

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Université de Blida
Institut d'aéronautique**



Dans le cadre de l'obtention d'un diplôme
de technicien supérieur en aéronautique
Option : Structure

Etude de flambement des poutres droites

Réalisé par :

M. Hamzi Hocine

Encadré par :

M. Zebbiche Toufik

Promotion 2004/2005

Remerciements

Je présente mes remerciements les plus sincères au initiateur de ce travail ; mon promoteur *M. Zebbiche Toufik*, qui m'a proposé ce sujet, et qui m'a beaucoup aidé et encouragé tout au long de la réalisation de ce projet.

Je tiens ensuite à remercier mon frère *Abdelhakim* qui grâce à son aide que j'ai pu finalisé ce travail.

J'adresse aussi me remerciement au membre de jury qui ont accepté de juger mon travail.

Mes remerciements va aussi à tou ceux qui ont contribué de près ou de loin à la concrétisation de ce travail. U'il trouvent tous ici l'expression de ma gratitude et ma parfaite considération.

Table de matières

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur le phénomène de flambement	3
1. Définitions	3
2. Notions de stabilité et d'instabilité élastiques	4
3. Cas fondamental (Problème d'Euler)	5
4. Déformation	9
4.1. Amplitude de la déformation	9
4.2. Charge et contrainte après le flambage	11
5. Influence des conditions aux limites	12
6. Différentes méthode de calcule	13
6.1. Méthode de Timoshenko	13
6.1.1 Déformée	14
6.1.2 Application	15
6.2. Méthode par approximation successive	16
6.2.1. Application	17
7. Flambement d'une barre bi-articulée chargée axialement	19
7.1 Flambement élastique - petites déformations	23
7.2 Influence des défauts de rectitude de la barre	26
7.2.1 Chargement axial	26
7.3 Chargement excentré	29
Chapitre 2 : Calculs géométrique	31
1. Introduction	31
2. Moment statique	31
3 centre de gravité	31
4. Moment d'inerties	32
4.1. Translation du repère	33
4.2. Rotation du repère	35



5. Rayon de giration	38
6. Moment d'inertie d'une surface plane	39
7. Moment d'un triangle quelconque	39
8. Modélisation d'une surface d'un profile quelconque par des triangle	41
Chapitre 3 : La compression dan les structure aéronautique	43
1. Les composantes essentielles de l'avion	43
1.1. Le fuselage	43
1.2. La voilure	43
1.3. Les ailerons	44
1.4. Les empennages	44
1.5. Le train d'atterrissage	44
1.6. Le groupe motopropulseur	44
1.7. Les systèmes de pilotage	45
1.8. Les systèmes auxiliaires	45
2. La compression dans les structures aéronautique	46
2.1. La voilure	46
2.1.1. Principaux effort a la voilure	46
2.1.2. Effort exerces par les propulseurs sur la voilure	48
2.1.3. Les éléments subissant les plus grand charge de compression dans la voilure..	49
2.1.4. Exemple de voilure A300	50
2.2. Le fuselage	52
1.3.1. Efforts appliques sur le fuselage	52
1.3.2. Les éléments d'un fuselage	54
2.3. Généralités sur les atterrisseur	57
2.3.1. rôles du train d'atterrissage	57
2.3.2. Les éléments constituent d'un train d'atterrissage	57
2.3.3 Implantation du train d'atterrissage	58
2.3.4. Efforts supportes par le train d'atterrissage	59
2.3.5. Deception du train principal (exemple BOEING 737 - NG)	59
2.3.6. Deception du train avant (exemple BOEING 737 - NG).....	61
2.3.6.1. Attaches du train du nez.....	61

2.3.6.2. Accessoires du train avant.....	62
3. Conclusion.....	65
Chapitre 4 : Résolution numérique des équations différentielles	66
1. Introduction	66
2. Définitions	66
3. Méthodes d'intégration à pas séparé	67
3.1 Introduction	67
3.2 Méthode d'Euler	68
3.3 Méthodes RK implicites à un point	68
3.4 Méthodes RK explicites à 2 points intermédiaires	69
3.5 Méthodes RK explicites à 3 points intermédiaires	69
3.6 Formule générale des méthodes RK explicites	70
4. Méthode d'intégration à pas variables	70
4.1 Introduction	70
5. Méthodes de Runge-Kutta "embarquées"	71
6. Conclusion	72
Chapitre 5 : Conception de programmes	73
1. Introduction	73
2. Les Cas d'utilisations	73
3. Calcule de la charge critique	74
3.1. Méthode d'Euler	74
3.2. Méthode itérative	74
4. Résolution numérique des équations différentielles	76
4.1 Méthode d'Euler	76
4.2 Méthode Runge Kutta d'ordre 4	78
5. Description de l'interface	80
5.1 Calcul de la charge critique	80
5.2 Résolution d'équation différentielles	81
6. Interprétation des résultats sur un exemple.....	82
Conclusion générale	83

Table des figures

Figure 1.1. flexion d'une poutre encastree	3
Figure 1.2. Une poutre elancee ayant une fleche initiale δ_0 au point B et soumise a deux forces opposees N	4
Figure.1.3. Stabilité et instabilité élastique	4
Figure.1.4. Poutre soumise a une charge de compression excentree N	6
Figure.1.5. les trois premier mode de flambement.....	8
Figure.1.6. poutre soumise a deux charges opposees.....	9
Figure. 1.7. Trois allures theoriques de la deformee.....	10
Figure.1.8. Charge et contrainte apres le flambage.....	11
Figure.1.9.Charge critique d'une poutre selon deférentes conditions aux limites.....	12
Figure.1.10. poutre soumise a une charge de compression.....	14
Figure.1.11. poutre prismatique, articulé en A et appuyee en B	17
Figure.1.12. Equilibre.....	19
Figure.1.13. Flambement élastique d'une barre bi-articulée.....	21
Figure.1. 14.influence de la plasticité.....	22
Figure.1.15. Mode de flambement.....	24
Figure.1.16. hypothese des petits déplacements.....	25
Figure .1. 17.Courbe charge déplacement d'une barre bi-articulé selon le chargé du défaut de rectitude.....	26
Figure. 1. 18. détermination de P_c et a	29
Figure.1.19.Barre sollicité par une charge excentree.....	30
Figure .2.1 Détermination du moment statique.....	31
Figure 2.2 présentation du centre de la gravité.....	32
Figure .2.3. Moment d'inertie par rapport a l'axe (Δ).....	32
Figure .2.4.Moment polaire.....	33
Figure .2.5.Application de théorème de HYGENS.....	33
Figure .2.6 L'application du théorème de HYGEN pour le produit d'inertie.....	34
Figure.2.7. présentation des axes sur la plaque.....	35
Figure. 2.8. les cas possible de la rotation de repère.....	37
Figure .2.9. Rayon de gyration	38

Figure.2.10.Preentation de la plaque rectangulaire	38
Figure .2.11.coordonnée des noeuds d'un triangle.....	41
Figure .2.12. Section formée de triangle.....	42
Figure 3.1. Efforts appliques a la voileure.....	46
Figure. 3.2. L'avion au sol.....	47
Figure. 3.3. L'avion en vol.....	47
Figure. 3.4. L'évolution de la charge R sur la demi-voilure.....	48
Figure. 3.5. Efforts exerces par les propulseurs sur la voileure.....	49
Figure. 3.6. Différent type de longeron.....	49
Figure. 3.7. Raidisseur.....	50
Figure.3.8. Voilure A300.....	51
Figure. 3.9. Effort applique sur fuselage au sol.....	52
Figure. 3.10. Effort applique sur fuselage en vol.....	52
Figure. 3.11. Efforts dus à la pressurisation.....	53
Figure. 3.12. Zone soumise au flambage.....	53
Figure. 3.13. Une coque soumise aux différent compression.....	54
Figure. 3.14. Compression dus au braquage gouverne.....	54
Figure. 3.15. Fuselage A300 section 14.....	56
Figure. 3.16. Implantation du train d'atterrissage.....	58
Figure. 3.17. Description générale des trains principaux.....	60
Figure. 3.20. Train d'atterrissage avant du <i>BOEING737-NG</i>	64
Figure. 3.21.Train d'atterrissage avant de A300.....	65
Figure 5.1. Cas d'utilisation.....	73
Figure 5.2. Schéma Fonctionnel du module du calcul pour la méthode d'Euler.....	74
Figure 5.3. Schéma Fonctionnel du module du calcul pour la méthode itérative.....	74
Figure 5.4. Organigramme de la méthode itérative.....	75
Figure 5.6. Schéma Fonctionnel du module du calcul de l'équation différentielle.....	76
Figure 5.7. L'organigramme de la méthode d'Euler pour la résolution de équation différentielle	77
Figure 5.8. L'organigramme de la méthode de Runge Kutta pour la résolution d'équation différentielle.....	79
Figure 5.9. La fenêtre de calcul de la charge critique.....	80
Figure 5.10. La fenêtre de résolution d'équation différentielle.....	81

Introduction générale

Depuis l'apparition de la révolution industrielle, l'homme se trouvait attaché aux matériaux. Pour cette raison il a voulu étudier la nature de ces matériaux, leur comportement, et surtout leur résistance.

La résistance des matériaux (ou RDM) est une science théorique qui étudie le comportement des corps solides sous l'action des charges appliquées, et dont le principe fondamental est celui de la mécanique, à savoir qu'un corps est en équilibre, si la résultante des forces est celle des moments qui lui sont appliqués sont nuls.

Elle donne des résultats acceptables lorsque la géométrie des pièces à étudier est simple car rarement rencontré en pratique, s'avère très insuffisante lorsque les pièces prennent des formes de plus en plus complexes, aussi elle ignore l'effet perturbateur qu'apporte une discontinuité ou un changement brusque de géométrie sur la répartition des contraintes.[3]

L'un des phénomènes étudiés dans la résistance des matériaux est le flambement. Le flambement est un phénomène d'instabilité d'une construction, entraînant rapidement la ruine de celle-ci. Il se caractérise par la déformation excessive des éléments de la structure sous l'action de charges trop importantes. La déformation excessive fait apparaître des excentricités des charges, donc des sollicitations en moments supplémentaires, que la structure ne peut encaisser au delà d'un certain seuil [1]. La plus part des structures constituant l'avion sont des matériaux qui peuvent être soumises à des charges de compression qui peuvent engendrer le flambement. En réalité ce phénomène ne peut être existé car le constructeur conçoit ces structures de façon que la charge critique de ces dernières soit la plus grande possible par rapport à la charge qu'ils peuvent subir.

Notre travail consiste à présenter les différentes méthodes pour le calcul de la charge critique, et plus précisément dans des poutres droites, et de concevoir un petit outil qui le réalise. Puisque le calcul de la charge critique revient à résoudre des équations différentielles, notre outil doit donner la possibilité de résoudre ces équations numériquement pour permettre à notre outil à se développer afin prendre en compte les structures complexes.

Ce mémoire commence par introduire les notions d'instabilité et du flambement, et présenter les différentes méthodes du calcul de la charge critique.

Le calcul de la charge critique nécessite la connaissance de quelques caractéristiques géométriques de la structure étudiée, donc un chapitre de calcul géométrique sera présenté.

En se spécialisant dans le domaine d'aéronautique, différentes structures constituant l'avion peuvent être soumises à la compression qui peut engendrer le flambement, ces structures seront étudiées dans le troisième chapitre.

Le calcul de la charge critique revient à résoudre une équation différentielle. Cette dernière peut être résolue analytiquement dans le cas des structures simples, mais pour des structures plus complexes il est difficile voir impossible de trouver la solution analytiquement. La résolution numérique présente un bon moyen pour le faire. Pour cette raison un chapitre consacré à la résolution numérique des équations différentielles sera exposé.

Le dernier chapitre est celui qui contient la conception et la réalisation de notre modeste outil et la présentation de quelques résultats.

Finalement une conclusion générale va conclure notre travail en faisant un survol de tous qu'on a présenté et donnant quelques perspectives.

Chapitre 1
Généralités sur le flambement
des poutres droites

1. Définitions

Les déformations provoquées par les forces extérieures étaient très petites. Sauf pour les systèmes hyperstatiques, elles avaient une influence nulle ou négligeable sur les efforts intérieurs. Il s'agissait de systèmes *élastiquement stables* pour lesquels les grandes déformations ne se produisent qu'après le dépassement de la limite élastique du matériau, dans l'ensemble ou dans certaines parties du système [2].

Il arrive cependant qu'un système subisse, tout en restant stable, de grandes déformations sans que les contraintes n'atteignent nulle part la limite élastique

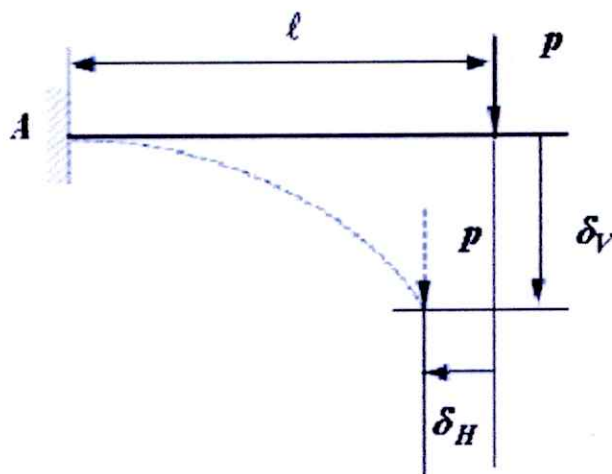


Figure 1.1. flexion d'une poutre encadrée [2]

Le système est stable car la déformation a pour conséquence une diminution du moment de flexion.

Dans l'exemple de la **figure.1**. Le moment de flexion au point A passe ainsi de $M_A = P\ell$ à $M_A = P(\ell - \delta_H) < M_A$

Pour un tel cas, il est évident que l'influence des déformations sur les efforts intérieurs ne doit plus être négligée.

D'autres systèmes sont par contre *élastiquement instables*. A partir d'un certain niveau des forces extérieures et sans pour autant que les contraintes n'aient encore atteint la limite élastique, ils subissent de grandes déformations entraînant une augmentation des efforts intérieurs et généralement la ruine du système.

A partir d'une certaine valeur des forces N , appelée *charge critique*, la flèche augmente brusquement, ce qui provoque une augmentation du moment de flexion en B qui passe de $MB = N\delta_0$ à $M = N\delta > MB$.

Ce phénomène d'*instabilité élastique*, entraînant la destruction du système, est appelé *flambage* ou *flambement*. [2].

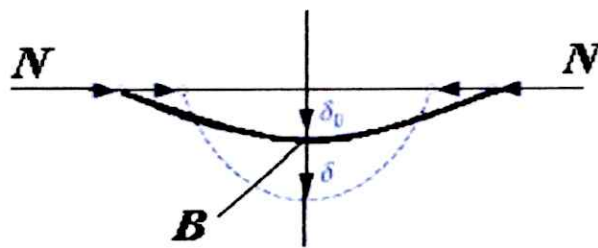


Figure 1.2. Une poutre élancée ayant une flèche initiale δ_0 au point B et soumise à deux forces opposées N . [2]

2. Notions de stabilité et d'instabilité élastiques

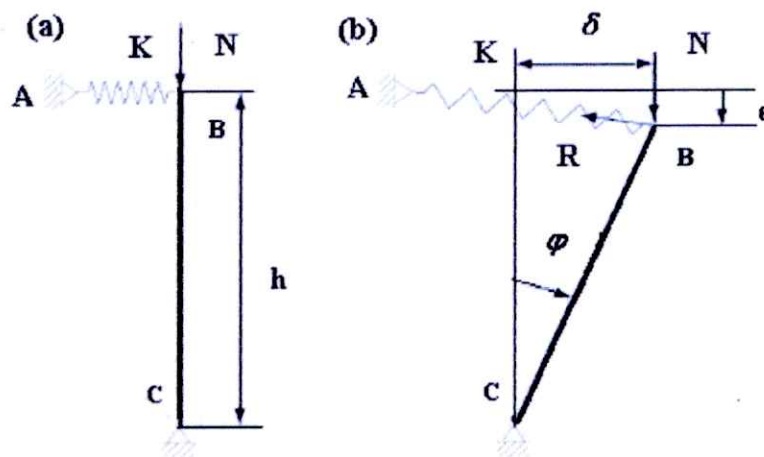


Figure.1.3. Stabilité et instabilité élastique [2]

Pour un petit déplacement horizontal δ_0 , le ressort fournit une force de rappel $R = K\delta$, et la barre tourne d'un petit angle. φ

$$MC = hR - \delta N = \delta(Kh - N)$$

Etudions la stabilité du système en calculant le moment des forces R et N au point C .

$$\rightarrow \text{Stabilité du système} \Rightarrow MC = hR - \delta N = \delta(Kh - N)$$

\Rightarrow Trois possibilités se présentent

- $N < Kh$ ($MC > 0$) le système revient à sa position initiale;
- $N > Kh$ ($MC < 0$) le système s'effondre;
- $N = Kh$ ($MC = 0$) le système est instable,

Il s'effondre quand même car la plus petite imperfection géométrique suffit pour le faire quitter sa position initiale (la force $N = kh$ est la charge critique du système).

Le résultat précédent, basé sur l'équilibre des moments au point C , peut être retrouvé par comparaison du travail V fourni par la force extérieure à l'énergie U emmagasinée par le système

$$V = tN = h(1 - \cos\varphi)N$$

$$= \frac{1}{2}h\varphi^2 N$$

$$U = \frac{1}{2}R\delta = \frac{1}{2}K\delta^2$$

$$= \frac{1}{2}k(h \sin \varphi)^2 = \frac{1}{2}Kh^2\varphi^2$$

Le système est alors stable, s'effondre ou est instable selon que l'énergie U est supérieure, inférieure ou égale au travail V (théorème de Lejeune-Dirichlet). [2]

3. Cas fondamental (*Problème d'Euler*) :

Considérons une poutre soumise à une charge de compression excentrée N , Comme le montre la **figure.4**. Nous supposons que la longueur ℓ est grande en comparaison des dimensions linéaires de la section.

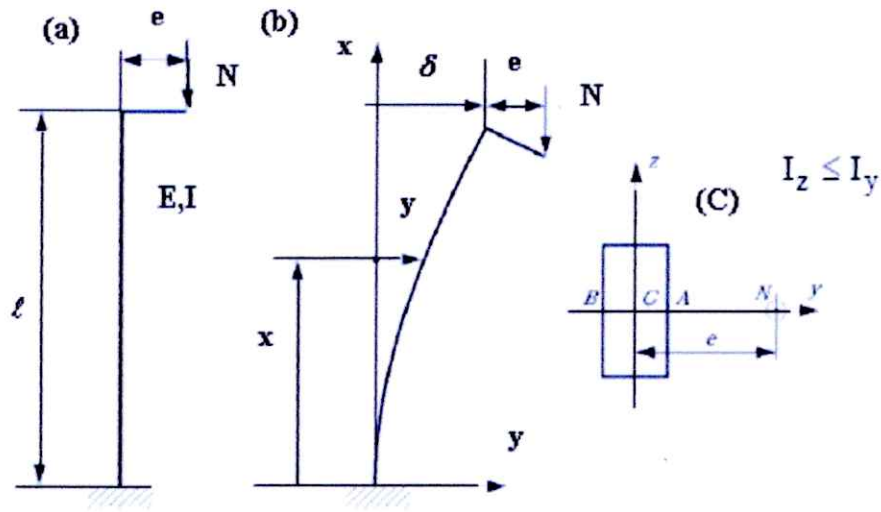


Figure.1.4. Poutre soumise à une charge de compression excentrée N. [2]

Le cas de charge considéré est un cas particulier de la flexion composée mais, la poutre étant élancée, il n'est plus possible de négliger la déformation dans l'expression du moment de flexion.

Soit $M = -N(\delta + e - Y)$ le moment de flexion, nous avons :

$$Y'' = -\frac{M}{EI}$$

En remplaçant M par sa valeur on obtient :

$$Y'' = \frac{N}{EI}(\delta + e - Y)$$

Posant : $K^2 = \frac{N}{EI}$ on obtient : $Y'' + K^2 Y = K^2(\delta + e)$

C'est une équation différentielle de deuxième ordre sa solution est de la forme :

$$Y = C_1 \sin KX + C_2 \cos KX + (\delta + e)$$

$$Y'(x = 0) = C_1$$

$$Y(x = 0) = C_2 + (\delta + e)$$

$$Y = (\delta + e)(1 - \cos K\ell)$$

$$Y(x = \ell) = (\delta + e)(1 - \cos K\ell) = \delta$$

$$\delta = \frac{e}{\cos K\ell} (1 - \cos K\ell) \quad \rightarrow \quad \boxed{Y = \frac{e}{\cos K\ell} (1 - \cos K\ell)}$$

On remarque que la flèche δ n'est plus une fonction linéaire de la charge N et qu'elle tend même vers l'infini quand le dénominateur du membre droit de l'égalité s'annule, c'est-à-dire pour

$$\cos K\ell = 0 \quad \rightarrow \quad K = \frac{\pi}{2\ell} (1 + 2n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$K^2 = \frac{N}{EI}$$

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} (1 + 2n)^2$$

$$Y = \frac{e}{\cos Kx} (1 - \cos Kx)$$

(La déformée est une sinusoïde avec la demi-longueur d'onde)

$$\rightarrow \ell_0 = \frac{\pi}{K} \quad K = \frac{\pi}{2\ell} (1 + 2n) \quad \ell_0 = \frac{\pi}{K} = \frac{2}{1 + 2n} \ell$$

$$\rightarrow \boxed{N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}} \text{ Formule d'Euler (Charge critique)}$$

D'après [3] on peut distinguer trois cas :

- $N < N_c$: la poutre primitivement fléchie, se redresse et la flèche disparaît complètement (stabilité)
- $N = N_c$: la poutre conserve la flèche qu'on lui a donné, flèche pendante de N_c et qu'un faible effet transversal suffit à modifier (cas limite de l'équilibre indifférent)
- $N > N_c$: la flèche augmente jusqu'à la rupture ; il n'y a pas d'équilibre possible (Instable)

Exemple :

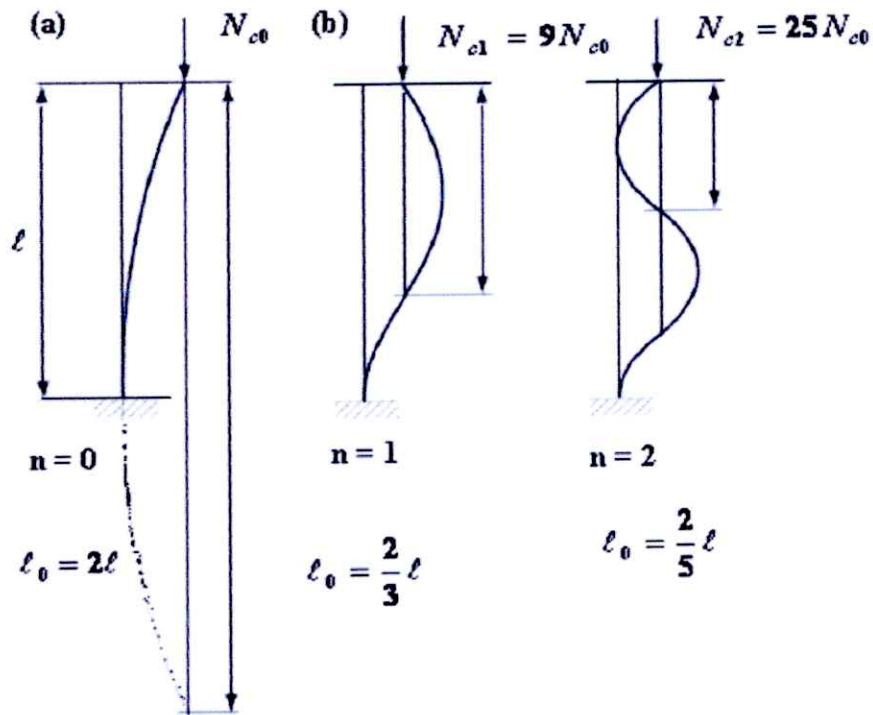


Figure.1.5. les trois premier mode de flambement. [2]

$$\ell_0 = \frac{\pi}{K} = \frac{2}{1+2n} \ell$$

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

Pour :

$$n = 0; \ell_0 = 2\ell, N_{c0} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

$$n = 1; \ell_0 = \frac{2\ell}{3}, N_{c1} = 9N_{c0}$$

$$n = 2; \ell_0 = \frac{2\ell}{5}, N_{c2} = 25N_{c0}$$

Remarques

- ❖ Seule la première charge critique N_{c0} a une signification physique. Dès qu'elle est atteinte, la poutre subit une très grande déformation et se rompt ou se déforme de façon irréversible car les contraintes dépassent la limite élastique du matériau.
- ❖ Les autres charges critiques sont donc inaccessibles.
- ❖ Une théorie plus fine du problème permettrait de montrer que seule la première charge critique entre en ligne de compte.

