & & & \\ k(x_{N}, x_{0}) & 2k(x_{N}, x_{1}) & \dots & k(x_{N}, x_{N}) \end{pmatrix}$$

$$(19)$$

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N+1}))^T$$

Et: 
$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_2, \dots, \Phi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$$
 est l'inconnue.

#### 2.3 Méthode des rectangles

La formule générale de l'intégrale par la méthode de rectangle :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{i=0}^{N} A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), i = 0, 1...N$$
(20)

$$A_0 = A_1 = \dots = A_N = h = \frac{b-a}{N}$$

Pour chaque i, l'équation du problème approché s'écrit :

$$\varphi_i = f(x_i) + h(\sum_{i=0}^{N} k(x_i, x_j)\varphi_j +), i = 0, 1, 2...N$$
(21)

Où  $\varphi_i$  est l'approximation de  $\varphi(x_i)$ , ce qui conduit au problème approché :

$$(I - hA_N)\Phi = F$$

 $A_N$ : Est la matrice  $K(x_i, x_i)$ , K est une fonction définie et continue sur R

$$A_{N} = \begin{pmatrix} k(x_{0}, x_{0}) & k(x_{0}, x_{1}) & \dots & k(x_{0}, x_{N}) \\ k(x_{1}, x_{0}) & k(x_{1}, x_{1}) & \dots & k(x_{1}, x_{N}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(x_{N}, x_{0}) & k(x_{N}, x_{1}) & \dots & k(x_{N}, x_{N}) \end{pmatrix}$$

$$(22)$$

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N+1}))^T$$

Et: 
$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_2, \dots, \Phi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$$
 est l'inconnue.

## 3. Résultats numériques

#### **3.1** Exemple 1

Équation intégrale de Love, est généralement définis comme suit:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d}{d + (x - t)^2} \varphi(t) dt, -1 \le x \le 1$$
(23)

On Considère cette équation en particulier le cas lorsque d=1 et f(x)=1. Nous avons résolu cette équation avec la méthode de Simpson. Les tableaux suivants présentent la solution approximative de  $x=0, x=\pm 1/4, x=\pm 1/2, x=\pm 3/4, x=\pm 1$  .les résultats trouvés ont été comparés avec le travail de **J. Saberi-Nadjafi, M. Heidari**qui utilise la méthode de trapèze modifie. Après exécution du programme, on obtient les résultats suivants :

## Le programme de résolution de l'équation de fredholm sous matlab par la méthode de Simpson ,trapèze et rectangle

```
a = -1;
b=1;
N=64;
h=(b-a)/N;
                          méthode de simpson
for i=1:N+1
for j=1:N+1
         x=a+(i-1)*h
         t=a+(j-1)*h;
    K(i,j) = 1/(1+(x-t)^2);
end
   f(i)=1
F=f';
K(:,2:2:N) = (1/pi) *4*K(:,2:2:N);
K(:,3:2:N-1) = (1/pi)*2*K(:,3:2:N-1);
U=(eye(N+1)-h*K/3)\F
```

**Tableau1 :** solution de l'équation de love par la méthode se Simpson

	N=16		N=32		N=64	
X	Simp	Tra.mod	Simp	Tra.mod	Simp	Tra.m
-1	1.7337	1.63969	1.6854	1.63969	1.6622	1.63970
-3/4	1.8513	1.75195	1.8002	1.75195	1.7625	1.75195
-1/2	1.9425	1.84238	1.8911	1.84238	1.8568	1.84238
-1/4	1.9989	1.89961	1.9479	1.89961	1.9183	1.89962
0	2.0178	1.91903	1.9671	1.91903	1.9424	1.91903
1/4	1.9989	1.89961	1.9479	1.89961	1.9183	1.89962
1/2	1.9425	1.84238	1.8911	1.84238	1.8568	1.84238
3/4	1.8513	1.75195	1.8002	1.75195	1.7625	1.75195
1	1.7337	1.63969	1.6854	1.63969	1.6622	1.63970

## 3.2 Exemple 2

On considère l'équation (exemple de livre 'Linear and NonlinearIntegral

Equations' Abdul-Majid Wazwaz ), suivant :

$$\varphi(x) = -2 - 3x + \int_{0}^{1} (3x + t)\varphi(t)dt$$
 (24)

