

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de SAAD DAHLEB de Blida

Département d'aéronautique

Projet de fin d'études
En vue de l'obtention du
Diplôme d'études universitaires appliquées

Option: structure

Thème :

ETUDE A LA RESISTANCE ET VIBRATOIRE
D'UN ARBRE PRINCIPAL DANS UN MOTEUR
AERONAUTIQUE DE LABORATOIRE

Réalisés par:

HANI Mohamed
BETTAHAR Abdel'kader

Promoteur: ALLALI Abederrazek

Co-Promoteur: BERGUEL Said

: Benmisra Abdel'kader

Promotion: 2004/2005



DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A celle qui a tant et sacrifie pour moi, ma très chère mère.

A mon cher père qui a été toujours là pour moi.

A mon frère (ayoub)

A mes sœurs surtout naima

A noha et roà

A tout ma famille

A mon binôme A.E.K.

Mes très chers amis

A tout ceux qui nous aimes.

MOHAMED

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère

A mon très cher père

A mes frères surtout hamza

A mes sœurs surtout férial

Et à toute ma famille bettahar

Et mes oncles et tentes

A mon binôme MOHAMED

A mes fidèles amis

*A tous ceux que j'ai connu, et qui mon soutenus et que me sont
chers*

ABDELKADER
MERCİ

SOMMAIRE

Introduction

CHAPITRE.I: Description générale du moteur GILKES-GT-117

1/Banc d'essai GILKES-GT-117.....	3
2/Désignation.....	3
3/Les principaux organes du moteur.....	3
3.1/L'entrée d'air.....	4
3.2/Chambre de combustion.....	6
3.3/Turbine.....	7
3.4/Tuyère d'éjection.....	8

CHAPITRE.II: Etude de vérification de l'arbre

II.Etude RDM de l'arbre de transmission.....	14
1/Introduction	14
1.1/Etude statique.....	15
1.2/Détermination les réactions inconnus des A et b.....	18
1.3/Dimensionnement et calcul des arbres.....	18
1.4/Formule donnant le diamètre de l'arbre:.....	20
2/calcul de l'effort tranchant et du moment fléchissant	20
2.1/Déterminons les efforts tranchant des les différent tranchant.....	21
2.2/Déplacements des poutres en flexion	27
2.3/Détermination des déplacements des poutres à section variable.....	29
3/Torsion.....	32

CHAPITRE.III: Etude vibratoire

1/ Détermination des caractéristiques des éléments de rotor	38
1.1/Disque.....	38
1.2/Arbre	40
1.2.1/Energie cinétique	40
1.2.2/Energie de déformation	41
1.3/Palier	43
1.4/Balourd	44
2/La méthode de Rayleigh-Ritz	46
3/équation du mouvement.....	49

CHAPITRE.IV : L'équilibrage d'un arbre principal

1/généralité.	53
1-1/Vibrations des machines tournantes	53
1-2/Equilibrage des machines tournantes	54
1-3/les caractéristiques des rotors à équilibrer.....	54
1-3-1/Rotors rigides	55
1-3-2/Rotors élastiques	55
1-4/équilibrage des machines spécialisées et équilibrage sur site	56
1-5/Le balourd	56
1-6/Equilibrage statique	57
1-7/Equilibrage dynamique.....	58
1-8/Types de corrections	61
2/Equilibre des rotors rigides.....	61
2-1/Les trièdres de références	61
2-2/Les plans de référence.....	62
2-3/Les balourds	63
2-4/Le torseur des efforts agissant sur le rotor	64
2.5/Le lancer (RUN).....	65
3/Méthodes d'équilibrage des rotors rigides.....	65
3-1/Méthode de coefficient d'influence.....	65
3.2/Méthode d'équilibrages sans mesure de phase	67
3.3/Masse correctrice dans un plan.....	69

Conclusion

Bibliographie

Annexe

Introduction

Introduction :

Le domaine d'aéronautique est très vaste nous avons pris une petite partie qui touche la branche de conception d'un moteur mono -corps mono flux, nous avons pensé comment faire le calcul à la résistance et vibratoire de l'arbre principal.

Cet arbre supporte la charge de tous les modules, qui constitue le moteur de labos. A savoir l'entre d'air qui passe le fluide d'air libre à un compresseur axial, au compresseur centrifuge et qui se trouve appuyer sur un palier a roulement. Après quoi le fluide comprimé injecté dans la chambre de combustion ou il sera mélangé avec le carburant. Et qui crée une explosion. Le gaz qui se dégage passe par une turbine. Qui le comprime de nouveau, et sera ventilé vers la tuyère d'injection. Cette turbine est conçue d'un seul étage et qui est composée d'un stator fixé avec le corps du moteur et d'un rotor qui forme avec l'extrémité de l'arbre principal un palier lisse. Les mesures de conception et de calcul des vérifications ont été prises sur le moteur de labos pour pouvoir déterminer une simulation optimale.

Dans la 1^{er}: chapitre : nous avons soulevé l'étude descriptive du moteur aéronautique de labos, ou nous avons traité en détail le dessin de définition de l'assemblage pour pouvoir préciser le dimensionnement exacte de l'arbre principal.

Le II^{eme} : chapitre : le calcul à la résistance a été étudiée en détail. le problème des charges réparties qui provoquent la flexion est résolu.

Le III^{eme} chapitre : nous avons essayé de créer une comparaisons entre deux modèles différents de vibrations le calcul par les élément finis et une méthode énergétique et une conclusion a été proposée

Le IV^{eme} chapitre : l'équilibrage de l'arbre principal a été soulevé d'une façon générale

Chapitre I
Description générale du banc
d'essai
GILKES GT-117

I-1 Banc d'essai GILKES GT — 117: [1]

Le banc d'essai GT-117 est un réacteur mono corps mono flux de construction anglaise de la maison GILKES, dont le symbole « GT-117 ». voir page (1 1).

