

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DEHLEB DE BLIDA
USDB

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département : Aéronautique

Option : Construction

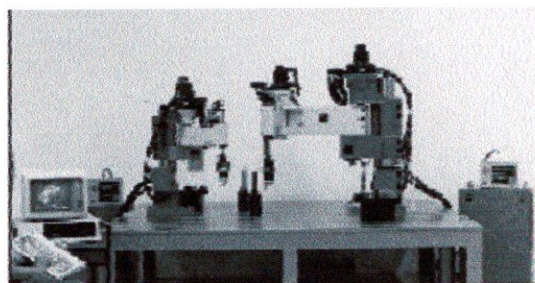
Spécialité : Structure



Projet de fin d'études pour l'obtention
d'un diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique

THEME :

*Programmation d'un robot
manipulateur des machines - outils
(Algérie- M.O.-1)*



PRESENTE PAR :

M^r: MEGHERBI MOSTEFA

M^r: BEDIAFE NADJIB

ENCADRE PAR :

D^r: ALLALI ABDERRAZAK

M^r: BENMISRA A.

ANNEE UNIVERSITAIRE 2005 /2006

Remerciements

Qu'il nous soit permis en ce jour mémorable d'exprimer ici nos plus vifs remerciements et notre gratitude, à tous ceux qui ont accepté de juger ce travail, ainsi qu'à tous ceux qui nous ont aidés à la mener à bien.

A notre promoteur D^r **ALLALI ABDERRAZAK** et CO- promoteur **BENMISRA** A qui a bien voulu diriger notre travail et aussi pour les conseils qu'il n'a pas cessé de nous prodiguer.

Nous adressons également nos vifs remerciements et notre

Profonde gratitude :

Au président et aux membres du jury pour l'honneur qu'ils

Nous font, en acceptant de juger notre travail.

Nous remercions aussi tous les professeurs et les membres d'encadrement qui nous ont soutenus durant notre formation à l'université et tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à

l'élaboration de ce mémoire.

A tous les enseignants qui ont contribué à notre formation depuis notre premier pas

à

l'université.

A decorative border of tulips surrounds the text. At the top left, there is a larger illustration of a tulip flower with its stem and leaves. The rest of the border consists of smaller, stylized tulip icons.

DEDICACE

*Je dédie ce modeste travail en témoignage
de toute mon affection et mon respect :*

A mon père, pour son sacrifice.

A ma très chère mère.

A mes chers frères : Mokhtar , Ahmed, Nouredin, et Miloud

A mes chères soeurs

A ma grande famille.

*A tous mes amis en particulier : Fares, Billel, Omar, Khalifa ,
Khaled, Amine, Farid, Mohamed, Bekare, Djamal, Moussa.*

A tous ceux et celles que j'aime

A mon binôme Nadjib et sa famille

A tous mes enseignants depuis mon premier pas dans l'université

A tous mes camarades de la promotion 2000

Mostefa



DEDICACE

A mon père

A ma très chère mère.

A mes chers frères : Salim, Soufiane, Sadek,

A mes chères sœurs

A mes neveux : Chiraz, Djohaena, Nour Elesleme

A toute ma famille.

*A tous mes amis Spécialement : D. Zaki, G.Hassene, M.Hamza, S.Salah,
S.Laid.*

A mon binôme M. Mostfa et sa famille

Je dédie ce Modeste travail

Nadjib

Sommaire

Page :

Introduction Générale	1
Chapitre I : Modèle géométrique	
I.1 Modèle géométrique.....	3
I.2 Modèle géométrique direct.....	4
I.2.1 Définition	4
I.2.2 Méthodes de calcul du modèle géométrique direct.....	5
I.2.3 Principe de la méthode de Denavit-Hartenberg	5
I.2.4 Calcul du modèle géométrique direct	5
I.2.4.1 Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié	5
a) Matrices de passage entre repères voisins	7
b) Expression des matrices de passage homogènes H_i^{i+1}	8
I.3 Modèle géométrique inverse.....	11
I.3.1 Définition.....	11
I.3.2 Méthodes de calcul du modèle géométrique inverse	12
a) Méthode géométrique.....	12
b) Méthode analytique	12
c) Méthodes numériques	12
I.3.3 Calcul du modèle géométrique inverse	12
I.4 Détermination des matrices de changement de repère $\langle i-1/i \rangle$ pour le robot type (ALG-MO-1).....	15
I.5 Espace de travail	19
I.5.1 Analyse de l'espace de travail du robot type (ALG – M 0-1)	19
I.5.2 Calcul de l'espace de travail du robot choisi.....	19
I.5.3 Algorithme simplifié du programme	20
Chapitre II : Modélisation Cinématique	
II.1 Modélisation cinématique	21
II.1.1 Modèle cinématique directe	22
II.1.2 Définition	22
II.2 Méthodes de calcul du modèle cinématique direct	22
II.2.1 Calcul du modèle cinématique direct à partir du modèle géométrique direct	22
II.2.2. Calcul du modèle cinématique direct par l'étude cinématique	24
i) Calcul de la matrice jacobienne cinématique	25
ii) Calcul de la matrice 1J_n	26
II.2.3. Décomposition de la matrice jacobienne en trois matrices	27
II.3. Modèle cinématique inverse	28
II.3.1. Définition	28
II.4. Méthodes de calcul du modèle cinématique inverse	28
II.4.1 Dérivation des modèles géométriques inverse	28
II.4.2 Inversion du modèle cinématique direct	29
II.5 Calcul de la matrice jacobienne pour le robot	30
II.5. Organigramme	34

Chapitre III : Modélisation dynamique

➤ par le principe de D'Alembert

III.1 Modèle dynamique	35
III.1. 1. Le formalisme de D'Alembert.....	35
III.1. 2. Calcul des vitesses et les accélérations des chaînons de robot	35
III. 1.2.1. Introduction	35
III. 1. 2.2 Première variante.....	36
III. 1.2.2.1 vitesses et accélération de chaînon (1)	36
III. 1.2.2.2 Vitesse et accélération de chaînon (2).....	38
III. 1. 2.2.3. Vitesse et accélération de chaînon (3).....	39
III. 1.2.2.4 Vitesse et accélération de chaînon (4)	40
III. 1.2.2.5 Vitesse et accélération de chaînon (5).....	41
III. 1. 2.3 Deuxième variante.....	43
III. 1. 2.3.1 Vitesse et accélération de chaînon (1).....	43
III. 1. 2.3.2. Vitesse et accélération de chaînon (2)	44
III. 1. 2.3.3. Vitesse et accélération de chaînon (3).....	46
III. 1. 2.3.4. Vitesse et accélération de chaînon (4)	47
III. 1. 2.3.5. Vitesse et accélération de chaînon (5).....	48
III. 1.3. Calcul les moments d'inerties des chaînons.....	49
III. 1.3.1. Le moment d'inertie pour un cylindre homogène pleine de rayon r et masse m..	49
III. 1. 3. 2. Moment d'inertie pour un parallélépipède homogène pleine.....	50
III. 1. 3. 3. Calcul du moment d'inertie des chaînons.....	52
III. 1.3. 3. 1 Calcul du moment d'inertie J_{z1} de chaînon (1) par rapport à son axe de rotation z_1 ...	52
III. 1. 3. 2.2. Calcul du moment d'inertie J_{z2} de chaînon (2) par rapport à son axe de rotation z_2	52
III.1.2.2.3. Calcul du moment d'inertie J_{z3} de chaînon (3) par rapport à son axe de rotation z_3 ..	53
III. 1.3. 2.4. Calcul du moment d'inertie J_{z4} de chaînon (4) par rapport à son axe x_4	54
III. 1.3. 2.5. Calcul du moment d'inertie $iz4$ de chaînon (5) par rapport à son axe X_5	54
III.1.4. Forces d'inertie et moments des forces d'inerties des chaînons.....	56
III.1.4.1. Les forces d'inertie.....	56
III.1.4.1.1. Calcul Les accélérations	56
III.1.4.1.1.1. Calcul de l'accélération de chaînon (1).....	57
III.1.4.1.1.2. Calcul de l'accélération de chaînon (2).....	58
III. 1.4.1.1.3. Calcul de l'accélération de chaînon (3).....	59
III.1.4.1.1.4. Calcul de l'accélération de chaînon (4).....	60
III. 1.4.1.1.5 Calcul de l'accélération de chaînon (5).....	62
III. 1.4.2. Les moments principaux des forces d'inerties des chaînons	63
III. 1.5. La détermination des équations de mouvement par le principe de D'Alembert.....	66
III. 1.5.1. Les équations d'équilibres du chaînon (5).....	67
III. 1.5.1.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes.....	67
III. 1.5.1.2 L'équation d'équilibre des moments résultants	69
III. 1.5.2. L'équation d'équilibre du chaînon (4).....	70
III. 1.5.2.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes.....	70
III. 1.5.2.2. L'équation d'équilibre des moments résultants	71
III. 1.5.3. L'équation d'équilibre du chaînon (3).....	72
III. 1.5.3.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes.....	72
III. 1.5.3.2 L'équation d'équilibre des moments résultants.....	73
III. 1.5.4. L'équation d'équilibre du chaînon (2).....	75
III. 1.5.4.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes.....	75
III. 1. 5.4.2. L'équation d'équilibre des moments résultants.....	76

III. 1.5.5. L'équation d'équilibre du chaînon (1)	77
III. 1.5.5.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes.....	77
III. 1.5.5.2. L'équation d'équilibre des moments résultantes.....	79
➤ par Les équations de Lagrange	
III.2.1 Introduction.....	80
III.2.2 Equations de Lagrange dans la dynamique du robot. (Modèle dynamique pour le robot Type (ALG-M.O-1))	80
III.2.2.1 Détermination du Moment d'inertie des chaînons.....	81
III.2.2.1.1 Représentation des paramètres géométriques des chaînons.....	81
III.2.2.1.2 Moment d'inertie du chaînon (1).....	82
III.2.2.1.3 Moment d'inertie de chaînon (2).....	82
III.2.2.1.4 Moment d'inertie du chaînon (3).....	83
III.2.2.1.5 Moment d'inertie du chaînon (4).....	84
III.2.2.1.6 : Moment d'inertie du chaînon (5)	85
III.2.2.2 L'énergie cinétique du robot.....	87
III.2.2.2.1 Energie cinétique du robot type (ALG-M.O -1).....	88
III. 2.2.2.1.a. Energie cinétique du chaînon (1)	88
III.2. 2.2.1.b Energie cinétique du chaînon (2).....	90
III.2. 2.2.1.c.Energie cinétique du chaînon (3).....	92
III. 2.2.2.1.d Energie cinétique du chaînon (4).....	95
III.2.2.2.1.e Energie cinétique du chaînon (5).....	98
III.2.2.3 Energie potentielle des robots	101
III.2.2.3.1 Energie potentielle du robot type (ALG-M.O-1).....	102
III.2.2.3.1.a Energie potentielle du chaînon (1).....	102
III.2.2.3.1.b Energie potentielle du chaînon (2)	103
III.2.2.3.1.c Energie potentielle du chaînon (3).....	103
III.2.2.3.1.D Energie potentielle du chaînon (4).....	103
III.2.2.3.1.e Energie potentielle du chaînon (5)	104
III.2.2.4. Forces généralisées.....	405
III.2.2.4.1 Forces généralisées du robot (ALG-M.O-1)	107
III.2.2.4.1.a Force généralisée du chaînon (1).....	108
III.2.2.4.1.b. Force généralisée de chaînon (2).....	109
III.2.2.4.1.c. Force généralisée de chaînon (3).....	110
III.2.2.4.1.d. Force généralisée du chaînon (4).....	111
III. 2.2.4.1.e. Force généralisée du chaînon (5)	112
III.2.2.5 .équation de Lagrange II ^{ème} type sous forme matricielle.....	113
III.2.2.6 .L'équation De Lagrange Du Robot Type (Alg-Mo-1).....	116
III.2.3.Organigramme Général	120
Chapitre IV : Etude et élaboration de projet du robot type (ALG-MO-I)	
IV. 1 Fiche technique du centre Fraisage – Alésage.....	122
IV. 1.1 Matériel.....	122
IV. 1.2 Utilisation	122
IV. 1.3 Caractéristiques du matériel	122
IV. 1.4 Machine équipée de commande numérique de contourage marque HOSLI 5Z ...	123
IV.2 Cycles de mouvement du robot sur le champ.....	125

IV.3 Fiche Technique du robot (ALG-MO-1)	127
IV.4 Titre de projet	128
IV.5 Domaine technique auquel se rapporte projet	128
IV.6 But de projet.....	128
IV.7 Etat de la technique antérieure.....	128
IV.8 Enoncé des figures.....	130
IV.9 Présentation de l'essence de projet et son mode de réalisation.....	130
IV.10 Revendications	133
IV.11 Le circuit hydraulique (voir schéma hydraulique)	134
IV.11.1 Essai à vide	134
IV.11.2 Mise en marche du module de rotation	134
IV.11.3 Mise en marche du module de déplacement vertical.....	134
IV.11.4 Mise en marche du module de déplacement horizontal du bras.....	134
IV.11.5 Mise en marche du module de la descente de l'organe terminal du robot.....	135
IV.11.6 Ouverture et fermeture de l'organe terminal	135
Simulation du robot.....	137
Conclusion générale	146
Annexe	

LISTES DES ILLUSTRATIONS

FIGURES

N°	TITRE	Page
Figure I.1	Repérage utilisé en robotique.	3
Figure I.2	Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié.	6
Figure I.3	Passage entre repères voisins.	7
Figure I.4	Angles d'Euler.	10
Figure I.5	les différents paramètres géométriques du robot type .	14
Figure I.6	les différents repères liés au corps du robot.	15
Figure I.7	Schéma simplifié du programme qui calcul l'espace de travail du robot.	20
Figure II.1	Positions singulières du robot Staubli RX-90.	24
Figure III.1.1	schéma de calcul du moment d'inertie.	51
Figure III-1-2	Les différentes forces agissantes sure les chaînon du robot.	66
Figure III.1.3	Les différentes forces agissantes sur le chaînon (5).	68
Figure III.1.4	Les différentes forces agissantes sur le chaînon (4).	70
Figure III.1.5	Les différentes forces agissantes sur le chaînon (3).	73
Figure III.1.6	Les différentes forces agissantes sur le chaînon (2).	75
Figure III.1.7	Les différentes forces agissantes sur le chaînon (1).	78
Figure III.2.1	schéma pour le calcul du moment d'inertie des chaîmons.	86
Figure III.2.2	Force de serrage.	108
Figure IV.1	Vue de la station de fraisage -alésage	
Figure IV.2	Schéma cinématique du robot industriel, avec la convention du cycle des mouvements.	

Figure IV.3	Vue en élévation et partiellement en coupe d'un robot.
Figure IV.4	Manipulateur, avec ces modules et la partie du circuit hydraulique est une vue en coupe du module de levage à un cylindre à double effet.
Figure IV.5	a présenté un module de rotation à deux cylindres.
Figure IV.6	Vue du module de déplacement longitudinal vers le bas de l'organe terminal.
Figure IV.7	a présenté le module de la main sous forme de mâchoire pour garantir une bonne adhérence.
Figure IV.8	Circuit hydraulique.

TABLEUAX

Tableau I.1	Les paramètres géométriques du robot type .	14
Tableau III.1.1	Masses et moment d'inertie .	55
Tableau III 2.2	Paramètres géométriques des chaîons.	81
Tableau IV.1	Fiche Technique du robot (ALG-MO-1).	126
Tableau IV.2	cycles de mouvements du robot sur champs.	127

LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISES :

R_f : Référentiel atelier ou site.

R_0 : Référentiel lié à la base du robot, il est défini par rapport à R_{FL} .

R_E : Référentiel lié à l'effecteur du robot, il est défini par rapport à R_0 .

R_p : Référentiel lié à la pièce (tâche), il est défini par rapport à R_f .

$q(t)$: Est le vecteur des variables articulaires. Il correspond aux valeurs

$X(t)$: Est le vecteur des variables opérationnelles .

n : Est le nombre de degrés de liberté du robot.

m : Peut avoir une valeur quelconque ($m \geq n$).

α_i : Angle entre z_i et z_{i+1} mesuré autour de x_i .

d_i : Distance entre z_i et z_{i+1} mesurée suivant x_i .

θ_i : Angle entre x_i et x_{i+1} mesuré autour de z_{i+1} .

r_i : Distance entre x_i et x_{i+1} mesurée suivant z_{i+1} .

A : Est la matrice de passage de R_i à R_{i+1} .

H_i^{i+1} : C'est Expression des matrices de passage homogènes.

F : Est le vecteur colonne des coordonnées de O_{i+1} dans R_i .
 A_{Eul} : Est la matrice d'orientation de R_n dans R_0 .
 ϕ, θ Et ψ : C'est les angles d'Euler.
 $J(q)$: Désigne la matrice Jacobienne.
 a_k : Est le vecteur unitaire porté par l'axe z_k .
 $L_{k,n}$: Est le vecteur d'origine O_k .
 \hat{a} : Transformer La matrice antisymétrique.
 J_{ij} : Est l'élément (i, j) de la matrice jacobienne J .
 V_n : Le vecteur vitesse de translation de l'organe terminal relativement au repère $\{R_0\}$.
 W_n : Le vecteur vitesse de rotation instantanée de l'organe terminal relativement repère $\{R_0\}$.
 ${}^s A_i$: est la matrice d'orientation.
 A : Couple cinématique rotoïde.
 a : Accélération.
 ${}^0 a(M)$: Accélération du point M .
 ${}^0 a(c_i)$: Accélération de point c_i (centre de gravité de chaînon(i)).
 a_2 : Hauteur de glissière
 a_3 : La distance entre le chaînon (2) et (3).
 a_4 : La distance entre le chaînon (3) et (4).
 B : Couple cinématique prismatique liée chaînon (1) et (2).
 b : Longueur du parallélépipède.
 C_j : Centre de gravité des chaînons (i).
 D : Couple cinématique prismatique liée aux chaînons (2) et (3).
 d : Distance entre les axes (HYGIENS).
 D_1 : Diamètre de la roue dentée.
 d_1 : Diamètre de la roue denté du chaînon (1).
 d_2 : Diamètre de la vis du chaînon (2).
 d_4 : Diamètre de la tige du vérin de chaînon (4).
 E : Couple cinématique prismatique liée chaînon (3) et (4).
 F_0 : Force technologique (de serrage).
 F_i'' : Force d'inertie.
 G^T : Matrice - colonne.
 G_n : Force de gravité du chaînon (n).
 H : Matrice pseudo-d'inertie.
 $\vec{h}_{i,n}$: Rayon des vecteurs entre le chaînon (i) et (n).
 H : Hauteur du cylindre.
 J_{c_j} : Tenseur d'inertie des chaînons.
 J_{z_j} : Moment d'inertie des chaînons.
 $J_{x_i x_i}$: Moment d'inertie de chaînon (i) par rapport à l'axe x_i .
 $J_{y_i y_i}$: Moment d'inertie de chaînon (i) par rapport à l'axe y_i .
 $J_{z_i z_i}$: Moment d'inertie de chaînon (i) par rapport à l'axe z_i .
 $J_0^{(i)}$: Tenseur d'inertie du chaînon (i).
 K_i : Energie cinétique du chaînon (i).

L : Fonction de Lagrange.
 l : Longueur de la pièce.
 L' : La coté du bord pièce.
 L'' : La cote du bord pièce.
 L_1 : La distance parcouru par la crémaillère de chaînon (1).
 l_2 : La longueur de chaînon (2).
 m : La masse.
 M_{c_j} : Moment principale de force d'inertie.
 O_i : L'origine des repères.
 O_k : L'origine des repères R.
 Q_i : Force généralisée dans le chaînon (i).
 R^* : Matrice ligne.
 R_i : Repère lié au chaînon (i).
 R_k : Rayon de la tige du chaînon (k).
 s : Nombre de liaison.
 Z_2 : Paramètre de position du chaînon (2).
 Z_3 : Paramètre de position du chaînon (3).
 Z_4 : Paramètre de position du chaînon (4).
 Z_5 : Paramètre de position du chaînon (5).
 $T_{i,n}$: Matrice d'orientation entre les chaînons (i) et (n).
 t_i : Temps nécessaire pour le mouvement complet du chaînon.
 $V^0(M)$: Vitesse linéaire de point M.
 $V^0(c_i)$: Vitesse linéaire de centre de gravité du chaînon(i).
 Y : Paramètre de position du chaînon (1).
 \dot{Y} : Vitesse analogue du chaînon (1).
 \ddot{Y} : Accélération analogue du chaînon (1).
 γ Paramètre de position angulaire du chaînon (1).
 $\dot{\gamma}$ Vitesse angulaire analogue du chaînon (1).
 $\ddot{\gamma}$ Accélération angulaire analogue du chaînon (1).
 ε : Accélération angulaire.
 ρ : La masse volumique de l'acier.
 $\bar{\delta}^0(M)$: Le moment dynamique du point M.
 $\bar{\mu}^*(M)$: Le moment cinématique du point M.
 $\bar{\Omega}_j$: Vecteur instantané de rotation.
 $\dot{\bar{\Omega}}_j$: La dérivé de Vecteur instantané de rotation.

NOTATIONS MATHÉMATIQUE :

$\text{Rot}(x, a_i)$: Une rotation autour de x_i d'un angle a_i .
 $\text{Tr}(x, d_i)$: Une translation le long de x_i d'une longueur d_i .
 $\text{Rot}(z, \theta_i)$: Une rotation autour de z_{i+1} d'un angle θ_i .
 $\text{Tr}(z, r_i)$: Une translation le long de z_{i+1} d'une longueur r_i .
 A^{-1} : Matrice inverse. et A^T : Matrice transposée.

***Introduction
Générale***



La robotique a toujours été une technique chargée d'un contenu émotionnel. Bien avant qu'elle devienne une réalité industrielle et par là économique, elle était présente dans tous les ouvrages d'anticipation. Le mot robot vient du tchèque *robota*, qui signifie le travail. Qui n'a rêvé d'une machine, prête à nous remplacer dans toutes nos corvées, avec suffisamment d'intelligence pour que nous n'ayons pas à intervenir et pas assez pour pouvoir s'affranchir de notre contrôle ?

Dans le domaine industriel, l'approche n'était pas très différente. Certains responsables ont souffert, dans les années 60 et 70, de la pression des ouvriers sur les conditions de travail et de salaires. Ces derniers pouvaient arguer de la surchauffe économique et du faible attrait des Français pour les tâches d'atelier.

Il en est résulté le mythe de l'usine *sans homme*, qui a eu plus d'un adepte. Dans un tel contexte, deux solutions étaient proposées : l'usine automatique, dédiée à une production bien déterminée, ou l'usine robotisée, plus ou moins prête à exécuter n'importe quelle tâche dans un domaine assez large. Il a été créé de nombreuses usines automatiques dédiées, en particulier dans la chimie.

Les usines robotisées ont été beaucoup plus rares, car il a été vite constaté que flexibilité et coût d'investissement des automatismes suivaient une courbe exponentielle.

Le développement de la robotique a été influencé par ces grandes tendances.

On remarque, dès 1970, une véritable explosion de l'offre et un engouement des industriels. Mais le début des années 80 n'a pas vu la victoire attendue. La technique robotique s'est avérée plus complexe que prévu, surtout pour la mise au point des applications et des outils qui leur étaient nécessaires puis, surtout, la pression sur l'emploi avait disparu et avec elle l'inflexibilité des employés.

À ce jour, on privilégie souvent l'automatisme dédié ou l'opérateur humain, au détriment du robot. Ce dernier voit son développement fortement réduit. Les offreurs ont eu des difficultés économiques considérables, qui se sont traduites par des regroupements ou des disparitions. En 1995, il n'existe plus aucun constructeur français indépendant. Tout ce qui reste de notre offre nationale est sous contrôle étranger. La France reste pourtant l'un des pays où le robot est assez demandé. Mais peut-être cela est-il dû au retard relatif de nos équipements, par rapport à des pays comme le Japon ou l'Allemagne.

On se trouve donc face au paradoxe suivant : les difficultés techniques sont en voie de disparition et les développements de la micro-informatique repoussent les limites du possible, mais la robotique se porte mal. L'explication est économique, donc susceptible d'évoluer. C'est

le pari de toutes les personnes qui continuent à s'impliquer dans ce qui a été, pour un temps trop court, la vedette de la productique.

Pour commander un robot et simuler son comportement on doit disposer de modèles mathématiques. Plusieurs niveaux de modélisations sont possibles selon les objectifs, les contraintes de la tâche et les performances recherchées modèles géométriques, cinématiques et dynamiques.

L'obtention de ces différents modèles n'est pas aisée. En effet la difficulté varie selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. On prend en compte le nombre de degrés de liberté, le type des articulations mais aussi le fait que la chaîne peut être ouverte simple, arborescente ou fermée.

Ces modèles, qu'ils soient utilisés en simulation ou en commande, doivent représenter le comportement géométrique, cinématique ou dynamique du robot de façon réaliste. Il est donc nécessaire de mettre en oeuvre des procédures efficaces d'identification de leurs paramètres constitutifs.

Notre mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le **premier et deuxième chapitre** nous présentons la méthodologie d'obtention du modèle géométrique et cinématique. Nous utilisons pour cela la méthode de Denavit et Hartenberg qui associée à une méthode que nous avons développée pour la génération de la trajectoire permet de déterminer les paramètres cinématiques des SMA.

Le **Troisième chapitre** est consacré à la modélisation dynamique des systèmes mécaniques articulés à éléments rigides et à joints déformables. Nous utiliserons les méthodes de D'Alembert et de Lagrange associées à la méthode de Uicker Kahn.

Le **quatrième chapitre** traite l'étude et élaboration de projet du robot type (ALG-MO-I).

La simulation de notre robot sera élaborée avec le langage java.

Chapitre I

Modèle géométrique

I.1 Modèle géométrique

En robotique, on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères, ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs axes correspondent à des directions et leurs origines à des points privilégiés ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution de la tâche. La définition de ces repères et les transformations associées permet :

- D'exprimer les déplacements relatifs des différents éléments du mécanisme articulés les uns par rapport aux autres,
- De spécifier les situations successives que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser une tâche donnée ainsi que les vitesses correspondantes,
- De décrire et de contrôler les efforts mis en jeu lorsque le robot interagit avec son environnement,
- D'intégrer à la commande les informations sensorielles issues des capteurs ayant chacun leur propre système de référence.

Sur la figure (I-1) on a représenté les principaux repères utilisés en robotique,

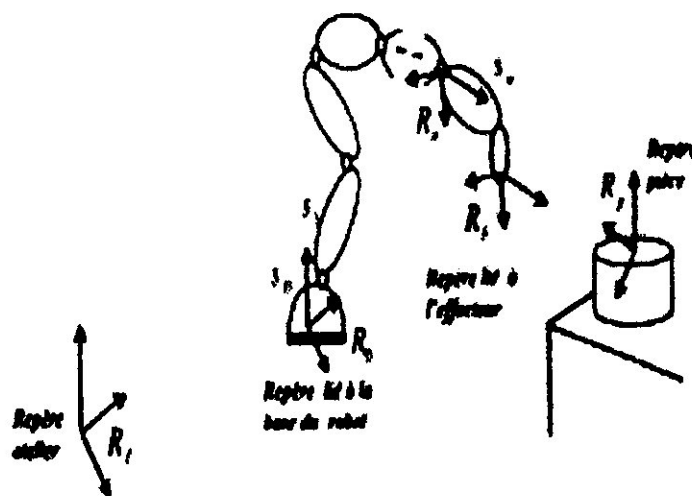


Figure I-1 : Repérage utilisé en robotique

On distingue alors :

R_f : référentiel atelier ou site,

R_0 : référentiel lié à la base du robot, il est défini par rapport à R_f ,

R_E : référentiel lié à l'effecteur du robot, il est défini par rapport à R_0 ,

R_p : référentiel lié à la pièce (tâche), il est défini par rapport à R_f .

Cette liste n'est pas exhaustive et les notations peuvent changer. Une tâche assignée au robot consisterait en générale à faire coïncider R_E avec R_p . Une exécution convenable de la tâche nécessiterait la recherche de l'emplacement idéal de la base du robot par rapport au référentiel atelier parmi toutes les possibilités offertes.

L.2 Modèle géométrique direct

L.2.1 Définition

On appelle modèle géométrique direct d'un robot, le système d'équations littérales donnant explicitement le vecteur des variables opérationnelles, en fonction des variables généralisées.

Autrement dit, le modèle géométrique direct donne la position d'un point remarquable de l'organe terminal et son orientation en fonction de la configuration du robot définie par les variables d'action, c'est à dire :

$$X = f(q) \quad (L1)$$

Avec :

$q(t) = ((q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)))^T$: Est le vecteur des variables articulaires. Il correspond aux valeurs des angles prises en fonction du temps par les n articulations. Ce vecteur appartient à l'espace des variables généralisées.

$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))^T$: Est le vecteur des variables opérationnelles qui a pour composantes les coordonnées d'un point remarquable de l'organe terminal et son orientation.

Ce vecteur appartient à l'espace des variables opérationnelles.

Où :

n : est le nombre de degrés de liberté du robot.

m : peut avoir une valeur quelconque ($m \geq n$).

I.2.2 Méthodes de calcul du modèle géométrique direct

La détermination du modèle géométrique direct d'un robot peut se faire en utilisant l'une des méthodes suivantes :

- Méthode des matrices 3x3.
- Méthode des matrices 4x4.
- Méthode de Denavit-Hartenberg.

Cette dernière est la méthode la plus utilisée.

I.2.3 Principe de la méthode de Denavit-Hartenberg [01]

La position et l'orientation du repère $R_{i+1} = (O_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ par rapport au repère $R_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$ sont définies par les quatre paramètres α_i , d_i , θ_i et r_i dits paramètres de DH. Deux paramètres de localisation de l'axe z_{i+1} dans le solide S_i :

- α_i : angle entre z_i et z_{i+1} mesuré autour de x_i .
- d_i : distance entre z_i et z_{i+1} mesurée suivant x_i .

Deux paramètres de mouvement (rotation et/ou translation) du solide S_{i+1} par rapport au solide S_i :

- θ_i : angle entre x_i et x_{i+1} mesuré autour de z_{i+1} .
- r_i : distance entre x_i et x_{i+1} mesurée suivant z_{i+1} .

La variable articulaire q_i associée à la $i^{\text{ème}}$ articulation est θ_i ou bien r_i , selon que cette articulation est de type rotoïde ou prismatique. Après la détermination de ces paramètres, on les exploite pour trouver les matrices de passage homogènes qui conduisent à obtenir l'orientation de l'organe terminal et la position du point remarquable.

I.2.4 Calcul du modèle géométrique direct

I.2.4.1 Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié

La méthode de Denavit-Hartenberg est la plus répandue. Mais cette méthode, bien adaptée pour des structures ouvertes simples, elle présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots ayant des structures fermées ou arborescentes. Pour cela, Khalil [01] propose une notation qui permet la description homogène, avec un nombre minimum de paramètres, des architectures ouvertes simples et complexes des systèmes mécaniques articulés.

Considérons la figure (I.2), présentant deux articulations successives liées aux deux repères $R_{i+1} = (O_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ et $R_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$. Pour passer de R_i à R_{i+1} , on peut procéder ainsi :

- Une rotation autour de x_i d'un angle α_i : $\text{Rot}(x, \alpha_i)$.

- Une translation le long de x_i d'une longueur d_i : $\text{Tr}(x, d_i)$.
- Une rotation autour de z_{i+1} d'un angle θ_i : $\text{Rot}(z, \theta_i)$.
- Une translation le long de z_{i+1} d'une longueur r_i : $\text{Tr}(z, r_i)$.

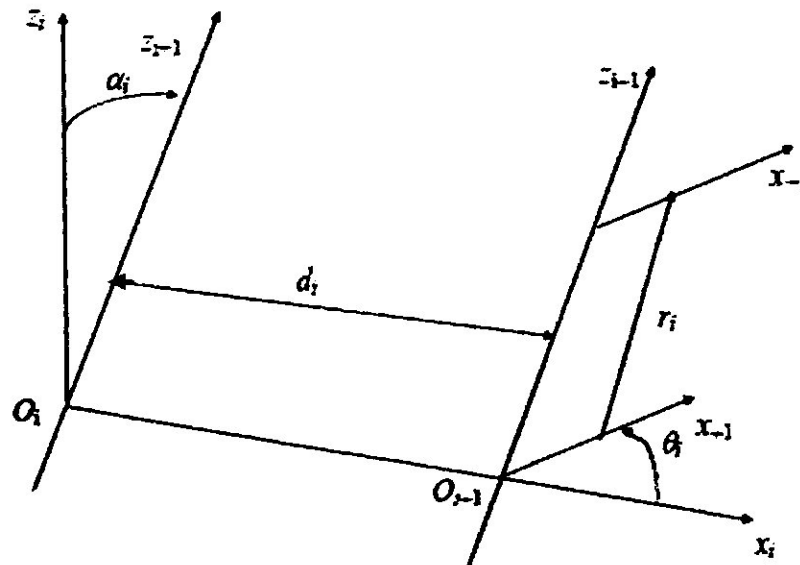


Figure I-2 : Paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié

Le paramètre articulaire q_i sera θ_i si la liaison est une rotation ou r_i si la liaison est une translation. En introduisant la variable booléenne σ_i définie par :

$\sigma_i = 0$: si la liaison est rotoïde.

$\sigma_i = 1$ si la liaison est prismatique.

On peut écrire alors :

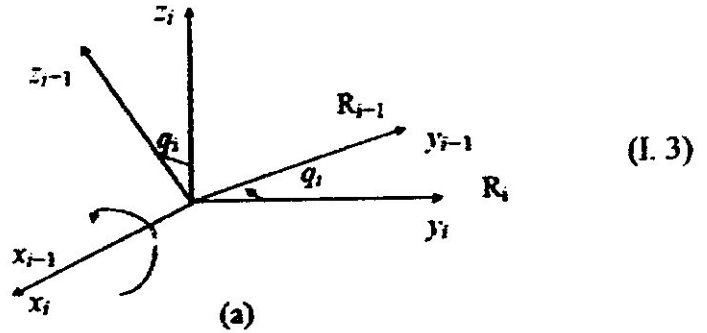
$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \tag{I.2}$$

Avec : $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$

a) Matrices de passage entre repères voisins

On obtient le repère R_{i+1} par une rotation d'un angle q_i autour de x_i , on aura donc :

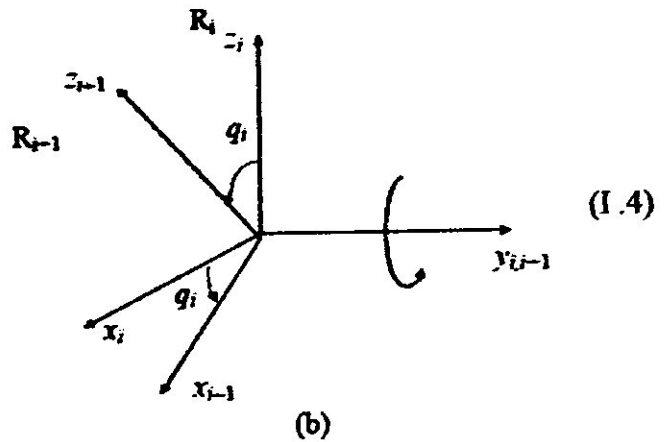
$$A_i^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cq_i & -Sq_i \\ 0 & Sq_i & Cq_i \end{pmatrix}$$



(I.3)

Dans ce cas, le repère R_{i+1} correspond à une rotation q_i autour de y_i :

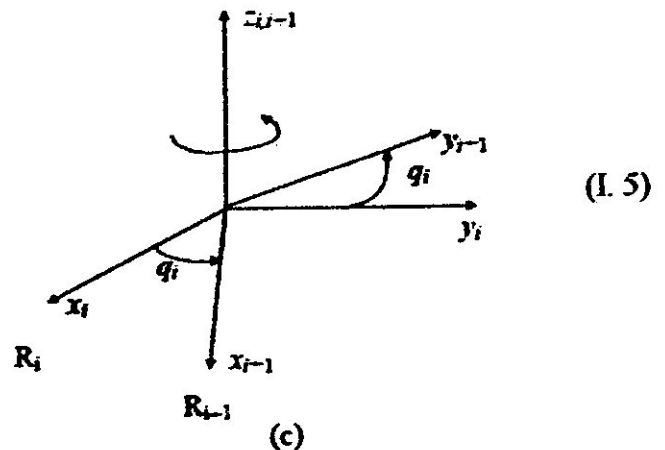
$$A_i^{i+1} = \begin{pmatrix} Cq_i & 0 & Sq_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sq_i & 0 & Cq_i \end{pmatrix}$$



(I.4)

Dans le dernier cas le repère R_{i+1} est obtenu par une rotation autour de z_i d'un angle q_i :

$$A_i^{i+1} = \begin{pmatrix} Cq_i & -Sq_i & 0 \\ Sq_i & Cq_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(I.5)

Figure I-3 : Passage entre repères voisins

b) Expression des matrices de passage homogènes H_i^{i+1}

On peut exploiter les relations (L3), (L4) et (L5) et rechercher les matrices de passage homogènes de chaque transformation et les multiplier. Rappelons que la matrice de passage Homogène H_i^{i+1} s'écrit :

$$H_i^{i+1} = \begin{pmatrix} A & F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.6)$$

Où A est la matrice de passage de R_i à R_{i+1} , F est le vecteur colonne des coordonnées de O_{i+1} dans R_i .

$$H_i^{i+1} = \text{Rot}(x, \alpha_i) \cdot \text{Tr}(x, d_i) \cdot \text{Rot}(z, \theta_i) \cdot \text{Tr}(z, r_i) \quad (I.7)$$

avec :

$$\text{ROT}(x, \alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.8)$$

$$\text{Tr}(x, d_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.9)$$

$$\text{ROT}(z, \theta_i) = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

$$\text{Tr}(z, r_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.11)$$

Finalement H_i^{i+1} , A et F s'écrivent :

$$H_i^{i+1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\theta_i S\alpha_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.12)$$

$$A = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i \\ S\theta_i S\alpha_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i \end{pmatrix} \quad (I.13)$$

$$F = (d_i \quad -r_i S\alpha_i \quad r_i C\alpha_i \quad 1)^T \quad (I.14)$$

Pour trouver le modèle géométrique direct on procède de la façon suivante, en appliquant les résultats obtenus précédemment :

- On place les axes z_i , portés par les axes articulaires, puis les axes x_i .
- On détermine les paramètres géométriques du robot.

Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, selon le nombre de degrés de liberté on construit les matrices de passage homogènes H_i^{i+1} pour un mécanisme considéré, puis on calcule le produit des H_i^{i+1} en partant de la dernière matrice, c'est la raison pour laquelle les résultats intermédiaires T_i seront utilisés pour l'obtention du modèle géométrique inverse, et le nombre d'opérations sera minimal.

$$\begin{aligned} T_{n-1} &= H_{n-2}^{n-1} H_{n-1}^n \\ T_{n-2} &= H_{n-3}^{n-2} T_{n-1} \\ T_{n-1} &= H_{n-2}^{n-1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ T_0 &= H_0^n = H_0^1 T_1 \end{aligned} \quad (I.15)$$

T_0 peut s'écrire sous La forme :

$$T_{i,j} = \begin{bmatrix} s_{i,j} & n_{i,j} & a_{i,j} & p_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.16)$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} & & & p_x \\ & A_{Eul} & & p_y \\ & & & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.17)$$

A_{Eul} : est la matrice d'orientation de R_n dans R_0 déterminée par la spécification de trois angles

ϕ , Θ et ψ dits angles d'Euler correspondant à trois rotations successives (voir figure I.4)

$$A_{Eul} = \text{Rot}(z, \phi) \cdot \text{Rot}(x, \Theta) \cdot \text{Rot}(z, \psi).$$

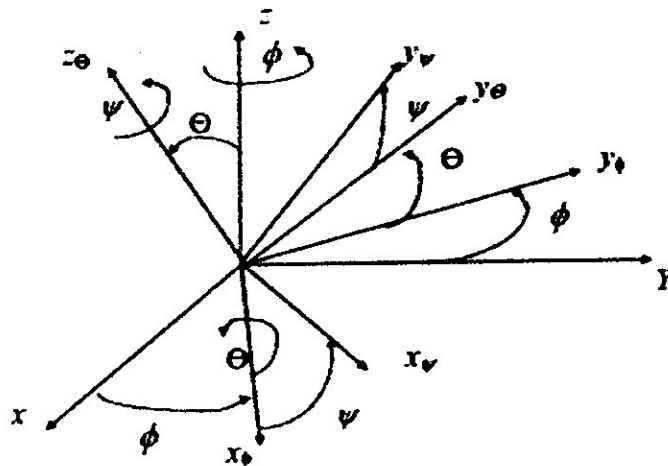


Figure I-4 : Angles d'Euler

$$A_i^{i+1} = \begin{pmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\Theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\Theta C\psi & S\phi S\Theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\Theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\Theta C\psi & -C\phi S\Theta \\ S\Theta S\psi & S\Theta C\psi & C\Theta \end{pmatrix} \quad (I.19)$$

$$= \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \quad (I.20)$$

où :

n_1 : est l'orientation de x_5 par rapport à x_0 ;

n_2 : est l'orientation de x_5 par rapport à y_0 ;

n_3 : est l'orientation de x_5 par rapport à z_0 ;

p_x : définit l'abscisse du point P dans le repère de référence R_0 ;

m_1 : est l'orientation de y_5 par rapport à x_0 ;

m_2 : est l'orientation de y_5 par rapport à y_0 ;

m_3 : est l'orientation de y_5 par rapport à z_0 ;

p_y : définit l'ordonnée du point P dans le repère R_0 ;

l_1 : est l'orientation de z_5 par rapport à x_0 ;

l_2 : est l'orientation de z_5 par rapport à y_0 ;

l_3 : est l'orientation de z_5 par rapport à z_0 ;

p_z : définit la cote du point P dans le repère R_0 .

Le modèle géométrique direct donnant les coordonnées du point P et l'orientation de l'organe terminal (lié au repère R_n) par rapport à R_0 en fonction de n variables articulaires s'écrit :

$$\begin{aligned} X &= f(q) \\ &= (P_x P_y P_z n_1 n_2 n_3 m_1 m_2 m_3 l_1 l_2 l_3)^T \end{aligned} \quad (I.21)$$

Le vecteur des variables opérationnelles X peut s'écrire aussi :

$$X = (P_x P_y P_z \Phi \Theta \Psi)^T \quad (I.22)$$

I.3. Modèle géométrique inverse

I.3.1. Définition

On appelle modèle géométrique inverse ou modèle géométrique pour la commande, le système d'équations donnant explicitement les coordonnées généralisées q_i en fonction des coordonnées opérationnelles :

$$q = f^{-1}(X) \quad (I.21)$$

Il s'agit maintenant de résoudre le système par rapport aux q_i , c'est à dire résoudre un système de m équations à n inconnues. La difficulté de cette résolution réside dans le fait que la fonction f est non linéaire.

I.3.2. Méthodes de calcul du modèle géométrique inverse

Il n'y a pas de méthode générale systématique pour déterminer le modèle géométrique inverse. On peut toutefois considérer trois approches différentes :

a) Méthode géométrique

Cette méthode n'est intéressante que pour des cas de structures simples et elle n'est pas généralisée. Elle consiste à trouver directement chaque variable articulaire à partir des considérations géométriques.

b) Méthode analytique

On doit disposer du modèle géométrique direct. Compte tenu des particularités géométriques de la plupart des robots, certaines équations du modèle sont souvent découplées. On est alors conduit à résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Actuellement, la disponibilité des logiciels de calcul symbolique peut résoudre certains problèmes de cette méthode.

c) Méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes de calcul numérique de résolution d'un système d'équations non linéaires. Elles ne permettent pas d'obtenir le modèle géométrique inverse sous forme d'expressions explicites littérales, mais réalisent tout de même la transformation de coordonnées.

Ce sont des valeurs numériques qui sont traitées, par des calculs itératifs qui posent des problèmes de convergence et de temps de calcul.

Cette méthode est utilisée lorsque le modèle géométrique ne peut être déterminé ni analytiquement ni géométriquement.

I.3.3 -Calcul du modèle géométrique inverse

Lorsqu'on voudra vraiment commander un robot, c'est le vecteur \vec{X} qui sera connu et il faudra remonter à la connaissance de q , la qualité de cette inversion sera jugée sur trois critères :

- La distance entre modèle et réalité doit rester faible.
- Les temps de calcul du modèle inverse ne doivent pas gêner la vitesse de déplacement du robot.
- Le modèle direct doit effectivement être inversible.

Maintenant nous choisissons à l'avance les coordonnées du point P, et nous désirons calculer les valeurs de q .

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de passage homogène qui est calculée dans le modèle géométrique direct a pour expression :

$$H_0^n = H_0^1(q_1)H_1^2(q_2)\dots H_{n-1}^n(q_n) = T_0 \quad (I.22)$$

Pour trouver les solutions de l'équation (I.22), a proposé une méthode qui consiste à prémultiplier successivement les deux membres de l'équation (I.22) par les matrices $H_{i,i+1}^i$ de passage homogènes du repère R_{i+1} au repère R_i qui sont les inverses des matrices H_i^{i+1} . Ces opérations permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche [01].

La succession des équations permettant le calcul de tous les q_i sont la suivante :

$$\begin{aligned} T_0 &= H_0^1 H_1^2 \dots H_{n-2}^{n-1} H_{n-1}^n \\ T_1 &= H_1^2 T_0 = H_1^2 \dots H_{n-2}^{n-1} H_{n-1}^n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ T_{n-1} &= H_{n-1}^n T_{n-2} = H_{n-1}^n \end{aligned} \quad (I.23)$$

Les équations (I.23) seront très compliquées si le nombre de degré de liberté augmente, certains types ont une solution évidente, d'autres nécessitent quelques développements. L'identification des éléments les plus simples conduit à un système d'équations dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine possible [01].

Concernant le robot type (ALG – M O-1) le remplacement des repères est indiqué sur la Figure (I.5).

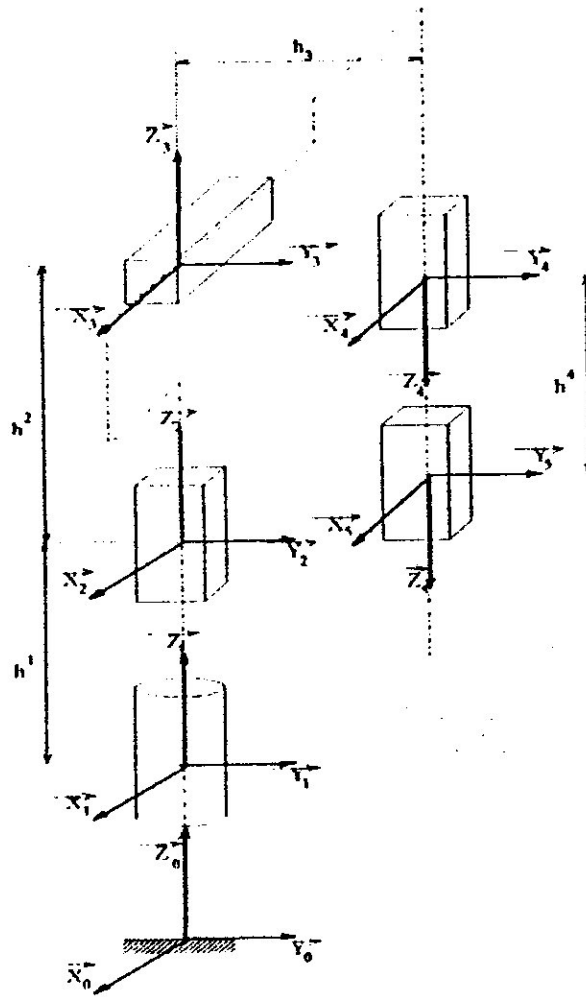


Figure I-5 : les différents paramètres géométriques du robot -type (Alg-M.O-1)

Tableaux I- 1 : Les paramètres géométriques du robot type.

Indice	0	1	2	3	4	5
d_i	0	h_1	h_2	h_3	h_4	
α_i		0	$\pi/2$	$\pi/2$	0	
Σ		0	1	1	1	1
r_i		0	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
θ_i		γ	0	0	0	0

I.4 Détermination des matrices de changement de repère $\langle i-1/i \rangle$ pour le robot type (ALG-MO-1)

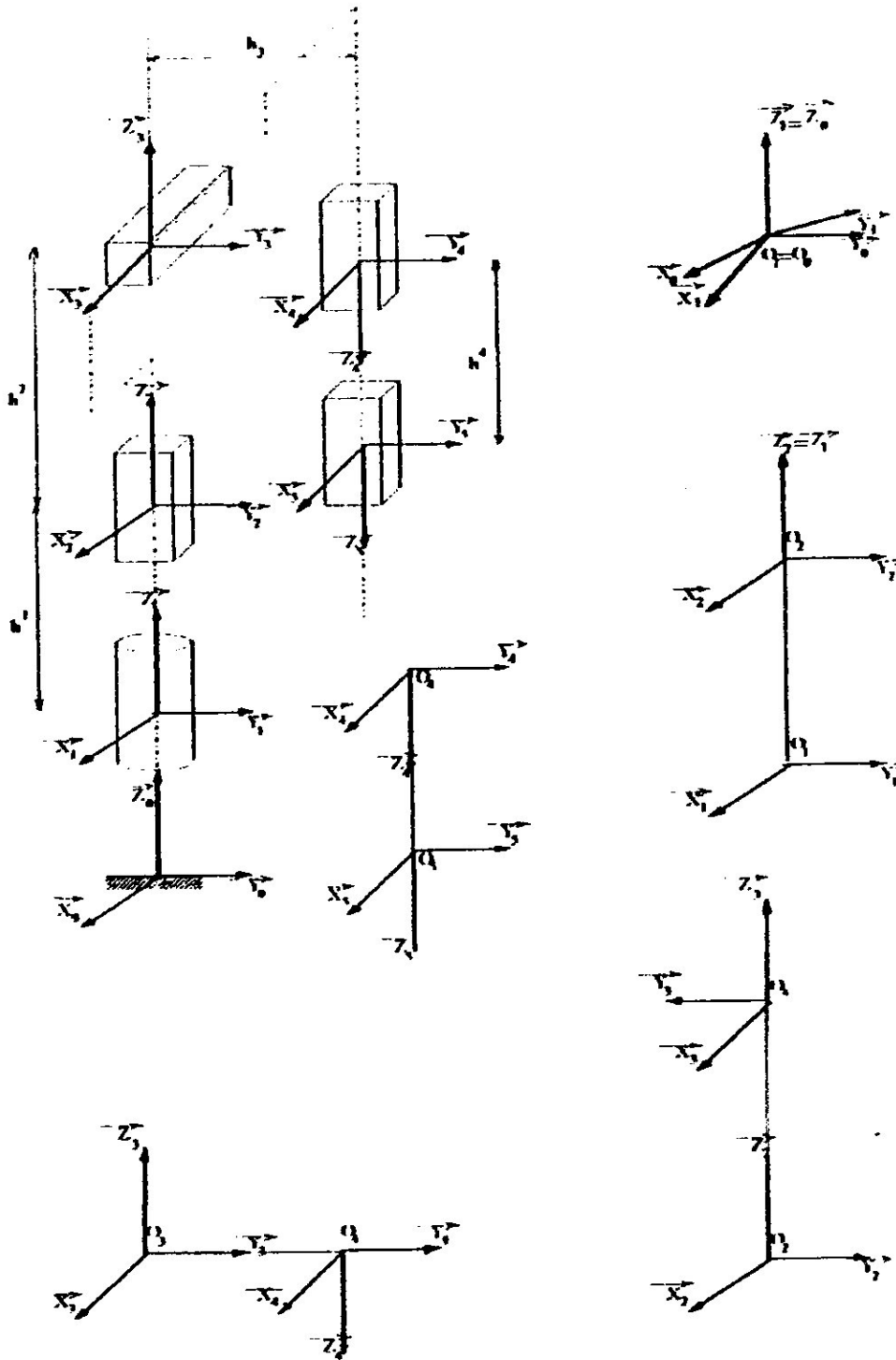


Figure I-6 : les différents repères liés au corps du robot.

Les matrices de changement de repère (I.24) :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1+z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4-z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuons les différents produits :

$$\bullet \quad T_3^5 = T_3^4 T_4^5$$

$$T_3^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4 + h_3 - z_5 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad T_2^5 = T_2^3 T_3^5$$

$$T_2^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 - z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 + h_3 + h_4 - z_5 \end{bmatrix}$$

(L25)

$$\bullet \quad T_1^5 = T_1^2 T_2^5$$

$$T_1^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 - z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad T_0^5 = T_0^1 T_1^5$$

$$T_0^5 = \begin{bmatrix} C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ C\gamma_i + S\gamma_i & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_3 + h_4 + h_2 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin T_0^5 est la matrice de changement du repère 0 vers le repère 5.

Puisque :

$$T_{i,j} = [s_{i,j} \quad n_{i,j} \quad a_{i,j} \quad p_{i,j}] = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_x = c\gamma_1 - s\gamma_1 \\ s_y = c\gamma_1 + s\gamma_1 \\ s_z = 0 \\ \\ n_x = 0 \\ n_y = 0 \\ n_z = 0 \\ \\ a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = 1 \\ \\ p_x = (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ p_y = (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ p_z = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \end{array} \right. \quad (I.26)$$

I.5 Espace de travail

L'espace de travail est l'ensemble des positions et/ou orientations accessibles par l'organe terminal du robot.

Le volume ou l'espace de travail d'un robot dépend généralement de trois facteurs:

- de la géométrie du robot,
- de la longueur des segments,
- du débattement des articulations (limité par des butées).

I.5.1 Analyse de l'espace de travail du robot type (ALG – M 0-1)

L'analyse de l'espace de travail des robots trouve des nombreuses applications. Notamment dans le domaine de la CAO- Robotique pour la conception optimale des robots, des sites robotisés et pour leur programmation hors ligne.

Soit $q = [q_1 \dots \dots q_n]$ un élément de \mathbb{R}^q représentant une configuration articulaire donnée et soit $X = [x_1 \dots \dots x_n]$ l'élément de l'espace opérationnel \mathbb{R}^x correspondant, tel que:

$$X = f(q). \quad (I.27)$$

On note Q l'ensemble des configurations accessibles compte tenu des butées articulaires. Par conséquent, Q sera appelé domaine articulaire:

L'image de Q par le modèle géométrique direct f définit l'espace de travail W du robot:

$$W = f(Q). \quad (I.28)$$

I.5.2 Calcul de l'espace de travail du robot choisi

Comme on l'a définie précédemment, la position de l'organe terminal dans le repère atelier est donnée par le vecteur position dans la matrice de transformation qui exprime le repère R_5 dans R_0 noté:

$$P = \begin{cases} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{cases} ; \text{ Avec : } \begin{cases} P_x = (z_3 - z_4)C\gamma_1 \\ P_y = (z_3 - z_4)S\gamma_1 \\ P_z = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \end{cases}$$

En développant un programme qui a comme paramètres «entrées les limites articulaires de chaque articulation et sortie toutes les configuration possible de l'organe terminal.

1.5.3 Algorithme simplifié du programme

Début programme

Entrer h_{\min} et h_{\max} pour chaque articulation ;

Début Do

Incrémentatation de h_1 entre $h_{1\min}$ et $h_{1\max}$;

Incrémentatation de h_2 entre $h_{2\min}$ et $h_{2\max}$;

Incrémentatation de h_3 entre $h_{3\min}$ et $h_{3\max}$;

$$P_x = (z_3 - z_4)C\gamma_1$$

$$P_y = (z_3 - z_4)S\gamma_1$$

$$P_z = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5$$

Fin Do

Sortie (P_x, P_y, P_z)

Figure1-7 Schéma simplifié du programme qui calcul l'espace de travail du robot

Chapitre II

Modélisation Cinématique

II.1 Modélisation cinématique

Le modèle cinématique permet d'exprimer les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires et présente l'avantage d'en être linéaire. La plupart des travaux sur la modélisation cinématique traitent le problème du suivi de trajectoire par l'effecteur. Cette trajectoire est définie d'une manière purement géométrique dans l'espace opérationnel de manière que l'effecteur la réalise sans rentrer en collision avec les obstacles. Le problème de planification de mouvement optimal qui se pose est la détermination d'une commande telle que la tâche soit réalisée dans les conditions désirées. Pour certains auteurs: Glass, Colbaugh et Lim [02], Mayorga[03], Mitsi, Bouzakis et Mansour[04], la préoccupation principale est l'évitement d'obstacles, ainsi le critère à minimiser est formulé en fonction de la profondeur d'interpénétration des éléments en collision. D'autres auteurs [05,06] s'intéressent à l'exécution de transferts avec temps de parcours optimal lorsque celui-ci n'est pas imposé tandis que d'autres [07] introduisent en plus un critère assurant l'optimisation des efforts délivrés. Certains travaux [05,08,09,10,11,12] traitent du problème de planification de mouvements optimaux avec trajectoire libre en développant une méthode de champs de potentiel artificiel afin de déterminer, dans l'espace articulaire une trajectoire non collisionnelle qui minimise la distance du robot à l'obstacle.

Cependant la planification de tels mouvements peut conduire à des vitesses d'exécution très élevées. C'est le cas notamment lorsque le temps de parcours est minimisé. Il apparaît alors dans le mouvement réel des forces d'inertie qui peuvent atteindre des valeurs élevées. Le modèle cinématique qui est, par définition, une description mathématique du mouvement sans prise en compte des causes, ignore les forces qui génèrent le mouvement ainsi que les caractéristiques inertielles de la chaîne articulée (masses, tenseurs d'inertie et positions des centres de gravité des corps). Ainsi, dans certaines situations, il est obligatoire de passer à un niveau plus élevé de description du comportement d'un bras manipulateur. Dans de telles conditions la représentation du comportement du robot par un modèle dynamique s'impose pour une description plus réaliste de son comportement.

II.1.1. Modèle cinématique directe

II.1.2. Définition

Le modèle cinématique (différentiel) direct exprime les vitesses de translation et d'orientation de l'effecteur \dot{X} d'un bras manipulateur (les variations élémentaires dX des coordonnées opérationnelles) en fonction des vitesses articulaires \dot{q} (des variations élémentaires dq des coordonnées articulaires) [24], il est noté :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$\dot{X} = [V_E, W_E]^T, \quad \dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n] \quad (\text{II.2})$$

Où $J(q)$ désigne la matrice Jacobienne de dimension $(m * n)$ du bras manipulateur, égale à $\frac{\partial x}{\partial q}$ et

fonction des variables articulaires q .

L'intérêt du calcul de la matrice Jacobienne, est multiple :

- En statique, on utilise le Jacobien pour établir la relation liant les efforts exercés sur l'organe terminal aux forces et couples des actionneurs.
- En cinématique, on utilise la matrice Jacobienne pour établir les relations liant les vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires.
- Elle facilite le calcul des singularités et de dimension de l'espace opérationnel accessible au robot.

II.2. Méthodes de calcul du modèle cinématique direct [01]

II.2.1. Calcul du modèle cinématique direct à partir du modèle géométrique direct

Une première méthode consiste à calculer les éléments du vecteur vitesses opérationnelles \dot{X} , par dérivation par rapport au temps des éléments du vecteur des coordonnées opérationnelles X , obtenus par le modèle géométrique direct :

$$X = f(q) \quad (\text{II.3})$$

on obtient :

$$dx = \frac{\partial f}{\partial q} dq \quad (\text{II.4})$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation (II-1) on obtient l'expression suivante :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ M & M & & M \\ \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} \\ M & M & & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ M \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$$J_{ij} = \frac{\partial f}{\partial q_j} \quad \left| \begin{array}{l} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

où J_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice jacobienne J .

Cette méthode est facile à mettre en œuvre pour des robots à deux ou trois degrés de liberté comme le montre l'exemple suivant. Le calcul de la matrice jacobienne.

Cinématique présenté au § II-2.2. est plus pratique pour les robots ayant plus de trois degrés de liberté.

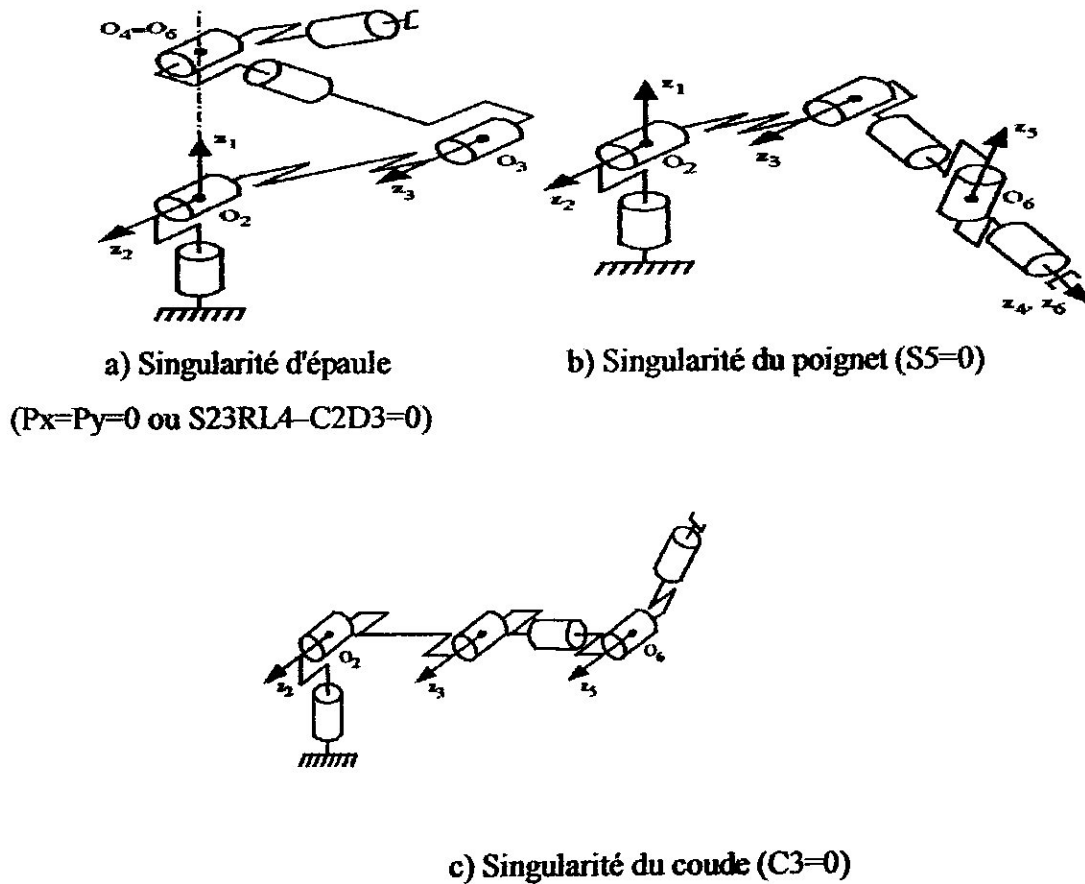


Figure (II.1) : Positions singulières du robot Stäubli RX-90

II.2.2 Calcul du modèle cinématique direct par l'étude cinématique

Dans une seconde méthode (celle qui nous intéresse), le calcul du vecteur vitesse X^* de l'organe terminal s'effectue en utilisant une formulation récurrente (minimisation du temps de calcul et génération automatique des équations nécessaires) basée sur le théorème de composition des vitesses ; par la suite on déduit le Jacobien de la relation matricielle suivante :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} V_n \\ W_n \end{bmatrix} = [J_n][\dot{q}] \tag{II.7}$$

Où V_n : Le vecteur vitesse de translation de l'organe terminal relativement au repère $\{R_0\}$.

W_n : Le vecteur vitesse de rotation instantanée de l'organe terminal relativement repère $\{R_0\}$.

On exprime en général V_n et W_n , soit dans le repère $\{R_n\}$, soit dans le repère $\{R_0\}$.

i) Calcul de la matrice jacobienne cinématique [13]

Considérons la $k^{i\text{ème}}$ articulation d'une chaîne articulée. La vitesse \dot{q}_k induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation $V_{k,n}$ et la vitesse de rotation $\omega_{k,n}$. On rappelle que a_k est le vecteur unitaire porté par l'axe z_k de l'articulation k et on désigne par $L_{k,n}$ le vecteur d'origine O_k et d'extrémité O_n . En appliquant le théorème de composition des vitesses, les vitesses de translation et de rotation du repère terminal s'écrivent :

$$\begin{cases} V_n = \sum_{k=1}^n V_{k,n} = \sum_{k=1}^n [\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ W_n = \sum_{k=1}^n W_{k,n} = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad (II.8)$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation [II-7], on déduit que :

$$J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 a_1 + \bar{\sigma}_1 (a_1 \times L_{1,n}) & \dots & \sigma_n a_n + \bar{\sigma}_n (a_n \times L_{n,n}) \\ \bar{\sigma}_1 a_1 & & \bar{\sigma}_n a_n \end{bmatrix} \quad (II.9)$$

En général, on exprime V_n et ω_n soit dans le repère R_n soit dans le repère R_0 . La matrice jacobienne correspondante est notée ${}^n J_n$ ou ${}^0 J_n$ respectivement. Ces matrices peuvent aussi être calculées en utilisant une matrice ${}^i J_n$, $i = 0, \dots, n$, grâce à la relation de transformation de la matrice jacobienne entre repères suivante :

$${}^s J_n = \begin{bmatrix} {}^s A_i & 0_3 \\ 0_3 & {}^s A_i \end{bmatrix} {}^i J_n \quad (II.10)$$

où ${}^s A_i$ est la matrice d'orientation, de dimension (3x3), du repère R_i exprimée dans le repère R_s .

La matrice ${}^s J_n$ peut donc être décomposée en deux matrices, la première étant toujours de rang plein.

Les deux matrices ${}^i J_n$ et ${}^s J_n$ ayant les mêmes positions singulières, on cherche pratiquement à utiliser le repère de projection R_i qui simplifie les éléments de la matrice ${}^i J_n$. En général, on obtient la matrice ${}^i J_n$ la plus simple lorsque l'on prend $i = [\text{partie entière de } n/2]$.

ii) Calcul de la matrice ${}^i J_n$

En remarquant que le produit vectoriel $\mathbf{a}_k \times \mathbf{L}_{k,n}$ peut se transformer La matrice antisymétrique $\hat{\mathbf{a}}$ du préproduit vectoriel est définie par :

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

en $\hat{\mathbf{a}}_k \mathbf{L}_{k,n}$, la $k^{\text{ième}}$ colonne de ${}^i J_n$ notée ${}^i J_{n,k}$ devient :

$${}^i J_{n,k} = \begin{bmatrix} \sigma_k^i \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k^i A_k^k \mathbf{a}_k^k L_{k,n} \\ \bar{\sigma}_k^i \hat{\mathbf{a}}_k \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

En développant et en notant que ${}^k \mathbf{a}_k = [0 \ 0 \ 1]^T$ et que ${}^k \mathbf{L}_{k,n} = {}^k \mathbf{P}_n$, on obtient :

$${}^i J_{n,k} = \begin{bmatrix} \sigma_k^i \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k^i (-{}^k p_{n,y} {}^i s_k + {}^k p_{n,x} {}^i n_k) \\ \bar{\sigma}_k^i \hat{\mathbf{a}}_k \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

où ${}^k p_{n,x}$ et ${}^k p_{n,y}$ sont respectivement les composantes x et y du vecteur ${}^k \mathbf{P}_n$.

De façon analogue, la $k^{\text{ième}}$ colonne de ${}^i J_n$ s'écrit :

$${}^i J_{n,k} = \begin{bmatrix} \sigma_k^i \mathbf{a}_k + \bar{\sigma}_k^i \hat{\mathbf{a}}_k ({}^i p_n - {}^i p_k) \\ \bar{\sigma}_k^i \hat{\mathbf{a}}_k \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Lorsque $i = 0$, les éléments de la colonne k s'obtiennent à partir de ceux de la matrice ${}^0 T_k$ et du vecteur ${}^0 \mathbf{P}_n$. On doit donc calculer les matrices ${}^0 T_k$, $k = 1, \dots, n$.

II.2.3. Décomposition de la matrice jacobienne en trois matrices

Avec la relation [II-10], nous avons montré que la matrice ${}^s J_n$ pouvait être décomposée en deux matrices, la première étant toujours de rang plein et la deuxième contenant des éléments simples. Renaud [14] a montré que l'on peut aussi décomposer la matrice jacobienne en trois matrices : les deux premières sont toujours de rang plein et leur inversion est immédiate ; la troisième est du même rang que ${}^s J_n$, mais contient des éléments beaucoup plus simples. On obtient [15] :

$${}^s J_n = \begin{bmatrix} {}^s A_1 & 0_3 \\ 0_3 & {}^s A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & -{}^i \hat{L}_{j,n} \\ 0_3 & I_3 \end{bmatrix} {}^i J_{n,j} \quad (\text{II.15})$$

les éléments de la $k^{\text{ème}}$ colonne de ${}^i J_{n,j}$ s'expriment dans le repère R_i de la façon suivante :

$${}^i J_{n,jk} = \begin{bmatrix} \sigma_k^i a_k + \bar{\sigma}_k (-{}^k p_{jy}^i s_k + {}^k p_{jx}^i n_k) \\ \bar{\sigma}_k^i a_k \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

A partir de la dérivé du relation (II-4) on peut définir ce qu'on appelle le modèle cinématique du second ordre :

$$\ddot{X} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$\dot{J} = \frac{d}{dT} J(q)$$

II.3. Modèle cinématique inverse

II.3.1. Définition

Le modèle cinématique inverse d'un robot manipulateur est celui qui permet de déterminer les vitesses articulaires \dot{q} qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle \dot{X} désirée à partir d'une configuration q donnée. Il s'écrit :

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{X} \quad (\text{II.18})$$

Le modèle cinématique inverse présente un grand intérêt en phase d'exploitation surtout quand le robot manipulateur travaille en cours de déplacement avec des contraintes de vitesses, de l'effecteur relativement à la pièce (opérations de soudage, de découpage,.....). L'autre intérêt est qu'il se substitue au modèle géométrique inverse et permet de calculer les incréments de déplacements articulaires à réaliser sur les différentes articulations, sur la base de la configuration présente, pour matérialiser un déplacement élémentaire dans l'espace opérationnel.

II.4. Méthodes de calcul du modèle cinématique inverses

Deux classes de méthode peuvent être mises en oeuvre pour obtenir le modèle cinématique inverse.

II.4.1 Dérivation des modèles géométriques inverse

Les modèles géométriques inverses, connus sous forme analytique, permettent de calculer toutes les configurations q qui correspondent à une situation imposée X . Ces configurations sont calculées en fonction des éléments H_{ij}^n de la matrice de passage homogène H_0^n , elle même évaluée en fonction de X . Cette méthode consiste donc à exprimer :

- La différentielle dq en fonction de la différentielle dH_0^n .
- La différentielle dH_0^n en fonction de la différentielle dX .

Ainsi, il est possible de calculer tous les modèles cinématiques inverses d'un robot manipulateur associés aux modèles géométriques inverses.

II.4.2 Inversion du modèle cinématique direct

C'est une méthode qui consiste à inverser le modèle cinématique direct en résolvant un système d'équations linéaires. La mise en oeuvre de ce type de méthodes peut-être faites de façon analytique ou numérique :

- La solution analytique a pour avantage de diminuer considérablement le nombre d'opération, mais il faut traiter séparément tous les cas singuliers.
- Les solutions numériques sont plus générales, la plus répandue étant basée sur la notion de pseudo inverse [14et01] : les algorithmes traitent de façon unifiée les cas réguliers, singuliers, et redondants. Ces méthodes nécessitent un temps de calcul très important.

En ce qui concerne la solution analytique, sa détermination consiste à inverser la matrice jacobienne. Classiquement la matrice J n'est inversible qu'aux conditions suivantes :

- Elle est carrée, c'est-à-dire les dimensions n et m sont les mêmes.
- Son déterminant n'est pas nul, ce qui ne dépend que des valeurs des variables articulaires (le rang de $J=n=m$).

Dans ces conditions, la solution unique avec $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X}$ où J^{-1} représente la matrice inverse de J . Lorsque $\det(J) = 0$, cela signifie qu'il y a des relations linéaires entre les variables \dot{X} .

Si la donnée X vérifie ces relations de compatibilité, alors on est ramené à inverser une matrice carrée d'ordre plus petit que celui de q , les solutions seront indéterminées.

Si n est supérieur à la dimension de l'espace opérationnel de l'organe terminal, le robot est redondant, par conséquent, il existe une infinité de solutions au problème du modèle cinématique inverse. Pour en choisir une, il faut fixer une condition supplémentaire : minimiser la somme des carrés des déplacements articulaires, fixer l'orientation d'un élément du robot pour éviter un obstacle, etc.

II-5 Calcul de la matrice jacobienne pour le robot

on utilise la relation (II-14), on doit calculer pour chaque colonne les paramètres a et p :

$${}^0J_{nk} = \begin{bmatrix} \sigma_k^0 a_k + \bar{\sigma}_k^0 \hat{a}_k ({}^0p_n - {}^0p_k) \\ \bar{\sigma}_k^0 a_k \end{bmatrix}$$

Ici puisque notre robot possède cinq articulation (donc cinq axe), le terme n prend la valeur de cinq et d'après les matrices de models géométriques directes suivantes :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = T_0^2 T_2^3 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & z_3 c\gamma_1 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & z_3 s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^4 = T_0^3 T_3^4 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4) c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4) s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^5 = T_0^4 T_4^5 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

En obtient :

$$p_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 + z_2 \end{bmatrix}, \quad p_{03} = \begin{bmatrix} z_3 c\gamma_1 \\ z_3 s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + z_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.20})$$

$$p_{04} = \begin{bmatrix} (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \end{bmatrix}, \quad p_{05} = \begin{bmatrix} (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \end{bmatrix}$$

Calcul des $\hat{a}_{0,t}$:

$$a_{01} = a_{02} = a_{03} = a_{04} = a_{05} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Donc :

$$\hat{a}_{01} = \hat{a}_{02} = \hat{a}_{03} = \hat{a}_{04} = \hat{a}_{05} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Maintenant on peut calculer les éléments de la matrice jacobienne (II.23):

$${}^0J_{5,1} = \begin{bmatrix} (z_4 - z_3)s\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^0J_{5,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 + z_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0J_{5,3} = \begin{bmatrix} z_3c\gamma_1 \\ z_3s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + z_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0J_{5,4} = \begin{bmatrix} (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0J_{5,5} = \begin{bmatrix} (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En regroupons les résultats :

$${}^0J_{5,1} = \begin{bmatrix} (z_4 - z_3)s\gamma_1 & 0 & z_3c\gamma_1 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_3 - z_4)c\gamma_1 & 0 & z_3s\gamma_1 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & h_1 + z_2 & h_1 + h_2 + z_2 & h_1 + h_2 + h_3 + z_2 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Donc le modèle cinématique directe en utilisant la relation (II.7), qui est la suivante :

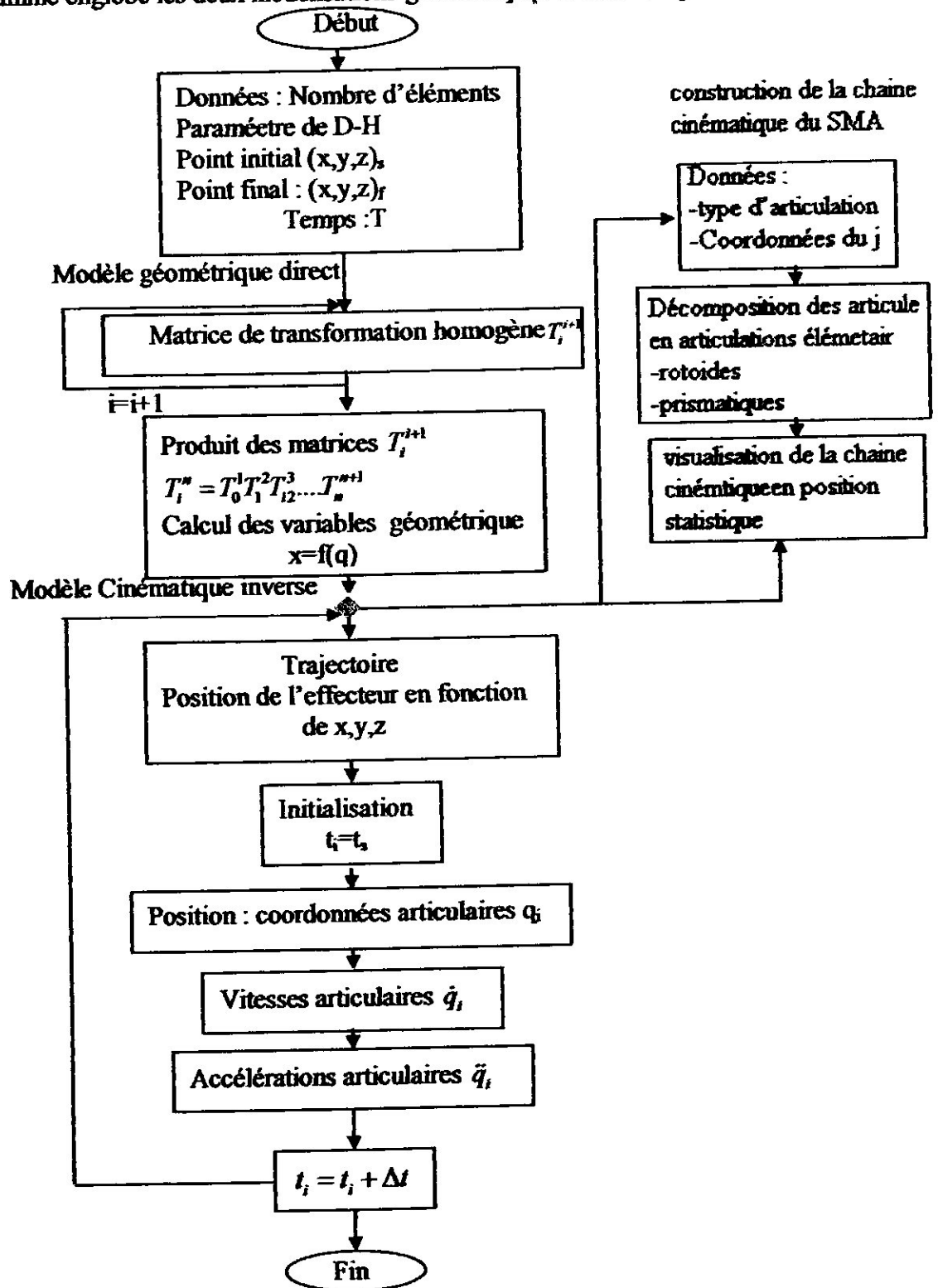
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} V_n \\ W_n \end{bmatrix} = [J_n][\dot{q}]$$

On obtient la relation suivant :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z_4 - z_3)s\gamma_1 & 0 & z_3c\gamma_1 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ (z_4 - z_3)c\gamma_1 & 0 & z_3s\gamma_1 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & h_1 + z_2 & h_1 + h_2 + z_2 & h_1 + h_2 + h_3 + z_2 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

II.6 Organigramme

Cet Organigramme englobe les deux modélisations géométriques et cinématique :



Chapitre III

♫ Modélisation dynamique

III.1 Modèle dynamique [1, 13, 14, 15 et 16].

On appelle modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique, le système d'équations qui permet d'établir les relations entre le vecteur des forces généralisées (forces et/ou couples) appliquées au niveau des articulations et les paramètres cinématiques (coordonnées, vitesses et accélérations généralisées) du robot bras manipulateur.

Plusieurs formalismes sont utilisés pour établir le modèle dynamique [1]. Les formalismes les plus souvent utilisés sont :

- Le formalisme de D'Alembert.
- Le formalisme de Lagrange.

III.1.1. Le formalisme de D'Alembert

pour la 1^{re} partie l'équation de D'Alembert : on va calculer :

- Les vitesses et les accélérations des chaînons.
- Les masses et les moments d'inerties des chaînons.
- Les forces d'inerties et les moments des forces d'inerties des chaînons.
- Les équations du mouvement des chaînons.
- Les réactions et les moments aux couples cinématique.

