

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab –BLIDA 1-

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales



Mémoire de fin d'études



Présenté par :

BOUKHARROUBA Khaled

**Pour l'obtention du Diplôme de master en
Aéronautique**

SPECIALITE : Structures Aéronautiques

Thème

Prise en compte du couplage Température/Humidité dans l'analyse des contraintes hygrothermiques dans les stratifiés composites à matrice polymère

Encadreur :

Mr. BOUKERT Billel.

Co-encadreur:

Mr. KHODJET KESBA Mohamed.

Septembre 2020

Remerciement

Je tiens à exprimer en tout premier lieu ma gratitude et mes sincères remerciements, à mon encadreur Mr. **BOUKERT Billel** et à mon Co-encadreur Mr. **KHODJET KESBA Mohamed**. Merci de m'avoir encadrée, soutenue et si bien orientée tout au long de ce modeste travail. Merci pour m'avoir guidée, éclairée et surtout d'avoir veillé à l'aboutissement de mon projet.

Je dédie mon profond respect et mes sincères gratitudees à mes collègues qui nous ont aidés à créer nos ressources. Merci de m'avoir donnés de votre temps. Sans vous mon projet n'aurait pu aboutir.

Je remercie les membres du jury pour leurs attentions et intérêts portés envers mon travail. Merci de m'avoir honoré de votre présence.

Enfin, je remercie l'ensemble des enseignants de l'école et toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce projet.

KHALED

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail ;

À mon sublime et très chère maman et mon père qui n'ont jamais cessé de
m'encourager et me soutenir,

A ma chère femme,

À mes sœurs et mes frères,

À mon Dragon Abderrahmane et ma petite princesse Maria,

À mes amis,

À tous les membres de ma famille,

À tous ceux qui me sont chers.

ملخص:

الغرض من هذا العمل هو دراسة سلوك المواد المركبة الصفائحية مع مصفوفة البوليمر باستخدام نظرية التصفيح التقليدية؛ مع الأخذ بعين الاعتبار الظروف البيئية التي تعمل فيها الصفيحة. الدراسة تعتبر توزيع تركيز الماء الممتص من طرف الصفيحة المركبة ممثل بقانون "فيك". تأثير درجة الحرارة على عملية الامتصاص مدروسة كذلك.

تم تطوير برنامج كمبيوتر لمحاكاة سلوك الشرائح المركبة مع مراعاة المعايير البيئية.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة ، الحرارة ، الرطوبة ، الإسترطاب.

Abstract:

The work aims to study the behavior of Thin Matrix composite laminates using the classical theory of laminates with the consideration of environmental parameters in which work stratifies it, the study considers a transient distribution of the concentration of water absorbed by the composite this last is given by Fick's equation, the influence of temperature on the absorption process is also examined.

Students will develop a computer program to simulate the problem explain in the preceding paragraph.

Keywords: composite materials, temperature, humidity, hygrothermic.

Résumé :

Le travail vise l'étude du comportement des stratifiés composite Mince à matrice polymère en utilisant la théorie classique des stratifiés avec la prise en compte des paramètres environnementales dans les quels travail le stratifié, l'étude considère une distribution transitoire de la concentration d'eau absorbée par le composite cette dernières est donnée par l'équation de Fick, l'influence de la température sur le processus d'absorption est aussi étudié.

Un programme informatique a été développé pour simuler le problème étudié.

Mots clé : matériaux composites, température, humidité, hygrothermique.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
TABLE DES MATIÈRES.....	i
LISTE DES FIGURES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	vi
LISTE DE SYMBOLES ET ABREVIATIONS.....	vii
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES.....	3
I.1. Introduction.....	3
I.2. Définition d'un matériau composite.....	3
I.3. Classifications des matériaux composites.....	5
I.4. Constituants d'un matériau composite.....	6
I.4.1. Le renfort.....	6
I.4.2. Matrice.....	8
I.5. Structures des matériaux composites.....	9
I.5.1. Monocouches.....	9
I.5.2. Stratifiés.....	9
I.5.3. Sandwichs.....	10
I.6. Technologie de la mise en œuvre.....	11
I.7. Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	12
I.8. Domaines d'utilisation des matériaux composites.....	13
I.9. Composites dans l'industrie aéronautique :.....	13
I.10. Effet de la température et d'humidité sur les composites :.....	16
I.10.1. Vieillissement hygrothermique des composites à matrice polymère :.....	16
I.10.1.1. Vieillissement <i>physique</i> :.....	16
I.10.1.2. Vieillissements hygroscopiques <i>type dégradations irréversibles</i>	18
I.10.1.3. Dégradations <i>mécaniques</i> :.....	18
I.11. Conclusion.....	18
CHAPITRE II : THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES.....	42
II.1. Introduction :.....	42
II.2. Architecture :.....	42
II.3. Notations et objectif :.....	43
II.4. Champ des déplacements :.....	43

II.4.1. Expressions générales :	43
II.4.2. Déformation d'une normale :	44
II.5. Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :	46
II.5.1. Expression du champ des déformations :	48
II.5.2. Champ des contraintes :	51
II.5.2.1. Forme du champ des contraintes :	51
II.5.2.2. <i>Expression des contraintes</i> :	52
II.5.3. Expression des résultantes et moments :	53
II.5.3.1. Résultantes en membrane :	53
II.5.3.2. <i>Moments de flexion et de torsion</i> :	55
II.6. Equation du comportement mécanique d'un stratifié :	56
II.6.1. Equation constitutive:	56
II.6.2. Matrice de rigidité:	57
II.6.3. Détermination des déformations et des contraintes:	58
II.6.4. Déformations en membrane et courbures :	58
II.6.5. Champ des déformations :	59
II.6.6. Champ des contraintes:	60
II.7. Prise en compte de la température et l'humidité dans la modélisation des stratifiés composite :	60
II.7.1. Equations du comportement des stratifiés tenant compte des phénomènes de dilatation :	60
II.7.1.1. Coefficient d'expansion thermique et hygroscopique pour les unidirectionnels :	61
II.7.1.2. Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels	61
II.7.1.3. Relations hygrothermiques contrainte et déformations	62
II.7.2. Contraintes résiduelles :	64
II.7.3. Analyse des stratifiés multidirectionnels :	66
II.8. La diffusion d'eau dans les polymères et composites	67
II.9. Modèles de diffusion d'eau	68
II.9.1. Modèle de Fick	68
CHAPITRE III : RESULTATS ET INTERPRETATION	42
III.1. Introduction :	42
III.2. Qu'est-ce que le logiciel Matlab?	42
III.2.1. Pourquoi le MATLAB ?	42

III.3. Approche numérique :	43
III.3.1. Simulations et interface :	49
III.3.1.1. Influence de la température et humidité sur le phénomène d'absorption	49
III.3.1.2. Calcul des profils de concentration	49
III.3.1.3. Interface :	51
III.3.1.4. Simulation 0 : Influence du type de chargement	44
III.3.1.5. Simulation 1 : Influence de la température opérationnelle	50
III.3.1.6. Simulation 2 : Influence de la température de référence	51
III.3.1.7. Simulation 3 : Influence d'humidité relative	53
III.3.1.8. Simulation 4 : Influence de la concentration de référence	54
III.3.1.9. Simulation 5 : Influence du matériau	55
Conclusion	58
BIBLIOGRAPHIES	59

LISTE DES FIGURES

Figure I.1. Représentation schématique d'un matériau composite [3].	4
Figure I.2. Les constituants d'un composite [4].	4
Figure I.3. Organigramme des différents composites renforcés [4].	5
Figure I.4. Types de renfort.	6
Figure I.5. Types de matrice	8
Figure I.6. Composite monocouche [11].	9
Figure I.7. Composite stratifié [12].	9
Figure I.8. Exemples de stratifiés à base de plis unidirectionnels. Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence [13].	10
Figure I.9. Composite sandwichs [14].	11
Figure I.10. Organigramme de l'opération de moulage [8].	11
Figure I.11. Exemple d'application composite dans l'aéronautique, l'automobile, l'aérospatial et le bâtiment [15].	13
Figure I.12. Boeing 787 Dreamliner matériaux de construction.	15
Figure I.13. A350 matériaux de construction.	15
Figure II.1. Élément de plaque.	43
Figure II.2. Élément de stratifié.	44
Figure II.3. Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement. [18]	46
Figure II.4. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.	48
Figure II.5. Représentation schématique des résultantes en membrane (rouge) et moments (bleu).	53
Figure II.6. Représentation des 5 catégories de cinétiques d'eau décrites par Weitsman [10].	68
Figure III.1. Courbes de prise en eau pour différents environnements pour un modèle de Fick 1D.	49
Figure III.2. Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement.	50

Figure III.3. Figure III.1. La couverture de l'interface.	51
Figure III.4. Figure III.2. L'interface principale.	51
Figure III.5. Figure III.3.les propriétés des matériaux	52
Figure III.6. Figure III.4. Les propriétés hygrothermiques.....	52
Figure III.7. Figure III.5. Les propriétés mécaniques.	52
Figure III.8. Jauge de nombre des couche	52
Figure III.9. Tableau des simulations.....	42
Figure III.10. Panneau de couche.	42
Figure III.11. Le panneau de résultats	43
Figure III.12. Le panneau des graphes.....	44
Figure III.13. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts mécaniques extérieurs.....	45
Figure III.14. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts thermomécaniques.	46
Figure III.15. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hygromécaniques.	47
Figure III.16. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hygrothermiques	48
Figure III.17. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hygro- thermomécaniques.	49
Figure III.18. Les contraintes dans LT et XY, [$T=20^{\circ}\text{C}$, $T=40^{\circ}\text{C}$ et $T=60^{\circ}\text{C}$] (- $45^{\circ}/30^{\circ}/30^{\circ}/-45^{\circ}$).	51
Figure III.19. Les contraintes dans LT et XY, [$T_0=180^{\circ}\text{C}$, $T_0=150^{\circ}\text{C}$ et $T_0=120^{\circ}\text{C}$] (- $45^{\circ}/30^{\circ}/30^{\circ}/-45^{\circ}$).	52
Figure III.20. Les contraintes dans LT et XY, [$\text{HR}=20\%$, $\text{HR}=40\%$, et $\text{HR}=80\%$,] (- $45^{\circ}/30^{\circ}/30^{\circ}/-45^{\circ}$).	53
Figure III.21. Les contraintes dans LT et XY, [$C_0=0$, $C_0=0.0075$ et $C_0=0.0127$] (- $45^{\circ}/30^{\circ}/30^{\circ}/-45^{\circ}$).	55
Figure III.22. Les contraintes dans LT et XY, [T300/5208 et AS/3501-5 à $\text{HR}=20\%$ et $\text{HR}=80\%$].....	56

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1. Caractéristiques mécaniques des verres types E, A, R, S et D mesurées sur filament vierge [7].	7
Tableau III.1. Caractéristiques mécaniques de T300/5208. [09].....	50
Tableau III.3. Propriétés thermiques. [09].....	45
Tableau III.4. Propriétés hygroscopiques. [9].....	46
Tableau III.5. Propriétés hygrothermiques. [9].....	47
Tableau III.6. Les données de simulation 1. [09]	50
Tableau III.7. Les données de simulation 2.....	51
Tableau III.8. Les données de simulation 3.....	53
Tableau III.9. Les données de simulation 4.....	54
Tableau III.10. Caractéristiques mécaniques de AS/3501-5. [20].....	55

LISTE DE SYMBOLES ET ABREVIATIONS

1. Liste des symboles

A.	Paramètres physiques
E	: Module d'élasticité (Pa).
σ	: Contrainte (Pa).
ε	: Déformation (%).
e_c	: Epaisseur du cœur (m).
e_p	: Epaisseur du peaux (m).
θ	: Angle d'orientation entre les couches.
T	: Température (°C).
Tg	: la température de transition vitreuse
C _{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité [C] ;
[C]	Matrice de rigidité ;
[S]	Matrice de souplesse ;
ET	Module de Young transversale ;
EL	Module de Young longitudinale ;
e	L'épaisseur de stratifié ;
e_k	L'épaisseur de la couche ;
G _{ij}	Module de cisaillement ;
ν_{ij}	Coefficient de poisson ;
ε_{ij}	Tenseur de déformation ;
σ_{ij}	Tenseur de contrainte ;
Θ	L'orientation de L'angle;
Q _{ij}	Les coefficients de rigidité réduite ;
M _x , M _y	Moment de flexion;
M _{xy}	Moment de torsion;

N_x, N_y, N_{xy}	Résultantes en membrane par unité de longueur ; T Température ;
t	Temps ;
u, v, w	Déplacements suivant les axes X, Y et Z ;
A_{ij}	Matrice des rigidités en membrane ;
B_{ij}	Terme de couplage en membrane/flexion-torsion ;
D_{ij}	Matrice des rigidités en flexion ;
N^{ht}	Résultantes des forces hygrothermiques par unité de longueur ;
M^{ht}	Résultantes des moments hygrothermiques ;
α	Coefficient de dilatation thermique ;
β	Coefficient d'expansion ;
ΔT	Gradient de température ;
[]	Matrice ;
{ }	Vecteur;

2. Unités

N : Newton.

Pa : Pascal.

m : Mètre.

Kg : Kilogramme.

°C : Degré Celsius.

min : Minute.

3. Liste des abréviations

CMO : Composite à Matrice Organique.

CMC : Composite à Matrice Céramique.

CMM : Composite à Matrice Métallique.

UV : Ultraviolet.

TD : Thermodurcissable.

TP : Thermoplastique.

UD : Unidirectionnelle.

LISTE DE SYMBOLES ET ABREVIATIONS

ASTM: American Society for Testing and Materials.

FRP : La fibre de renforcement en plastic (Fibre-reinforced plastic)

PVD : Physical vapor deposition

CVD : Chemical vapor deposition

PECVD :Plasma-enhanced chemical vapor deposition.

INTRODUCTION GENERALE

- Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. Les matériaux composites se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. Ainsi, le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place les outils nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux composites et à l'analyse des structures stratifiées.
- Les performances de ces matériaux ont été très concernées, l'intérêt porta spécialement sur leur durabilité à long terme, lorsque les structures sont soumises à des températures et humidités cycliques, à des radiations ultraviolettes, à des immersions salines et alcalines, et aux chargements statiques et dynamiques, la légèreté et la rigidité des matériaux composites sont les principaux avantages qu'offrent les composites au monde de l'aéronautique.
- Les structures aérospatiales en composites, changent en température et en humidité durant leur usage structural. Le changement de température engendre des effets : le matériau se dilate lorsqu'il est chauffé et se contracte lorsqu'il est refroidi, la chaleur cause la réduction de la température de transition, d'où une sévère dégradation de la rigidité.
- Lors de leur exposition à des environnements variables en terme de température et d'humidité durant leur usage structural, ces matériaux sont souvent soumis à des états de contraintes complexes, qui peuvent être engendrées par des déformations de nature hygrothermique, dues à l'absorption d'humidité par la matrice polymère, en favorisant une chute considérable de la résistance du matériau.
- Durant leur vie en service, les composites à matrice polymère peuvent être exposés à des environnements humides. Ces matériaux absorbent alors de l'eau par leur matrice polymère, qui est hydrophile. Les performances et la durabilité des structures composites dépendent des champs de teneur en eau. Leur

prédiction par des outils numériques impose donc de caractériser précisément les paramètres de la loi de comportement diffusif de ces matériaux.

- Ce travail a pour objet d'étudier le comportement des stratifiés composites minces à matrice polymère en utilisant la théorie classique des stratifiés, l'étude considère une distribution transitoire de la concentration d'eau absorbée par le composite cette dernière est donnée par l'équation de Fick, le stratifié opère dans des conditions environnementales variable en terme de température et d'humidité. Ces dernières sont tenues en compte dans le calcul de l'état des contraintes et des déformations.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

I.1. Introduction

Depuis l'apparition des premières pièces en résine renforcée de fibres de verre (vers 1940), les composites ne cessent d'évoluer vers des produits qui sont, soit les moins coûteux possible, soit les plus performants, ou bien les deux à la fois en connaissant une croissance régulière de 10% depuis 20 ans. Grâce à leurs caractéristiques techniques et mécaniques, ils peuvent remplacer de nombreuses pièces métalliques, tout en bénéficiant d'une plus grande légèreté. Le matériau « parfait » doit posséder des propriétés mécaniques élevées, être durable et préserver l'environnement lors de son cycle de vie. Le facteur économique reste le principal moteur, car pour être viable, le composite doit être compétitif.

Ces matériaux sont impliqués dans de nombreux secteurs : aéronautique, automobiles, bâtiment... Toutefois face à des contraintes économiques et environnementales toujours plus exigeantes. [1]

Ce chapitre constitue l'étape préliminaire nécessaire à la compréhension du comportement des composites. Il commencera par une description détaillée des propriétés mécaniques des éléments constituant un matériau composite, ainsi que leurs classifications en fonction de forme du renfort et de la nature de la matrice ainsi que l'utilisation des matériaux composites en aéronautique.

I.2. Définition d'un matériau composite

Tout matériau hétérogène pourrait être qualifié de matériau composite [1]. Néanmoins, on donne généralement une définition plus restrictive. Un composite est un matériau constitué de deux phases (ou plus) non miscibles ayant des propriétés et des rôles différents. L'une, continue, est appelée matrice et l'autre, discontinue, appelée renfort (Figure 1-1). Les composants doivent être physiquement identifiés : il doit exister une interface distincte entre eux. Ce mélange possède des propriétés nouvelles et on recherche en les associant un ensemble de performances supérieures aux composants pris séparément. La matrice assure souvent le transfert des efforts vers le renfort. Les matériaux de renfort confèrent aux

composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté... Ils permettent également de modifier certaines propriétés physiques comme le comportement thermique, la résistance à l'abrasion ou les propriétés électriques.

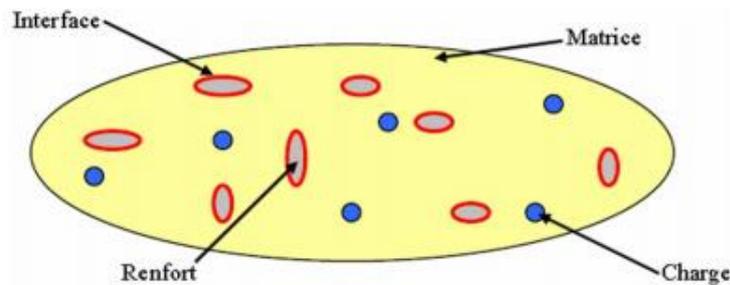


Figure I.1. Représentation schématique d'un matériau composite [3].

Les propriétés des matériaux composites dépendent de trois facteurs [2]:

- De la nature et des propriétés des matériaux constituants,
- De la géométrie et de la distribution du renfort,
- Des interactions entre constituants et de la nature de l'interface matrice-renfort.

Il faut prendre conscience qu'il est indispensable pour réaliser un matériau composite d'assembler ces différents constituants. Très souvent on entend parler, par exemple, de carrosserie de voiture en fibre de verre ou de raquette de tennis en fibres de carbone. Or les fibres seules ne peuvent en rien assurer la structure d'un objet si elles ne sont pas unies entre elles par un liant qui est la matrice. Aussi, en général, on désigne un composite par le nom de son renfort et celui de sa matrice : verre - époxy, ou encore carbone - polyester.

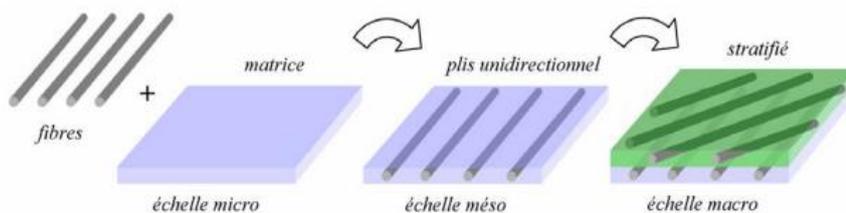


Figure I.2. Les constituants d'un composite [4].

I.3. Classifications des matériaux composites

Les matériaux composites sont classés généralement en fonction de la forme du renfort soit un composite à renforts de particules, de paillettes, de fibres, ou stratifié. Ce dernier est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Il existe quatre (04) différents types de monocouches qui sont caractérisées par la forme du renfort: à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées et à fibres courtes [3].

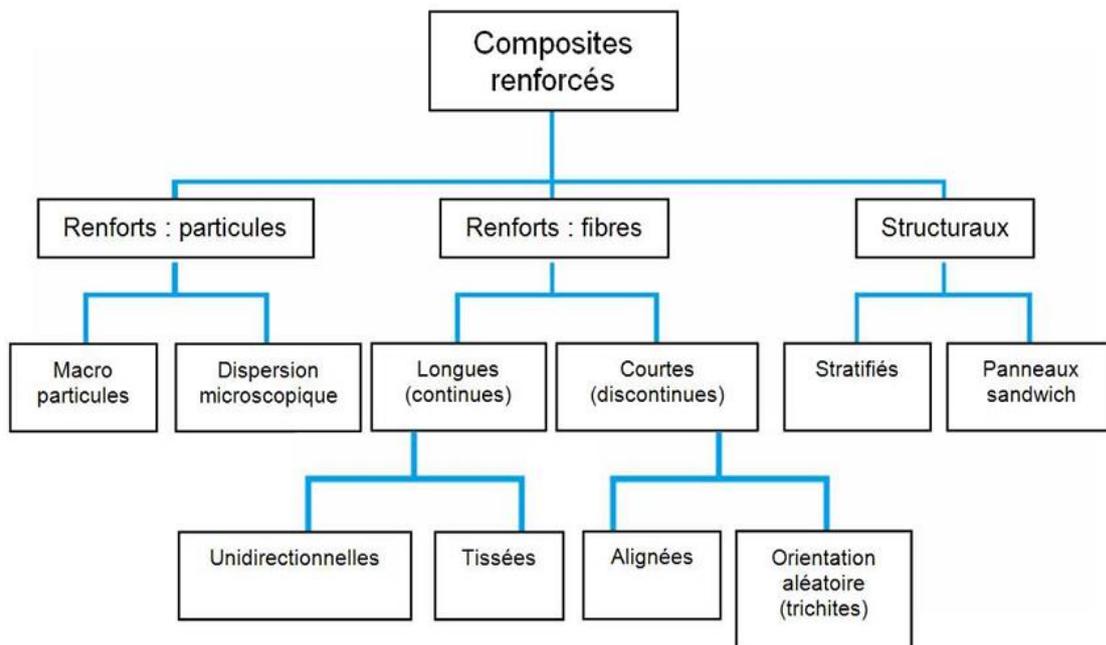


Figure I.3. Organigramme des différents composites renforcés [4].