I-2 Désignation :

L'utilisation d'une pièce quelconque exige la connaissance de cette dernière soit ses différentes caractéristiques opérationnelles ou bien le fonctionnement de cette pièce et différents domaines d'utilisation.

GT : Turbine a gaz.

117 : Classe ou famille ayant approximativement les mêmes dimensions.

I-3 Les principaux organes du moteur :

Dans sa formule la plus simple, le réacteur comprend :

- Un compresseur aspirant l'air extérieur en amont.
 - Une chambre de combustion dans laquelle l'air comprimé est brûlée avec un apport de carburant. Une turbine qui est mue par les gaz de combustion pour suivent leur détente à la sortie d la turbine en produisant la poussée.
- Le principe de fonctionnement d'un réacteur se caractérise par le fait que, tout au long du cycle, le fluide de travail est l'objet de transformation de vitesse en pression et inversement.

I-3-1 L'entrée d'air :

C'est une conduite de section variable calculée de telle sorte que l'énergie cinétique de l'air incident se transforme en énergie de pression. La forme donner à cette conduite différer selon où la vitesse de vole et inférieure ou supérieure a la vitesse du son.

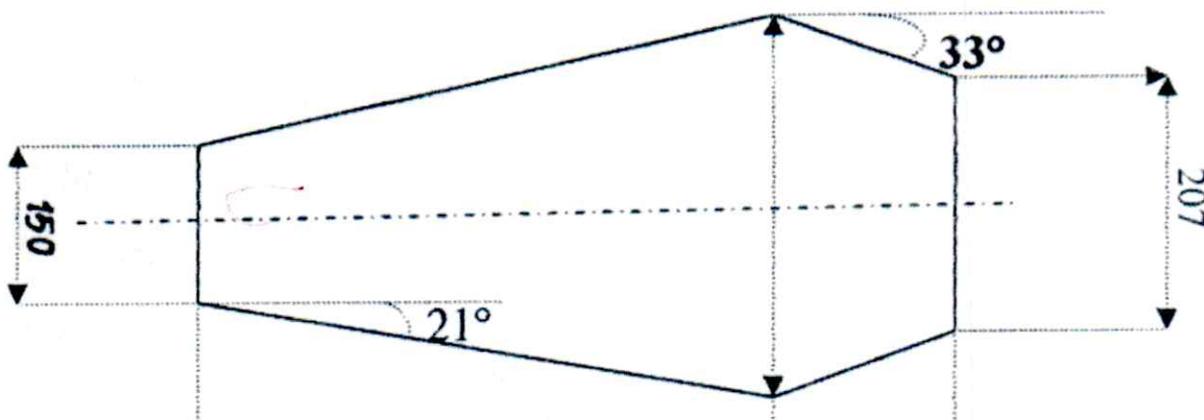


Fig (I.1)

a) Compresseur axial :

Il se compose de deux étages, dont chacun d'eux est constitué dedeus grilles d'aubes montées perpendiculairement à la périphérie d'une roue.

Ces

grilles sont alternativement fixes et mobiles et se font face l'une à l'autre (figl-2).Les grilles fixes sont montées sur le stator et les grilles mobiles sur le rotor.

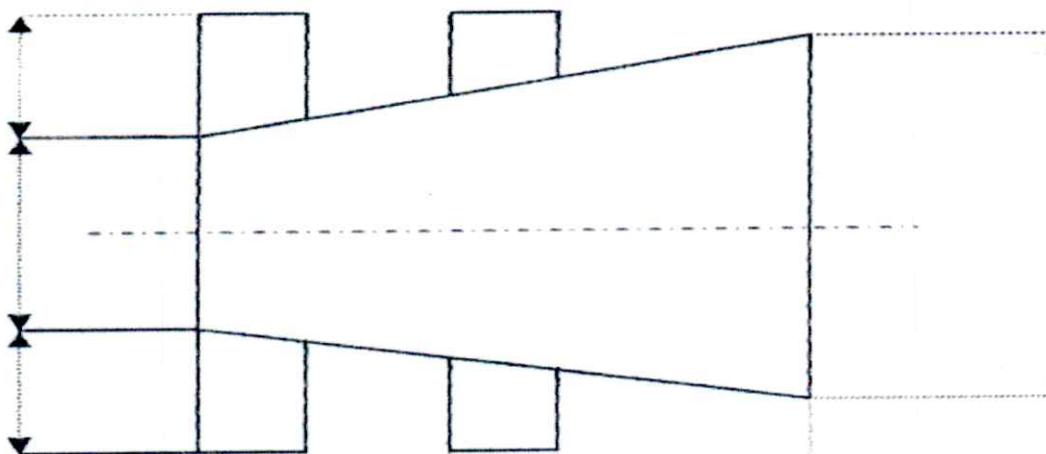


Fig :(I-2) dimension des rotors de la partie axiale

1^{er} Etage

- Rotor : nombre d'aubes = 25

- Stator : nombre d'aubes = 32

2^e Etage :

Rotor : nombre d'aubes = 25.

- Stator : nombre d'aubes = 29.