III.1.2. Calcul des vitesses et les accélérations des chaînons de robot

III.1.2.1. Introduction

Les vitesses et les accélérations des chaînons considérés sont les suivantes :

$\dot{\gamma}$: Vitesse angulaire analogue de chaînon (1).

$\ddot{\gamma}$: Accélération angulaire analogue de chaînon (1).

\dot{S}_2 : Vitesse analogue de chaînon (2).

\ddot{S}_2 : Accélération analogue de chaînon (2).

\dot{S}_3 : Vitesse analogue de chaînon (3).

\ddot{S}_3 : Accélération analogue de chaînon (3).

\dot{S}_4 : Vitesse analogue de chaînon (4).

\ddot{S}_4 : Accélération analogue de chaînon (4).

\dot{S}_5 : Vitesse analogue de chaînon (5).

\ddot{S}_5 : Accélération analogue de chaînon (5).

Pour cela on va choisir une loi du mouvement trapézoïdale pour chaque mouvement de chaînon, et on posera le temps nécessaire pour faire un cycle du mouvement.

La loi du mouvement trapézoïdale contient trois mouvements :

I - mouvement accéléré $Y(t) = 1/2 a.t^2$

II- mouvement rectiligne $Y(t) = \dot{Y}_{\max} t + Y_0$

III- mouvement décéléré $Y(t) = -1/2 a.t^2 + \dot{Y}_{\max} t + Y_0$

Remarque : on va choisir deux variantes des vitesses et des accélérations pour cela on prend deux fois le choix de temps.

III. 1. 2.2 Première variante

III. 1.2.2.1 vitesse et accélération de chaînon (1)

le chaînon (1) fait un mouvement de rotation avec la vitesse analogue $\dot{\gamma}$ et avec l'accélération analogue $\ddot{\gamma}$ on va supposer :

-un diamètre de roue dente égal à $d_1 = 0,240m$.

- le temps nécessaire pour parcourir le demi- périmétrique L est égal à : $t_1 = 5S$

Alors on a : $L_1 = \pi .R_1$

A.N : $L_1 = 3,14.120 = 376,99mm$

D'où $L_1 = 0,377 m$

La loi de mouvement est donnée par :

Y I(t) = $1/2 a.t^2$

Y II (t) = $\dot{Y}_{\max} .t + Y_0$

Y III (t) = $-1/2 a.t^2 + \dot{Y}_{\max} .t + Y_0$

On remplace le temps on trouve :

$$\begin{cases} YI(1) = 1/2 a(1)^2 & \text{Pour l'intervalle de temps } [0, 1] \\ YII(3) = \dot{Y}_{\max}(3) + YI(1) & \text{Pour l'intervalle de temps } [1, 4] \\ YIII(1) = -1/2 a(1)^2 + \dot{Y}_{\max}(1) + YII(3) & \text{Pour l'intervalle de temps } [4, 5] \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} YI(1) = 0,5.a \\ YII(3) = 3.\dot{Y}_{\max} + 0,5.a \\ YIII(1) = -0,5.a + \dot{Y}_{\max} + 3.\dot{Y}_{\max} + 0,5.a = 4.\dot{Y}_{\max} = L_1 = 377mm \end{cases}$$

Donc

$$\dot{Y}_{\max} = L_1 / 4$$

A.N:

$$\dot{Y}_{\max} = 0,377/4 = 0,09425 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\dot{Y}_{\max} = 0,09425 \text{ m/S}}$$

Et on a d'après l'équation II (mouvement accéléré) d'où :

$$\dot{Y}_{\max} = a \cdot t_{\max} \quad \text{d'où } a = \dot{Y}_{\max} / t_{\max}$$

$$\text{A.N : } a = 0,09425 / 1 = 0,09425 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{a = 0,09425 \text{ m/s}^2}$$

Pour obtenir la vitesse angulaire max. on a :

$$\dot{\gamma} = \frac{\text{la vitesse linéaire}}{\text{le rayon}}$$

d' ou

$$\dot{\gamma} = 0,09425 / 0.120 = 0.7854$$

donc:

$$\boxed{\dot{\gamma} = 0.7854 \text{ rad /s}}$$

de même façon on trouve l'accélération angulaire analogue : $\ddot{\gamma} = a / R = 0,3/0.120$

$$\text{d' ou : } \boxed{\ddot{\gamma} = 0,7854 \text{ rad /s}^2}$$

et on peut trouver les distances parcourus pour chaque intervalle de temps :

$$\begin{cases} YI(1) = 0,041125 \text{ m} & \gamma = 41,125 / 120 = 0,342 \text{ rad} = 19',64' \\ YII(3) = 0,329875 \text{ m} & \gamma = 329,875 / 120 = 2,74 \text{ rad} = 157',5' \\ YIII(1) = L = 0,377 \text{ m} & \gamma = 377 / 120 = 3,14 \text{ rad} = 180' \end{cases}$$

III. 1.2.2.2. Vitesse et accélération de chaînon (2)

le chaînon (2) fait un mouvement de translation avec :

- le vecteur de vitesse analogue $\overline{\dot{S}}_2(t) = (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)\overline{k}_1$

- le vecteur de accélération analogue $\overline{\ddot{S}}_2(t) = (\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)\overline{k}_1$

$$\text{Donc : } |\overline{\ddot{S}}_2| = \sqrt{(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)^2}$$

on va supposer :

• $S_2^{\max} = 0,600\text{m}$: la distance maximale parcourue par le chaînon (2).

La loi de mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} I : S_2(t) = \ddot{S}_2^{\max} \cdot t^2 / 2 & \text{pour l'intervalle de temps } [0, 1] \\ II : S_2(t) = \dot{S}_2^{\max} \cdot t + S_2(I) & \text{pour l'intervalle de temps } [1, 4] \\ III : S_2(t) = -\ddot{S}_2^{\max} \cdot t^2 / 2 + \dot{S}_2^{\max} \cdot t + S_2(II) & \text{pour l'intervalle de temps } [4, 5] \end{cases}$$

On remplace le temps on trouve

$$\begin{cases} I : S_2(2) = \ddot{S}_2^{\max} \cdot 2^2 / 2 \\ II : S_2(6) = \dot{S}_2^{\max} \cdot (6) + S_2(I) \\ III : S_2(2) = -\ddot{S}_2^{\max} \cdot 2^2 / 2 + \dot{S}_2^{\max} \cdot 2 + S_2(II) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} I : S_2(2) = 2\ddot{S}_2^{\max} \\ II : S_2(6) = 6\dot{S}_2^{\max} + S_2(I) = 6\dot{S}_2^{\max} + 2\dot{S}_2^{\max} \\ III : S_2(2) = -2\ddot{S}_2^{\max} + 2\dot{S}_2^{\max} + 6\dot{S}_2^{\max} + 2\ddot{S}_2^{\max} = 8\dot{S}_2^{\max} = 600\text{mm} \end{cases}$$

$$\dot{S}_2^{\max} = 0,600 / 4 = 0,15$$

$$\boxed{\dot{S}_2^{\max} = 0,15 \text{ m/s}}$$

Et on a d'après l'équation (mouvement accéléré) :

$$\ddot{S}_2^{\max} = \ddot{S}_2^{\max} \cdot t_{\max} \quad \text{alors} \quad \ddot{S}_2^{\max} = \dot{S}_2^{\max} / t_{\max}$$

A.N :

$$\ddot{S}_2^{\max} = 0.075 / 2 = 0.0375 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\ddot{S}_2^{\max} = 0.075 \text{ m/s}^2}$$

et on peut trouver les distances parcourues pour chaque intervalle de temps :

$$\begin{cases} S_2(\text{I}) = 0,075 \text{ m} \\ S_2(\text{II}) = 0,525 \text{ m} \\ S_2(\text{III}) = 0,600 \text{ m} \end{cases}$$

III. 1. 2.2.3. Vitesse et accélération de chaînon (3)

le chaînon (3) fait un mouvement de translation avec :

-le vecteur de vitesse analogue $\overline{\dot{S}}_3(t) = \dot{h}_2 \overline{k}_2 + \dot{z}_3 \overline{i}_2$

-le vecteur de accélération analogue $\overline{\ddot{S}}_3(t) = \ddot{h}_2 \overline{k}_2 + \ddot{z}_3 \overline{i}_2$

Donc : $|\overline{\dot{S}}_3| = \sqrt{(\dot{h}_2)^2 + (\dot{z}_3)^2}$

on va supposer :

- $S_3^{\max} = 0,070 \text{ m}$ (la distance maximale parcourue par le chaînon (3))
- Le temps nécessaire pour parcourir cette distance : $t_3 = 0,5 \text{ s}$.

La loi de mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} \text{I : } S_3(t) = \ddot{S}_3^{\max} \cdot t^2 / 2 & \text{pour l'intervalle de temps } [0, 0.1] \\ \text{II : } S_3(t) = \dot{S}_3^{\max} \cdot t + S_3(\text{I}) & \text{pour l'intervalle de temps } [0.1, 0.4] \\ \text{III : } S_3(t) = -\ddot{S}_3^{\max} \cdot t^2 / 2 + \dot{S}_3^{\max} \cdot t + S_3(\text{II}) & \text{pour l'intervalle de temps } [0.4, 0.5] \end{cases}$$

On remplace le temps on trouve

$$\begin{cases} \text{I : } S_3(0,1) = \ddot{S}_3^{\max} \cdot (0,1)^2 / 2 \\ \text{II : } S_3(0,3) = \dot{S}_3^{\max} \cdot (0,3) + S_3(\text{I}) \\ \text{III : } S_3(0,1) = -\ddot{S}_3^{\max} \cdot (0,1)^2 / 2 + \dot{S}_3^{\max} \cdot (0,1) + S_3(\text{II}) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} I: S_3(0.1) = 0.005 \ddot{S}_3^{\max} \\ II: S_3(0.3) = 0.3 \dot{S}_3^{\max} \cdot (0.3) + 0.005 S_3(I) \\ III: S_3(0.1) = -0.005 \ddot{S}_3^{\max} + 0.1 \dot{S}_3^{\max} + 0.3 \dot{S}_3^{\max} + 0.005 \ddot{S}_3^{\max} = 0.4 \dot{S}_3^{\max} = 0.070 m \end{cases}$$

A.N :

$$\dot{S}_3^{\max} = 0,070 / 0,4 = 0,175$$

$$\boxed{\dot{S}_3^{\max} = 0,070 / 0,4 = 0,175}$$

$$\boxed{\dot{S}_3^{\max} = 0,175 \text{ m/s}}$$

Et on a d'après l'équation H (mouvement accéléré) $\dot{S}_3^{\max} = \ddot{S}_3^{\max} \cdot t_{\max}$ alors :

$$\ddot{S}_3^{\max} = \dot{S}_3^{\max} / t$$

A.N:

$$\ddot{S}_3^{\max} = 0,175 / 0,1 = 1,75$$

$$\boxed{\ddot{S}_3^{\max} = 1,75 \text{ m/s}^2}$$

et on peut trouver les distances parcourue pour chaque intervalle de temps

$$\begin{cases} S_3 (I) = 0,00875 \text{ m} \\ S_3 (II) = 0,06125 \text{ m} \\ S_3 (III) = 0,070 \text{ m} \end{cases}$$

IV. 1.2.2.4 Vitesse et accélération de chaînon (4)

le chaînon (4) fait un mouvement de translation avec :

-le vecteur de vitesse analogue $\overrightarrow{S}_4(t) = \dot{h}_3 \overrightarrow{k}_3 - \dot{z}_4 \overrightarrow{i}_3$

-le vecteur d'accélération analogue $\overrightarrow{\ddot{S}}_4(t) = \ddot{h}_3 \overrightarrow{k}_3 - \ddot{z}_4 \overrightarrow{i}_3$

Donc : $|\ddot{S}_4| = \sqrt{(\ddot{h}_3)^2 + (-\ddot{z}_4)^2}$

on va supposer :

• $S_4^{\max} = 0,400\text{m}$ (la distance maximale parcourue par le chaînon (4)).

• Le temps nécessaire pour parcourir cette distance : $t_4 = 5 \text{ s}$.

La loi de mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} I : S_4(t) = \ddot{S}_4^{\max} \cdot t^2 / 2 & \text{pour l'intervalle de temps } [0, 1] \\ II : S_4(t) = \dot{S}_4^{\max} \cdot t + S_4(I) & \text{pour l'intervalle de temps } [1, 4] \\ III : S_4(t) = -\ddot{S}_4^{\max} \cdot t^2 / 2 + \dot{S}_4^{\max} \cdot t + S_4(II) & \text{pour l'intervalle de temps } [4, 5] \end{cases}$$

On remplace le temps on trouve :

$$\begin{cases} I : S_4(1) = \ddot{S}_4^{\max} \cdot (1)^2 / 2 \\ II : S_4(3) = \dot{S}_4^{\max} \cdot (3) + S_4(I) \\ III : S_4(1) = -\ddot{S}_4^{\max} \cdot (1)^2 / 2 + \dot{S}_4^{\max} \cdot (1) + S_4(II) \end{cases}$$

On a donc :

$$I : S_4(1) = 0.5 \ddot{S}_4^{\max}$$

$$II : S_4(3) = 3 \dot{S}_4^{\max} + S_4(1) = 3 \dot{S}_4^{\max} + 0.5 \ddot{S}_4^{\max}$$

$$III : S_4(1) = -0.5 \ddot{S}_4^{\max} + 3 \dot{S}_4^{\max} + \dot{S}_4^{\max} + 0.5 \ddot{S}_4^{\max} = 4 \dot{S}_4^{\max} = 0.400 \text{ mm}$$

A.N :

$$\dot{S}_4(t) = 0,400 / 4 = 0,1$$

$$\dot{S}_4(t) = 0,1 \text{ m/s}$$

Et on a d'après l'équation II (mouvement accéléré)

$$\dot{S}_4^{\max} = \ddot{S}_4^{\max} \cdot T_{\max} \text{ alors : } \ddot{S}_4^{\max} = \dot{S}_4^{\max} / t$$

A.N :

$$\dot{S}_4^{\max} = 0,1 / 1 = 0,1 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\ddot{S}_4(t) = 0,1 \text{ m/s}^2}$$

et on peut trouver les distances parcourues pour chaque intervalle de temps .

$$\begin{cases} S_4(I) = 0,050 \text{ m} \\ S_4(II) = 0,350 \text{ m} \\ S_4(III) = 0,400 \text{ m} \end{cases}$$

III. 1.2.2.5 Vitesse et accélération de chaînon (5)

Le chaînon (5) fait un mouvement de translation avec :

-le vecteur de vitesse analogue $\overrightarrow{\dot{S}}_5(t) = (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)\overrightarrow{k}_4$

-le vecteur de accélération analogue $\overrightarrow{\ddot{S}}_5(t) = (\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5)\overrightarrow{k}_4$

$$\text{Donc : } |\ddot{S}_5| = \sqrt{(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5)^2}$$

On va supposer :

- $S_5^{\max} = 0,400\text{m}$ (la distance maximale parcourue par le chaînon (5)).
- Le temps nécessaire pour parcourir cette distance : $t_4 = 5 \text{ s}$.

La loi de mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} I : S_5(t) = \ddot{S}_5^{\max} \cdot t^2 / 2 & \text{pour l'intervalle de temps } [0, 1] \\ II : S_5(t) = \dot{S}_5^{\max} \cdot t + S_5(I) & \text{pour l'intervalle de temps } [1, 4] \\ III : S_5(t) = -\ddot{S}_5^{\max} \cdot t^2 / 2 + \dot{S}_5^{\max} \cdot t + S_5(II) & \text{pour l'intervalle de temps } [4, 5] \end{cases}$$

On remplace le temps on trouve :

$$\begin{cases} I : S_5(1) = \ddot{S}_5^{\max} \cdot (1)^2 / 2 \\ II : S_5(3) = \dot{S}_5^{\max} \cdot (3) + S_5(I) \\ III : S_5(1) = -\ddot{S}_5^{\max} \cdot (1)^2 / 2 + \dot{S}_5^{\max} \cdot (1) + S_5(II) \end{cases}$$

On a donc :

$$I : S_5(1) = 0.5\ddot{S}_5^{\max}$$

$$II : S_5(3) = 3\dot{S}_5^{\max} + S_5(1) = 3\dot{S}_5^{\max} + 0.5\ddot{S}_5^{\max}$$

$$III : S_5(1) = -0.5\ddot{S}_5^{\max} + 3\dot{S}_5^{\max} + \dot{S}_5^{\max} + 0.5\ddot{S}_5^{\max} = 4\dot{S}_5^{\max} = 0.400\text{mm}$$

A.N

$$\dot{S}_5(t) = 0,400/4 = 0,1$$

$$\dot{S}_5(t) = 0,1\text{m/s}$$

Et on a d'après l'équation II (mouvement accéléré)

$$\dot{S}_5^{\max} = \ddot{S}_5^{\max} \cdot T_{\max} \quad \text{alors : } \ddot{S}_5^{\max} = \dot{S}_5^{\max} / t$$

A.N :

$$\dot{S}_5^{max} = 0,1 / 1 = 0,1 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{S}_5(t) = 0,1 \text{ m/s}^2$$

et on peut trouver les distances parcourues pour chaque intervalle de temps

$$\begin{cases} S_5(\text{I}) = 0,050 \text{ m} \\ S_5(\text{II}) = 0,350 \text{ m} \\ S_5(\text{III}) = 0,400 \text{ m} \end{cases}$$

III. 1. 2.3 Deuxième variante

III. 1. 2.3.1 Vitesse et accélération de chaînon (1)

Le chaînon (1) fait un mouvement de rotation avec la vitesse analogue $\dot{\gamma}_1$ et avec l'accélération analogue $\ddot{\gamma}_1$, on suppose que :

Un diamètre de roue denté égale à $d_1 = 0,240 \text{ m}$.

Le temps nécessaire pour parcourir le demi-périphérique L, est égal à : $t_1 = 3 \text{ s}$.

Alors on a : $L_1 = 7c.R$,

A.N : $L_1 = 3,14.120 = 376,99 \text{ mm}$

D'où $L_1 = 0,377 \text{ m}$ La loi de mouvement est donnée par

$$\begin{cases} Y\text{I}(t) = 1/2 a t^2 \\ Y\text{II}(t) = \dot{Y}_{\max} t + Y_0 \\ Y\text{III}(t) = -1/2 a t^2 + \dot{Y}_{\max} t + Y_0 \end{cases}$$

On remplace le temps on trouve :

$$\begin{cases} Y\text{I}(0,5) = 1/2 a (0,5)^2 & \text{Pour l'intervalle de temps } [0 \ 0,5] \\ Y\text{II}(2) = \dot{Y}_{\max} (2) + Y\text{I}(0,5) & \text{Pour l'intervalle de temps } [0,5 \ 2,5] \\ Y\text{III}(0,5) = -1/2 a (0,5)^2 + \dot{Y}_{\max} (0,5) + Y\text{II}(0,5) & \text{Pour l'intervalle de temps } [2,5 \ 3] \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} Y\text{I}(0,5) = 0,125.a \\ Y\text{II}(2) = 2.\dot{Y}_{\max} + 0,125.a \\ Y\text{III}(0,5) = -0,125.a + 0,5\dot{Y}_{\max} + 2.\dot{Y}_{\max} + 0,125.a = 2,5.\dot{Y}_{\max} = L_1 = 0,377 \text{ mm} \end{cases}$$

III. 1.4. Forces d'inertie et moments des forces d'inerties des chaînons

III.1.4.1. Les forces d'inertie

Les forces d'inerties pour chaque chaînon dépend de son centre de masse .le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon, comme c'est connu, égal à :

$$\vec{F}_n^i = -m_n \cdot \vec{a}_n$$

Où : a_n : Accélération de centre de masse de chaînon (n) (n = 1,...,5)

Donc :

$$\vec{F}_1^i = -m_1 \cdot \vec{a}_1 : \text{Le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon (1).}$$

$$\vec{F}_2^i = -m_2 \cdot \vec{a}_2 : \text{Le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon (2).}$$

$$\vec{F}_3^i = -m_3 \cdot \vec{a}_3 : \text{Le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon (3).}$$

$$\vec{F}_4^i = -m_4 \cdot \vec{a}_4 : \text{Le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon (4).}$$

$$\vec{F}_5^i = -m_5 \cdot \vec{a}_5 : \text{Le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon (5).}$$

Où :

m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 : représente les masses des chaînons (1,2,3,4,5) respectivement.

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 représente les accélérations de centre de masse des chaînons (1,2,3,4,5) respectivement.

Remarque : pour calculer les forces d'inerties donc il faut calculer les accélérations de centre de masse des chaînons (1, 2, 3, 4,5) respectivement.

III.1.4.1.1.Calcul Les accélérations :

le mouvement des chaînons (1,2,3,4) du robot est un mouvement composé donc pour calculer leurs les accélérations on applique la cinématique du solide telle qu'a chaque point (N_k)d'un solide(S_k),on peut associer son vecteur accélération défini par :

$$\vec{a}_i(N_k) = \frac{d^i \overline{V^i(N_k)}}{dt}$$

Avec :

$$\vec{V}^i(N_k) = \frac{d^i \overline{O_i N_k}}{dt}$$

avec :

$\overline{O_i N_k}$: le vecteur de position de point N_k liés au repère k. La dérivation de vecteur vitesse nous

Donne :

$$\overline{V}^i(N_k) = \frac{d^i \overline{O_i N_k}}{dt} = \frac{d^k \overline{O_i N_k}}{dt} + \overline{\Omega}_k \wedge \overline{O_i N_k}$$

$\overline{\Omega}_k^i$: C'est le vecteur instantané de rotation de repère R_k / R_i

III.1.4.1.1.1. Calcul de l'accélération de chaînon (1)

d'après le schéma cinématique du robot, le vecteur de position $\overline{O_1 c_1}$ du centre d'inertie du chaînon(1) est donné par :

$$\overline{O_1 c_1 / R_1} = r_1 \overline{k_1}$$

d'où la vitesse du chaînon(1) :

$$\overline{V}^0(c_1)_{/R_1} = \frac{d^0 \overline{O c_1}}{dt}_{/R_1} = \frac{d^1 \overline{O c_1}}{dt}_{/R_1} + \overline{\Omega}_1^0 \wedge \overline{O c_1 / R_1}$$

$\overline{\Omega}_1^0$: C'est le vecteur instantané de rotation de repère R_1 par apport au repère R_0 représenté dans le repère R_1 .

On a :

$$\overline{\Omega}_{0/R_1}^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{/R_1}$$

et :
$$\frac{d^1 \overline{O c_1}}{dt}_{/R_1} = \frac{d^1 (r_1 \overline{k_1})}{dt}_{/R_1} = \vec{0}$$

$$\overline{V}^0(c_1)_{/R_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

où :
$$\overline{V}^0(c_1)_{/R_1} = \vec{0}$$

$$\overline{a}^0(c_1) = \frac{d^0 \overline{V}^0(c_1)}{dt}_{/R_1}$$

Donc :
$$\boxed{\overline{a}^0(c_1) = \vec{0}}$$

III.1.4.1.1.2. Calcul de l'accélération de chaînon (2)

d'après le schéma cinématique du robot le vecteur de position $\overline{Oc_2}$ du centre d'inertie du chaînon

(2):

$$\overline{OC_{2/R1}} = \overline{OB} + \overline{BC}$$

Or :
$$\overline{OB}_{/R_1, R_2} = h_1 \cdot \overline{k_1}$$

$$\overline{BC}_{/R_1, R_2} = z_2 \cdot \overline{k_1}$$

Alors :
$$\overline{OC}_{2/R_1, R_2} = h_1 \cdot \overline{k_1} + z_2 \cdot \overline{k_1}$$

$$\overline{V^0}(c_2)_{/R1} = \frac{d^0 \overline{Oc_2}}{dt_{/R1}} = \frac{d^1 \overline{Oc_2}}{dt_{/R1}} + \overline{\Omega_{2/R1}^0} \wedge \overline{Oc_2}_{/R1}$$

$\overline{\Omega_2^0} = \overline{\Omega_1^0}$: c'est le vecteur instantané de rotation représenté dans le repère R_2 par rapport au repère R_0 représenté dans le repère R_1 On a :

$$\overline{\Omega_{0/R1}^2} = \overline{\Omega_{0/R1}^1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{/R1}$$

Et :
$$\frac{d^1 \overline{Oc_2}}{dt_{/R1}} = \frac{d^1 (h_1 \overline{k_1})}{dt_{/R1}} = h_1 \overline{k_1}$$

Alors :
$$\overline{V^0}(c_2)_{/R1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 + z_2 \end{vmatrix} = h_1 \overline{k_1}$$

D'où :
$$\overline{V^0}(c_2)_{/R1} = h_1 \overline{k_1}$$

$$\overline{a^0}(c_2)_{/R1} = \frac{d^0 \overline{V^0}(c_2)}{dt_{/R1}} = \frac{d^1 \overline{V^0}(c_2)}{dt_{/R1}} + \overline{\Omega_{2/R1}^0} \wedge \overline{V^0}(c_2)_{/R1}$$

$$\overline{a^0}(c_2)_{/R1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{h}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{vmatrix}$$

Donc :
$$\overline{a^0(c_2)}_{/R1} = \ddot{h}_1 \overline{k_1}$$

III. 1.4.1.1.3. Calcul de l'accélération de chaînon (3)

D'après les schéma cinématique du robot le vecteur de position $\overline{Oc_3}$ du centre d'inertie du chaînon(3)

Or :
$$\overline{Oc_3} = \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DC_3}$$

$$\overline{OB}_{/R_1, R_2} = h_1 \cdot \overline{k_1}$$

$$\overline{BD} = (h_2 + z_2) \overline{k_1}$$

$$\overline{BC_3} = z_3 \overline{i_3} = z_3 \overline{i_1}$$

$$\overline{Oc_3} = z_3 \overline{i_1} + (h_2 + h_2 + z_2) \overline{k_1}$$

d'où la vitesse du chaînon (3) :

$$\overline{V^0(c_3)} = \frac{d^0 \overline{Oc_3}}{dt_{/R1}} = \frac{d^1 \overline{Oc_3}}{dt_{/R1}} + \overline{\Omega_{3/R1}^0} \wedge \overline{Oc_3}_{/R1}$$

$\overline{\Omega_3^0} = \overline{\Omega_1^0}$: C'est le vecteur instantané de rotation de repère R_2 r apport au repère R_0 représenté dans le repère R_1 .

On a :
$$\overline{\Omega_{0/R1}^3} = \overline{\Omega_{0/R1}^1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix}_{/R1}$$

Et :
$$\frac{d^1 \overline{Oc_3}}{dt_{/R1}} = \frac{d^1 (h_1 \overline{k_1} + h_2 \overline{k_1} + z_2 \overline{k_1} + z_3 \overline{i_1})}{dt_{/R1}} = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{z}_2) \overline{k_1} + \dot{z}_3 \overline{i_1}$$

alors :
$$\overline{V^0(c_3)}_{/R1} = \begin{vmatrix} \dot{z}_3 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} z_3 \\ 0 \\ h_1 + h_2 + z_2 \end{vmatrix} = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{z}_2 + z_3 \dot{\gamma}) \overline{k_1} + \dot{z}_3 \overline{i_1}$$

D'où

$$\overline{V^0(c_3)}_{/R1} = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{z}_2 + z_3 \dot{\gamma}) \overline{k_1} + \dot{z}_3 \overline{i_1}$$

Donc :

$$\overline{a^0}(c_3) = \frac{d^0 \overline{V^0}(c_3)}{dt}_{/R1}$$

$$\overline{a^0}(c_3)_{/R1} = \frac{d^0 \overline{V^0}(c_3)}{dt}_{/R1} = \frac{d^1 \overline{V^0}(c_3)}{dt}_{/R1} + \overline{\Omega}_{2/1}^0 \wedge \overline{V^0}(c_3)_{/R1}$$

$$\overline{a^0}(c_3)_{/R1} = \begin{vmatrix} \ddot{z}_3 \\ 0 \\ \ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{\gamma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{z}_3 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{z}_2 + z_3 \dot{\gamma} \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\overline{a^0}(c_3)_{/R1} = (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \dot{z}_3) \overline{k}_1 + \ddot{z}_3 \overline{i}_1}$$

III.1.4.1.1.4. Calcul de l'accélération de chaînon (4) :

d'après le schéma cinématique du robot le vecteur de position $\overline{Oc_4}$ du centre d'inertie du chaînon(3) :

$$\overline{Oc_4} = \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC_4}$$

Or :

$$\overline{OB}_{/R1, R2} = h_1 \overline{k}_1$$

$$\overline{BD} = (h_2 + z_2) \overline{k}_1$$

$$\overline{DE} = h_3 \overline{k}_1 + z_3 \overline{i}_1$$

$$\overline{EC_4} = -z_4 \overline{i}_1$$

Alors :

$$\overline{Oc_4}_{/R1} = (h_1 + h_2 + h_3 + z_2) \overline{k}_1 + (z_3 - z_4) \overline{i}_1$$

d'où la vitesse du chaînon(4) :

$$\overline{V^0}(c_4) = \frac{d^0 \overline{Oc_4}}{dt}_{/R1} = \frac{d^1 \overline{Oc_4}}{dt}_{/R1} + \overline{\Omega}_{4/1}^0 \wedge \overline{Oc_4}_{/R1}$$

$\overline{\Omega}_4^0 = \overline{\Omega}_1^0$: c'est le vecteur instantané de rotation de repère R_2 r apport au repère R_0 représenté dans le repère R_1 .

Et :

$$\frac{d^1 \overline{Oc}_4}{dt} / R_1 = \frac{d^1 ((h_1 + h_2 + z_2 + h_3) \overline{k}_1 + (z_3 - z_4) \overline{i}_1)}{dt} / R_1 = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{z}_2) \overline{k}_1 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i}_1$$

alors :

$$\overline{V}^0(c_4) / R_1 = \begin{vmatrix} \dot{z}_3 - \dot{z}_4 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} z_3 - z_4 \\ 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \end{vmatrix} = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{z}_2 + (z_3 - z_4) \dot{\gamma}) \overline{k}_1 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i}_1$$

Donc :

$$\overline{V}^0(c_4) / R_1 = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{z}_2 + (z_3 - z_4) \dot{\gamma}) \overline{k}_1 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i}_1$$

Donc :

$$\overline{a}^0(c_4) = \frac{d^0 \overline{V}^0(c_4)}{dt} / R_1$$

$$\overline{a}^0(c_4) / R_1 = \frac{d^0 \overline{V}^0(c_4)}{dt} / R_1 = \frac{d^1 \overline{V}^0(c_4)}{dt} / R_1 + \overline{\Omega}_4^0 / R_1 \wedge \overline{V}^0(c_4) / R_1$$

$$\overline{a}^0(c_4) / R_1 = \begin{vmatrix} \ddot{z}_3 - \ddot{z}_4 \\ 0 \\ \ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \ddot{\gamma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{z}_3 - \dot{z}_4 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{z}_2 + (z_3 - z_4) \dot{\gamma} \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\overline{a}^0(c_4) / R_1 = (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \dot{\gamma}) \overline{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) \overline{i}_1}$$

III. 1.4.1.15 Calcul de l'accélération de chaînon (5)

d'après le schéma cinématique du robot le vecteur de position $\overline{o_1 c_5}$ du centre d'inertie du chaînon(3) :

$$\overline{Oc}_5 = \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{Fc}_5$$

Or :

$$\overline{OB} / R_1, R_2 = h_1 \cdot \overline{k}_1$$

$$\overline{BD} = (h_2 + z_2) \cdot \overline{k_1}$$

$$\overline{DE} = h_3 \cdot \overline{k_1} + z_3 \cdot \overline{i_1}$$

$$\overline{EF} = -z_4 \cdot \overline{i_1} + h_4 \cdot \overline{k_1}$$

$$\overline{FC_5} = -z_5 \cdot \overline{k_1}$$

Alors :

$$\overline{O_1 c_5 / R_1} = (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5) \cdot \overline{k_1} + (z_3 - z_4) \cdot \overline{i_1}$$

d'où la vitesse du chaînon(4) :

$\overline{\Omega_5^0} = \overline{\Omega_1^0}$: c'est le vecteur instantané de rotation de repère R_2 par apport au repère

R_0 représenté dans le repère R_1 .

Et :

$$\frac{d^1 \overline{Oc_5}}{dt} / R_1 = \frac{d^1 ((h_1 + h_2 + z_2 - z_5 + h_3 + h_4) \overline{k_1} + (z_3 - z_4) \overline{i_1})}{dt} / R_1 = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{z}_2 - \dot{z}_5) \overline{k_1} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i_1}$$

alors :

$$\overline{V^0}(c_5) = \frac{d^0 \overline{Oc_5}}{dt} / R_1 = \frac{d^1 \overline{Oc_5}}{dt} / R_1 + \overline{\Omega_4^0} \wedge \overline{Oc_5 / R_1}$$

$$\begin{aligned} \overline{V^0}(c_5) / R_1 &= \begin{vmatrix} \dot{z}_3 - \dot{z}_4 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{z}_2 - \dot{z}_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} z_3 - z_4 \\ 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \end{vmatrix} \\ &= (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{z}_2 - \dot{z}_5 + (z_3 - z_4) \dot{\gamma}) \cdot \overline{k_1} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i_1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\overline{V^0}(c_4) / R_1 = (\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{z}_2 - \dot{z}_5 + (z_3 - z_4) \dot{\gamma}) \cdot \overline{k_1} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) \overline{i_1}$$

Donc :

$$\overline{a^0}(c_5) = \frac{d^0 \overline{V^0}(c_5)}{dt} / R_1$$

$$\overline{a^0}(c_5) / R_1 = \frac{d^0 \overline{V^0}(c_5)}{dt} / R_1 = \frac{d^1 \overline{V^0}(c_5)}{dt} / R_1 + \overline{\Omega_5^0} \wedge \overline{V^0}(c_5) / R_1$$

$$\overline{a^0}(c_5)_{/R1} = \begin{vmatrix} \ddot{z}_3 - \ddot{z}_4 \\ 0 \\ \ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{z}_3 - \dot{z}_4 \\ 0 \\ \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{z}_2 - \dot{z}_5 + (z_3 - z_4)\dot{\gamma} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overline{a^0}(c_5)_{/R1} = (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma})\overline{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)\overline{i}_1}$$

$$F_1^i = -m_1 \cdot (0) = 0$$

Donc : $\boxed{\overline{F}_1^i = 0}$

❖ $\boxed{\overline{F}_2^i = -m_2 \cdot \overline{ac}_2}$ le vecteur principal e a force inertie du chaînon(2) si on remplace le vecteur de l'accélération alors on a :

$$\boxed{\overline{F}_2^i = -m_2 \cdot \ddot{h}_1 \overline{k}_1}$$

❖ $\boxed{\overline{F}_3^i = -m_3 \cdot \overline{ac}_3}$ le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon(3) si on remplace le vecteur de l'accélération alors on a :

$$\boxed{\overline{F}_3^i = -m_3 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \dot{z}_3) \overline{k}_1 + \ddot{z}_3 \overline{i}_1}$$

❖ $\boxed{\overline{F}_4^i = -m_4 \cdot \overline{ac}_4}$ le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon(4) si on remplace le vecteur de l'accélération alors on a :

$$\boxed{\overline{F}_4^i = -m_4 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) \overline{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)\overline{i}_1}$$

❖ $\boxed{\overline{F}_5^i = -m_5 \cdot \overline{ac}_5}$ le vecteur principal de la force d'inertie du chaînon(5) si on remplace le vecteur de l'accélération alors on a :

$$\boxed{\overline{F}_5^i = -m_5 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) \overline{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)\overline{i}_1}$$

IV. 1.4.2. Les moments principaux des forces d'inerties des chaînons

les moments des forces d'inerties pour chaque chaînon dépendent de son centre de masse le moment principal de la force d'inertie du chaînon, comme c'est connu, est égal à :

$$\overline{M}_G^i = Jc_j \cdot \overline{\Omega}_j + \overline{\Omega}_j \wedge (Jc_j \cdot \overline{\Omega}_j) \quad (*)$$

ou :

J_{cj} : Le tenseur cinétique de chaînon (j) ($j=1, \dots, 5$) par rapport au centre d'inertie c_j

$$J_{cj} = \begin{pmatrix} J_{xixi} & J_{xiyi} & J_{xizi} \\ J_{xiyi} & J_{yiyi} & J_{yizi} \\ J_{xizi} & J_{ziyi} & J_{zizi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xixi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yiyi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zizi} \end{pmatrix}$$

Remarque

Les produits d'inerties des chaînons (1) et (2) sont nuls car ces axes sont des axes centraux principaux; par contre les produits d'inerties des chaînons (3), (4) et (5) différent de zéro mais ils sont très petits par rapport aux moments d'inerties, donc ils sont négligeables.

$\overline{\Omega}_j$: c'est le vecteur instantané de rotation ; dans notre cas comme nous avons vu précédemment :

$$\overline{\Omega}_j = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{vmatrix} \quad \dot{\overline{\Omega}}_j = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\gamma} \end{vmatrix}$$

❖ Démonstration de la formule (*) :

On sait que le moment des forces extérieures dans un point est égal au moment dynamique dans ce point telle que :

$$\sum \overline{M}_{ext} = \overline{\delta}^0(M)$$

$\overline{\delta}^0(M)$: le moment dynamique de point M par rapport à c_i . Telle que :

$$\overline{\delta}^0(M) = \frac{d^0 \mu^0(M)}{dt} + \overline{V}^0(M) \wedge m \cdot \overline{V}^0(c_j)$$

avec

$\mu^0(M)$: le moment cinétique de point M,

ou :

$$\mu^0(M) = J_{cj} \cdot \overline{\Omega}_j + \overline{M}c_j \wedge m \cdot \overline{V}^0(c_j)$$

dans notre cas $M = c_j$ d'où :

$$\overline{\mu}^0(M) = Jcj.\overline{\Omega}_j$$

Alors :

$$\overline{\delta}^0(M) = \frac{d^0 \overline{\mu}^0(M)}{dt} + \overline{V}^0(M) \wedge m.\overline{V}^0(cj) \quad \overline{\delta}^0(M) = \frac{d^0(Jcj.\overline{\Omega}_j)}{dt} + \overline{V}^0(cj) \wedge m.\overline{V}^0(cj)$$

$$\overline{M}_{cj}^i = \frac{d^0(Jcj.\overline{\Omega}_j)}{dt} \Big|_{Rj} + \overline{\Omega}_j \wedge (Jcj.\overline{\Omega}_j)$$

$$\overline{M}_{cj}^i = Jcj \frac{d^0(\overline{\Omega}_j)}{dt} \Big|_{Rj} + \overline{\Omega}_j \wedge (Jcj.\overline{\Omega}_j)$$

on a alors :

$$\boxed{\overline{M}_{cj}^i = Jcj(\overline{\Omega}_j) \Big|_{Rj} + \overline{\Omega}_j \wedge (Jcj.\overline{\Omega}_j)}$$

C'est la formule a démontré.

Alors si on remplace les valeurs des variantes de la formule (I) on aura :

$$\begin{aligned} \overline{M}_{cj}^i &= \begin{pmatrix} J_{xixi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yiyi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zizi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} J_{xixi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yiyi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zizi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ J_{zk} \ddot{\gamma} & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ J_{zi} \dot{\gamma} & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ J_{zi} \dot{\gamma} & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ J_{zk} \dot{\gamma} & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Alors : $\boxed{\overline{M}_{ck}^i = J_{zk}.\ddot{\gamma}.\vec{k}}$

Remarque

Le signe moins signifie que le moment de force d'inertie est de sens inverse de mouvement. Donc on peut calculer les moments des forces d'inerties des chaînons.

$$\boxed{\overline{M}_{c1}^i = J_{z1}.\ddot{\gamma}.\vec{k}_1} : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (1).}$$

$$\overline{M}_{c1}^i = J_{z1} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k}_1 : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (1).}$$

$$\overline{M}_{c2}^i = J_{z2} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k}_2 : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (2).}$$

$$\overline{M}_{c3}^i = J_{z3} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k}_3 : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (3).}$$

$$\overline{M}_{c4}^i = J_{z4} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k}_4 : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (4).}$$

$$\overline{M}_{c5}^i = J_{z5} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k}_5 : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (5).}$$

Ou :

$J_{z1}, J_{z2}, J_{z3}, J_{z4}, J_{z5}$ représente les moments d'inerties des chaînons (1,2,3,4,5) respectivement Par rapport aux centres des axes des chaînons (1,2,3,4,5) respectivement parallèles à l'axe de rotation (z_i).