En outre, ils sont classés en fonction de la nature de la matrice

- Les composites à **matrices organiques (CMO)** qui constituent, de loin, les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle ;
- Les composites à **matrices céramiques (CMC)** réservés aux applications de très haute technicité et travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire, ainsi que le freinage (freins céramiques) ;
- Les composites à **matrices métalliques (CMM)**.

I.4. Constituants d'un matériau composite

La réalisation d'un matériau composite nécessite donc l'association d'au moins deux composants : le renfort et la matrice.

I.4.1. Le renfort

Le renfort se présente sous forme de fibres continues (longues) ou fibres discontinues (courtes) dont leurs rôles sont de reprendre les efforts appliqués et d'assurer la tenue mécanique du matériau composite. Le renfort est souvent de nature filament : fibres organiques ou fibre inorganiques. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.4.

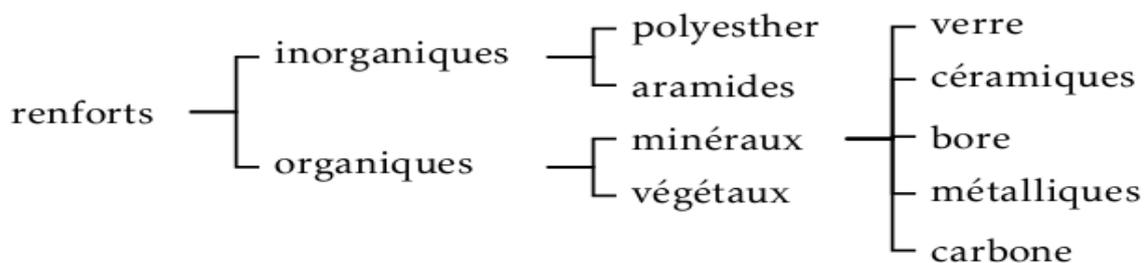


Figure I.4. Types de renfort.

Les **fibres de verre** sont visées principalement dans cette étude.

- **Fibres de verre :**

Les fibres de verre sont très répandues dans des applications basses performances ainsi que des applications hautes performances telles que les réservoirs de propulseurs de fusée [5]. Elles sont caractérisées par une résistance supérieure à celles des meilleurs aciers connus. Leurs avantages incluent un prix compétitif du fait qu'elles sont élaborées à partir de silice, alumine, chaux, magnésie; produits peu coûteux. Les fibres de verre sont obtenues par une technique d'élaboration se déclinant en quatre (04) étapes principales. Pendant la première étape, appelée **l'affinage**, la composition est chauffée jusqu'à 1500.C pour que les bulles et impuretés disparaissent. Durant la deuxième étape, appelée **l'étirage**, il s'agit d'étirer à grande vitesse le verre en fusion qui se transforme alors en filament. Ce fil de verre se bobine ensuite autour d'une broche. La troisième étape est **l'ensimage**. Elle consiste à ajouter un revêtement protecteur pour permettre l'agglomération des filaments et faciliter leur intégration dans les

polymères. Au cours de cette étape, les fils sont coupés ou bobinés selon le besoin. Enfin durant la dernière étape, appelée **le séchage**, les fils sont maintenus à des températures comprises entre 600 et 700 C° [6].

Suivant leurs compositions, différents types de verre filable peuvent être obtenus. Dans la pratique, les verres de type E constituent la presque totalité de tonnage de verre textile produit actuellement. Les autres verres, représentant globalement une faible quantité (environ 1%), sont réservés à des applications spécifiques [7]:

- Le verre **D**, à hautes propriétés diélectriques, pour la constriction de matériel électronique de télécommunication, en particulier les radômes ;
- Le verre **C**, résistant aux agents chimiques pour les couches superficielles des structures particulièrement exposées sur le plan chimique ;
- Les verres **R** et **S**, à caractéristique mécanique élevée pour la réalisation de structure à hautes performances mécaniques.

Les caractéristiques mécaniques des différents types de fibres de verre sont reportées dans le Tableau (1.1).

Tableau I.1. Caractéristiques mécaniques des verres types E, A, R, S et D mesurées sur filament vierge [7].

Caractéristiques	Verre E	Verre A	Verre R ou S	Verre D
Masse volumique (Kg/m ³)	2540	2460	2550	2160
Module de Young (GPa)	72	71	86	55
Contrainte à la rupture (MPa)	3500	3100	4500	2500
Allongement à la rupture(%)	4.4	4	5.2	3.2

I.4.2. Matrice

La matrice a pour rôle de réunir les fibres, de les maintenir dans leurs orientations et positions prévues, de leur transférer les sollicitations mécaniques, de répartir les contraintes subies et les protéger de l'environnement extérieur.

La matrice constituant le matériau composite est une résine qui existe en un grand nombre, chacune ayant un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone, des températures de 2 200.C peuvent être atteintes [3].

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la FigureI.5.

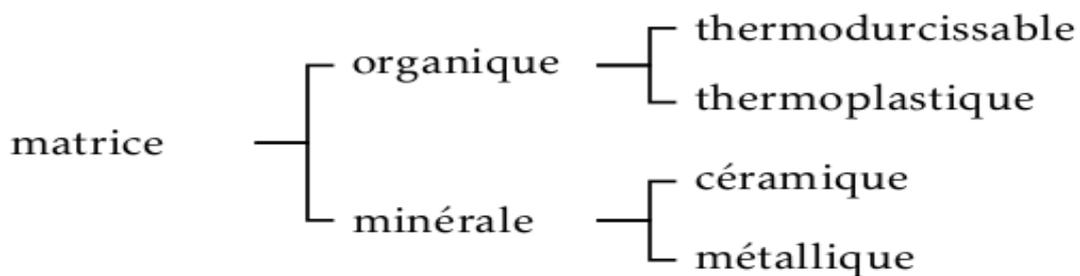


Figure I.5. Types de matrice

Il y a deux familles de résines organiques : les résinés thermoplastiques et les résinés thermodurcissables. Ces deux types de résine possèdent la faculté de pouvoir être moulés ou être mis en forme pour donner soit un produit fini, soit un produit semi-fini dont la forme peut être modifiée.

Les résines thermoplastiques possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées. Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après la polymérisation par rapport à la chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. Ainsi, les résines thermodurcissables possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques.

I.5. Structures des matériaux composites

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- Les monocouches
- Les stratifiées
- Les sandwiches

I.5.1. Monocouches

Représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

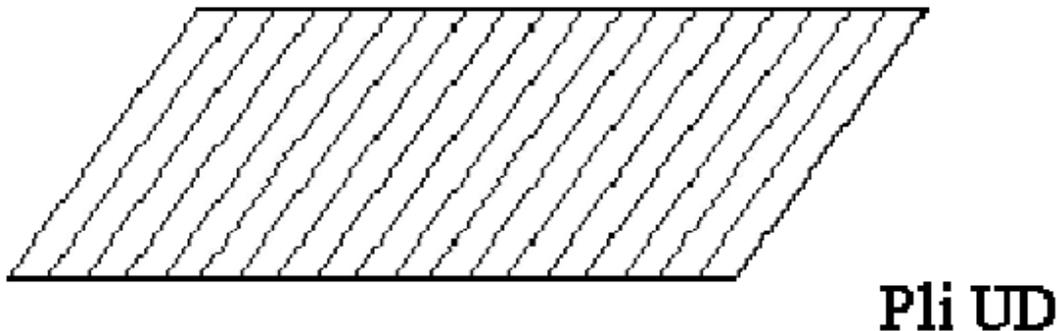


Figure I.6. Composite monocouche [11].

I.5.2. Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques [15].

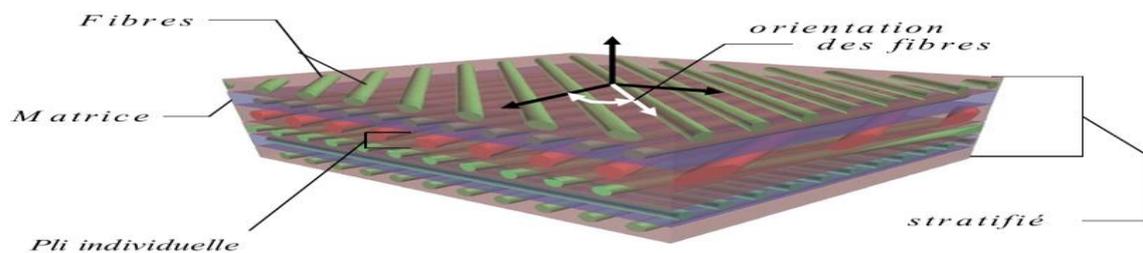


Figure I.7. Composite stratifié [12].

Notation " composite " : Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)_2s$ est un stratifié avec 4 couches dans les directions $0^\circ, -45^\circ, 90^\circ$ et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

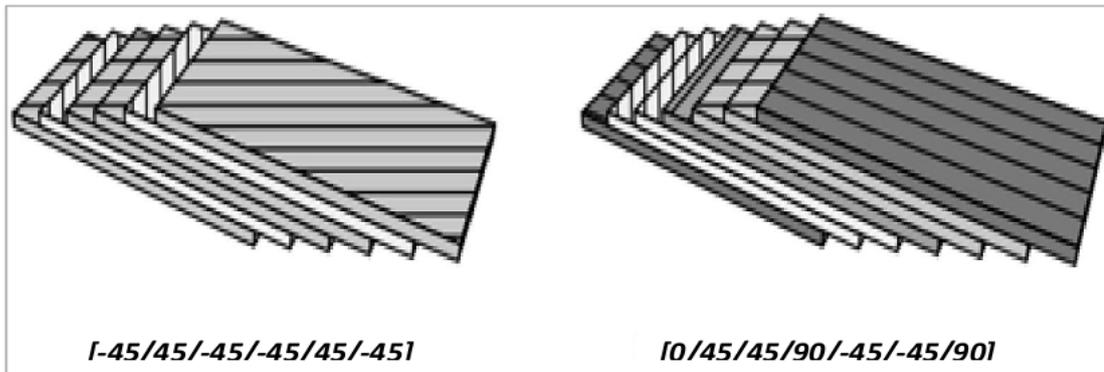


Figure I.8. Exemples de stratifiés à base de plis unidirectionnels. Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence [13].

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Équilibre : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

I.5.3. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

$$10 \leq e_c / e_p \leq 100$$

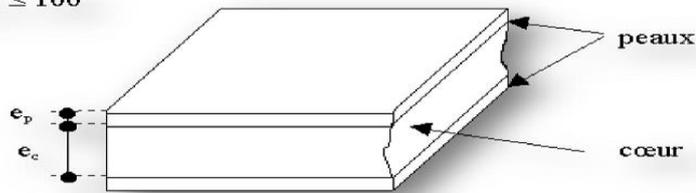


Figure I.9. Composite sandwichs [14].

I.6. Technologie de la mise en œuvre

Trois opérations sont indispensables :

1. Imprégnation du renfort par le système résineux.
2. Mise en forme à la géométrie de la pièce.
3. Durcissement du système :
 - soit par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissables,
 - soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

Il existe différentes techniques, mais la plus utilisée est **par moulage**.

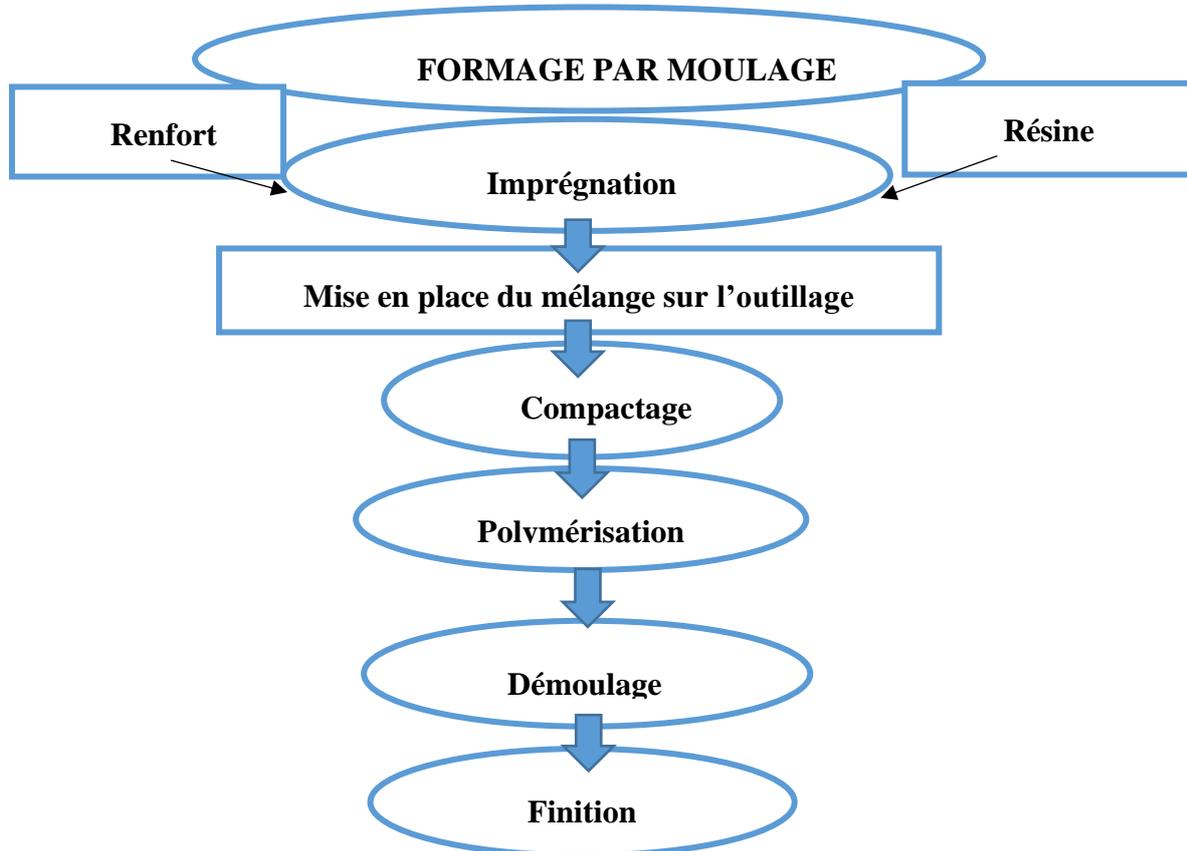


Figure I.10. Organigramme de l'opération de moulage [8].

I.7. Avantages et inconvénients des matériaux composites

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à [8] :

- Leur légèreté.
- Leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue.
- Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants.
- Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit.

Inconvénients qui freinent leur diffusion :

- les coûts des matières premières et des procédés de fabrication.
- la gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

L'industrie des matériaux composites doit donc aujourd'hui relever certains défis tels que :

- la maîtrise des émanations de produits organiques volatiles, par exemple le styrène.
- La maîtrise des procédés de transformations et des performances des matériaux qui sous-entend une très bonne connaissance des constituants mis en place.
- La mise en place de technologies et des filières pour la gestion des déchets en fin de vie qui est la partie la plus difficile à satisfaire en raison du caractère thermostable de la plupart des composites.

De plus, dans ce dernier point, le recyclage est actuellement très limité parce que le broyage ou les autres procédés sont très coûteux et fournissent une matière de faible qualité. Ces quelques inconvénients et défis à relever, ont poussé les chercheurs et les pouvoirs publics à investir et orienter les recherches vers les ressources renouvelables et biodégradables.

I.8. Domaines d'utilisation des matériaux composites

Les matériaux composites de nos jours prennent une place prépondérante dans différents domaines de par leur simplicité d'élaboration, leur légèreté ainsi que leurs caractéristiques mécaniques. Contrairement aux matériaux classiques qui présentent des caractéristiques mécaniques intrinsèques, les matériaux composites peuvent répondre aux exigences des différents types de contraintes à partir d'une élaboration et d'un choix judicieux de matrice et renfort, et ceci, dans différents domaines[8].

Les matériaux composites ont été introduits progressivement dans les automobiles, à la suite des matériaux polymères dont certains sont utilisés comme matrices.

De nos jours, les matériaux composites ont pris une place importante dans divers domaines : aéronautique, transport, bâtiment, loisirs, etc. Du point de vue écologique, les fibres naturelles utilisées comme renforts dans les composites prennent une place croissante et sont de nouveau d'actualité.



Figure I.11. Exemple d'application composite dans l'aéronautique, l'automobile, l'aérospatial et le bâtiment [15].

I.9. Composites dans l'industrie aéronautique :

Les matériaux composites sont largement utilisés dans l'industrie aéronautique et ont permis aux ingénieurs de surmonter les obstacles rencontrés lors de l'utilisation des matériaux classiques.

Le développement de matériaux composites légers et résistants aux températures élevées permettra à la prochaine génération de conceptions d'aéronefs hautes performances et économiques de se matérialiser. L'utilisation de tels matériaux réduira la consommation de carburant, améliorera l'efficacité et réduira les coûts d'exploitation directs des aéronefs. [9]

La fibre de verre est le matériau composite le plus courant. Elle est constituée de fibres de verre incorporées dans une matrice de résine. La fibre de verre a été largement utilisée dans les années **1950** pour les bateaux et les automobiles. La fibre de verre a été utilisée pour la première fois dans le **Boeing 707** dans les avions à réaction dans les années **50**, où elle représentait environ **2%** de la structure. Chaque génération de nouveaux aéronefs construits par Boeing avait un pourcentage accru d'utilisation de matériaux composites; le plus élevé étant une utilisation composite de **50%** dans le **787 Dreamliner**. [9]

❖ **Le 787 Dreamliner**

Le 787 Dreamliner de Boeing est le premier avion commercial dans lequel les principaux éléments structurels sont constitués de matériaux composites plutôt que d'alliages d'aluminium. Il y a un passage de composites archaïques en fibre de verre à des composites de carbone laminés et sandwich au carbone plus avancés dans cet avion. Des problèmes ont été rencontrés au niveau du caisson d'aile du Dreamliner, qui ont été attribués à une rigidité insuffisante des matériaux composites utilisés pour construire la pièce. Cela a entraîné des retards dans les dates de livraison initiales de l'aéronef.

Afin de résoudre ces problèmes, Boeing raidit les caissons d'aile en ajoutant de nouveaux supports aux caissons d'ailes déjà construits, tout en modifiant ceux qui restent à construire. [9]

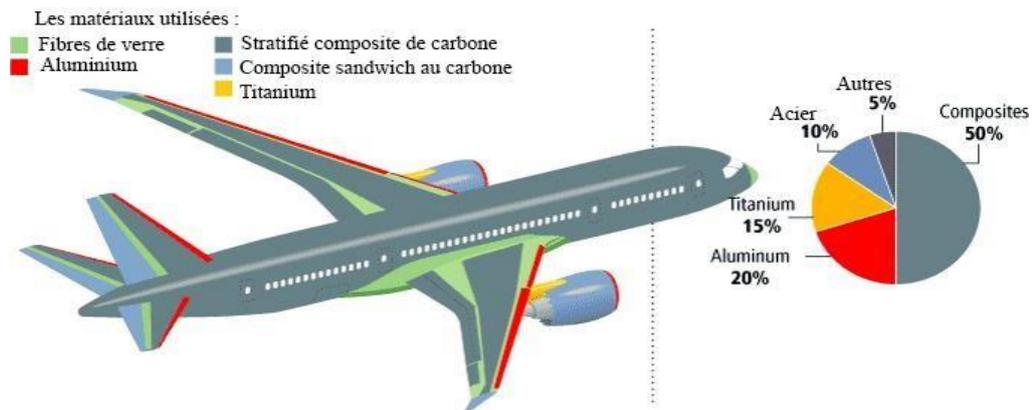


Figure I.12. Boeing 787 Dreamliner matériaux de construction.

❖ *Airbus a350 :*

Plus de 50% de la cellule de l'A350 XWB est composée de matériaux composites. [9]

Plus de 15 sociétés fournissent actuellement des composites au programme A350 XWB, les composites réduisent le besoin de tâches globales de maintenance contre la fatigue et la corrosion tout en améliorant l'efficacité opérationnelle globale du jetliner.

La majeure partie de l'aile de l'A350 XWB est composée de composites légers en carbone, y compris ses capots supérieur et inférieur. Mesurant 32 mètres de long sur six mètres de large, il s'agit de la plus grande pièce aéronautique jamais réalisée en fibre de carbone. [9]

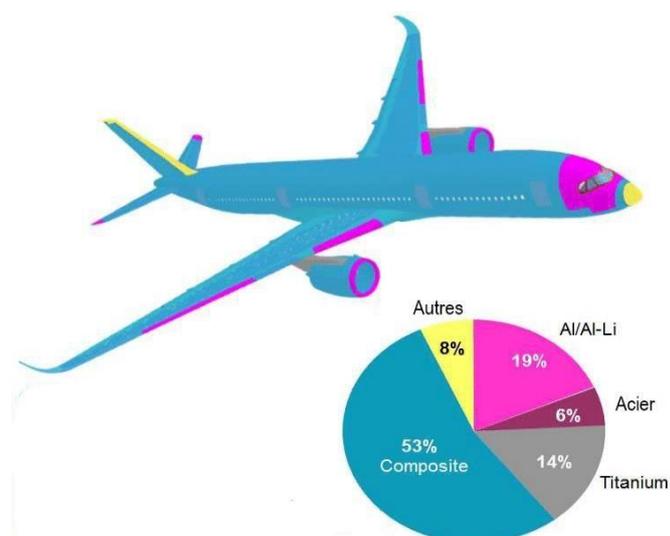


Figure I.13. A350 matériaux de construction.