Remarque :

Toutes les dimensions inscrites sur les schémas sont en millimètres

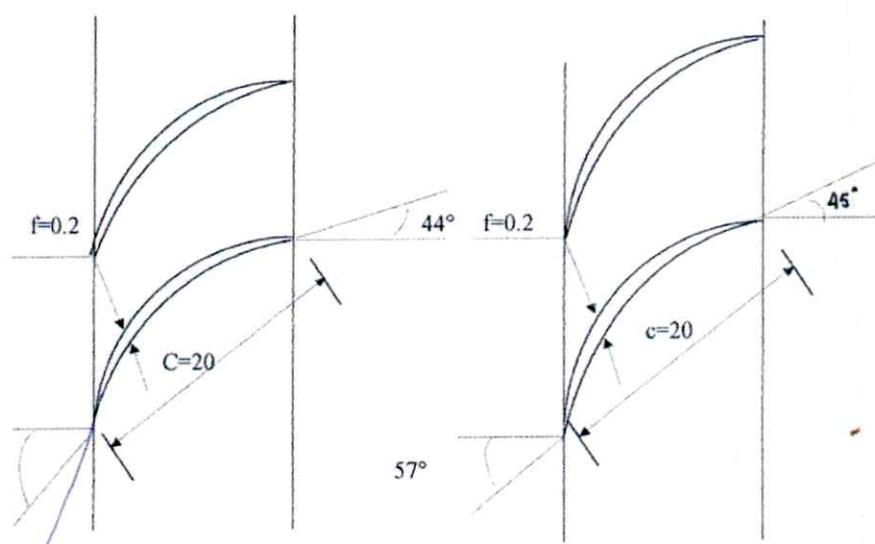


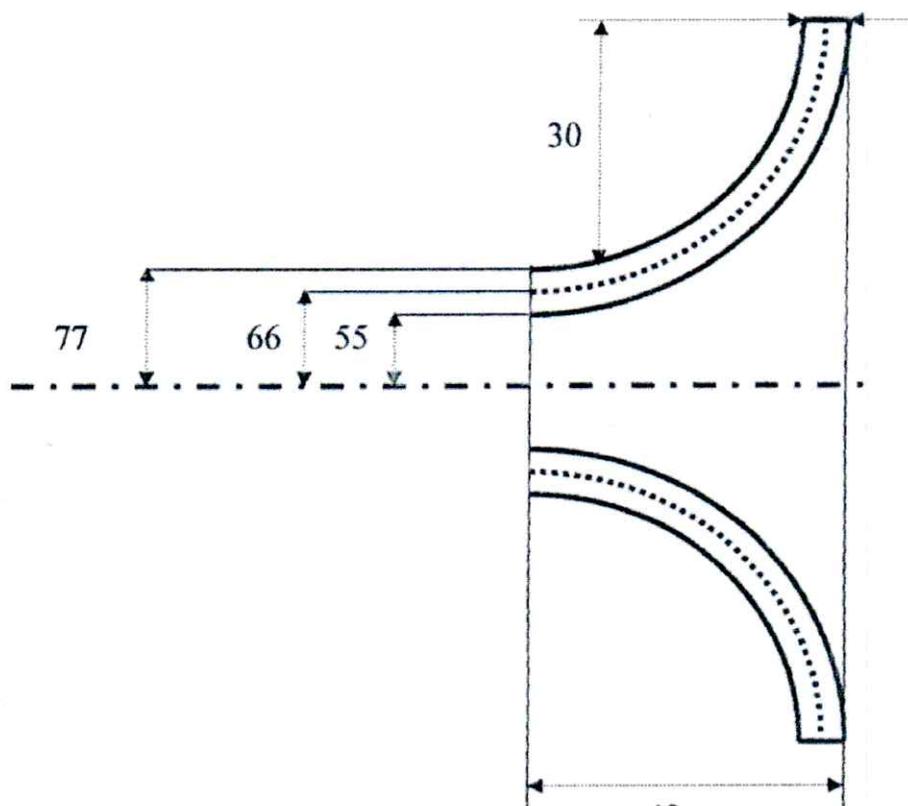
Fig (I-3) caractéristiques des profils des rotors de la partie axiale

b) Compresseur centrifuge :

Il se compose d'un disque en rotation sur des faces où sont montées des plaques qui canalisent l'air vers la périphérie. Autour du disque se trouve une grille fixe, qui comme dans un étage de compresseur axial, transforme en pression une partie de la vitesse absolue à la périphérie du disque.

Du fait de l'effet centrifuge, un compresseur centrifuge conduit à un rapport de pression plus grand qu'un étage de compresseur axial. Cependant, la possibilité de monter en série deux étages axiaux permet de multiplier

considérablement le rapport de pression unitaire.



Fig(I.4)

I-3-2 Chambre de combustion :

Chambre de combustion de type S (flux inversé)

Nombre des injecteurs = 09

1-3-3 Turbine :

La turbine du GT-117 est constituée de deux étages axiaux, qui sont pratiquement les seuls employés, avec pour but de transformer la pression des gaz en vitesse avec la production d'énergie. L'étage de la turbine comprend deux composantes essentielles :

- Distributeur (stator).

- Rotor.