4. Déformation**4.1. Amplitude de la déformation**

Quand la charge N est inférieure à la charge critique, la déformation prend la valeur donnée par la

relation $Y = \frac{e}{\cos K\ell} (1 - \cos Kx)$ Proportionnelle à l'excentricité, e .

$N_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$ la charge critique n'est pas fonction de e . Il est dès lors intéressant de rechercher

la charge critique sans faire intervenir l'excentricité.

Choisissons, comme poutre, un autre cas, comme celui d'une poutre soumise à deux charges opposées.

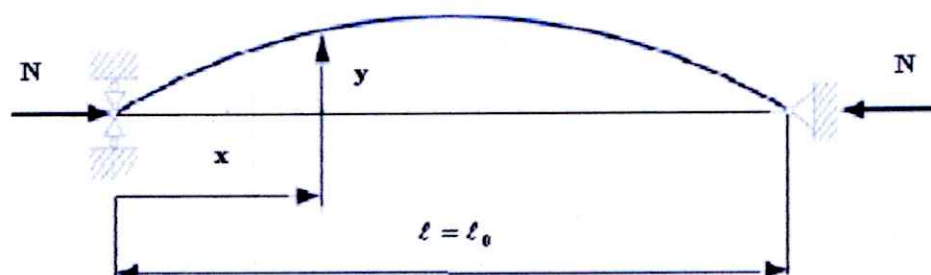


Figure.1.6. poutre soumise à deux charges opposées [2]

$$M = YN$$

$$Y'' + K^2 Y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} Y'' = -\frac{M}{EI} \\ K^2 = \frac{N}{EI} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx \\ Y(x=0) = 0 = C_2 \\ Y(x=\ell) = 0 = C_1 \sin K\ell \end{array}$$

➤ Si la constante C_1 s'annule, ($C_1 \neq 0$) la déformation est nulle partout et la poutre garde sa position initiale

➤ Si le produit $K\ell$ est égal à $n\pi$ ($K\ell = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)), la charge est critique et

satisfait la relation
$$\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} = \frac{N_C}{EI}$$

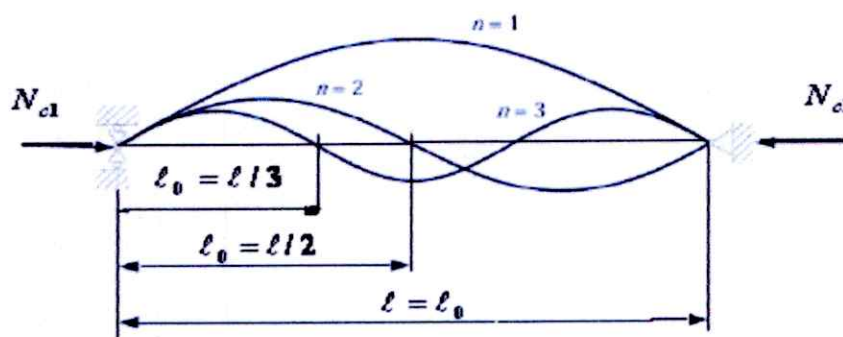


Figure. 1.7. Trois allures théoriques de la déformée [2]

La figure.7. illustre trois allures théoriques de la déformée :

- $n = 1$; $l_0 = l$, N_C adopte la valeur fondamentale $N_{C1} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$
- $n = 2$; $l_0 = \frac{\ell}{2}$, la charge critique vaut $N_{C2} = 4N_{C1}$
- $n = 3$; $l_0 = \frac{\ell}{3}$ Et la charge critique prend la valeur $N_{C3} = 9N_{C1}$

Comme précédemment – et pour les mêmes raisons –, seule la première charge critique N_{C1} est à considérer

$$\text{charge critique } N_C = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

$$\text{déformation } Y(x) = C_1 \sin Kx$$

$$Kl = n\pi \quad (= 1, 2, 3, \dots)$$

Problèmes

- Le coefficient C_1 est indéterminé
- Si la charge critique dépasse légèrement N_C on a

$$Kl \neq \pi \rightarrow C_1 \sin Kl = 0 \rightarrow \sin Kl \neq 0 \rightarrow C_1 = 0$$

⇒ Pas de déformation

- le problème vient du fait que l'on considère des petites déformations $Y'' = -\frac{M}{EI}$
- on peut éviter ce problème en considérant l'équation : $\frac{1}{\rho} = \frac{Y''}{(1 + Y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

4.2. Charge et contrainte après le flambage

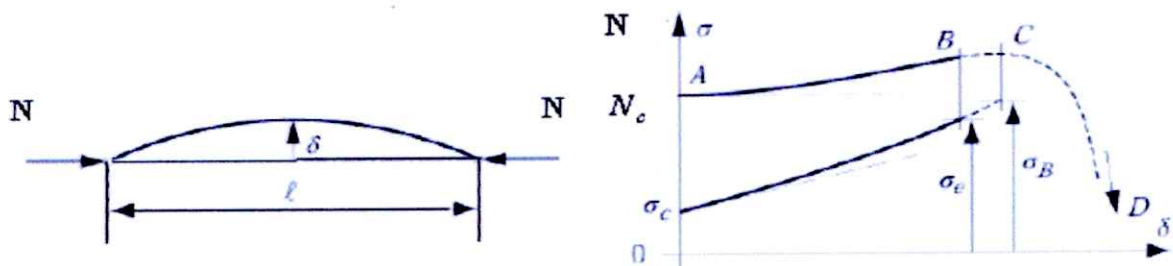


Figure.1.8. Charge et contrainte après le flambage [2]

- au point *A*, la charge atteint la valeur critique et l'instabilité démarre;
- sur la partie *AB*, la charge augmente très lentement, mais l'amplitude de la déformation s'accroît très rapidement;
- au point *B*, la contrainte de flexion dépasse la limite élastique σ_e du matériau;
- au point *C*, la poutre atteint sa résistance maximale σ_B ;
- sur le tronçon *CD*, la charge diminue et la poutre s'effondre.

5. Influence des conditions aux limites

La figure.1.9 illustre 6 différents types de conditions aux limites avec la forme propre correspondant à la déformée d'une poutre juste après l'amorce du flambement. Cette figure donne également le chargement critique associé à chacune des situations. Selon cette figure et les renseignements qui y sont donnés, il est clair que les conditions aux limites ont une influence sur le chargement critique (N_c) ainsi que sur le mode de flambement. [4]

$$\text{Critique charge } N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$$

ℓ_0 Et la distance entre deux points d'inflexion de la déformation

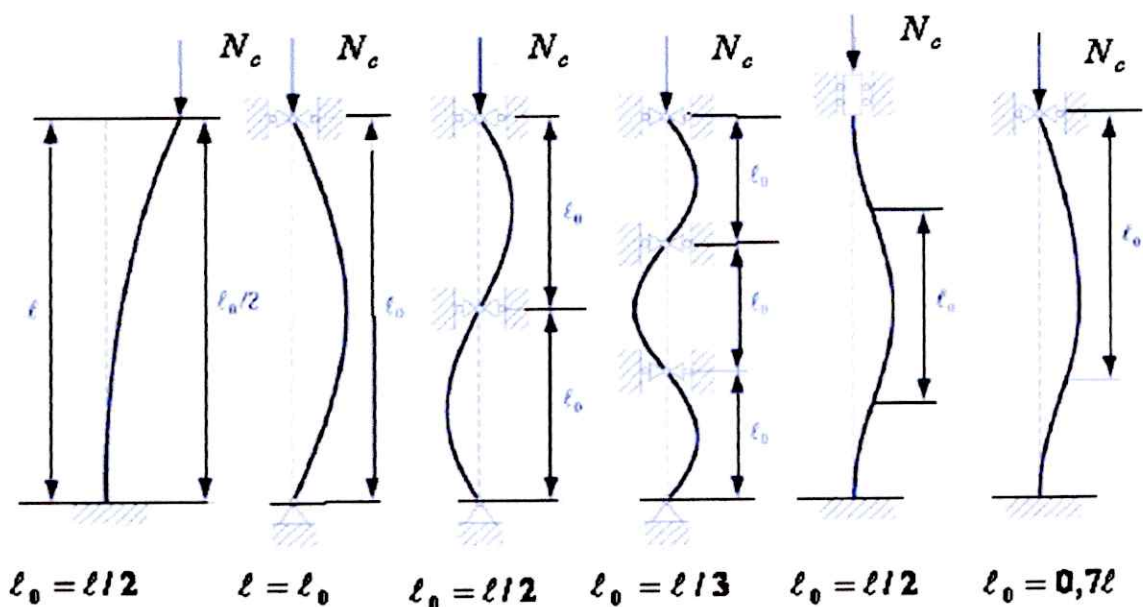


Figure.1.9. Charge critique d'une poutre selon différentes conditions aux limites [2]

6. Différentes méthode de calcule

6.1. Méthode de Timoshenko

Dans le cas particulier d'une poutre droite comprimée par une charge N , la *méthode de Timoshenko* consiste à :

- choisir une déformée convenable, satisfaisant aux conditions aux limites du problème;
- calculer le déplacement t de la force extérieure N , correspondant à cette déformée;
- déterminer l'énergie de déformation U du système, correspondant également à la déformée choisie.

Le système est alors instable si le travail $V = t N$ de la force extérieure est égal à l'énergie de déformation U .

La charge critique correspondante ayant pour valeur : $N_c = \frac{U}{t}$

- La méthode présente l'avantage principal d'éviter l'intégration de l'équation différentielle du système.
- Par contre, la déformée choisie étant arbitraire, la charge critique trouvée n'est qu'approximative. Elle est toujours supérieure à la valeur exacte car la déformée réelle prend spontanément la forme qui rend minimale la charge critique.
- Par conséquent, si l'on choisit successivement plusieurs déformées, il faudra retenir celle qui donne la plus faible charge critique.

6.1.1 Déformée

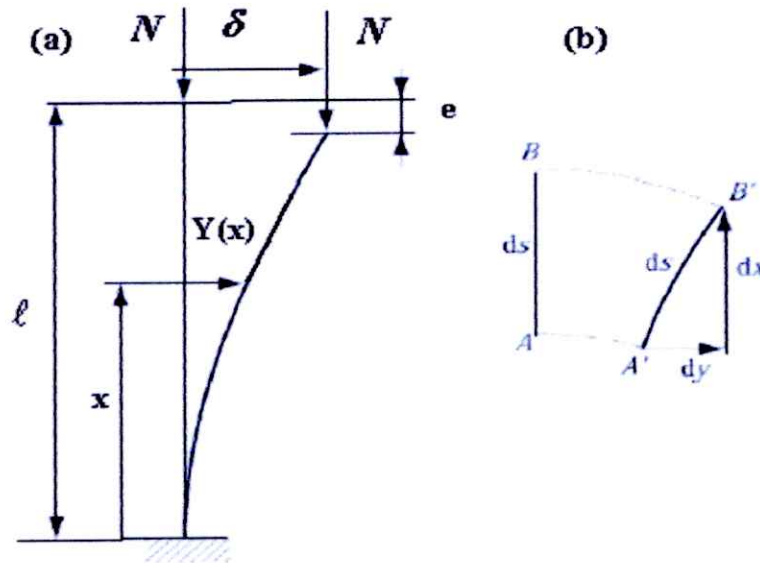


Figure.1.10. poutre soumise à une charge de compression [2]

On néglige le raccourcissement dû à la compression

$$dt = ds - dx = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} - dx = dx \left[(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

On a

$$(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} y'^2$$

Puis

$$dt \approx dx \left[(1 + \frac{1}{2} y'^2) - 1 \right] = \frac{1}{2} y'^2 dx \quad (\text{Énergie}) \Rightarrow t = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx$$

En négligeant l'influence de la compression et de l'effort tranchant

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \\ y'' &= -\frac{M}{EI} \end{aligned} \right\} U = \frac{EI}{2} \int_0^l y''^2 dx$$

$$N_c = \frac{U}{t} = \frac{\int_0^{\ell} y'^2 dx}{\int_0^{\ell} y^2 dx}$$

Commentaires :

- La formule conduit à la charge critique exacte lorsque la fonction y coïncide avec la solution analytique du problème de flambage donné.
- Dès lors que la déformée retenue dans la méthode de Timoshenko est généralement une fonction d'un ou plusieurs paramètres

$$Y(x) = Y(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p) \text{ Ou les } \alpha_i (i = 1, 2, \dots, p)$$

la charge critique résultante est également fonction de ces paramètres

$$N_c = N_c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$$

- Comme la meilleure valeur de la charge critique est la plus basse, il est possible d'améliorer la technique de Timoshenko en minimisant N_c par rapport aux différents paramètres

$$\frac{\partial N_c}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial N_c}{\partial \alpha_2} = 0, \dots, \frac{\partial N_c}{\partial \alpha_p} = 0$$

En retenant des p extrema de charges critiques tirés de ces conditions celui qui correspond au plus petit minimum.

6.1.2 Application :

Choisissons d'abord comme déformé la courbe exacte (**figure. 10**)

$$Y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell}\right)$$

$$\text{La première dérivée : } Y' = \frac{\pi \delta}{2\ell} \sin \frac{\pi x}{2\ell}$$

$$\text{La deuxième dérivée : } Y'' = \frac{\pi^2 \delta}{4\ell^2} \cos \frac{\pi x}{2\ell}$$

On a $t = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} y'^2 dx$ on remplace Y' par sa valeur

$$t = \frac{\pi^2 \delta^2}{8\ell^2} \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{\pi^2 \delta^2}{16\ell}$$

Et on a aussi $U = \frac{EI}{2} \int_0^{\ell} y''^2 dx$ on remplace Y'' par sa valeur

$$U = \frac{EI\pi^4 \delta^2}{32\ell^4} \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi x}{2\ell} dx = \frac{EI\pi^4 \delta^2}{64\ell^3}$$

A la fin on trouve

$$N_c = \frac{U}{t} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} \quad \text{Valeur exacte}$$

6.2 .Méthode par approximation successive :

L'obtention de l'équation différentielle de la déformation est en général assez simple : c'est sa résolution qui présente souvent des difficultés.

Une méthode itérative de résolution approchée consiste à se donner a priori une déformée (φ_0) (raisonnable) c'est -à- dire notamment satisfaisant aux condition aux limites, et définie à un coefficient multiplicatif près.

La connaissance de cette courbe (φ_0) permet alors d'obtenir une détermination approchée (V_0) du visseur (V) dans la section droite courante (S), d'où une nouvelle déformée (φ_1).

En itérant ce cycle d'opérations, on obtient une suite de courbes : (φ_0), (φ_1), (φ_2)... qui converge vers la déformée réelle (φ). DE même, la suite des valeurs approchées : (V_0), (V_1), (V_2)... du visseur, tend vers sa valeur exacte (V).

Nous ne développerons par ici une étude mathématique rigoureuse de la convergence de cette méthode pas approximations successives, étude qui nous mènerait trop loin .S' il le désire, le lecteur pourra se reporter pour cela aux ouvrages spécialisé d'analyse. [3]

6.2.1. Application :

Reprenons le cas fondamental d'Euler d'une poutre prismatique, articulé en **A** simplement appuyée en **B**. On donne à la poutre, en son milieu une flèche α et l'on cherche l'intensité N_C .

De la force de compression capable de maintenir cette flèche.

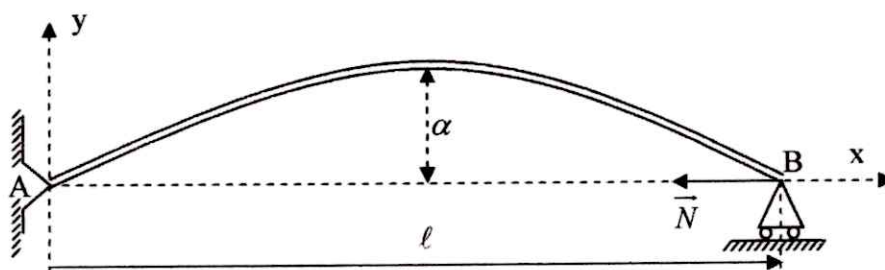


Figure.1.11. poutre prismatique, articulé en A et appuyée en B [3]

Une déformation compatible avec les condition aux limites est l'arc de courbe (φ_0), d'équation

$$Y_0(x) = 4\alpha \frac{x(\ell - x)}{\ell^2}$$

Dans la section droite courante, le moment de flexion vaut alors :

$$M_{z0} = -Y_0 N = -4\alpha \frac{x(\ell - x)}{\ell^2} N$$

La déformation (φ_1) a pour équation $Y = Y_1(x)$

$$\frac{d^2 Y_1}{dx^2} = \frac{M_{z0}}{EI_z} = -4\alpha \frac{N}{EI_z} \frac{x(\ell - x)}{\ell^2}$$

D'où l'on tire par double intégration, et compte tenu des conditions aux limites :

$$Y_1 = \frac{N\ell\alpha}{3EI_z} x \left(1 - 2 \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right)$$

En écrivant que la flèche maximale de (φ_1) égale α , on obtient :

$$Y_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \alpha = \frac{5}{48} \frac{N\ell^2\alpha}{EI_z}$$

D'où une première charge critique approchée :

$$N_1 = \frac{48}{5} \frac{EI_z}{\ell^2} = 9,6 \frac{EI_z}{\ell^2}$$

Valeur inférieure de 2,7 % à valeur exacte N_c que l'on sait être égale à :

$$\frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2} \approx 9,86 \frac{EI_z}{\ell^2}$$

Répetons le cycle, c'est à dire recherchons une déformation (φ_2) à partir de (φ_1) .

On part pour cela de l'équation différentielle, qui s'écrit ici :

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{M_{z1}}{EI_z} = -y_1 \frac{N}{EI_z}$$

C'est à dire :

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{\ell\alpha}{3} \left(\frac{N}{EI_z} \right)^2 x \left(1 - 2 \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right)$$

Après deux intégrations et compte tenu des conditions aux limites, on trouve :

$$y_2(x) = \frac{\ell^3\alpha}{30} \left(\frac{N}{EI_z} \right)^2 x \left(1 - \frac{5}{3} \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^4}{\ell^4} - \frac{1}{3} \frac{x^5}{\ell^5} \right)$$

Enfin, l'égalité des flèches maximales donne :

$$y_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = y_2\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

Soit :

$$\frac{5}{48} \alpha \frac{N\ell^2}{EI_z} = \frac{61}{2.30.96} \alpha \left(\frac{N\ell^2}{EI_z} \right)^2$$

Et l'on tire une seconde charge critique approchée :

$$N_2 = \frac{600}{61} \frac{EI_z}{\ell^2} \approx 9,836 \frac{EI_z}{\ell^2}$$

Valeur inférieure de 0,35 % à la valeur exacte N_C

Cet exemple montre donc que la convergence est très rapide, puisqu'on obtient une précision de 0,35 % dès la deuxième itération

7. Flambement d'une barre bi-articulée chargée axialement

Pour les fins du laboratoire et des discussions qui suivent, les hypothèses suivantes sont admises :

- la barre est constituée d'un matériau dont le comportement est linéaire élastique,
- la barre est de section uniforme le long de son axe longitudinal,
- la barre est parfaitement rectiligne et sans contrainte initiale lorsque non chargée,
- si l'excentricité du chargement est considérée nulle alors le chargement axial est appliqué le long de l'axe longitudinal de la pièce,
- les conditions d'appui de la pièce sont considérées parfaites : rotules parfaites et encastrement parfaits.

Dans les paragraphes qui suivent, le comportement d'une barre bi-articulée sous sollicitation axiale est examiné. En considérant l'équilibre *flexionnel* de la barre **figure.1.12** à une certaine distance x d'une de ses extrémités, on obtient

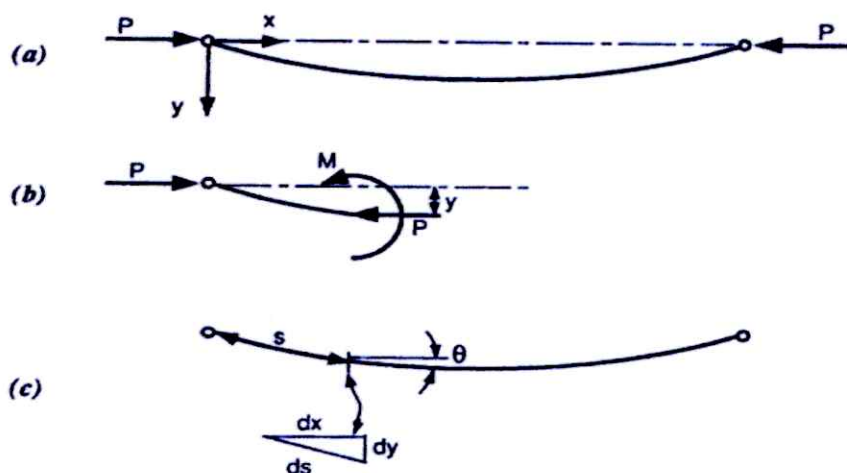


Figure.1.12. Equilibre [4]

$$M = P y \quad (1)$$

et sachant que le moment est proportionnel à la courbure de la barre alors

$$\text{Courbure} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

ainsi l'équation (1) devient

$$EI \frac{d\theta}{ds} + P y = 0 \quad (3)$$

En différenciant par rapport à s , l'équation (3) devient

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \frac{dy}{ds} = 0 \quad (4)$$

Puisque $\sin \theta = \frac{dy}{ds}$ alors, l'équation (4) devient

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Finalement, l'équation (5) peut être résolue pour obtenir la valeur de l'angle θ en fonction de la coordonnée *curviligne* « s ». L'objectif ici n'est pas de résoudre cette équation mais plutôt d'examiner son allure lorsqu'on l'exploite sous forme d'une courbe non-dimensionnelle chargement-déplacement telle qu'elle est présentée à la **figure.1.13**. Dans cette figure, α représente l'angle formé à l'extrémité gauche de la barre, L la longueur initiale de la barre et Δ , la flèche au centre de la barre. P représente le chargement axial tandis que N_c représente un

chargement caractéristique égal à $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ [4]

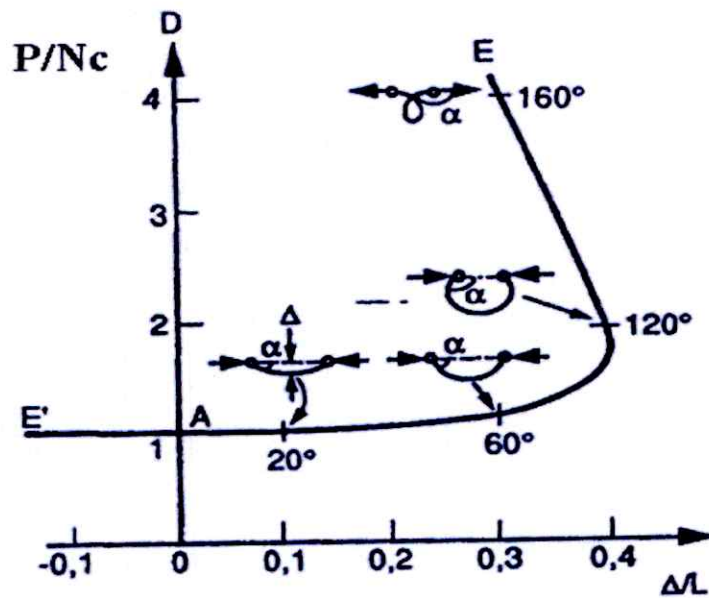


Figure.1.13. Flambement élastique d'une barre bi-articulée [4]

Ce chargement est nommé **chargement critique élastique d'Euler (N_c)** et définit analytiquement le chargement à partir duquel il y a flambement.