La solution exacte de l'équation est  $\varphi(x) = 6x$  n = 16 et h=1/16, on applique dans Matlab le programme des méthodes de Simpson, trapèze et rectangles suivant :

```
clear all
a=0;
b=1;
```

```
N = 16
h=(b-a)/N;
for i=1:N+1
for j=1:N+1
          x=a+(i-1)*h
       t=a+(j-1)*h;
   K(i,j) = 3*x+t;
f(i) = -2 - 3 * x;
F=f';
end
K(:,2:2:N) = 4*K(:,2:2:N);
K(:,3:2:N-1)=2*K(:,3:2:N-1);
U=(eye(N+1)-h*K/3)\F
%------RECTANGLE-------
for i=1:N+1
for j=1:N+1
           x=a+(i-1)*h
       t=a+(j-1)*h;
   K(i,j) = 3*x+t;
f(i) = -2 - 3 * x;
F=f';
end
end
V=(eye(N+1)-h*K)\F
%------trapéze-----
for i=1:N+1
for j=1:N+1
           x=a+(i-1)*h
       t=a+(j-1)*h;
   K(i,j) = 3*x+t;
f(i) = -2 - 3 * x;
F=f';
end
end
K(:,2:N) = 2 * K(:,2:N);
W = (eye(N+1) - h*K/2) \ F
x=a:h:b;
y=6*x;
% plot(x,cos(x),'-ro',x,sin(x),'-.b')
plot(x,U,'ro',x,W,'r*',x,V,'-.b',x,y,'-.b')
```

**Tableau2 :** solution de l'équation (24) par la méthode se Simpson, trapèze et rectangles

х,	La solution	La solution numérique	La solution	La solution exacte
N=16	numérique par	par Trapèze	numérique par	
	Simpson		rectangles	
0,0000	0.0000000000000000	00.001560062402496	-0.06363713294406	0
0.0625	0.3750000000000000	0.375975039001560	0.27350427350427	0.3750000000000000
0.1250	0.7500000000000000	0.750390015600624	0.61064567995261	0.7500000000000000
0.1875	1.1250000000000000	1.124804992199688	0.94778708640094	1.1250000000000000
0.2500	1.5000000000000000	1.499219968798752	1.28492849284928	1.5000000000000000
0.3125	1.8750000000000000	1.873634945397816	1.62206989929762	1.8750000000000000
0.3750	2.2500000000000000	2.248049921996879	1.95921130574595	2.2500000000000000
0.4375	2.6250000000000000	2.622464898595945	2.29635271219429	2.6250000000000000
0.5000	3.00000000000000000	2.996879875195007	2.63349411864263	3.0000000000000000
0.5625	3.374999999999998	3.371294851794071	2.97063552509096	3.3750000000000000
0.6250	3.749999999999998	3.745709828393138	3.30777693153930	3.7500000000000000
0.6875	4.1250000000000004	4.120124804992194	3.64491833798764	4.1250000000000000
0.7500	4.50000000000000001	4.494539781591253	3.98205974443598	4.5000000000000000
0.8125	4.8750000000000003	4.868954758190330	4.31920115088432	4.8750000000000000
0.875	5.2500000000000000	5.243369734789395	4.65634255733265	5.2500000000000000
0.9375	5.624999999999996	5.617784711388463	4.99348396378099	5.6250000000000000
1	5.99999999999998	5.992199687987519	5.33062537022932	6.0000000000000000

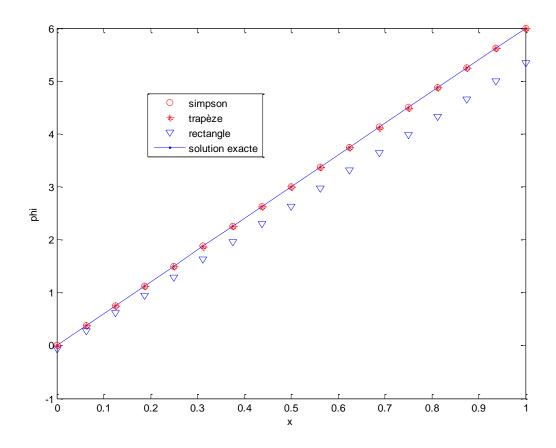


Figure 1 : Solution de l'équation (24) par la méthode se Simpson, trapèze et rectangle