1^{ère} Etage :- Stator : nombre d'aubes : 30

- Rotor : nombre d'aubes : 31

2^{ème} Etage :- Stator : nombre d'aubes : 22

- Rotor : nombre d'aubes

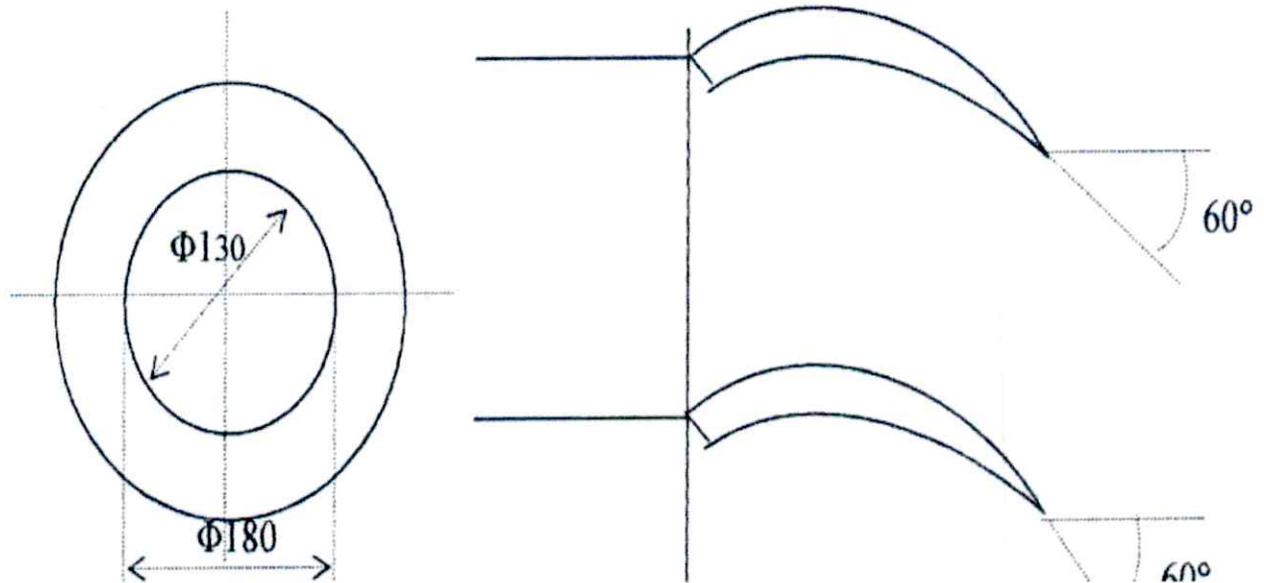
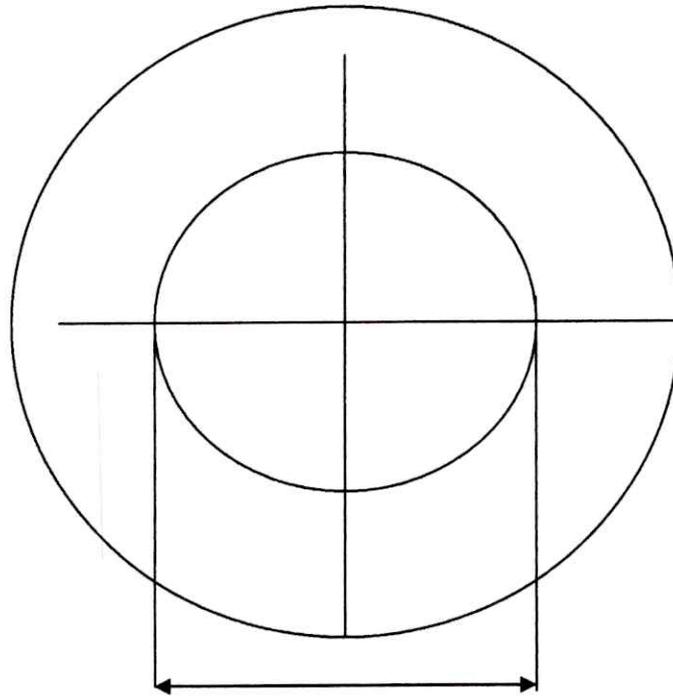


Fig (I-5) Dimension du distributeur du 1^{er} étage de la turbine

Les éléments essentiels qui caractérisent la distributeur du 1^{er} étage de la turbine sont : le rayon extérieur, le rayon intérieur et l'angle du profil.

I-3-4 Tuyère d'éjection :

Elle a pour rôle d'accélérer les gaz de combustion issus de la turbine jusqu'à ce que la pression statique dans le jet soit égale à la pression Atmosphérique externe. Le type le plus simple consiste en un tronc de cône convergent ; le paramètre régissant le fonctionnement des tuyères est le rapport de la pression des gaz de combustion à la sortie de turbine à la pression dans le plan de sortie de la tuyère.



Diamètre :125

Fig(1.6) diamètre de sortie tuyère

Nuances des éléments structuraux :

D'après une analyse des nuances des différents alliages des métaux, effectué à la base logistique de Beni Merred, on peut déduire les caractéristiques mécaniques des différentes pièces et leurs applications