L'examen de la **figure.1.13** nous indique qu'une barre bi-articulée, parfaitement droite, chargée axialement ne subit aucune flèche ($\Delta = 0$) lorsque $P < N_c$. On se situe alors sur le tronçon **OA** de la courbe. La barre demeure donc rectiligne et elle résiste au chargement grâce à sa rigidité axiale **EA**.

Si le chargement progresse la barre peut, selon la **figure.1.13**, se déformer selon trois scénarios possibles, représentés respectivement par les tronçons **AE**, **AE'** et **AD**. Le point **A** est donc un point de **bifurcation** de la courbe de comportement.

Lorsque $P > N_c$, le choix du tronçon **AD** représente une position où la barre demeure rectiligne (sans flèche) peu importe la progression du chargement axial. En pratique, ceci ne peut être obtenu que si cette barre est retenue le long de son axe d'une façon quelconque.

Ce tronçon est donc peu intéressant car il représente un état d'équilibre de la barre qui est instable.

Par contre, le choix du tronçon **AE** représente un équilibre stable de la barre. En effet, au fur et à mesure de la progression de P (où $P > N_c$), la déformation de la barre progresse, c'est-à-dire que la flèche Δ devient de plus en plus importante tandis que les extrémités de la barre se rapprochent

l'une de l'autre. La résistance axiale EA de la barre ne suffit plus pour résister au chargement et la barre fléchit afin de mettre à contribution sa rigidité *flexionnelle*. Si le chargement axial P progresse encore, les extrémités de la barre se croisent et la barre devient finalement sous tension. L'examen de ce tronçon montre qu'aussitôt que le chargement parvient à une valeur égale à N_c ou légèrement au-dessus de N_c , la flèche de la barre augmente très rapidement. En effet, la première partie du tronçon AE est presque plate (pente presque nulle). La flèche progresse d'une valeur de 0 à $0,3 L$ pour un chargement axial progressant d'environ $1,0 N_c$ à $1,1 N_c$.

Le choix du tronçon AE' représente également un équilibre stable de la barre sous chargement axial, il est simplement le reflet du tronçon AE . Jusqu'ici la flèche Δ était considérée positive si la barre se déformait vers le bas, le tronçon AE' représente une barre s'étant déformée vers le haut, c'est-à-dire ayant subi une flèche négative (i.e. en traction).

Ainsi, le comportement d'une barre parfaitement élastique bi-articulée, sous sollicitation axiale, se représente généralement par une courbe formée des tronçons OA et AE . Il est clair que cette barre est soumise à de grandes rotations et à des déplacements transversaux importants lorsque $P > N_c$. En pratique, peu de matériaux demeurent dans le domaine élastique lorsque soumis à de telles conditions. Généralement la plasticité apparaît et la courbe de comportement de la pièce s'en trouve modifiée. La **figure.1.14** montre, en traits pointillés, l'influence de la plasticité sur la courbe de comportement d'une barre bi-articulée soumise à un chargement axial. En pratique, on désire généralement éviter la plastification du matériau et pour se faire, on se préoccupe d'une plage de comportement de la pièce où l'hypothèse des petits déplacements est vérifiée.

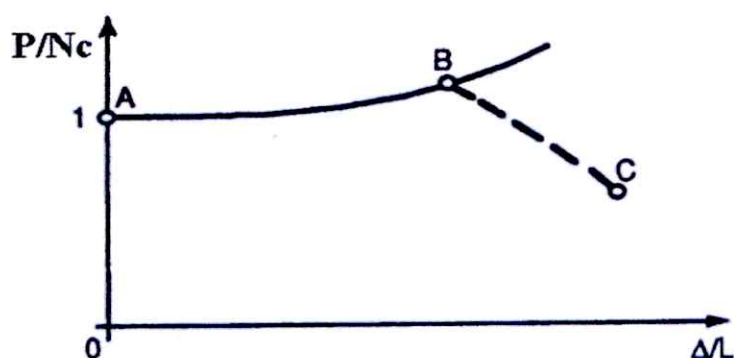


Figure.1. 14.influence de la plasticité [4]

7.1 Flambement élastique - petites déformations

Le flambement élastique est examiné dans cette section tout en admettant l'hypothèse des petits déplacements. Ainsi aux hypothèses émises à la section 1, s'ajoutent les suivantes :

- les déplacements transversaux sont considérés petits (ce qui revient à négliger les effets de l'effort tranchant)
- le raccourcissement de la barre est négligé.

En examinant de nouveau la **figure.1.12** et en faisant l'équilibre de la section droite, on retrouve la relation

$$M = P y \quad (1)$$

En posant l'hypothèse des petits déplacements, la courbure de la barre est égale à $\frac{d^2 y}{dx^2}$ et ainsi

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (6)$$

En incorporant cette équation dans la précédente, on retrouve une équation différentielle du second ordre.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0 \quad (7)$$

ou encore

$$y'' + u^2 y = 0 \quad \text{Ou} \quad u^2 = \frac{P}{EI} \quad (8)$$

La solution de cette équation différentielle homogène, qui représente la flèche le long de la barre ($0 < x < L$), est de la forme

$$y = A \sin (ux) + B \cos (ux) \quad (9)$$

où **A** et **B** sont des constantes d'intégration.

Les conditions aux limites nous permettent de trouver les valeurs de ces constantes. Ainsi, on sait que la flèche doit être nulle ($y = 0$) aux extrémités de la barre ($x = 0, L$). En utilisant ces conditions, on obtient un système de deux équations, ce qui permet de trouver

$$B = 0 \quad (10)$$

$$A \sin(uL) = 0 \quad (11)$$

En examinant la relation (11), la solution triviale est

$$A = 0 \quad (12)$$

Toutefois dans ce cas, la flèche est nulle ($y = 0$, éq. 9) tout au long de l'axe de la barre, peu importe la valeur de P puisque $A = B = 0$. Cette solution ne représente donc pas une possibilité réaliste.

Une autre possibilité est de considérer que $\sin(uL)$ est égal à zéro, peu importe la valeur de A . Ceci survient pour

$$uL = i\pi \quad \text{ou} \quad i = 1, 2, 3, \text{etc.} \quad (13)$$

Dans ce cas l'équation (9) devient

$$y = A \sin(u x) \quad \text{ou encore,} \quad y = A \sin\left(i\pi \frac{x}{L}\right) \quad (14)$$

La déformée de la barre se illustre donc par un sinus de demie longueur d'onde L/i et d'amplitude A . Cette déformée représente le mode de flambement de la barre. On doit noter cependant, qu'il est impossible de quantifier la valeur de la déformée de la barre puisque la valeur de A demeure inconnue. L'équation (14) nous indique seulement la forme (également appelée forme propre) que prend la déformée de la barre. La **figure.1.15** présente les deux premiers modes de flambement d'une barre bi-articulée ($i = 1, 2$).

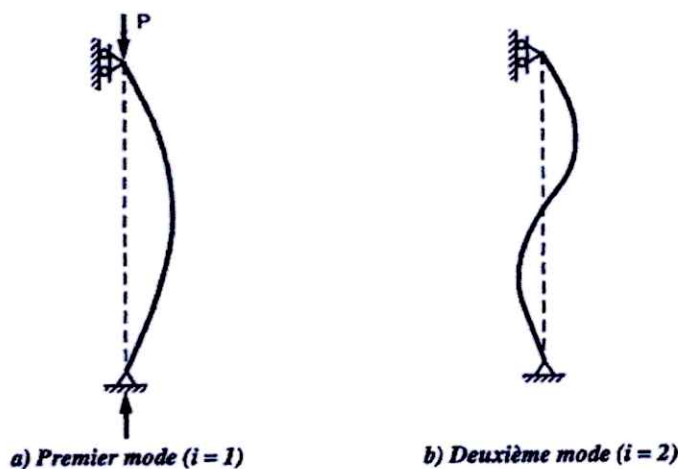


Figure.1.15. Mode de flambement [4]

La déformée due au flambement tel que défini par l'équation (14), ne peut survenir que pour certaines valeurs particulières de P .

Sachant que $P = u^2 EI$ et que, $uL = i\pi$, alors,

$$P = i^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (15)$$

Ainsi, selon la relation précédente, le flambement de la barre ne peut survenir que pour les valeurs de P suivantes

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2}, 4 \frac{\pi^2 EI}{L^2}, 9 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (16)$$

D'un point de vue pratique, seule la plus petite valeur de P ($i=1$) est d'intérêt pratique et se nomme, tel que vu précédemment, chargement critique (élastique) d'Euler (N_c).

On peut porter en graphique les solutions de l'équation différentielle (7), solutions qui sont basées sur l'hypothèse des petits déplacements. Ceci est fait à la **figure.1.16**. Le tronçon **OB** représente la solution triviale correspondant à l'équation (12). Les divers segments horizontaux représentent les diverses possibilités liées aux chargements critiques (éq. (16)). Sur cette figure, seule la courbe définie par les tronçons **OAC** est d'intérêt pratique. On remarque alors que, lorsque le chargement critique d'Euler est atteint, la déformée de la barre devient subitement très importante sans toutefois être définie.

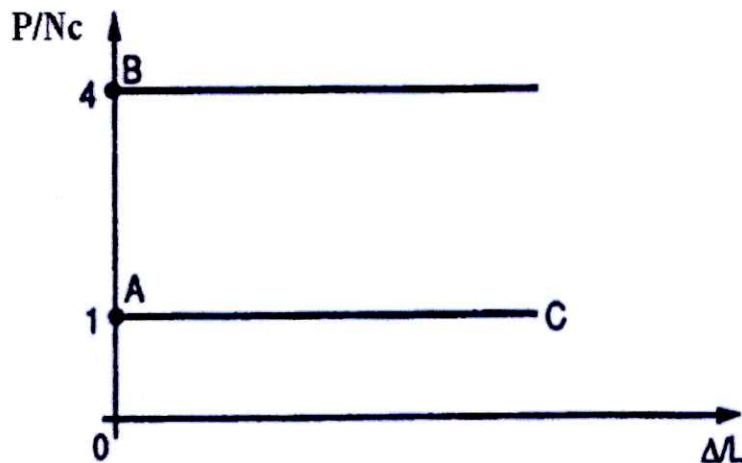


Figure.1.16. hypothèse des petits déplacements [4]

7.2 Influence des défauts de rectitude de la barre

7.2.1 Chargement axial

Jusqu'à présent, seul le flambement d'une pièce parfaitement rectiligne a été présenté. Cette section introduit le comportement d'une pièce bi-articulée possédant des défauts de rectitude tel que le démontre la **figure.1.17**.

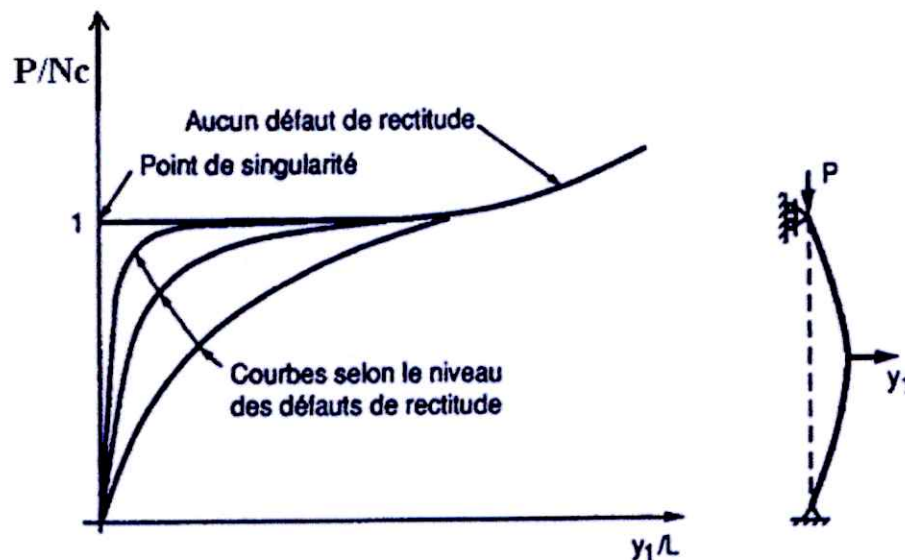


Figure .1. 17. Courbe charge déplacement d'une barre bi-articulée selon le chargé du défaut de rectitude [4]

La section 2, on a vu que la première forme propre ($i=1$) d'une pièce bi-articulée est représentée par l'équation

$$y = A \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (17)$$

D'autre part, posons que la pièce bi-articulée possède un défaut de rectitude de la même forme que l'équation (17) où la déviation maximale se retrouve à mi-longueur de la pièce. Ce défaut de rectitude peut s'exprimer par la relation suivante

$$y_0 = a \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (18)$$

$$\alpha = \frac{P}{P_c} = \frac{P}{P_e} = \frac{K^2 L^2}{\pi^2} \quad (25)$$

Où P_c correspond au chargement critique (premier mode) qui est équivalent, pour une pièce bi-articulée, au chargement critique d'Euler (N_c).

C'est ainsi que la déformée totale de cette pièce bi-articulée s'écrit (19)

$$y = \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + a \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{a}{1-\alpha} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (26)$$

On remarque donc, que la déformée totale de la pièce bi-articulée comportant un défaut de rectitude correspond à la déformée initiale (y_0) amplifiée d'un facteur $\frac{1}{1-\alpha}$. Pour s'en

convaincre, il s'agit de comparer les équations (18) et (26).

Cette dernière constatation est valide peu importe la forme de la déformée initiale de la pièce et peu importe ses conditions aux limites. En effet, on peut montrer que l'équation (6) représente la forme tronquée d'une équation plus générale du type

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\left(1 - \frac{P}{P_c}\right)} \sin\left(i \pi \frac{x}{L}\right) \quad (27)$$

lorsque la déformée initiale de la pièce (y_0) de même que sa déformée sous chargement axial (y_1) sont respectivement représentées sous la forme d'une série de Fourier respectant les conditions aux limites de la pièce.

L'équation (27) nous indique que si le chargement P tend vers le premier chargement critique (P_{c1} , où $P_{c1} < P_{c2} < P_{c3}$, etc.) alors le premier terme de cette équation tend vers l'infini et les termes subséquents ont, par conséquent, une influence minime sur la valeur de la transformée. On peut donc par simplification, ne conserver que le premier terme (terme prédominant) de l'équation (27); ce qui revient à l'équation (26).

Selon l'équation (24b), la déformée maximale de la pièce, δ , due au chargement P survient à $L/2$ et ainsi

$$y_1 = \delta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \quad (29)$$

En réarrangeant les termes de l'équation (29), on obtient

$$\delta = \frac{\delta}{P} P_c - a \quad (30)$$

Sous cette forme, on remarque que si nous traçons une courbe expérimentale (δ/P) en fonction de δ (Graphe de Southwell), la pente de cette courbe devrait nous donner la valeur du chargement critique d'un poteau parfaitement droit et a , la déviation maximale au centre, est donnée par l'ordonnée à l'origine tel que le démontre la **figure.1.18**. On doit noter que l'équation (30) est également valide pour d'autres types de conditions aux limites pour les raisons énoncées précédemment.

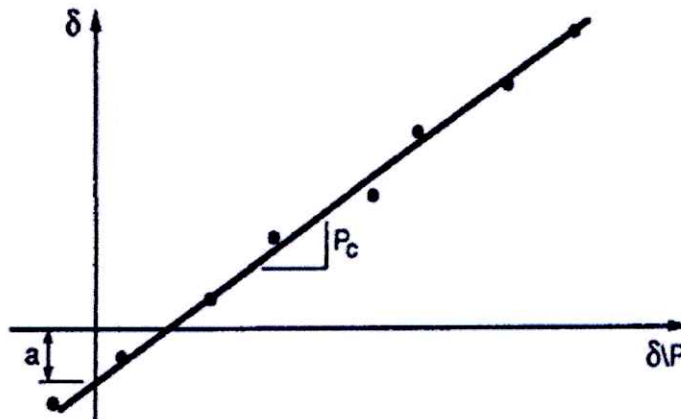


Figure. 1. 18. détermination de P_c et a [4]

7.3 Chargement excentré

Dans le cas où le chargement est excentré par rapport à une pièce parfaitement rectiligne tel que démontré à la **figure.1.19**, nous pouvons démontrer que l'équivalent de l'équation (30) s'écrit

$$\delta = \frac{\delta}{P} P_c - \frac{\pi^2}{8} e \quad (31)$$

L'équation similaire pour une pièce comportant un défaut de rectitude tout en étant sollicitée par un chargement excentré devient, en combinant les équations (30) et (31)

$$\delta = \frac{\delta}{P} P c - e_0 \quad (32)$$

Où
$$e_0 = \frac{\pi^2}{8} e + a$$



Figure.1.19. Barre sollicitée par une charge excentrée [4]

L'équation (32) est très intéressante puisqu'elle indique qu'en faisant des essais sur une barre sollicitée axialement par une charge excentrée, on est en mesure de déterminer la charge critique d'une barre droite sollicitée sous une charge parfaitement axiale. De plus, si on connaît l'excentricité utilisée dans les essais alors nous pouvons déterminer la déviation maximale de la barre.

On doit noter que les équations (30), (31) et (32) sont valables peu importe les conditions aux limites de la pièce

Chapitre 2
Calculs géométriques

1. Introduction

Le calcul du moment d'inertie nous permet de dimensionner les structures afin qu'elles soient rigides et plus résistantes aux charges appliquées, après avoir dimensionné la structure on passe à l'idéalisation qui nous facilite les calculs en respectant les caractéristiques physiques de la structure réelle

2. Moment statique

Le moment statique d'une surface par rapport à un axe situé dans son plan est égale au produit de l'aire de la surface par la distance de son centre de gravité à l'axe.

$$A = \sum \Delta S \cdot X = S \cdot X_G$$

OU encore :

$$A_x = \iint_S r dS \quad (2.1)$$

r étant la distance de l'élément dS à l'axe XX'

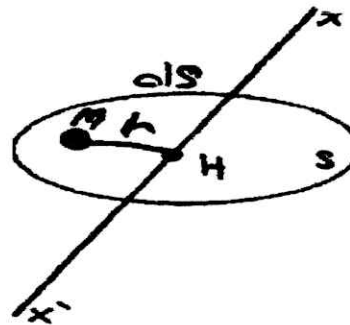


Figure .2.1 Détermination du moment statique

3. centre de gravité

Etant donné une surface rapportée au système d'axe XOY voir **Figure.II-2**, on appelle centre de gravité de la surface, le point G des coordonnées X_G, Y_G tel que :

$$\left. \begin{aligned} SX_G &= \iint_S X dS = A_y \\ SY_G &= \iint_S Y dS = A_x \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

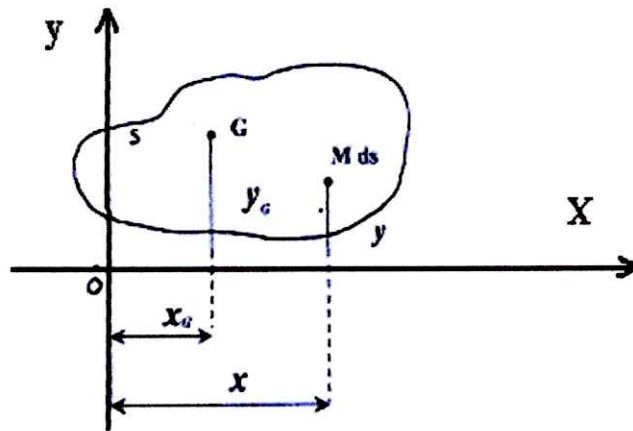
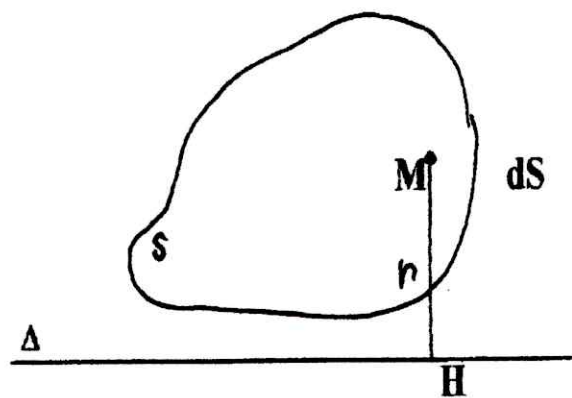


Figure 2.2 présentation du centre de la gravité [5]

4. Moment d'inerties

On appelle moments d'inertie d'une surface par rapport à un axe ou à un point situé dans son plan, la somme intégrale :

$$I_{\Delta} = \iint_S r^2 dS$$

Figure 2.3. Moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) [5]

r étant la distance de l'élément dS par rapport à l'axe ou point M (voir la figure 2.3) pour une surface rapportée à deux axes rectangulaires on a par définition

$$I_x = \iint_S y^2 dS \quad , \quad I_y = \iint_S x^2 dS \quad (2.3)$$

$$I_0 = \iint_S r^2 dS = I_x + I_y \quad (\text{moment polaire})$$

Car

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{voir figure 2.4})$$

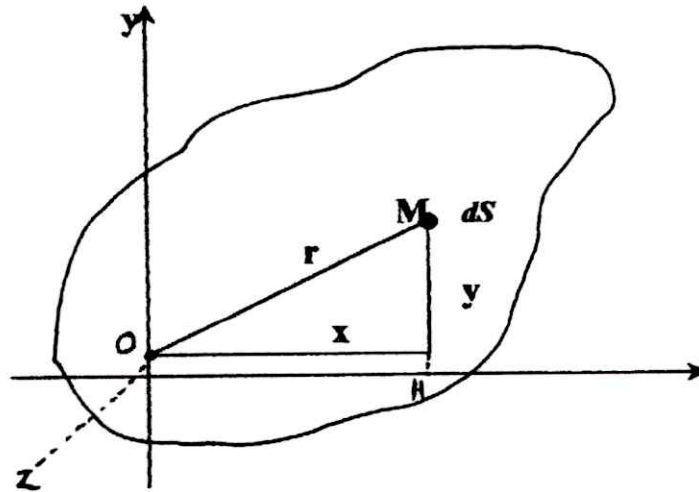


Figure .2.4.Moment polaire [5]

Le produit d'inertie par rapport au système d'axe xoy est donné par :

$$I_{xy} = \iint_S xy dS \tag{2.4}$$

4.1. Translation du repère

Le moment d'inertie par rapport a un axe Δ est égale au moment d'inertie relatif à l'axe parallèle Δ' passant par le centre de gravité, augmenté le produit de la surface par le carré de la distance d des axes. (Voir la figure 2.5)

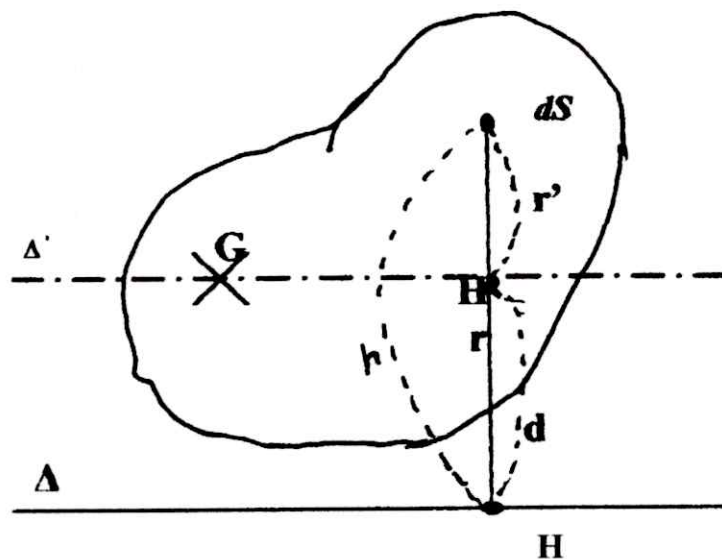


Figure .2.5.Application de théorème de HYGENS

Si r et r' sont les distances entre dS et l'axes Δ et Δ' . La relation de CHARLES permet d'écrire :

$$r = r' + d$$

Après le développement on obtient :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + Sd^2 \quad (2.5)$$

Le produit d'inertie, relatif à un système d'axes xoy est égale, au moment analogue, relatif au système d'axes parallèle issu du centre de gravité augmenté du produit de la surface par les coordonnées du centre de gravité. (Voir figure II.6).

