

III. 1 introduction :

Les fuselages d'aéronefs sont constitués, de minces feuilles de matériau renforcées par de grands nombres de longerons longitudinaux et de cadres transversaux. Généralement, ils portent des moments de flexion, de cisaillement les forces, et les charges de torsion, qui induisent des contraintes axiales dans les cadres et le revêtement, ainsi que le cisaillement la résistance des cadres aux forces de cisaillement sont généralement ignorée. En outre, la distance entre les bandes adjacentes est généralement petite, de sorte que la variation du flux de cisaillement dans le panneau de connexion est petite. Il est donc raisonnable de supposer que le flux de cisaillement est constant entre les panneaux. Pour que l'analyse soit simplifiée à l'analyse d'une section idéalisée dans laquelle les lisses portent tous les contraintes directes alors que le revêtement n'est efficace que dans le cisaillement. La capacité de transport de la contrainte directe du revêtement peut être autorisée en augmentant les zones du moment fléchissant. L'analyse des fuselages implique donc le calcul des contraintes directes dans les cordes et la répartition des contraintes de cisaillement dans le revêtement ; ces dernières sont également requises dans l'analyse des cadres transversaux.

Les contraintes normales sont développées dans la direction de la coordonnée x σ_{xx} dans les poutres en raison des charges axiales (la traction et la trainée) et des moments de flexion M_y et M_x . L'objet de cette section sera de déterminer les composantes axiales de la contrainte σ_{xx} et de la déformation ϵ_{xx} dues à ces trois composantes de la charge

Les quatre composantes restantes de la charge M_x M_y S_x et S_y seront examinées dans le chapitre suivant.

III.1.1. Hypothèses

La théorie des poutres avancées comporte deux hypothèses simplificatrices importantes :

- Les composantes transversales de la contrainte normale σ_{yy} et σ_{xx} sont Supposées négligeables par rapport à la contrainte axiale σ_{zz} .
- Les sections transversales sont supposées rester planes et normales par rapport à l'axe de déformation.

Comme représenté sur la figure ci-dessous

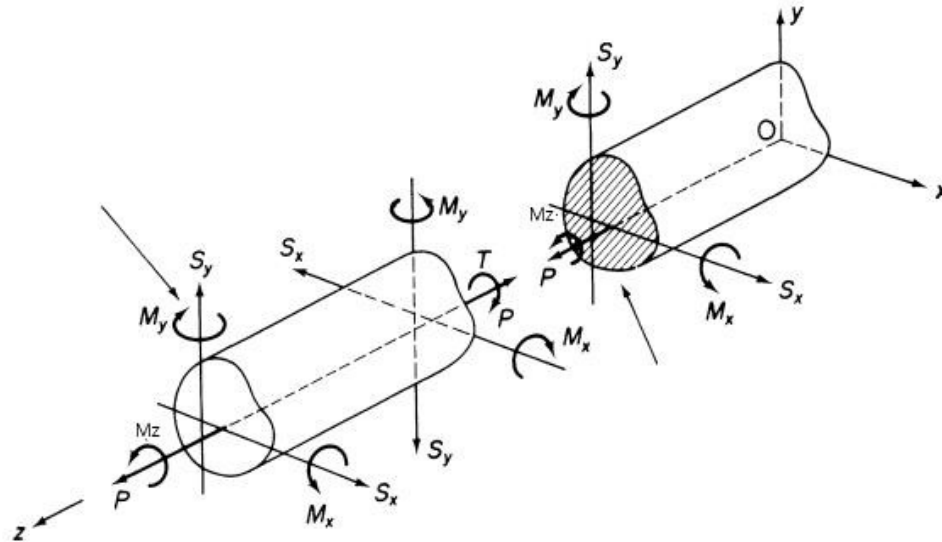


Figure III.1: Cinématique d'une poutre

Cette hypothèse (2) s'appelle l'hypothèse d'Euler Bernoulli et pour cette raison, cette théorie est appelée la théorie des poutres Euler Bernoulli, on peut voir à partir de la figure qu'un énoncé mathématique de cette hypothèse est donné par :

$$w(x, y, z) = w_0 - \theta_x(z)y + \theta_y(z)x \quad (3.1)[7]$$

D'où $u_0 \equiv u(x, 0, 0)$. On peut voir que le terme u_0 est dû à l'extension axiale de la poutre, alors que les deux derniers termes sont causés par des rotations dues à la flexion autour des axes z et y , respectivement. Dans le cas où $M_y = 0$.