# Annexe 2

## 1.Les étapes du logiciel

#### 1.1. Création du projet

Un nouveau projet s'ouvre automatiquement. Nous choisissons dans la **Boîte à outils** ⇒ systèmes d'analyse ⇒ structure statique, et glisser dans l'espace de travail. (Figure 1)

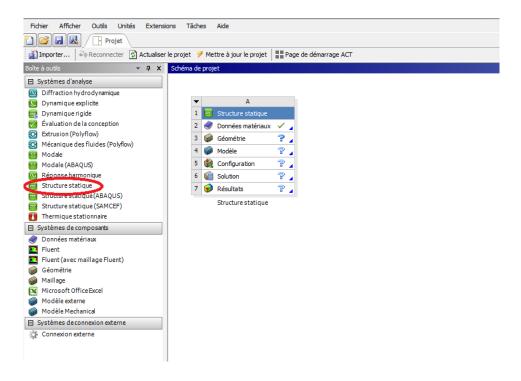


Figure 1- interface de la création d'un projet

Dans le schéma de projet on faite un clique droit sur la cellule **Géométrie** dans le système d'analyse qu'on a créé et nous choisissons Nouvelle géométrie Design Modeler. (Figure 2)

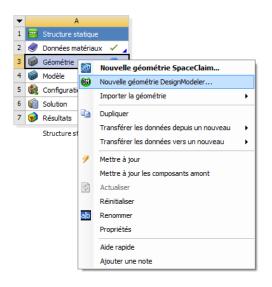


Figure 2- Module de création géométrique

Nous pouvons passer à l'étape suivante, création de la géométrie.

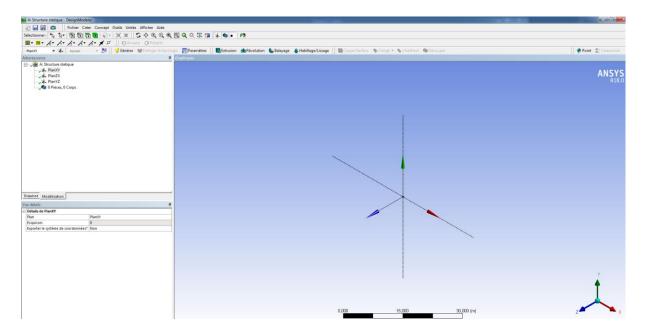


Figure 3- interface du Design Modeler

Nous choisissons l'unité que nous voulons :

#### Barre de menu $\Rightarrow$ unités

## 1.2 Création de la demi espace

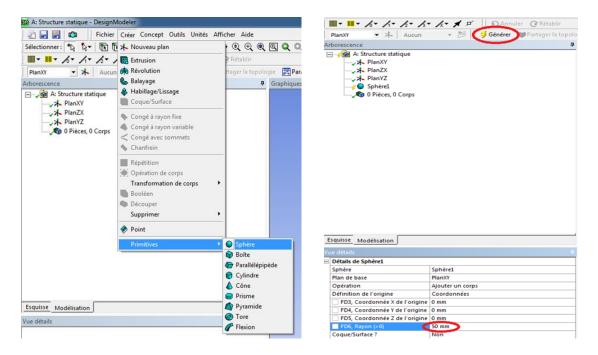


Figure 4 – les étapes de Création de demi espace

Nous choisissons dans **la barre de menu** ⇒ **outils** ⇒ **symétrie** ⇒ choisit le plan de symétrie ⇒ **Applique**r ⇒ **Générer**.( Figure 5)

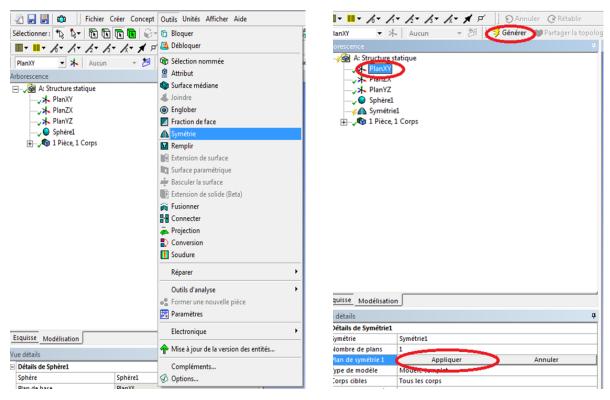


Figure 5 – les étapes de Création de demi espace

Ensuite clique sur Créer  $\Rightarrow$  Découper  $\Rightarrow$  choisir le plan YZ  $\Rightarrow$  Appliquer  $\Rightarrow$  Générer (figure 6)