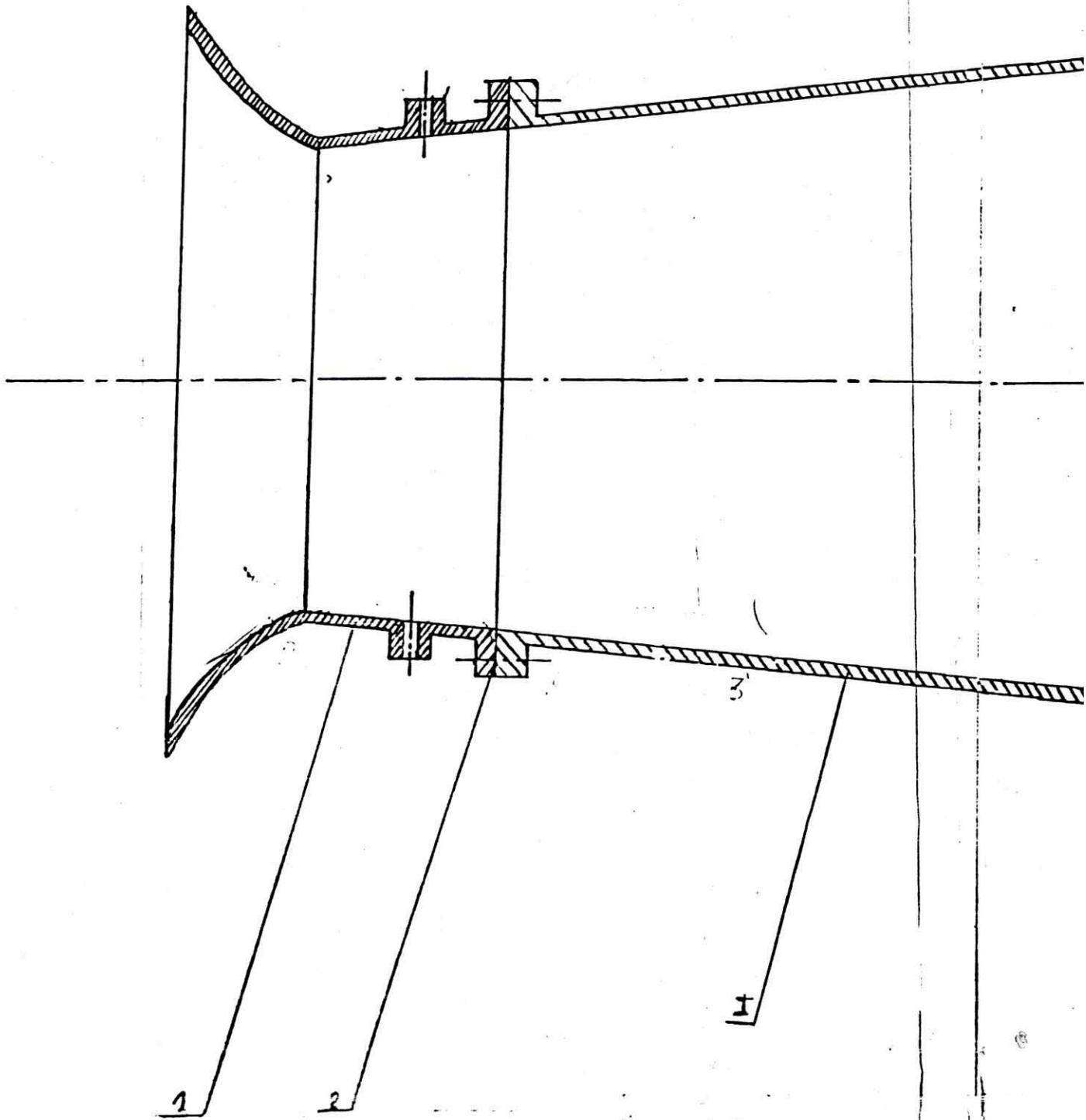
Tableau (I-1) :

Nuance	Composition	Traitement thermique	Caractéristique mécanique			applications
			Allongement %	Limite élasticité a 0.2 %	Résistance en MPa	
1	2	3	4			5
Acier pour turbine a vapeur						
56A28 CDV5	C 0,28 Cr 1,50 Mo 0,70 V 0,30	Etat recuit Dureté brinell 170.Trempe huile 1000° revenue 710°	100 17 800 950			Boulonneries a chaud. Pièce.
56 T.G 20 CDV6	C 0,20 Cr 1,50 Mo 0,60 V 0,20	Etat recuit Dureté brinell 170.Trempe huile eau suivant dimension a 980°	150 19 800 900			Boulonneries a chaud. pièce de turbine industrie aéronautique
	C 0,20 Cr 11,00 Ni 0,70 W 0.40	Trempe eau a 1125°	250 50 270 600			Boulonneries a chaud ailettes et rotors de turbines