Il n'y a pas de flexion en dehors du plan $(x-y)$ et l'équation se réduit à :

$$w(x, y, z) = w_0 - \theta_z(z)y \quad (3.2)$$

III.2 La flexion

III.2.1 Contraintes et déformations axiales dans les poutres

Considérons une poutre de composition de matériau homogène et pour lequel la température est la même en tout point et en tout temps :

La déformation ε_{xx} est donnée par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} \quad (3.3)$$

Et la contrainte correspondante est :

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{dw_0}{dz} - y \frac{d\theta_x}{dz} + z \frac{d\theta_y}{dz} \right) \quad (3.4)$$

Les efforts intérieurs sont :

$$N = \iint \sigma_{xx} dA = EA \frac{dw_0}{dx} \quad (3.5)$$

Avec A est la somme des sections des lisses

$$M_y = \iint \sigma_{xx} x dA = E \frac{d\theta_y}{dz} I_{yy} - E \frac{d\theta_x}{dz} I_{xy} \quad (3.6)$$

$$M_x = - \iint \sigma_{yy} y dA = E \frac{d\theta_x}{dz} I_{xx} - E \frac{d\theta_y}{dz} I_{yx} \quad (3.7)$$

Où E est le module de Young et I sont les moments quadratique par rapport aux axes :

$$I_{xx} = \int y^2 ds \quad (3.8)$$

$$I_{yy} = \int x^2 ds \quad (3.9)$$

$$I_{xy} = \int xy ds \quad (3.10)[7]$$

Calcul du centre de gravité :

$$N = \int \sigma_{xx} dA \quad (3.11)[7]$$

$$M_x = \int \sigma_{xx} y dA \quad (3.12)$$

$$M_x = \int \sigma_{xx} x dA \quad (3.13)$$

On résolvant le system d'équations (3.6) et (3.7) les composantes σ_{zz} et ε_{zz} pour une poutre homogène sont :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\frac{M_x I_{yy} + M_y I_{yx}}{I_{yy} I_{xx} - I_{yx}^2} \right) y + \left(\frac{M_y I_{xx} + M_x I_{yx}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) x \quad (3.14)[7]$$

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{M_x I_{yy} + M_y I_{yx}}{I_{yy} I_{xx} - I_{yx}^2} \right) y + \left(\frac{M_y I_{xx} + M_x I_{yx}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \right) x \quad (3.15)$$

III.2.2 Déformation due à la flexion et à l'extension

Il est possible de déterminer les trois composantes du déplacement, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ en tous les points de la poutre. Toutefois, il est d'une importance pratique de ne déterminer que les trois composantes du déplacement le long de l'axe centrale.

$$u_0 \equiv u(z, 0, 0), \quad v_0 \equiv v(z, 0, 0), \quad w_0 \equiv w(z, 0, 0).$$

$$\frac{dw_0}{dz} = \frac{N}{EA} \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = \frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{E(I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2)} \quad \frac{d^2 u_0}{dz^2} \quad (3.17)$$

$$= \frac{M_y I_{yy} + M_x I_{xy}}{E(I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2)} \quad (3.18)$$

III.3. Le cisaillement

Pour les poutres soumises à une flexion pure, seules des contraintes normales de traction et de compression sont développées dans l'élément de flexion. Dans la plupart des situations, les chargements appliqués à une poutre créent une flexion non uniforme. C'est-à-dire que les moments de flexion internes sont accompagnés de forces de cisaillement internes.

En raison de la flexion non uniforme, des contraintes de cisaillement ainsi que des contraintes normales sont produites dans la poutre.

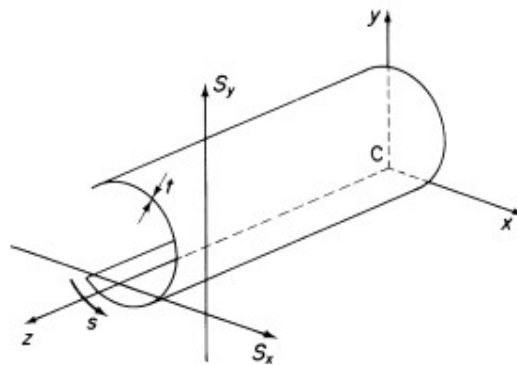


Figure III.2. cisaillement d'une poutre

III.3.1 Flux de cisaillement

L'élément de tôle d'épaisseur 't' est en équilibre sous l'effet des chargements normaux σ_z et σ_s et des chargements de cisaillements τ_{sz} et τ_{zs} représentés par leurs flux de cisaillement 'q' tel que :