I.10. Effet de la température et d'humidité sur les composites :

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement auxquelles ils sont soumis. Parmi les facteurs liés à l'environnement, ceux qui introduisent des variations de déformation en l'absence de tout chargement mécanique revêtent un intérêt particulier. Dans le cas des structures en matériaux composites, ces phénomènes sont la conséquence de la variation de température, de l'absorption par la matrice polymère d'agents de gonflement tels que la vapeur d'eau, de la dilatation de gaz absorbés par la matrice, etc.

Ces phénomènes induisent des déformations et contraintes qui peuvent modifier notablement le comportement mécanique des structures en matériaux composites : rigidité, flambement, fréquences de vibration, etc.

I.10.1. Vieillissement hygrothermique des composites à matrice polymère :

Certaines études ont été réalisées dans des conditions environnementales complexes, afin d'étudier le comportement des matériaux composites dans des conditions proches de leur fonctionnement en service, telles que les variations climatiques ou encore les cycles de vol d'un avion, les auteurs montrent que l'endommagement et la fissuration du matériau sont accélérés et accentués par des conditions hygrothermiques cycliques, et ce, même en l'absence de sollicitations mécaniques. [16]

I.10.1.1. Vieillissement *physique* :

❖ *La plastification* :

L'absorption d'eau par les composites à matrice polymère peut conduire à la plastification de la résine. Ce phénomène est expliqué par une augmentation de la mobilité des chaînes macromoléculaires de la résine due à une modification du volume libre et/ou une rupture des liaisons hydrogène –**H**.

La plastification se traduit concrètement par une diminution de la température de transition vitreuse et du seuil de plasticité.

Les molécules d'eau peuvent s'insérer dans le réseau tridimensionnel en brisant les liaisons secondaires, ou liaisons hydrogène, entre les groupes polaires des chaînes macromoléculaires voisines.

Les groupes polaires du polymère vont se lier préférentiellement à une molécule d'eau. La rupture des liaisons entre les chaînes, qui assuraient une bonne partie la rigidité du matériau, va permettre une augmentation de mobilité des chaînes ou des segments de chaînes macromoléculaires. On parle dans ce cas de plastification. Cette mobilité accrue va affecter les propriétés mécaniques et physicochimiques du polymère. [16]

Les propriétés en traction ou cisaillement sont les plus étudiées (*module d'Young et de cisaillement*) pour l'aspect mécanique, ainsi que l'évolution de la température de transition vitreuse T_g . Dans la majorité des cas, une diminution du module de Young et du module de cisaillement est constatée ainsi qu'une baisse de T_g . Le phénomène est réversible.

La plastification s'accompagne aussi de gonflements, qui dans le cas des composites, peuvent être responsables de décohésions fibre/matrice. [16]

❖ **Gonflement :**

Au cours du processus de diffusion d'eau à travers les résines polymères, les molécules d'eau se fixent sur les sites *hydrophiles* des chaînes macromoléculaires et provoquent ainsi, une augmentation du volume appelé gonflement ou dilatation hygroscopique.

Certains auteurs ont supposé que l'augmentation de volume était égale au volume d'eau absorbée. Or, il a été démontré expérimentalement que l'augmentation de volume était moins importante.

Cette différence peut être expliquée par l'existence du volume libre qui se remplit d'eau sans pour autant dilater le polymère. D'autres auteurs ont mesuré expérimentalement le gonflement en fonction de la quantité d'eau absorbée et ont constaté une évolution linéaire de ces deux grandeurs. Ce qui a permis de définir un coefficient de dilatation hygroscopique β qui est le rapport entre l'augmentation relative de longueur et l'augmentation relative de poids. [16]

I.10.1.2. Vieillissements hygroscopiques type dégradations irréversibles

❖ Hydrolyse :

L'hydrolyse est une réaction chimique irréversible due à l'eau et qui se traduit par des scissions des chaînes macromoléculaires entraînant une diminution de la masse moléculaire de la résine polymère.

Au cours de l'absorption, les molécules d'eau peuvent remplacer les liaisons hydrogène déjà existantes par des liaisons hydrogène entre l'eau et le polymère. Le résultat de ces interactions chimiques à long terme est la dégradation de la résine et de l'interface par hydrolyse.

Celle-ci est activée thermiquement, et est susceptible d'être catalysée par divers agents chimiques.

❖ Lessivage :

On parle de phénomène de lessivage du réseau polymère quand il y a perte de masse du polymère après une exposition prolongée dans une atmosphère humide. Cette perte de masse est constatée soit au cours du processus de diffusion de l'eau après la saturation, soit sur un polymère vieilli et séché à nouveau. [16]

I.10.1.3. Dégradations mécaniques :

Après la connaissance des cinétiques d'absorption d'eau et des mécanismes physicochimiques mis en jeu lors du vieillissement, notre travail s'est également intéressé aux conséquences de la diffusion d'eau dans le matériau. Il est en effet primordial de connaître, au cours du vieillissement, l'évolution de Propriétés thermomécaniques, telles que la température de transition vitreuse, les Propriétés élastiques, visqueuses, les Propriétés a rupture. [16]

I.11. Conclusion

L'objectif des producteurs des matériaux composites est de concurrencer et de surpasser les métaux qui, de leur côté, ne cessent d'optimiser leurs propres caractéristiques. La diversité des matériaux composites et leur souplesse, qui permet de fabriquer ou de composer des caractéristiques à la carte, rendent cet objectif légitime. Pour atteindre ces objectifs, ce secteur doit se développer par l'innovation.

À travers le deuxième chapitre, on présente la théorie classique des stratifié et la loi de diffusion.

CHAPITRE II : THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES

II.1. Introduction :

Nous établissons dans ce chapitre, d'une façon progressive, les équations de comportement mécanique d'un stratifié. Nous examinons par la suite, de quelles manières sont modifiées ces équations, dans le cas où l'on tient compte des phénomènes de dilatation et les conséquences induites, sur le comportement mécanique des structures composites considérées. [9]

II.2. Architecture :

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles, dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan (Oxy). L'axe (Oz) correspond à la direction suivant l'épaisseur. [9]

Une plaque composite est constituée d'un empilement de différentes couches. La théorie des plaques considérée est basée sur :

L'hypothèse dite des sections droites (ou planes) : les points matériels, situés sur une normale à la surface moyenne non déformée, restent sur une droite dans la configuration déformée. Les déplacements u et v suivant x et y d'un point quelconque $M(x, y, z)$, varient alors linéairement en fonction de z , et déplacement transversal w suivant z , n'est fonction que de x et y . cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont : **Reissner, Hencky, Bollé, Mindlin**. Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes, mais a ensuite été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches.

1. L'hypothèse d'une déformation transversale, ε_z nulle (pas de variation d'épaisseur).
2. L'hypothèse des contrainte planes : dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes, du tenseur de contraintes.
3. L'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche, dans le cas d'une plaque composite.

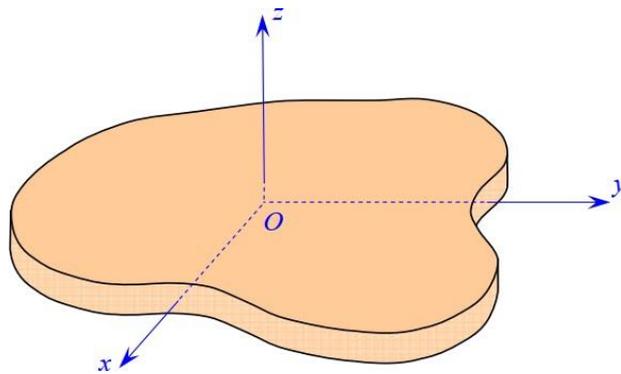


Figure II.1. Élément de plaque.

II.3. Notations et objectif :

Les notations utilisées sont reportées sur la figure II.2. Le stratifié est constitué de n couches, numérotée de face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe (Oz) est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche (k) est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

Le processus d'étude le comportement mécanique d'une structure en matériau composite comporte trois étapes :

- ✓ *L'analyse du comportement micromécanique d'une couche.*
- ✓ La modélisation du comportement mécanique local du stratifié (analyse du comportement "macromécanique" du stratifié).
- ✓ L'analyse de la structure en composite.

Pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions (x, y, z) à un problème à deux dimensions (x, y) de difficulté moindre. La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques, hypothèses que nous développons dans ce chapitre. [19]

II.4. Champ des déplacements :

II.4.1. Expressions générales :

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point \mathbf{M} d'une plaque, de coordonnées (x, y, z) , sous la forme de polynômes en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) . [17]

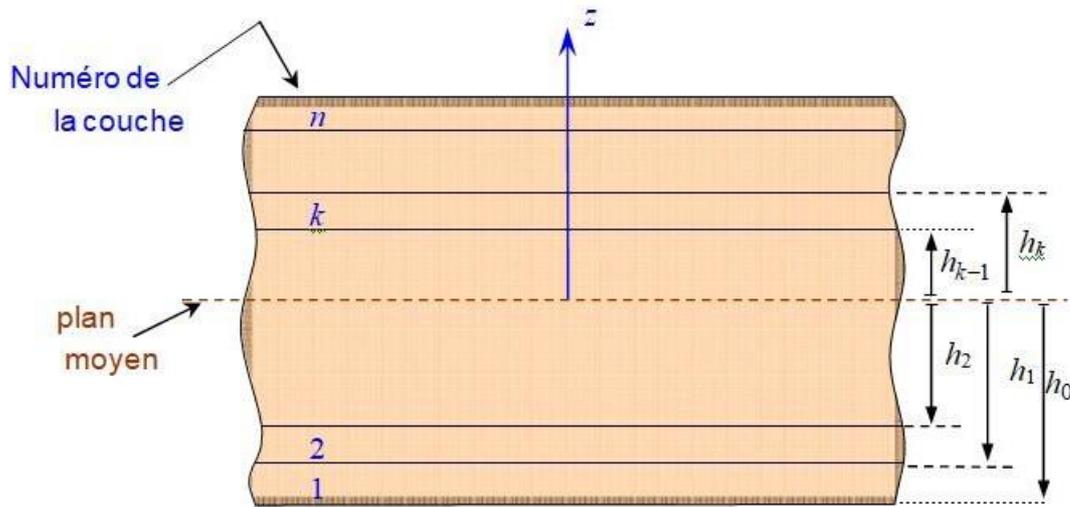


Figure II.2. Élément de stratifié.

Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y). \end{aligned} \quad \text{II. (1)}$$

Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (équation II. 1), en série de la variable z à coefficients en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ du plan (Oxy) .

Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par la suite suivant l'une des notations:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= u_0(x, y) = u(x, y, 0) \\ v_0(x, y, z) &= v_0(x, y) = v(x, y, 0) \\ w_0(x, y, z) &= w_0(x, y) = w(x, y, 0) \end{aligned} \quad \text{II. (2)}$$

II.4.2. Déformation d'une normale :

Nous cherchons la déformée d'une normale AB au plan de la plaque, définie par $(x = a, y = b)$, (Figure II.2).

Tout point M appartenant à la normale AB à pour coordonnées (a, b, z) et son déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
u(a, b, z) &= u(a, b, 0) + z\varphi_x(a, b) + z^2\psi_x(a, b) + z^3\phi_x(a, b), \\
v(a, b, z) &= v(a, b, 0) + z\varphi_y(a, b) + z^2\psi_y(a, b) + z^3\phi_y(a, b), \\
w(a, b, z) &= w(a, b, 0) + z\varphi_z(a, b) + z^2\psi_z(a, b).
\end{aligned}
\tag{II. (3)}$$

L'équation de la déformée de la normale AB s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en z :

$$\begin{aligned}
u(a, b, z) &= A_u + B_u z + C_u z^2 + D_u z^3, \\
v(a, b, z) &= A_v + B_v z + C_v z^2 + D_v z^3, \\
w(a, b, z) &= A_w + B_w z + C_w z^2.
\end{aligned}
\tag{II. (4)}$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale AB subit donc :

- ✓ Une translation sans déformation suivant $A'B'$, composée d'une translation :

[$A_u = u(a, b, 0)$, $A_v = v(a, b, 0)$]. dans le plan (Oxy) et d'une translation [$A_w = w(a, b, 0)$], suivant l'axe Oz ;

- ✓ Puis une déformation suivant $A''B''$, exprimée par les termes en z et dont la forme dépend du degré en z .

Le champ des déplacements prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque.

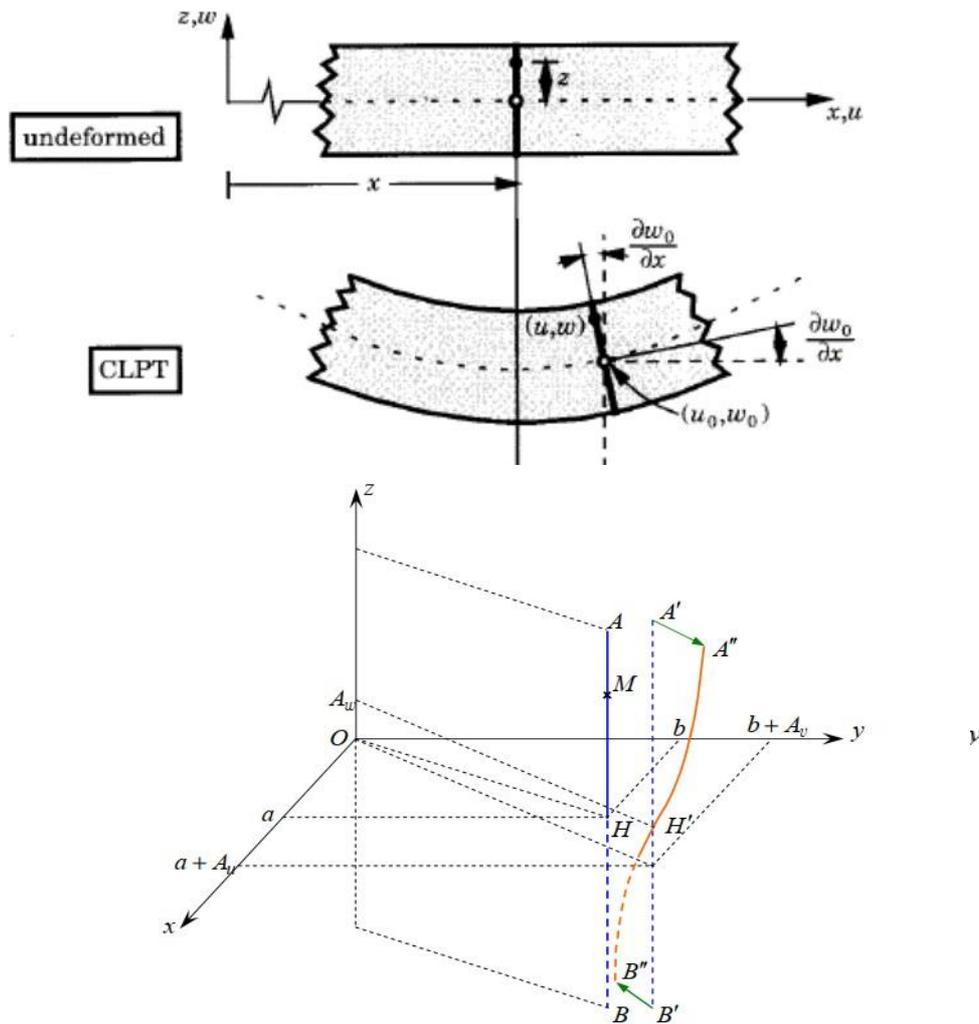


Figure II.3. Déformée d'une normale AB au plan moyen, prenant en compte le gauchissement. [18]

II.5. Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déplacements, appelé schéma de Kirchhoff du premier degré, qui est développé à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ (équation II.5), elle utilise également un schéma du premier degré pour les déformations (équation II.6), et fait ensuite une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles (équation II.7). Soit : [9] [18]

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad \text{II. (5)}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, & \text{II. (6)} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \text{II. (7)}$$

Cette hypothèse (équation II.7) implique d'après (équation II.6) :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} & \text{II. (8)} \\
\varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}
\end{aligned}$$

Le champ des déplacements (équation II.5), s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), & \text{II. (9)} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y).
\end{aligned}$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure II.4.

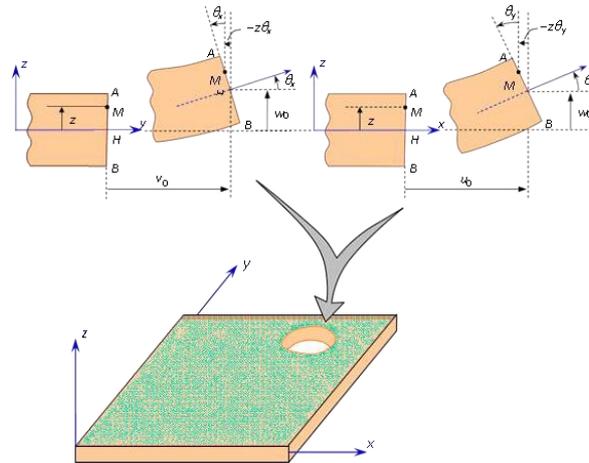


Figure II.4. Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

II.5.1. Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit, d'après (équation II.6) et en tenant compte de (équation II.8) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{xz} &= 0, \\
 \gamma_{yz} &= 0, \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{II. 10}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{II. 11}$$

Et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (12)}$$

Le champ des déformations est la superposition :

➤ *Des déformations en membrane :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (13)}$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan :

➤ *Des déformations en flexion et torsion :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \text{II. (14)}$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point \mathbf{M} . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(\mathbf{M}) = zk(x, y), \quad \text{II. (15)}$$

En posant :

$$k(x, y) = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (16)}$$

La matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point $H(x, y, 0)$ s'expriment (figure II.4) en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point par :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ suivant la direction } \vec{i} \quad \text{II. (17)}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ suivant la direction } \vec{j}$$

Le champ des déplacements (équation II.9) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_y, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad \text{II. (18)}$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M), \quad \text{II. (19)}$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (20)}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), & \varepsilon^0_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), & \gamma^0_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, & \text{II. (21)} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), & k_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), & k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y) \quad \text{II. (22)}$$

Les déformations en membrane $\varepsilon_m(x, y)$ et courbures $k(x, y)$ ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié.

II.5.2. Champ des contraintes :

II.5.2.1. Forme du champ des contraintes :

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \text{II. (23)}$$

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy}, & \text{II. (24)} \\ \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= 0. \\ \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes en M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II. (25)}$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} .

II.5.2.2. Expression des contraintes :

Les relations (II.24) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = Q'_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \text{II. (26)}$$

Avec :

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad \text{II. (27)}$$

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \text{II. (28)}$$

Où :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y) \quad \text{II. (29)}$$

La matrice $\sigma_k(\mathbf{M})$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$.

La matrice de rigidité réduite Q'_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

II.5.3. Expression des résultantes et moments :

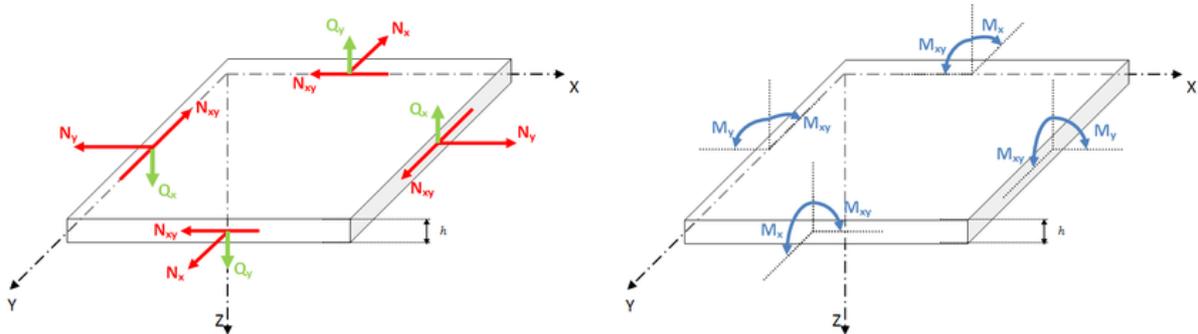


Figure II.5. Représentation schématique des résultantes en membrane (rouge) et moments (bleu).

II.5.3.1. Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, est défini par :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_k(\mathbf{M}) dz \quad \text{II. (30)}$$

Soit dans le stratifié :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{II. (31)}$$

L'expression (II.31) associée à la relation (II.28) ou (II.29), conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadres de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons:

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y) \right] dz. \quad \text{II. (32)}$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right],$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y),$$

Soit en définitive :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y), \quad \text{II. (33)}$$

Sachant que :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad \text{II. (34)}$$

$$A = [A_{ij}] \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

Et :

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad \text{II. (35)}$$

$$B = [B_{ij}] \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (36)}$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane, mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (k_x, k_y, k_{xy}).

II.5.3.2. Moments de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad \text{II. (37)}$$

\mathbf{M}_x et \mathbf{M}_y sont les moments de flexion, et \mathbf{M}_{xy} les moments de torsion. Le champ des moments, s'explique en introduisant l'expression (II.29) des contraintes dans l'expression (II.37), soit :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz. \quad \text{II. (38)}$$

Où

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] \mathbf{k}(x, y), \quad \text{II. (39)}$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D} \mathbf{k}(x, y), \quad \text{II. (40)}$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \quad \text{II. (41)}$$

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (42)}$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

II.6. Equation du comportement mécanique d'un stratifié :

II.6.1. Equation constitutive:

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.36) et (II.42) suivant une seule écriture matricielle sous la forme : [9] [18]

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (43)}$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \dots \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{II. (44)}$$

Les termes des matrices introduites A , B et D sont donnés par les expressions (II.34), (II.35) et (II.41). Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur e_k et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij}')_k e_k \quad \text{II. (45)}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij}')_k e_k z_k \quad \text{II. (46)}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij}')_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad \text{II. (47)}$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} de l'équation constitutive (II.43) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche, en fonction des modules de l'ingénieur à l'aide des expressions :

$$\begin{aligned} Q_{11}' &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q_{12}' &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q_{16}' &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q_{22}' &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q_{26}' &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q_{66}' &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad \text{II. (48)}$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{22} &= G_{LT} \end{aligned} \quad \text{II. (49)}$$

II.6.2. Matrice de rigidité:

La matrice intervenant dans l'expression (II.43) est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point $M_0(x, y) = M(x, y, 0)$.