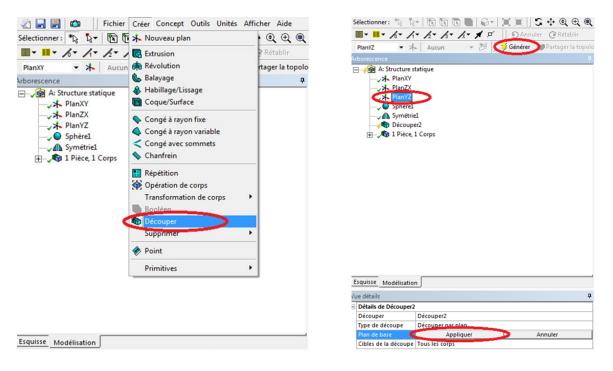


Figure 6 – les étapes de Création de demi espace

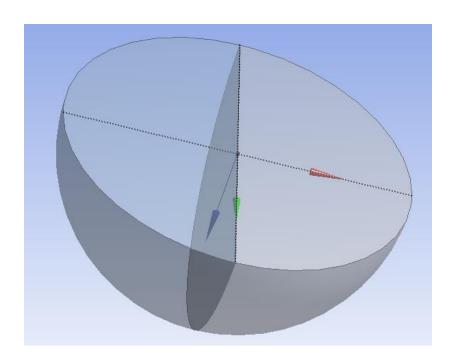


Figure 7 – géométrie de demi espace

## 1.3 création de disque

Nous choisissons le plan XY pour dessiner le disque et clique sur Esquisse,

Tracez un cercle  $\Rightarrow$  insérer les **cotes**  $\Rightarrow$  clique sur **Extrusion**. (Figure 8)

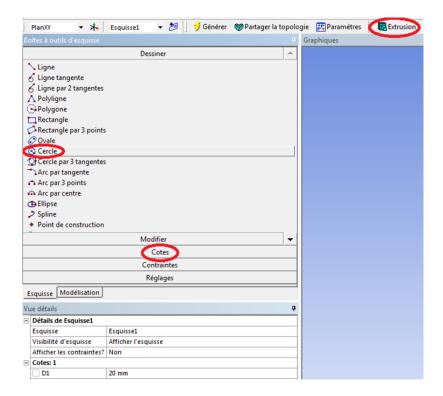


Figure 8 – les étapes de Création de disque

Ensuite **Appliquer Esquisse 1** ⇒ **inversée la direction** ⇒ donner l'épaisseur de disque ⇒ clique sur **Générer**. (Figure 9)

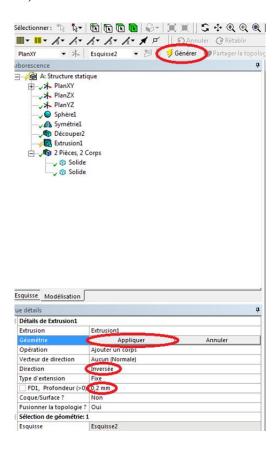


Figure 9 – les étapes de Création de disque

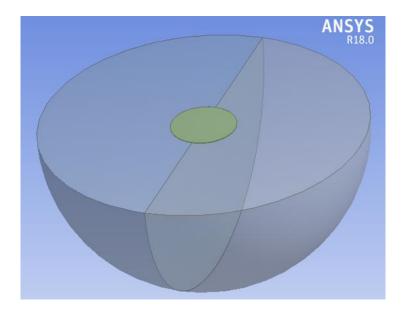


Figure 10 – Définition de la géométrie

Ensuite nous sortons de Design Modeler et nous entrons dans le module de simulation. (Figure 11)