III. 1.5. La détermination des équations de mouvement par le principe de D'Alembert

Sur les chaînons de robot s'appliquent les forces actives, les forces d'inerties et les moments des forces d'inerties comme l'indique la figure (III.1.2).

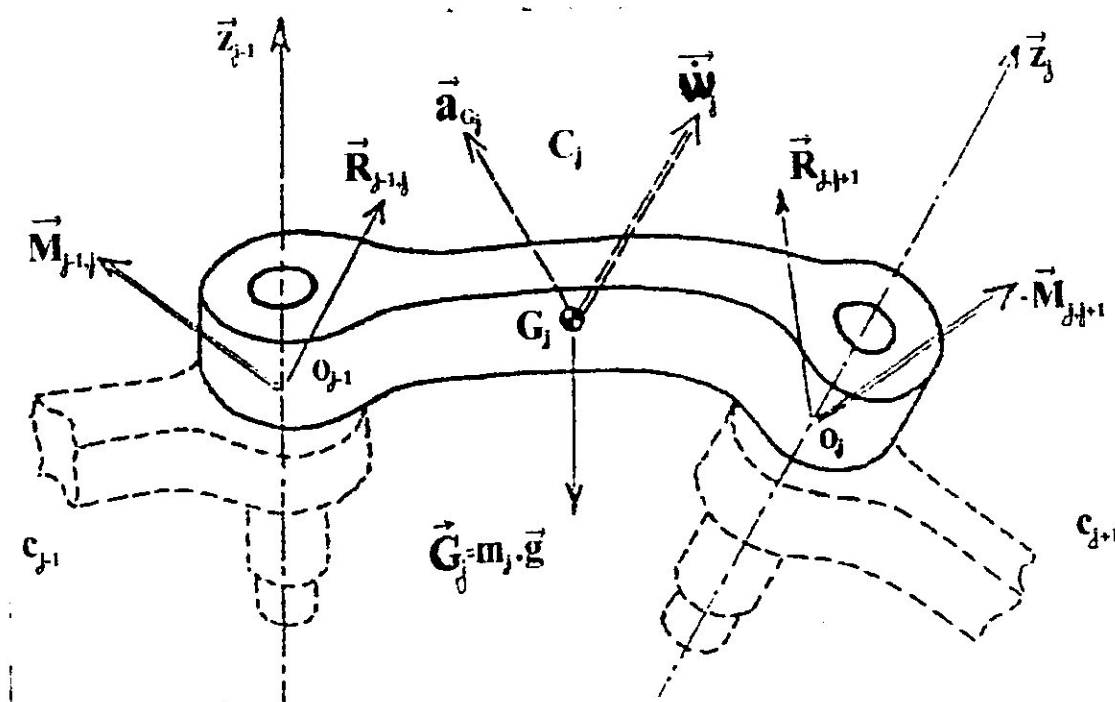


Figure (III-1-2) : Les différentes forces agissant sur les chaînon du robot

On a d'après le principe de d'Alembert l'équation des forces résultantes :

$$\boxed{\overline{R}_{j-1,j} - \overline{R}_{j,j+1} + \overline{G}_j + \overline{F}_j = \overline{0}} \quad (*)$$

Avec :

$\overline{R}_{j-1,j}$: la réaction résultante entre le chaînon j-1 et j

$\overline{R}_{j,j+1}$: la réaction résultante entre le chaînon j

\overline{G}_j : la force de gravité du chaînon j est égale à :

$$\overline{G}_j = m_j \cdot \overline{g}$$

\overline{F}_j : la force d'inertie due au chaînon J.

Et on a encore l'équation des moments résultants qui est donnée par :

$$\boxed{\overline{M}_{j-1,j} + \overline{M}_{j,j+1} + \overline{C}_j \overline{O}_{j-1} \wedge \overline{R}_{j-1,j} + \overline{C}_j \overline{O}_{j-1} \wedge (-\overline{R}_{j,j+1}) + \overline{M}_{ej}^i = \overline{0}} \quad (**)$$

Avec :

$\overline{M}_{j-1,j}$: moment résultant entre le couple cinématique qui lié les chaînons j-1 et j.

$\overline{M}_{j,j+1}$: moment résultant entre le couple cinématique qui lié les chaînons j et j+1.

$\overline{C}_j \overline{O}_{j-1}$: Vecteur de position liée le point «centre de gravité de chaînon j) et l'origine de repère (o_{j-1}, x, y, z) .

\overline{M}_{ej}^i : le moment des forces d'inertie du chaînon(j).

Remarque

Pour faire appliquer ces deux équations sur notre robot nous avons commencé par le chaînon (5) puis le chaînon (4) jusqu'au chaînon (1).

III. 1.5.1. Les équations d'équilibres du chaînon (5)

III. 1.5.1.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes

Si on applique l'équation (*) sur le chaînon (5) on trouve son équation d'équilibre

$$\overline{R}_{4,5} + m_5 \overline{g} + \overline{F}_5^i = \overline{0}$$

avec : $\overline{R}_{4,5} = \overline{R}_F$ c'est la réaction résultante dans le couple cinématique F

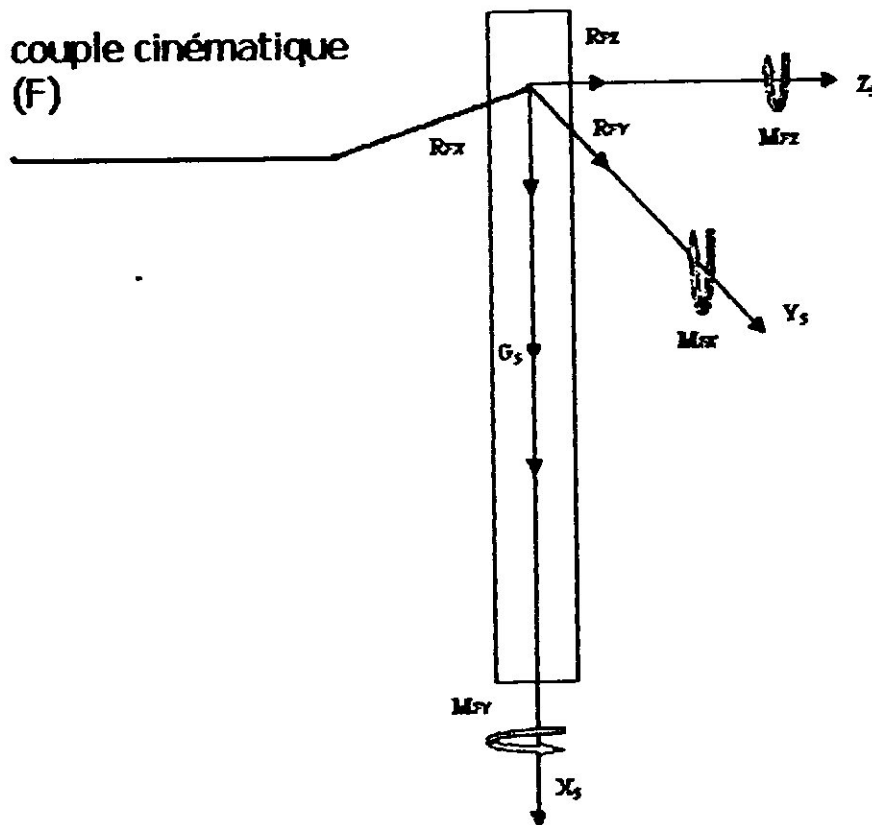


Figure (III.1.3) : Les différentes forces agissantes sur le chaînon (5)

alors si on remplace \vec{F}_5^i par sa valeur on aura :

$$\vec{R}_F + m_5 \vec{g} - m_5 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma})\vec{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)\vec{i}_1 = \vec{0}$$

Si on fait la projection suivant les axes on aura :

❖ Suivant (y_5): $\boxed{R_{Fy} = 0}$ (III.1.1)

❖ Suivant (x_5): $\boxed{m_5(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) = R_{Fx}}$ (III.1.2)

❖ Suivant (z_5) : nous avons l'équation qu'il nous donne la force transmise de chaînon (5), pour cela on applique tous les forces exercées sur l'axe (x_5) du chaînon (5). Donc on aura :

$$m_5 \cdot g - m_5 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) + R_{Fz} = 0$$

$$\boxed{R_{Fz} = m_5 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}))}$$
 (III.1.3)

III.1.5.1.2 L'équation d'équilibre des moments résultants

Si on applique l'équation (**) sur le chaînon (5) on trouve son équation d'équilibre

$$\overline{M}_{4,5} + \overline{C}_5 \overline{O}_4 \wedge \overline{R}_{4,5} + \overline{M}^i_{c_5} = \vec{0}$$

avec, $\overline{M}_{4,5} = \overline{M}_F$ c'est la réaction résultante dans le couple cinématique F

on a :

$$\overline{C}_5 \overline{O}_4 = \overline{C}_5 \overline{E} = -\overline{E} \overline{C}_5 = (-z_5 + h_4) \vec{i}_5 - z_4 \vec{k}_5 = (-z_5 + h_4) \vec{k}_1 + z_4 \vec{i}_1$$

D'où on a:

$$\overline{C}_5 \overline{O}_4 \wedge \overline{R}_{4,5} = \begin{vmatrix} z_4 & & \\ 0 & & \\ -z_5 + h_4 & & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{Fx} \\ R_{Fy} \\ R_{Fz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(-z_5 + h_4) R_{Fy} \\ -z_4 R_{Fz} + (-z_5 + h_4) R_{Fx} \\ +z_4 R_{Fy} \end{vmatrix}$$

D'où on a:

$$\overline{C}_5 \overline{O}_4 \wedge \overline{R}_{4,5} = -(-z_5 + h_4) R_{Fy} \vec{i}_1 + (-z_4 R_{Fz} + (-z_5 + h_4) R_{Fx}) \vec{j}_1 + z_4 R_{Fy} \vec{k}_1$$

Avec :

$$\overline{M}^i_{c_5} = -J_{z_5} \ddot{\gamma} \vec{k}_1 \quad \text{le moment de force d'inertie du chaînon(5) Si on fait la projection suivant}$$

les axes on aura :

❖ Suivant (X₅): $M_{Fx} - (z_5 + h_4) R_{Fy} = 0$

Donc : $M_{Fx} = 0$ (III.1.4)

❖ - Suivant (Y₅):

$$M_{Fy} - (-z_4 R_{Fz} + (-z_5 + h_4) R_{Fx}) = 0$$

$$M_{Fy} - z_4 m_5 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) + (z_5 - h_4)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) m_5 = 0$$

donc :

$$M_{Fy} = z_4 m_5 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - (z_5 - h_4)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) m_5$$
 (III.1.5)

❖ Suivant (Z₅): $M_{Fz} - z_4 R_{Fy} - J_{z_5} \ddot{\gamma} = 0$

donc

$$M_{Fz} = J_{z_5} \ddot{\gamma}$$
 (III.1.6)

III. 1.5.2. L'équation d'équilibre du chaînon (4)

III. 1.5.2.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes

Si on applique l'équation (*) sur le chaînon (4) (voir Figure. III.1.4) on trouve son équation d'équilibre:

$$\bar{R}_{3,4} - \bar{R}_{4,5} + \bar{G}_4 + \bar{F}_4^i = 0$$

Avec :

$\bar{R}_{4,5} = \bar{R}_F$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique F.

$\bar{R}_{3,4} = \bar{R}_E$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique E.

$G_4 = m \cdot g$: c'est la force de gravité de chaînon (4).

alors si on remplace F_4^i et R_E par sa valeur et on fait la projection selon les axes on aura :

$$\bar{R}_E - \bar{R}_F + \bar{G}_4 + \bar{F}_4^i = 0$$

$$\bar{R}_E - \bar{R}_F + \bar{m}_4 g - m_4 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{y} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{y})\vec{k}_1 + (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)\vec{i}_1 = 0$$

❖ Suivant (X_4): $R_{EX} - R_{FX} + m_4 \cdot (g - (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) = 0$

$$R_{EX} + m_5(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) + m_4 \cdot g - m_4(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) = 0$$

$$R_{EX} = -m_5(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) - m_4 \cdot g + m_4(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)$$

$$R_{EX} = -m_4 \cdot g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)$$

(III.1 .7)

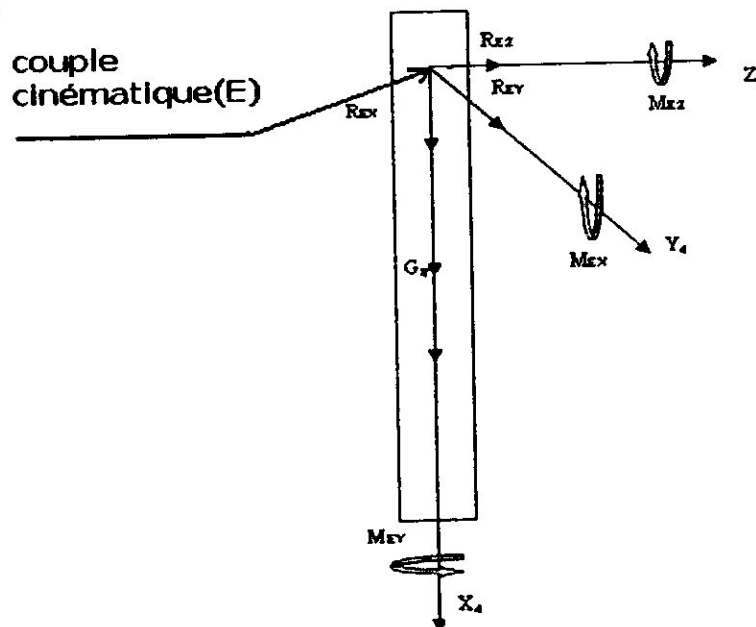


Figure (III.1.4) : Les différentes forces agissant sur le chaînon (4)

❖ Suivant (Z₄) : nous avons l'équation qu'il nous donne la force transmise de chaînon (4), pour cela on applique toutes les forces exercées sur l'axe (z₄) du chaînon (4).

Donc on aura:

$$-R_{FZ} + R_{EZ} - m_4.(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) = 0$$

$$m_5.(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) + R_{EZ} - m_4.(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) = 0$$

$$\boxed{-m_5.(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) + m_4.(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\ddot{\gamma} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)\dot{\gamma}) = R_{EZ}}$$

$$\boxed{-m_5.(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5).(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) = R_{EZ}} \quad (III.1.8)$$

❖ Suivant (Y₄) : $\boxed{R_{EY} = 0}$ (III.1.9)

III. 1.5.2.2. L'équation d'équilibre des moments résultants

Si on applique l'équation (**) sur le chaînon (4) on trouve son équation d'équilibre :

$$\overline{M}_{3,4} - \overline{M}_{4,5} + \overline{C}_4 \overline{O}_3 \wedge (-\overline{R}_{3,4}) + \overline{C}_4 \overline{O}_4 \wedge (-\overline{R}_{4,5}) + \overline{M}_{c4}^i = 0$$

$$\overline{M}_E - \overline{M}_F + \overline{C}_4 \overline{D} \wedge \overline{R}_E + \overline{C}_4 \overline{E} \wedge (-\overline{R}_F) + \overline{M}_{c4}^i = 0$$

$\overline{M}_{4,5} = \overline{M}_F$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique F.

$\overline{M}_{3,4} = \overline{M}_E$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique E.

$\overline{C}_4 \overline{O}_4 = \overline{C}_4 \overline{E} = -\overline{EC}_4 = -z_4 \overline{i}_4 = z_4 \overline{i}_1$ (D'après la matrice de passage).

d'ou on a :

$$\overline{C}_4 \overline{D} = -\overline{DC}_4 = -\overline{DE} - \overline{EC}_4 = -z_4 \overline{i}_4 - h_3 \overline{k}_4 + z_3 \overline{i}_4 = (z_4 - z_3) \overline{i}_1 - h_3 \overline{k}_1$$

$$\overline{C}_4 \overline{E} \wedge (-\overline{R}_F) = \begin{vmatrix} z_4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{FX} \\ -R_{FY} \\ -R_{FZ} \end{vmatrix} = -z_4 R_{FZ} \overline{j}_1 + z_4 R_{FY} \overline{k}_1$$

$$\overline{C}_4 \overline{D} \wedge (-\overline{R}_E) = \begin{vmatrix} z_4 - z_3 \\ 0 \\ -h_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{EX} \\ R_{EY} \\ R_{EZ} \end{vmatrix} = h_3 R_{EY} \overline{i}_1 + ((-z_4 + z_3) R_{EZ} - h_3 R_{EX}) \overline{j}_1 + (z_4 - z_3) R_{EY} \overline{k}_1$$

Avec :

$\overline{M}_{c4}^i = -J_{z_4} \ddot{\gamma} \overline{k}_1$ le moment de force d'inertie du chaînon(4)

❖ Si on fait la projection suivant les axes on aura :

$$\diamond \text{Suivant } (x_4): M_{EX} - M_{FX} - h_3 R_{EY} = 0$$

$$\boxed{M_{EX} = 0} \quad (\text{III.1.11})$$

$$\diamond \text{Suivant } (y_4): M_{EY} - M_{FY} + (z_4 - z_3)R_{EZ} + z_4 R_{FZ} + h_3 R_{EX} = 0$$

$$M_{EY} - M_{FY} + (2z_4 - z_3)R_{EZ} + h_3 R_{EX} = 0$$

$$M_{EY} = M_{FY} - (2z_4 - z_3)(-m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - h_3(-m_4 g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)))$$

$$\boxed{M_{EY} = -(2z_4 - z_3)(-m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - h_3(-m_4 g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4))) + z_4 m_3 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - (z_5 - h_3)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) m_3} \quad (\text{III.1.12})$$

$$\diamond \text{Suivant } (z_4): (-2z_4 + z_3)R_{EY} + M_{EZ} - M_{FZ} + M_{c4}^i = 0$$

$$\boxed{M_{EZ} - J_{z_5} \ddot{\gamma} - J_{z_4} \ddot{\gamma} = 0}$$

$$\boxed{M_{EZ} = (J_{z_5} + J_{z_4}) \ddot{\gamma}} \quad (\text{III.1.13})$$

III. 1.5.3. L'équation d'équilibre du chaînon (3)

III. 1.5.3.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes

Si on applique l'équation (*) sur le chaînon (3) (voir Figure. III.1.5) on trouve son équation

$$\text{d'équilibre: } \vec{R}_{2,3} - \vec{R}_{3,4} + \vec{G}_3 + \vec{F}_3^i = 0$$

Avec :

$$\vec{R}_{3,4} = \vec{R}_E \text{ c'est la réaction résultante dans le couple cinématique E.}$$

$$\vec{R}_{2,3} = \vec{R}_D \text{ c'est la réaction résultante dans le couple cinématique D.}$$

$G_3 = m_3 g$ c'est la force de gravité de chaînon (3).

alors si on remplace F_3^i et R_E par sa valeur et on fait la projection selon les axes on aura :

$$\vec{R}_D - \vec{R}_E + \vec{G}_3 + \vec{F}_3^i = 0$$

$$\vec{R}_D - \vec{R}_E + m_3 g - m_3 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \dot{z}_3) \vec{k}_1 + \ddot{z}_3 \vec{i}_1 = 0$$

$$\diamond \text{Suivant } (X_3): R_{DX} - R_{EX} - m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

$$R_{DX} = R_{EX} + m_3 \ddot{z}_3$$

$$R_{DX} - (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) + m_4 g - m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

$$R_{DX} = (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) - m_4 \cdot g + m_3 \ddot{z}_3 \quad (\text{III.1.14})$$

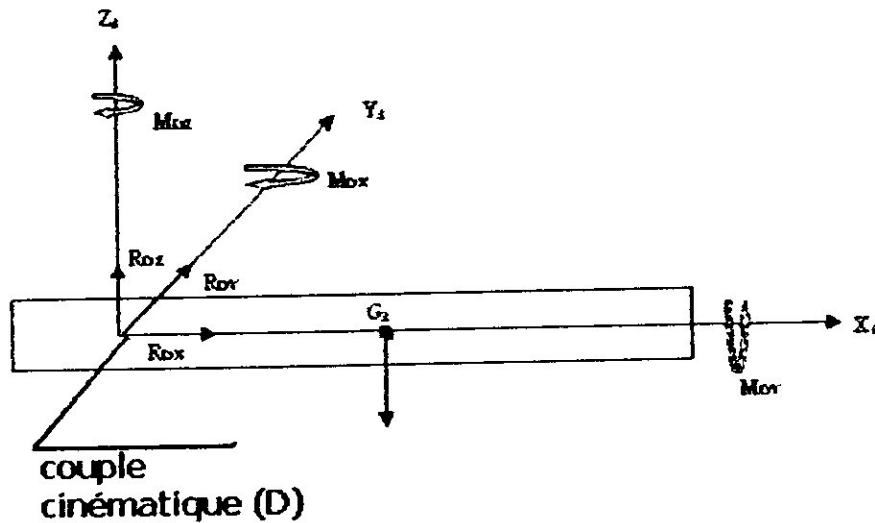


Figure (III-1-5) : Les différentes forces agissantes sur le chaînon (3)

❖ Suivant (\$Z_3\$) : nous avons l'équation qu'il nous donne la force transmise de chaînon (3), pour cela on applique toutes les forces exercées sur l'axe (\$z_3\$) du chaînon (4). Donc on aura:

$$-R_{EZ} + R_{DZ} - m_3 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g) = 0$$

$$R_{DZ} = R_{EZ} + m_3 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g)$$

$$R_{DZ} = -m_5 \cdot (\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5) \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) + m_3 \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \dot{z}_3 - g) \quad (\text{III.1.15})$$

❖ Suivant (\$Y_3\$) : $R_{DY} = 0$ (III.1.16)

III. 1.5.3.2 L'équation d'équilibre des moments résultants

Si on applique l'équation (**) sur le chaînon (3) on trouve son équation d'équilibre :

$$\overline{M}_{2,3} - \overline{M}_{3,4} + \overline{C}_3 O_2 \wedge \overline{R}_{2,3} + \overline{C}_3 O_3 \wedge (-\overline{R}_{3,4}) + \overline{M}_{c3}^i = 0$$

$$\overline{M}_D - \overline{M}_E + \overline{C}_3 B \wedge \overline{R}_D + \overline{C}_3 D \wedge (-\overline{R}_E) + \overline{M}_{c3}^i = 0$$

$\overline{M}_{3,4} = \overline{M}_E$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique F.

$\overline{M}_{2,3} = \overline{M}_D$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique D.

$\overline{C}_3 O_3 = \overline{C}_3 D = -\overline{DC}_3 = z_3 \vec{i}_3 = z_3 \vec{i}_1$ (D'après la matrice de passage).

d'où on a :

$$\overline{C_3 B} = -\overline{BC_3} = -\overline{BD} - \overline{DC_3} = z_3 \overline{i_4} - h_2 \overline{k_3} - z_2 \overline{k_3} = z_3 \overline{i_1} - (h_2 + z_2) \overline{k_1}$$

$$\overline{C_3 D} \wedge (-\overline{R_E}) = \begin{vmatrix} z_3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{EX} \\ R_{EY} \\ R_{EZ} \end{vmatrix} = -z_3 R_{EZ} \overline{j_1} + z_3 R_{EY} \overline{k_1}$$

$$\overline{C_3 B} \wedge (-\overline{R_D}) = \begin{vmatrix} z_3 \\ 0 \\ -h_2 - z_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{DX} \\ -R_{DY} \\ -R_{DZ} \end{vmatrix} = -(h_2 + z_2) R_{DY} \overline{i_1} + (z_3 R_{DZ} + (h_2 + z_2) R_{DX}) \overline{j_1} - z_3 R_{DY} \overline{k_1}$$

Avec :

$$\overline{M_{c3}^i} = -J_{z_3} \ddot{\gamma} \overline{k_1} : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (2)}$$

❖ Si on fait la projection suivant les axes on aura :

Suivant (x_3): $M_{DX} - M_{EX} + (h_2 + z_2) R_{DY} = 0$

$$\boxed{M_{DX} = 0} \quad (\text{III.1.17})$$

Suivant (y_3): $M_{DY} - M_{EY} - z_3 R_{DZ} - (h_2 + z_2) R_{DX} + z_3 R_{EZ} = 0$

$$M_{DY} = M_{EY} + z_3 R_{DZ} + (h_2 + z_2) R_{DX} - z_3 R_{EZ}$$

$$M_{DY} = M_{FY} - 2(z_4 - z_3) R_{EZ} - h_3 R_{EX} + z_3 R_{DZ} + (h_2 + z_2) R_{DX}$$

$$M_{DY} = M_{FY} - (2z_4 - z_3) R_{EZ} - h_3 R_{EX} + z_3 (R_{EZ} + m_3 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g)) + (h_2 + z_2) (R_{EX} + m_3 \ddot{z}_3)$$

$$M_{DY} = M_{FY} - (2z_4 - z_3) R_{EZ} + (-h_3 + h_2 + z_2) R_{EX} + z_3 m_3 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g) + (h_2 + z_2) m_3 \ddot{z}_3$$

$$\boxed{M_{DY} = z_4 m_3 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - (z_5 - h_3) (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) m_3 - (2z_4 - z_3) (-m_3 (\ddot{h}_3 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_3) (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}))) + (-h_3 + h_2 + z_2) (-m_4 g + (m_4 - m_3) (\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) + z_3 m_3 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g) + (h_2 + z_2) m_3 \ddot{z}_3}$$

(III.1.18)

❖ Suivant (Z_3): $z_3 R_{DY} + M_{DZ} - M_{EZ} + M_{c4}^i = 0$

$$z_3 R_{DY} + M_{DZ} - M_{EZ} + M_{c4}^i = 0$$

$$\boxed{M_{DZ} = (J_{z_5} + J_{z_4} + J_{z_3}) \ddot{\gamma}}$$

(III.1.19)

III. 1.5.4. L'équation d'équilibre du chaînon (2)

III. 1.5.4.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes

Si on applique l'équation (*) sur le chaînon (2) (voir Figure. III.1.6) on trouve son équation d'équilibre:

$$\bar{R}_{1,2} - \bar{R}_{2,3} + \bar{G}_2 + \bar{F}_2^i = 0$$

Avec :

$\bar{R}_{1,2} = \bar{R}_B$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique B.

$\bar{R}_{2,3} = \bar{R}_D$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique D.

$G_2 = m_2 \cdot g$ c'est la force de gravité de chaînon (2).

alors si on remplace F_2^i et R_B par sa valeur et on fait la projection selon les axes on aura

$$\bar{R}_B - \bar{R}_D + \bar{G}_2 + \bar{F}_2^i = 0$$

$$\bar{R}_B - \bar{R}_D - m_2 g \bar{k}_1 - m_2 \cdot \ddot{h}_1 \bar{k}_1 = 0$$

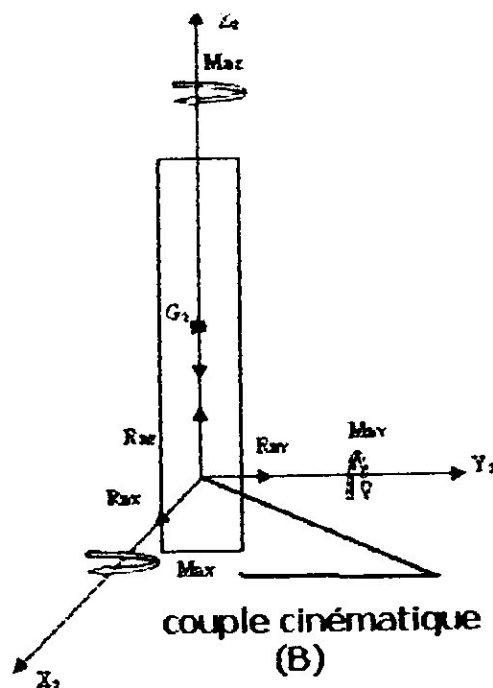


Figure (III.1.6) : Les différentes forces agissantes sur le chaînon (2)

❖ Suivant (X₂): $R_{Bx} = R_{Dx}$

$$\boxed{R_{Bx} = (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) - m_4 \cdot g + m_3 \ddot{z}_3} \quad (III.1.19)$$

❖ Suivant (Z_2) : nous avons l'équation qu'il nous donne la force transmise de chaînon (3), pour cela on applique toutes les forces exercées sur l'axe (z_2) du chaînon (2). Donc on aura:

$$R_{BZ} - R_{DZ} - m_2 \ddot{h}_1 - m_2 g = 0$$

$$R_{BZ} = R_{DZ} + m_2 (\ddot{h}_1 + g)$$

$$\boxed{R_{BZ} = -m_5 (\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5) (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4) (\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) + m_3 (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_2 \ddot{\gamma} + \dot{\gamma} \dot{z}_2 - g) + m_2 (\ddot{h}_1 + g)} \quad (\text{III.1.20})$$

❖ Suivant (Y_2) : $\boxed{R_{BY} = 0}$ (III.1.21)

III.1. 5.4.2. L'équation d'équilibre des moments résultants :

Si on applique l'équation (**) sur le chaînon (2) on trouve son équation d'équilibre :

$$\overline{M}_{1,2} - \overline{M}_{2,3} + \overline{C}_2 \overline{O}_1 \wedge \overline{R}_{1,2} + \overline{C}_2 \overline{O}_2 \wedge (-\overline{R}_{2,3}) + \overline{M}'_{e2} = 0$$

$$\overline{M}_B - \overline{M}_D + \overline{C}_2 \overline{A} \wedge \overline{R}_B + \overline{C}_2 \overline{B} \wedge (-\overline{R}_D) + \overline{M}'_{e2} = 0$$

$\overline{M}_{1,2} = \overline{M}_B$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique B

$\overline{M}_{2,3} = \overline{M}_D$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique D.

$$\overline{C}_2 \overline{O}_2 = \overline{C}_2 \overline{B} = -\overline{BC}_2 = -z_2 \overline{k}_2 = -z_2 \overline{k}_1 \quad (\text{D'après la matrice de passage}).$$

d'ou on a :

$$\overline{C}_2 \overline{A} = -\overline{AC}_2 = -(h_1 + z_2) \overline{k}_3 = -(h_1 + z_2) \overline{k}_1$$

$$\overline{C}_2 \overline{B} \wedge (-\overline{R}_D) = \begin{vmatrix} -z_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{DX} \\ -R_{DY} \\ -R_{DZ} \end{vmatrix} = -z_2 R_{DZ} \overline{j}_1 + z_2 R_{DY} \overline{k}_1$$

$$\overline{C}_2 \overline{A} \wedge (\overline{R}_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_1 - z_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{BX} \\ R_{BY} \\ R_{BZ} \end{vmatrix} = (h_2 + z_2) R_{BY} \overline{i}_1 - (h_2 + z_2) R_{BX} \overline{j}_1$$

Avec :

$$\overline{M}_{c_2}^i = -J_{z_2} \cdot \ddot{\gamma} \cdot \overline{k_1} : \text{Le moment de force d'inertie du chaînon (3)}$$

Si on fait la projection suivant les axes on aura :

$$\diamond \text{ Suivant } (x_2): M_{BX} - M_{DX} - (h_2 + z_2)R_{BY} = 0$$

$$\boxed{M_{BX} = 0} \quad \text{(III.1.22)}$$

$$\diamond \text{ Suivant } (y_2): M_{BY} - M_{DY} + z_2 R_{DZ} + (h_2 + z_2)R_{BX} = 0$$

$$M_{BY} = M_{FY} - (2z_4 - z_3 - z_2)(-m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - h_3(-m_4 g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) + m_3(-z_2 + z_3)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g)$$

$$\boxed{M_{BY} = z_4 m_5 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - (z_5 - h_4)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) m_5 - (2z_4 - z_3 - z_2)(-m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - h_3(-m_4 g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) + m_3(-z_2 + z_3)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g)} \quad \text{(III.1.23)}$$

$$\diamond \text{ Suivant } (z_2): M_{BZ} - M_{DZ} + M_{c_4}^i - z_2 R_{DY} = 0$$

$$\boxed{M_{BZ} = (J_{z_5} + J_{z_4} + J_{z_3} + J_{z_2}) \cdot \ddot{\gamma}} \quad \text{(III.1.24)}$$

III. 1.5.5. L'équation d'équilibre du chaînon (1)

III. 1.5.5.1. L'équation d'équilibre des forces résultantes

Si on applique l'équation (*) sur le chaînon (1) (voir Figure.III.1.7) on trouve son équation d'équilibre:

$$\overline{R}_{0,1} - \overline{R}_{1,2} + \overline{G}_1 + \overline{F}_1^i = 0$$

Avec :

$\overline{R}_{1,2} = \overline{R}_B$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique B

$\overline{R}_{0,1} = \overline{R}_A$: c'est la réaction résultante dans le couple cinématique A

$G_1 = m_1 \cdot g$ c'est la force de gravité de chaînon (1).

alors si on remplace F_1^i et R_A par sa valeur et on fait la projection selon les axes on aura

$$\overline{R}_A - \overline{R}_B + \overline{G}_1 + \overline{F}_1^i = 0$$

$$\bar{R}_A - \bar{R}_B - m_1 g \bar{k}_1 = 0$$

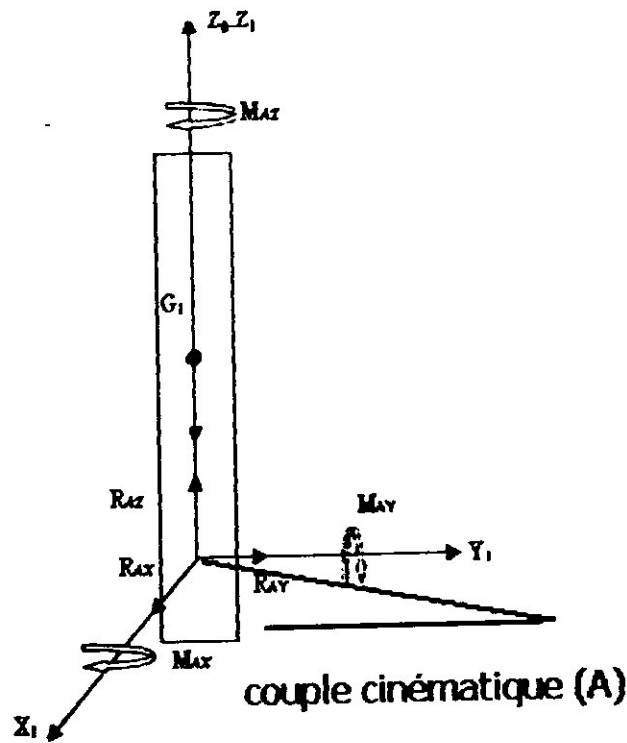


Figure (III.1.7) : Les différentes forces agissantes sur le chaînon (1)

❖ Suivant (X_1): $R_{Ax} = R_{Bx}$

$$R_{Bx} - (-m_5(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) - m_4 \cdot g + m_4(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) - m_3 \ddot{z}_3 = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} = (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) - m_4 \cdot g + m_3 \ddot{z}_3} \quad (\text{III.1.25})$$

❖ Suivant (Z_2) : nous avons l'équation qu'il nous donne la force transmise de chaînon (1), pour cela on applique toutes les forces exercées sur l'axe (z_1) du chaînon (1). Donc on aura:

$$R_{AZ} - R_{BZ} - m_1 g = 0$$

$$R_{AZ} = R_{BZ} + m_1 g$$

$$\boxed{R_{AZ} = -m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5) \cdot (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{y} + \dot{y})) + m_3(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \dot{y} + \dot{y} \dot{z}_3 - g) + m_2(\ddot{h}_1 + g) + m_1 g} \quad (\text{III.1.26})$$

$$\text{❖ Suivant } (Y_1) : \boxed{R_{AY} = 0} \quad (\text{III.1.27})$$

IV. 1.5.5.2. L'équation d'équilibre des moments résultantes

Si on applique l'équation (**) sur le chaînon (1) on trouve son équation d'équilibre :

$$\overline{M}_{0,1} - \overline{M}_{1,2} + \overline{C}_1 \overline{O} \wedge \overline{R}_{0,1} + \overline{C}_1 \overline{O}_1 \wedge (-\overline{R}_{1,2}) + \overline{M}_{cl}^i = 0$$

$$\overline{M}_A - \overline{M}_B + \overline{C}_1 \overline{A} \wedge \overline{R}_A + \overline{C}_1 \overline{A} \wedge (-\overline{R}_B) + \overline{M}_{cl}^i = 0$$

$\overline{M}_{1,2} = \overline{M}_B$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique B.

$\overline{M}_{0,1} = \overline{M}_A$ c'est le moment résultant dans le couple cinématique A.

$$\overline{C}_1 \overline{A} = -\overline{AC}_1 = r_1 \overline{k}_1$$

$$\overline{C}_2 \overline{B} \wedge (\overline{R}_B) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -R_{BX} \\ -R_{BY} \\ -R_{BZ} \end{vmatrix} = -r_1 R_{BY} \overline{i}_1 + r_1 R_{BX} \overline{j}_1$$

$$\overline{C}_1 \overline{O} \wedge (\overline{R}_A) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \end{vmatrix} = r_1 R_{AY} \overline{i}_1 - r_1 R_{AX} \overline{j}_1$$

Avec : $\overline{M}_{cl}^i = -J_{z_1} \ddot{\gamma} \overline{k}_1$ le moment de force d'inertie du chaînon(3).

❖ Si on fait la projection suivant les axes on aura :

Suivant (x_1): $M_{AX} - M_{BX} + r_1 R_{BY} - r_1 R_{AY} = 0$

$$\boxed{M_{AX} = 0} \quad \text{(III.1.28)}$$

❖ Suivant (y_1): $M_{AY} - M_{BY} - r_1 R_{BX} + r_1 R_{AX} = 0$

$$M_{AY} = M_{BY} + r_1 R_{BX} - r_1 R_{AX}$$

$$M_{AY} = M_{BY}$$

$$\boxed{M_{AY} = z_4 m_5 (g - (\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{h}_4 + \ddot{z}_2 - \ddot{z}_5 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - (z_5 - h_4)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4) m_5 - (2z_4 - z_3 - z_2)(-m_5(\ddot{h}_4 - \ddot{z}_5) + (m_4 - m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{h}_3 + \ddot{z}_2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_4)(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma})) - h_3(-m_4 g + (m_4 - m_5)(\ddot{z}_3 - \ddot{z}_4)) + m_3(-z_2 + z_3)(\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 + \ddot{z}_2 + \dot{z}_3(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}) - g)} \quad \text{(III.1.29)}$$

❖ Suivant (z_1): $M_{AZ} - M_{BZ} + M_{cl}^i = 0$

$$\boxed{M_{AZ} = (J_{z_5} + J_{z_4} + J_{z_3} + J_{z_2} + J_{z_1}) \ddot{\gamma}} \quad \text{(III.1.30)}$$

III.2.1 Introduction

Les équations de Lagrange peuvent être utilisées pour l'étude du mouvement de tout système mécanique à liaisons géométriques, indépendamment du nombre de corps (de points) constituant le système, de la nature du mouvement des corps.

Pour écrire un système mécanique donné les équations de Lagrange il faut :

- 1/ Déterminer le degré de liberté du système et choisir les coordonnées généralisées ;
- 2/ Calculer les forces généralisées (Q_i) ; il est conseillé pour ne pas commettre d'erreurs de signe de diriger chaque déplacement virtuel communiqué au système dans tel sens que l'accroissement de la coordonnée correspondante soit positif ;
- 3/ Calculer l'énergie cinétique (K) du système dans son mouvement absolu et exprimer cette énergie à l'aide des coordonnées généralisées (q_i) et des vitesses généralisées \dot{q}_i .
- 4/ Calculer les dérivées partielles de (K) par rapport à \dot{q}_i et (q_i) et porter les résultats des calculs aux équations de Lagrange.

En intégrant les équations obtenues, on peut trouver, si sont données les forces appliquées au système sur la forme des équations du mouvement du système en coordonnées généralisées. Si la loi du mouvement est donnée, on peut à partir des équations établies, déterminer les forces agissant sur le système.