La matrice A est la matrice de **rigidité en** membrane, D est la **matrice de rigidité en flexion** et B la **matrice de couplage** membrane-flexion-torsion.

Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul ($B = 0$), seulement dans le

cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs côtes et de leurs orientations.

Divers couplages peuvent être observés. Le couplage *traction-cisaillement* provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage *membrane-flexion* résulte des termes B_{11} , B_{12} et B_{22} , alors que le couplage *membrane-torsion* résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage *flexion-torsion* résulte des coefficients D_{16} et D_{26} . [9]

II.6.3. Détermination des déformations et des contraintes:

Les stratifiés multidirectionnels, étant caractérisés par une discontinuité de contraintes dans les plis, il est préférable de travailler avec les déformations, qui sont continués à travers l'épaisseur. L'inversion de l'équation (II.43) permet d'exprimer les déformations en membrane et en courbures.

II.6.4. Déformations en membrane et courbures :

L'expression des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts et moments extérieurs est :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ c_{11} & c_{12} & c_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (50)}$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \dots \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \vdots & b \\ \dots & \vdots & \dots \\ c & \vdots & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} \quad \text{II. (51)}$$

Avec:

$$\begin{aligned}
a &= A^{-1} - B^* D^{-1} C^* \\
b &= B^* D^{*-1} \\
c &= -D^{*-1} C^* = B'^t \\
d &= D^{*-1}
\end{aligned}
\tag{II. (52)}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
A^* &= A^{-1}, \text{matrice_inverse} \\
B^* &= -A^{-1} B \\
C^* &= B A^{-1} \\
D^* &= D - B A^{-1} B
\end{aligned}
\tag{II. (53)}$$

II.6.5. Champ des déformations :

Le champ des déformations au point $\mathbf{M}(x, y, z)$ est déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures à l'aide de l'expression :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}
\tag{II. (54)}$$

On remarque une variation linéaire suivant l'épaisseur.

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation θ par rapport aux axes du stratifié, s'expriment :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_k = T \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}
\tag{II. (55)}$$

Où la matrice de changement d'axes est exprimée suivant :

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}
\tag{II. (56)}$$

II.6.6. Champ des contraintes:

Le champ de contraintes dans le repère XY , est donné par l'équation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (57)}$$

Le champ des contraintes dans le repère LT :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix}_k = T' \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad \text{II. (58)}$$

Avec :

$$T' = [T(-\theta)]^t = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \text{II. (59)}$$

Soit finalement :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_k \quad \text{II. (60)}$$

II.7. Prise en compte de la température et l'humidité dans la modélisation des stratifiés composite :

II.7.1. Equations du comportement des stratifiés tenant compte des phénomènes de dilatation :

Dans cette partie nous examinons de quelles manières sont modifiées les équations de comportement, dans le cas où l'on tient compte des phénomènes de dilatations, et les conséquences induites, sur le comportement mécanique des structures composites considéré.

II.7.1.1. Coefficient d'expansion thermique et hygroscopique pour les unidirectionnels :

Le coefficient hygrothermique des stratifiés unidirectionnels est caractérisé par :

Deux coefficients d'expansion thermique α_L et α_T et deux coefficients d'expansion hygroscopique β_L et β_T , qui sont reliés aux propriétés des constituant. [16] [18]

Les coefficients d'expansion hygrothermique, sont obtenus par mesure des déformations en fonction de la température, les coefficients (α_L) et (α_T) ne sont pas constants, et varient avec la température.

Dans le repère (x, y) :

Les coefficients de dilatation thermique s'expriment :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \alpha_L c^2 + \alpha_T s^2 \\ \alpha_y &= \alpha_L s^2 + \alpha_T c^2 \\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_L - \alpha_T) cs\end{aligned}\quad \text{II. (61)}$$

Et les coefficients d'expansion hygroscopique sont :

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta_L c^2 + \beta_T s^2 \\ \beta_y &= \beta_L s^2 + \beta_T c^2 \\ \beta_{xy} &= 2(\beta_L - \beta_T) cs\end{aligned}\quad \text{II. (62)}$$

II.7.1.2. Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels

Lorsque le stratifié est soumis à un changement de température et d'humidité dans un environnement quelconque, alors $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$ ou T_0 et C_0 sont les conditions de l'état de référence hygrothermique.

Les déformations hygrothermiques, dans les axes principaux du stratifié sont :

$$\begin{aligned}e_L(i) &= \varepsilon_L^{ht}(i) = \alpha_L \Delta T + \beta_L \Delta C(i) \\ e_T(i) &= \varepsilon_T^{ht}(i) = \alpha_T \Delta T + \beta_T \Delta C(i) \\ e_{LT}(i) &= \gamma_{LT}^{ht}(i) = 0\end{aligned}\quad \text{II. (63)}$$

Les déformations hygrothermiques, dans les axes du stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned}
e_x(i) &= \varepsilon_x^{ht}(i) = \alpha_x \Delta T + \beta_x \Delta C(i) \\
e_y(i) &= \varepsilon_y^{ht}(i) = \alpha_y \Delta T + \beta_y \Delta C(i) \\
e_{xy}(i) &= \gamma_{xy}^{ht}(i) = \alpha_{xy} \Delta T + \beta_{xy} \Delta C(i)
\end{aligned}
\tag{II. (64)}$$

II.7.1.3. Relations hygrothermiques contrainte et déformations

Lorsqu'un stratifié multidirectionnel, est assujéti à des chargements hygrothermiques (ΔT et ΔC), l'état principal hygrothermiques dans le stratifié, est égale à la somme des déformations produites par les contraintes dans le stratifié.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{ys} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix}_i
\tag{II. (65)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - e_x \\ \varepsilon_{yy} - e_y \\ \gamma_{xy} - e_{xy} \end{Bmatrix}_i
\tag{II. (66)}$$

En introduisant l'équation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z_i k_x - e_x \\ \varepsilon_{yy}^0 + z_i k_y - e_y \\ \gamma_{xy}^0 + z_i k_{xy} - e_{xy} \end{Bmatrix}_i
\tag{II. (67)}$$

Soit finalement :

$$[\sigma]_{x,y}^i = [Q]_{x,y}^i [\varepsilon^0]_{x,y} + [Q]_{x,y}^i [k]_{x,y} z_i - [Q]_{x,y}^i [e]_{x,y}^i
\tag{II. (68)}$$

L'intégration des contraintes à travers l'expression de chaque sous couche, donne la résultante en force :

$$\begin{aligned}
[N]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [Q]_{x,y}^i dz \\
[N]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} [Q]_{x,y}^i \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z_i [k]_{x,y} - [e]_{x,y}^i \right\} dz
\end{aligned}
\tag{II. (69)}$$

Ce qui donne :

II. (70)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}_k = \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \gamma^0_s \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix}_i \right] dz$$

II. (71)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix}$$

[A], et [B], sont les matrices de rigidité définies en (II.45) et (II.46).

$[N^{HT}]_{x,y}$ Représentent les résultantes des forces hydrothermiques :

II. (72)

$$\begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{ys} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix}_i t_i$$

$t_i = dz = h_i - h_{i-1}$, est l'épaisseur de la sous couche i.

Les moments résultants à travers les plis dus stratifié sont :

II. (73)

$$\begin{aligned} [M]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\sigma]_{x,y}^i z_i dz \\ [M]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [Q]_{x,y}^i \left\{ [\varepsilon^0]_{x,x} + z_i [k]_{x,y} - [e]_{x,y}^i \right\} z_i dz \end{aligned}$$

II. (74)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix}$$

[B] et [D] sont les matrices de rigidité définie en (II.46) (II.47).

$[M^{HT}]_{x,y}$, sont les moments hydrothermiques définis comme suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{ys} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix}_i z_i t_i \quad \text{II. (75)}$$

Les équations (II.36) et (II.42) sont réécrites sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_y \\ \overline{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (76)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (77)}$$

Finalement en bref :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{N} \end{bmatrix}_{x,y} &= \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} N^{HT} \end{bmatrix}_{x,y} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_{x,y} \\ \begin{bmatrix} \overline{M} \end{bmatrix}_{x,y} &= \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} M^{HT} \end{bmatrix}_{x,y} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \end{bmatrix}_{x,y} \end{aligned} \quad \text{II. (78)}$$

[N] *et* [M] : sont respectivement, les résultantes en forces et en moment, égales respectivement à la somme des composantes mécaniques et hygrothermiques.

Les relations forces déformations et contraintes déformations, sont identiques à ceux dérivées pour le chargement mécanique, à la seule différence ; c'est que les forces et moments hygrothermiques, sont ajoutée aux forces et moments mécaniques appliquées.

II.7.2. Contraintes résiduelles :

Les contraintes résiduelles, sont introduites dans les stratifiés multidirectionnels durant la fabrication. Sur le plan microscopique, les contraintes résiduelles sont introduites dans les couches unidirectionnelles autour des fibres, à cause des imperfections dans les propriétés thermiques des constituants. Des contraintes résiduelles sont aussi développées dans les couches à cause de l'anisotrope sur le plan macroscopique.

En l'absence de forces externes appliquées, $[N]=0$ et $[M]=0$; les relations hygrothermique (II.17) et (II.17) se réduisent à :

$$\begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (79)}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (80)}$$

L'intervention de ces relations, donne les déformations en membrane $[\varepsilon^0]$ et courbures $[k]$, produits par un changement hygrothermique seulement. Dans ce cas ces déformations sont aussi appelées, les déformations non mécaniques.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (81)}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (82)}$$

Les déformations hygrothermiques dans la sous couche i sont obtenues par l'équation (II.45):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_i \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. (83)}$$

Les déformations résiduelles dans chaque sous couche i sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{irésiduelles}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{Bmatrix}_i \quad \text{II. (84)}$$

Les contraintes résiduelles dans chaque sous couche i sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{irésiduelles}} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{\text{irésiduelles}} \quad \text{II. (85)}$$

II.7.3. Analyse des stratifiés multidirectionnels :

Les effets hygrothermiques représentent la superposition de l'effet de température et de l'humidité.

Les efforts et les moments hygrothermiques sont définis par :

$$\begin{aligned} N_x^{HT} &= N_x^H + N_x^T \\ N_y^{HT} &= N_y^H + N_y^T \\ N_{xy}^{HT} &= N_{xy}^H + N_{xy}^T \end{aligned} \quad \text{II. (86)}$$

$$\begin{aligned} M_x^{HT} &= M_x^H + M_x^T \\ M_y^{HT} &= M_y^H + M_y^T \\ M_{xy}^{HT} &= M_{xy}^H + M_{xy}^T \end{aligned} \quad \text{II. (87)}$$

$$\begin{aligned}
N_x^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{11}^i \alpha_x + Q_{12}^i \alpha_y + Q_{16}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{11}^i \beta_x + Q_{12}^i \beta_y + Q_{16}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) \\
N_y^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{12}^i \alpha_x + Q_{22}^i \alpha_y + Q_{26}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{12}^i \beta_x + Q_{22}^i \beta_y + Q_{26}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) \\
N_{xy}^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{16}^i \alpha_x + Q_{26}^i \alpha_y + Q_{66}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{16}^i \beta_x + Q_{26}^i \beta_y + Q_{66}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) \\
M_x^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{11}^i \alpha_x + Q_{12}^i \alpha_y + Q_{16}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i z_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{11}^i \beta_x + Q_{12}^i \beta_y + Q_{16}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i \\
M_y^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{12}^i \alpha_x + Q_{22}^i \alpha_y + Q_{26}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i z_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{12}^i \beta_x + Q_{22}^i \beta_y + Q_{26}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i \\
M_{xy}^{HT} &= \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{16}^i \alpha_x + Q_{26}^i \alpha_y + Q_{66}^i \alpha_{xy}) \Delta T t_i z_i + \sum_{i=1}^{\left(\frac{h}{dz}\right)+1} (Q_{16}^i \beta_x + Q_{26}^i \beta_y + Q_{66}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i
\end{aligned} \tag{II. (88)}$$

II.8. La diffusion d'eau dans les polymères et composites

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles de diffusion d'eau, qui visent à prédire la reprise en eau d'un matériau composite, exposé à ses frontières à une température et un taux d'humidité constants [10]. Il s'agit de déterminer la cinétique de diffusion de ce dernier, soit l'évolution de la teneur en eau globale du matériau, notée $C(t)$, en fonction de la racine carrée du temps. Le modèle de diffusion le plus connu est le modèle de Fick. Une cinétique suivant ce modèle, dite « Fickienne », se caractérise par deux parties distinctes. Dans la première partie, la teneur en eau globale augmente linéairement jusqu'à atteindre un palier correspondant à la saturation, C_S , du matériau (deuxième partie), voir Fig. II.6 – courbe (0). Or, il n'est pas rare qu'un CMP, ou bien même une matrice polymère seule, présente une cinétique de diffusion « non-Fickienne », telle qu'après une première absorption rapide d'eau, la reprise en eau reste continue, bien que moins importante. Contrairement à ce que le modèle de Fick prédit, le matériau n'arrive pas à saturation. La cinétique de diffusion correspondante présente, après une première partie linéaire, une seconde partie, également linéaire, de pente non nulle, habituellement plus faible que la première : voir Fig. II.6 – courbe (1). Ceci laisse à penser qu'après une première phase de diffusion rapide de l'ordre de quelques jours, un second processus de diffusion, plus lent, intervient en pratique dans ces matériaux [10].

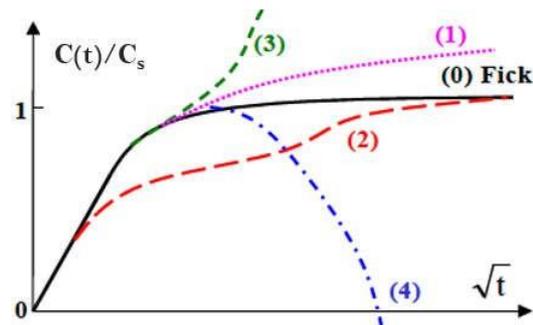


Figure II.6. Représentation des 5 catégories de cinétiques d'eau décrites par Weitsman [10]

Il n'est pas rare de devoir effectuer des identifications sur la base de cinétiques incomplètes, c'est-à-dire, n'atteignant pas la saturation (parce que la durée des processus réels est parfois très longue, notamment dans certains cas de figure où se produisent des anomalies de diffusion).

II.9. Modèles de diffusion d'eau

II.9.1. Modèle de Fick

Le modèle de diffusion de Fick est le modèle le plus couramment utilisé pour prédire la diffusion d'eau au sein d'une matrice polymère. Pour un cas d'étude de diffusion à une dimension, avec un coefficient de diffusion D constant, la seconde loi de Fick est écrite telle que [16]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad \text{II. (89)}$$

Où la teneur en eau C est fonction de l'espace et du temps.

Si l'échantillon étudié est une plaque fine d'épaisseur e , les conditions initiales et aux limites sont :

$$\begin{aligned} t=0 \quad & -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \rightarrow C = C_0 \\ t=0 \quad & z = \pm \frac{h}{2} \rightarrow C = C_s \end{aligned} \quad \text{II. (90)}$$

Avec C_0 la teneur en eau initiale et C_s la teneur en eau aux limites.

Une solution analytique à ce problème est donnée par Crank [16] [21] [22] pour une diffusion Fickienne dans une plaque mince caractérisée par un coefficient de diffusion constant

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad \text{II. (91)}$$

$$t=0 \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \rightarrow C = C_0$$

$$t=0 \quad z = \pm \frac{h}{2} \rightarrow C = C_s$$

On utilise la transformation de Laplace pour résoudre cette équation, en posant $\bar{C}(z, p) = L(C(z, t))$

On a :

$$L\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial C}{\partial t} dt = p\bar{C}(z, p) - C(z, 0) = p\bar{C} - C_0 \quad \text{II. (92)}$$

Et on a aussi :

$$L\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad \text{II. (93)}$$

Donc le système se transforme en :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{C}}{dx^2} - \frac{p}{D_z} \bar{C} = -\frac{C_0}{D_z} \\ \frac{d\bar{C}}{dx} = 0 \rightarrow z = -\frac{h}{2} \\ \bar{C} = \frac{C_s}{p} \rightarrow z = +\frac{h}{2} \end{cases} \quad \text{II. (94)}$$

On résout l'équation différentielle ordinaire et alors:

$$\bar{C} = \frac{C_0}{p} + \frac{C_s - C_0}{p} \frac{\cosh z \sqrt{(p/D_z)}}{\cosh \frac{h}{2} \sqrt{(p/D_z)}} \quad \text{II. (95)}$$

Et grâce à transformation inverse:

$$C = C_s + \frac{C_s - C_0}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{\cosh z \sqrt{(\lambda/D_z)}}{\cosh \frac{h}{2} \sqrt{(\lambda/D_z)}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \text{II. (96)}$$

C'est une intégrale avec deux (02) pôles :

$$\lambda = 0 \quad \text{II. (97)}$$

$$\lambda = -D_z \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{(h/2)^2}, n = 1, 2, \dots$$

En utilisant les trigonométries et à l'aide de la théorème de Cauchy , on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{\cosh z \sqrt{(\lambda/D_z)}}{\cosh \frac{h}{2} \sqrt{(\lambda/D_z)}} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} e^{-D_z(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t/h^2} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{h} \quad \text{II. (98)}$$

Donc la solution finale de l'équation de diffusion 1D avec les conditions initiales et les conditions aux limites qu'on a eu est :

$$C = C_s + \frac{4(C_s - C_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{h} \exp \left[\frac{-D_z \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 t}{h^2} \right] \quad \text{II. (99)}$$

Donc :

$$\frac{C - C_0}{C_s - C_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h} \exp \left[\frac{-D_z (2n+1)^2 \pi^2 t}{h^2} \right] \quad \text{II. (100)}$$

Si la plaque ne contient initialement pas d'humidité $C_0 = 0$ et avec $C_L = C_s$, après intégration sur l'épaisseur, on obtient [10]:

$$C(t) = \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[D \left(\frac{2n+1}{e} \right)^2 \pi^2 t \right] \right) C_s \quad \text{II. (101)}$$

Où $C(t)$ est la teneur en eau globale (%) à l'instant t et C_s la teneur en eau globale à saturation (%).

CHAPITRE III : RESULTATS ET INTERPRETATION

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre on illustre l'approche numérique suivie pour l'étude du comportement des stratifiés composites minces à matrice polymère basé sur la théorie classique des stratifiés expliquée dans le chapitre précédant, en tenant compte la température et l'humidité.

On utilise le logiciel Matlab pour développer un code de calcul utilisant les différentes propriétés mécaniques, thermiques et hygroscopiques des matériaux composites pour étudier le comportement de ces derniers.

III.2. Qu'est-ce que le logiciel Matlab?

MATLAB (*matrix laboratory*) est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société « The MathWorks », MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran. [9]

La plate-forme MATLAB est optimisée pour résoudre les problèmes scientifiques et techniques. Ce langage basé sur les matrices, est le moyen le plus naturel au monde pour exprimer les mathématiques computationnelles.

III.2.1. Pourquoi le MATLAB ?

MATLAB est le logiciel le plus accessible et le plus productif conçu pour les ingénieurs et les scientifiques. Pour les tâches d'analyse de données, de développement d'algorithmes et de création de modèles.

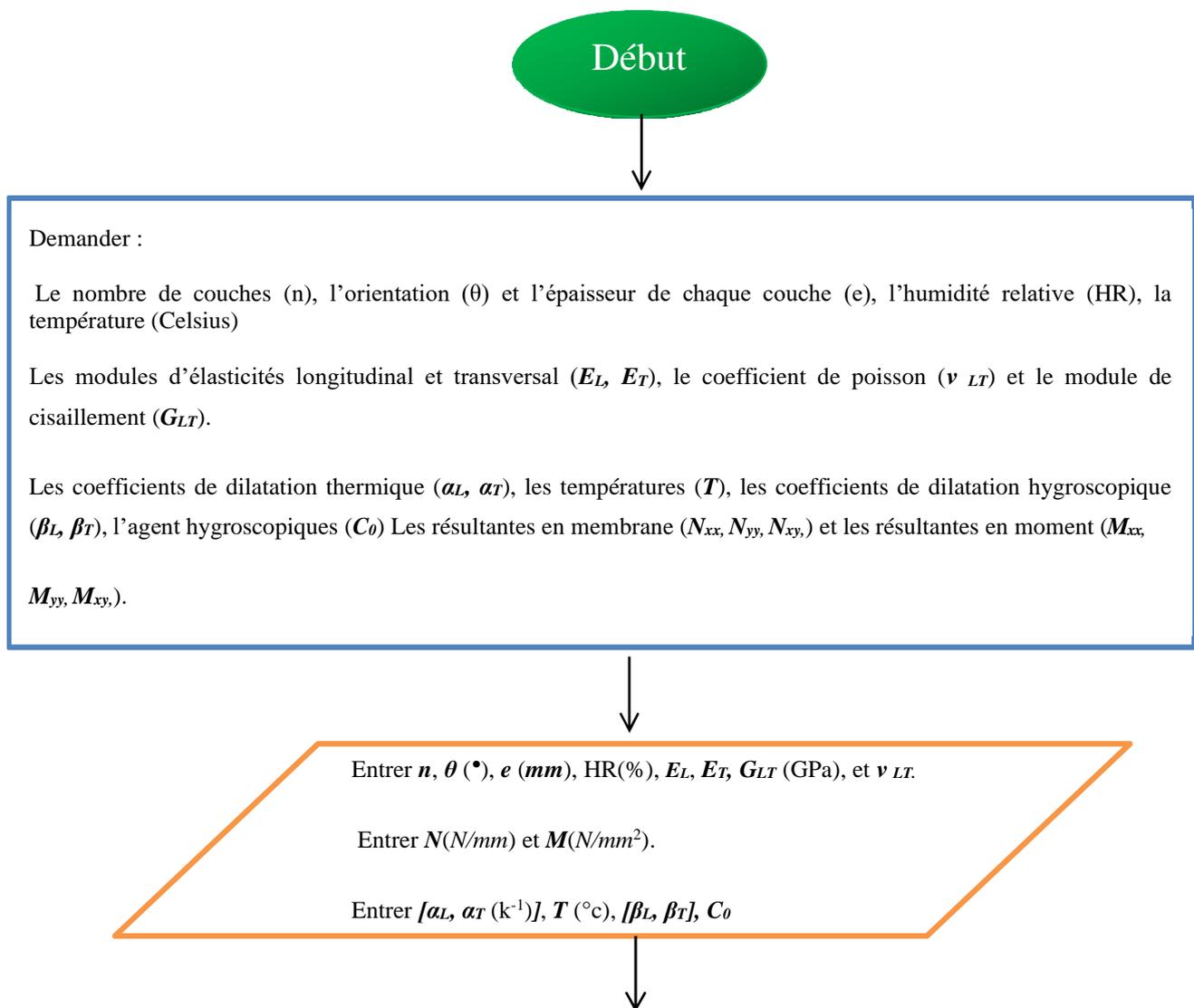
MATLAB associe un langage haut niveau à un environnement bureau élaboré pour les flux de travail itératifs scientifiques et techniques.