Figure 11- module de simulation

#### 1.4 Le maillage du modèle

Clique droit sur **Maillage**  $\Rightarrow$  **Insertion**  $\Rightarrow$  **Méthode**. (Figure 12)

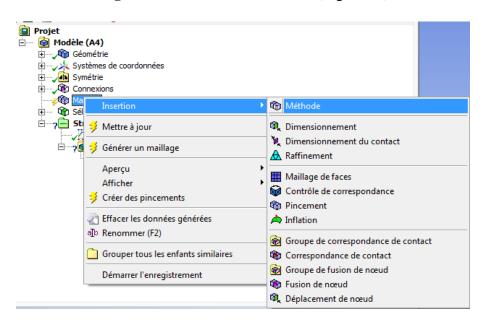


Figure 12 – création la méthode de maillage

Sélectionner la géométrie et choisir la méthode Tétraèdres. (Figure 13)

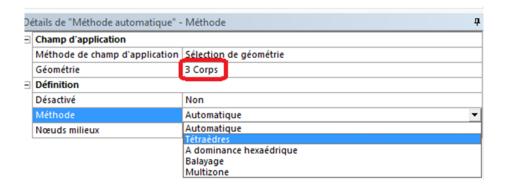


Figure 13 – choix la méthode de maillage

Ensuite nous choisissons la taille des éléments. (Figure 15)

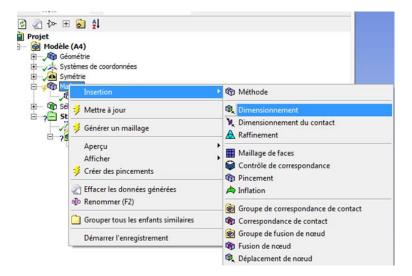


Figure 14 – création le dimensionnement de maillage

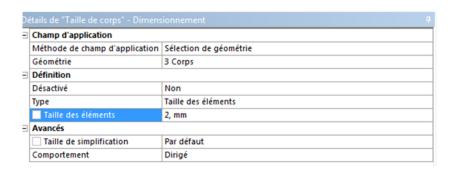


Figure 15 – choix la taille des éléments

## Clique sur Générer un maillage.

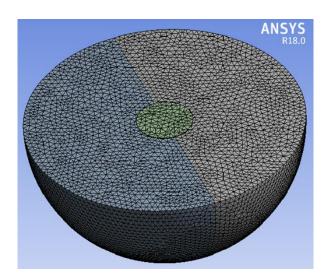


Figure 16 – Maillage du modèle

#### 1.5 création de la fissure

Clique sur **Modèle** ⇒ **Rupture** .(Figure 17)

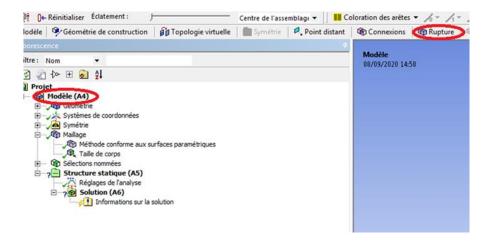


Figure 17 – création de la fissure



Figure 18 – choix type de fissure

Maintenant on va créer la position de la fissure.

Clique droit sur **systèmes de coordonnées** ⇒ **Insertion** ⇒ **système de coordonnées**. (Figure 19)

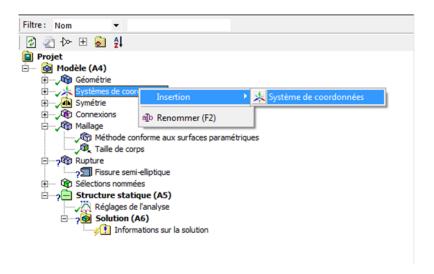


Figure 19 – créer le plan de fissure

## Les détails de système coordonnées

- L'origine est définie par coordonnées globales.
- Coordonnée Z de l'origine est la distance entre la fissure et le disque (h).
- Pour l'Axe principale ont défini par **Axe Y global** et pour **Axe** ne choisissez pas directement Z nous choisissons Y après Z. (Figure 20)



Figure 20 – Les détails de système coordonnées

Même étapes pour créer système coordonnées 2 de la deuxième fissure mais à la fin cliquez sur  $\vec{x}$  pour inversé le plan. (Figure 21)