Dans le cas où toutes les forces appliquées au système sont potentielles, les équations de Lagrange peuvent être établies sous la forme de la fonction de Lagrange (potentiel cinétique). Au lieu des forces généralisées on calculera dans ce cas l'énergie potentielle du système. L'ayant exprimé à l'aide des coordonnées généralisées, puis on calculera l'énergie cinétique et on écrira la fonction de Lagrange (La différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système).

III.2.2 Equations de Lagrange dans la dynamique du robot (Modèle dynamique pour le robot type (ALG-MO-1)) :

Les équations de Lagrange ou les équations différentielles du mouvement d'un système en coordonnées généralisées. On voit que le nombre de ces équations est égale au degré de liberté du système et en même temps suffisamment simple de résolution des problèmes de la dynamique. L'avantage important des équations de Lagrange est que leur aspect et leur nombre ne dépend ni du nombre de corps (de points) constituant le système ni de la façon dont les corps se déplacent, le nombre d'équations de Lagrange est déterminé uniquement par le degré de liberté du système. De plus, si les liaisons sont parfaites, les forces généralisées figurant au second membre des équations (Q_i) sont toutes actives.

Par conséquent, ces équations permettent à l'avance d'exclure de l'étude toutes réactions inconnues des liaisons.

L'utilisation directe de ces équations nous permet d'avoir un modèle dynamique où sont inclus :

Le calcul de l'énergie cinétique qui est une grandeur scalaire (K ou T) égale à la somme arithmétique des énergies cinétiques de tous les points du système et elle est une caractéristique du mouvement de translation et de rotation du système.

En conclusion, l'utilisation des équations de Lagrange, nous permet aussi d'étudier à l'aide d'algorithmes l'automatisation de l'analyse des structures des robots sur un logiciel. La qualité de cette méthode est de rendre les calculs des chaînons du robot à l'élasticité universelle et conforme.

III.2.2.1 : Détermination du Moment d'inertie des chaînons

III.2.2.1.1 Représentation des paramètres géométriques des chaînons.

D'après le chapitre III on a :

- Chaînon (1) représente un cylindre plein de rayon R_1 de longueur L_1 et de masse m_1 .
- Chaînon (2) représente un cylindre plein de rayon R_2 de longueur L_2 et de masse m_2 .
- Chaînon (3) représente un parallélépipède de longueur b et de largeur a et de hauteur h .
- Chaînon (4) représente un cylindre plein de rayon R_4 de longueur L_4 et de masse m_4 .
- Chaînon (5) représente un cylindre plein de rayon R_5 de longueur L_5 et de masse m_5 .

Le tableau suivant donne les dimensions et la masse de chaque chaînon :

Tableau III .2.2 : Paramètres géométriques des chaînons.

désignation N° de charron	Longueur [m]	diamètre [m]	largeur [m]	Masse [Kg]	Hauteur [m]
1	$L_1=0.6$	$D_1=0.1$		$m_1=25.549$	
2	$L_2=0.6$	$D_2=0.1$		$m_2=40.70$	
3	$b=0.7$		$a=0.2$	$m_3=241.779$	$h=0.2$
4	$L_4=0.4$	$D_4=0.12$		$m_4=39.049$	
5	$L_5=0.4$	$D_5=0.12$		$m_5=39.049$	

IV.2.2.1.2 Moment d'inertie du chaînon (1)

On a le tenseur d'inertie d'un cylindre homogène plein par rapport au repère (o,x,y,z) de rayon R_1 de hauteur L_1 et de masse m_1 , s'écrit sous forme matricielle (voir Fig.III.2.1.a)

$$I_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{4} \left(R_1^2 + \frac{L_1}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{4} \left(R_1^2 + \frac{L_1}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{2} R_1^2 \end{pmatrix}$$

Calculant le moment d'inertie du chaînon (1) Par rapport a l'axe OZ voir (Fig .III.3.a).

$$\boxed{I_{zz}^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2} \quad (\text{III.2. 1})$$

III.2.2.1.3 Moment d'inertie de chaînon (2)

On a le tenseur d'inertie d'un cylindre homogène plein par rapport au repère (o, x, y, z) de Rayon R_2 de hauteur L_2 et masse m_2 s'écrit sous forme matricielle (voir Fig. III.2.1.b).

$$I_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{4} \left(R_2^2 + \frac{L_2^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{4} \left(R_2^2 + \frac{L_2^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{2} R_2^2 \end{pmatrix}$$

en calculons le moment d'inertie de chaînon (2) par rapport a l'axe OY (voir Fig .III.2.1.b).

D'après HYGHENS on a :

$$I_{YY}^{(2)} = I_{yy}^{(2)} + m_2 \left(\frac{L_2}{2} \right)^2 = \frac{m_2}{4} \left(R_2^2 + \frac{4}{3} L_2^2 \right)$$

Par conséquent

$$\boxed{I_{YY}^{(2)} = \frac{m_2}{4} \left(R_2^2 + \frac{4}{3} L_2^2 \right)} \quad (\text{III.2. 2})$$

Calculons le moment d'inertie du chaînon (2) par rapport à l'axe OZ central principal :

$$\boxed{I_{ZZ}^{(2)} = I_{zz}^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2} \quad (\text{III.2. 3})$$

III.2.2.1.4 Moment d'inertie du chaînon (3)

Le tenseur d'inertie d'une parallélépipède par rapport au repère (o,x,y,z) de largeur a, et de hauteur h et de masse m_3 s'écrit sous forme matricielle (voir Fig III.2.1.c)

$$I_0^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{m_3}{12}(b^2 + a^2) & -\frac{m_3}{16}ha & -\frac{m_3}{16}hb \\ -\frac{m_3}{16}ha & \frac{m_3}{12}(b^2 + h^2) & -\frac{m_3}{16}hb \\ -\frac{m_3}{16}hb & -\frac{m_3}{16}hb & \frac{m_3}{12}(a^2 + h^2) \end{pmatrix}$$

Calculons le moment d'inertie de chaînon (3) par rapport a l'axe OZ et l'axe OY (voir Fig III.2.1.c)
D'après le tenseur d'inertie on a moment d'inertie central principale par rapport a l'axe OZ.

$$\boxed{I_{ZZ}^{(3)} = I_{zz}^{(3)} = \frac{m_3}{12}(a^2 + h^2)} \quad (\text{III.2. 4})$$

D'après le tenseur d'inertie on a le moment d'inertie central principal du chaînon(3) par rapport al'axe oy (voir Fig.III.2.1.c).

$$I_{yy}^{(3)} = \frac{m_3}{12}(b^2 + h^2)$$

Pour calculer le moment d'inertie du chaînon (3) par rapport a l'axe OY on appliquant théorème de HYGHENS :

$$I_{YY}^{(3)} = \frac{m_3}{12}(b^2 + h^2) + m_3 d^2 \quad \text{tel que } d=z_3 \text{ et } 0 \leq z_3 \leq b$$

Par conséquent

$$I_{YY}^{(3)} = m_3 \left(\frac{b^2}{12} + \frac{13}{12} h^2 \right) \quad (\text{III.2.5})$$

III.2.2.1.5 : Moment d'inertie du chaînon (4)

Le tenseur d'inertie d'un cylindre plein pour le chaînon (3) par rapport aux repère (o,x,y,z) de rayon R_4 , de longueur L_4 et de masse m_4 , s'écrit sous forme matricielle (voir Fig.III.2.1.d)

$$I_0^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{m_4}{4} \left(R_4^2 + \frac{L_4^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_4}{4} \left(R_4^2 + \frac{L_4^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_4}{2} R_4^2 \end{pmatrix}$$

D'après le tenseur d'inertie on a Le moment d'inertie central principal de cylindre par rapport a l'axe oy (voir Fig.III.2.1.d) :

$$I_{yy}^{(4)} = \frac{m_4}{4} \left(R_4^2 + \frac{L_4^2}{3} \right)$$

D'après théorème de HYGHENS on a le moment d'inertie par rapport à l'axe OY

$$I_{YY}^{(4)} = I_{yy}^{(4)} + m_4 d^2 \quad \text{tel que } d = \frac{L_4}{2}$$

Par conséquent :

$$I_{YY}^{(4)} = m_4 \left(\frac{R_4^2}{4} + \frac{7}{12} L_4^2 \right) \quad (\text{III.2.6})$$

On a $I_{ZZ}^{(4)} = I_{zz}^{(4)}$ car les axes OZ et oz sont confondus (voir Fig.III.2.1.d)

$$I_{ZZ}^{(4)} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2 \quad (\text{III.2.7})$$

III.2.2.1.6 : Moment d'inertie du chaînon (5)

Le tenseur d'inertie d'un cylindre plein pour le chaînon (5) par rapport au zépère (o,x,y,z) de rayon R_5 , de longueur L_5 et de masse m_5 , s'écrit sous forme matricielle (voir Fig.III.2.1.e)

$$I_0^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{m_5}{4} \left(R_5^2 + \frac{L_5^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_5}{4} \left(R_5^2 + \frac{L_5^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_5}{2} R_5^2 \end{pmatrix}$$

D'après le tenseur d'inertie on a Le moment d'inertie central principal de cylindre par rapport a l'axe oy (voir Fig.III.2.1.e)

$$I_{yy}^{(5)} = \frac{m_5}{4} \left(R_5^2 + \frac{L_5^2}{3} \right)$$

D'après théorème de HYGHENS on a le moment d'inertie par rapport à l'axe OY

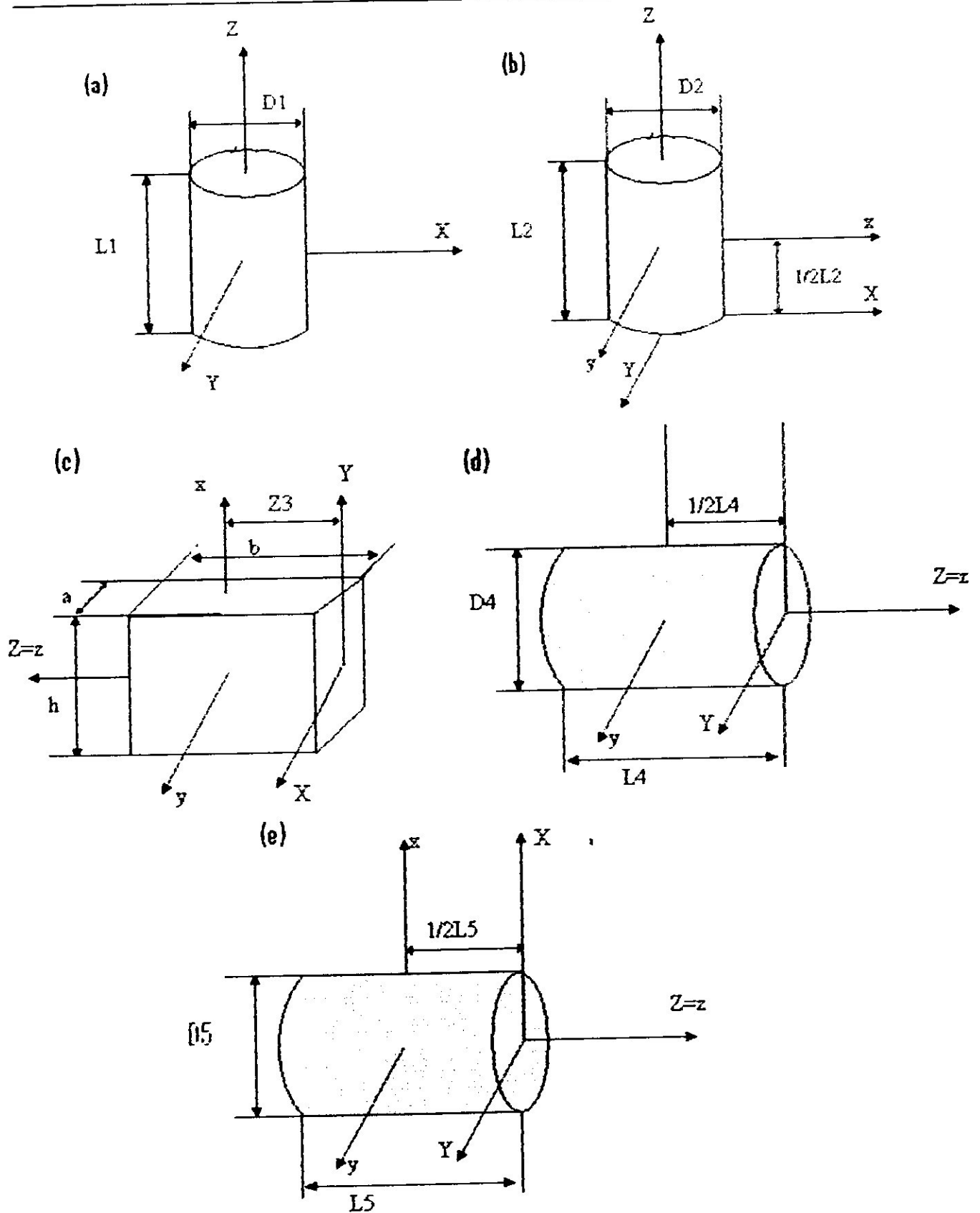
$$I_{YY}^{(5)} = I_{yy}^{(5)} + m_5 d^2 \quad \text{tel que } d = \frac{L_5}{2}$$

Par conséquent :

$$I_{YY}^{(5)} = m_5 \left(\frac{R_5^2}{4} + \frac{7}{12} L_5^2 \right) \quad (\text{III.2.8})$$

On a $I_{ZZ}^{(5)} = I_{zz}^{(5)}$ car les axes OZ et oz sont confondus (voir Fig.III.2.1.e)

$$I_{ZZ}^{(5)} = \frac{1}{2} m_5 R_5^2 \quad (\text{III.2.9})$$



A,b,d et e :cylindres

c : parallélépipède

Figure (III.2.1) : schéma pour le calcul du moment d'inertie des chaînons

III.2.2.2 L'énergie cinétique du robot

L'énergie cinétique des points de masse (dm) du chaînon (i) peut être présentée sous la forme du produit matriciel suivant :

$$dK_i = \frac{1}{2} \dot{R}_0 \cdot \dot{R}_0^T dm \quad (III.2.10)$$

Ou : \dot{R}_0 dérivée de (R_0) par rapport au temps (t) ;

Et comme : $\dot{R}_0 = T_i \cdot \dot{R}_i$

Par conséquent, l'énergie cinétique du point sera :

$$dK_i = \frac{1}{2} tr(\dot{T}_i \cdot R_i \cdot R_i^T \cdot \dot{T}_i) \cdot dm \quad (III.2.11)$$

L'énergie cinétique du ($i^{ème}$) chaînon du robot peut être déterminée sous la forme suivante :

$$K_i = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_i \cdot R_i \cdot R_i^T \cdot \dot{T}_i) \cdot dm \quad (III.2.12)$$

Et comme les matrices (\dot{T}_i) et (\dot{T}_i^T) ne dépendent pas des coordonnées des points du ($i^{ème}$) chaînon, donc on peut les faire sortir du signe de l'intégrale

$$K_i = \frac{1}{2} tr \dot{T}_i \left[\left(\int R_i \cdot R_i^T \cdot dm \right) \dot{T}_i^T \right] \quad (III.2.13)$$

Et l'équation sera sous la forme suivante à l'aide de (H_i) .

$$H_i = \int R_i R_i^T \cdot dm = \int \begin{pmatrix} X_i^2 & X_i Y_i & X_i Z_i & X_i \\ Y_i X_i & Y_i^2 & X_i Y_i & Y_i \\ Z_i X_i & Z_i Y_i & Z_i^2 & Z_i \\ X_i & X_i & X_i & 1 \end{pmatrix} \cdot dm \quad (III.2.14)$$

H_i :Pseudo-matrice d'inertie du chaînon (i)

Utilisons les désignations suivantes :

$$\begin{aligned} \int X_i^2 dm &= j_{XX}^{(i)} = \frac{-I_{xx}^{(i)} + I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} \quad ; \quad \int X_i Y_i dm = j_{XY}^{(i)} = -I_{xy}^{(i)} \quad ; \\ \int Z_i^2 dm &= j_{ZZ}^{(i)} = \frac{I_{xx}^{(i)} + I_{yy}^{(i)} - I_{zz}^{(i)}}{2} \quad ; \quad \int X_i dm = m_i X_i^* \quad ; \quad \int Y_i dm = m_i Y_i^* \quad ; \\ \int Z_i dm &= m_i Z_i^* \quad ; \quad \int Y_i^2 dm = j_{YY}^{(i)} = \frac{I_{xx}^{(i)} - I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} \quad ; \quad \int dm = m_i \quad . \end{aligned} \quad (III.2.15)$$

Z_i^*, X_i^*, Y_i^* : Coordonnées des centres de masses du ($i^{ème}$) chaînon dans le système correspondant c'est à dire : dans le système rigide lié au ($i^{ème}$) chaînon ;

$J_{ZZ}^{(i)}, J_{XX}^{(i)}, J_{YY}^{(i)}$ Les éléments des tenseurs d'inertie.

Déterminons pour chaque chaînon, selon les axes, le caractère de l'inertie du chaînon (i) en remplaçant (III.2.13) et (III.2.12) la matrice (H_i) sera

$$H_i = \begin{pmatrix} J_{XX}^{(i)} & J_{XY}^{(i)} & J_{XZ}^{(i)} & m_i X_i^* \\ J_{XY}^{(i)} & J_{YY}^{(i)} & J_{YZ}^{(i)} & m_i Y_i^* \\ J_{XZ}^{(i)} & J_{ZY}^{(i)} & J_{ZZ}^{(i)} & m_i Z_i^* \\ m_i X_i^* & m_i Y_i^* & m_i Z_i^* & m_i \end{pmatrix} \quad (III.2.16)$$

Remplaçons (III.2.14) dans (III.2.10), nous aurons la formule pour déterminer l'énergie cinétique du ($i^{ème}$) chaînon :

$$K_i = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_i \cdot H_i \cdot \dot{T}_i) \cdot dm \quad (III.2.17)$$

L'énergie cinétique du robot égale à la somme arithmétique des énergies cinétiques de tous les chaînons :

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 \quad (III.2.18)$$

III.2.2.2.1 Energie cinétique du robot type (ALG-M.O-1)

III .2.2.2.1.a. Energie cinétique du chaînon (1)

D'après la formule (III.2.15) on a l'énergie cinétique de chaînon (1)

$$K_1 = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_1 \cdot H_1 \cdot \dot{T}_1) \cdot dm \quad (III.2.19)$$

$$\dot{T}_1 = U_{11} \dot{q}_1 = \Omega_{rot}(\bar{K}) \cdot T_0^1 \cdot \dot{q}_1$$

$$\Omega_j = \begin{pmatrix} 0 & -(1-\sigma_i) & 0 & 0 \\ 1-\sigma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_i = 1$ si on a un couple cinématique de translation la matrice Ω_j , devient :

$$\Omega_j = \Omega_{tran}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (III.2.20)$$

$\sigma_i = 0$ si on a un couple cinématique de rotation la matrice Ω_j devient :

$$\Omega_j = \Omega_{rot}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (III.2.21)$$

Par conséquent on :

$$\dot{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{T}_1 = \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad / \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remplaçant (III.2. 16), T_1 , et T_1^T dans (III.2. 19) on obtient l'énergie cinétique du chaînon (1) du robot :

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 tr \left\{ \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(0)} & m_1 \frac{L_1}{2} \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L_1}{2} & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ -C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 tr \begin{bmatrix} J_{XX}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr}(J_{xx}^{(1)} + J_{yy}^{(1)}) = \frac{1}{2} J_{zz}^{(1)} \dot{\gamma}^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} J_{zz}^{(1)} \dot{\gamma}^2 \tag{III.2.22}$$

$$J_{zz}^{(1)} = \frac{I_{xx}^{(1)} + I_{yy}^{(1)} - I_{zz}^{(1)}}{2} = m_1 \frac{L_1^2}{12}$$

$J_{zz}^{(1)}$ moment d'inertie du chaînon (1) par rapport à l'axe (OZ)

$I_{xx}^{(1)}, I_{yy}^{(1)}, I_{zz}^{(1)}$ moment d'inertie central principal du chaînon (1) par rapport à l'axe xx,yy,

$$\boxed{K_1 = \frac{1}{2} m_1 \frac{L_1^2}{12} \dot{\gamma}^2} \tag{III.2.23}$$

III.2. 2.2.1.b Energie cinétique du chaînon (2)

D'après la formule (III.2.15) on a l'énergie cinétique du chaînon (2)

$$\dot{T}_2 = U_{21} \dot{q}_1 + U_{22} \dot{q}_2 \tag{III.2.24}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \int (\dot{T}_2 \cdot H_2 \cdot \dot{T}_2) \cdot dm \tag{III.2.25}$$

$$U_{21} = \Omega_{rot}(\bar{K}) T_0^1 \cdot T_1^2$$

$$U_{22} = T_0^1 \Omega_{tran}(\bar{K}) \cdot T_1^2$$

Utilisant la formule (III.2. 21) dans U_{21}, U_{22} on obtient

$$U_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III.2.26)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(2)} & -m_2 \frac{L_2}{2} \\ 0 & 0 & -m_2 \frac{L_2}{2} & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ -C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(2)} & -m_2 \frac{L_2}{2} \\ 0 & 0 & -m_2 \frac{L_2}{2} & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr} \begin{bmatrix} S^2 \gamma_i J_{XX}^{(2)} + C^2 \gamma_i J_{YY}^{(2)} & -S\gamma C\gamma_i J_{XX}^{(2)} + S\gamma C\gamma_i J_{YY}^{(2)} & 0 & 0 \\ S\gamma C\gamma_i J_{XX}^{(2)} + S\gamma C\gamma_i J_{YY}^{(2)} & S^2 \gamma_i J_{YY}^{(2)} + C^2 \gamma_i J_{XX}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (S^2 \gamma_i J_{XX}^{(2)} + C^2 \gamma_i J_{YY}^{(2)} + S^2 \gamma_i J_{YY}^{(2)} + C^2 \gamma_i J_{XX}^{(2)}) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 .m_2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (J_{XX}^{(2)} + J_{YY}^{(2)}) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 .m_2$$

Si on remplace \dot{q}_1 par γ et \dot{q}_2 par $\dot{h}_1 + \dot{z}_2$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (J_{XX}^{(2)} + J_{YY}^{(2)}) + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 . m_2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (J_{XX}^{(2)} + J_{YY}^{(2)}) + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 . m_2$$

$$J_{YY}^{(i)} = \frac{I_{xx}^{(i)} - I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_2}{2} R_2^2$$

$$J_{XX}^{(i)} = \frac{-I_{xx}^{(i)} + I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_2}{2} R_2^2$$

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (m_2 R_2^2) + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 . m_2} \quad \text{(III.2.27)}$$

III.2. 2.2.1.c.Energie cinétique du chaînon (3)

D'après la formule (III.2.15) on a l'énergie cinétique du chaînon (3)

$$\dot{T}_3 = U_{31} \dot{q}_1 + U_{32} \dot{q}_2 + U_{33} \dot{q}_3 \quad \text{(III.2.28)}$$

$$K_3 = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_3 . H_3 . \dot{T}_3) . dm \quad \text{(III.2.29)}$$

$$U_{31} = \Omega_{rot} (\overline{K}) T_0^1 . T_1^2 . T_2^3 = U_{21} . T_2^3$$

$$U_{32} = T_0^1 \Omega_{tran} (\overline{K}) . T_1^2 . T_2^3 = U_{22} . T_2^3$$

$$U_{33} = T_0^1 . T_1^2 . \Omega_{tran} (\overline{K}) . T_2^3$$

Nous utilisons les formules (III.2.20). (III.2.21). U_{21} . U_{22} . et T_0^3 on obtient :

$$U_{31} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & 0 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & -S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{33} = \begin{bmatrix} Cy_1 & -Sy_1 & 0 & 0 \\ Sy_1 & Cy_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1+z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remplace U_{31} , U_{32} , U_{33} dans (III.2.28) on obtient :

$$\dot{T}_3 = \begin{bmatrix} -Sy_1 & -Cy_1 & 0 & -Sy_1z_3 \\ Cy_1 & -Sy_1 & 0 & Cy_1z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

On change dans (\dot{T}_3) les lignes en colonnes et les colonnes en lignes en forme la matrice

transposée \dot{T}_3^T

$$\dot{T}_3^T = \begin{bmatrix} -Sy_1 & Cy_1 & 0 & 0 \\ -Cy_1 & -Sy_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Sy_1z_3 & Cy_1z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

D'après la formule (III.2.16) on obtient :

$$H_3 = \begin{bmatrix} J_{XX}^{(3)} & 0 & 0 & m_3 X_3^* \\ 0 & J_{YY}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(3)} & 0 \\ m_3 X_3^* & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

X_3^* : centre de masse de chaînon (3) par rapport au repère (O_3, X_3, Y_3, Z_3)

$$X_3^* = \frac{z_3^{\max}}{2} = \frac{b}{2}$$

L'énergie cinétique devient :

$$K_3 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr} \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & -S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(3)} & 0 & 0 & m_3 X_3^* \\ 0 & J_{yy}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(3)} & 0 \\ m_3 X_3^* & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ -C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S\gamma_i z_3 & C\gamma_i z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(3)} & 0 & 0 & m_3 X_3^* \\ 0 & J_{yy}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(3)} & 0 \\ m_3 X_3^* & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 + \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(3)} & 0 & 0 & m_3 X_3^* \\ 0 & J_{yy}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(3)} & 0 \\ m_3 X_3^* & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Remplaçons les matrices $\hat{T}_3^T, \hat{T}_3, H_3$ dans l'équation (III.2.29) nous aurons :

$$K_3 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (S^2 \gamma J_{xx}^{(3)} + 2S^2 \gamma_i z_3 m_3 X_3^* + C^2 \gamma_i J_{yy}^{(3)} + S^2 \gamma z_3^2 m_3 + C^2 \gamma J_{xx}^{(3)} + 2C^2 \gamma_i z_3 m_3 X_3^* + S^2 \gamma J_{yy}^{(3)} + C^2 \gamma z_3^2 m_3) \\
 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\
 K_3 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (J_{xx}^{(3)} + J_{yy}^{(3)} + 2z_3 m_3 X_3^* + z_3^2 m_3) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \quad (\text{III.2.30})$$

On Posons : $\dot{q}_1 = \gamma$; $\dot{q}_2 = h_1 + z_2$ et $\dot{q}_3 = h_2$

$$j_{yy}^{(i)} = \frac{I_{xx}^{(i)} - I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_3 b^2}{12} \\
 j_{xx}^{(i)} = \frac{-I_{xx}^{(i)} + I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_3 h^2}{12}$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(\frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + 2z_3 m_3 \frac{b}{2} + z_3^2 m_3 \right) + \frac{1}{2} m_3 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2) \quad (\text{III.2.31})$$

III. 2.2.2.1.d Energie cinétique du chaînon (4)

D'après la formule (III.2.15) on a l'énergie cinétique du chaînon (4)

$$K_4 = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_4 \cdot H_4 \cdot \dot{T}_4) \cdot dm \tag{III.2.32}$$

$$\dot{T}_4 = U_{41} \dot{q}_1 + U_{42} \dot{q}_2 + U_{43} \dot{q}_3 + U_{44} \dot{q}_4 \tag{III.2.33}$$

Telle que :

$$\begin{aligned} U_{41} &= \Omega_{rot}(\overline{K}) T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 = U_{31} \cdot T_3^4 \\ U_{42} &= T_0^1 \Omega_{tran}(\overline{K}) \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 = U_{32} \cdot T_3^4 \\ U_{43} &= T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot \Omega_{tran}(\overline{K}) \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 = U_{33} \cdot T_3^4 \\ U_{44} &= T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot \Omega_{tran}(\overline{K}) \cdot T_3^4 \end{aligned}$$

Nous utilisons les formules (III.2.20). (III.2.21). U_{31} . U_{32} . U_{33} et T_0^4 on obtient :

$$U_{41} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i & -C\gamma_i & 0 & -S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{41} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{44} = \begin{bmatrix} C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ S\gamma_i & C\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1+z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note : $U_{41}, U_{42}, U_{43}, U_{44}$ par: (III.2.34)

Remplaçons les matrices dans l'expression (III.2.34) nous aurons

$$\begin{aligned} \dot{T}_4 = & \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_{i,z_4} - S\gamma_{i,z_3} \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_{i,z_4} + C\gamma_{i,z_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_4 \end{aligned} \quad (III.2.35)$$

Changeons dans l'équation (III.2.35) lignes en colonnes et les colonnes en lignes on forme la matrice transposée de \dot{T}_4 on la note \dot{T}_4^T

$$\begin{aligned} \dot{T}_4^T = & \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S\gamma_{i,z_4} - S\gamma_{i,z_3} & -C\gamma_{i,z_4} + C\gamma_{i,z_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_4 \end{aligned} \quad (III.2.36)$$

En correspondance avec (III.2. 16) nous pouvons écrire la matrice H_4 comme suit :

$$H_4 = \begin{bmatrix} J_{XX}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(4)} & -m_4 \frac{L_4}{2} \\ 0 & 0 & -m_4 \frac{L_4}{2} & m_4 \end{bmatrix} \quad (III.2.37)$$

Remplaçons les matrices trouvées (III.2.37); (III.2.36) et (III.2.35) dans l'équation (III.2.32)

nous aurons :

$$\begin{aligned}
 K_4 = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr} \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(4)} & -m_4 \frac{L_4}{2} \\ 0 & 0 & -m_4 \frac{L_4}{2} & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & C\gamma_i & -S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(4)} & -m_4 \frac{L_4}{2} \\ 0 & 0 & -m_4 \frac{L_4}{2} & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(4)} & -m_4 \frac{L_4}{2} \\ 0 & 0 & -m_4 \frac{L_4}{2} & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \dot{q}_4^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{(4)} & -m_4 \frac{L_4}{2} \\ 0 & 0 & -m_4 \frac{L_4}{2} & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_4 = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \left((S\gamma_i + C\gamma_i)^2 J_{xx}^{(4)} + (S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3)^2 m_4 + (-C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3)^2 m_4 \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_4 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_4 = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \left(2S\gamma_i C\gamma_i J_{xx}^{(4)} + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_4 \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_4 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2)
 \end{aligned}$$

On Posons : $\dot{q}_1 = \dot{\gamma}$, $\dot{q}_2 = \dot{h}_1 + \dot{z}_2$ et $\dot{q}_3 = \dot{h}_2$ et $\dot{q}_4 = \dot{h}_3$

$$j_{yy}^{(4)} = \frac{I_{xx}^{(4)} - I_{yy}^{(4)} + I_{zz}^{(4)}}{2} = \frac{m_4}{2} R_4^2$$

$$j_{xx}^{(4)} = \frac{-I_{xx}^{(4)} + I_{yy}^{(4)} + I_{zz}^{(4)}}{2} = \frac{m_4}{2} R_4^2$$

$$\boxed{K_4 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(S\gamma_i C\gamma_i m_4 R_4^2 + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_4 \right) + \frac{1}{2} m_4 \left((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 \right)} \quad (\text{III.2.38})$$

III.2.2.2.1.e Energie cinétique du chaînon (5)

D'après la formule (III.2.15) on a l'énergie cinétique du chaînon (5)

$$K_5 = \frac{1}{2} tr \int (\dot{T}_5, H_5, \dot{T}_5) . dm \tag{III.2.39}$$

$$\dot{T}_5 = U_{51}\dot{q}_1 + U_{52}\dot{q}_2 + U_{53}\dot{q}_3 + U_{54}\dot{q}_4 + U_{55}\dot{q}_5 \tag{III.2.40}$$

Telle que :

$$U_{51} = \Omega_{rot}(\bar{K})T_0^1.T_1^2.T_2^3.T_3^4.T_4^5 = U_{41}.T_4^5$$

$$U_{52} = T_0^1.\Omega_{tran}(\bar{K}).T_1^2.T_2^3.T_3^4.T_4^5 = U_{42}.T_4^5$$

$$U_{53} = T_0^1.T_1^2.\Omega_{tran}(\bar{K}).T_2^3.T_3^4.T_4^5 = U_{43}.T_4^5$$

$$U_{54} = T_0^1.T_1^2.T_2^3.\Omega_{tran}(\bar{K}).T_3^4.T_4^5 = U_{44}.T_4^5$$

$$U_{55} = T_0^1.T_1^2.T_2^3.T_3^4.\Omega_{tran}(\bar{K}).T_4^5$$

Nous utilisons les formules (III.2.20). (III.2.21). U_{41} . U_{42} . U_{43} et T_0^5 on obtient :

$$U_{51} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{51} = \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{52} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{53} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{54} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_4 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{55} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note : U_{51} . U_{52} . U_{53} . U_{54} et U_{55} par : (III.2.41)

Remplaçons les matrices (III.2.41) dans l'expression (III.2.40) nous aurons

$$\begin{aligned} \dot{T}_5 = & \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_4^2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_5^2 \end{aligned} \quad (III.2.42)$$

Changeons dans l'équation (III.2.42) lignes en colonnes et les colonnes en lignes on forme la matrice transposée de \dot{T}_5 on la note \dot{T}_5^T

$$\begin{aligned} \dot{T}_5^T = & \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_4^2 \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_5^2 \end{aligned} \quad (III.2.43)$$

En correspondance avec (III.2. 16) nous pouvons écrire la matrice H_5 comme suit :

$$H_5 = \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_5 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.44})$$

Remplaçons les matrices trouvées (III.2.44); (III.2.43) et (III.2.42) dans l'équation (III.2.39)

nous aurons :

$$K_4 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \text{tr} \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & 0 & 0 & S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 \\ C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_5 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\gamma_i - C\gamma_i & C\gamma_i - S\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3 & -C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_4 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_4 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{q}_4^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_4 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \dot{q}_5^2 \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{XX}^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ}^{(5)} & -m_4 \frac{L_5}{2} \\ 0 & 0 & -m_5 \frac{L_5}{2} & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \left((S\gamma_i + C\gamma_i)^2 J_{XX}^{(4)} + (S\gamma_i z_4 - S\gamma_i z_3)^2 m_5 + (-C\gamma_i z_4 + C\gamma_i z_3)^2 m_5 \right) + \frac{1}{2} m_5 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2)$$

$$K_5 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \left(2S\gamma_i C\gamma_i J_{XX}^{(3)} + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_5 \right) + \frac{1}{2} m_5 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2)$$

On Posons : $q_1 = \dot{\gamma}$, $q_2 = h_1 + z_2$ et $q_3 = h_2$ et $q_4 = h_3$ et $q_5 = h_4 - z_5$

$$j_{yy}^{(i)} = \frac{I_{xx}^{(i)} - I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_5}{2} R_5^2$$

$$j_{xy}^{(i)} = \frac{-I_{xx}^{(i)} + I_{yy}^{(i)} + I_{zz}^{(i)}}{2} = \frac{m_5}{2} R_5^2$$

$$K_5 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (S\gamma_i C\gamma_i m_5 R_5^2 + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_5) + \frac{1}{2} m_5 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 + (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)^2) \quad (\text{III.2.45})$$

L'énergie cinétique totale du robot :

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 \quad (\text{III.2.46})$$

Remplaçant les expressions des moments d'inertie dans (III.2.46) on obtient l'expression finale de l'énergie cinétique du robot :

$$K = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(m_1 \frac{L_1^2}{12} + m_2 R_2^2 \right) + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 m_2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(\frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + z_3 m_3 b + z_3^2 m_3 \right) + \frac{1}{2} m_3 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2) \\ + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (S\gamma_i C\gamma_i m_4 R_4^2 + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_4) + \frac{1}{2} m_4 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2) \\ + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (S\gamma_i C\gamma_i m_5 R_5^2 + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) m_5) + \frac{1}{2} m_5 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 + (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)^2)$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(m_1 \frac{L_1^2}{12} + m_2 R_2^2 + S\gamma_i C\gamma_i (m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4) (m_4 + m_5) + \frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + z_3 m_3 b + z_3^2 m_3 \right) \\ + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 m_2 + \frac{1}{2} m_3 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2) + \frac{1}{2} m_4 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2) + \frac{1}{2} m_5 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 + (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)^2)$$

(III.2.47)

III.2.2.3 Energie potentielle des robots

L'énergie potentielle (Π) du (i) chaînon du robot à l'aide de la force de pesanteur:

$$\Pi = P_i Z^* \quad (\text{III.2.48})$$

$$\Pi = -m_i G^T T_0^i R_i^*$$

Où : P_i : Force de pesanteur du chaînon (i).

Z_0^* : Z^{enc} coordonnées du centre de masse du chaînon (i) dans le système du calcul lié avec la base du robot. La formule (III.2.48) sous la forme matricielle comme suit:

$$\Pi = -m_i G^T T_0^i R_i^* \quad (\text{III.2.49})$$

Où : R_i^* : Colonne matrice, premier trois éléments qui sont les coordonnées des centres de masses

du chaînon (i) dans le système du calcul, en liaison avec le chaînon (i);

G^T : Ligne-matrice sous la forme suivante:

$$G^T = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0] \quad (\text{III.2.50})$$

Où: g : Accélération de la pesanteur

L'énergie potentielle du robot, qui possède (n) chaînons est:

$$\Pi = -\sum_{i=1}^n m_i G^T T_0^i R_i^* \quad (\text{III.2.51})$$

III.2.2.3.1 Energie potentielle du robot type (ALG-M.O-1)

Déterminons l'énergie potentielle du robot , en admettant que les forces de pesanteur des chaînons P_1, P_2, P_3 sont connues.

L'énergie potentielle du robot est égale à la somme algébrique des énergies potentielles de tous leurs chaînons c'est à dire

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5$$

III.2.2.3.1.a Energie potentielle du chaînon(1)

L'énergie potentielle du premier chaînon correspond à (III.2.49)

$$\Pi_1 = -m_1 G^T T_0^1 R_1^* \quad (\text{III.2.52})$$

Et comme:

$$G^T T_0^1 R_1^* = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0] \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = -g \frac{L_1}{2}$$

$$\Pi_1 = -m_1 G^T T_0^1 R_1^* = m_1 g \frac{L_1}{2} \quad (\text{III.2.53})$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} P_1 L_1$$

III.2.2.3.1.b Energie potentielle du chaînon (2)

L'énergie potentielle du (2) chaînon correspond à (III.2.49)

$$\Pi_2 = -m_2 G^T T_0^2 R_2^*$$

Comme :

$$G^T T_0^2 R_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_2/2 \\ 1 \end{bmatrix} = -g\left(-\frac{L_2}{2} + h_1 + z_2\right)$$

$$\Pi_2 = -m_2 G^T T_0^2 R_2^* = m_2 g \left(-\frac{L_2}{2} + h_1 + z_2\right)$$

Par conséquent: $\boxed{\Pi_2 = P_2\left(-\frac{L_2}{2} + h_1 + z_2\right)}$ (III.2.54)

III.2.2.3.1.c Energie potentielle du chaînon (3)

L'énergie potentielle du (3) chaînon correspond à (III.2.49) :

$$\Pi_3 = -m_3 G^T T_0^3 R_3^*$$

Comme :

$$G^T T_0^3 R_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & z_3 c\gamma_1 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & z_3 s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -g(h_2 + h_1 + z_2)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi_3 &= -m_3 G^T T_0^3 R_3^* = m_3 g (h_2 + h_1 + z_2) \\ \Pi_3 &= P_3 (h_2 + h_1 + z_2) \end{aligned}}$$
 (III.2.55)

III.2.2.3.1.d Energie potentielle du chaînon (4):

L'énergie potentielle du (4) chaînon correspond à (III.2.49) :

$$\Pi_4 = -m_4 G^T T_0^4 R_4^*$$

Comme :

$$G^T T_0^4 R_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_4/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G^T T_0^4 R_4^* = -g\left(-\frac{L_4}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + z_2\right)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi_4 &= -m_4 G^T T_0^4 R_4^* = m_4 g \left(-\frac{L_4}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + z_2 \right) \\ \Pi_4 &= P_4 \left(-\frac{L_4}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + z_2 \right) \end{aligned}} \quad \text{(III.2.56)}$$

III.2.2.3.1.e Energie potentielle du chaînon (5)

L'énergie potentielle du (5 chaînon correspond à (III.2.49) :

$$\Pi_5 = -m_5 G^T T_0^5 R_5^*$$

Comme :

$$G^T T_0^5 R_5^* = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G^T T_0^5 R_5^* = -g \left(-\frac{L_5}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \right)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi_5 &= -m_5 G^T T_0^5 R_5^* = m_5 g \left(-\frac{L_5}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \right) \\ \Pi_5 &= P_5 \left(-\frac{L_5}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \right) \end{aligned}} \quad \text{(III.2.57)}$$

Energie potentielle du robot

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} P_1 L_1 + P_2 \left(-\frac{L_2}{2} + h_1 + z_2 \right) + P_3 (h_2 + h_1 + z_2) + P_4 \left(-\frac{L_4}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + z_2 \right) + \\ & P_5 \left(-\frac{L_5}{2} + h_2 + h_1 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (P_1 L_1 - P_2 L_2 - P_4 L_4 - P_5 L_5) + (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) (h_1 + z_2) + h_2 (P_3 + P_4 + P_5) + \\ & h_3 (P_4 + P_5) + P_5 (h_4 - z_5) \end{aligned}} \quad \text{(III.2.58)}$$

III.2.2.4. Forces généralisées:

Soit pour le ($i^{\text{ème}}$) chaînon du robot sont appliqués et les forces (\vec{F}_i) et les moments (\vec{M}_i), qui sont dans le système (i) et qui passent par les débuts des coordonnées de ce système.