Soit :

$$I_{xy} = I_{x'y'} + SX_G Y_G \quad (2.6)$$

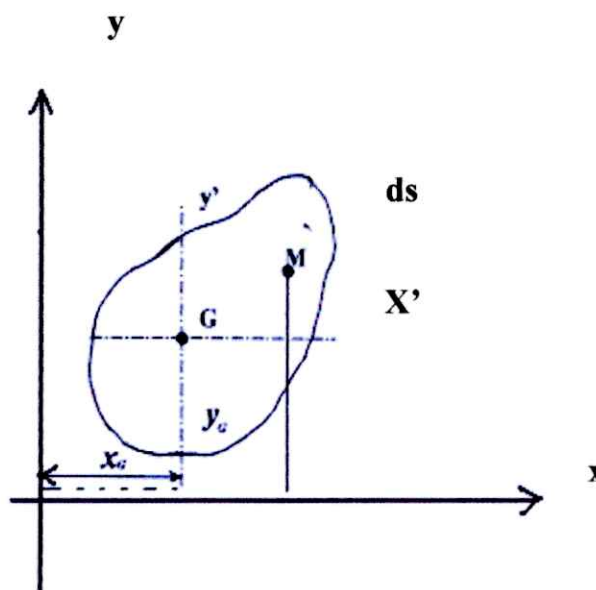


Figure .II.6 L'application du théorème de HUYGEN pour le produit d'inertie [5]

Remarque

Si les axes G_x, G_y sont des axes de symétrie ou des axes principaux de S, le moment

$I_{x'y'}$ Est nul, il ne subsiste que

$$I_{xy} = S \cdot x_G \cdot y_G$$

4.2. Rotation du repère

Soit une plaque d'épaisseur « t » très petite qu'on peut assimiler à un segment de droite. La plaque est portée sur l'axe (UGV). La projection de celui-ci sur le repère $x'Gy'$ nous donne : (voir Figure. 2.7)

$$x' = U \cos \alpha - V \sin \alpha \quad (2.7)$$

$$y' = U \sin \alpha + V \cos \alpha$$

Par définition on a :

$$I_{x'} = \int_S y'^2 dS$$

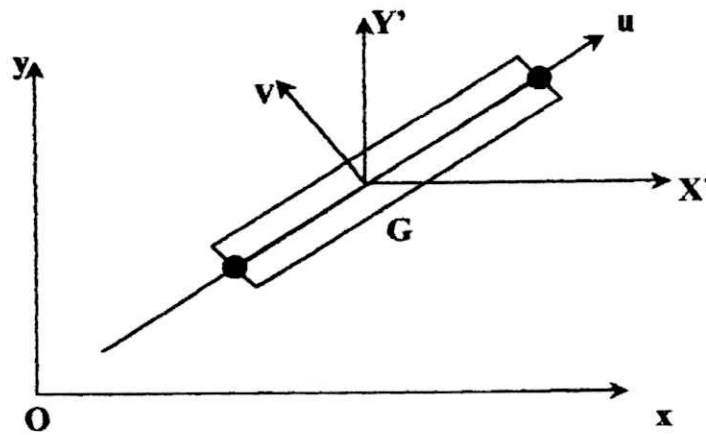


Figure.2.7. présentation des axes sur la plaque

$$I_{x'} = \int_S (u \sin \alpha + v \cos \alpha)^2 dS$$

$$I_{x'} = \int_S [(u \sin \alpha)^2 + (v \cos \alpha)^2 + 2uv \sin \alpha \cos \alpha] dS$$

$$I_{x'} = \sin^2 \alpha \int_S u^2 dS + \cos^2 \alpha \int_S v^2 dS + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_S uv dS$$

$$I_{x'} = \sin^2 \alpha I_v + \cos^2 \alpha I_u + 2 \sin \alpha \cos \alpha I_{uv}$$

$$I_{x'} = \left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right] I_v + \left[\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right] I_u + \sin 2\alpha I_{uv}$$

$$I_{x'} = \left[\frac{I_u + I_v}{2} \right] - \left[\frac{I_v - I_u}{2} \right] \cos 2\alpha + I_{uv} \sin 2\alpha \quad (2.8)$$

$$I_{y'} = \int_S x^2 dS$$

$$I_{y'} = \int_S (u \cos \alpha - v \sin \alpha)^2 dS$$

$$I_{y'} = \cos^2 \alpha I_v + \sin^2 \alpha I_u - 2 \sin \alpha \cos \alpha I_{uv}$$

$$I_{y'} = \left[\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right] I_v + \left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right] I_u - \sin 2\alpha I_{uv}$$

$$I_{y'} = \left[\frac{I_u + I_v}{2} \right] + \left[\frac{I_v - I_u}{2} \right] \cos 2\alpha - I_{uv} \sin 2\alpha \quad (2.9)$$

$$I_{x'y'} = \int_S (u \sin \alpha + v \cos \alpha)(u \cos \alpha - v \sin \alpha) dS$$

$$I_{x'y'} = \int_S x' y' dS$$

$$I_{x'y'} = \int_S \left[u^2 \cos \alpha \sin \alpha + uv \cos^2 \alpha - uv \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \int_S v^2 dS \right]$$

$$I_{x'y'} = \cos \alpha \sin \alpha \int_S u^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_S v^2 dS + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_S uv dS$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} I_v \cos 2\alpha - \frac{1}{2} I_u \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} (I_v - I_u) \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha \quad (2.10)$$

Par raison de système on a : $I_{uv} = 0$

Les équations (II.8, II.9, II.10) deviennent :

$$I_{x'} = \left[\frac{I_u + I_v}{2} \right] - \left[\frac{I_v - I_u}{2} \right] \cos 2\alpha$$

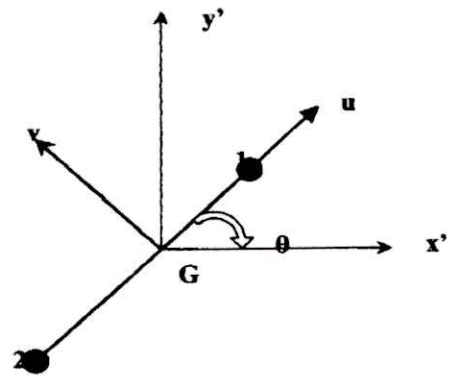
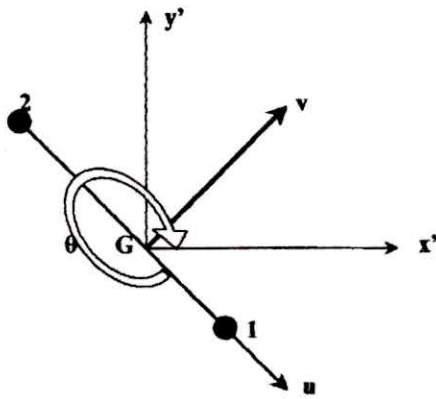
$$I_{y'} = \left[\frac{I_u + I_v}{2} \right] + \left[\frac{I_v - I_u}{2} \right] \cos 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \left[\frac{I_v - I_u}{2} \right] \sin 2\alpha$$

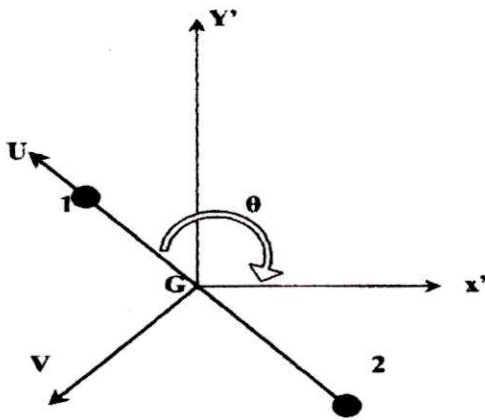


Les cas possibles

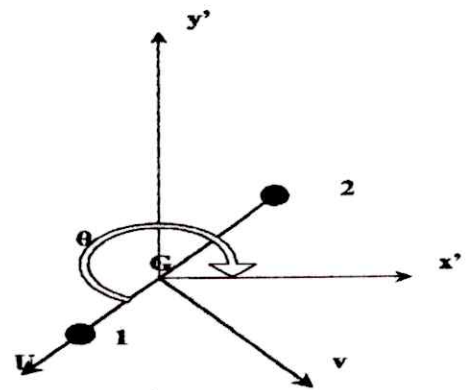
Il existe 4 cas possibles



1^{er} cas



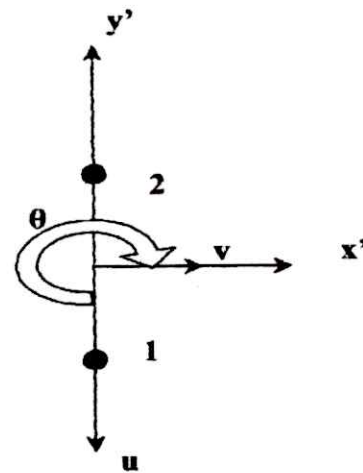
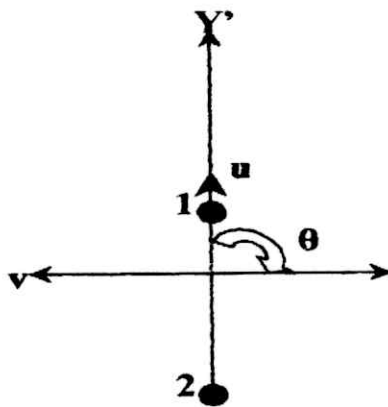
2^{eme} cas



3^{eme} cas

4^{eme} cas

Cas particulier



1^{er} cas

2^{eme} cas

Figure. 2.8. les cas possible de la rotation de repère [5]

5. Rayon de giration

On appelle rayon de giration R d'une surface S (figure. II.9) par rapport à un axe $m n$, la distance à la quelle devrait être reportée l'aire de la surface supposée condensée en point pour obtenir le même moment d'inertie. [5]

$$I_{mm} = SR^2$$

$$R = \sqrt{\frac{I_{mm}}{S}} \quad (2.11)$$

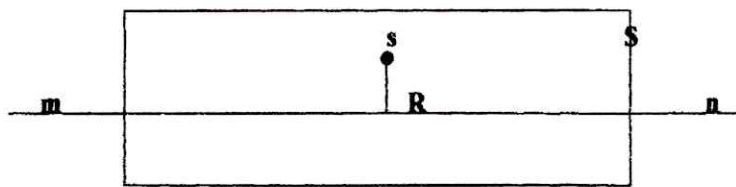


Figure .2.9. Rayon de gyration [5]

Pour une surface et un axe donné, R varie avec I , il prendra en même temps ses valeurs maximum et minimum

L'aire étant donnée; le rayon de giration peut servir à calculer le moment d'inertie

❖ Le calcul du moment d'inertie pour une plaque rectangulaire

Soit une plaque d'épaisseur t et de longueur a

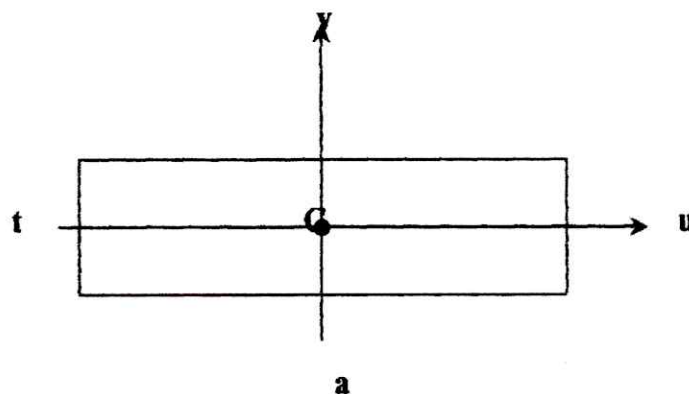


Figure.2.10. Présentation de la plaque rectangulaire

On définit les moments d'inertie suivant le repère uGv par :

$$\left. \begin{aligned} I_v &= \frac{1}{12} a^3 t \\ I_u &= \frac{1}{12} at^3 \\ I_{uv} &= 0 \text{ par raison de symétrie} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

6. Moment d'inertie d'une surface plane

Soit une surface plane A et un axe (xx') situé dans son plan, en décomposant cette surface en une infinité d'éléments infiniment petite $dA_1, dA_2, dA_3, \dots, dA_n$ dont les distances à l'axe (xx') sont respectivement $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$

Par définition, on appelle moment d'inertie d'une surface A par rapport à l'axe (xx') la somme des produits de tous les éléments de cet axe. [5]

On écrira :

$$I_{xx'} = Y_1^2 dA_1 + Y_2^2 dA_2 + \dots + Y_n^2 dA_n = \sum_i^N Y_i^2 dA_i \quad (2.13)$$

Ou encore :

$$I_{xx'} = \int_A Y^2 dA$$

Par rapport à l'axe OX on a :

$$I_x = \int_A Y^2 dA$$

Par rapport à la l'axe OY on a :

$$I_y = \int_A X^2 dA$$

7. Moment d'un triangle quelconque :

Considérant un triangle quelconque de noeud $i = 1, 2, 3$ et coordonnées $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ par rapport au repère d'axe XOY quelconque donné (Figure. 2-9).

Le moment d'un triangle est donné par l'intégration suivante

$$I_{mn} = \int X^m Y^n dx dy \quad (2.14)$$

Où m et n sont des entiers positifs

Pour évaluer cette intégrale, il est commode d'utiliser la transformation de **GREEN** pour une intégrale de surface à une intégrale simple curviligne le long du contour du triangle dans le sens anti-horaire.

❖ **1^{er} Cas : m=0, n=0**

Cette intégration nous donne dans ce cas l'aire de la surface du triangle

$$I_{00} = \int_A dx dy = A \quad (2.15)$$

Le résultat de l'intégrale (2.15) donne :

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_1)]$$

$$A = \frac{1}{2} [(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_1)]$$

❖ **2^{eme} Cas : (m=1, n=0), (m=0, n=1)**

Nous aurons le moment statique avec le centre de gravite du triangle à partir du l'intégrale (2.15)

$$I_{10} = \int X dx dy = AX_G$$

$$I_{01} = \int Y dx dy = AY_G$$

Tel que :

$$X_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3)$$

$$Y_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 Y_i = \frac{1}{3} (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

❖ 3^{eme} Cas : m=1, n=1

Nous aurons d'après l'intégrale (2.15) le produit d'inertie d'un triangle à m=1, n=1 l'intégrale suivant :

$$I_{11} = \int_A YX \, dx \, dy = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 X_i Y_i + 9 X_G Y_G \right]$$

$$I_{11} = I_{xy} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 X_i Y_i + 9 X_G Y_G \right]$$

$$I_{10} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 X_i^2 + 9 X_G^2 \right]$$

$$I_{02} = \frac{A}{12} \left[\sum_{i=1}^3 Y_i^2 + 9 Y_G^2 \right]$$

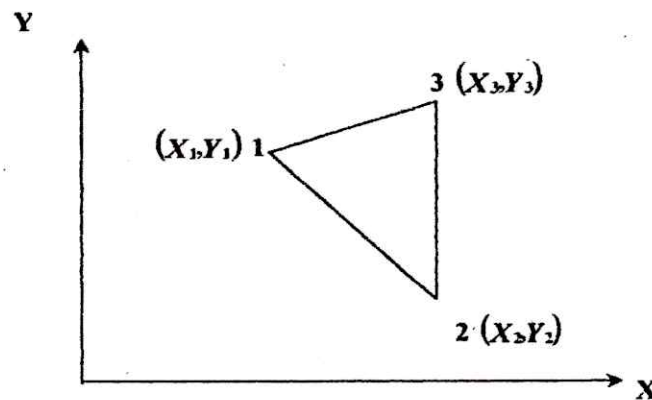


Figure .2.11.coordonnée des noeuds d'un triangle [5]

8. Modélisation d'une surface d'un profile quelconque par des triangle

Soit une aile définie dans un plan (oxy), pour calculer le centre de gravité de cette aile on la divise en n triangle de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, et on sait calculer le moment d'inertie et le centre de gravité d'un triangle quelconque (la méthode citer aux paragraphe précédent)

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Le centre de gravité de cette surface :

$$X_G = \frac{X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3 + \dots + X_n A_n}{A}$$

$$Y_G = \frac{Y_1 A_1 + Y_2 A_2 + Y_3 A_3 + \dots + Y_n A_n}{A}$$

Avec : (X_i, Y_i) coordonnées de chaque triangle i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) et A la surface de triangle i

Et pour avoir le moment d'inertie nous additionnons tous les moments d'inerties des triangles d'où on aura :

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{X_i})$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{Y_i})$$

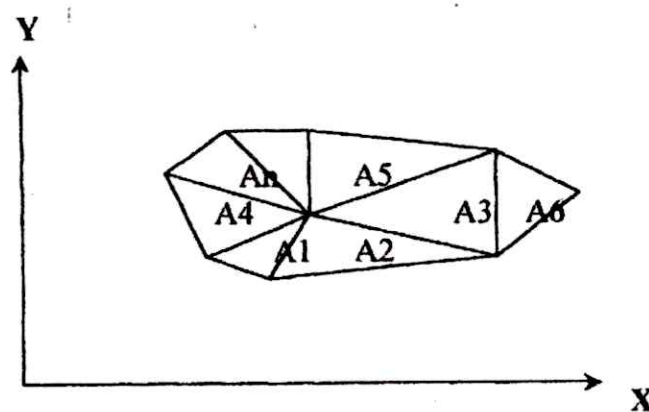


Figure .2.12. Section formée de triangle

Chapitre 3
La compression dans les
structures aéronautique

1. Les composantes essentielles de l'avion

Les éléments essentiels d'un avion sont la cellule, cette dernière se compose de fuselage, de deux ailes et des empennages, le groupe motopropulseur, le train d'atterrissage, les équipements de pilotage et les systèmes auxiliaires.

1.1. Le fuselage

Le fuselage comprend le poste de pilotage et les aménagements nécessaires au transport de passagers ou de fret. Afin de limiter la consommation de carburant et d'augmenter l'autonomie, la plupart des avions volent à haute altitude, car la résistance de l'air y est moindre et le rendement des réacteurs meilleur.

Pour la sécurité des occupants, il est donc nécessaire de pressuriser l'intérieur du fuselage, lequel à 11 000 m d'altitude doit résister à une surpression de l'ordre de 60 kPa. Le fuselage est une section circulaire qui offre le meilleur compromis entre la résistance maximale et le poids minimal des structures ainsi que d'excellentes qualités aérodynamiques.

Le plancher (ou pont) est disposé de façons quasi diamétrales afin de maximiser le nombre de sièges de front et d'optimiser l'habitabilité tout en réservant un volume important aux soutes, situées sous le plancher.

Le fuselage est réalisé par l'assemblage de plusieurs tronçons constitués de structures (ou couple) annulaires réalisées par des lisses, ils sont renforcés par des longerons et revêtus de panneaux extérieurs et intérieurs. Le pont contribue à rigidifier l'ensemble. La partie arrière du fuselage est relevée afin de permettre le cabrage de l'appareil lors du décollage et de l'atterrissage, le nez est très court afin d'offrir le meilleur champ de vision possible durant ces phases.

1.2 La voilure

La voilure (ou les ailes) constitue le système sustentateur principal de l'avion. Leurs qualités aérodynamiques, qui dépendent essentiellement de leur position par rapport au fuselage, de leurs caractéristiques géométriques (forme, surface, profil) et de leur état de surface, sont fortement influencées par la vitesse de l'avion et la densité de l'air. La solution idéale est celle des ailes à géométrie variable mais elle est compliquée, n'étant pas envisageable pour l'instant sur les avions commerciaux.

Les constructeurs afin de limiter la consommation de carburant, définissent la partie fixe de l'aile en fonction de la vitesse de croisière (aile en flèche pour les avions subsoniques, aile

delta pour le Concorde) et lui associent des surfaces mobiles destinées à adapter son profil aux différentes conditions de vol.

1.3. Les ailerons

Des ailerons prolongent le bord de fuite (partie arrière des ailes) et pivotent vers le haut ou vers le bas en opposition de phase sur chacune des ailes afin d'incliner l'avion lors des virages selon l'axe longitudinal (contrôle du roulis). Ils sont divisés en deux groupes, les ailerons basse vitesse (ou extérieurs) et les ailerons grande vitesse (ou intérieurs), situés respectivement à l'extrémité de l'aile et à proximité de son emplanture.

1.4 Les empennages

Situé sur la partie arrière du fuselage, ils jouent un rôle fondamental dans le pilotage et le maintien de la stabilité de l'avion. L'empennage vertical est constitué d'une partie fixe, la dérive, et d'une partie mobile qui lui est rattachée, la gouverne de direction. L'empennage horizontal est formé par les stabilisateurs, sur lesquels sont articulées et l'ensemble plans fixes gouvernés de profondeur peuvent pivoter vers le haut ou vers le bas.

1.5. Le train d'atterrissage

Les trains d'atterrissage constituent la partie la plus complexe d'un avion. Leur jambe principale fait office d'amortisseur en absorbant le choc de l'atterrissage. Ils comportent également un mécanisme de relevage, qui remonte ou abaisse le train, les roues et les freins. Il existe deux grandes classes de trains d'atterrissage : le train classique et le train tricycle. Le train classique comprend deux grandes roues situées en avant du centre de gravité de l'avion et une petite roue placée à la queue de l'appareil. Le train tricycle est muni de plusieurs roues en arrière du centre de gravité et d'une autre roue à l'avant du fuselage. L'atterrissage est plus aisé à l'aide d'un train tricycle car ce dernier améliore le freinage et la maniabilité de l'appareil. Par ailleurs, l'avion a ainsi moins de risque d'atterrir sur le nez.

1.6. Le groupe motopropulseur

Les avions commerciaux utilisent des turbopropulseurs et surtout des turboréacteurs. Les réacteurs, dont le diamètre est inférieur à celui des moteurs à hélices, offrent l'avantage d'une plus grande liberté quant au choix de leur emplacement. Contenus dans une nacelle, ils sont généralement suspendus sous l'aile par l'intermédiaire d'un élément structural, le mat

réacteur. Les réacteurs sont équipés d'inverseur de poussée qui participe au freinage de l'avion en déviant le jet de gaz. Un même avion peut recevoir, au choix de la compagnie, l'un ou l'autre des moteurs disponible sur le marché sans modification structurelle majeure.