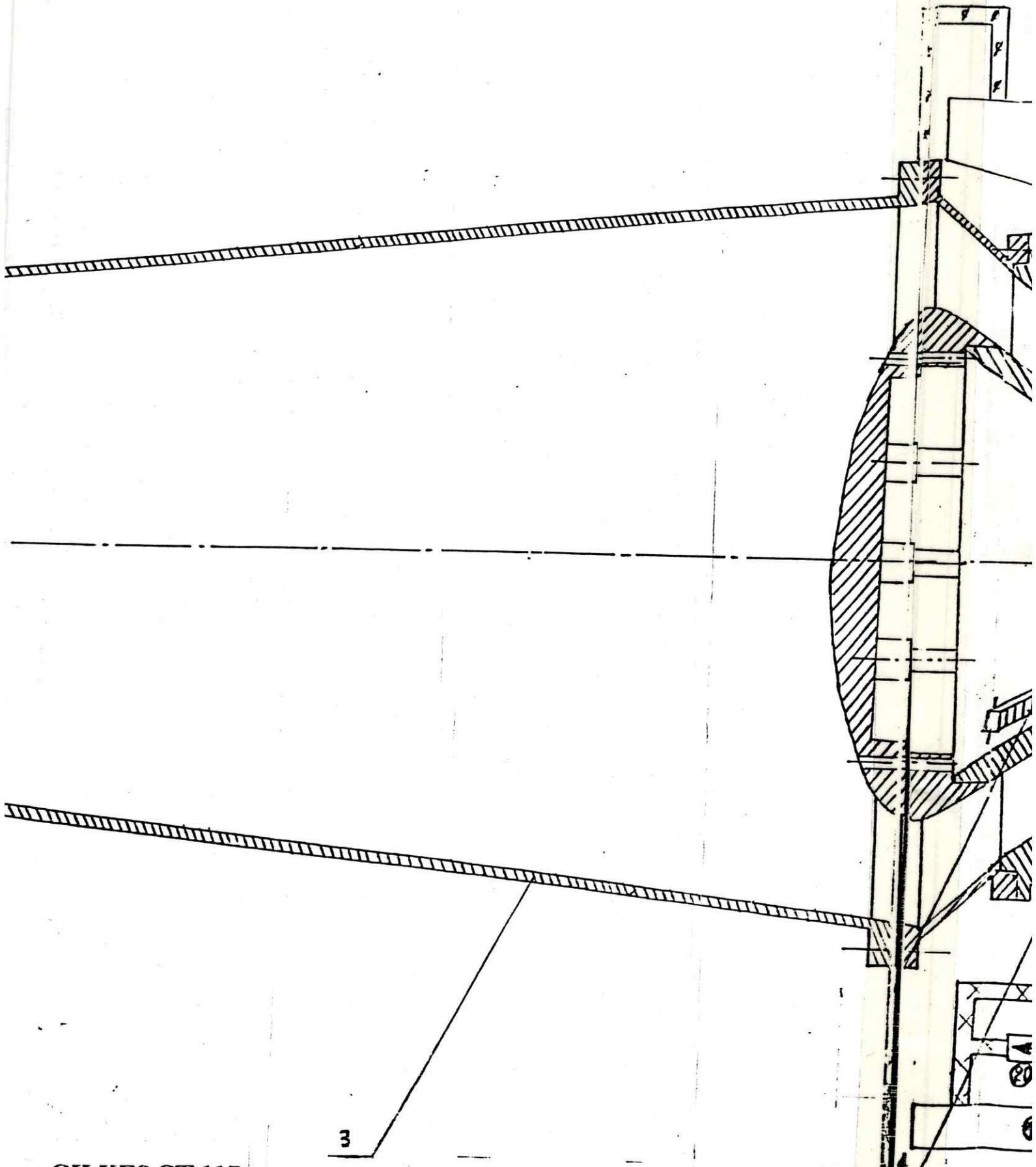
X 20T Z30 CNWS 22 10	C 0,25 Cr 22.00 Ni 10.00 W 2.10 S 1.20	Trempe huile ou eau a 1100°	100 40 320 750	Tube de compresseur peut être utiliser jusqu a 750°
X 203 Z30 CNKD W 20	C 0,12 Cr 20.0 Ni 20.0 W 3.00 CO 20.00 Mo3.50 Nb 1.00	Trempe huile ou eau a 1100°	-45 400 850	Boulonnerie température tuyère éjection.

Acier inoxydable martensitique :

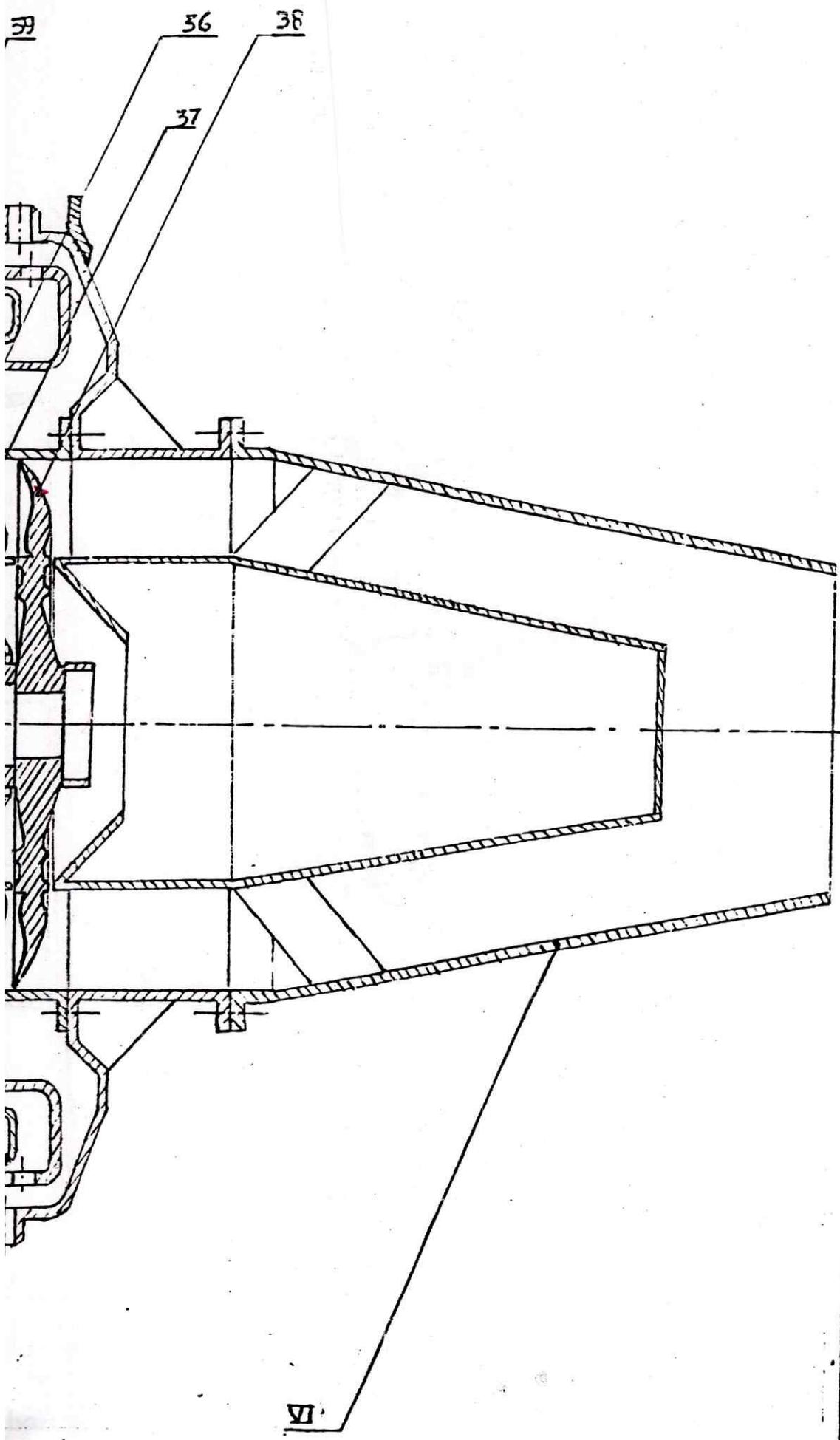
A.p.x Z 15 CN 17 03	C 0.16 Cr 17.00 NI 2.00	Etat recuit Dureté brinell 250° trempe huile 1100° revenu 630°	40 15 750 1000	industrie aéronautique pièce soumises a la corrosion
X 13 T 5 Z 55 C 14	C 0.16 Cr 14.00 NI 0.40	Etat recuit Dureté brinell225 trempe huile 1100° revenu 550°	Dureté Vickers 550	Boulonnerie A chaud pièce de turbine