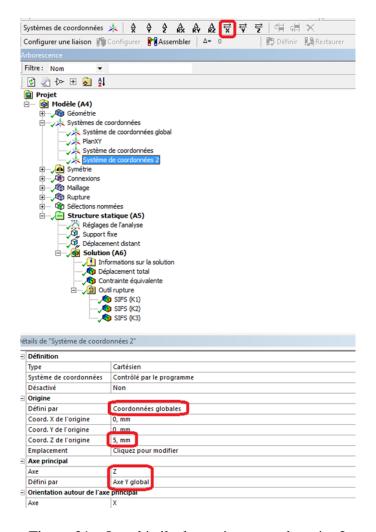
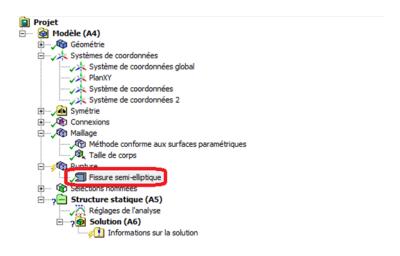


Figure 21 – Les détails de système coordonnées 2

## Les détails de fissure semi elliptique

- Géométrie  $\Rightarrow$  1 Corps.
- Système coordonnées ⇒ Système coordonnée.
- Demi grand axe = Demi petit axe.
- Choisir le rayon maximal du maillage radial. (Figure 22)



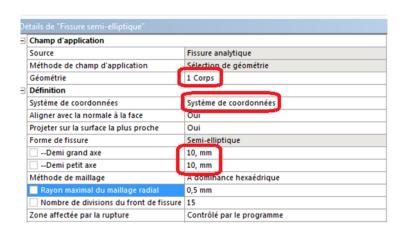
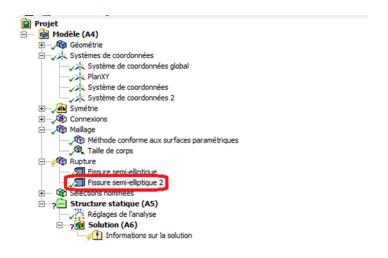


Figure 22 – Les détails de fissure semi elliptique

Ensuite créer une deuxième fissure même étapes de premier fissure. (Figure 23)



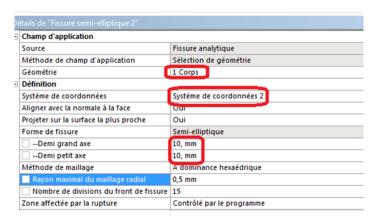


Figure 23 – Les détails de fissure semi elliptique 2

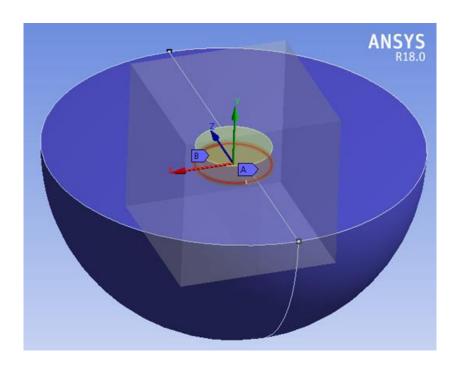


Figure 24 – Modèle de la fissure

## 1.6 Raffinnement de maillage aux bord de la fissure

Clique droit sur Maillage  $\Rightarrow$  Insertion  $\Rightarrow$  Dimensionnement. (Figure 25)

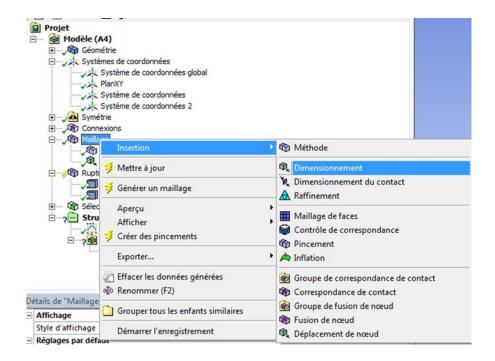


Figure 25 – création le dimensionnement de maillage

#### Détails de dimensionnoment

- Sélectionné demi espace ⇒ Appliquer dans la géométrie.
- Choix le type ⇒ sphére d'influence.
- Choix le centre de la sphére ⇒ Système coordonnées.
- Choix le Rayon de la sphére et taille des élément. (Figure 26)