Sur le biréacteurs les moteurs sont fixé à la l'arrière de pat et d'autre du fuselage et sur le triréacteur le troisième est logé dans la dérive ou dans la pointe arrière du fuselage

1.7. Les systèmes de pilotage

Le poste de pilotage centralise les instruments nécessaires à la navigation, les commandes de vol, les systèmes de communication hertzienne, les commandes et instruments de contrôle des autres systèmes. Les progrès réalisés dans la conception de ces équipements convergent vers une plus grande précision, une sécurité accrue, une réduction du poids, mais surtout vers une meilleure assistance au pilotage et un plus grande confort. Les commandes de vol électriques remplacent la traditionnelle timonerie mécanique et contrôlent, grâce à des servocommandes, les moteurs et vérins hydrauliques des éléments mobiles (gouvernes, ailerons, trains d'atterrissage ...) ainsi que la poussée des réacteurs. Les ordres de pilotage, tout comme les données fournies par d'innombrables capteurs, sont traités numériquement par des ordinateurs affectés à des fonctions spécifiques (commandes de vol, navigation, etc..). Ceux-ci assistent le pilote et à sa demande, prennent en charge le contrôle de l'appareil (pilotage ou atterrissage automatique sous visibilité), le pilote peut a tout moment reprendre la main. Des écrans multifonctionnels en couleur remplacent de nombreux cadrans et offrent une grande souplesse d'utilisation ainsi qu'une grande richesse de présentation (écriture de texte, schémas fonctionnels, cartographie...).

1.8. Les systèmes auxiliaires

Ils génèrent l'énergie électrique et hydraulique, et assurent la pressurisation et le conditionnement de l'air. Pour des raisons de sécurité différents circuits indépendants coexistent pour chaque fluide. Ils ont pour source principale les moteurs, pour source secondaire une turbine à gaz logé dans le cône arrière du fuselage, le groupe auxiliaire de puissance. Au sol ce dernier permet le démarrage des réacteurs par envoi de l'air sous pression assure le conditionnement de l'air et fournis l'énergie électrique grâce à un alternateur. En vol, les réacteurs entraînent des alternateurs et des pompes hydrauliques et fournissent l'air conditionnement via les systèmes de pressurisation. En cas de panne, ils sont relayés par le

groupe auxiliaire et en dernier recours, des circuits électriques de secours fonctionnant sur batteries entrent en service.

2. La compression dans les structures aéronautique

D'une manière générale, le phénomène de flambement proprement dit n'existe pas dans les structures d'aéronautique. Mais il se présente de façon indirecte, c'est une évolution de la compression.

2.1. La voilure

2.1.1. Principaux effort a la voilure

Nous allons étudier le cas d'une aile cantilever que l'on pourra considérer comme une poutre encastrée dans le fuselage.

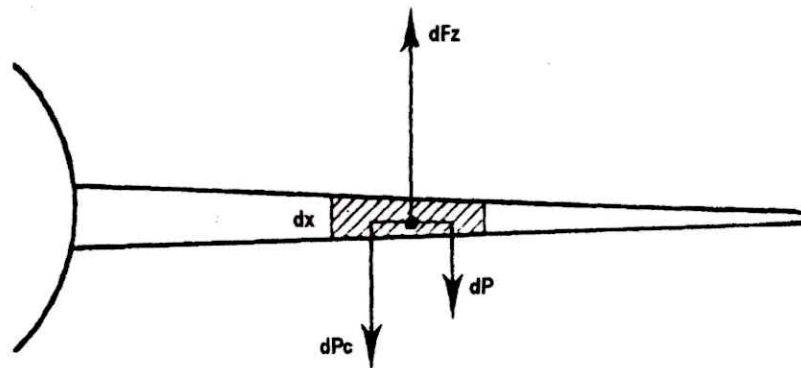


Figure 3.1. Efforts appliques a la voilure [6]

Chaque section dx de la demi-voilure est soumise à l'action de 3 forces

- dFz : force de portance locale
- dP : poids de la structure de la section d'aile
- dPc : poids du carburant contenu dans cette section d'aile.

Ces 3 forces ont une résultante dirigée:

- Vers le bas lorsque l'avion est au sol ($Fz = 0$)
 - l'extrados de la voilure travaille en traction
 - l'intrados de la voilure travaille en compression.

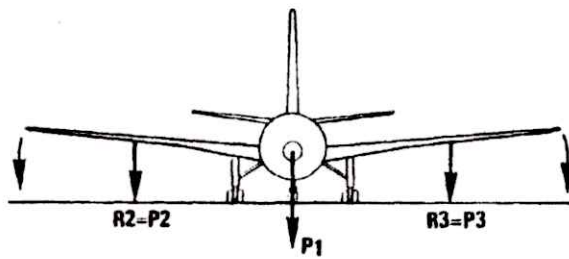


Figure. 3.2. L'avion au sol [6]

- Ver le haut lorsque l'avion est en vol
 - l'extrados de la voilure travaille en compression
 - l'intrados de la voilure travaille en traction

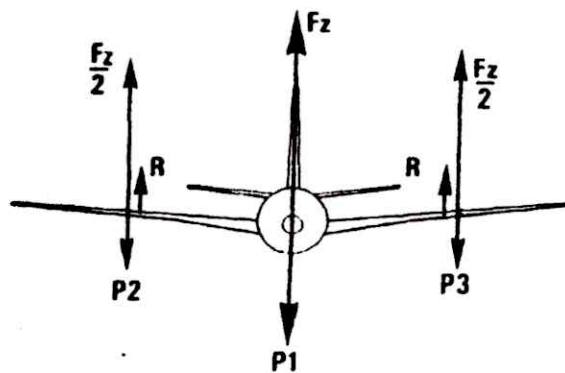


Figure. 3.3. L'avion en vol

L'évolution de la charge R tout le long de la demi-voilure permet d'établir le diagramme de l'effort tranchant et celui du moment fléchissant (cas d'un poutre encastree iniformément chargée).

- à l'effort tranchant correspondent des contraintes de cisaillement.
- au moment fléchissant correspondent une contrainte de traction (extrados en vol) et une contrainte de compression (intrados en vol).
- l'effort tranchant et le moment fléchissant étant maximum a l'emplanture, c'est donc l'emplanture qui aura la plu grosse épieur

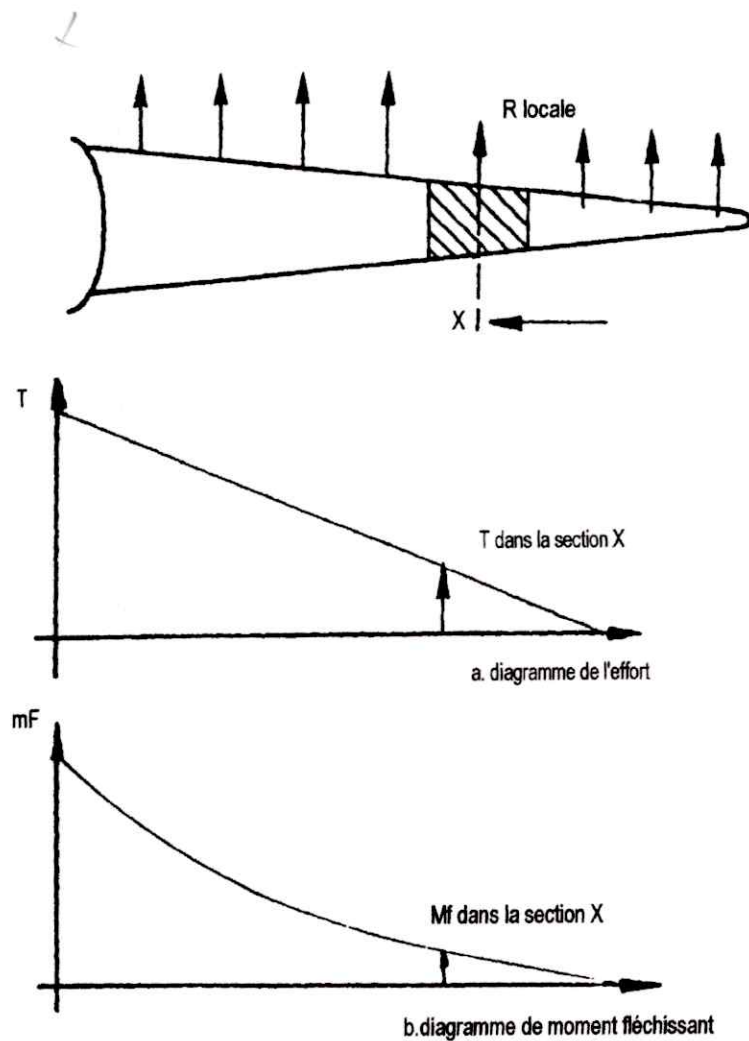


Figure. 3.4. L'évolution de la charge R sur la demi-voilure [6]

2.1.2. Effort exercés par les propulseurs sur la voilure

La résultante des forces horizontales agissant sur la voilure provoque la flexion horizontale de la voilure.

- Si les propulseurs sont installés sous la voilure, celle-ci est soumise en vol à une flexion horizontale vers l'avant.
 - le bord d'attaque de l'aile travaille en compression
 - le bord de fuite de l'aile travaille en traction.
- Si les propulseurs sont installés à la partie arrière du fuselage, la voilure est soumise en vol à une flexion horizontale vers l'arrière.
 - le bord d'attaque travaille en traction
 - le bord de fuite travaille en compression

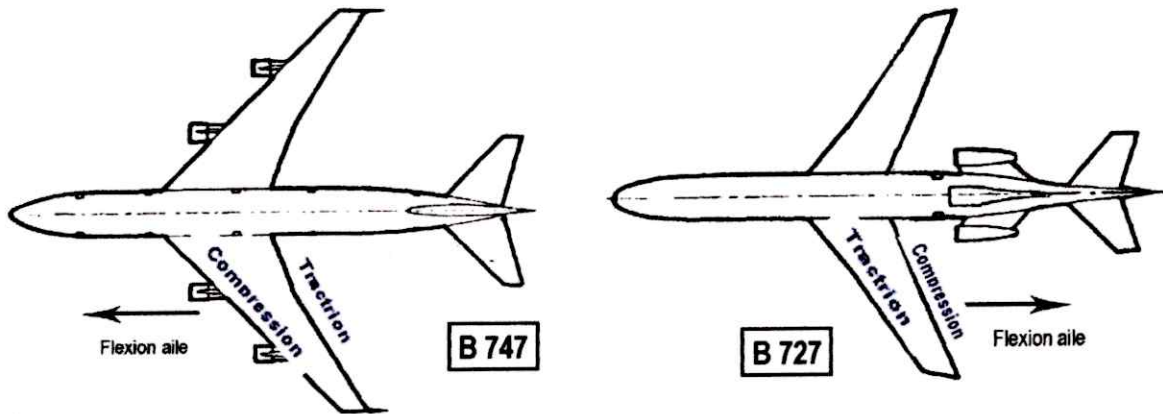


Figure. 3.5. Efforts exercés par les propulseurs sur la voilure [6]

2.1.3. Les éléments subissant les plus grand charge de compression dans la voilure

❖ Les longerons :

Ils constituent les éléments longitudinaux de la voilure (dans le sens de l'envergure) et ils encaissent les efforts de flexion.

Un longeron comporte des semelles et une ou deux âmes en acier ou en alliage léger. La tendance actuelle de construction est à la réalisation d'un longeron monobloc forgé et usiné.

- les semelles travaillent surtout en traction et en compression.
- les âmes travaillent surtout au cisaillement.

Les longerons ont une section décroissante de l'emplanture à l'extrémité de l'aile en raison de la variation des effets supportés.

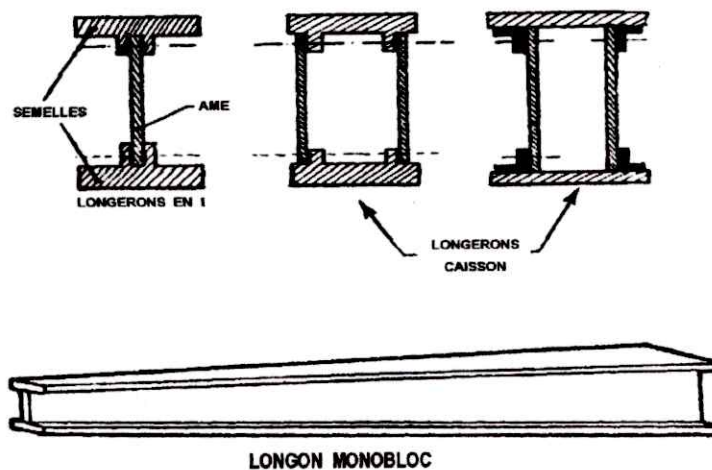


Figure. 3.6. Différent type de longeron [6]

❖ Le revêtement:

Dans tous les types de structure moderne, le revêtement travaille et encaisse les efforts de torsion et de flexion.

Les revêtements travaillent en compression ou en traction suivant qu'ils sont installés à l'extrados ou à l'intrados de la voilure et que l'avion est au sol ou en vol; un raidissage longitudinal est donc nécessaire.

Le raidissage longitudinal des tôles est obtenu par fixation sur elles à intervalles réguliers de cornières ou le plus souvent de profilés appelés "raidisseurs". Ces raidisseurs sont fixés par rivetage, soudage ou collage sur les tôles.

On peut également fraiser ou raboter des tôles de revêtement dans des plaques épaisses. Ce procédé, appelé "raidissage intégral", est de plus en plus employé [6]



Figure. 3.7. Raidisseur

Le revêtement est généralement constitué d'un matériau

- à épaisseur variable décroissant de l'emplanture vers le saumon,
- de nature différente à l'intrados (traction - Dural) et à l'extrados (compression - Zicral).

2.1.4. Exemple de voilure A300

Chaque aile comprend :

- ✓ 2 longerons usinés.
- ✓ 31 nervures usinés.
- ✓ 3 panneaux d'extrados usinés, renforcé par des raidisseurs.
- ✓ 3 panneaux intrados usinés, renforcé par des raidisseurs.

L'avion est au sol :

- Revêtement de intrados travaillent en compression.
- Revêtement de extrados travaillent en traction.

L'avion est en vol :

- Revêtement de intrados travaillent en compression.
- Revêtement de extrados travaillent en traction.

Pour le type airbus 300 (A300) les propulseurs sont installés sous la voilure donc en vol :

- Le bord d'attaque de l'aile travaille en compression c'est-à-dire que longeron avant ou bien les semelles de longeron avant travaillent en compression.
- Le bord de fuite de l'aile travaille en traction c'est-à-dire que longeron arrière ou bien les semelles de longeron arrière travaillent en traction.

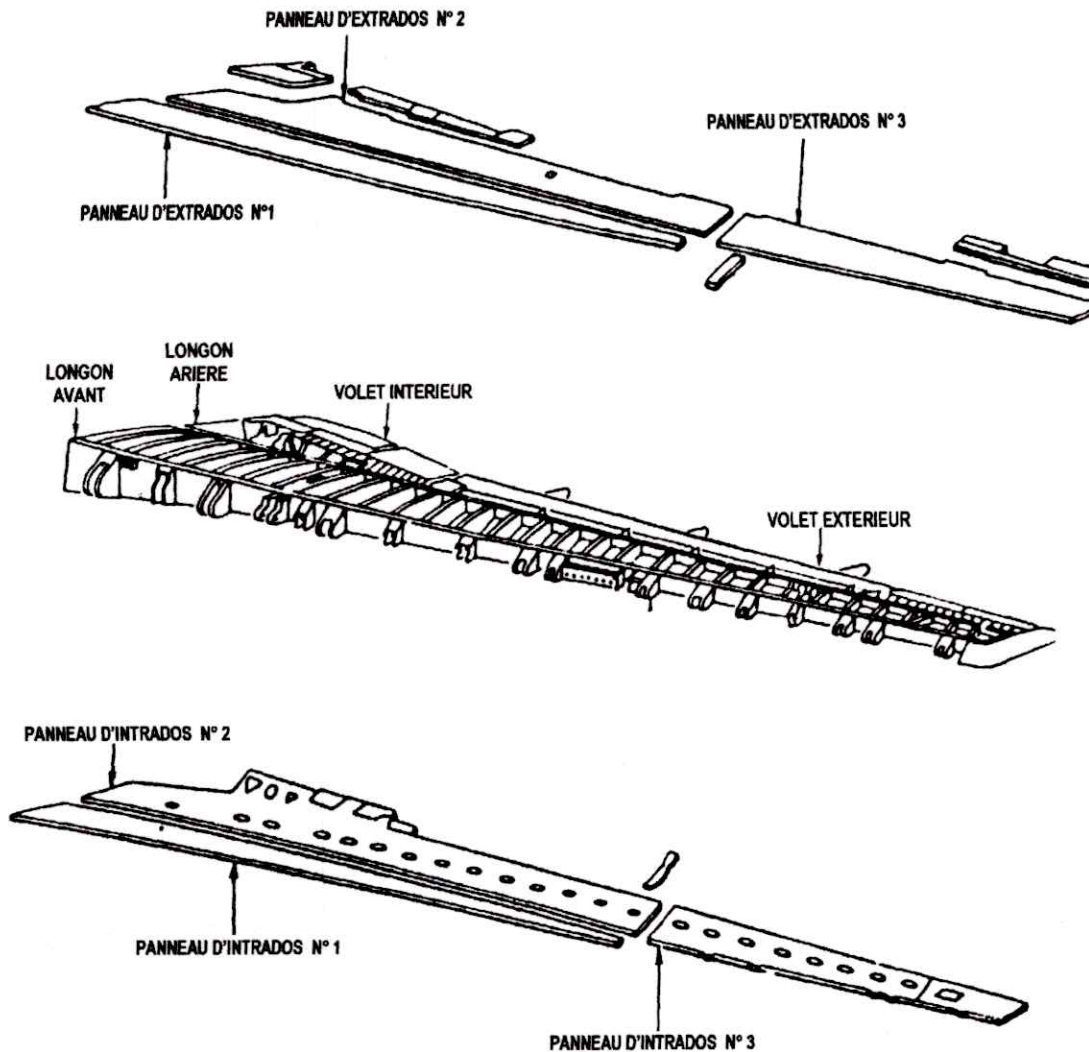


Figure.3.8. Voilure A300 [6]

2.2 Le fuselage

La structure du fuselage est étudiée par les constructeurs de façon à répondre à des nombreuses exigences techniques.

2.2.1. Efforts appliqués sur le fuselage

❖ Efforts dus au poids de l'appareil

- Au sol : le fuselage se comporte comme une poutre en équilibre sur deux appuis (atterrisseurs).

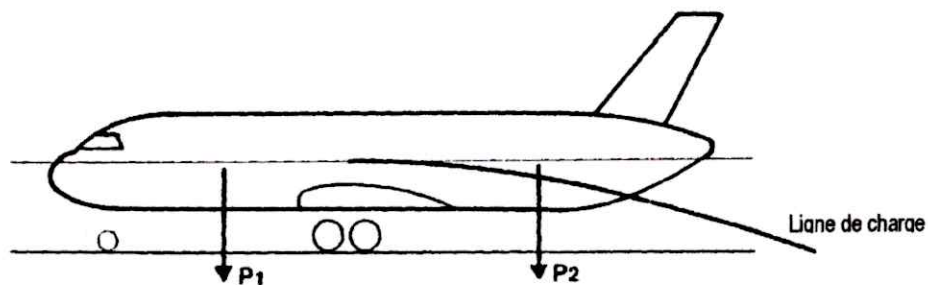


Figure. 3.9. Effort appliqué sur fuselage au sol [6]

- En vol : le fuselage se comporte comme une poutre suspendue à la voilure (l'empennage est supposé non porteur).

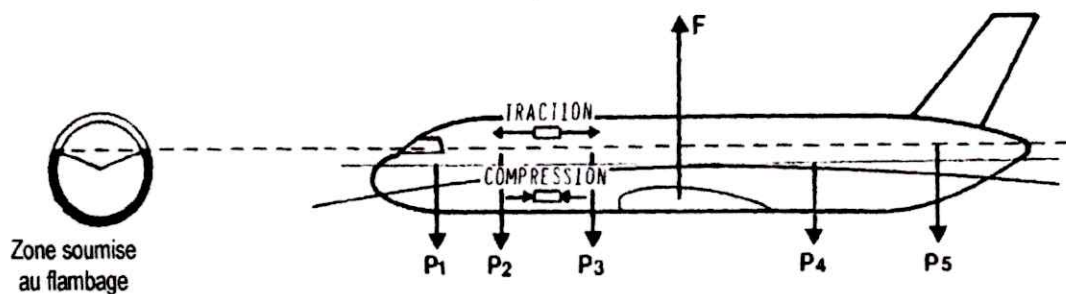


Figure. 3.10. Effort appliqué sur fuselage en vol [6]

Le fuselage est donc soumis :

- A un effort tranchant qui donne une contrainte de cisaillement en général assez faible.
- A un moment fléchissant qui provoque des contraintes longitudinales :
 - ✓ de traction à la partie supérieure
 - ✓ de compression à la partie inférieure (d'où risque de flambage du revêtement).

❖ Efforts dus à la pressurisation

En raison de la pressurisation du fuselage, celui-ci se trouve en vol à une "altitude cabine" inférieure à l'altitude réelle de l'avion.

La pression interne est donc plus élevée que la pression extérieure et la structure du fuselage doit supporter une pression différentielle [6]:

$$\Delta P = P \text{ intérieure} - P \text{ extérieure} > 0$$

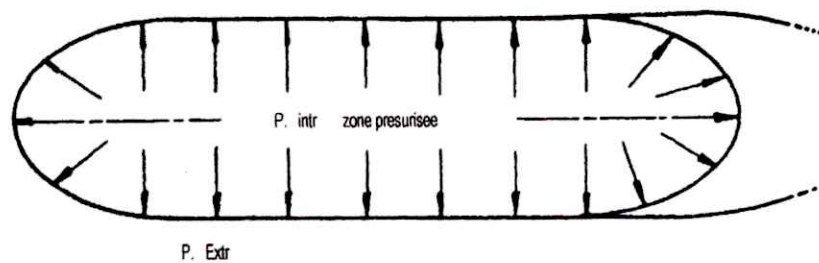


Figure. 3.11. Efforts dus à la pressurisation [6]

Cette pression entraîne des contraintes de traction longitudinales et transversales. Les contraintes longitudinales vont se combiner avec celles provoquées par le moment fléchissant de telle sorte qu'elles :

- S'ajoutent, dans la partie supérieure, à la contrainte de traction due au poids.
- Se retranchent, dans la partie inférieure, à la contrainte de compression qui est diminuée et peut même être inversée.

Cela entraîne une diminution de la "zone instable", c'est-à-dire de la zone où il y a des risques de flambage, le matériau étant soumis à la compression.

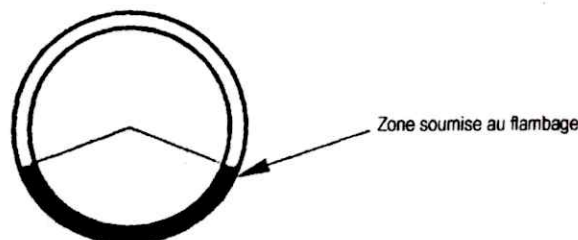


Figure. 3.12. Zone soumise au flambage [6]

Nous vous signalons que si l'on augmente le rayon du fuselage, la contrainte critique de flambage que le matériau peut supporter diminue ; il faudra alors "raidir" la coque (lisses, couple).