Il est présent dans des systèmes automobiles de sécurité active, des véhicules aéronautiques et spatiaux, des appareils de surveillance médicale, des réseaux électriques intelligents et des réseaux mobiles LTE (Long-Term Evolution). [9]

III.3. Approche numérique :

Au cours de ce travail nous avons développé un programme pour simuler le comportement des stratifiés composites avec la prise en compte de couplage température/humidité.

Les étapes de calcul sont expliquées dans l'organigramme ci-dessous :



Calcul des éléments de la matrice de rigidité réduite dans **LT** ($q_{11}, q_{12}, q_{22}, q_{66}$).

Afficher la matrice de rigidité réduite $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{12} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix}$ (GPa)

Calcul de la distribution hygroscopiques $C(t)$ en fonction de l'épaisseur du stratifié (Z):

$$\frac{C - C_0}{C_s - C_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h} \exp \left[\frac{-D_z (2n+1)^2 \pi^2 t}{h^2} \right]$$

Calcul des déformations hygrothermiques dans le repère **LT** :

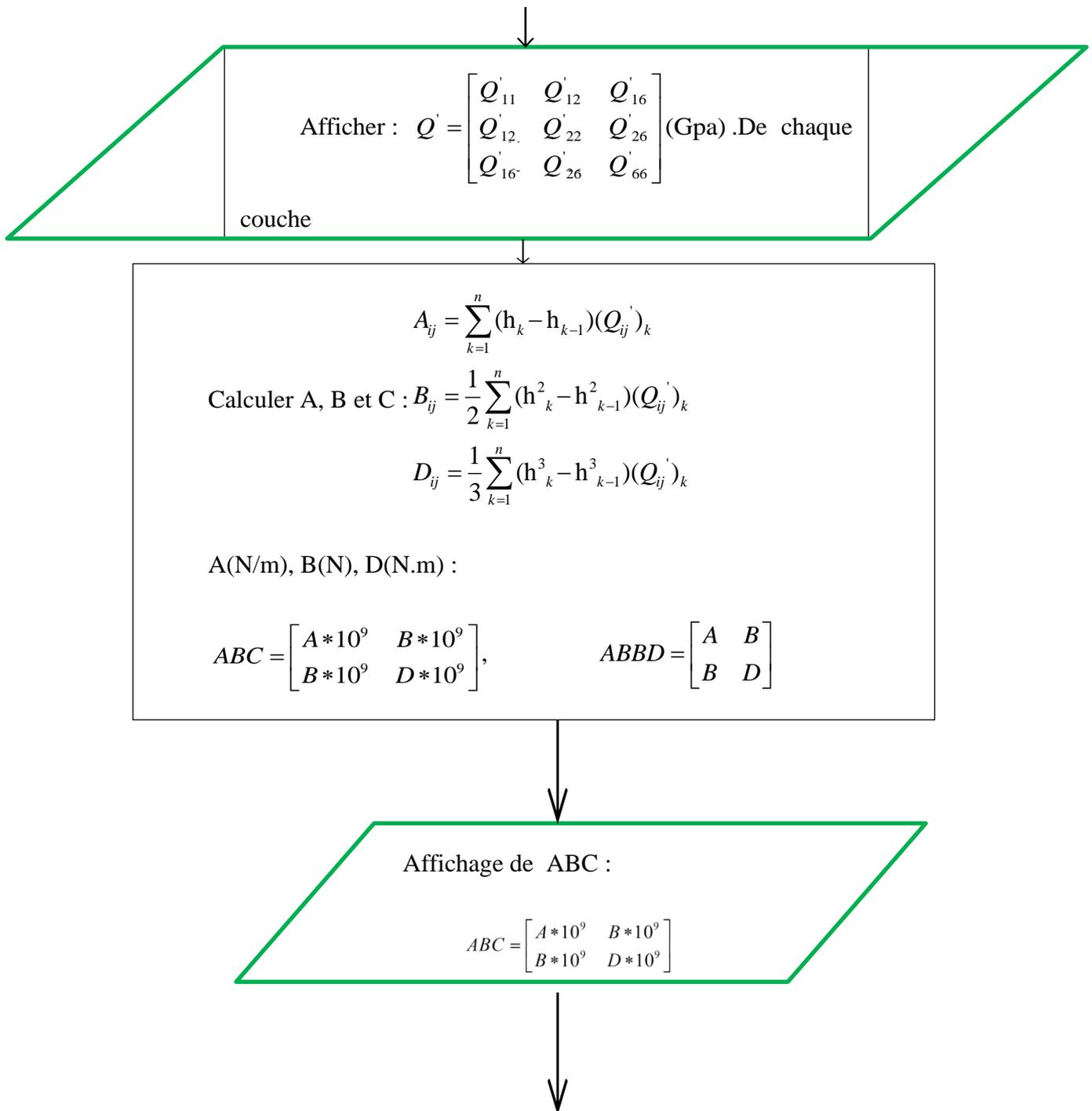
$$\begin{aligned} \varepsilon_L^{ht}(Z, t) &= (\alpha_L * \Delta T) + (\beta_L * \Delta C(Z, t)) \\ \varepsilon_T^{ht}(Z, t) &= (\alpha_T * \Delta T) + (\beta_T * \Delta C(Z, t)) \\ \gamma_{LT}^{ht}(Z, t) &= (\alpha_{LT} * \Delta T) + (\beta_{LT} * \Delta C(Z, t)) \end{aligned}$$

Calcul des déformations hygrothermiques dans le repère **XY** :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{ht}(Z, t) &= (\alpha_x * \Delta T) + (\beta_x * \Delta C(Z, t)) \\ \varepsilon_y^{ht}(Z, t) &= (\alpha_y * \Delta T) + (\beta_y * \Delta C(Z, t)) \\ \gamma_{xy}^{ht}(Z, t) &= (\alpha_{xy} * \Delta T) + (\beta_{xy} * \Delta C(Z, t)) \end{aligned} \quad \text{Sachant que : } \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 \\ 2cs & -2cs & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ \alpha_{LT} \end{bmatrix}$$

Affichage des déformations : $\varepsilon_x^{ht}, \varepsilon_y^{ht}, \gamma_{xy}^{ht}$

Calcul de la matrice de rigidité réduite dans **XY** ($Q'_{11}, Q'_{12}, Q'_{16}, Q'_{22}, Q'_{21}, Q'_{26}, Q'_{66}$).



Calcul des déformations membrane et courbure :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = [abd] * \begin{Bmatrix} \overline{N}_{xx} \\ \overline{N}_{yy} \\ \overline{N}_{xy} \\ \overline{M}_{xx} \\ \overline{M}_{yy} \\ \overline{M}_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Sachant que : } \begin{cases} \overline{N}_{x,y} = \{N\}_{x,y} + \{N^{HT}\}_{x,y} \\ \overline{M}_{x,y} = \{M\}_{x,y} + \{M^{HT}\}_{x,y} \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \{N^{HT}\}_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [[Q']_k * \{\varepsilon^{ht}\}_{x,y}] dz \\ \{M^{HT}\}_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [[Q']_k * \{\varepsilon^{ht}\}_{x,y}] * z dz \end{cases}$$

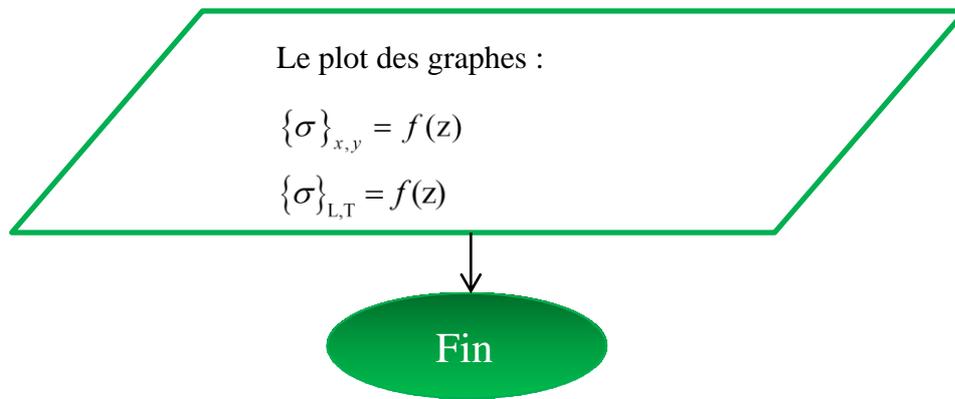
Affichage de $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0, k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}$

Calcul des déformations et contraintes dans LT et XY :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{ht} \\ \varepsilon_y^{ht} \\ \gamma_{xy}^{ht} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' & Q_{16}' \\ Q_{12}' & Q_{22}' & Q_{26}' \\ Q_{16}' & Q_{26}' & Q_{66}' \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_k$$

Affichage de $\{\varepsilon\}_{x,y}, \{\varepsilon\}_{L,T}, \{\sigma\}_{x,y} \text{ (GPa)}, \{\sigma\}_{L,T} \text{ (GPa)}$



Les résultats du programme sont validés avec les références [16] [17] [20].

III.3.1. Simulations et interface :

III.3.1.1. Influence de la température et humidité sur le phénomène d'absorption

On a simulé la prise en eau M_t du T300/5208 donnée par l'équation (III.1) en fonction de la racine carrée du temps d'exposition, différents environnements, les résultats obtenus sont représentés dans la figure (figure III.1). Pour une humidité relative donnée, la cinétique d'absorption diffère en fonction de la température. En effet, quelle que soit la température, la quantité d'eau absorbée par le matériau à saturation est la même, ce qui confirme que le phénomène d'absorption d'eau est thermoactive, c'est-à-dire plus que la température est élevée, plus le plateau de saturation est atteint rapidement.

$$\frac{M_t}{M_s} = 1 - \frac{8}{\pi^2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} * \exp\left(-D \frac{(2n+1)^2}{h^2} \pi^2 t\right) \quad \text{III. (1)}$$

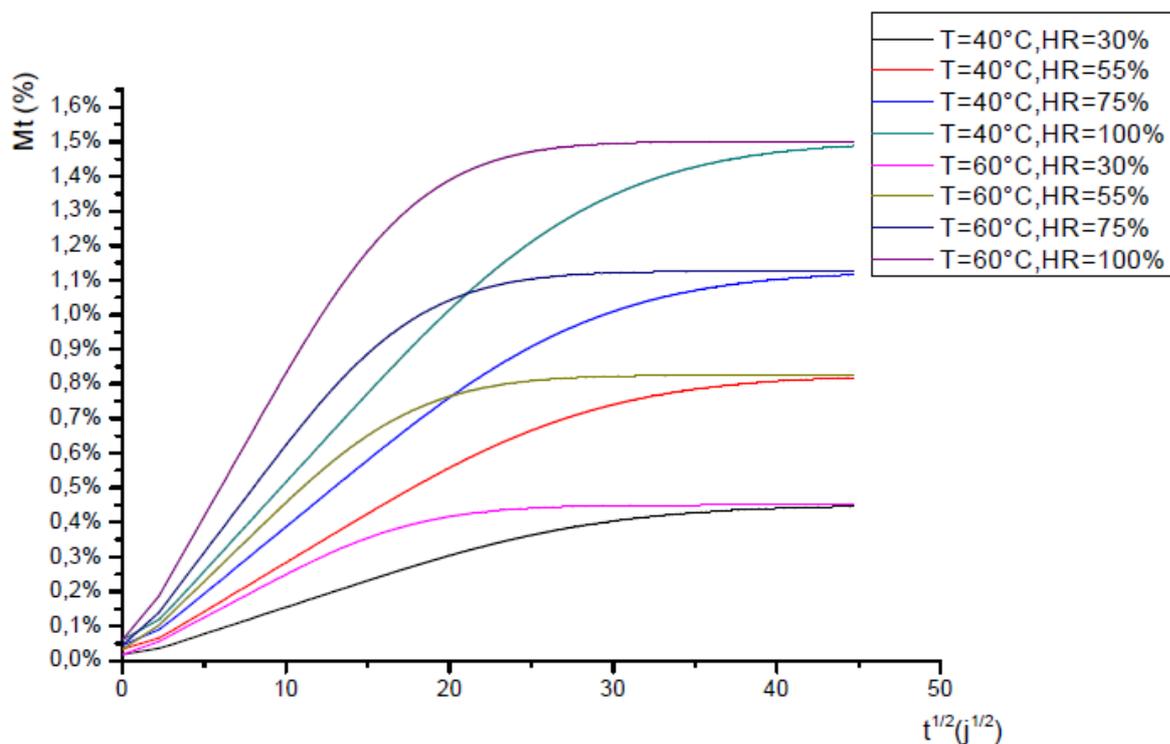


Figure III.1. Courbes de prise en eau pour différents environnements pour un modèle de Fick 1D.

III.3.1.2. Calcul des profils de concentration

Nous considérons un stratifié en graphite/époxy T300/5208 d'épaisseur $h=1.2\text{mm}$ placé dans un environnement de température $T=20\text{ }^{\circ}\text{C}$, et d'humidité $HR=100\%$, à travers l'équation de FICK (II.100) programmé en MATLAB, nous calculons les profils de concentration à travers l'épaisseur de la plaque (z) pour différentes

durées d'exposition pour le cas d'absorption, les résultats de la simulation sont présentés dans la figure (figure III.2). On peut remarquer que la concentration de l'humidité au début est faible au centre de la plaque, mais elle devient relativement uniforme (la même forme qui est curviligne) approximativement après 30 jours d'absorption continue, qui correspond à 15% du temps de saturation (≈ 200 jours).

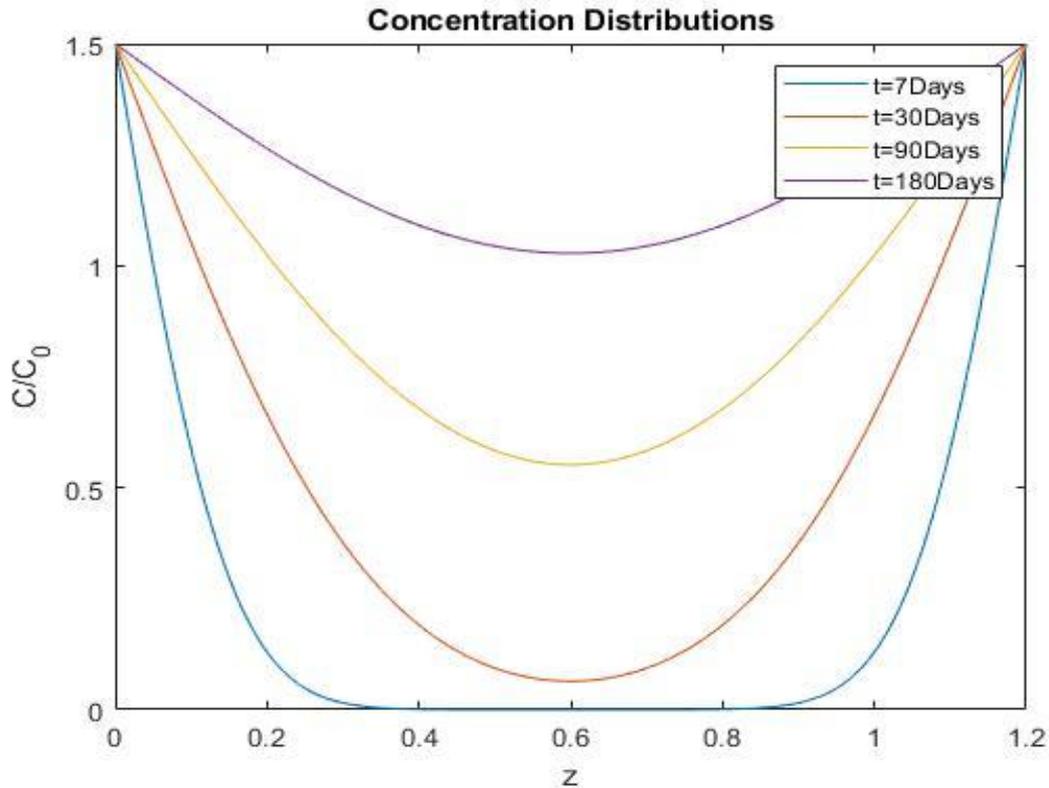


Figure III.2. Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement.

Pour évaluer l'effet de la température et l'humidité, on a simulé le comportement d'un stratifié en T300/5208 dont les caractéristiques sont :

Tableau III.1. Caractéristiques mécaniques de T300/5208. [09]

E_L (GPa)	E_T (GPa)	ν_{LT}	G_{LT} (GPa)	α_L (10^{-6} k^{-1})	α_T (10^{-6} k^{-1})	β_L	β_T
181	10.3	0.28	7.1	0.02	22.5	0	0.6

Dans les cinq premières simulations le stratifié étudié est de cinq couches ($-45^\circ/30^\circ/30^\circ/-45^\circ$) d'épaisseur totale **1mm** (0.25 mm pour chaque couche).

III.3.1.3. Interface :

Les divers composantes de l'interface sont détaillées ci-dessous:



Figure III.3. La couverture de l'interface.

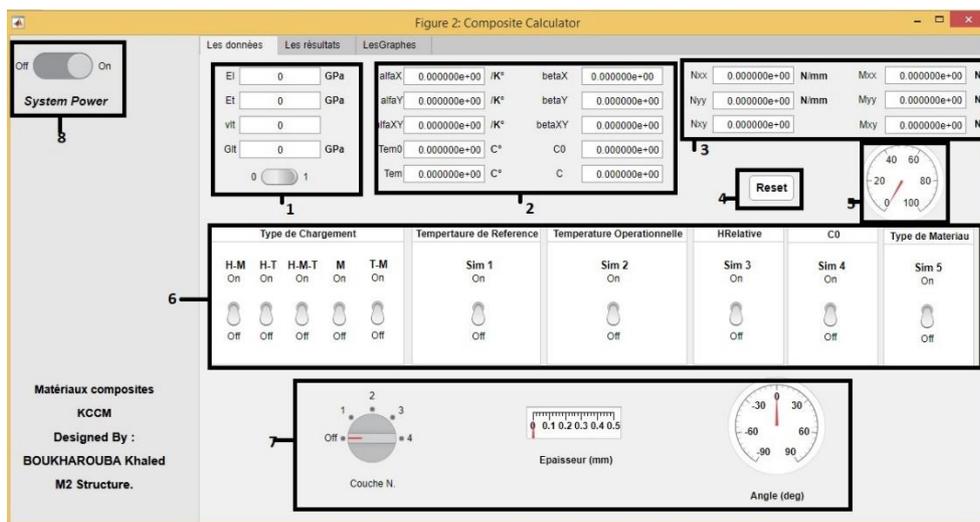


Figure III.4. L'interface principale.

➤ **L'interface principale :**

Introduit des données de chaque simulation :

- 1) Les cases des propriétés des matériaux :

EI	<input type="text" value="0"/>	GPa
Et	<input type="text" value="0"/>	GPa
νit	<input type="text" value="0"/>	
Git	<input type="text" value="0"/>	GPa

Figure III.5. les propriétés des matériaux

- 2) Les coefficients de dilatation thermique et d'expansion hygroscopique et les conditions environnementales :

alfaL	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	/K°	betaL	<input type="text" value="0.000000e+00"/>
alfaT	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	/K°	betaT	<input type="text" value="0.000000e+00"/>
alfaLT	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	/K°	betaLT	<input type="text" value="0.000000e+00"/>
Tem0	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	C°	C0	<input type="text" value="0.000000e+00"/>
Tem	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	C°	C	<input type="text" value="0.000000e+00"/>

Figure III.6. . Les propriétés hygrothermiques.

- 3) Les sollicitations mécaniques :

Nxx	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm	Mxx	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm2
Nyy	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm	Myy	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm2
Nxy	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm	Mxy	<input type="text" value="0.000000e+00"/>	N/mm2

Figure III.7. Les propriétés mécaniques.

- 4) Pour réinitialiser le calcul, on clique sur ce bouton :



- 5) Cette jauge est pour l'affichage de nombre de couches :

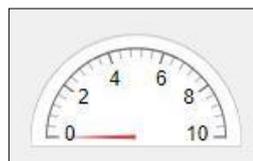


Figure III.8. Jauge de nombre des couche

6) Le tableau des simulations :

Type de Chargement					Température de Référence	Température Opérationnelle	HRelative	C0	Type de Matériau
H-M On	H-T On	H-M-T On	M On	T-M On	Sim 1 On	Sim 2 On	Sim 3 On	Sim 4 On	Sim 5 On
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
Off	Off	Off	Off						

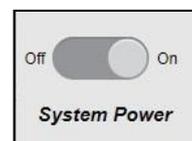
Figure III.9. Tableau des simulations

7) Le tableau des couches (numéro de couche, épaisseur, orientation des couches de stratifié) :

The panel includes a circular diagram with four points labeled 1, 2, 3, and 4. Point 1 is marked 'Off'. Below the diagram is the text 'Couche N.'. To the right is a linear scale for 'Epaisseur (mm)' ranging from 0 to 0.5. Further right is a circular gauge for 'Angle (deg)' ranging from -90 to 90.

Figure III.10. Panneau de couche.

8) System power (interrupteur) : pour faire apparaître (disparaître) l'interface principale.