Dessin en coupe du turbo



eur GILKES GT-117



REP	NB	DISIGNATION
37	1	Stator 2 ème étage
36	1	Rotor du 1 ^{er} étage
35	1	Le distributeur
34	1	Tube à flamme
33		Les orifices
V	1	La turbine
32	1	Le carter de la chambre de combustion
31	1	Cloison thermique
30	9	L'injecteur
29	9	Enceinte ouverte
IV	1	Chambre de combustion
28	1	Diffuseur (stator)
27		Plaques (aubes)
26	1	Rouet (rotor)
III	1	Compresseur centrifuge

Chapitre III
Etude à la vérification de
l'arbre

II. Etude RDM de l'arbre de transmission : [2]

II.1. Introduction :

Dans chaque étude de construction, quel que soit son domaine d'utilisation, une étude RDM s'impose, et cela pour vérifier la fiabilité des éléments à construire et celle de leur assemblage.

En ce qui concerne la construction mécanique, cette étude est plus rigoureuse et plus approfondie quand il s'agit d'un ensemble tournant, vu que les risques de déformation ou de rupture de l'élément en statique s'amplifient considérablement en dynamique.

Dans ce cas nous allons vérifier la fiabilité de notre ensemble ; arbre de transmission, roue compresseur et roue turbine

Pour bien spécifier les différentes longueurs et les différents diamètres de notre arbre, une esquisse est représentée dans la Fig. (II.1).

Notre arbre se divise en 6 zones différenciées par leurs longueurs leurs diamètres.

Les 6 zones représentent des cylindres de diamètre \emptyset et de longueurs L .

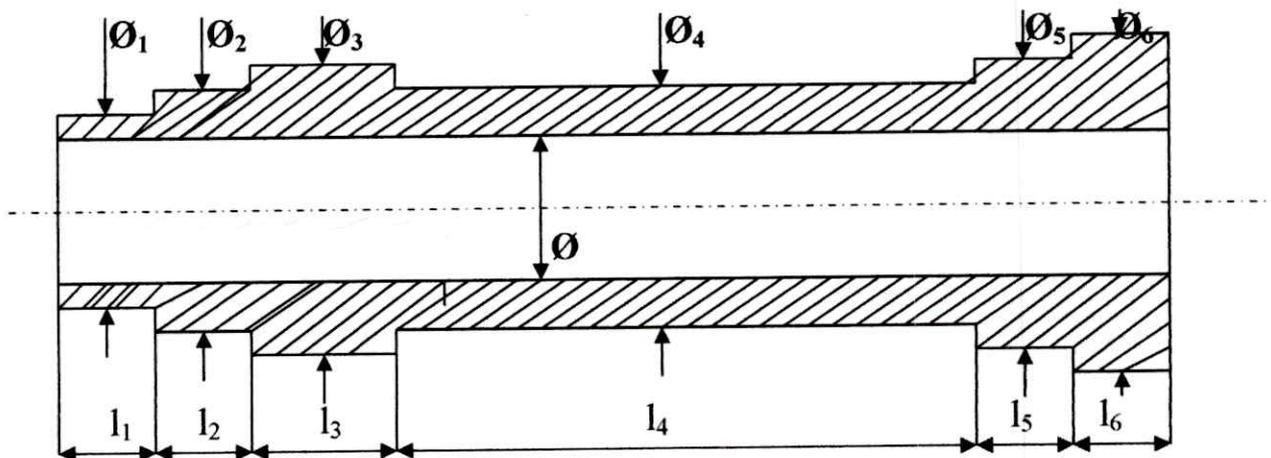


Fig. (II.1). Dimensions de l'arbre.

II.1.1. Etude statique :

Pour l'étude statique on suppose que les poids de la roue compresseurs et celle de la roue turbine sont appliqués aux centres de gravité de celles ci, et que la puissance de moteur est considéré comme une charge répartie voir Fig.(II.2).