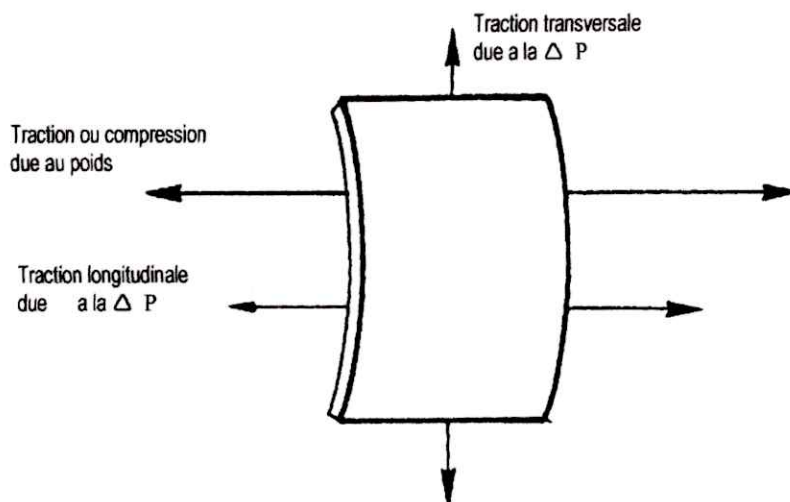


Figure. 3.13. Une coque soumise aux différent compression

❖ Efforts dus au braquage gouverne

La manœuvre de la gouverne direction provoque la flexion horizontale du fuselage. Il en résulte des contraintes de traction d'un côté, et des contraintes de compression de l'autre.

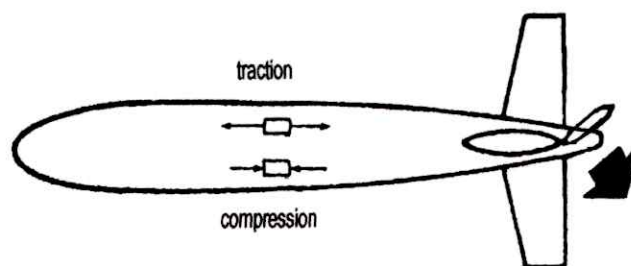


Figure. 3.14. Compression dus au braquage gouverne[6]

2.2.2. Les éléments d'un fuselage

Les éléments constitutifs du fuselage sont :

- ✓ Les couples ou cadres, placés dans des sections droites du fuselage.
- ✓ Les lisses, situées dans le sens longitudinal.
- ✓ Le revêtement.

Les structures des avions commerciaux actuels sont du type "semi monocoque", c'est-à-dire à revêtement travaillant.

❖ Les couples ou cadres :

Les couples sont les éléments transversaux qui donnent sa forme au fuselage. Ils assurent la rigidité transversale et sont aussi rapprochés que possible. Ils sont numérotés par ordre croissant de l'avant vers l'arrière.

Les couples "forts" ou couples "principaux" encaissent les efforts concentrés dus par exemple :

- ✓ aux limites des zones pressurisées.
- ✓ aux encadrements de portes
- ✓ aux attaches des ailes
- ✓ aux attaches des empennages
- ✓ aux fixations des réacteurs et de l'APU
- ✓ aux logements de trains
- ✓ aux liaisons entre les tronçons de fuselage (section), etc....

Les couples standard sont généralement réalisés par pliage, et les couples forts par usinage (AU4G1).

❖ les lisses

Les lisses sont les éléments longitudinaux raidisseurs du revêtement. Leur nombre est variable d'un avion à un autre. Elles sont fixées au revêtement :

- par collage dans les zones de faibles contraintes.
- par rivetage dans les zones de fortes contraintes ou dans les zones soumises à la corrosion (partie inférieure du fuselage).

Elles sont fixées aux couples par des éclisses rivées (*A300*, *A310*) ou traversent les couples pour éviter au maximum les discontinuités (*B727*, *B737*, *B747*).

Matériaux employés:

- ✓ Duralumin AU4G1 dans la partie supérieure (traction)
- ✓ Zicral AZ5GU dans la partie supérieure (compression)

❖ le revêtement

Le revêtement est un revêtement travaillant, constitué en général de panneaux préconstitués assemblés par rivetage, collage ou soudage sur les couples.

Sur *A310* des plaques de titane renforcent la jonction des plaques de revêtement et évitent la propagation des criques.

Matériaux employés:

- ✓ Duralumin AU4G1 (parties supérieure)
- ✓ Zicral AZ5GU (parties inférieure)

❖ Plancher cabine

Le plancher cabine est réalisé par des poutres transversales rivetées aux couples et raidies par des bielles de plancher (*A300, A310*).

Les rails de plancher sont fixés aux poutres transversales.

Le plancher supporte ainsi les charges de la cabine et équilibre les efforts de traction dus à la pressurisation. [6]

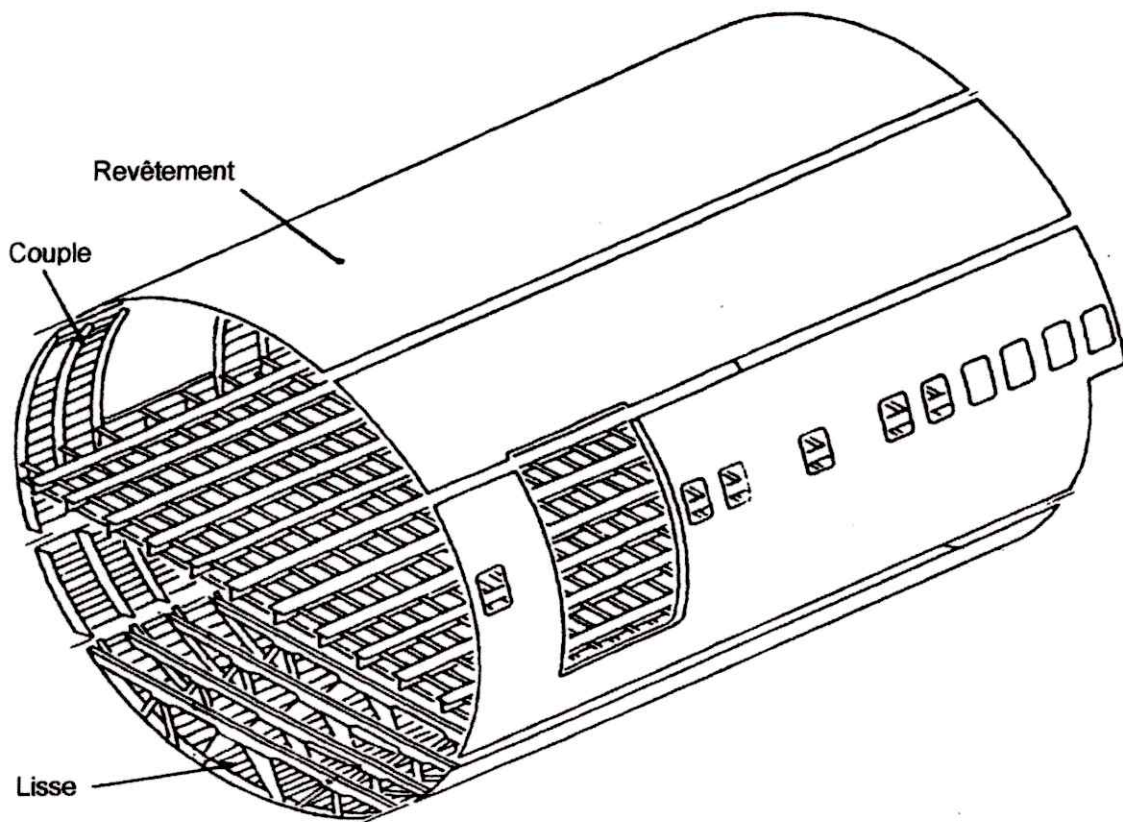


Figure. 3.15. Fuselage A300 section 14 [6]

2.3. Généralités sur les atterrisseur

Les masses et les vitesses d'atterrissage des avions modernes ont atteint des valeurs élevées qui imposent des charges extrêmement fortes au moment de l'impact et au cours de la décélération. On demande au train d'atterrissage une fiabilité considérable dans la capacité d'absorber les chocs, de freiner l'avion, de se rétracter et de se déployer. Le train d'atterrissage est un organe complexe de l'avion qui demande beaucoup de soins. [7]

2.3.1. Rôles du train d'atterrissage

Le train d'atterrissage joue différents rôles :

- Il supporte l'avion au sol et fournit le moyen de le manoeuvrer.
- Il sert à freiner l'avion au sol et parfois, selon les modèles, à procurer un freinage aéronautique en vol d'une façon comparable aux aérofreins.
- Il supporte les charges latérales lors du roulage et l'atterrissage en condition de vent de travers.

La plupart du temps, le train d'atterrissage n'a aucune utilité en volet et il crée de la traînée, comme celle-ci augmente avec le carré de la vitesse, il s'impose d'installer un train escamotable sur les avions rapides. [6]

2.3.2. Les éléments constituent d'un train d'atterrissage

Le train d'atterrissage est fixé à la cellule de l'avion en dessous des ailes ou sous le fuselage.

L'ensemble du train d'atterrissage est constitué des éléments suivants

- ✓ Le fût, qui renferme généralement l'amortisseur,
- ✓ L'amortisseur, qui sert à absorber l'impact et les secousses du roulage.
- ✓ L'ensemble est souvent désigné par l'expression jambe à amortisseur.
- ✓ Les biellettes de contrefiche, qui maintiennent le fut vertical et le renforcent.
- ✓ Les compas, qui maintiennent les roues clans l'axe de roulement.
- ✓ Les essieux.
- ✓ Les roues.
- ✓ Les freins et leurs accessoires
- ✓ Les pneus

2.3.3. Implantation du train d'atterrissage

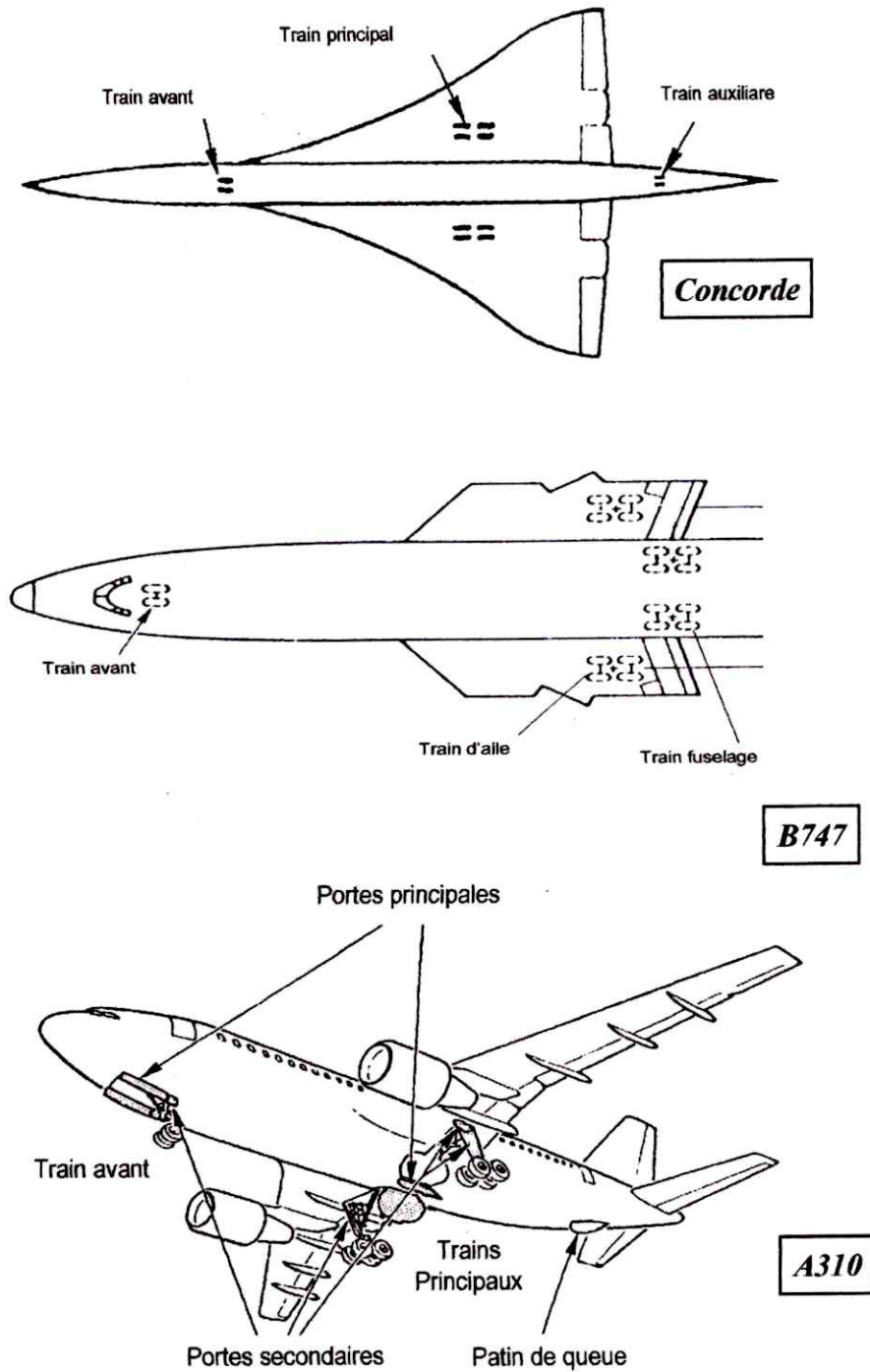


Figure. 3.16. Implantation du train d'atterrissage [8]

Les divers types de trains d'atterrissages correspondent à des implantations différentes des atterrisseurs.

L'implantation la plus répandue actuellement est du type « tricycle » avec deux atterrisseurs principaux et un atterrisseur auxiliaire avant (*A310*).

Cette implantation remplace l'ancienne solution du type « classique » qui utilisait un atterrisseur auxiliaire arrière (*B534-IV*).

Une troisième solution est le type « monotrace » à un au plusieurs atterrisseurs principaux dans l'axe du fuselage et deux stabilisateurs appelés « balancier » fixés en extrémité de voilure (couramment utilisés sur les planeurs).

Sur ces solutions les plus courantes, on peut trouver un certain nombre de variantes :

- Un train tricycle plus un atterrisseur auxiliaire arrière, pour les atterrissages avec une assiette élevée (concorde).
- Un train tricycle plus un atterrisseur principal dans le plan de symétrie (*A340*).
- Train tricycle avec atterrisseurs principaux subdivisés en plusieurs atterrisseurs distincts (*B747* : deux atterrisseurs de fuselage plus deux atterrisseur de voilure). [7]

2.3.4. Efforts supportés par le train d'atterrissage.

Les principaux efforts encaissés par la partie oscillante des atterrisseurs et transmis aux attaches de train par la partie non oscillante sont, d'une part, des efforts dus au poids, d'autre part, des efforts supportés à l'atterrissage. Dans ce cas, il apparaît une flexion arrière et une flexion latérale dans le cas d'atterrissage ripé ou encore lorsque le train possède des roues en porte à faux ; des efforts dus au freinage, ils se traduisent par une flexion dirigée vers l'arrière, un couple de torsion autour de l'axe de la jambe sur les roues montées en porte à faux.

2.3.5. Description du train principal (exemple BOEING 737 - NG)

Le *BOEING 737-NG* est équipé de deux trains principaux se relevant latéralement vers l'intérieur pour s'escamoter dans le fuselage. Les trains principaux absorbent les efforts d'atterrissage et tiennent la plupart du poids de l'avion. Les trains principaux transmettent aussi les forces freinant à la structure de l'avion. Chaque train est équipé d'un essieu à deux roues, le point d'articulation avant est situé sur le longeron arrière de l'aile. [7]

Chaque train comprend :

- **Une jambe de train** : à l'intérieur de la quelle est incorporé un amortisseur oléopneumatique. Cette jambe se compose d'un fut, dont la partie haute constitue une traverse, et d'un tube coulissant.
- **L'essieu** : sur le quelle sont montées les deux roues.
- **La contrefiche latérale** : elle maintient le train d'atterrissage principal dans la position «sortie», elle a une partie supérieur et une partie inférieur.
- **La contrefiche de verrouillage** : elle garde le train d'atterrissage dans la position basse.
- **Le compas** : il empêche l'essieu de tourner.
- **Les trappes (portes)** : ce sont trois portes : externe, centrale et interne
- **Un vérin hydraulique de manœuvre** : dont le corps du vérin est fixé sur la structure d'aile et la tige de vérin est fixée sur la partie supérieur de fut.
- **Deux ressort** : pour maintenir le verrouillage bas.

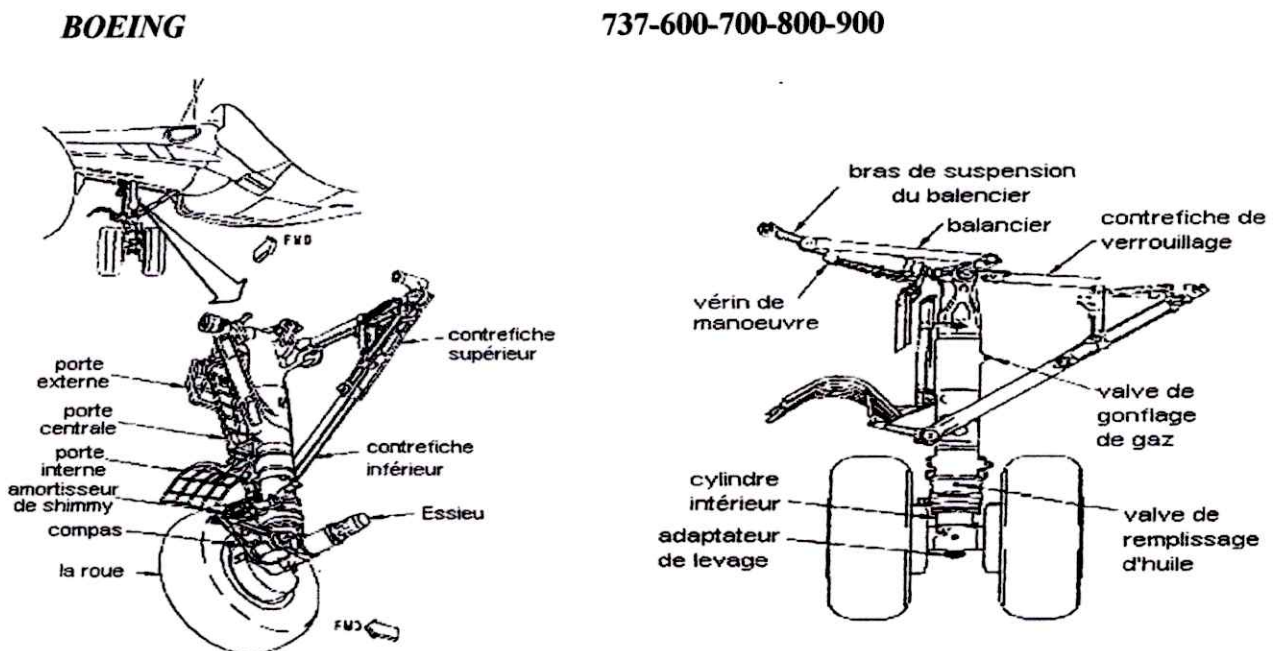


Figure. 3.17. Description générale des trains principaux [7]

2.3.6. Description du train avant (exemple BOEING 737 - NG)

Le train avant supporte le nez de l'avion et permet de diriger l'avion pendant le roulage au sol. Le train est commandé hydrauliquement et rentre dans le logement situé sous le nez de l'appareil. Les chocs sont absorbés par un amortisseur contenant de l'huile et gonflé à l'azote comprimé. Pour virer, la chemise interne de l'amortisseur tourne à l'intérieur de la chemise externe. Au cours de la sortie et de la rentrée, le train avant pivote sur un tourillon qui tourne dans des roulements fixés à des pattes de support dans le logement du train. Une contrefiche de traînée articulée stabilise le train avant longitudinalement lorsque le train est sorti. Des verrous haut et bas sont incorporés sur la contrefiche de traînée. Le train avant rentre et sort en même temps que le train principale lorsqu'on place la poignée de commande de train sur « RENTRE » ou « SORTI ».

Le train avant comprend une contrefiche de traînée (supérieure et inférieure), un amortisseur oléopneumatique et un compas. Une conjugaison mécanique et un système de câble sont connectés sur les pédales de palonnier pour commander la direction des roues avant lorsque l'amortisseur est écrasé par le poids de l'avion. Il comprend aussi deux roues orientable, un mécanisme de verrouillage composé de deux bielles (ensembles de contrefiche), deux ressorts et un vérin de verrouillage hydraulique, un vérin de commande, deux cames de centrage, un système d'orientation des roues et une ferrure support vérin. [7]

2.3.6.1. Ataches du train du nez

L'amortisseur est attaché par deux tourillons aux parois latérales du logement du train Il en est de même du contre fiche supérieur. Le train est encore relié à la paroi arrière du logement du train par les bielles de verrouillage.

Les axes de tourillon de l'amortisseur sont creux. Les câbles du système d'orientation passent par le tourillon gauche. Le tourillon droit actionne des joints tournant (*swivel joints*). Ces jointes raccordent les conduites hydrauliques du système d'orientation qui bougent avec le gain et celles qui sont Fixes.

2.3.6.2. Accessoires du train avant

1. Amortisseur

L'amortisseur se compose principalement de :

- ✓ un cylindre extérieur (outer cylinder)
- ✓ Un cylindre intérieur (inner cylinder)
- ✓ Deux coussinets (upper and lower bearings)
- ✓ une aiguille d'amortisseur solidaire du cylindre intérieur
- ✓ Un orifice
- ✓ un tube support pour l'orifice
- ✓ Une valve de ralentissement
- ✓ Une valve de gonflage
- ✓ Une valve de contrôle

La course de l'amortisseur est limitée dans un sens par le tube qui supporte l'orifice et dans l'autre par une bague qui est butée sur le coussinet inférieur.

L'amortisseur contient une certaine quantité d'huile hydraulique (mélange du MIL-H-5606 et additives) et une certaine quantité d'azote sous pression. L'huile et l'azote se trouvent au-dessus du diaphragme qui relie l'aiguille d'amortisseur au cylindre intérieur.

2. Fonctionnement

A. Avant d'atterrir :

L'amortisseur est complètement étendu sous l'action de la pression d'azote et du poids des roues.

- l'huile se trouve dans les chambres A et B.
- l'azote se trouve dans la partie supérieure de la chambre B. le volume de la chambre B est maximum et la pression d'azote est minimum.

B. Lors d'atterrissage :

L'amortisseur se comprime. L'huile contenue dans la chambre A est chassée vers la chambre B par l'orifice. Une partie d'huile passe également dans la chambre C en traversant la valve de ralentissement qui est complètement ouverte.

La restriction créée par l'aiguille d'amortisseur, limite le débit et ralentit la compression de l'amortisseur. Plus l'amortisseur se comprime, plus la section de passage de l'orifice devient faible et plus la charge supportée par l'amortisseur augmente. En même temps, l'azote se comprime, ce qui contribue également à amortir le choc. Si l'avion rebondit, l'azote sous

forte pression tend à repousser violemment le cylindre intérieur vers le bas. De nouveau, l'aiguille d'amortisseur s'oppose à l'écoulement rapide de l'huile de B vers A.