➤ Le panneau de résultats :

Les résultats de calcul s'affichent dans ce panneau :

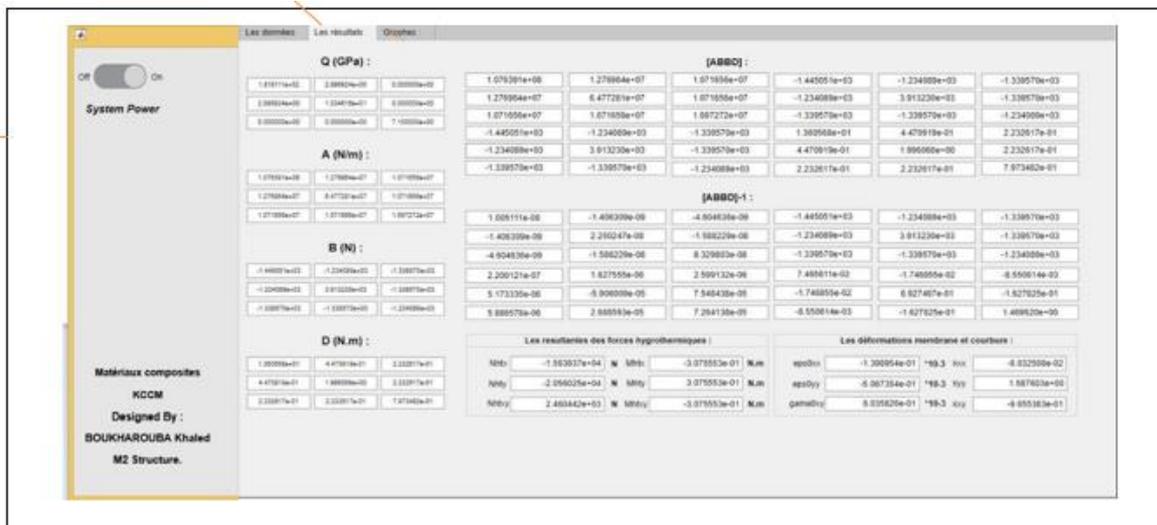
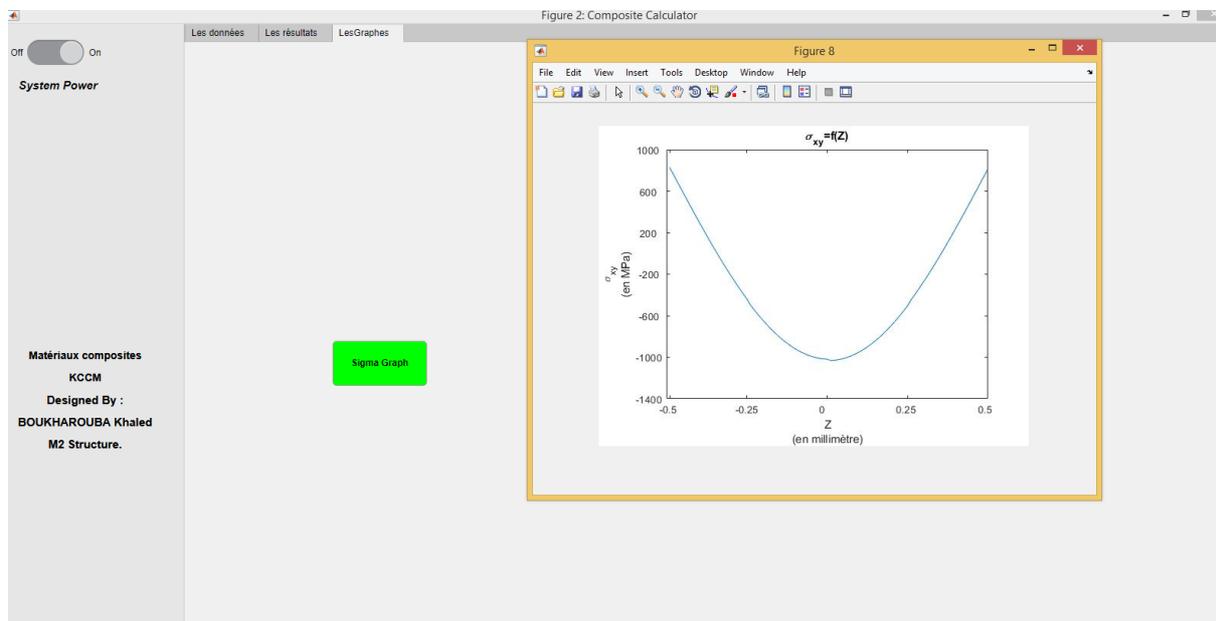


Figure III.11. Le panneau des résultats

➤ L'affichage des graphes :

Les résultats du calcul des contraintes et le profil de concentrations sont sous forme des graphes :



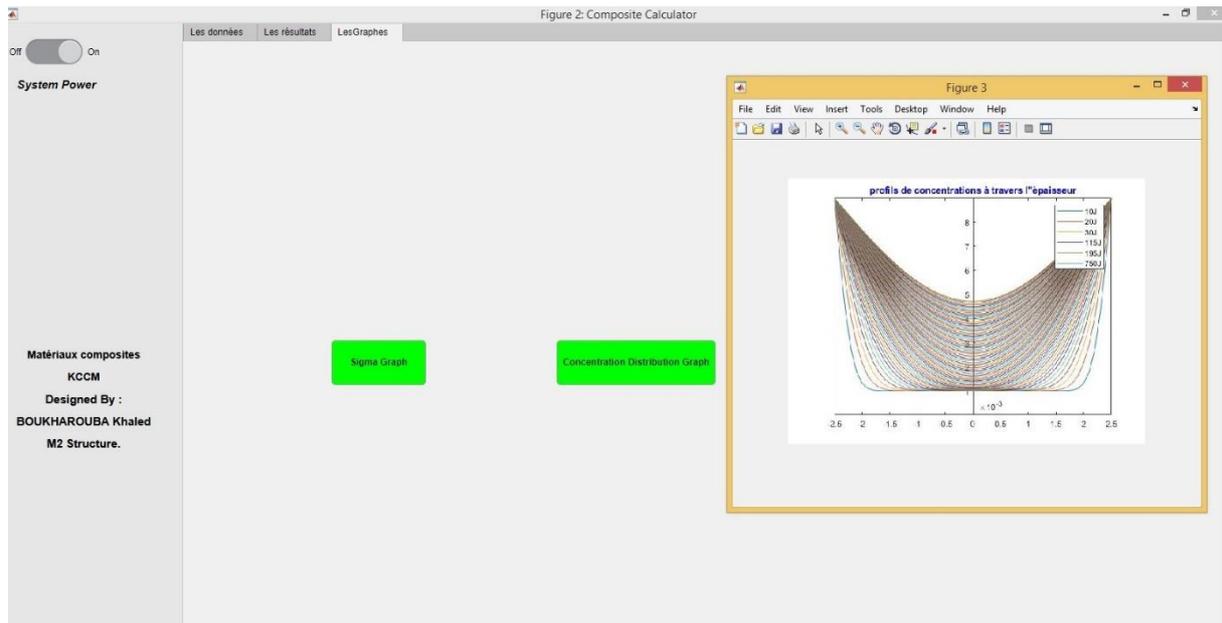


Figure III.12. Le panneau des graphes.

III.3.1.4. Simulation 0 : Influence du type de chargement

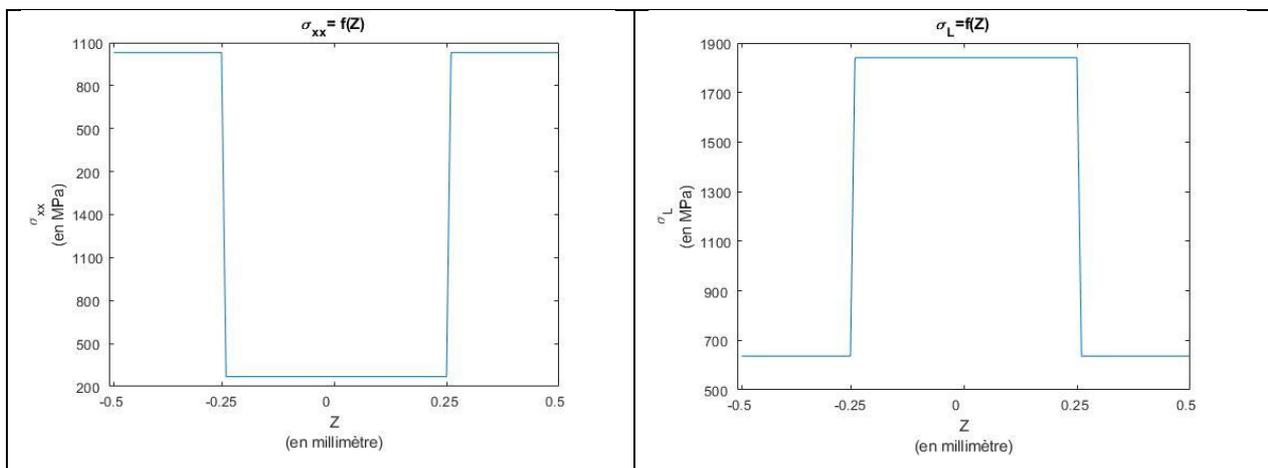
✓ *Cas mécaniques :*

On applique seulement des sollicitations mécaniques extérieures :

Tableau III.2. Contraintes mécaniques extérieur.

N_{xx} (N/mm)	N_{yy} (N/mm)	N_{xy} (N/mm)	M_{xx} (N/mm ²)	M_{yy} (N/mm ²)	M_{xy} (N/mm ²)
1000	500	250	0	0	0

➤ **Résultats :**



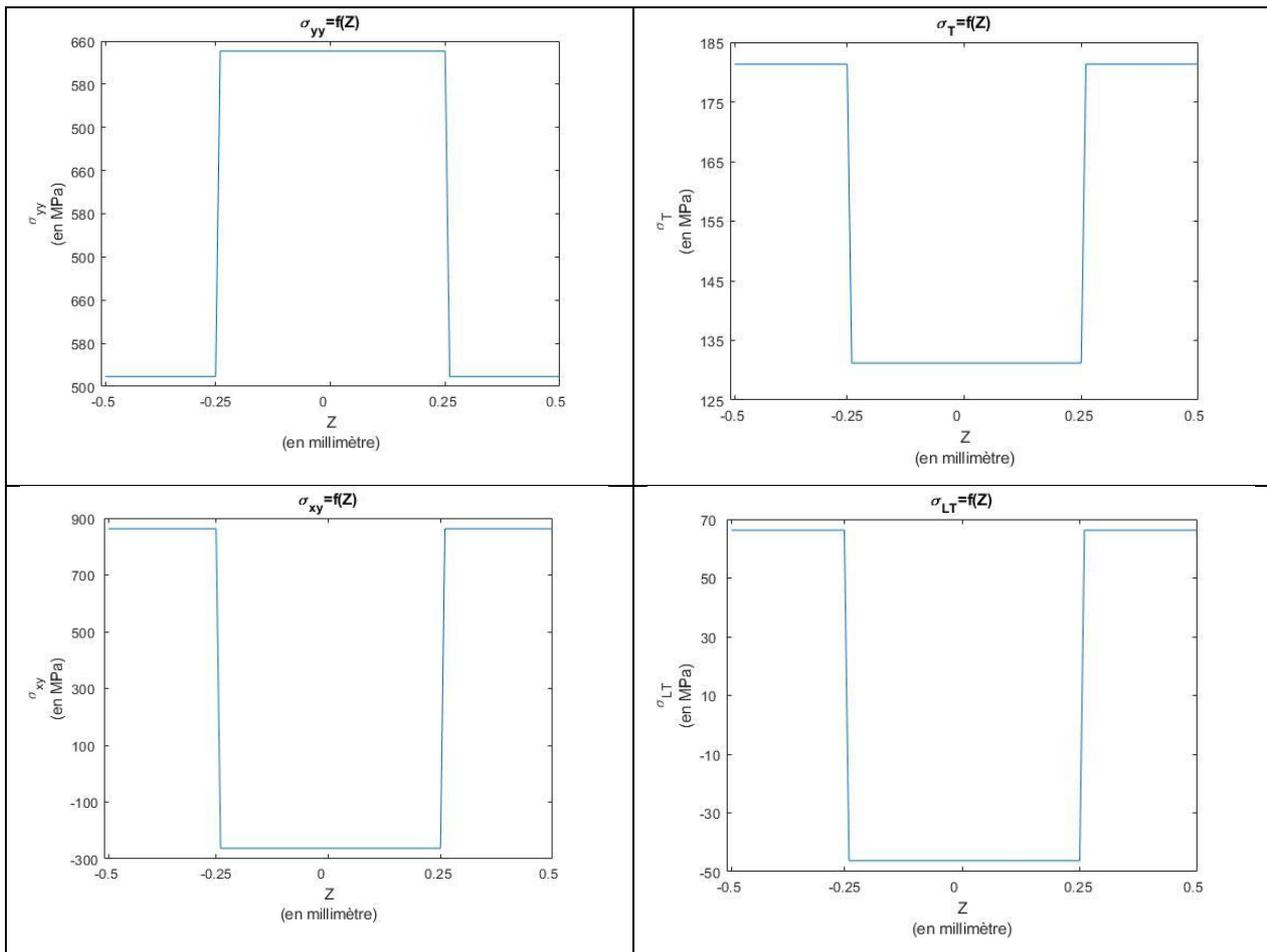


Figure III.13. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts mécaniques extérieurs.

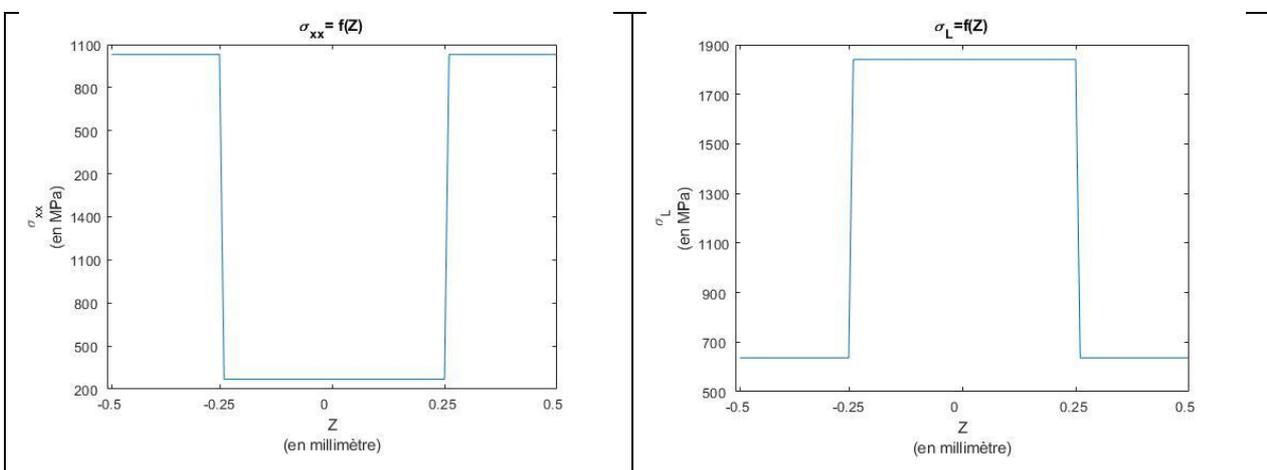
✓ *Cas thermomécaniques :*

On utilise les sollicitations mécaniques précédentes avec l'effet de température :

Tableau III.3. Propriétés thermiques. [09]

T_0 (°C)	Tops (°C)	α_L (10^{-6} k^{-1})	α_T (10^{-6} k^{-1})
180	40	0.02	22.5

➤ **Résultats :**



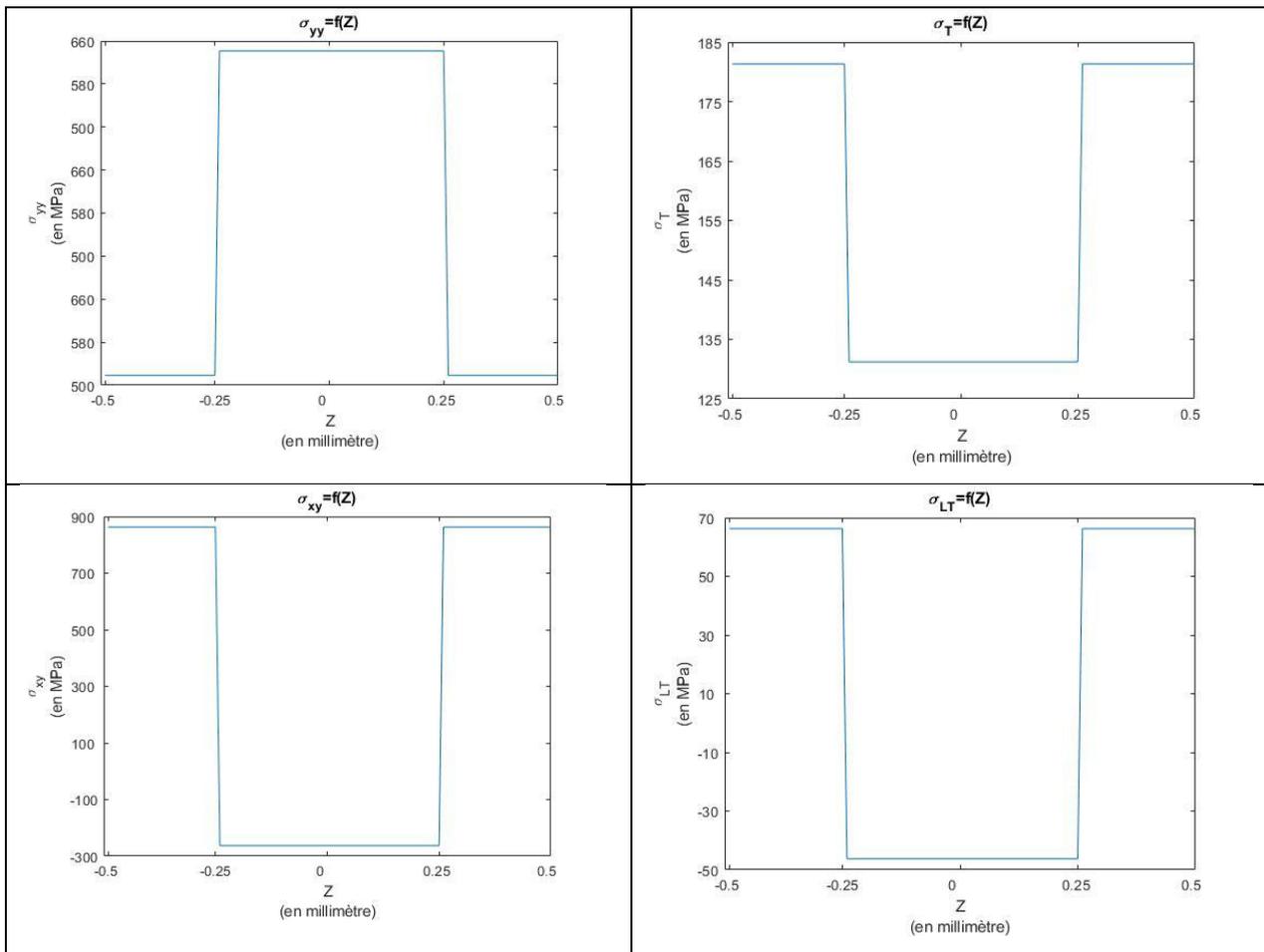


Figure III.14. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts thermomécaniques.

✓ *Cas hygromécaniques :*

On utilise les sollicitations mécaniques précédentes avec l'effet de l'humidité :

HR : taux d'humidité de l'environnement.

Tableau III.4. Propriétés hygroscopiques. [9]

C_0	C	β_L	β_T	HR
0	$C(t)$ à $t50\%$ saturation	0.02	22.5	40%

➤ **Résultats :**

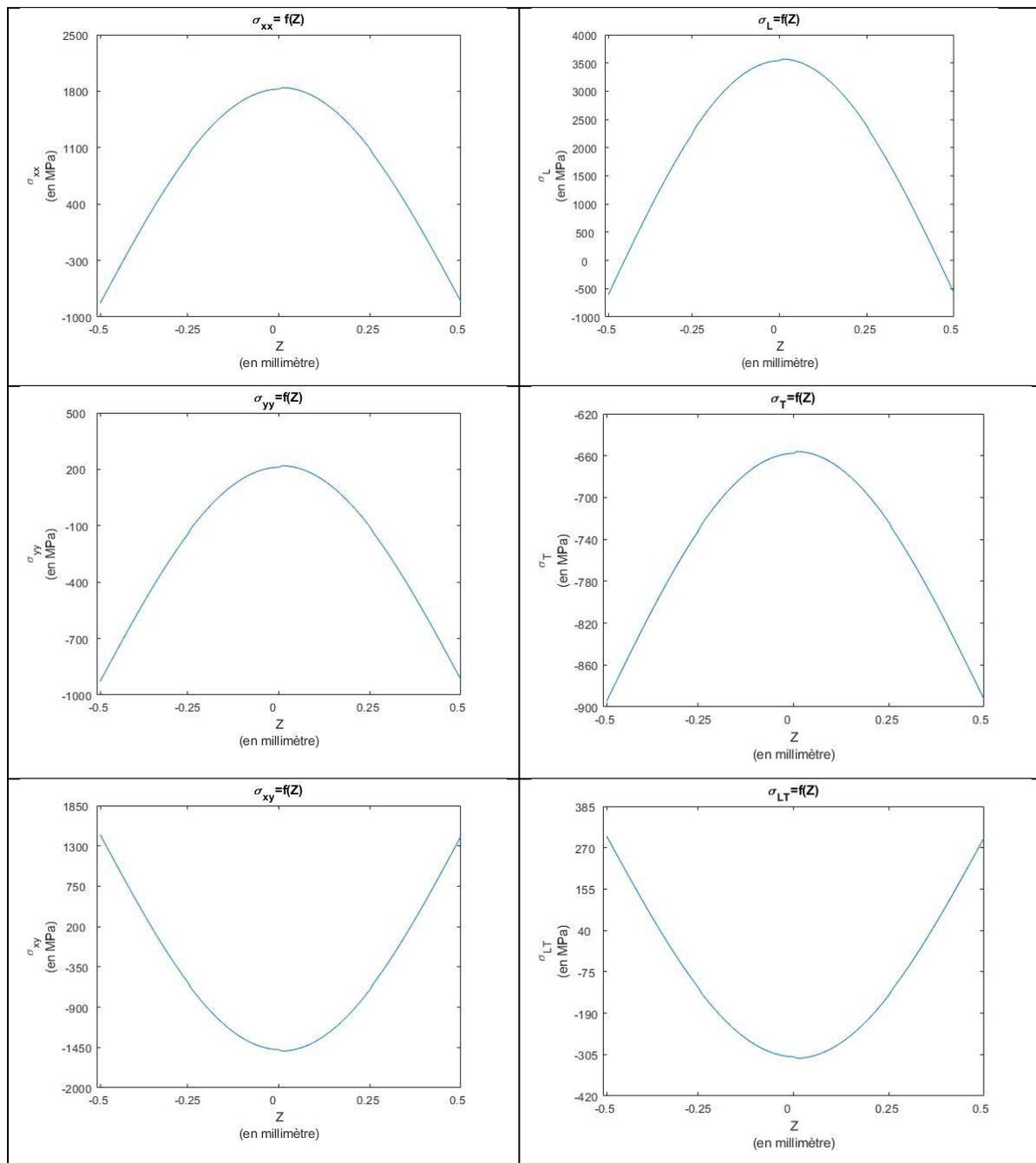


Figure III.15. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hygromécaniques.