Soit aucune autre force extérieure n'est appliquée sur le robot. On détermine les forces généralisées qui correspondent aux coordonnées généralisées (q^i).

Comme c'est connu, la force généralisée - Grandeur scalaire, égale à:

$$Q_i = \frac{\delta A}{\delta q_i} \quad (\text{III.2.59})$$

Où :

δA :Travail élémentaire où sont appliquées les forces généralisées pour déplacer le robot, selon uniquement une de ses coordonnées totales, surtout pour (q^i), qui nous aide à avoir l'accroissement de (δq_i), et en même temps les restes des coordonnées restent sans changement.

Si les chaînons (i-1) et (i) forment une paire de translation, il est possible d'avoir un déplacement horizontal du chaînon(i) suivant le sens de l'axe (Z_i) du couple à l'aide d'une grandeur (δq_i). Dans ce cas le moment (\vec{M}_i) ne produit pas le travail, mais la force (\vec{F}_i) fournit le travail qui est égale à:

$$\delta A = \vec{F}_i \cdot \vec{Z}_i \delta q_i \quad (\text{III.2.60})$$

Où: \vec{Z}_i Vecteur suivant l'axe (Z_i) dans le système (i).

Remplaçons (III.2.49) dans (III.2.48) nous aurons:

$$Q_i = \vec{F}_i \cdot \vec{Z}_i \quad (\text{III.2.61})$$

Par conséquent, la force généralisée dans ce cas est égale à la projection de la force (\vec{F}_i) sur l'axe de la paire cinématique.

Si les chaînons (i-1) et (i) forment une paire de rotation, il est possible d'avoir une rotation du chaînon (i) d'un angle (δq_i) autour de l'axe (Z_i). Dans ce cas c'est le contraire qui s'effectue, la force (\vec{F}_i) est appliquée suivant le point qui se trouve sur l'axe de rotation, donc ne fournit pas le travail mais le travail du moment existe:

$$\delta A = \vec{M}_i \cdot \vec{Z}_i \delta q_i$$

Remplaçons (δA) dans (III.2.59) nous aurons:

$$Q_i = \vec{M}_i \cdot \vec{Z}_i \quad (\text{III.2.62})$$

Par conséquent, la force généralisée dans ce cas est égale à la projection du moment (\vec{M}_i) sur l'axe du couple.

Maintenant, soulevons un problème plus compliqué:

Soit la force (\vec{F}_0) et le moment (\vec{M}_0) appliqués à l'attrape, c'est à dire au chaînon (n), c'est pourquoi la force (\vec{F}_0) passe à travers le début du système (n). La différence avec le problème précédent, les vecteurs (\vec{F}_0) et (\vec{M}_0) sont projetés sur les axes des coordonnées du système O, et surtout F_{x_0} ; F_{y_0} ; F_{z_0} ; M_{x_0} ; M_{y_0} et M_{z_0} sont connus.

On exige de déterminer la force généralisée (Q_i) qui dépend des coordonnées généralisées (q_i).

Ecrivons les forces et les moments donnés dans le système (i) (A travers les projections sur les axes des coordonnées du système i) sous la forme matricielle:

$$F_i = T_i^{-1} F_0 \quad , \quad M_i = T_i^{-1} M_0 \tag{III.2.63}$$

Ici:

$$F_0 = \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix} ; F_i = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ F_{z_i} \\ 0 \end{bmatrix} ; M_0 = \begin{bmatrix} M_{x_0} \\ M_{y_0} \\ M_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix} ; M_i = \begin{bmatrix} M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ M_{z_i} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{III.2.64}$$

Ou bien sous forme du bloc:

$$F_0 = \begin{bmatrix} \vec{F}_0 \\ 0 \end{bmatrix} ; F_i = \begin{bmatrix} \vec{F}_i \\ 0 \end{bmatrix} ; M_0 = \begin{bmatrix} \vec{M}_0 \\ 0 \end{bmatrix} ; M_i = \begin{bmatrix} \vec{M}_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{III.2.65}$$

Pour trouver la matrice (T_i^{-1}) à partir de l'équation (III.2.50) on doit connaître (T_i), sous forme de bloc et qui sera égale à:

$$T_i = T_0^1 . T_0^2 \dots T_0^i = \begin{bmatrix} M_{0,i} & \vec{P}_{0,i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.2.66}$$

La matrice inverse:

$$T_i^{-1} = \begin{bmatrix} M_{0,i}^T & M_{0,i}^T \vec{P}_{0,i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.2.67}$$

Remplaçons (III.2.50) dans (III.2.52), nous aurons (sous forme du bloc) les forces données et les moments à travers les projections sur les coordonnées des axes du système (i):

$$F_i = \begin{bmatrix} M_{0,i}^T & \vec{F}_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; M_i = \begin{bmatrix} M_{0,i}^T & \vec{M}_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.2.68}$$

Et dans le centre du système (i), on aura un moment complémentaire égale à:

$$\Delta M_i = \vec{P}_{i,n} \times \vec{F}_i \tag{III.2.69}$$

Où: $\vec{P}_{i,n}$ Rayon-vecteur qui passe à partir du début des systèmes (i) au début du système (n) dans le système (i), et sera sous la forme du bloc matriciel:

$$T_{i,n} = T_0^{i+1} . T_0^{i+2} \dots T_0^{n-1} T_0^n = \begin{bmatrix} M_{i,n} & \vec{P}_{i,n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.2.70}$$

Ce genre des formes dans les systèmes des forces au centre du système (i), nous aide à avoir les vecteurs principaux et les moments:

$$\vec{F}^{princi} = \vec{F}_i \tag{III.2.71}$$

$$\vec{M}^{princi} = \vec{M}_i + \vec{P}_{i,n} \times \vec{F}_i \tag{III.2.72}$$

Si la paire cinématique est de translation (i-1, i) nous aurons:

$$Q_i = \vec{F}^{princi} \vec{Z}_i = \vec{F}_i \vec{Z}_i \tag{III.2.73}$$

Mais pour la paire de rotation:

$$Q_i = \vec{M}^{princi} \vec{Z}_i = (\vec{M}_i + \vec{P}_{i,n} \times \vec{F}_i) \vec{Z}_i \tag{III.2.74}$$

III.2.2.4.1 Forces généralisées du robot (ALG-M.O-1)

Calculons les forces totales généralisées qui correspondent aux coordonnées généralisées du robot, si à l'attrape sont appliquées une force (\vec{F}_0) et un moment (\vec{M}_0) mais on néglige (\vec{M}_0).

La force (\vec{F}_0) passe à travers le début des coordonnées du système (X_5, Y_5, Z_5), elle est dirigée suivant l'axe OZ du chaînon (5) (Fig III.2.2):

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{z_0} \end{bmatrix}$$

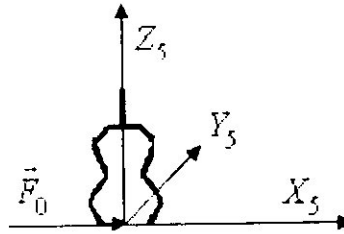


Figure (III.2.2): Force de serrage

III.2.2.4.1.a Force généralisée du chaînon (1)

Déterminons (Q_i) dans la paire cinématique (0,1), nous avons une rotation, utilisons la formule (III.2.63):

$$Q_i = (\vec{M}_i + \vec{P}_{i,n} \times \vec{F}_i) \vec{Z}_i \quad (\text{III.2.75})$$

Pour calculer (\vec{F}_1) et on exige la matrice (\vec{M}_1), qui se détermine à l'aide de la

matrice (T_1):

$$T_1 = T_0^1 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0,1} & \vec{P}_{0,1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.76})$$

Par conséquent:

$$M_{0,1} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.77})$$

$$M_{0,1}^T = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & s\gamma_1 & 0 \\ -s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilisons (III.2.57), (III.2.66) et (III.2.53) nous aurons:

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{x_0} c\gamma_1 + F_{y_0} s\gamma_1 \\ -F_{x_0} s\gamma_1 + F_{y_0} c\gamma_1 \\ F_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.78})$$

Car M_0 est négligeable.

Pour déterminer $\vec{P}_{1,n}$ utilisons (III.2.58) la matrice $(T_{1,5})$ devient:

$$T_1^5 = T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5$$

$$T_1^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 - z_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.2.79)$$

Par conséquent:

$$\vec{P}_{1,5} = [(z_3 - z_4) \quad 0 \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5]^T \quad (III.2.80)$$

Utilisons (III.2.78) dans (III.2.75) nous aurons:

$$Q_1 = \vec{M}_1 + \vec{P}_{1,n} \times \vec{F}_1$$

$$Q_1 = [z_3 - z_4 \quad 0 \quad h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5]^T \begin{bmatrix} F_{x_0} c\gamma_1 + F_{y_0} s\gamma_1 \\ -F_{x_0} s\gamma_1 + F_{y_0} c\gamma_1 \\ F_{z_0} \end{bmatrix}$$

Par conséquent:

$$Q_1 = (z_3 - z_4)(F_{x_0} c\gamma_1 + F_{y_0} s\gamma_1) + (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5)F_{z_0}$$

Comme la force de serrage de la pince du robot est suivant OZ la force généralisée est comme suit:

$$Q_1 = (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5)F_{z_0} \quad (III.2.81)$$

III.2.2.4.1.b Force généralisée de chaînon (2)

La détermination de (Q_2) dans la paire cinématique (1,2) nous avons une translation verticale,

utilisons la formule (III.2.62) pour le chaînon (2) on a:

$$Q_2 = F_2 Z_2 \quad (III.2.82)$$

et $F_2 = \begin{bmatrix} M_{0,2} \cdot \vec{F}_0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} \quad (III.2.83)$

Pour calculer (\vec{F}_2) , on exige la matrice $(M_{0,2}^T)$ qui se détermine à l'aide de la matrice (T_2) .

$$T_2 = {}_0^2 = T_0^1 T_1^2 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0,2} & \bar{P}_{0,2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.84})$$

Par conséquent:

$$M_{0,2} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad M_{0,2}^T = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & s\gamma_1 & 0 \\ -s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.85})$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} F_x c\gamma_1 + F_y s\gamma_1 \\ -F_x s\gamma_1 + F_y c\gamma_1 \\ F_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remplaçons (III.2.85) dans (III.2.83) en utilisant (III.2.82) nous aurons:

$$Q_2 = F_{z_0} \quad (\text{III.2.86})$$

III.2.2.4.1.c. Force généralisée de chaînon (3)

La détermination de (Q_3) dans la paire cinématique (2, 3) nous avons une translation transversale,

on a:

$$Q_3 = F_3 Z_3 \quad (\text{III.2.87})$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} M_{0,3} \bar{F}_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.88})$$

Pour calculer \bar{F}_3 on exige la matrice ($M_{0,3}^T$) qui se détermine à l'aide de la matrice (T_3).

$$T_3 = T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 & z_3 c\gamma_1 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 & z_3 s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0,3} & \bar{P}_{0,3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.89})$$

Par conséquent:

$$M_{0,3} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & -s\gamma_1 & 0 \\ s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad M_{0,3}^T = \begin{bmatrix} c\gamma_1 & s\gamma_1 & 0 \\ -s\gamma_1 & c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad F_3 = \begin{bmatrix} F_{x_3} c\gamma_1 + F_{y_3} s\gamma_1 \\ -F_{x_3} s\gamma_1 + F_{y_3} c\gamma_1 \\ F_{z_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.90})$$

Remplaçons (III.2.90) dans (III.2.88) et en établissant (III.2.87) nous aurons:

$$Q_3 = F_{z_3} \quad (\text{III.2.91})$$

III.2.2.4.1.d. Force généralisée du chaînon (4)

La détermination de (Q_4) dans la paire cinématique (3,4) nous avons une translation transversale, utilisons la formule (III.2.61) pour le chaînon (4) on a:

$$Q_4 = F_4 Z_4 \quad (\text{III.2.92})$$

$$\text{et } F_4 = \begin{bmatrix} M_{0,4} \bar{F}_0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.93})$$

Pour calculer \bar{F}_4 on exige la matrice $(M_{0,4}^T)$ qui se détermine à l'aide de la matrice (T_4) .

$$T_4 = T_0^4 = T_0^3 T_3^4 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0,4} & \bar{P}_{0,4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent:

$$M_{0,4} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad M_{0,4}^T = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.94})$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} (c\gamma_1 - s\gamma_1)F_{x_3} + (s\gamma_1 + c\gamma_1)F_{y_3} \\ 0 \\ F_{z_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remplaçons (III.2.94) dans (III.2.93) en établissant (III.2.92) nous aurons:

$$Q_4 = F_{z_0} \quad (\text{III.2.95})$$

III .2.2.4.1.d. Force généralisée du chaînon (5)

La détermination de (Q_5) dans la paire cinématique (3,4) nous avons une translation verticale, utilisons la formule (III.2.50) pour le chaînon (5) on a:

$$Q_5 = F_5 Z_5 \quad (\text{III.2.96})$$

$$\text{Et } F_5 = \begin{bmatrix} M_{0,5} \cdot \vec{F}_0 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.97})$$

Pour calculer \vec{F}_5 on exige la matrice $(M_{0,5}^T)$ qui se détermine à l'aide de la matrice (T_5) .

$$T_5 = T_0^5 = T_0^4 T_4^5 = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)c\gamma_1 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 & (z_3 - z_4)s\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0,5} & \vec{P}_{0,5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent:

$$M_{0,5} = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & 0 & 0 \\ s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad M_{0,5}^T = \begin{bmatrix} c\gamma_1 - s\gamma_1 & s\gamma_1 + c\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (\text{III.2.98})$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} (c\gamma_1 - s\gamma_1)F_{x_0} + (s\gamma_1 + c\gamma_1)F_{y_0} \\ 0 \\ F_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remplaçons (III.2.98) dans (III.2.97) en établissant (III.2.96) nous aurons:

$$Q_5 = F_{z_0} \quad (\text{III.2.99})$$

III.2.2.5 .Equation de Lagrange II^{ème} type sous forme matricielle

Comme c'est connu, l'équation de LAGRANGE II^{ème} type, dépend des coordonnées généralisées (q_i) et sera sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j \quad (\text{III.2.100})$$

Si toutes les forces extérieures qui agissent sur le robot, sont des forces potentielles nous avons:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (\text{III.2.101})$$

El l'équation (III.2.84) sera sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{III.2.102})$$

Où L -fonction de LAGEANGE- égale à la différence des énergies cinétique et potentielle:

$$L = K - \Pi \quad (\text{III.2.103})$$

Supposons que sur le robot agissent des différentes forces extérieures et en même temps les potentielles Ecrivons la force totale qui dépend de deux parties:

$$Q_j = \tilde{Q}_j - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (\text{III.2.104})$$

La première partie est liée aux grandeurs des forces non potentielles, la deuxième potentielles. Remplaçons (III.2.104) dans (III.2.100) nous aurons:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j \quad (\text{III.2.105})$$

Pour former cette équation sous forme matricielle, il est nécessaire d'écrire les grandeurs suivantes:

$$T_i = T_0^1, T_0^2, \dots, T_0^i$$

Cette grandeur est la suivante:

$$1/ \dot{T}_i = \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad (\text{III.2.106})$$

$$\text{Où: } \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} = \begin{cases} U_{ij} & \text{pour } k \leq i \\ 0 & \text{pour } k > i \end{cases} \quad (\text{III.2.107})$$

$$\text{Pour } U_{ik} = T_0^1 T_1^2 \dots \frac{dT_{i-1}^i}{dq_k} \dots T_{i-1}^i \quad ; \quad \frac{dT_{i-1}^i}{dq_k} = \Omega_k A_k$$

$$2/ \quad \dot{T}_i^T = \sum_{k=1}^i U_{ik}^T \dot{q}_k \quad (\text{III.2.108})$$

$$3/ \quad \frac{\partial \dot{T}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^i U_{ij} \dot{q}_i & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (\text{III.2.109})$$

$$\text{Où} \quad U_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_j} = \frac{\partial U_{i1}}{\partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial U_{i2}}{\partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (\text{III.2.109})$$

$$4/ \quad \frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} U_{ij} & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (\text{III.2.110})$$

$$5/ \quad \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} U_{ij}^T & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (\text{III.2.111})$$

$$6/ \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{dU_{ij}}{dt} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\text{Ou bien: } \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^i U_{ij} \dot{q}_i & \text{pour } j \leq i \\ 0 & \text{pour } j > i \end{cases} \quad (\text{III.2.112})$$

$$7/ \quad \ddot{T}_i = \frac{d\dot{T}_i}{dt} = \sum_{k=1}^i \frac{dU_{ik}}{dt} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^i U_{ik} \ddot{q}_k$$

$$\text{Mais} \quad \frac{dU_{ik}}{dt} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{k=1}^i U_{ikl} \dot{q}_l$$

$$\text{Pour cela: } \ddot{T}_i^T = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i U_{ikl} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{k=1}^i U_{ik} \ddot{q}_k \quad (\text{III.2.113})$$

$$8/ \quad \ddot{T}_i^T = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i U_{ikl}^T \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{k=1}^i U_{ik}^T \ddot{q}_k \quad (\text{III.2.114})$$

Passons (III.2.105) dans l'expression d'énergie on obtient:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(\dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (\text{III.2.115})$$

Ou bien en calculant (III.2.110) et (III.2.111) :

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n tr \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n tr \left(\dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (III.2.116)$$

$$D'où: H_i^T = H_i \quad (III.2.117)$$

Et à l'aide de translation des produits matriciels l'équation (III.2.116) peut être mentionnée comme suit:

$$\left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right)^T = (\dot{T}_i^T)^T H_i^T \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} = \dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \quad (III.2.118)$$

Mais l'opération de la transposition coïncide avec les éléments diagonaux de la matrice dans leurs places et par conséquent ne change pas la trace de la matrice d'où:

$$tr \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) = tr \left(\dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (III.2.119)$$

En calculant (III.2.119) l'équation (III.2.116) se simplifie:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=j}^n tr \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) \quad (III.2.120)$$

Pour avoir le premier membre de l'équation de LAGRANGE par la différentielle nous avons l'équation selon le temps, sous la forme, que (Hi) du temps ne dépend pas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=j}^n tr \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) H_i \dot{T}_i^T \right) + \sum_{i=j}^n tr \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) \quad (III.2.121)$$

Le premier terme d'addition de cette équation en utilisant (III.2.112) et (III.2.108) sera sous la forme suivante:

$$\sum_{i=j}^n tr \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) H_i \dot{T}_i^T \right) = \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (III.2.122)$$

le deuxième terme de l'addition, en utilisant (III.2.110) et (III.2.114) sera:

$$\sum_{i=j}^n tr \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) = \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot U_{ik} \cdot H_i) \ddot{q}_k \quad (III.2.123)$$

Remplaçons (III.2.122) et (III.2.123) dans (III.2.121) dans le premier membre de l'équation de LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i tr (U_{ij} \cdot U_{ik} \cdot H_i) \ddot{q}_k \quad (III.2.124)$$

Passons à la formation du (2^{ème}) membre de l'équation de LAGRANGE, faisons la différentielle de (III.2. 11) selon les coordonnées généralisées:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n \text{tr} \left(\dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (\text{III.2.125})$$

Et comme par analogie à (III.2.118)

$$\left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) = \dot{T}_i H_i^T \frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j}$$

D'où: $\text{tr} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) = \text{tr} \left(\dot{T}_i H_i \frac{\partial \dot{T}_i^T}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Et l'équation (III.2.106) se simplifie:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=j}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \dot{T}_i}{\partial \dot{q}_j} H_i \dot{T}_i^T \right) \quad (\text{III.2.126})$$

Utilisons (III.2.109) et (III.2.106) nous avons:

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{il} H_i U_{ik}^T) \dot{q}_l \dot{q}_k \quad (\text{III.2.127})$$

Calculons de (III.2.125) l'équation (III.2.127):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{il} H_i U_{ik}^T) \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{ij} U_{ik} H_i) \ddot{q}_k \quad (\text{III.2.128})$$

Pour avoir le dernier membre de la partie gauche de l'équation de LAGRANGE ; faisons la différentielle de (III.2.51) selon les coordonnées généralisées :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n m_i G^T \frac{\partial T_i}{\partial q_j} R_i^*$$

Remplaçons (III.2.127) et (III.2.128) dans (III.2.125) dans (III.2.105) nous aurons :

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{ij} H_i U_{ik}^T) \ddot{q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{il} H_i U_{ik}^T) \dot{q}_l \dot{q}_k - \sum_{i=1}^n m_i G^T U_{ij} R_i^* = Q_j \quad (\text{III.2.129})$$

Equation de LAGRANGE de II^{ème} type sous forme matricielle :

III.2.2.6 .L'équation De Lagrange Du Robot Type (Alg.Mo.1)

Détermination des équations de LAGRANGE pour le robot type avec cinq degré de liberté.

Remplaçons l'équations de LAGRANGE de II^{ème} type :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \quad (\text{III.2.130})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2 \quad (\text{III.2.131})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = Q_3 \quad (\text{III.2.132})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} - \frac{\partial L}{\partial q_4} = Q_4 \quad (\text{III.2.133})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_5} - \frac{\partial L}{\partial q_5} = Q_5 \quad (\text{III.2.134})$$

$$\text{Où : } L = K - \Pi \quad \text{fonction de LAGRANGE} \quad (\text{III.2.135})$$

On a : la force technologique est suivant l'axe OZ de la pince de s, donc :

$$K = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (m_1 \frac{L_1^2}{12} + m_2 R_2^2 + S\gamma_i C\gamma_i (m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4)(m_4 + m_5) + \frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + (z_3 b + z_3^2) m_3) + \frac{1}{2} (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 m_2 + \frac{1}{2} m_3 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2) + \frac{1}{2} m_4 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2) + \frac{1}{2} m_5 ((\dot{h}_1 + \dot{z}_2)^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_3^2 + (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)^2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) = [m_1 \frac{L_1^2}{12} + m_2 R_2^2 + S\gamma_i C\gamma_i (m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4)(m_4 + m_5) + \frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + (z_3 b + z_3^2) m_3] \ddot{\gamma} + [(-S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + 2(m_4 + m_5)(\dot{z}_4 z_4 + \dot{z}_3 z_3 - \dot{z}_3 z_4 + \dot{z}_4 z_3) + (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)(m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + m_3 \dot{z}_3 (z_4 + z_3) + 2m_3 \dot{h}_2 \ddot{h}_2 + 2(m_4 + m_5)(\dot{h}_2 \ddot{h}_2 + \dot{h}_3 \ddot{h}_3) + m_5 (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)(\ddot{h}_4 + \ddot{z}_5)] \dot{\gamma}$$

On remplace (III.2.135) dans l'équation (III.2.130) on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = \frac{1}{2} \dot{\delta}^2 (-2S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2)$$

Par conséquent :

$$[m_1 \frac{L_1^2}{12} + m_2 R_2^2 + S\gamma_i C\gamma_i (m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4)(m_4 + m_5) + \frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + (z_3 b + z_3^2) m_3] \ddot{\gamma} + [(-S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + 2(m_4 + m_5)(\dot{z}_4 z_4 + \dot{z}_3 z_3 - \dot{z}_3 z_4 + \dot{z}_4 z_3) + m_3 \dot{z}_3 (z_4 + z_3) + (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)(m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + 2m_3 \dot{h}_2 \ddot{h}_2 + 2(m_4 + m_5)(\dot{h}_2 \ddot{h}_2 + \dot{h}_3 \ddot{h}_3) + m_5 (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)(\ddot{h}_4 + \ddot{z}_5)] \dot{\gamma} - \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (-2S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) = Q_1$$

$$(\text{III.2.136})$$

on utilisent l'expression de Q_1 dans (III.2.136) on obtient la 1^{ère} équation du mouvement

$$\begin{aligned}
 & \left[m_1 \frac{I_1^2}{12} + m_2 R_2^2 + S\gamma_i C\gamma_i (m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + (z_4^2 + z_3^2 - 2z_3 z_4)(m_4 + m_5) + \frac{m_3 h^2}{12} + \frac{m_3 b^2}{12} + (z_3 b + z_3^2) m_3 \right] \ddot{\gamma} \\
 & + [(-S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) + 2(m_4 + m_5)(\dot{z}_4 z_4 + \dot{z}_3 z_3 - \dot{z}_3 z_4 + \dot{z}_4 z_3) + m_3 \dot{z}_3 (z_4 + z_3) \\
 & + (\dot{h}_1 + \dot{z}_2)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)(m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + 2m_3 \dot{h}_2 \ddot{h}_2 + 2(m_4 + m_5)(\dot{h}_2 \ddot{h}_2 + \dot{h}_3 \ddot{h}_3) + m_5 (\dot{h}_4 - \dot{z}_5)(\ddot{h}_4 + \ddot{z}_5)] \dot{\gamma} \\
 & - \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 (-2S\gamma_i^2 + 1)(m_4 R_4^2 + m_5 R_5^2) = (z_3 - z_4)(F_{x_0} c\gamma_1 + F_{y_0} s\gamma_1) + (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + z_2 - z_5) F_{z_0}
 \end{aligned} \tag{III.2.137}$$

Deuxième équation :

On remplace (III.2.135) dans l'équation (III.2.131) on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{h}_1 + \dot{z}_2)} = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial(h_1 + z_2)} = -(P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$$

Par conséquent :

$$(m_2 + m_3 + m_4 + m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2) + (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = Q_2 \tag{III.2.138}$$

On utilise l'expression de Q_1 dans (III.2.138) on obtient la 1^{ère} équation du mouvement

$$(m_2 + m_3 + m_4 + m_5)(\ddot{h}_1 + \ddot{z}_2) + (P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = F_{z_0} \tag{III.2.139}$$

Troisième équation :

On remplace (III.2.135) dans l'équation (III.2.132) on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{h}_2)} = (m_3 + m_4 + m_5) \ddot{h}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(z_3)} = (2(z_3 - z_4)(m_4 + m_5) + (b + 2z_3)m_3) \dot{\gamma}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(h_2)} = -(P_3 + P_4 + P_5)$$

Par conséquent :

$$(m_3 + m_4 + m_5) \ddot{h}_2 + (P_3 + P_4 + P_5) - (2(z_3 - z_4)(m_4 + m_5) + (b + 2z_3)m_3) \dot{\gamma}^2 = Q_3 \tag{III.2.140}$$

On remplace Q_3 dans l'équation (III.2.140) on obtient :

$$(m_3 + m_4 + m_5) \ddot{h}_2 + (P_3 + P_4 + P_5) - (2(z_3 - z_4)(m_4 + m_5) + (b + 2z_3)m_3) \dot{\gamma}^2 = F_{z_0} \tag{III.2.141}$$

Quatrième équation :

On remplace (III.2.135) dans l'équation (III.2.133) on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{h}_3)} = (m_4 + m_5)\ddot{h}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial(-z_4)} = 2(-z_4 + z_3)(m_4 + m_5)\dot{\gamma}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial(h_3)} = -(P_4 + P_5)$$

Par conséquent :

$$(m_4 + m_5)\ddot{h}_3 + (P_4 + P_5) - 2(-z_4 + z_3)(m_4 + m_5)\dot{\gamma}^2 = Q_4 \quad (\text{III.2.142})$$

On remplace Q_4 dans l'équation (IV.2.142) on obtient :

$$(m_4 + m_5)\ddot{h}_3 + (P_4 + P_5) - 2(-z_4 + z_3)(m_4 + m_5)\dot{\gamma}^2 = F_{Z_4}$$

5^{ème} équation :

On remplace (III.2.135) dans l'équation (III.2.134) on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{h}_4 - \dot{z}_5)} = m_5(\dot{h}_4 - \dot{z}_5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial(h_4 - z_5)} = -P_5$$

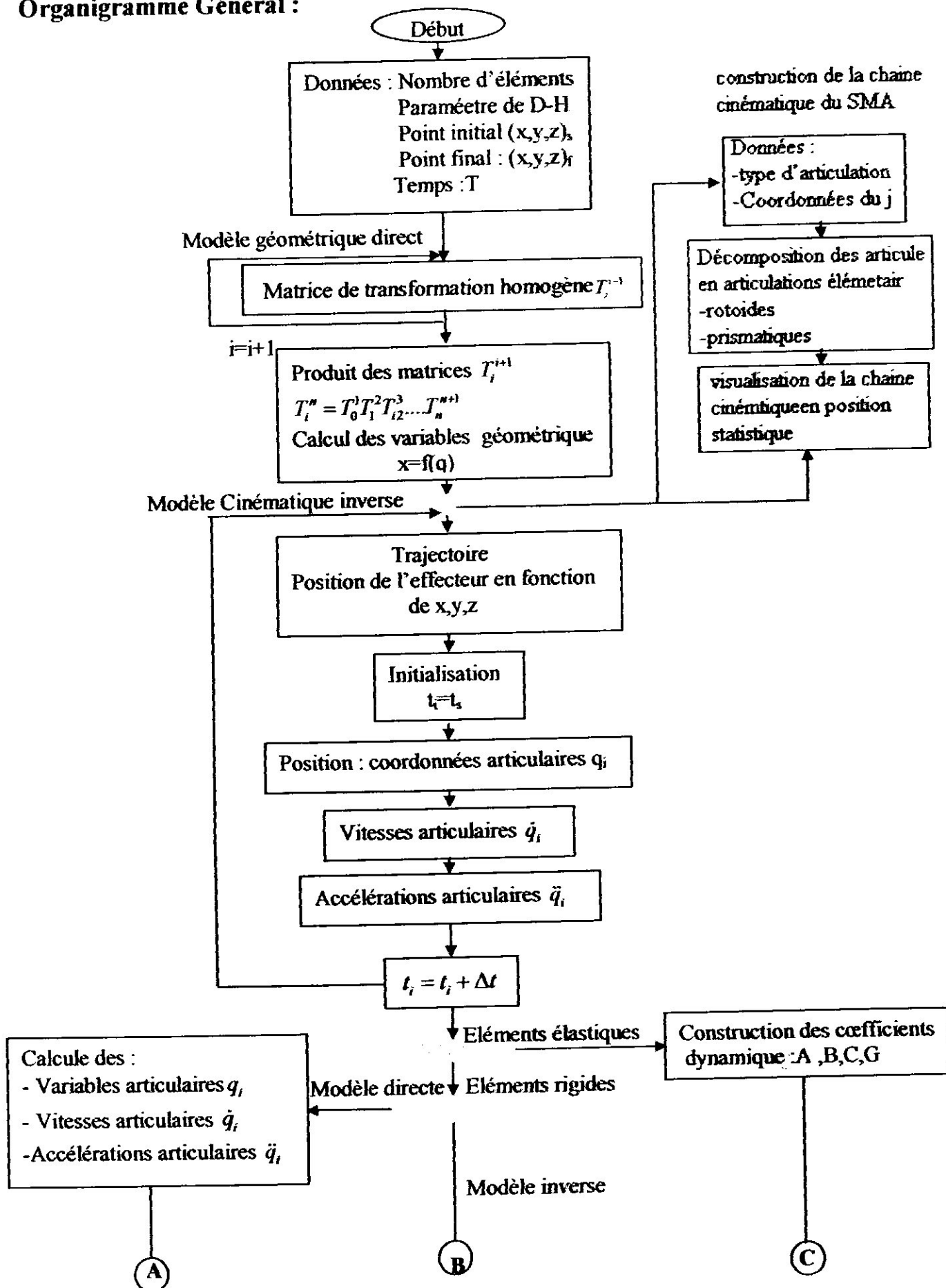
Par conséquent :

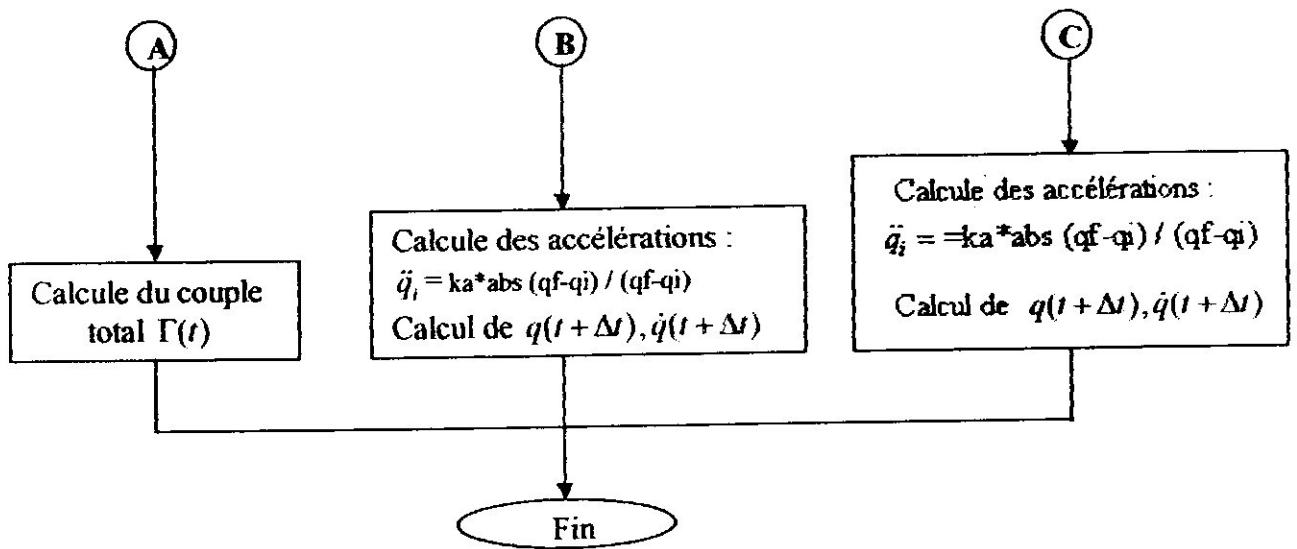
$$m_5(\dot{h}_4 - \dot{z}_5) + p_5 = Q_5 \quad (\text{III.2.143})$$

on utilisent l'expression de Q_1 dans (III.2.143) on obtient la 1^{ère} équation du mouvement

$$\boxed{m_5(\dot{h}_4 - \dot{z}_5) + p_5 = F_{Z_4}}$$

Organigramme Général :





Chapitre IV

Étude et élaboration de projet du
robot type (ALG-MO-1)

IV. 1. Fiche technique du centre Fraisage - Alésage

IV. 1.1. Matériel

Fraiseuse -Aléseuse à banc en T avec entraînement séparé type: RAPID OC / 1 .5

IV. 1.2. Utilisation

- Travaux de fraisage;
- Alésage;
- Perçage, Taraudage.

IV. 1.3. Caractéristiques du matériel

- Diamètre de la broche d'alésage	110 mm
- Sortie fixe de la broche	200 mm
- Cône intérieur de la broche d'alésage	ISO 50
- Gamme de vitesses de rotation	12,5 à 3 150 tr/mn
- Puissance maxi disponible à 100 % en continu	40 KW
- Puissance maxi disponible à 100 % en continu à partir de 100 tr/ mn	14KW
- Gamme des avances sur les axes X, Y et W	0, 1 à 5000 mm/mn
- Déplacement rapide sur les axe X, Y et W	10000 tr/mn
- Gamme des avances sur axe B	0,1 à 700 mm/mn
- Déplacement rapide sur axe B	4,3 tr/mn
- Charge maximale admissible sur la table	2 tonnes
- Course de la table sur axe transversal (X)	1250 mm
- Course de la poupée axe vertical (Y)	1000 mm
- Course du montant longitudinal axe (W)	740 mm
- Surface utile de la table	1000 x 800 mm
-Nombre (le rainures sur la table	7 - 22 H7
- Diamètre d'appui sur la table	700 mm
- Puissance nominale de la machine	64KW
- Poids total net de la machine	1 5 tonnes environ

IV. 1.4. Machine équipée de commande numérique de contournage marque HOSLI 5Z

Equipement standard :

- Equipement électrique en technique à circuits intégrés.
- Tension d'alimentation : Courant triphasé 380 volts 50 périodes- neutre non distribué
Protection IP 43.
- Transmission de broche:
 - Moteur à courant continu à flasque bride, monté sur la poupée, alimentation par thyristors, avec régulation d'induit, en changement de vitesse sous charge, chacun des trois étages de réduction mécanique.
- Avances.
 - Pour chaque axe, un servomoteur séparé à courant continu à alimentation par thyristors pour les mouvements :
 - Vertical de la poupée.
 - Transversal de la table.
 - Longitudinal du montant.
 - Rotation de la table.
 - Vis à billes avec écrous double préchargé pour la poupée verticalement, pour la table transversalement, pour le montant longitudinal, entraînement par vis sans fin pour le mouvement de la table.
 - Graissage à distance par les écrous doubles.
 - Graissage par bain d'huile des vis sans fin .
 - Broche montée sur palier hydrostatiques systèmes « hydro-rond^R».

- Stabilisation thermique de la broche par réfrigérant d'huile.
- Dispositif de montage et démontage rapide des outils avec queue ISO - 50.
- Dispositif de soufflage pour nettoyer le cône de la broche.
- Arrêt orienté pour la broche afin qu'elle s'arrête dans une position angulaire définie.
- Glissières planes aérostatique, prés chargés par galets à ressorts sur la partie opposée, pour les glissières du montant, de la table et de la poupée.
- Groupe complet d'alimentation en air comprimé avec compresseur silencieux à palettes.

Filtrage et groupe de séchage et refroidissement.

- Glissières trempées- Système WOTAN - avec plaques épaisses trempées à HRC 60 ± 2 pour le banc transversal, le banc du montant et ses glissières Les parties frottantes de l'élément correspondant sont revêtus de matière plastique.
Axe de la table sans jeu, blocage automatique de la table, délestage de la table.
- Positionnement automatique de la table aux 4 positions à 90° .
- Changeur automatique pour 60 outils. magasin à chaîne avec emplacements codés pour outils à queue ISO 50 - VDI 2814, y compris embout de serrage.
- Dispositif d'arrosage pour la broche avec réservoir séparé et pompe.
- Protecteur de glissières en tôles télescopiques des 2 côtés de la table et des 2 côtés du montant. Protection tubulaire télescopique pour la vis à billes de l'axe Y. Racleurs de glissières sur tous les chariots.
- Eclairage du poste de travail.
- Elément de fondation (fixateurs) pour l'installation de la machine.
- Commande Numérique de contour nage BOSCH 5Z pour les axes X, Y, Z, W et B
- Moyens de mesure: -pour les axes X, Y et W : règles (inductosyn).

- Pour l'axe B : Resolver.

➤ Accessoires complémentaires:

Pour commande numérique BOSCH 5Z Dialog .

- Extension de mémoire : Bande perforée (150 m) 60 Kbyte réf. 503.
- 1 Télétype ASR 43.
- 1 jeu de pièces de rechange N° 3 réf. 523.

IV.2. Cycles de mouvement du robot sur le champ

On donne aux chaînons du schéma cinématique du robot (ALG-MO-1) une désignation et un sens de mouvement voir (fig. IV-2), pour dresser un tableau de cycles de mouvements (voir tableau.IV-1).