Quand l'amortisseur s'étend après le décollage, les cames s'emboîtent l'une dans l'autre et alignent les roues avec l'axe du Fuselage [7]

3. Contrefiche de traînée de train avant.

La contrefiche de traînée maintient le train avant en position verrouillée, « ENTRE » ou « SORTIE ». La contre-fiche comprend une bielle supérieure de forme triangulaire et une bielle inférieure, une biellette de commande du verrou

4. Compas de train avant

Le compas empêche une rotation intensive entre les chemises interne et externe de l'amortisseur. Le bras de compas supérieur est fixé au collier de direction et le bras inférieur est boulonné sur des pattes solidaires de la chemise interne. Les bras de compas supérieur et inférieur sont réunis par un seul axe à leur extrémité arrière ; celui-ci bloque les roues dans la position commandée par le collier de direction sans affecter le fonctionnement de l'amortisseur. L'action du vérin de direction applique au collier de direction est transmise à la chemise interne par le compas. L'axe de réunion des branches de compas peut être enlevé pour débrancher la chemise interne du circuit de direction. [7]

5. Roues et pneus

Les roues du train de nez sont constituées de deux demi-jantes assemblées par boulons et munies d'un roulement conique. Elles sont retenues axialement par un écrou à l'extrémité de l'essieu. Les pneus sont des pneus sans chambre (tubeless) « 27x7.75-15 ». Ils sont gonflés à une pression de 375 à 450 psi.

6. Trappes du train avant

Les trappes du train avant sont construites de deux portes gauche et droite. Les deux portes sont mécaniquement actionnées par le train avant. Ces portes sont des structures composées qui couvrent le train avant rétracté pendant le vol et loyalement dans la découpe du corps d'avion pour réduire la traînée aérodynamique. Les portes se déplacent avec le train, s'ouvrent quand le train est prolongé, et se ferment quand le train est rétracté. [7]

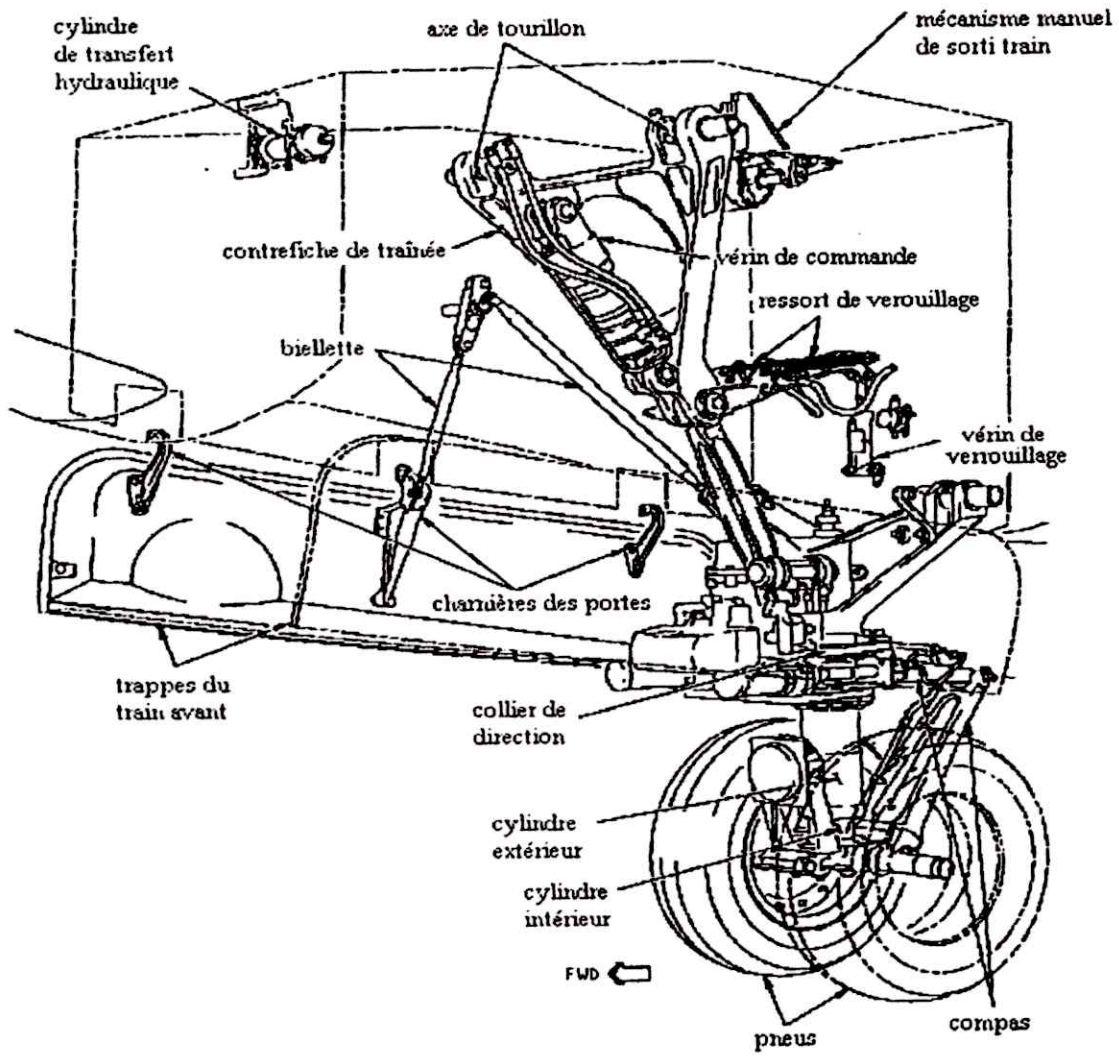


Figure. 3.20. Train d'atterrissage avant du *BOEING737-NG* [7]

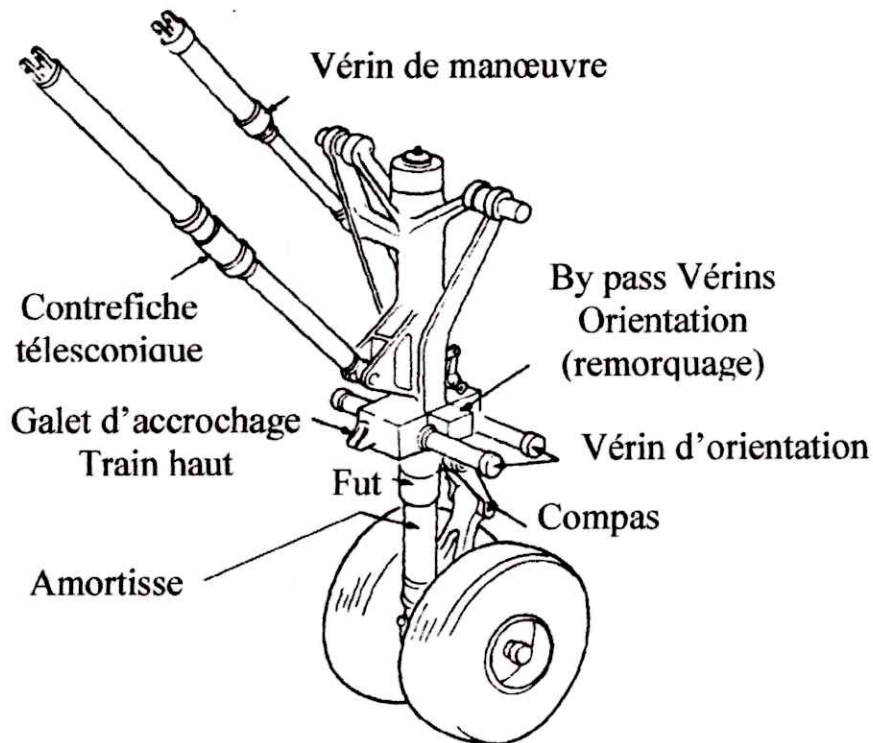


Figure. 3.21. Train d'atterrissage avant de A300 [8]

3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons illustré quelques structures qui peuvent être soumises au phénomène de flambement. Le train d'atterrissage représente un bon exemple car il supporte la charge la plus importante. Plus précisément, la Contrefiche du train d'atterrissage avant peut subir des petite déformation (au moment de freinage, les ravales de l'air), pour ne pas arriver au phénomène du flambement, le constructeur doit concevoir cet élément de façon que sa charge critique soit la plus grande possible par rapport à la charge qu'il peut subir.

Chapitre 4
Résolution numérique des
équations différentielles

1. Introduction

Plusieurs phénomènes dans la nature se présentent souvent sous forme d'équations différentielles : tremblement de terres, transfert de chaleur dans un phénomène physique, dans la biologie (quelque mathématicien ont essayé de trouver l'équation différentielle de la circulation du sang dans le corps humain), et aussi dans la déformation des matériaux qui est notre cas d'étude.

Mais, dans la plus part du temps, il est impossible de trouver une solution analytique à une équation différentielle. Est dans ce cas la résolution numérique est un grand secours pour remédier à ce problème. Le but de ce chapitre est de montrer les méthodes, les plus utilisées pour obtenir une solution numérique à une équation différentielle.

2. Définitions [9]

Soit une fonction numérique notée $y(x)$ définie sur un intervalle fermé $[a ; b]$ de \mathbb{R} et de classe C_p (continûment dérivable d'ordre p). On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}) = 0 \quad (4.1)$$

où y' représente la dérivée première par rapport à x , y'' la dérivée seconde, etc... Plus généralement, on appelle système différentiel un ensemble d'équations différentielles reliant une variable x et un certain nombre de fonction $y_i(x)$ ainsi que leurs dérivées. L'ordre du système différentiel correspond à l'ordre de dérivation le plus élevé parmi l'ensemble des fonctions.

On appelle solution de l'équation différentielle (4.1) toute fonction $y(x)$ définie sur l'intervalle $[a ; b]$ de classe C_p qui vérifie l'équation (4.1).

On appelle forme canonique d'une équation différentielle une expression du type

$$y^{(p)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}) \quad (4.2)$$

Seul ce type d'équations sera considéré dans ce chapitre. Il est facile de vérifier que toute équation différentielle canonique peut être écrite comme un système d'équations différentielles du premier ordre.

Si on introduit $p-1$ fonctions définies comme :

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ &\dots \\ y_p &= y^{(p-1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

On peut exprimer l'équation (4.2) sous la forme :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots \\ y_p' &= f(x, y, y_1, \dots, y_p) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Par souci de commodité, on note dans la suite de ce chapitre y une fonction dont telle que $y(x) \in \mathbf{R}^p$ où p est entier positif.

Soit une équation ou système différentiel (canonique) défini sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbf{R}

$$y' = f(x, y) \quad x \in [a, b] \quad y(x) \text{ et } y'(x) \in \mathbf{R}^p \quad (4.5)$$

On appelle condition de Cauchy la condition initiale

$$y(a) = y_0 \quad (4.6)$$

où y_0 est un vecteur de \mathbf{R}^p .

3. Méthodes d'intégration à pas séparé [9]

3.1 Introduction

Soit l'équation différentielle définie par les équations (4.5). On cherche à calculer une approximation de la solution $y(x)$ en un certain nombre de points x_1, x_2, x_N de l'intervalle $[a; b]$, appelé maillage de l'intervalle, avec $x_0 = a$ et $x_N = b$.

Nous supposons que la suite des points est choisie de manière à ce que la distance entre deux points consécutifs soit constante et on pose.

$$h = \frac{(b-a)}{N} \quad (4.7)$$

Ce qui donne :
$$x_k = a + kh \quad (4.8)$$

Avec $k=1,2,\dots,N$

On appelle méthode d'intégration à pas séparé toute formule de récurrence de la forme :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\phi(x_k, y_k, h) \\ k &= 0,1,\dots,N \quad \text{avec } y_0 \text{ donnée} \end{aligned} \quad (4.9)$$

La fonction ϕ est supposée continue par rapport aux trois variables x, y, h . On appelle méthode à pas multiples les méthodes telles que y_{k+1} dépend de plusieurs valeurs précédentes $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}$.

3.2 Méthode d'Euler

Cette méthode est définie par :

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_k, x_k) \quad (4.10)$$

Avec y_0 donné.

Cette méthode revient à approximer la solution au voisinage de x_k par sa tangente et nous allons voir qu'elle est d'ordre 1. En effet, si la solution est suffisamment dérivable, on peut écrire :

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k + \theta h) \quad (4.10)$$

Avec $0 \leq \theta \leq 1$. ce qui donne

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hf(y_k, x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k + \theta h) \quad (4.11)$$

D'après la définition de la méthode :

$$\frac{1}{h}(y(x_k + h) - y(x_k) - \phi((y_k), x_k, h)) = \frac{y(x_k + h) - y(x_k)}{h} - f((y_k), x_k) \quad (4.12)$$

Ou

$$\frac{1}{h}(y(x_k + h) - y(x_k) - \phi((y_k), x_k, h)) = h \frac{y''(x_k + \theta h)}{2} \quad (4.13)$$

Si la dérivée seconde de y est bornée par une constante K dans l'intervalle d'intégration $[a, b]$, on aura

$$\max \left\| \frac{1}{h}(y(x_k + h) - y(x_k) - \phi((y_k), x_k, h)) \right\| < kh \quad (4.14)$$

ce qui montre que la méthode est d'ordre un.

La méthode d'Euler est une méthode numérique peu coûteuse numériquement, mais peu précise quand on intègre sur plusieurs pas de temps. Des améliorations sont possibles dès que l'on considère des points intermédiaires, ce que nous allons voir ci-dessous en considérant des méthodes dites de **Runge-Kutta (RK)**.

3.3 Méthodes RK implicites à un point

La formule de récurrence est définie par la relation :

$$y_{k+1} = y_k + h[(1 - \theta)f(x_k, y_k) + \theta f(x_{k+1}, y_{k+1})] \quad (4.15)$$

où θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$ (si $\theta = 0$, on retrouve la méthode d'Euler). Si $\theta = 1/2$, la méthode est d'ordre 2 et s'appelle la méthode des trapèzes. Si $\theta \neq 1/2$, la méthode est d'ordre 1.

3.4 Méthodes RK explicites à 2 points intermédiaires

Ces méthodes sont définies par les relations

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= y_k + \frac{h}{3} f(x_k, y_k) \\ y_{k,2} &= y_k + \frac{2h}{3} f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_{k,1}\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4} \left(f(x_k, y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_{k,2}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ou par

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) \\ y_{k,2} &= y_k + h \left(f(x_k, y_k) + 2f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,1}\right) \right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} \left(f(x_k, y_k) + 4f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,1}\right) + f(x_{k+1}, y_{k,2}) \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ces deux méthodes sont d'ordre 3. La première est parfois appelée méthode de **Heun**.

3.5 Méthodes RK explicites à 3 points intermédiaires

La méthode suivante est de loin la plus connue et utilisée. Les relations de récurrence sont les suivantes.

$$\begin{aligned} y_{k,1} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) \\ y_{k,2} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,1}\right) \\ y_{k,3} &= y_k + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,2}\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} \left(f(x_k, y_k) + 2f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,1}\right) + 2f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k,2}\right) + 2f(x_{k+1}, y_{k,3}) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cette méthode est d'ordre 4.

3.6 Formule générale des méthodes RK explicites

Les méthodes de Runge Kutta s'écrivent de manière générale :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= h[f(x_k + \theta_1 h, y_k + \alpha_{1,1} K_1 + \alpha_{1,2} K_2 + \dots + \alpha_{1,n} K_n)] \\
 K_2 &= h[f(x_k + \theta_2 h, y_k + \alpha_{2,1} K_1 + \alpha_{2,2} K_2 + \dots + \alpha_{2,n} K_n)] \\
 &\dots\dots\dots \\
 K_n &= h[f(x_k + \theta_n h, y_k + \alpha_{n,1} K_1 + \alpha_{n,2} K_2 + \dots + \alpha_{n,n} K_n)] \\
 y_{k+1} &= y_k + h[\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 + \dots + \gamma_n K_n]
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Les coefficients sont déterminés afin que l'ordre soit le plus élevé possible. On note A la matrice de coefficients (α_{ij}) , Γ le vecteur des coefficients γ_i et θ le vecteur des coefficients θ_i .

Quand la matrice A est triangulaire inférieure stricte, $\alpha_{ij} = 0$ pour $j \geq i$, on dit que la méthode est explicite. Si seule la partie triangulaire supérieure est nulle, $\alpha_{ij} = 0$ pour $j > i$, la méthode est dite implicite ; sinon elle est totalement implicite.

Une représentation en forme de tableau des équations (4.19) donne

	γ_1	γ_2	...	γ_n
θ_1	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$...	$\alpha_{1,n}$
θ_2	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$...	$\alpha_{2,n}$
...
θ_n	$\alpha_{n,1}$	$\alpha_{n,2}$...	$\alpha_{n,n}$

Avec cette représentation, la méthode Runge-Kutta explicite à deux points qui est d'ordre 4 est représentée par le tableau suivant :

	1/6	1/3	1/3	1/6
0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
0	0	0	1	0

4 Méthode d'intégration à pas variables [9]

4.1 Introduction

Un intégrateur "intelligent" possède une procédure de contrôle de la méthode de convergence, c'est à dire un moyen d'estimer l'erreur commise par le calcul sur un pas d'intégration et la possibilité de choisir en conséquence un nouveau pas si le système différentiel aborde une région où la fonction prend des valeurs plus importantes. Le calcul de

cette estimation entraîne un surcoût de calcul, qu'il convient de bien gérer afin de minimiser cet effort supplémentaire.

L'idée la plus simple pour estimer cette erreur consiste à calculer la solution donnée par un algorithme (de Runge-Kutta d'ordre 4 par exemple) pour deux pas d'intégration différents, h et $2h$. Soit $y(x+2h)$ la solution exacte à $x+2h$ et $y(x+h)$ la solution exacte à $x+h$, on a

$$y(x+2h) = y_1 + (2h)^5 \phi + O(h^6) \quad (4.20)$$

$$y(x+h) = y_2 + 2(h^5) \phi + O(h^6) \quad (4.21)$$

où ϕ est une fonction qui reste constante sur l'intervalle $[x; x+2h]$ à l'ordre h^5 .

La première équation correspond à une intégration avec un pas égal à $2h$ tandis que la seconde correspond à deux intégrations successives avec un pas de h . La différence

$$\Delta = y_2 - y_1 \quad (4.22)$$

fournit une estimation de l'erreur commise avec un pas d'intégration h .

5. Méthodes de Runge-Kutta "embarquées" [9]

Une autre méthode pour estimer l'erreur commise par l'utilisation d'un pas h est due à Fehlberg. Il utilise le fait qu'en choisissant des valeurs particulières de γ_i (voir section 3.7), on peut changer l'ordre de l'évaluation de la solution pour un pas de temps h donné.

$$y_1 = y(x) + \sum_{i=1}^6 \gamma_i K_i + O(h^6) \quad (4.23)$$

$$y_2 = y(x) + \sum_{i=1}^6 \gamma_i^* K_i + O(h^5) \quad (4.24)$$

Ce qui conduit à une estimation de l'erreur

$$\Delta = \sum_{i=1}^6 (\gamma_i - \gamma_i^*) K_i \quad (4.25)$$

Pour déterminer la valeur du pas la plus adaptée, on note tout d'abord que Δ est calculé à l'ordre h^5 . Si on a un pas h_1 qui donne une erreur Δ_1 , le pas h_0 donné pour une erreur Δ_0 fixée à l'avance, est donné par la relation

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}} \quad (4.26)$$

Il est donc possible, pour une valeur de $|\Delta_0|$ donnée à l'avance de diminuer h_0 pour obtenir une erreur plus faible ou d'augmenter h_0 de manière raisonnable si Δ_1 est inférieur en valeur absolue à $|\Delta_0|$.

Une difficulté apparaît pour ce type de méthode quand on considère un système différentiel à plusieurs variables. L'estimation de l'erreur est alors donnée à priori par un vecteur. La généralisation de la procédure ébauchée reste possible.

6. Conclusion

Les méthodes exposées ci-dessus permettent d'obtenir une solution de plus en plus précise pour des systèmes différentiels où le nombre de fonctions n'est pas très important. Pour conclure nous pouvons dire que la méthode d'Euler est la plus simple mais elle est moins utilisée (amplification des erreurs et des arrondis) et la stabilité dépend du pas utilisé. Tandis que la méthode de Rang-Kuta est plus utilisée : faciles à programmer (même si plus lourdes en calcul), stables et le pas peut être modifié sans difficulté.

Chapitre 5
Conception de programmes

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons implémenter les méthodes du calcul de la charge critique (pour des structures simples) et les méthodes mathématiques pour la résolution numérique des équations différentielle qui nous aident à prendre en considération de structures plus complexes qui ont une équation différentielle non résoluble analytiquement.

2. Les Cas d'utilisations

Dans les cas d'utilisation, on présente les interactions entre l'utilisateur et le système. D'une manière générale l'utilisateur va choisir la méthode de calcule de la charge critique et le type de structure (dans notre cas, nous avons pris en considération seules les structures poutre droites avec différentes condition limite : soumise à une charge verticale, biarticulé, encastré libre,). et aussi la méthode de résolution de l'équation différentielle.

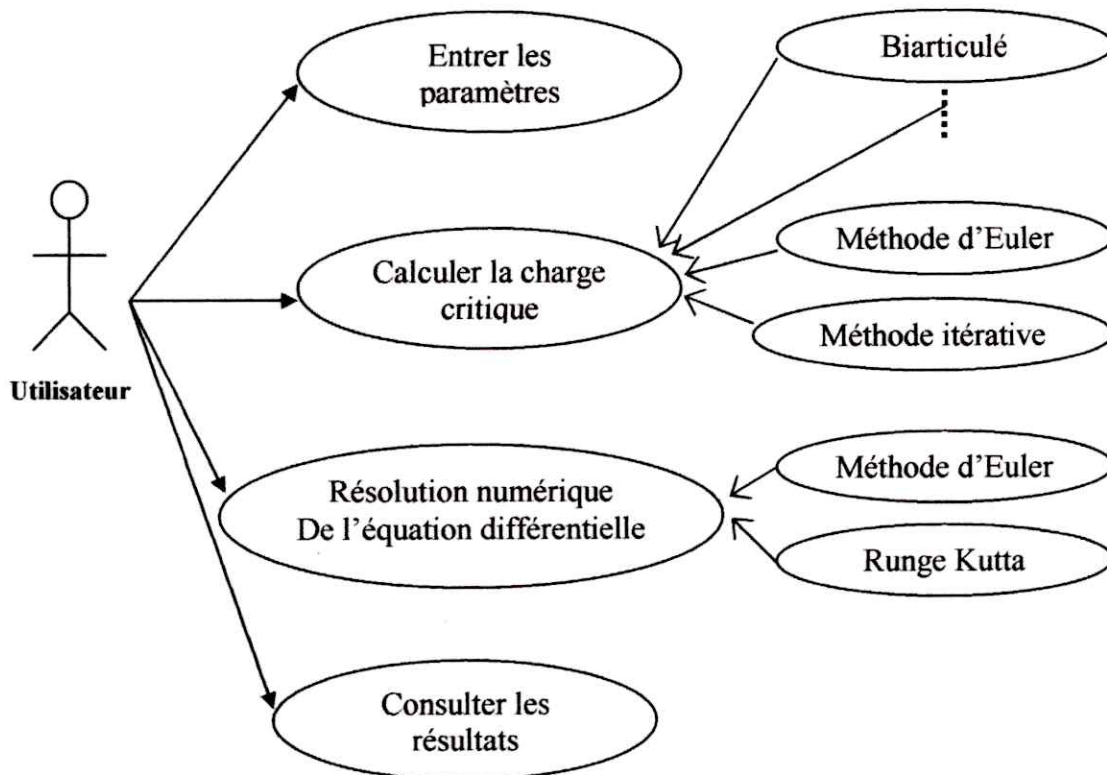


Figure 5.1. Cas d'utilisation

3. Calcule de la charge critique

3.1. Méthode d'Euler

Le fonctionnement du module (ou programme) de calcul de la charge critique est schématisé par la figure suivante.

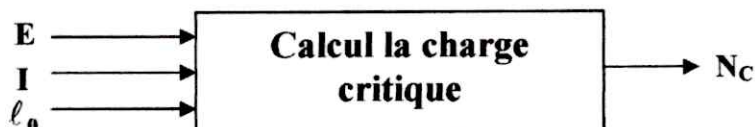


Figure 5.2. schéma Fonctionnel du module du calcul pour la méthode d'Euler

E : représente le module de Yong, il caractérise le matériel de la structure étudiée.