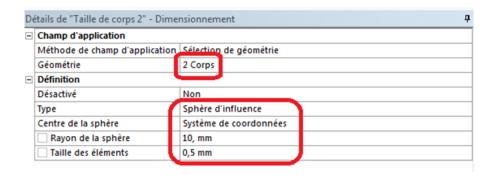


Figure 26 – Détails de dimensionnement

## • Générer le maillage

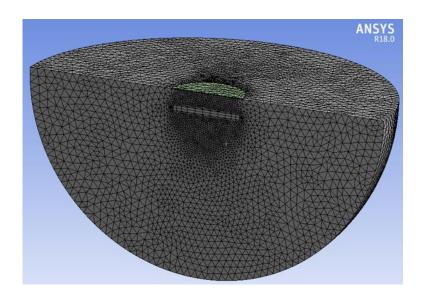


Figure 27 – Maillage raffiné

## 1.7 Établir les paramètres d'analyse

## > Sélection de l'encastrement

On doit fixer la surface extérieure du demi espace, pour faire cela, on fait un clique droit sur Réglage de l'analyse  $\Rightarrow$  Insertion  $\Rightarrow$  Support fixe, sélectionner les faces , puis Appliquer dans le groupe Géométrie.

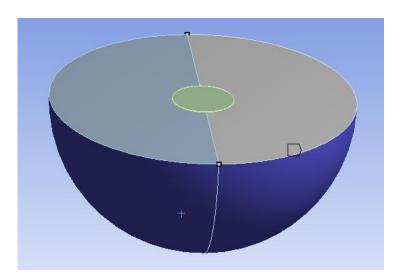


Figure 28 – Définir le support fixe

## Insérai la rotation du disque

clique droit sur **Réglage de l'analyse** ⇒ **Insertion** ⇒ **Déplacement distant**. (Figure 29)

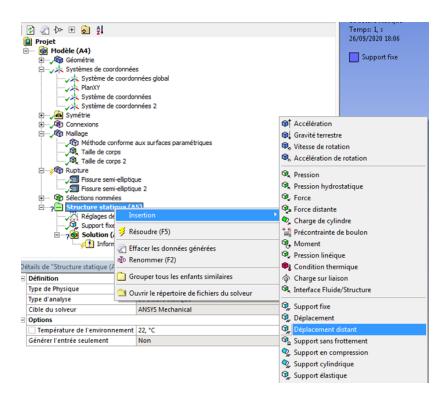


Figure 29 – insertion la rotation du disque

- Sélectionné les trois faces du disque puis Appliquer dans le groupe Géométrie.
- Choix du système de coordonnées global.
- Donner la valeur de l'angle de rotation. (Figure 30)