➤ **Remarque:**

- Le temps de chaque mouvement y pris en compte pendant la programmation (qui donne la priorité au robot ou à la machine de fonctionner ou de se reposer).
- Que T_1, T_2 est réglé au départ en hauteur et en rayon respectivement.
- Que tous les mouvements dans notre tableau sont de l'ordre de tout ou rien.
- La main est ouverte au repos.
- Pour chaque chaînon on associe un déplacement, soit $\pm X_2, \pm (Z_{1,2,3,4})$ pour les liaisons $T_2, T_{1,3,4}$ respectivement et y pour la liaison rotoïde R.

Tableau (IV-1) cycles de mouvements du robot sur champs.

N°	Désignation des phases	Désignation des couples en mouv.	Paramètres Du mouv.	Désignation
1	10			-Arrivée de la pièce (p1) par le chariot(a)
2	20	R	$\gamma = 135^\circ$	-Rotation du robot (R _r) vers (a)
3	21	T ₃	-Z ₃	-Descente de la main (Dm).
4	22			-Fermeture de la main (Fm) (l'appréhension de (P ₁)).
5	23	T ₃	Z ₃	-Montée de la main (Mm).
6	30	R	$\gamma = -90^\circ$	-(Rr) vers la palette (a ₀)
7	31	T ₃	-Z ₃	-(Dm).
8	32	T ₄	-Z ₄	-Ouverture de la main (Om). (dépôt de (P ₁)).
9	33	T ₃	Z ₃	-(Mm).
10	40	R	$\gamma = 45^\circ$	-(Rr) vers la position repère.
11	50			-Serrage automatique de (P ₁)
12	60			-Engagement automatique de la Palette (a ₀) sur la table de la machine
13	61			-Retour du palettiseur (Rp).
14	70			-Déclenchement d'usinage (P ₁)
15	80	R	$\gamma = 135^\circ$	-(Rr) vers la chariot (a)
16	81	T ₃	-Z ₃	-(Dm).
17	82	T ₄	Z ₄	-(Fm), Appréhensions de (P ₂).
18	83	T ₃	Z ₃	-(Mm)
19	90	R	$\gamma = 180^\circ$	-(Rr) vers la palette (b ₀)
20	91	T ₃	-Z ₃	-(Dm).
21	92	T ₄	Z ₄	-(Om), dépôt de (P ₂).
22	93	T ₃	Z ₃	-(Mm).
23	100			-(P ₁) Usinée (arrêt de la broche)
24	200	R	$\gamma = 45^\circ$	-(Rr) vers la position repère.
25	210			-Arrêt temporisé du robot.
26	300			-Serrage automatique de (P ₂)
27	400			-Désengagement de la palette (a ₀) Ou repose (P ₁)
28	500			-Engagement de la Palette (b ₀) avec (P ₂)
29	510			-(Rp)
30	600			-Desserrage automatique de (P ₁)
31	700	R	$\gamma = 45^\circ$	-(Rr) vers la palette (a ₀)
32	710	T ₃	-Z ₃	-(Dm).
33	720	T ₄	Z ₄	-(Fm), Appréhensions de (P ₂) usinée.
34	800			-Engagement de la Palette (b ₀) porte (P ₂).
35	900			-Déclenchement d'usinage (P ₂)

36	1000	T ₃	-Z ₃	-(Mm)
37	10000	R	$\gamma = 180^\circ$	-(Rr) vers le chariot (b ₀)
38	11000	T ₃	-Z ₃	-(Dm).
39	12000	T ₄	Z ₄	-(Om), dépôt de pièce
40	13000	T ₃	Z ₃	-(Mm).
41	20000			-Chariot (b) « Action »
42	30000	R	$\gamma = 270^\circ$	-(Rr) vers le chariot (a) pour prendre (P ₃).
43	31000			-pour la prise de (p ₃) on suit les étapes de 3 à 12 avec changement de la l'étape 6 $\gamma = -180^\circ$.
44	40000			-Désengagement de la palette (b ₀).
45	50000			-Engagement de la Palette (a ₀).
46	60000	R	$\gamma = -45^\circ$	-(Rr) vers (b ₀).
47	61000			-Suivie les étapes de 32 à 37 pour la prise de (P ₂) avec $\gamma = -90^\circ$.
48	70000			-suivie les étapes de 38 à 41.
49	80000	R	$\gamma = 270^\circ$	- suivie la prise de (P ₄) sur le chariot de livraison (a).
50	90000			-Retour vers 17.

IV.3. Fiche Technique du robot (ALG-MO-1)

Le robot nommé (ALG-MO-1) sera composé de trois parties : Le bâti, Le bras et la main Les caractéristiques principales de ce robot sont présentés sur le tableau ci-après.

Tableau (IV-2) : Fiche Technique du robot (ALG-MO-1):

Structure : RTT

Nombre de degrés de liberté : 5

Paramètres du mouvement	Nature de liaison	Débattement	Paramètres du mouvement	Nature de liaison	Débattement
γ_1	R		Z ₄	T	200mm
Z ₂	T	300mm	Z ₅	T	100mm
Z ₃	T	600mm			

Actionneurs : Hydrauliques

Capteurs : suivant type d'application

Application :

- Chargement, déchargement des pièces.
- Palettissage.
- Travaux de manutention.

Angle de rotation : Permet au robot de travailler sur plusieurs postes.

IV.4. Titre de projet

Robot manipulateur des machines - outils (Algérie- M.O.-1)

IV.5. Domaine technique auquel se rapporte le projet

La présente invention concerne les robots industriels utilisés dans les ateliers flexibles de fabrication mécanique, qui forment une nouvelle série de fabrication (Brevets d'invention: WO 9507799623622 AL 1996088, 9622856 AL 19960801, 9620818 AL 19960711. . .).

IV.6. But de projet

La nouvelle structure très simple du robot industriel type (ALG. -M.O-I) est une nouveauté en Algérie et a été adaptée aux données d'une station d'usinage composée de quatre phases d'usinage différentes, et en vue de transformer cette unité de fabrication mécanique en une cellule flexible.

IV.7. Etat technique antérieure

L'opération après amélioration des caractéristiques techniques y compris le centre de fraisage - alésage, pour la fabrication d'une grande variété des pièces constructives des véhicules industriels se caractérise par une trajectoire fermée d'une suite de déplacement et d'arrêt avec une livraison évacuation des pièces à l'aide de la main et cela après un choix optimal de toutes les caractéristiques.

Les différentes opérations qui comportent la descente, la fermeture et la montée de la main ainsi que le déchargement à l'aide des circuits et des modules judicieux réalisés.

Les phases intermédiaires sont celles déclenchement de l'usinage dans les différentes phases et

de l'évacuation vers les transporteurs à palettes, après fabrication.

Les modules utilisés pour la conception, le fonctionnement et suivant le cahier des charges de ce robot industriel sont composés de cylindres de vérins hydrauliques, des éléments auxiliaires qui constituent les composantes du circuit hydraulique, des éléments d'assemblages, la main de chargement et déchargement et de moteurs électriques.

Les blocs ci-dessus sont liés entre eux et équipés par des capteurs qui permettent de produire les positionnements et l'ordre d'orientation des objets à traiter à l'entrée des installations automatiques lors de l'exécution des opérations et le déchargement de la dernière phase, ainsi que la synchronisation pendant les rotations d'angles (90° , 17° , 56° et 90°) pour effectuer les différentes phases la chaîne de production existante sur la figure 1 pour quatre postes de travail, deux palettes (a_0 et b_0) et deux chariots de transport de pièce (a et b), le chariot (a) livre les pièces, tandis que le chariot (b) les évacue.

Le robot est situé au centre des quatre postes, le centre est bien la position repère.

Le cycle des mouvements est :

La rotation initiale du robot industriel vers le chariot (a) (angle = 135°), la descente de la main dépend des caractéristiques des machines-outils utilisées synchronisées par les capteurs.

La fermeture de la main sur la pièce répond aux poids des pièces usinées et qui ne doivent pas dépasser deux tonnes. le régime de fonctionnement proposé, ainsi que la montée et la rotation vers (a_0) (angle= 90°) et le déchargement dans la deuxième phase de fabrication d'un repère (angle = 45°).

Il en est de même pour la troisième phase (b_0) après avoir exécuté la quatrième phase (b).

Un déchargement correct de la pièce est effectué à l'aide d'un mouvement de rotation d'un angle ($\gamma = 270^\circ$), le robot est positionné devant le chariot (a) pour exécuter une nouvelle gamme d'usinage.

IV.8. Enoncé des figures

De toutes façons, l'invention sera bien comprise à l'aide de la description qui suit, en références au dessins annexés, représentant, à titre d'exemple non limitatifs, plusieurs formes d'exécution de ce robot manipulateur :

- figure IV-1 : est une vue de la station de fraisage - alésage ;
- figure IV-2 : représente le schéma cinématique du robot industriel, avec la convention du cycle des mouvements.
- figure IV-3 : est une vue en élévation et partiellement en coupe d'un robot manipulateur, avec ces modules et la partie du circuit hydraulique.
- figure IV-4 : est une vue en coupe du module de levage à un cylindre à double effet.
- figure IV-5 : a présenté un module de rotation à deux cylindres.
- figure IV-6 : est une vue du module de déplacement longitudinal vers le bas de l'organe terminal.
- figure IV-7 : a présenté le module de la main sous forme de mâchoire pour garantir une bonne adhérence.

IV.9. Présentation de l'essence de projet et son mode de réalisation

Le robot industriel (fig.IV.3) est solidaire d'une base (1), maintenue à sa partie inférieure par un corps (2), qui sert aussi de support à la colonne du module de déplacement vertical (fig.IV.4) et à son intérieur sont encoché les éléments du circuit hydraulique. Au dessus du cylindre (côté frontale), on a monté le module de rotation (fig.IV.5) et au dessus (cylindre) les modules de déplacement transversal (fig.IV.6) de la fermeture, d'ouverture et de la main.

Le bâti du robot est composé d'une base (1) et le corps (2), ce dernier est lié à la base par quatre supports (3) (fig .IV. 3). Les boulons (4) servent pour la fixation au sol.

Dans la direction verticale, on a placé une colonne (5) fixée au-dessus du bras par soudage à la plate-forme (6), celle-ci est fixée par des boulons (7) avec le module de déplacement transversal. Et ce bâti est limité par des couvercles- avants, latéraux et arrière.

Le module de rotation (fig.IV.5) est constitué de deux cylindres (1) et (2) installé dans le corps (3) à l'aide des éléments de fixation (4) et (5).

La transmission par crémaillère et la roue dentée (6) et (7) transforme le mouvement rectiligne des vérins plongeurs (à double effet) en un mouvement de rotation de la colonne. C'est un système réversible ayant les avantages d'une réalisation simple pouvant supporter des grandes charges.

La pièce (8) sert en même temps pour le guidage de la crémaillère et à la fixation du vérin avec le corps.

La partie saillante du couvercle (9) permet l'amortissement du mouvement du piston (10) en formant un lit de l'huile une fois engagée dans le creux aménagé dans le piston. Le module de levage fonctionne à l'aide d'un cylindre à double effet (fig.IV.4).

Dans le cylindre (6) on se trouve le piston (7) qui est garni par deux joints, la tige (8) du piston est connectée avec la plate forme de dessus (9), la partie inférieure du carré, qui fixe la superficie extérieure du cylindre par un jeu, où sont encochés des billes (10).

Le déplacement rectiligne de l'ensemble (7, 8 et 9) s'effectue grâce à un système de guidage protégé par un cache en caoutchouc (14) le long du cylindre (1), écrou (2) et une tige (3).

Le déplacement vers le haut s'effectue par une transmission de l'huile dans la conduite (13) et en bas à l'aide de la fente (12) au dessus sur le méplat (4) sont placés des capteurs de positions, qui confirment le passage des chaînons mobiles dans les points des différentes positions à l'aide des aimants (5).

La transmission de l'huile dans la conduite inférieure (13) pousse le piston (7) vers le haut et par la suite fait monter le bras horizontal.

Pour un bon guidage lors de la montée (ou de la descente) on utilise des billes.

Le mécanisme sert comme plate-forme pour le module de déplacement transversal et repose (en bas) sur le module de rotation.

Le module de déplacement longitudinal vers le bas de l'organe terminal (fig.IV.6) sert à rapprocher la main de la zone du travail, c'est un vérin à double effet, constitué d'un cylindre (1) à l'intérieur duquel se déplace le piston creux (2) muni d'une garniture d'étanchéité aux deux extrémités (3).

Les tiges creuses (4) et (5) assurent le guidage parfait du piston. Aux extrémités du cylindre (1) sont installées des douilles, à gauche douille (6) avec les joints d'étanchéité qui sont fixés par des vis, à droite la douille (7) avec un filetage contre-écrou (9), et la douille (8) qui est liée par un filetage à la tige (4). A droite, le piston est connecté à la bride (10) avec la douille (11) auquel est fixée l'installation de l'organe terminal.

Le cylindre est muni des conduites (12) et (13) pour la circulation de l'huile assurant le déplacement en va et vient des pistons.

Le module de la main (fig.IV. 7) est composé par une structure dont le bout est constitué des leviers articulés (1, 2, 3 et 4) et des doigts, qui sont au nombre de deux sous forme de mâchoire, inclinés, changeables pour garantir une bonne adhérence. Le robot industriel peut adapter plusieurs variétés de mains en cas de nécessité.

La main possède un système vis-écrou (5) pour le réglage de la hauteur en cas de besoin.

Le bout supérieur du cylindre (10) hydraulique d'attrape est lié par goujon au bout inférieur du piston (12) qui sert à déplacer la main vers le bas pour une opération de chargement ou vers le haut pour véhiculer la pièce.

Le piston active dans un cylindre hydraulique (13) lié au module de déplacement transversal par deux équerres fixées par quatre boulons pour chacun, ce dispositif permet la fixation des diverses mains sur le robot.

Les deux cylindres sont munis des conduites (6) pour celui de dessus afin d'assurer la descente et la montée du piston (7). Et celui du bas pour attraper la pièce (8) et la décharger.

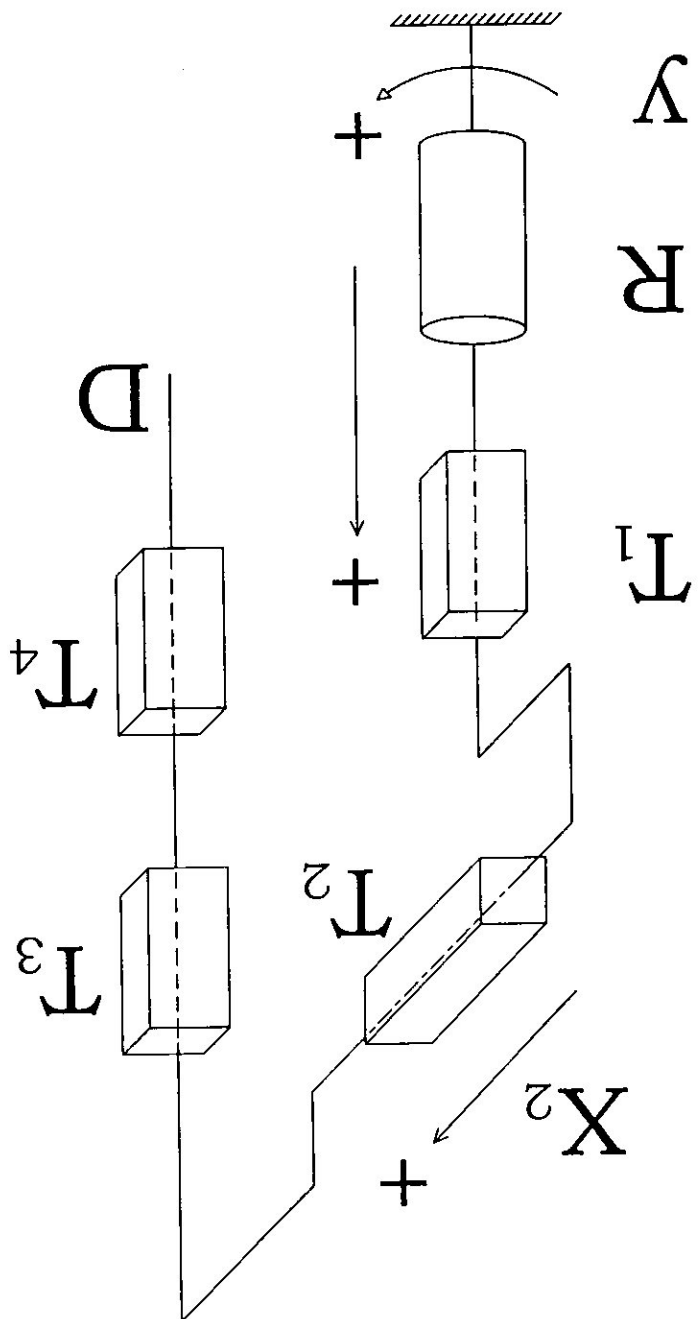
Le développement de l'effort nécessaire est pris en considération en cas de contact.


La main peut avoir un mouvement de rotation actionné par le circuit hydraulique ainsi que le positionnement de l'organe terminal sur la pièce à soulever est réalisé par un contact de fin de course.

IV.10.Revendications

1. Le principe de montage, de déchargement sur le dispositif d'usinage des différentes stations de fabrication mécanique s'effectue par un procédé d'une cellule flexible, en améliorant quelques caractéristiques techniques, en augmentant la cadence, la précision et la simplicité des phases d'usinage selon les données de l'unité de production.
2. Robot selon la revendication 1, ces structures des installations proposées pour Le robot industriel manipulateur est construit suivant le principe d'approvisionnement des éléments de base par blocs pour les différents schémas technologiques proposés et déchargement.
3. Robot selon la revendication 1, la construction et le principe d'action des modules et des installations complémentaires doivent permettre d'accomplir la manipulation et l'évacuation de produits usinés, les opérations de base sont réalisées grâce aux passages inventés et leurs simplicité d'utilisation.
4. Robot selon la revendication 1, la production en série, ou en grande série augmente par ce procédé de robotisation. Le remplacement du processus manuel par un autre plus précis et robuste permet l'optimisation des indices technico-économiques.
5. Robot selon la revendication 1, le choix des nuances répondant aux constructions des éléments, l'utilisation des pièces universelles dans la construction du manipulateur, la simplicité des commandes directes ou indirectes, l'amélioration de la fiabilité de l'ensemble permettent d'avoir un produit de qualité et moins coûteux.

Fig. 2



07	1	Plate-forme		
06	1	Tableau de commande		
05	1	Protecteurs		
04	1	Boulons de fixations		
03	1	Circuit Hydraulique		
02	1	Support		
01	1	Appuis		
Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	ORS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERAUNOTIQUE				
<p>vue en élévation et partiellement en coupe d'un robot manipulateur, avec ces modules et la partie du circuit hydraulique.</p>			<p>DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAFE</p>	
			<p>PROMOTEUR: ALLALLI CO-ROMOTEUR: BENMISRA A</p>	
Echelle:			Figure:IV.3	Promotion 05/06

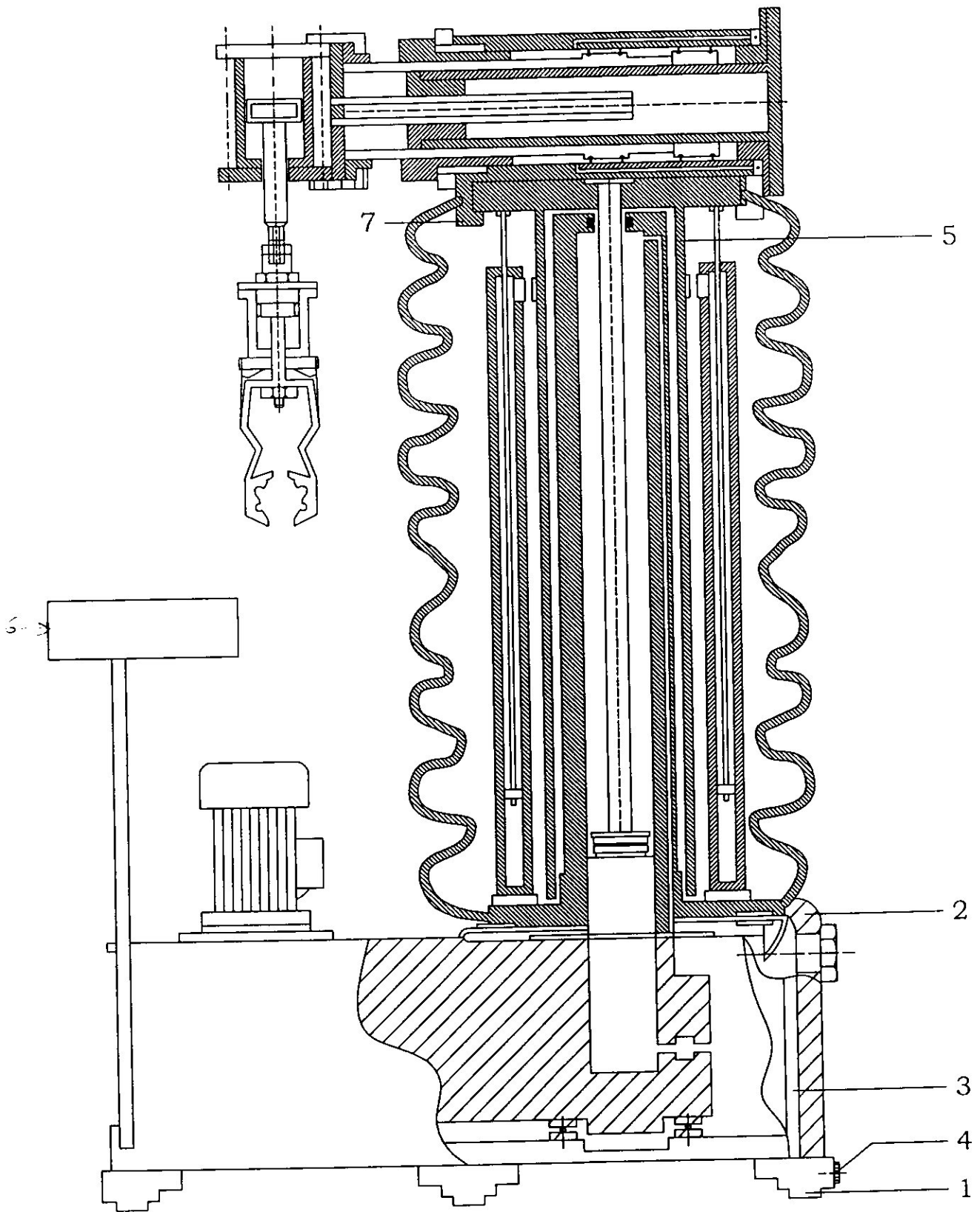



Fig .3

14	1	Protecteur		
13	1	Conduite D'admission de l'huile		
12	1	Conduite d'évacuation de l'huile		
11	1			
10	1	Conduite de l'huile		
09	1	Plate-forme		
08	1	Tige		
07	1	Piston		
06	1	Cylindre de hydraulique		
05	1	Tâteur électrique (-)		
04	1	Tâteur électrique (+) (Fin de course)		
03	1	Tige de guidage		
02	1	Galet de guidage		
01	1	Douille de guidage		
Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	ORS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERAUNOTIQUE				
<p>vue en coupe du module de levage à un cylindre à double effet.</p> <p>(REGLAGE EN HAUTEUR)</p>			<p>DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAFE</p> <p>PROMOTEUR: ALLALLI CO-ROMOTEUR: BENMISRA A</p>	
Echelle:			Figure :IV.4	Promotion 05/06

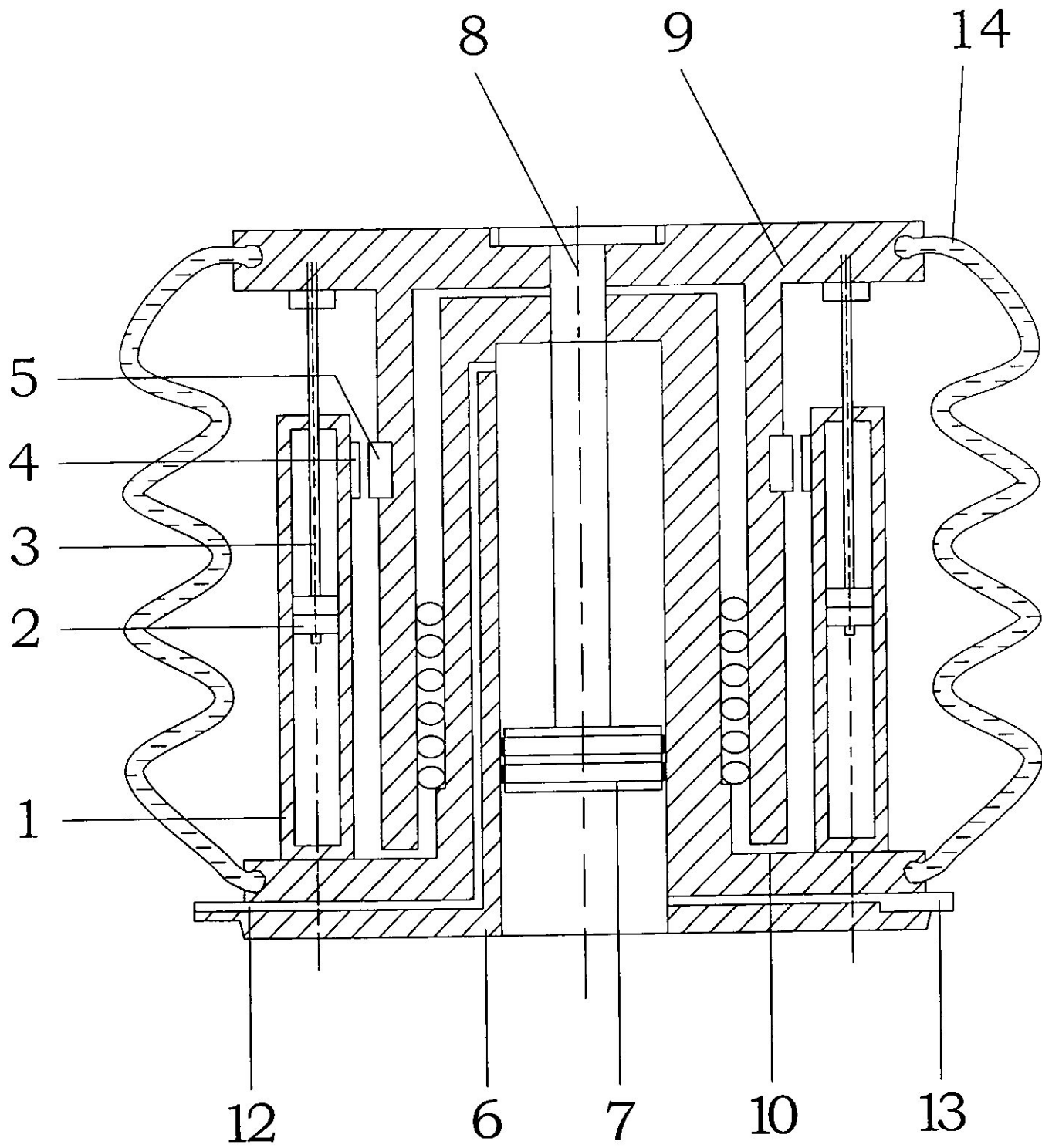
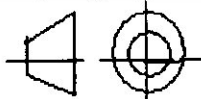


Fig .4

10	1	Piston		
09	1	Couvercle		
08	1	Guide		
07	1	Roue dentée		
06	1	Crémaillière:		
05		Roue		
04	1	Roue		
03	1	Corps		
02	4	Cylindre		
01	1	Cylindre		
Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	OBS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERAUNOTIQUE				
a présenté un module de rotation à deux cylindres			DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAFE PROMOTEUR: ALLALLI CO-PROMOTEUR: BENMISRA A	
Echelle :			Figure : IV.5	Promotion 05/06

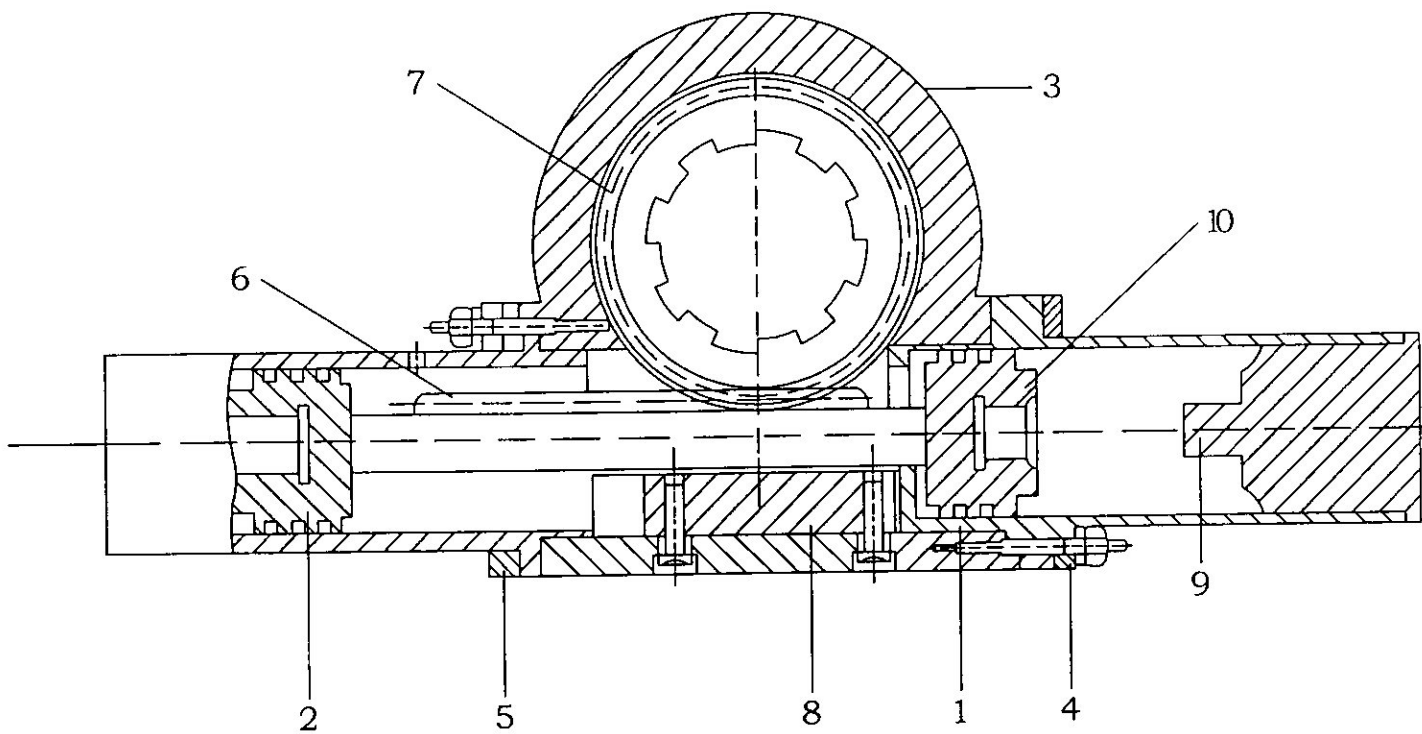
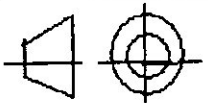


Fig .5

13	1	Canalisation d'huile		
12	1	Canalisation d'huile		
11	1	Douille		
10	1	Bride		
09	1	Douille		
08	1	Douille		
07	1	Bride		
06	1	Contre écrou		
05	1	Douille		
04	1	Joint		
03	1	Piston		
02	1	Arbre		
01	1	Cylindre		
Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	OBS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE				
vue du module de déplacement longitudinal vers le bas de l'organe terminal.			DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAFE PROMOTEUR: ALLALLA CO-ROMOTEUR: BENMISRA A	
Echelle :			Figure : IV.6	Promotion 05/06

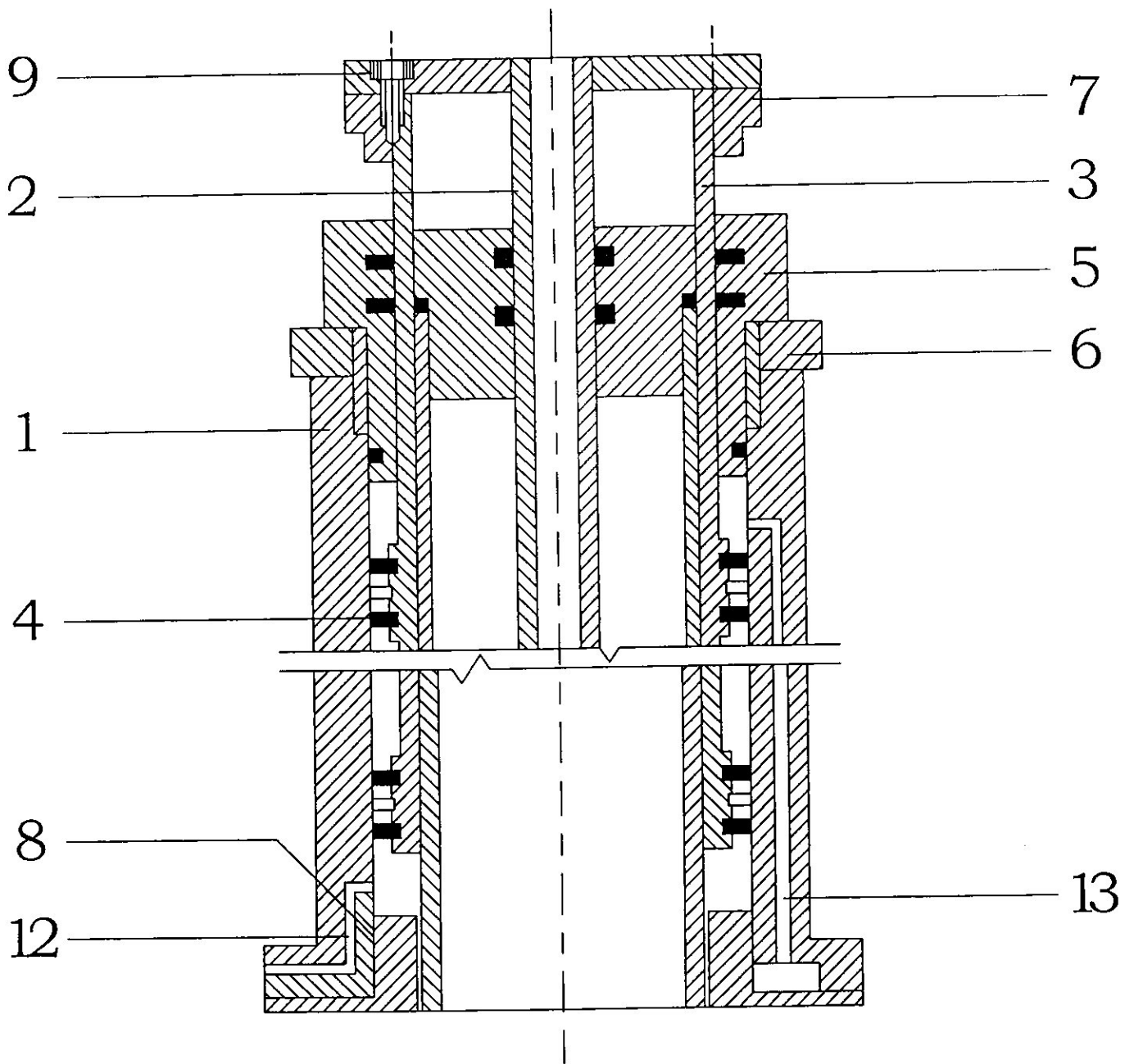
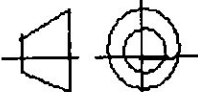


Fig .6

13	1	Cylindre		
12	1	pistons		
11	1	Cylindre du 2 ^{ème} pistons		
10	1	Cylindre du 1 ^{er} pistons		
09	1	Conduite d'évacuation de l'huile		
08	1	Conduite D'admission de l'huile		
07	1	Conduite d'évacuation de l'huile		
06	1	Conduite D'admission de l'huile		
05	1	Boulon de fixation		
04	1	Formes de la main		
03	1	Formes de la main		
02	1	Tiges de pincement		
01	1	Tiges de pincement		
Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	ORS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERAUNOTIQUE				
présenté le module de la main sous forme de mâchoire pour garantir une bonne adhérence			DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAFE PROMOTEUR: ALLALLA CO-PROMOTEUR: BENMISRA A	
Echelle:			Figure :IV.7	Promotion 05/06

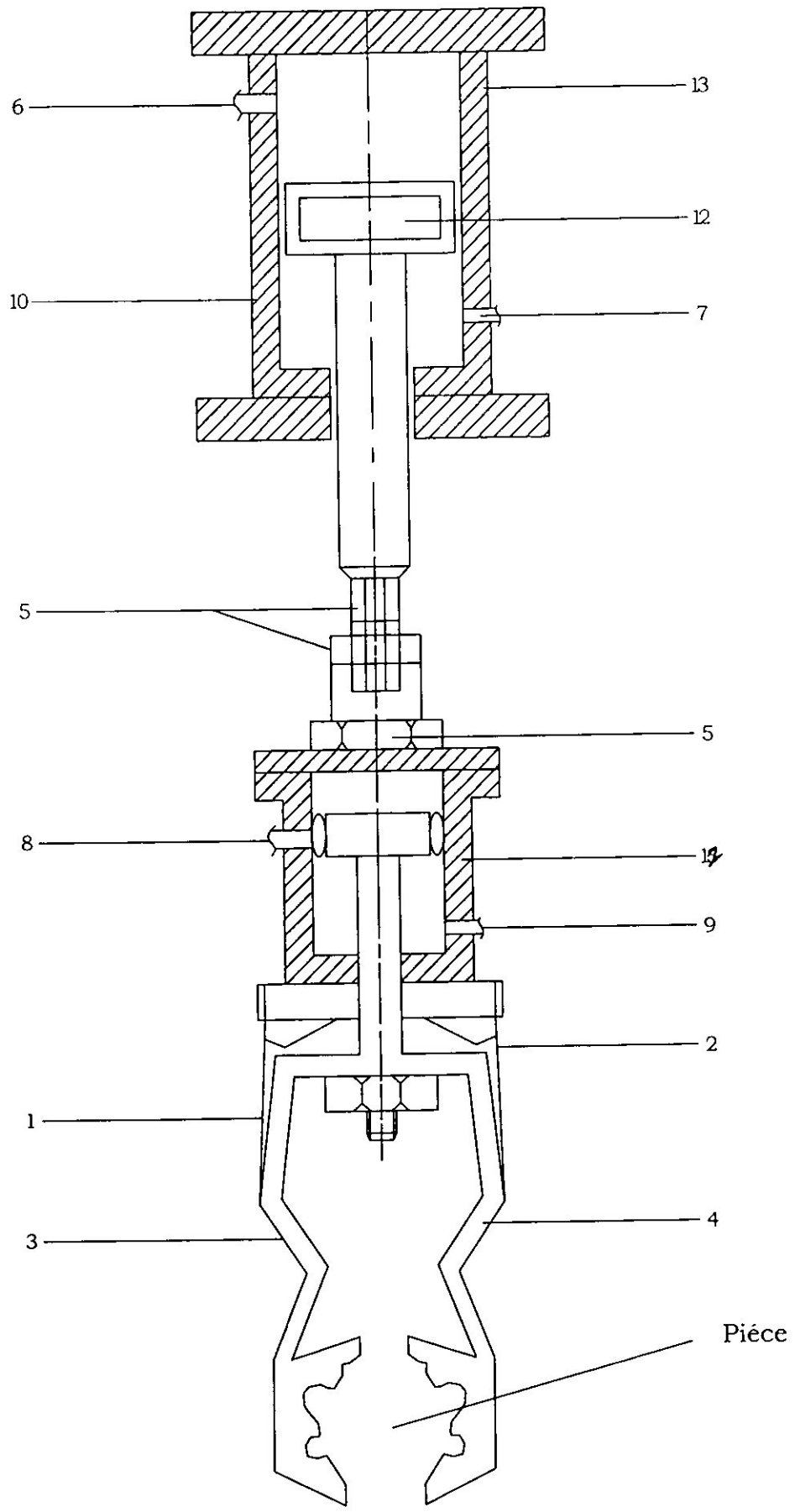


Fig .7

IV.11. Le circuit hydraulique (voir schéma hydraulique)

IV.11.1. Essai à vide

Après la mise en marche du moteur (1) la pompe à palette (2) aspire l'huile du bac (17) en passant par le filtre (16) et la soupape de sûreté (5) vers le bac. Ce circuit permet de vérifier la pression à l'intérieur du système à l'aide du manomètre (4).