✓ **Cas hygrothermiques :**

Dans cette partie on néglige les sollicitations mécaniques et on prend en considération l'effet de température et de l'humidité :

Tableau III.5. Propriétés hygrothermiques. [9]

T_0 (°C)	T (°C)	$\alpha_L (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	$\alpha_T (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	C_0	C	β_L	β_T	HR
180	40	0.02	22.5	0	C(t) à t50% saturation	0.02	22.5	40%

➤ **Résultats :**

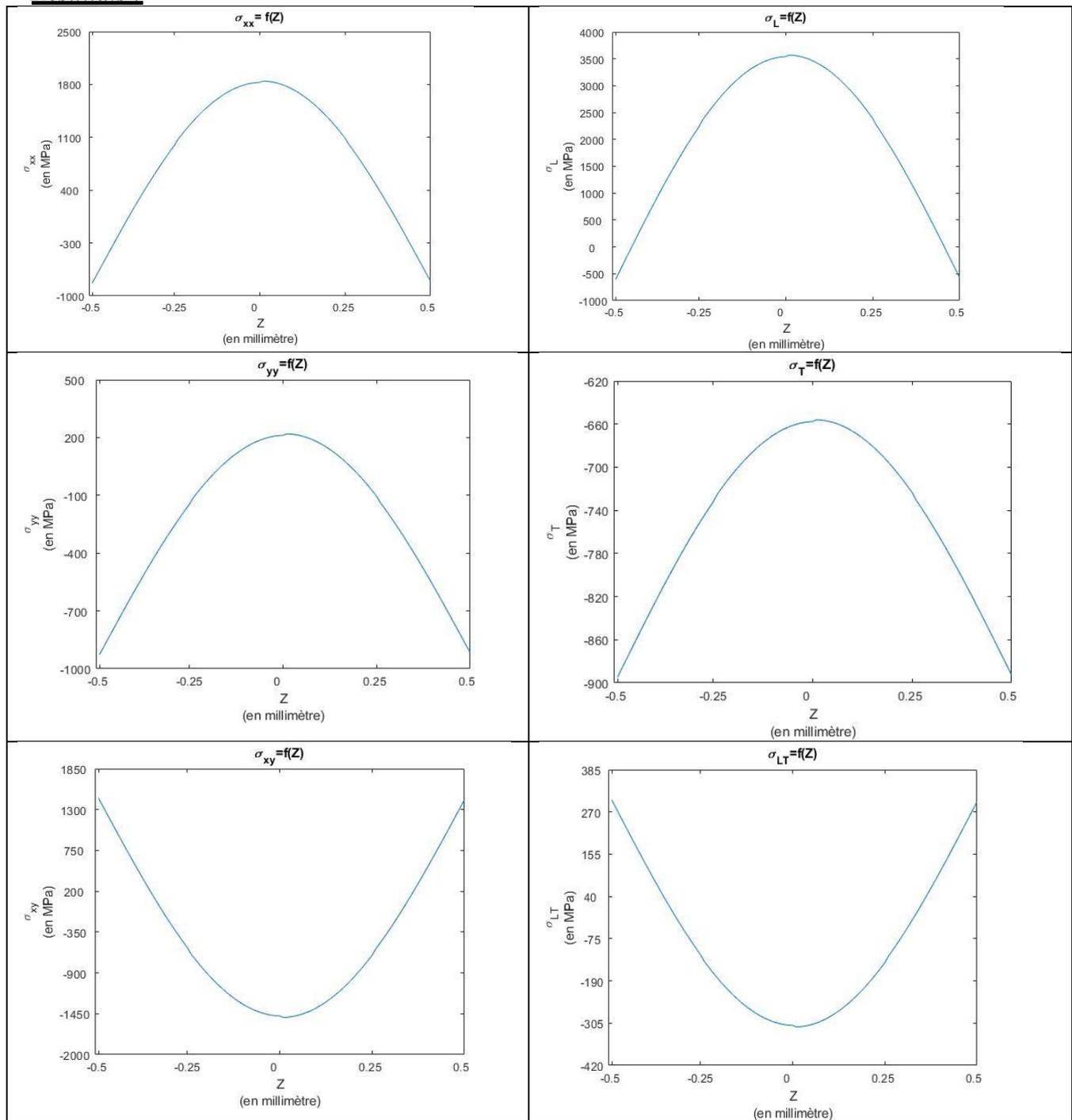


Figure III.16. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hydrothermiques

✓ **Cas hygrothermo-mécaniques :**

Dans ce cas on a superposé les cas précédant dans une seule simulation ;

➤ **Résultats :**

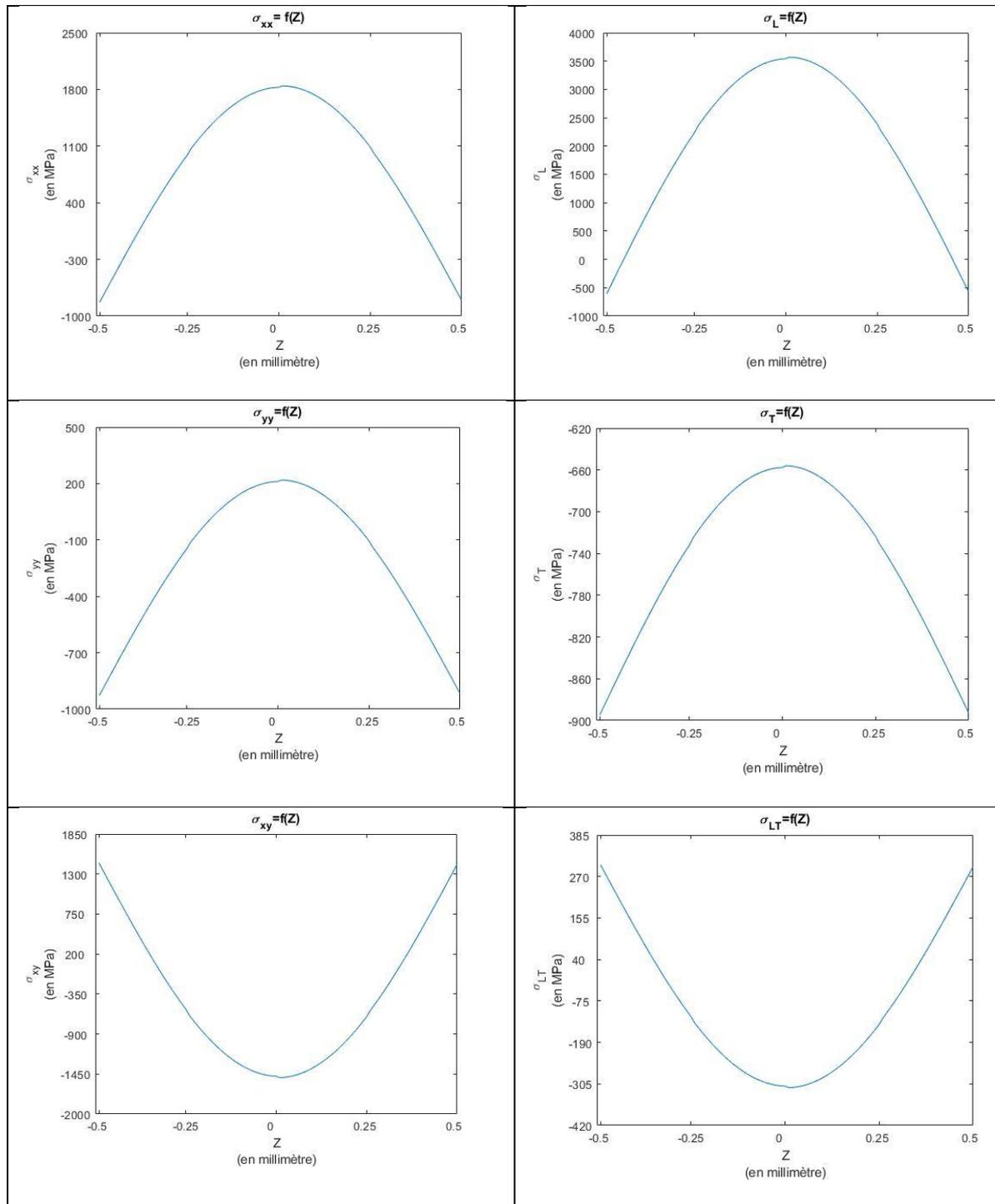


Figure III.17. Les contraintes dans LT et XY en appliquant les efforts hydro-thermomécaniques.

➤ **Interprétations et commentaires :**

Les simulations précédentes traitent le cas des différentes combinaisons de la température et de l'humidité avec des sollicitations mécaniques, les cas traités sont :

- *Cas mécanique ;*
- *Cas thermomécanique ;*
- *Cas hygromécanique ;*
- *Cas hygrothermique ;*
- *Cas hygro-thermomécanique.*

Pour les différents cas cités nous avons remarqué que l'allure et les valeurs des différentes contraintes ont changées.

Pour le cas mécanique et thermomécanique nous avons remarqué que l'ordre de grandeur des contraintes est le même, les contraintes thermiques sont négligeables par rapport au cas mécanique, pour le cas hygromécanique les contraintes hygroscopiques ne sont pas négligeable et ils ont un ordre de grandeur important et même les formes des courbes deviennent curviligne, dans cette simulation l'influence de la température sur l'humidité n'est pas abordé.

Dans les sections ci-dessous on va étudier l'influence des paramètres environnementaux :

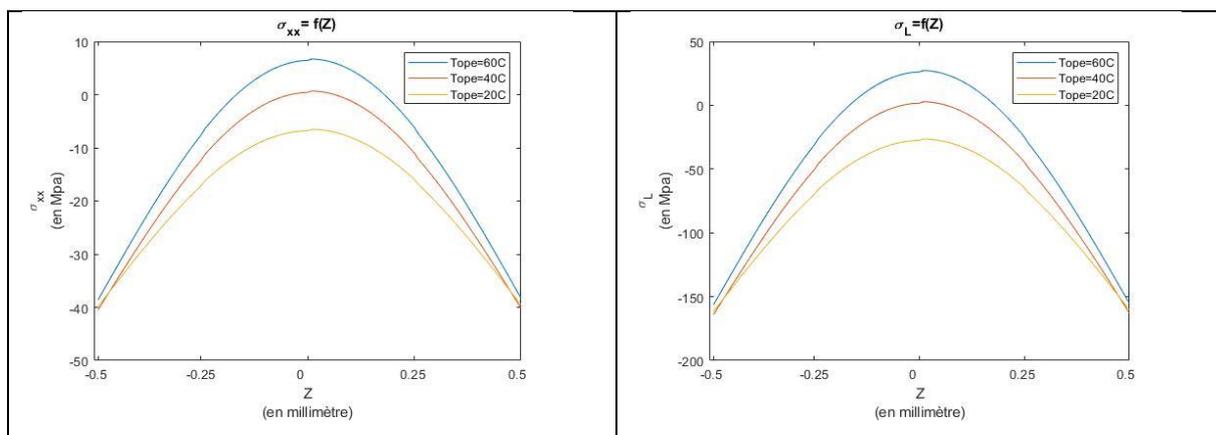
III.3.1.5. Simulation 1 : Influence de la température opérationnelle

Pour montrer l'effet de température de l'environnement, on a simulé le comportement des stratifiés dans plusieurs cas de température :

Tableau III.6. Les données de simulation 1. [09]

T_0 (°C)	T (°C)	α_L (10^{-6} k^{-1})	α_T (10^{-6} k^{-1})	C_0	C	β_L	β_T	HR
180	20	0.02	22.5	0	C(t) à	0.02	22.5	40%
	40				t50%			
	60				saturation			

➤ **Résultats :**



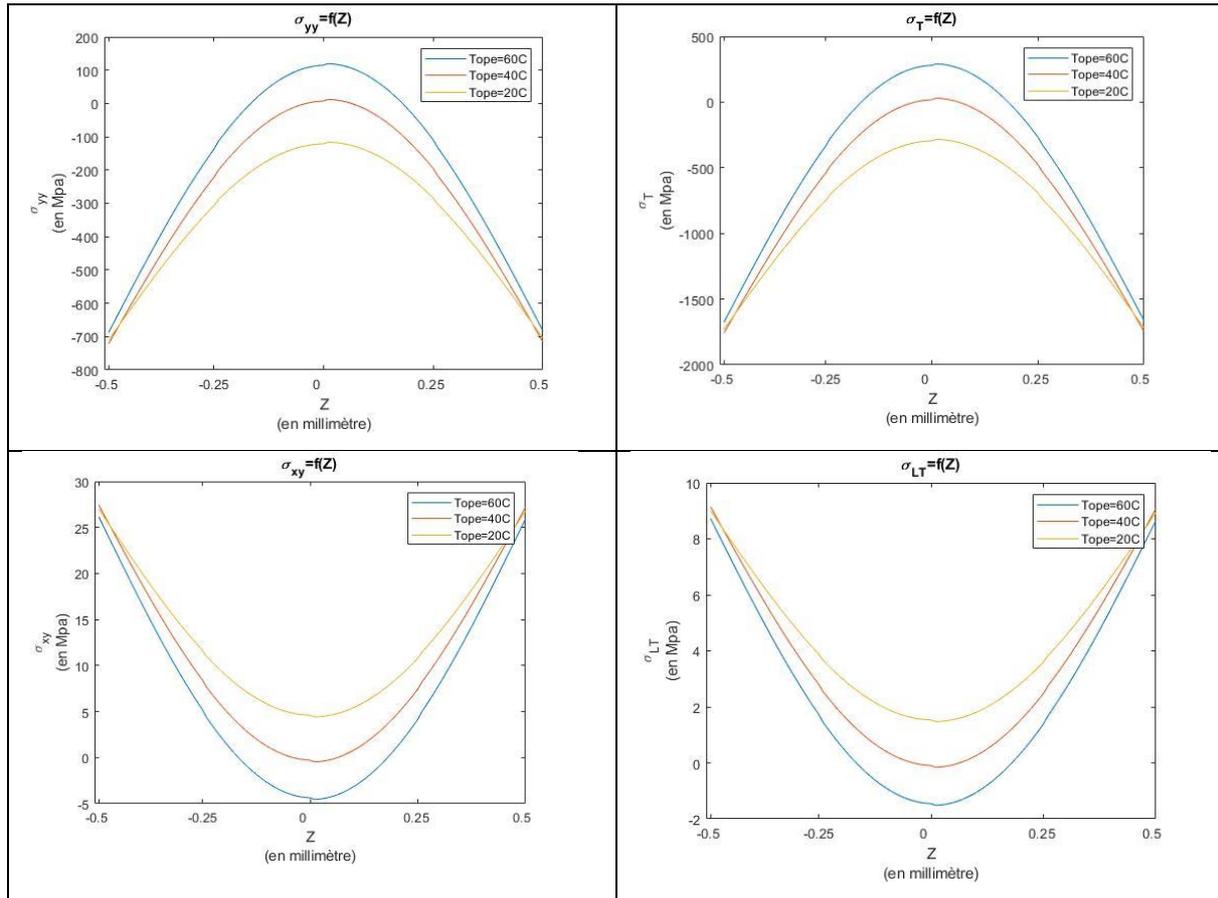


Figure III.18. Les contraintes dans LT et XY, [T=20°C, T=40°C et T=60°C] (-45°/30°/30°/-45°).

➤ **Interprétation et commentaires :**

Les états de contraintes de cette section montrent une faible influence de la température opérationnelle sur le comportement du stratifié, des fois les valeurs des contraintes sont proportionnelles avec la température (cas de σ_L), et des fois c'est le contraire (cas de σ_T), le comportement du stratifié change avec la température d'une manière très faible et celui-là est dû à l'ordre de la grandeur du coefficient de dilatation thermique.

III.3.1.6. Simulation 2 : Influence de la température de référence

Maintenant, on varie la température de référence :

Tableau III.7. Les données de simulation 2.

T_0 (°C)	T (°C)	α_L (10^{-6} k^{-1})	α_T (10^{-6} k^{-1})	C_0	C	β_L	β_T	HR
120	40	0.02	22.5	0	C(t) à	0.02	22.5	40%
150					t50%			
180					saturation			

➤ **Résultats :**

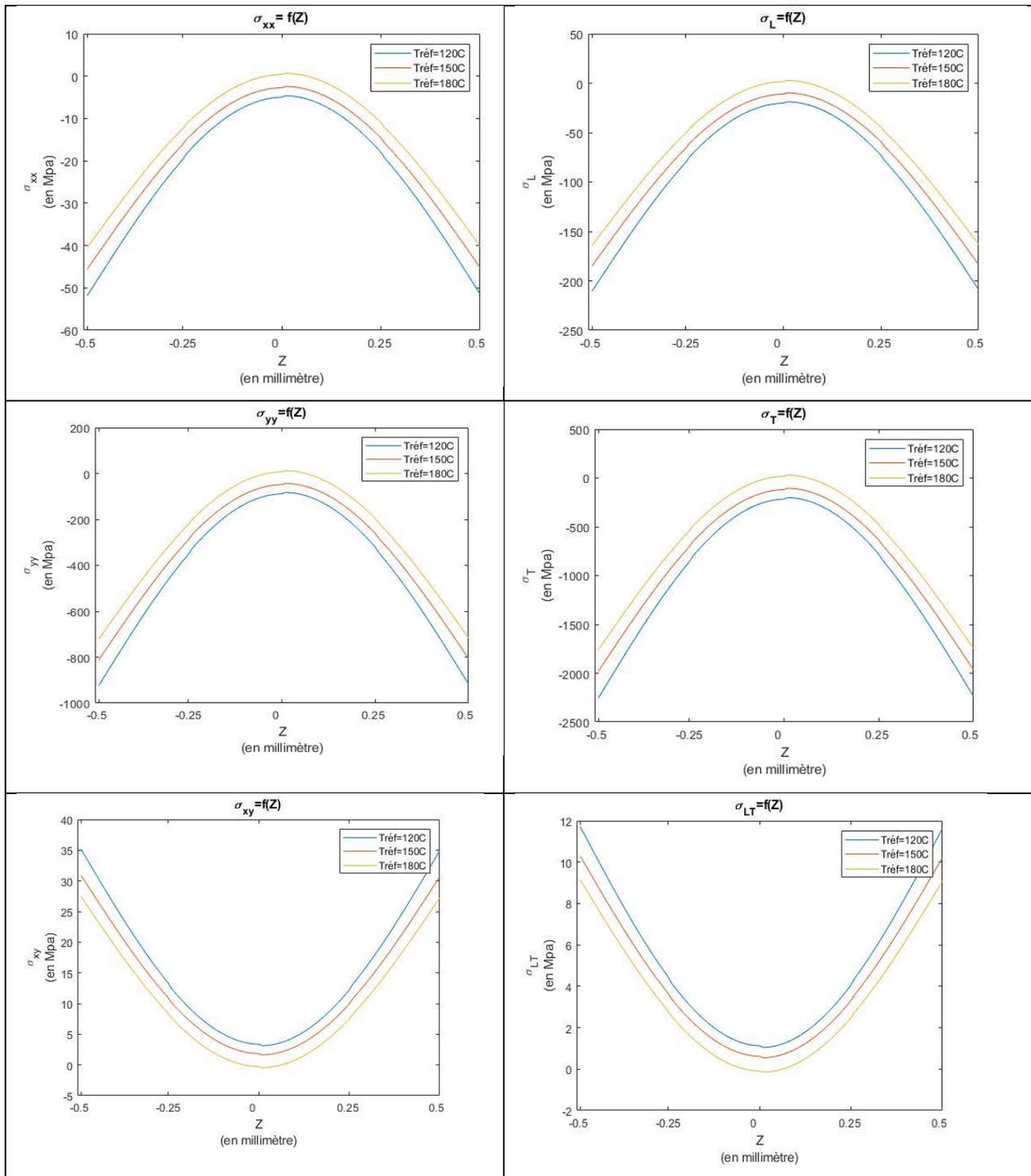


Figure III.19. Les contraintes dans LT et XY, [$T_0=180^\circ\text{C}$, $T_0=150^\circ\text{C}$ et $T_0=120^\circ\text{C}$] ($-45^\circ/30^\circ/30^\circ/-45^\circ$).

➤ **Interprétations et commentaires :**

Dans cette section nous avons simulé le comportement du stratifié composite dans un environnement de $T=40^\circ\text{C}$, avec une variation de la température de référence pour voir qu'elle est l'influence de cette dernière, le but de cette simulation est de prouver que si on arrive techniquement à réduire la température de référence cela va nous permettre d'avoir un état de contrainte moins important pour la même température opérationnelle T.

III.3.1.7. Simulation 3 : Influence d'humidité relative

Cette simulation traite l'influence de l'humidité de l'environnement entourant le matériau composite :

Tableau III.8. Les données de simulation 3.