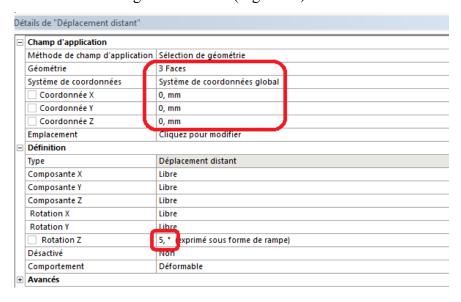


Figure 30 – Détails de déplacement distant

## 1.8 Résolution

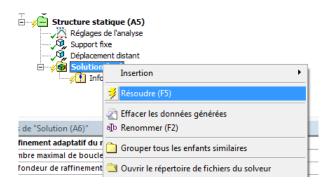


Figure 31 – Résolution

## Références bibliographiques

- [1]. **Menshykov, O.V., Menshykov, V.A. and Guz, I.**A.:The contact problem for an open penny-shaped crack under normally incident tension-compression wave.Eng. Fract. Mech. 75(5), 1114-1126 (2008).
- [2]. **Selvadurai, A.P.S.:** Asymmetric displacements of a rigid disc inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium of infinite extent. Int. J. Sci. 18, 979-686 (1980).
- [3]. **Selvadurai**, **A.P.S.**: Rotary oscillations of a rigid disc inclusion embedded in an isotropic elastic infinite space. Int. J. Solids. Struct.17, 493-498 (1981).
- [4]. **Reissner E., Sagoci H.F.:** Forced torsion oscillation of an half-space I, Int. J. Appl. Phys., 15, (1944), 652–654.
- [5]. **Sneddon I.N.:** Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci, Int. J. Appl. Phys., 18, (1947), 130–132.
- [6]. **Collins W.D.:** The forced torsional oscillations of an elastic halfspace and an elastic stratum, Pro. London. Math. Society, 12, (1962), 226–244.
- [7]. **Gladwell G.M.L.:** The forced torsional vibration of an elastic stratum, Int. J. Eng. Sci., 7, (1969), 1011–1024.
- [8]. Pak R.Y.S., Saphores J.D.M.: Torsion of a rigid disc in a half-space, Int. J. Engng Sci., 29, (1991), 1–12.
- [9]. **Bacci A., Bennati, S.:** An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer, Mech. Struct. Mach., 24, (1996), 21–38.
- [10]. **Singh B.M., Danyluk H.T., Vrbik J., Rokne J., Dhaliwal R.S.:** The Reissner-Sagoci Problem for a Non-homogeneous Half-space with a Surface Constraint, Meccanica, 38, (2003), 453–465.
- [11]. **Guo-cai W., Long-zhu C.J.:** Torsional oscillations of a rigid disc bonded to multilayered poroelastic medium, Int. Zheijang. Univ.Sci., 6(3), (2005), 213–221.
- [12]. Yu H.Y.: Forced torsional oscillations of multilayered solids, Int. J. Eng. Sci., 46, (2008), 250–259.
- [13]. **Pal P.C., Mandal D.**, Sen B.: Torsional Oscillations of a Rigid Disc Embedded in a Transversely Isotropic Elastic Half-Space, Adv. Theor. Appl. Mech., 4, (2011), 177–188.

- [14]. **Ahmadi S.F.; Eskandari M.:** Rocking rotation of a rigid disk embedded in a transversely isotropic half-space, Civil Eng. Infra. J., 47, (2014), 125–138.
- [15]. **Sih G.C., Chen E.P.:** Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area, J. Franklin Inst., 293, (1972), 251–261.
- [16]. **Low R. D.:** On the torsion of elastic half space with embedded penny-shaped flaws, J. Appl. Mech., 39, (1972), 786–790.
- [17]. **Dhawan G. K.:** On the torsion of elastic half-space with penny-shaped crack, Defense. Sci. J., 24, (1974), 15–22.
- [18]. **Basu S.; Mandal S.C.:** Impact of Torsional Load on a Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Sandwiched Between Two Elastic Half-Space, Int. J. Appl. Comput. Math, 2, (2016), 533–543.
- [19]. **Madani, F., Kebli, B.:** Axisymmetric Torsion of an Internally Cracked Elastic Medium by Two Embedded Rigid Discs, Mechanics and Mechanical Engineering, 21, (2017), 363–377.
- [20]. I. Mandel. Cours de mécanique des milieux continus. Jacques Gabay, 1994.
- [21]. **J.C.** Charmet. Mécanique de solide et des matériaux. Dunod, 2004.
- [22]. S. Timoshenko et J. Goodier. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970.
- [23]. **B. Barthélémy**. *Notions pratique de mécanique de la rupture*. Eyrolles, 1980.
- [24]. **Dean G. Duffy**. *Mixed boundary value problems*. Chapman Hall/CRC, 2008.
- [25]. **F. Bowman**. *Introduction to Bessel function*. Doverpublication Inc, 1985.
- [26]. L.T. Rachdi et A. Rouz. Fourier Hankel Transform and the Riemannian Spaces in the Half Space. Int. J. Math. Analysis Sci. Vol.22, 2008.
- [27]. **P Viot**. *Méthodes d'analyse numérique*. Dunod, 2003.
- [28]. **Debnath, L., Bhatta**, D.:, Integral transforms and their applications, Chapman Hall, CRC, (2007).
- [29]. **Kythe, P. K.; Puri**, P.: Computational methods for linear integral equations. Birkhäuser, Boston (2002)

[30]. **Atkinson, K**.: The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge, University Press. New York (1997)

[31]. Help ANSYS version 17.1