IV.11.2. Mise en marche du module de rotation

La mise en marche de la pompe à palettes (2) permet de véhiculer l'huile à travers la conduite (6) et parés l'excitation de l'électro-aimant (7), le tiroir du distributeur (8) donne le passage d'huile au piston plongeur (10) à travers le limiteur de débit (9). A ce moment le piston (10) se déplace de la gauche vers la droite et fait fonctionner le module de rotation. Le retour de ce dernier à sa position de départ s'effectue de la manière suivante:

En excitant l'électro-aimant (11) situé à droite du distributeur (8) , cela permet le passage d'huile à travers le limiteur de débit (12) vers le piston plongeur (13) qui se déplace de droite vers la gauche, ce qui permet le retour du module à la position de départ du module.

IV.11.3 Mise en marche du module de déplacement vertical

Après la mise en marche du moteur électrique (1) et la pompe (2) l'huile traverse le distributeur (3) vers la conduite (14) à la pompe de sûreté (15) vers la conduite (18) et en existant l'électro-aimant (19), le tiroir du distributeur (20) s'ouvre en laissant passer l'huile vers le limiteur de débit (21) à la cavité inférieure du cylindre immobile (22) cela permet le déplacement vertical du module vers le haut.

La descente est réalisée en existant l' électro-aimant (24) du même distributeur (20) qui laisse passer l'huile sous pression bien déterminée à travers le limiteur de débit (25) à la cavité supérieure du même cylindre (22) qui réalise le retour du module à la position de départ.

IV.11.4. Mise eu marche du module de déplacement horizontal du bras du robot

Le fonctionnement de ce module s'effectue de la même manière que celui du déplacement vertical.

De la conduite (26) l'huile traverse le distributeur (28), excitant électro-aimant (27), cela fait

fonctionner le tiroir de ce distributeur qui fait véhiculer l'huile à travers le limiteur de débit (29) à la cavité droite du cylindre immobile (30), ce qui donne au piston (31) un déplacement vers la gauche et par la suite le déplacement horizontal du bras.

Le retour s'effectue en excitant l'électro-aimant (32) du même distributeur (28) qui fait véhiculer l'huile à travers le limiteur de débit (33) à la cavité gauche du cylindre immobile (30) à sa position initiale.

IV.11.5. Mise en marche du module de la descente de l'organe terminal

De la même manière que le module de déplacement vertical la descente de l'organe terminal est exécutée. De la conduite (34) l'huile traverse le distributeur (36), en excitant électro-aimant (35) qui fait véhiculer l'huile à la cavité supérieure du cylindre immobile (38) à travers le limiteur de débit (37) qui donne le mouvement vers le bas, et le mouvement vers le haut est réalisée par l'excitation de électro-aimant (40), l'huile traverse le limiteur de débit (41) vers la cavité inférieure du cylindre (38), l'organe terminal monte.

Le positionnement de l'organe terminale sur la pièce à soulever est réalisé par un contact de fin de course (non normalisé (42)).

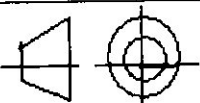
IV.11.6. Ouverture et fermeture de l'organe terminal

L'ouverture de l'organe terminal est réalisée en excitant électro-aimant (43) qui déplace le tiroir de distributeur (44) qui fait connecter la conduite (34) à travers l'étrangleur (45) avec la cavité supérieure du cylindre (46), ce qui fait déplacer le piston (47) vers le bas, ce mouvement provoque l'ouverture de la main.

La fermeture (serrage) s'effectue à l'aide, de électro-aimant (48) du tiroir du distributeur (44) et de limiteur de débit (49) à la cavité inférieure du cylindre (46) à la fin de la montée du cylindre (47) et la fermeture de la pince.

➤ Remarque

1. Pour arrêter le déplacement de n'importe quelle piston du robot, sur une position demandée, en excitant de nouveau le même électro-aimant du même distributeur qui a provoqué le mouvement du piston;
2. Les lignes interrompues sur le schéma hydraulique indiquent le retour (refoulement) (de l'huile vers le bac);
3. En cas de surpression pendant le fonctionnement des modules, les soupapes de sûreté (15) et (5) se connectent avec les conduites et d'évacuation pour dégager le surplus d'huile.

26	1	conduite					
25	1	Etrangleur	51	1	Injecteur de pression		
24	1	électro-aimant	50	1	La pince robot		
23	1	piston	49	1	Etrangleur		
22	1	cylindre	48	1	électro-aimant		
21	1	Etrangleur	47	1	piston		
20	1	distributeur	46	1	cylindre		
19	1	électro-aimant	45	1	Etrangleur		
18	1	conduite	44	1	distributeur		
17	1	bac	43	1	électro-aimant		
16	1	filtre	42	1	contact de fin de course		
15	1	Réducteur de pression	41	1	Etrangleur		
14	1	conduite	40	1	électro-aimant		
13	1	piston	39	1	piston		
12	1	Etrangleur	38	1	cylindre		
11	1	électro-aimant	37	1	Etrangleur		
10	1	piston	36	1	distributeur		
09	1	limiteur de débit	35	1	électro-aimant		
08	1	distributeur	34	1	conduite		
07	1	électro-aimant	33	1	Etrangleur		
06	1	conduite	32	1	électro-aimant		
05	1	Etrangleur	31	1	piston		
04	1	manomètre	30	1	cylindre		
03	1	distributeur	29	1	Etrangleur		
02	1	pompe à palette	28	1	distributeur		
01	1	moteur	27	1	électro-aimant		
Rep	N°	DESIGNIATION	Rep	N°	DESIGNIATION	MATIERE	ABS
UNIVERSITE DE BLIDA DEPARTEMENT D'AERAUNOTIQUE							
Schema hydraulique du Robot type (ALG –M.O-1)						DESSINE PAR : MEGHARBI ET BEDIAF	
						PROMOTEUR: ALLALLI CO-PROMOTEUR: BENMISRA .A	
						Promotion 05/06	
Echelle :							

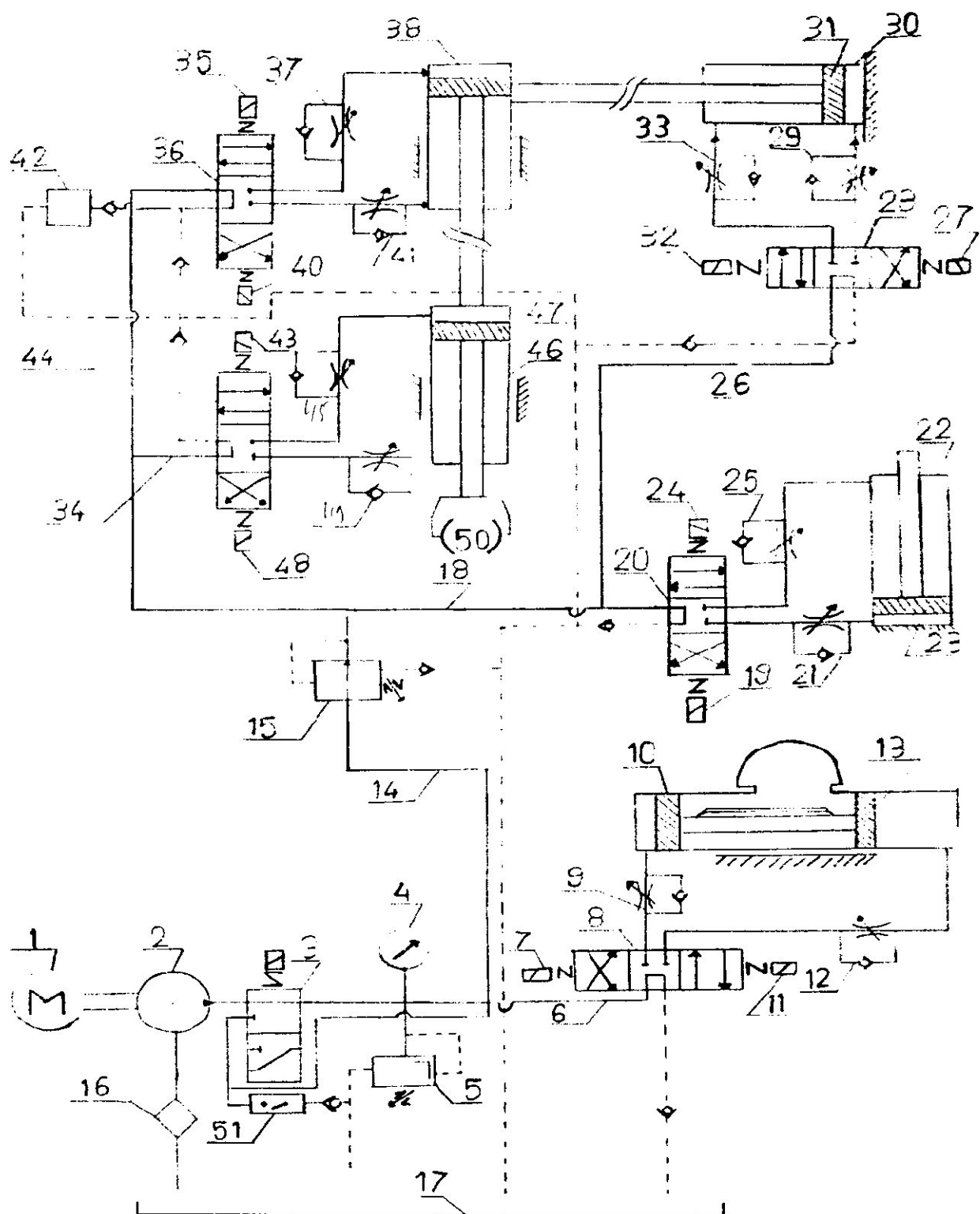


Figure (V.8) : circuit hydraulique

Introduction

Java est un langage de programmation récent (les premières versions datent de 1995) développé par Sun Microsystems. Il est fortement inspiré des langages C et C++.

Comme C++, Java fait partie de la « grande famille » des langages orientés objets.

(Il répond donc aux trois principes fondamentaux de l'approche orientée objet (POO) : l'encapsulation, le polymorphisme et l'héritage. Nous reviendrons bien évidemment en détails sur ces trois notions dans la suite de ce document).

Pourquoi Java ?

Java devait être un langage multi-plate-forme qui permettrait, selon l'adage ("Write once, run everywhere" – Écrire une fois, utiliser partout).

Lancé par Sun Microsystems, son concepteur, d'écrire une fois pour toutes des applications capables de fonctionner dans tous les environnements.

Qu'est-ce que Java ?

Java a été développé dans le but d'augmenter la productivité des programmeurs.

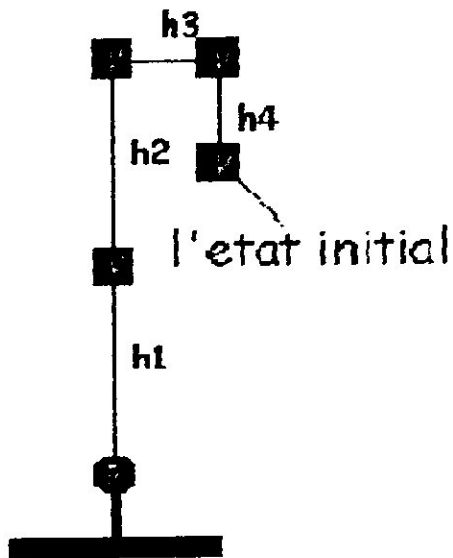
Pour cela, plusieurs axes ont été suivis.

- Java est un langage orienté objets
- Java est extensible à l'infini
- Java est un langage à haute sécurité
- Java est un langage simple à apprendre

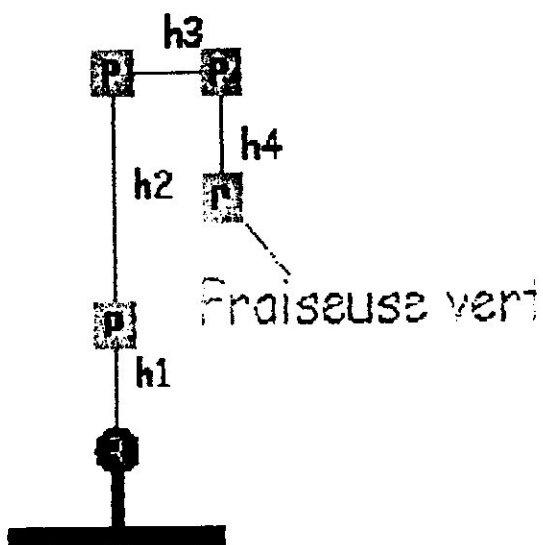
En créant l'objet robot avec un exécutable dans le langage java avec les paramètres géométriques, on peut obtenir une simulation qui exprime le circuit travaillé de robot type (ALG-MO-1) dans une station d'usinage dans un environnement 2D,

Exemple d'application :

Position 1 (l'état initial): $x_{p_1} = 200, x_{p_2} = 200, x_{p_3} = 250, x_{p_4} = 250$
 $y_{p_1} = 250, y_{p_2} = 150, y_{p_3} = 150, y_{p_4} = 200$



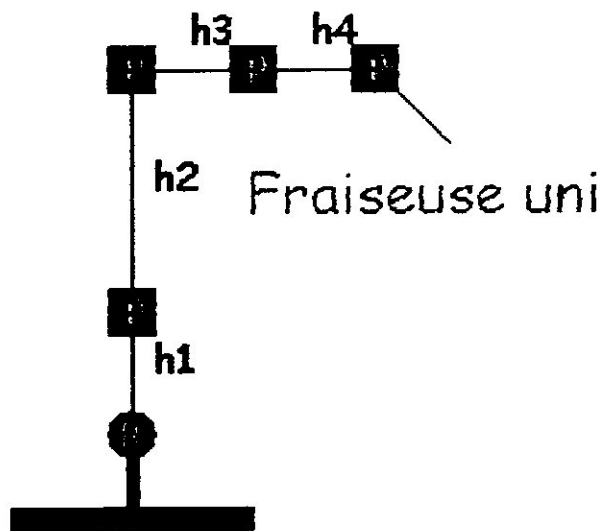
Position 2 : $x_{p_1} = 200, x_{p_2} = 200, x_{p_3} = 250, x_{p_4} = 250$
 $y_{p_1} = 300, y_{p_2} = 200, y_{p_3} = 200, y_{p_4} = 250$



Position 3:

$$x_{p_1} = 200, x_{p_2} = 200, x_{p_3} = 250, x_{p_4} = 300$$

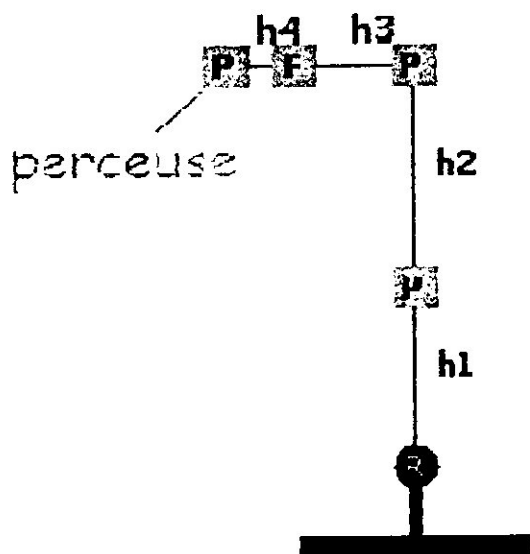
$$y_{p_1} = 300, y_{p_2} = 200, y_{p_3} = 200, y_{p_4} = 200$$



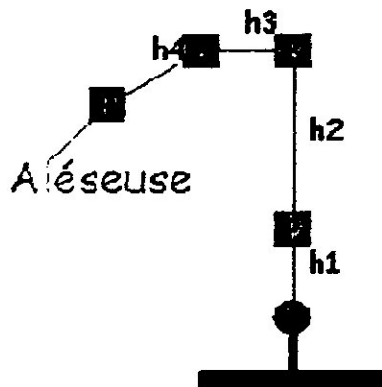
Position 4:

$$x_{p_1} = 200, x_{p_2} = 200, x_{p_3} = 150, x_{p_4} = 100$$

$$y_{p_1} = 270, y_{p_2} = 170, y_{p_3} = 170, y_{p_4} = 170$$



Position 5: $x_{p_1} = 200, x_{p_2} = 200, x_{p_3} = 150, x_{p_4} = 100$
 $y_{p_1} = 300, y_{p_2} = 200, y_{p_3} = 200, y_{p_4} = 230$



On peut aussi commander le robot avec une boîte de commande, on donnera quelques illustrations sur son fonctionnement.

Simulation d'un robot manipulateur
(ALG.MO-1)

• Choisir La Position

Position 1

• Animer Le Bras

La Vitesse

	X	Y
P1	200	250
P2	200	150
P3	250	150
P4	250	200

Fichier

Simulation d'un robot manipulateur (ALG.MO-1)

• Choisir La Position

Position 2

• Animer Le Bras

La Vitesse:

	X	Y
F1	200	300
F2	200	200
F3	250	200
F4	250	250

The diagram shows a 2D robot arm with a base joint h1. A vertical link connects h1 to joint h2. A horizontal link connects h2 to joint h3. A vertical link connects h3 to joint h4. A vertical end effector is attached to h4, labeled 'Fraiseuse vert'.

Fichier

Simulation d'un robot manipulateur (ALG.MO-1)

• Choisir La Position

Position 3

• Animer Le Bras

La Vitesse:

	X	Y
F1	200	300
F2	200	200
F3	250	200
F4	200	200

The diagram shows a 2D robot arm with a base joint h1. A vertical link connects h1 to joint h2. A horizontal link connects h2 to joint h3. A horizontal link connects h3 to joint h4. A horizontal end effector is attached to h4, labeled 'Fraiseuse uni'.

Fichier

Simulation d'un robot manipulateur (ALG.MO-1)

• Choisir La Position

Position 4

Annimer Le Bras

La Vitesse

	X	Y
P1	200	273
P2	200	173
P3	150	173
P4	120	173

Fichier

Simulation d'un robot manipulateur (ALG.MO-1)

• Choisir La Position

Position 5

Annimer Le Bras

La Vitesse

	X	Y
P1	200	300
P2	200	200
P3	150	200
P4	100	200

Afin de mieux apprécier les caractéristiques Cinématique et dynamique de notre robot type, nous avons déterminé ces derniers pour un seul temps de mouvement T nécessaire Pour effectuer un cycle de travail.

Nous obtenons sur les graphe ci-dessous l'évolution en fonction du temps des position, des vitesses. Des accélérations ainsi que des couples et forces pour un temps T égal à 5, secondes.

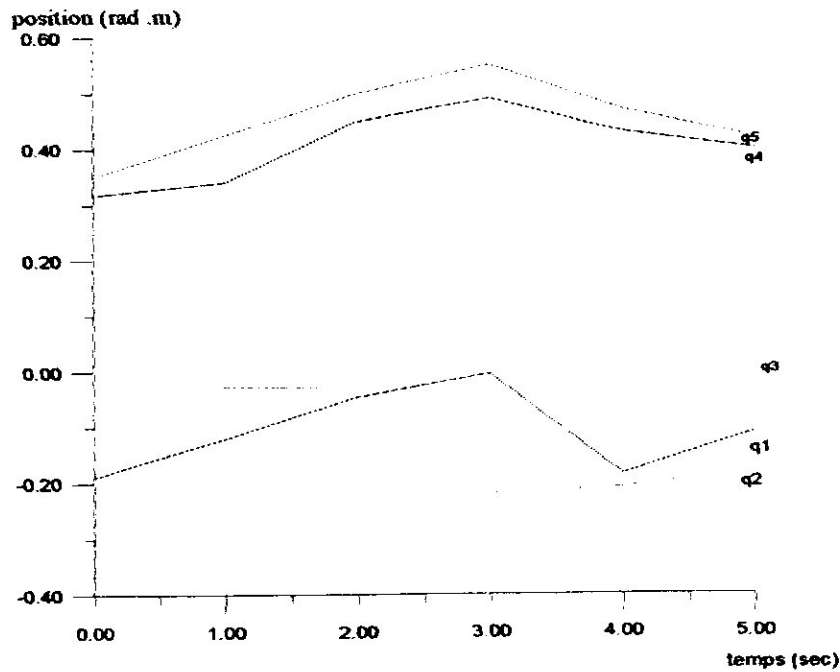


Figure (a): Position

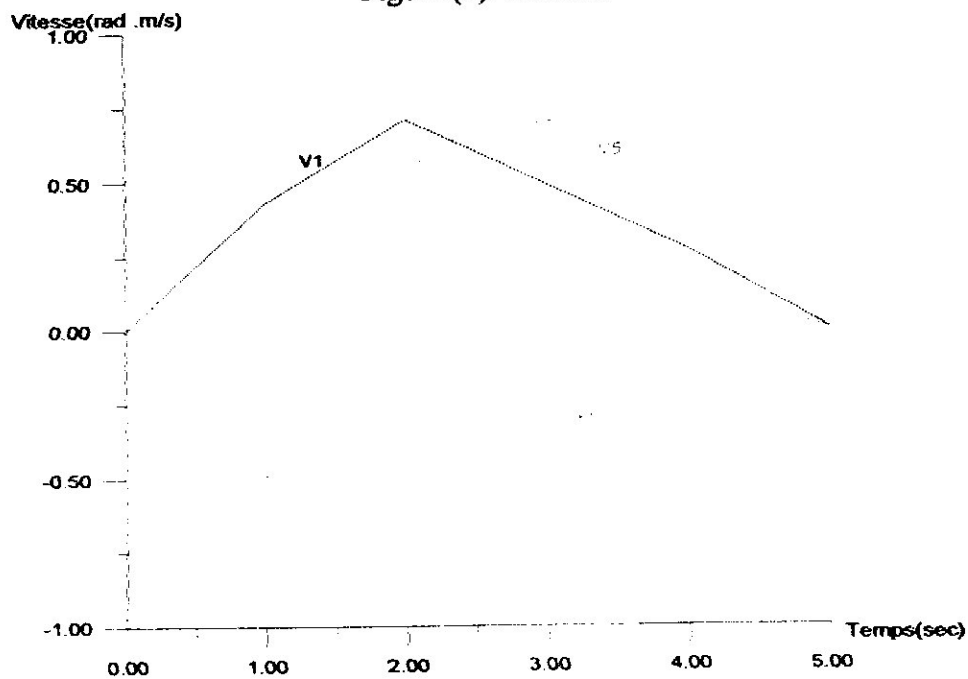


Figure (b) : Vitesse

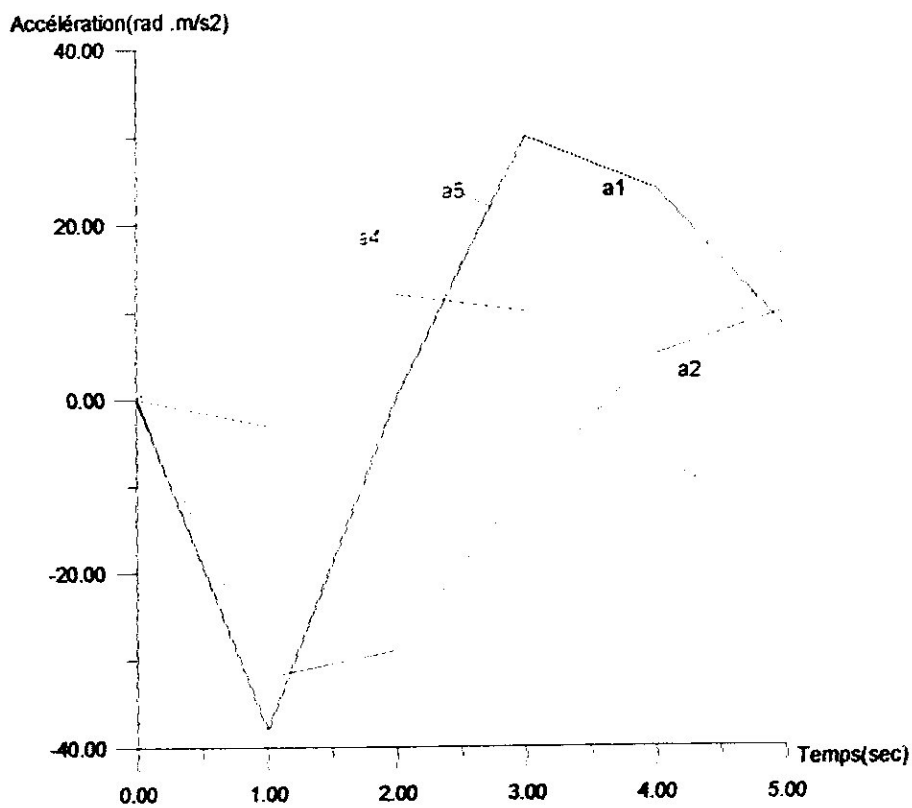


Figure (c) : Accélération

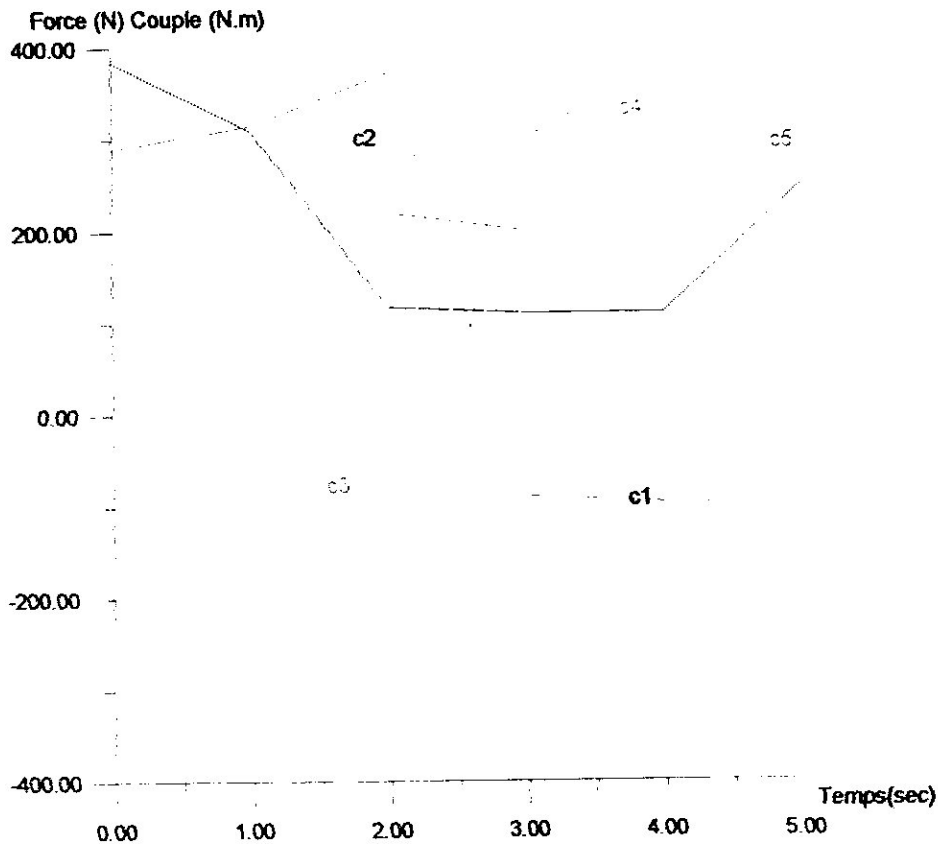


Figure (d) : Forces, couples

Interprétation des résultats :

Un programme de simulation a été finalisé qui englobe les différentes étapes d'étude dont la partie géométrique illustrée par les différentes courbes de position de notre robot manipulateur (Fig : a), un régime adéquat de fonctionnement du robot a été indiquée dont la partie Cinématique (Fig : b) et (Fig : c) et à la fin dont les courbes dynamique (Fig : d), ou on n'a pu déterminer les caractéristiques de vérification des modules à la résistance et la rigidité ainsi que la fiabilité de notre robot.

Ce programme nous permet d'étudier n'importe quels robots industriels pour les différentes stations d'usinage dont le but d'augmenter la productivité de n'importe quel atelier d'usinage flexible.

*Conclusion
Générale*



Conclusion générale

Notre étude a porté sur la modélisation, l'étude et la simulation d'un robot manipulateur type (ALG-M.O-1).

La modélisation des robots est une étape très importante pour la synthèse de n'importe quelle loi de commande, la connaissance du modèle permet, en premier lieu une simulation du robot, en second lieu. ce modèle est nécessaire pour l'implémentation des lois de commande.

La modélisation cinématique directe ou inverse permet de déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal ou de donner la configuration du robot, la méthode utilisée pour la modélisation directe est «La méthode D-H» cette dernière permet d'élaborer une matrice de transformation d'une liaison a une autre.

Les équations qu'on trouve dans la modélisation cinématique inverse sont souvent non linéaires ce qui fait appel a l'une des méthodes numériques, Dans la modélisation dynamique on a utilisé le formalisme D'Alembert -Lagrange mais cette méthode conduit a un énorme calcul.

Avant toute conception de robot, la modélisation est une étape indispensable. En se basant sur les modèles mathématiques obtenus, des programmes informatiques ont été réalisés avec le puissant langage de programmation (visuel fortran), pour servir de support à la réalisation et à la commande en ligne du robot.

En nous conformant à un cahier des charges bien défini, on a pu choisir les actionneurs à utiliser sur chaque articulation et proposer une méthode de calcul de la structure mécanique du robot.

Pour une valorisation de notre étude, nous avons élaboré, comme première application, une simulation sous Java, sous diverses configurations, permettant de visualiser le fonctionnement du robot dans une station Fraisage - Alésage

Nous souhaiterions que notre travail soit complété et amélioré pour pouvoir être utilisé dans la commande des systèmes mécaniques articulés en temps réel et aussi prendre en considération les systèmes à chaîne cinématique fermée ou complexe que peu de chercheurs ont traité vu la complexité du problème.

ANNEXE

Loi Bang-Bang avec palier de vitesse (loi trapèze)

Une autre voie pour générer les consignes est ce qu'on appelle segment linéaire avec portions paraboliques ou bien loi Bang-Bang avec palier de vitesse. Ce type de trajectoire est approprié quand on désire avoir une *vitesse constante le long d'une portion du parcours. Cette trajectoire est telle que la vitesse est rampée en haut à sa valeur spécifique initialement et puis rampée en bas au but (position désirée). Pour accomplir tout cela on spécifie la position désirée en trois phases. La première phase de l'instant t_0 à l'instant t_b est polynomiale quadratique.

À l'instant t_b la position change de forme et devient linéaire. Cela correspond à une vitesse constante. Finalement à l'instant $t_f - t_b$ la trajectoire de position redevient polynomiale quadratique de sorte que la vitesse soit linéaire.

On choisit l'instant t_b de façon à ce que la courbure de position soit symétrique, par convention on suppose que $t_0 = 0$ et $\dot{q}(t_f) = \dot{q}(0) = 0$. Puis entre les instants 0 et t_b on a :

$$q^d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\text{De façon que la vitesse soit } \dot{q}^d(t) = a_1 + 2a_2 t$$

Les contraintes $q(0)=0$ et $\dot{q}(0)=0$ impliquent que

$$a_0 = q_0$$

$$a_1 = 0$$

puis que à l'instant t_b on veut que la vitesse soit égale à une constante donnée

$$\text{on aura : } \dot{q}^d(t) = 2a_2 t_b$$

$$\text{ce qui implique que : } a_2 = \frac{V}{2t_b}$$

par conséquent, la trajectoire requise entre les instants 0 et t_b est donnée par :

$$q^d(t) = q_0 + \frac{V}{2t_b} t^2 = q_0 + \frac{a}{2} t^2$$

$$\dot{q}^d(t) = \frac{V}{t_b} t = at$$

$$\ddot{q}^d(t) = \frac{V}{t_b} = a$$

Où a est l'accélération.

Maintenant, entre les instants t_f et $t_f - t_b$, la trajectoire est un segment linéaire qui correspond à une vitesse constante V .

correspond à une vitesse constante V .

$$q_d(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t = \alpha_0 + Vt$$

symétrie :

$$q_d(t) = \frac{q_0 + q_1}{2}$$

On aura :

$$\frac{q_0 + q_1}{2} = \alpha_0 + V \frac{t_f}{2}$$

Ce qui implique que :

$$\frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{2} = \alpha_0$$

Comme les deux segments coïncident à l'instant t_b on requiert :

$$q_0 + V \frac{t_b}{2} = \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{2} + Vt_b$$

Ce qui donne l'expression :

$$t_b = \frac{q_0 + q_1 - Vt_f}{V}$$

Il à noté qu'on a la contrainte

$$0 < t_b < \frac{t_f}{2}$$

Ce-ci mène à l'inéquation

$$\frac{q_f - q_0}{V} < t_f \leq \frac{2(q_f - q_0)}{V}$$

Autrement dit

$$\frac{q_f - q_0}{t_f} < V \leq \frac{2(q_f - q_0)}{t_f}$$

Par conséquent, la vitesse spécifiée d'oit être entre ces deux limites ou bien le mouvement ne sera pas possible.

La portion de la trajectoire entre $t_f - t_b$ et t_f est maintenant déterminé par des considérations de symétrie. La-trajectoire complète est donnée par

$$q_d(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{a}{2}t^2 & 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{q_f + q_0 - Vt_f}{2} + Vt & t_b < t \leq t_f - t_b \\ q_f - \frac{a}{2}t_f^2 + at_f t - \frac{a}{2}t^2 & t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases}$$



Bibliographie



Bibliographie

- [01] : W. Khalil, e. Dombre, « modélisation, identification et commande des robots, » 2^e^{1e} édition, edition hernies 1999.
- [02]: Glass k., colbaugh r., lim d., seradji h., « real time collision avoidance for redundant manipulators, » iee transaction on rob. And aut. N°11 vol 3, pp 448-457, 1995.
- [03]:Mayorga r. V., « a framework for the path plannong of robot manipulators, » iasted third int. Conf. On rob. And manufacturing, pp 61-66june 1995.
- [04]: Mitsi s. Bouzakis, k. D., mansour g. Optimization of robot links motion in inverse kinematics solution considering collision avoidance and joints limits ,» mach. And mec. Theory n° 30 vol 5 pp 653-663, 1995.
- [05] :Laliherté t. Gosselin c.m, « efficient algorithm for the trajectory planning of redundant manipulators with obstacles avoidance,» ieee international conference on robotics and automation, vol3 pp2.044-2o49, may 1994
- [06]: Cao b., dodds g.i, irwin g.w « an approach to lime optimal, smooth and collision free path planning in a two robot arm cnvironment » robotica, vol 14 pp 61-70 1996 .
- [07] :Kirkanski m., timcenko o. « a geometric approach b manipulateur path planning in 3d space in the presence of obstacles, » robotica, vol 10 pp 321 -328 1992
- [08]: Rimon e. Koditschek d.e, « exact robot navigation using artificial potential functions, » leee transactions on rohotics and automation, vol 8 n°5 ppsol-sl8, october 1992.
- [09]:Gupta k.k., zhu x, « practical global motion planning for many degrees of freedon : a novel approach within sequential framework., » ieee int. Conf. On rob. And aut. Vol 3 pp 2038-2043, may 1994.
- [10] :Kim j-o., khosla p.k « real time obstacle avoidance using harmonic potential functions, » ieee trans. On rob. And aut., vol 8 n°3 pp 338-349june 1992 .
- [11] :Warren c.w, danos j.c., mooring b.w, « an approach to manipulator path planning,» int. Jour. Of rob. Reas., pp 87-95,1989.
- [12] :Hwang y.k., ahuja n., « a potential field approach to path planning, » ieee trans. On rob. And aut. Vol 8 n°1 23-32, february 1992.
- [13] : RENAUD M., "Calcul de la matrice jacobienne nécessaire à la commande coordonnée d'un manipulateur", J. of Mechanism and Machine Theory, Vol. 15(1), 1980, p. 81-91.
- [14] : Marc RENAUD.
Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots manipulateurs Thèse de Docteur d'Etat, Université Paul SABATIER de Toulouse, Septembre 1980.

[15] : YOUSNADJ ALI.

Modélisation et comportement dynamique des chaînes de corps ouverts Thèse de Docteur ingénieur, E.N.S.M, Paris 1983 .

[16] :Farhang Sakhitab-YAZDI .

Contribution à la simulation du comportement dynamique des mécanismes tridimensionnels Application à la conception des robots manipulateurs ;Thèse de Docteur ingénieur, E.N.S.M, Paris 1983.

[17] : LALLEMAND J. P., ZEGHLOUL S.

Robotique Aspects Fondamentaux / Modélisation Mécanique / CAO Robotique / Commande Ed. MASSON Paris Milan Barcelone. 1994.

[18] :S.TARG ;élément de mécanique rationnelle
EDITION .Mir-moscou 1975.

[19] :N.HAMZAOUI ; mécanique rationnelle.
Office des publications.

[20] :TAHER HENI ; mécanique rationnelle.
Office des publications.

Thèses :

PROJET DE FIN D'ETUDE :

- Asservissement visuel d'un bras manipulateur en vue de la saisie d'objets à parties cachées (2003/2004).

présentée par : BERROUILA Larbi et ZIDANI Hakim.

- Positionnement d'un bras manipulateur par rapport à un motif par asservissement visuel (2004) .présentée par : BEGGAS Fares et LAOUBI Lakhdar

- Etude et conception d'un robot manipulateur type ALG-MO-1 des machine outils M'sila1995.présentée par : A.TIAIBA.

- Etude dynamique et avant projet de conception d'un robots de soudage.[ALG.SOUD.1] Département de Mécanique Université de Blida 1997/1998.présentées par :Mohammedi.N Et Mazari. R.

MAGISTER :

- Modélisation des déformations des bras manipulateurs par les concepts de base de la théorie des poutres. Evaluation et compensation des erreurs.

- présentée par :HADDAD MOUSSA ,E.M.P 1999 .

- Contribution a l'exploitation optimale des bras manipulateurs.

présentée par :TAHA CHTTIBI ,E.M.P 2000.

- Logiciel de calcul de robots industrielles application au robot de soudage.1 présentée par HATALI MONIR.

ملخص:

في هذه المنكرة تخصص البحث في الميدان البرمجة للروبوتات الصناعية و دراسة الحركية, الهندسية والميكانيكية وإنجاز محاكاة الروبوت النموذج داخل محطة الخراطة و التفريز. وقمنا بشرح مختصر لإتجاز هذا الروبوت النموذج "روبوت محرك لآلات العدة (الجزائر-أ.ع-1). واقترحنا طريقة لاجروبيج ودالموبرت مع استعمال معاملات دونافي هاتتبرج .

مفتاح الكلمات:

روبوت, نموذج هندسي, حركي, ميكانيكي, برمجة و أنشاء

Résume :

Notre projet de fin d'études a englobé des recherches dans le domaine de la robotique industrielle. Dont les étapes géométrique, cinématiques et dynamique ont été bien étudié. Ainsi que le programme de simulation appliqué sur une station d'usinage Alésage- fraisage au niveau de la S.N.V.I. de Rouiba (ALGER) a été réalisé. Nous avons appliqué les paramètres Denavit et Hartenberg, en utilisant le formalisme de D'Alembert et Lagrange. la conception d'un robot manipulateur Type a été proposée. Et pour clôturer ce travail, une réalisation doit être élaborée, dont le but de fabrication des véhicules industriels flexibles.

Mots-clés :

Robot, modélisation géométrique, cinématique et dynamique, programmation, Conception ...

Abstract:

Our project of end of studies included search in the field of industrial robotics. Whose stages geometrical, kinematics and dynamics were well studied. As well as the simulator applied to a station of machining Boring milling to the level of the S.N.V.I. of Rouiba (ALGER) was carried out. We applied the parameters Denavit and Hartenberg, by using the formalism of D'Alembert and Lagrange. The design of a robot Type manipulator was proposed. And to enclose this work, a realization must be worked out, of which the goal of manufacture of the flexible industrial vehicles

Key words:

Robot, geometrical, kinematic and dynamic modeling, programming, Design...