I : Moment d'inertie, c'est une caractéristique géométrique de la structure étudiée.

l_0 : La distance entre deux points d'inflexion de la déformation.

3.2. Méthode itérative

La méthode itérative de résolution approchée consiste à se donner a priori une déformée (φ_0) (raisonnable) c'est -à- dire notamment satisfaisant aux condition aux limites. Cette déformée est donnée par l'utilisateur sous forme d'une fonction polynomiale. Le schéma fonctionnel du module de calcul est le suivant.

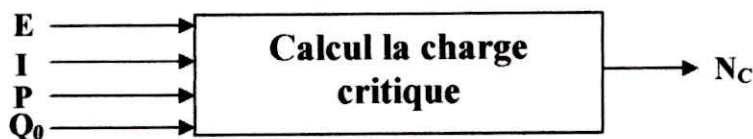


Figure 5.3. Schéma Fonctionnel du module du calcul pour la méthode itérative

P : La charge exercée.

Q_0 : une déformée respectant les conditions aux limites.

❖ **Algorithme**

1. Partir d'une déformée $Q_0(x)$ respectant les conditions aux limites, $Q(x) = Q_0(x)$
2. Calculer les sollicitations $M(x) = f(Q(x))$;
3. Résolution de l'équation différentielle $EI v'' = M(x) = f(Q(x))$;
On obtient $Q_1(x)$
4. $Q(x) = Q_1(x)$;
5. Si condition d'arrêt non vérifiée aller à 2
6. fin

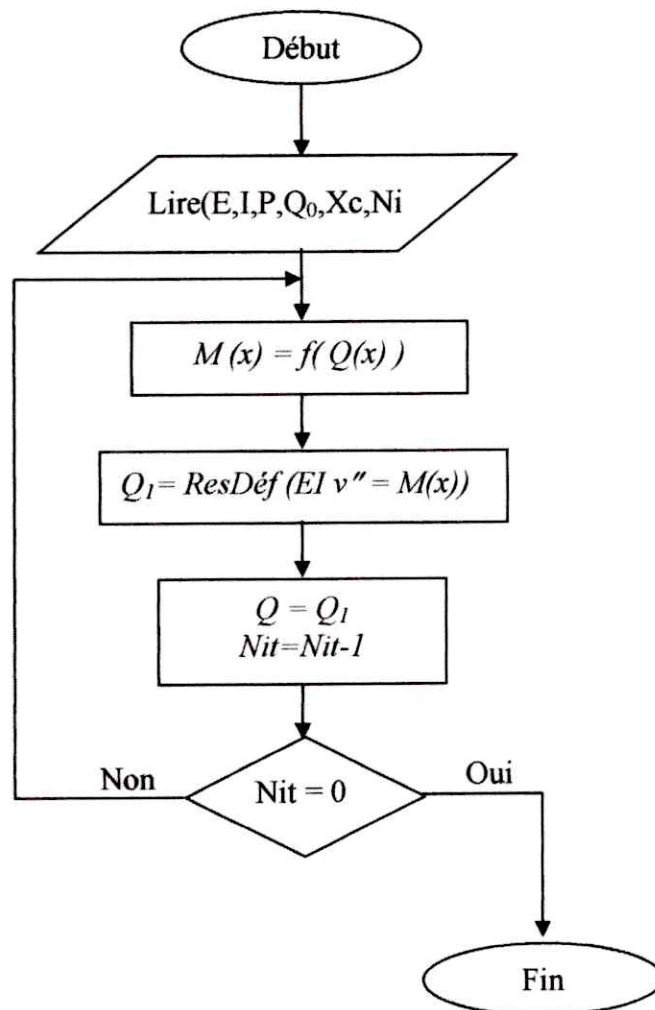
❖ **Organigramme**

Figure 5.4. Organigramme de la méthode itérative

4. Résolution numérique des équations différentielles

Schéma fonctionnel

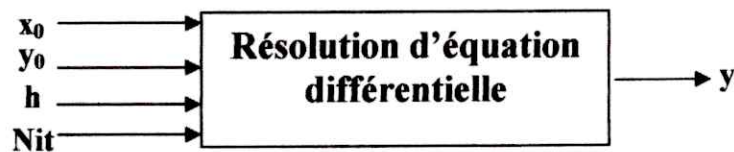


Figure 5.6. Schéma Fonctionnel du module du calcul de l'équation différentielle

4.1 Méthode d'Euler

Soit à résoudre l'équation différentielle de la forme $y' = f(x,y)$

❖ Algorithme

1. Soit x_0, y_0 les valeurs initiale, h le pas, et Nit le nombre d'itération.
2. $x_i = x_0 ; y_i = y_0 ;$
3. $x_{i+1} = x_i + h ; y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i) ;$
4. $Nit = Nit - 1 ;$
5. si $Nit = 0$ aller 8 ;
6. $x_i = x_{i+1} ; y_i = y_{i+1} ;$
7. aller à 3 ;
8. retourner $y_{i+1} ;$
9. fin

❖ Organigramme

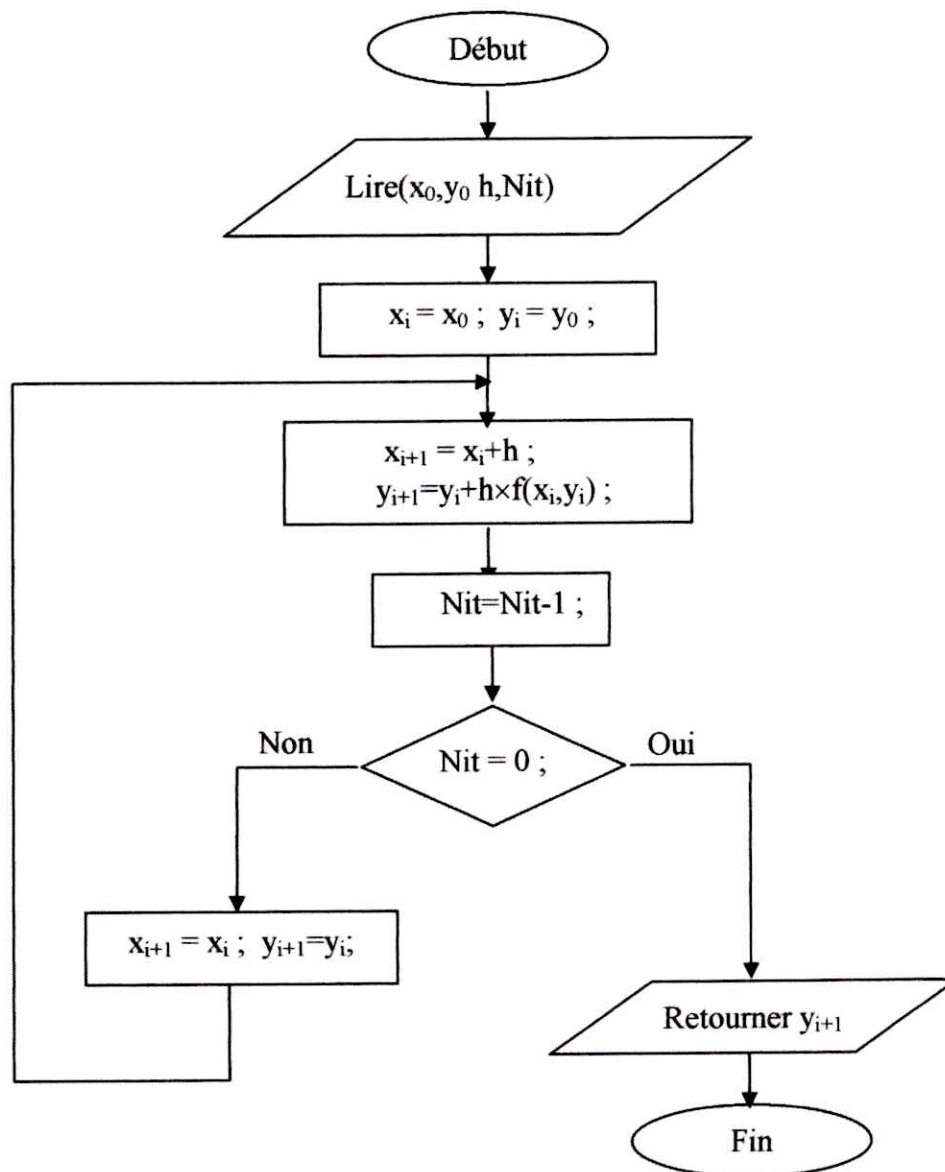


Figure 5.7. L'organigramme de la méthode d'Euler pour la résolution de équation différentielle

4.2 Méthode Runge Kutta d'ordre 4

Soit à résoudre l'équation différentielle de la forme $y' = f(x,y)$

❖ Algorithme

1. Soit x_0, y_0 les valeurs initiale, h le pas, et Nit le nombre d'itération.
2. $x_i = x_0 ; y_i = y_0 ;$
3. $x_{i+1} = x_i + h ;$
 $k_1 = h \times f(x_i, y_i) ;$
 $k_2 = h \times f(x_i + h/2, y_i + k_1/2) ;$
 $k_3 = h \times f(x_i + h/2, y_i + k_2/2) ;$
 $k_4 = h \times f(x_i + h, y_i + k_3) ;$
 $y_{i+1} = y_i + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) ;$
4. $Nit = Nit - 1 ;$
5. si $Nit = 0$ aller 8 ;
6. $x_i = x_{i+1} ; y_i = y_{i+1} ;$
7. aller à 3 ;
8. retourner $y_{i+1} ;$
9. fin

❖ Organigramme

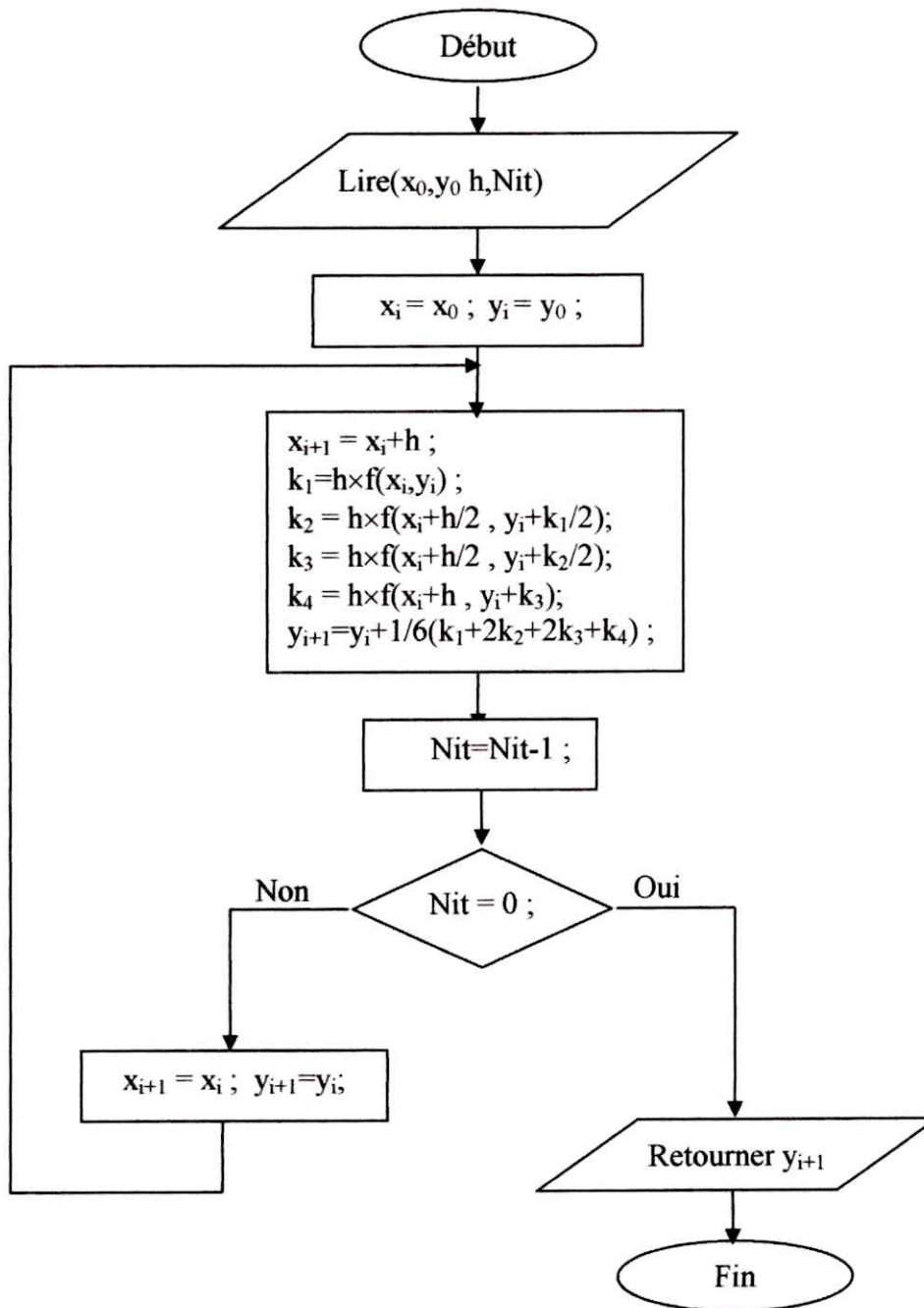


Figure 5.8. L'organigramme de la méthode de Runge Kutta pour la résolution de équation différentielle

5. Description de l'interface

5.1 Calcul de la charge critique

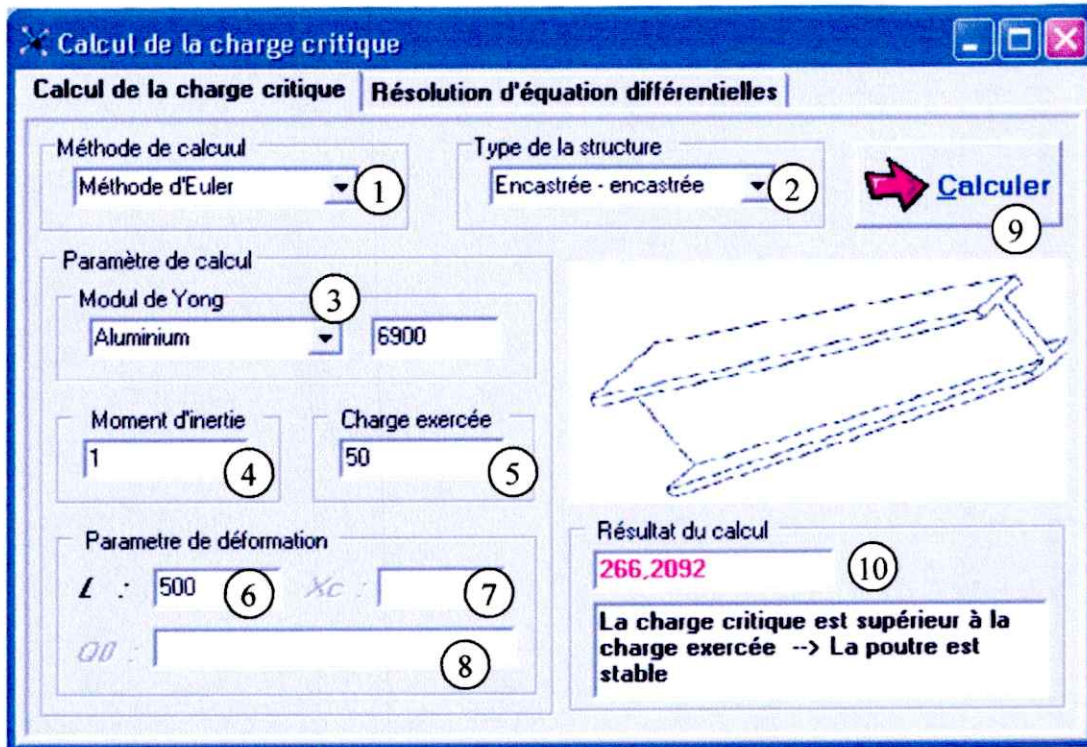


Figure 5.9. La fenêtre de calcul de la charge critique

- 1 : Sélectionner la méthode de calcul (Euler / Itérative).
- 2 : Type de la structure.
- 3 : Module de Yong , pour des matériaux non enregistrés, l'utilisateur doit entrer la valeur.
- 4 : Moment d'inertie.
- 5 : la valeur charge exercée.
- 6 : La longueur de la poutre.
- 7 : pour la méthode itérative, la charge critique est égale à $Q(X_c)$;
- 8 : L'équation de la courbe de déformation.
- 9 : Lancer le calcul.
- 10 : contient le résultat du calcul.

5.2 Résolution d'équation différentielles

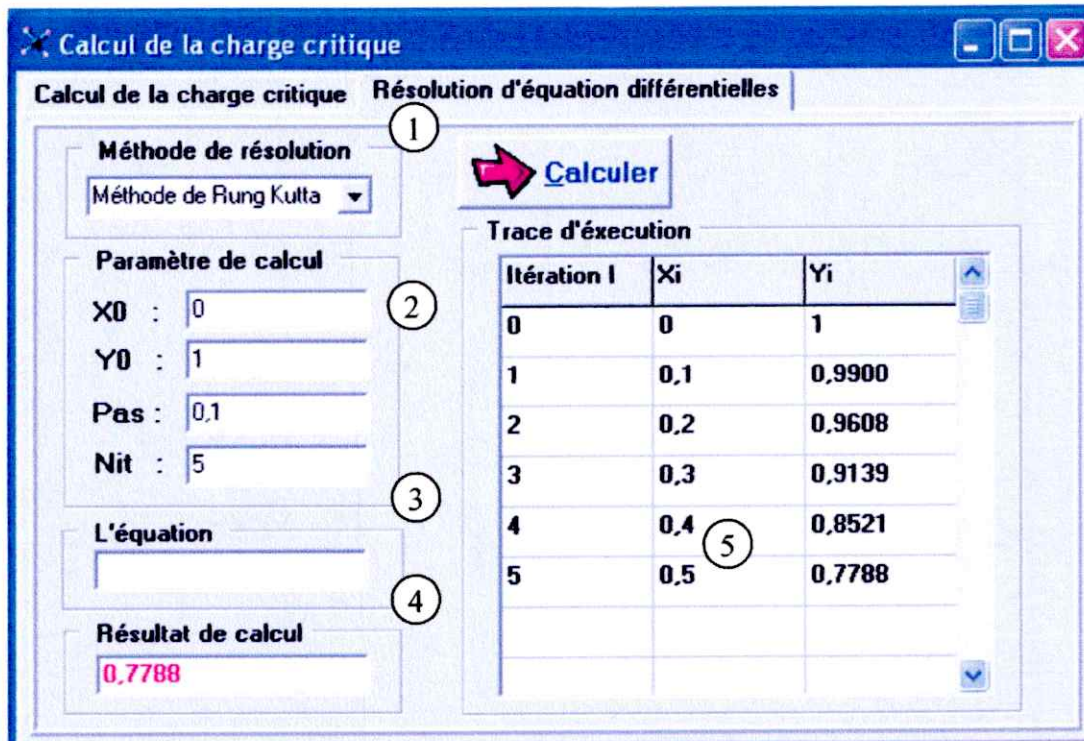


Figure 5.10. La fenêtre de résolution d'équation différentielle

1 : pour sélectionner la méthode de résolution.

2 : pour donner les paramètre de calcul

X0, Y0 : les condition initiales.

Pas : le pas d'incrémentation (h).

Nit : le nombre d'itération.

Par exemple si nous voulons trouver la valeur de $f(0,5)$ avec les condition initiales $f(0)=1$;

Et nous avons choisi Nit = 5 ; alors le pas sera égal à $Pas = \frac{(x - x_0)}{Nit} = \frac{(0,5 - 0)}{5}$.

3 : l'équation qu'on veut résoudre. Nous avons pris en considération seulement $y'=g(x)$, où $g(x)$ est un polynôme, pour des équations plus complexes nous devons intervenir au niveau du programme.

4 : Le résultat obtenu.

5 : les valeurs de x_i et y_i pour chaque itération.

Remarque :

L'exécution précédente correspond à l'équation : $y' = - 2 x y$.

6. Interprétation des résultats sur un exemple :

Prenons comme exemple une poutre droite d'aluminium. Sa longueur est de 500 mm, et le moment d'inertie égale à 1.

Considérons les cas suivants :

- Encadrée – encastrée : $N_C = 266, 2092$.
- Encastrée – Appuie : $N_C = 95, 3767$.
- Encastrée – Appuie avec deux appuis au milieu : $N_C = 404, 2436$

La poutre qui a la plus grande charge critique entre les deux premier cas est la poutre encastrée – encastrée. Pour augmenter la charge critique, on ajoute des appuis au milieu comme le montre le résultat du troisième cas.

Conclusion générale

Durant ce mémoire, nous avons présenté le phénomène du flambement ainsi les différentes méthodes de calcul de la charge critique, nous n'avons pris en compte que celles pour les poutres droite qui sont relativement des structures simples. Pour des structures plus complexes le processus n'est pas assez facile, et pour facilité la tache nous avons développé deux méthodes pour la résolution numérique des équations différentielles car dans la plus part du temps, le calcul de la charge critique fait appel à la résolution d'une équation différentielle.

L'étude du phénomène du flambement est essentielle pour quelques structures de l'avion qui subies des charges de compression influençant sur la résistance de ces structures, pour cette raison les constructeurs doivent concevoir ces dernières de telle sorte que la charge critique soit plus grande par apport à la charge exercée.

Notre objectif est d'avoir un charge critique qui tend vers l'infinie avec une grande pression, et ça va augmenter la durée de vie de la pièce. En aéronautique, malgré que ce cas est vérifié, il faut faire régulièrement (en nombre d'heure de vol) la maintenance des pièces.

Pour amélioré notre travail il est intéressant d'ajouter le calcul de la charge critique pour des structures plus complexes et cela n'est pas assez facile, mais le processus est simplifié un peu parce que notre outil contient déjà le module pour le calcul différentielle. Le calcul de la charge critique nécessite le calcul des moments d'inertie (pour notre cas ils seront introduit par l'utilisateur), donc il sera intéressant d'avoir un module qui le calcul et s'est évidant ça sera pour des structures particulières.

- [1] Résistance Des Matériaux, Application FLAMBEMENT. Année 2004-2005
<http://eleves.estp.fr/cours/rdm/tp2/>
- [2] John BOTSIS, MECANIQUE DES STRUCTURES : *flambage des poutres droites*.
http://stephan.walter.name/wiki/images/1/17/MdS-Chapitre_12.pdf
- [3] Serge LAROZE. *Résistance des matériaux et structures*. Eyrolles, Masson, Paris 1980.
- [4] http://web.gci.ulaval.ca/lab_virtuel/flambement/theo_contenu.html
- [5] Boukeffoussa Zerrouk .Mémoire de fin d'étude : Effet de la longueur sur la déflexion des ailes. Université saad dahleb de Blida. Institut d'aéronautique. Promotion 2002-2003.
- [6] A.Poujade. Cellule et systèmes. Institut aéronautique Jean Mermoz. 1991
- [7] Balit Fouad, Amari Khaled. Mémoire de fin d'étude : élaboration des procédures de travail et suivi d'un train d'atterrissage avant du boing 737 NG par une révision générale. Université saad dahleb de Blida. Institut d'aéronautique. Promotion 2003-2004.
- [8] J.C.Ripoll. cellule-circuits. Département transport aérien. 1990
- [9] Pascal Viot, Méthodes d'analyse numérique Cours du DEA "Modélisation Dynamique et Statistique des Systèmes Complexes". Laboratoire de Physique Théorique des Liquides, Paris janvier 2003.