$$\tau_{sz} = \tau_{zs} = \frac{q}{t} \quad (3.19)$$

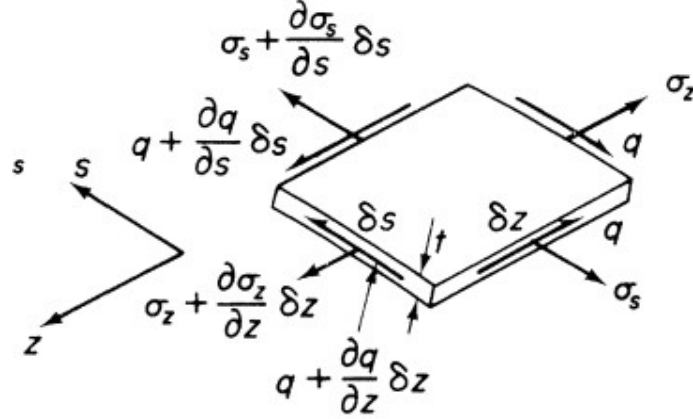


Figure III.3. L'équilibre des charges d'un élément de tôle mince.

Le bilan d'équilibre suivant l'axe 'z', donne :

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{3.20}$$

Le flux de cisaillement est la distribution des charges sur la poutre, il peut s'écrire sous la forme (3.20)

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \tag{3.21}$$

$$q_s - q_{s,0} = - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds \tag{3.22}$$

$$q_s = q_{s,0} - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{yy} I_{xx} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds \tag{3.23}$$

Quand à une section circulaire donc le centre de cisaillement est confondu avec le centre de gravité

$$q_{s,0} = 0 \text{ Et } \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_b$$

III.4. La torsion

Soit la section fermée présentée par la figure(III.4), est soumise à un moment de torsion M_z autour du point 'O'. L'équilibre de la section se traduit par :

$$M_z = \int_1^2 r q \, ds \quad (3.24)$$

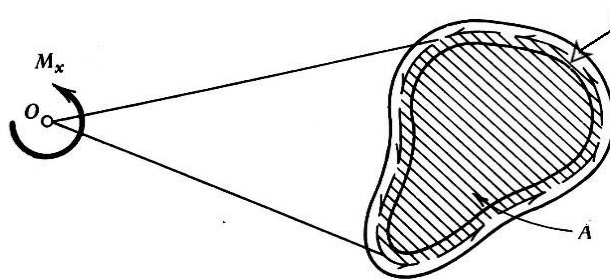


Figure III.4 : Intégration autour de toute la section fermée

$$M_z = q \int_1^2 r \, ds = 2q \int_1^2 r \frac{ds}{2} = 2q \int_1^2 dA = 2qA \quad (3.25)$$

D'où la formule de Brett, donnant le flux de cisaillement de torsion :

$$\mathbf{q}_{torsion} = \frac{M_z}{2A} \quad (3.26)$$

Flux de cisaillement global dans une section fermée à parois mince est la somme de flux du cisaillement dû à l'effort tranchant q_s et le flux de cisaillement dû au moment de torsion

$q_{torsion}$

$$q_{Total} = q_s + q_{torsion} \quad (3.27)$$

III.5. Méthode énergétique

III.5.1. Méthode de l'énergie complémentaire

Quand un élément d'une structure est soumis à une charge croissante N , comme le membre s'étend, la charge fonctionne, et d'après la conservation d'énergie, le travail stocké dans l'élément sous forme d'énergie de contrainte. la figure (3.5) montre la courbe (charge/déflexion). l'énergie de déformation U produite par une charge N et l'extension correspondante y est :

$$C = \int_0^y y dp \quad (3.28)$$

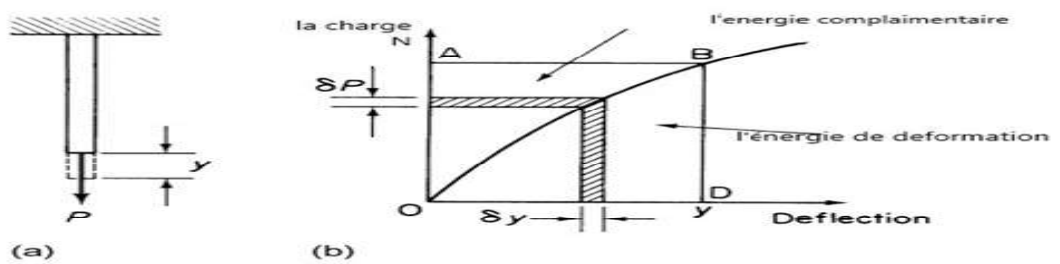


Figure III .5. L'énergie de déformation et l'énergie complémentaire

D'après le théorème d'énergie :

$$\frac{\partial C}{\partial P} = y \quad (3.29)$$

Supposant que la courbure s'écrit sous la forme :

$$P = by^n y \quad (3.30)$$

Ou b et n sont des constantes

$$C = \int_0^y y dP = n \int_0^y by^n dy \quad (3.31)$$

$$\frac{dC}{dP} = y \quad (3.32)$$

III.5.2 Application aux problèmes de flexion des cadres:

Généralement, les problèmes de flexion sont le plus facilement résolus par l'approche énergétique complémentaire. Nous illustrons la méthode par référence aux déflexions du cadre, qui peut ou non posséder une élasticité linéaire. Dans notre étude on a un cercle soumis à une charge (le poids) comme montre la figure suivante :

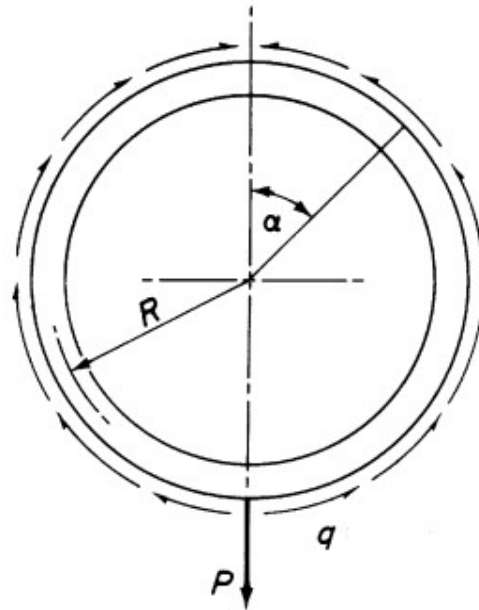


Figure III.6. L'équilibre entre le poids et flux de cisaillement.

La section A sur le plan vertical est symétrique. Les inconnues sont donc le moment de flexion M_a et la force normale N_a . Nous procédons, comme dans l'exemple précédent, en écrivant l'énergie totale complémentaire C du système. Ensuite, en négligeant les contraintes de cisaillement,

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \int_0^M d\theta \frac{dM}{dp} - P\Delta \quad (3.33)$$

$$C = \int_{\text{cercle}} \int_0^M d\theta dM - P\Delta \quad (3.34)$$

Dans laquelle D est la déviation du point d'application de P par rapport au haut du cadre. Notez que M_a et N_a ne sont pas contribuent au complément d'énergie potentielle du système, puisque, par symétrie, la rotation et les déplacements horizontaux à A sont nuls. Du principe de la valeur stationnaire de l'énergie complémentaire totale,

$$\frac{dC}{dM_a} = \int \frac{d\theta dM}{dM_a} = 0 \quad (3.35)$$

Et

$$\frac{dC}{dN_a} = \int \frac{d\theta dM}{dN_a} = 0 \quad (3.36)$$

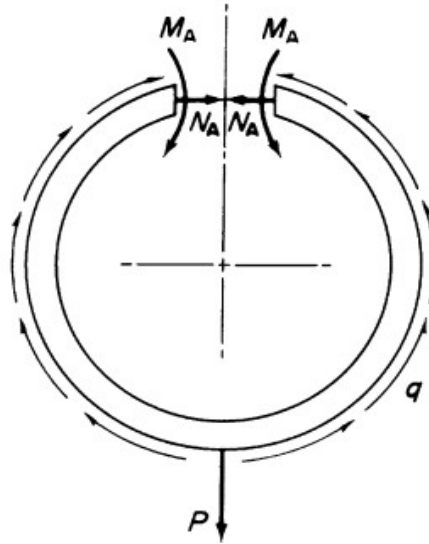


Figure III.7. Moment et effort normal

Le moment de flexion à une section radiale inclinée à un angle θ par rapport au diamètre vertical est,

$$M = M_A + N_A R(1 - \cos \theta) + \int_0^\theta q dR \, d\alpha \quad (3.37)$$

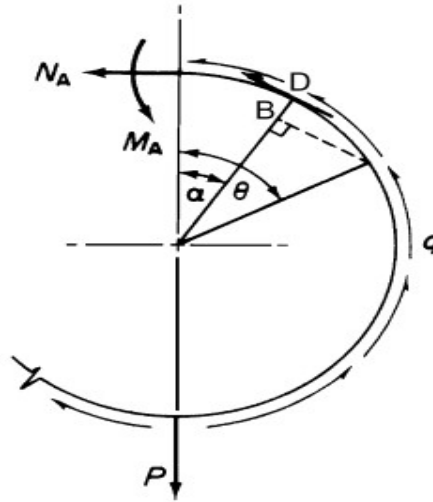


Figure III.8 le bras de levier

Avec d est le bras de levier de segment $[BD]$ comme montre la figure ci-dessus, tel que :

$$d = R - R \cos(\theta - \alpha) \quad (3.38)$$