T_0 (°C)	T (°C)	α_L (10^{-6} k^{-1})	α_T (10^{-6} k^{-1})	C_0	C	β_L	β_T	HR
180	40	0.02	22.5	0	C(t) à t50% saturation	0.02	22.5	20% 40% 80%

➤ **Résultats :**

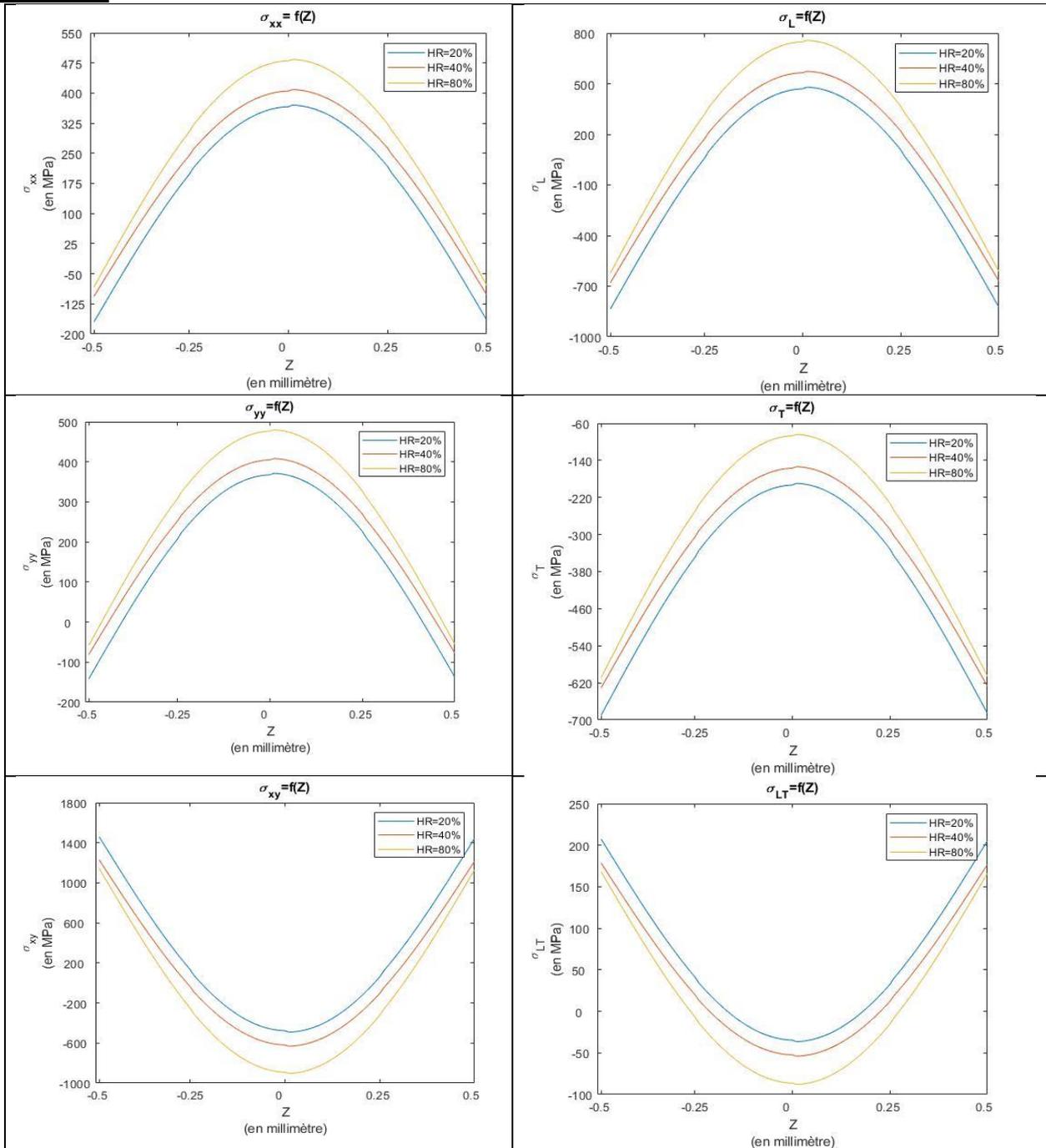


Figure III.20. Les contraintes dans LT et XY, [HR=20%, HR=40%, et HR=80%,] (-45°/30°/30°/-45°).

➤ **Interprétations et commentaires :**

Dans cette section nous avons simulé le comportement d'un stratifié composite dans différents environnements en terme de taux d'humidité (HR =20%,40%,80%) avec une concentration initiale égale à zéro à l'intérieur du stratifié(non contaminé) , chaque taux d'humidité génère une concentration relative à ce dernier , les graphes montre une forte influence d'humidité sur l'état de contrainte , les sollicitations sont généralement proportionnelle aux taux d'humidité et ont une forme curvilignes, pour des conditions extrême d'humidité l'ordre de grandeur des contraintes passe au GPa, et la rupture peut être causée par des contraintes hygroscopique.

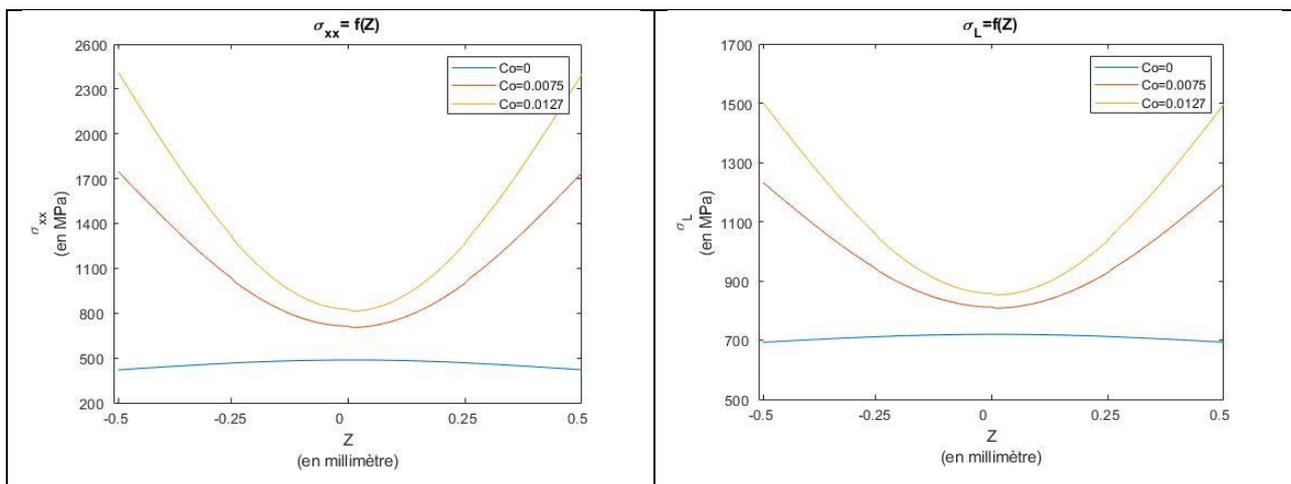
III.3.1.8. Simulation 4 : Influence de la concentration de référence

On varie les valeurs de la concentration de référence du matériau composite:

Tableau III.9. Les données de simulation 4.

T_0 (°C)	T (°C)	$\alpha_L (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	$\alpha_T (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	C_0	C	β_L	β_T	HR
180	40	0.02	22.5	0 0.0075 0.0127	C(t) à t50% saturation	0.02	22.5	40%

➤ **Résultats :**



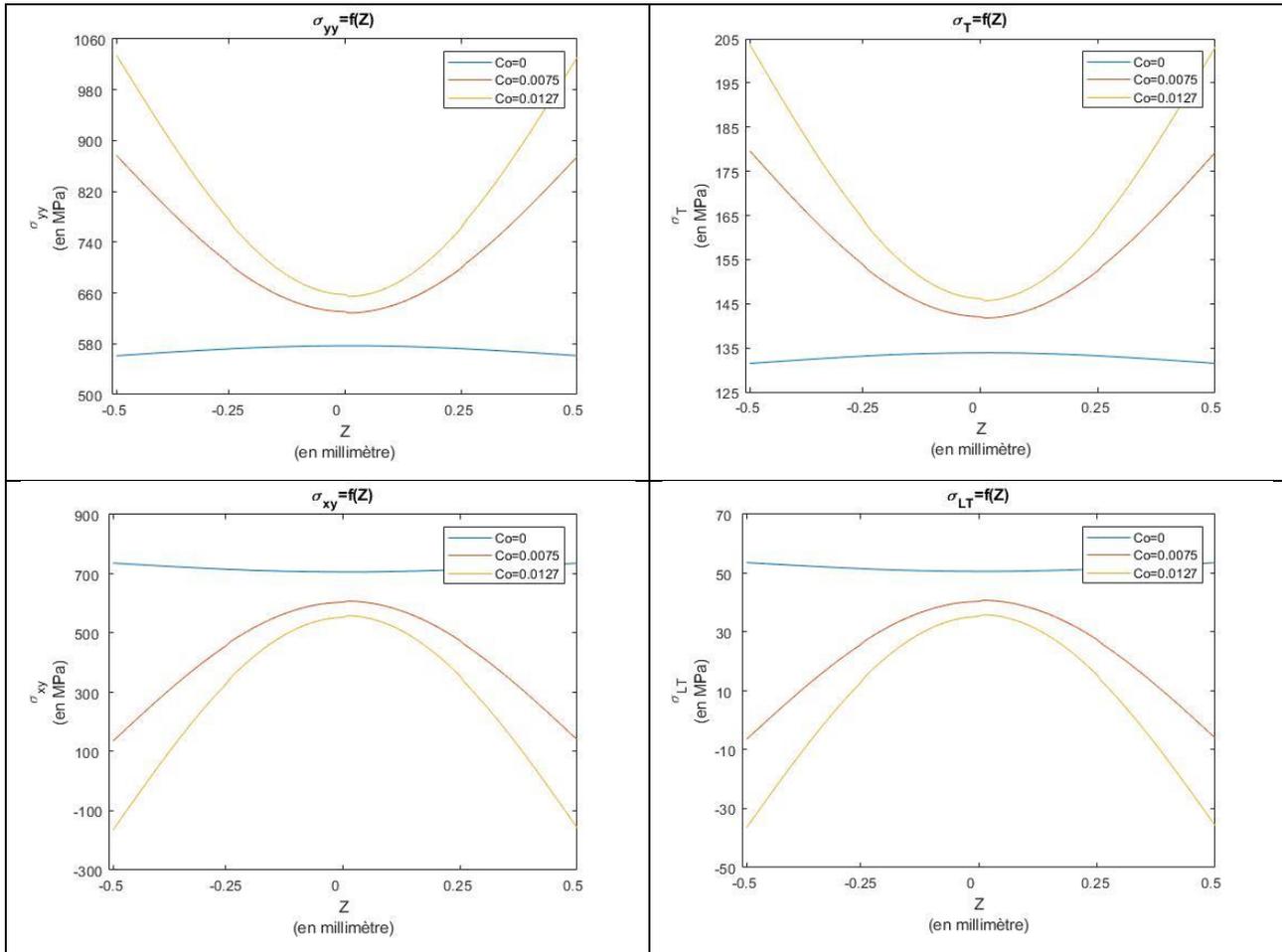


Figure III.21. Les contraintes dans LT et XY, [$C_0=0$, $C_0=0.0075$ et $C_0=0.0127$] ($-45^\circ/30^\circ//30^\circ/-45^\circ$).

➤ **Interprétations et commentaires :**

Cette simulation traite l'influence de la concentration initiale sur l'état de contrainte, les graphes montre une dépendance proportionnelle direct entre la concentration initiale, les commentaires de la section précédente sont applicables ici.

III.3.1.9. Simulation 5 : Influence du matériau

Dans cette section on va refaire la simulation 03 pour deux types de matériaux T300/5208 et AS/3501-5.

Tableau III.10. Caractéristiques mécaniques de AS/3501-5. [20]

E_L (GPa)	E_T (GPa)	ν_{LT}	G_{LT} (GPa)	$\alpha_L (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	$\alpha_T (10^{-6} \text{ k}^{-1})$	β_L	β_T
138	8.96	0.3	7.1	0.31	28.1	0	0.44

➤ **Résultats :**

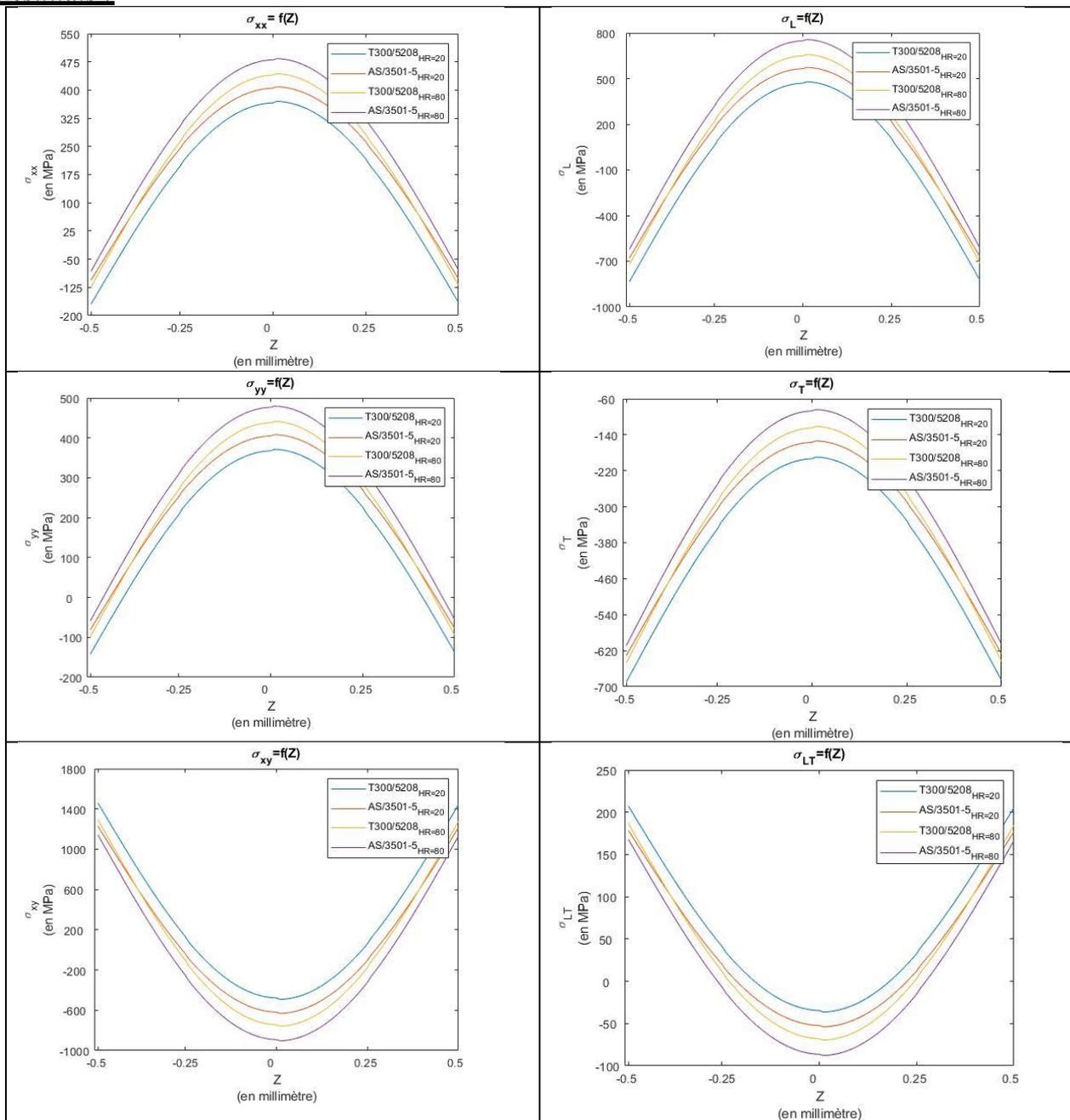


Figure III.22. Les contraintes dans LT et XY, [T300/5208 et AS/3501-5 à HR=20% et HR=80%] (-45°/30°/30°/-45°).

➤ **Interprétations et commentaires :**

A travers la recherche bibliographique, on a remarqué que chaque matériau est distingué de l'autre par sa rigidité, sa résistance et ses caractéristiques thermique et hygroscopique et dans le but d'examiner l'effet du matériau du stratifié sur le comportement de ce dernier, nous avons simulé le comportement de deux stratifié de différents matériaux dans des conditions environnementales similaire, les résultats montrent un comportement différents pour les mêmes conditions environnementales, la différence est dû aux caractéristiques thermique et hygroscopique qui sont propre à chaque matériau, il est possible de réduire

l'états de contraintes par le choix du matériau adéquat par conséquence chaque matériau est conçu pour une utilisation correspondante dans l'industrie.

Conclusion

Durant ce travail un programme informatique sous Matlab a été développé, ce dernier nous permis de simuler le comportement des stratifiés composites sollicités par des forces mécaniques extérieures et travaillant dans des conditions environnementales variables en terme de température/ humidité relative,

Les sollicitations causées par les paramètres environnementaux ont été prisent en considération lors du calcul des états des contraintes.

Les résultats ont montré une grande contribution de ces derniers dans l'état de contrainte d'où la nécessité de les prendre en considération dans les phases d'engineering des structures composites aéronautiques vu que ces dernières opèrent dans des conditions environnementales variables et extrêmes (altitude et vitesse).

Les résultats ont montré une très grande influence des paramètres de référence de fabrication (T_0 , C_0) sur les états des contraintes génères et leurs forme, donc une amélioration de ces derniers va contribuer significativement dans la réduction des contraintes dû à l'environnement.

Le matériau du stratifié peut jouer un rôle major dans la réduction des contraintes dû à l'environnement.

Les matériaux composites sont sensibles aux paramètres d'environnement, tels que température et humidité. L'absorption d'humidité et sa distribution non uniforme causée par les changements dans l'humidité relative de l'environnement peuvent engendrer des contraintes résiduelles importantes dans le stratifié qui conduisent à la ruine de la structure, L'analyse a montré l'existence de contraintes résiduelles lors de l'absorption est importante.

La prise en compte des contraintes hygroscopiques s'impose lors d'une analyse mécanique et d'une étude à la rupture. Le même phénomène est observé pour l'effet de température.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] Khalafa. Amar, "Étude de comportement mécanique d'un matériau composite stratifié", Mémoire de magistère, M'hamed Bouguera, Boumerdes, Algerie. 2010.
- [2] R.JONES, "Mechanics of composite materials", Mc Graw-Hill Company, 1975.
- [3] J.AUCHER, "Étude comparative du comportement de composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable", Institut National des Sciences appliquées de Rouen, Thèse soutenue le 8 décembre 2009.
- [4] F.X.IRISARRI, "Stratégies de calcul pour l'optimisation multi objectif des structures composites", Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse, janvier 2009.
- [5] T.SAOUDI, "Contribution à la modélisation phénoménologique de l'endommagement par fatigue dans les matériaux composites à matrice thermodurcissable". Mémoire de magister, Ecole Militaire Polytechnique, Alger. Algerie. 2012.
- [6] Laurent Gornet. "Généralités sur les matériaux composites". Ecole d'ingénieur. 2008.
- [7] P.PROMBUT, "Caractérisation de la propagation de délaminage des stratifiés composites multidirectionnels", Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse I, Septembre 2007.
- [8] M.ELAFANI, "L'influence des nano composites SiO_2 sur les caractéristiques des matériaux", Mémoire du projet de fin d'étude, Ecole Militaire Polytechnique, Alger. Algerie. 2018.
- [9] O.KHALFAOUI, A.AIBECHE, "Analyse des contraintes hygrothermiques dans les stratifiés composite mince à matrice polymère avec élaboration d'une interface de calcul", Mémoire du projet de fin d'étude, Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales, Blida, Algerie, 2019.
- [10] J.Cocaud, S.Freour, A.Céline, F.Jacquemin, "Vers une méthodologie d'identification des paramètres de diffusion d'eau dans les polymères et composites", Conference Paper, Université de Nantes, Nantes, France, 2017.
- [11] Y.PERROT, "Influence des propriétés de la matrice sur le comportement mécanique de matériaux composites verre/polyester utilisée en construction navale de plaisance — Cas des résines polyester limitant les émissions de styrène", Thèse de Doctorat de l'Université de Bretagne Sud, Octobre 2006.
- [12] P.NIMDUM, "dimensionnement en fatigue des structures ferroviaires en composites épais", Thèse de Doctorat de l'école des mines de paris, Mars 2009.

- [13] J.M.BERTHLOT, “Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures”, Édition technique et Documentation, 1999.
- [14] Hadadi. Manel, ”Etude numérique avec comparaison expérimentale des propriétés thermophysiques des matériaux composites à matrice polymère”, Mémoire de magistère, Université de Ferhat Abbas, Sétif, Algérie.
- [15] A. R. Blythe, ”Electrical resistivity measurements of polymer materials”, Poly Test,4 195-209, 1984.
- [16] B.Boukert, ”Prise en compte du vieillissement hygrothermique dans l’analyse du comportement des composites hybrides”, Memoire de Magister,Institut d’aeronautique et des etudes spatiale,Blida, juillet 2011.
- [17] J.-M. Berthelot, “Comportement Mécanique des Stratifiés et des Sandwiches”, chez Mise en œuvre et Architecture des matériaux composites, France, 2013, pp. 284-301.
- [18] JN.Reddy, “Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis”, CRC Press, second edition 2004.
- [19] J.-M. Berthelot, “Matériaux composites,Comportement mécanique et analyse des structures”, Paris Milan Barcelone Bonn: Institut universitaire de technologie. Université du Maine. Le Mans et institut supérieur des matériaux du Mans, 1992.
- [20] Z.Sereir, E.A. Adda-Bedia , “Use of hybrid composites for the reduction of hygroscopic stresses at edges of plates exposed to the symmetrical environmental conditions ”,ELSEVIER, October 2005.
- [21] H.S CARSLAW and J.C JAEGER, « Operational methods in applied mathematics», Clarendon Press, Oxford.
- [22] J. CRANK, « The mathematics of diffusion », 2nd edition. Oxford England: Clarendon Press, 1975.