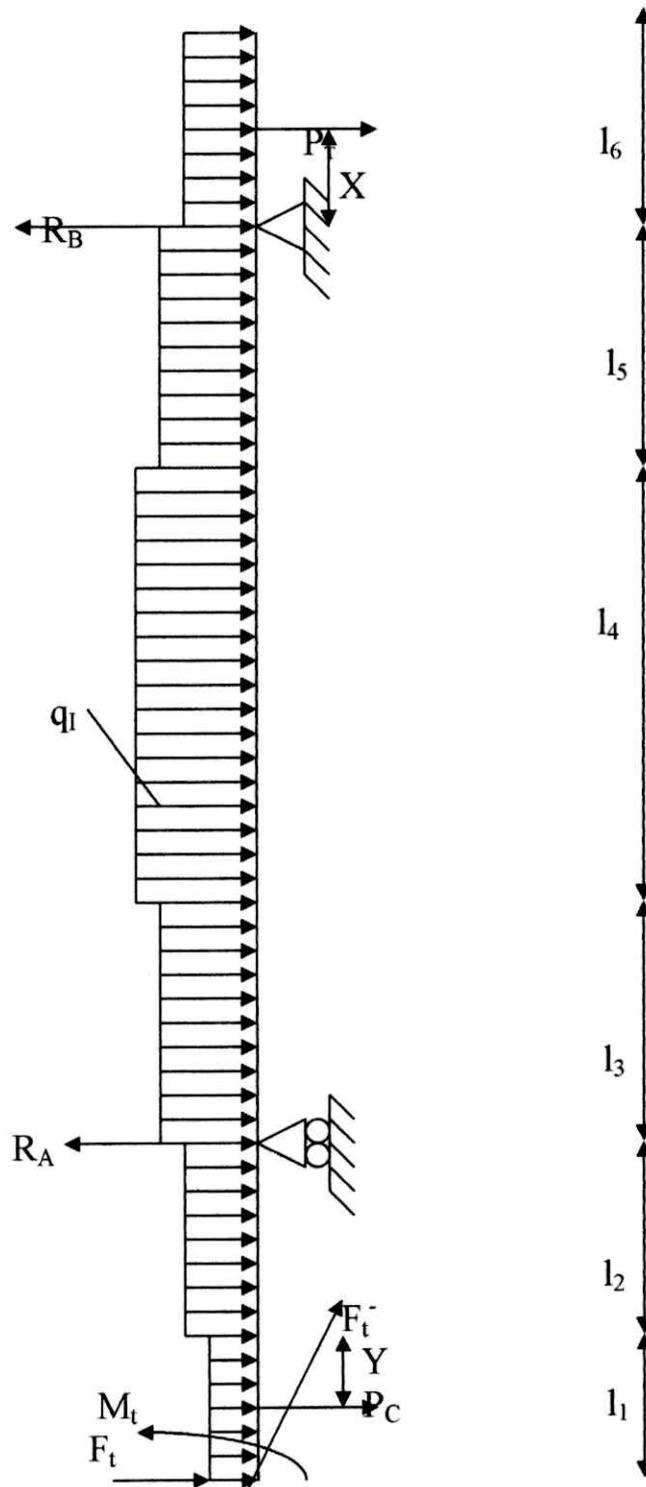


Fig. (II.2). Les charges réparties appliquées sur l'arbre

P_c : le poids de la roue compresseur.

P_t : le poids de la roue turbine.

X : est la distance entre le centre de gravite de la turbine et la base de celle-ci.

Y : la distance entre le centre de gravite de la roue compresseur et le base
De celle -ci.

Q_i : représenté la puissance de moteur par unité de longueur.

I : représente l'indice de le zone tel que $I=1, 2, 3, 4, \dots, 6$.

F_t : la force vertical dans le pignon.

F_h : la force horizontale dans le pignon.

M_t : représenté le moment de rotation.

Déterminer le moment de rotation de l arbre :

$$M = \frac{P_{mot}}{\omega} \dots\dots\dots (II.1)$$

$$M = \frac{43.6 * 10^3}{3993.78} (N.m)$$

Ici P_{mot} est la puissance transmise en (W)

ω Est la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{3.14 * 38157.15}{30} = 3993.78 (rad/s) \dots\dots\dots (II.2)$$

Calcul le poids de la roue compresseur et la roue turbine :

La masse à été déterminée pratiquement prenant le poids de chaque module

Poids turbine: 15.005 kg

Poids compresseur: 17.08 kg

$$P_C = M_C \cdot g \dots\dots\dots (II.3)$$

$$P_C = 170.8N$$

$$P_t = M_t \cdot g \dots\dots\dots (II.4)$$

$$P_t = 150.05N$$

Le calcul des forces dans les pignons (roues) F_t , F_t' :

Diamètre de la pignon $d=37.5mm$

$$F_t = \frac{2M}{d} \dots\dots\dots (II.5)$$

$$F_t' = F_t \sin(20^\circ) \dots\dots\dots (II.6)$$

$$F_t = \frac{2 \cdot 10.91}{37.5 \cdot 10^{-3}} = 581.86N$$

$$F_t' = F_t \cdot \sin(20) = 197.83N$$

Détermination les longueurs de l'arbre :

$$L_1 = 16mm$$

$$L_2 = 35mm$$

$$L_3 = 48mm$$

$$L_4 = 138mm$$

$$L_5 = 34mm$$

$$L_6 = 28mm$$

$$X = 14mm$$

$$Y = 8mm$$

Tableau des rendements de moteur :

Composantes	Rendement η	Coefficient moyen isotopique γ
Diffuseur	0.97	1.4
Compresseur	0.85	1.37
chambre de combustion	0.99	1.35
Turbine	0.95	1.33
Tuyère	0.97	1.36

II.1.2. Détermination des réactions inconnues des A et b :

a- Sur le plan vertical :

$$Q_i = q_i \cdot L_i \dots\dots\dots (II.7)$$

$$\sum F_V = 0 \Leftrightarrow R_A + R_B = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + P_C + P_t + F_t \dots (II.8)$$

$$\sum M/A = 0 \dots\dots\dots (II.9)$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-Q_1 \left(L_2 + \frac{L_1}{2} \right) - Q_2 \frac{L_2}{2} - P_C (L_2 + Y) - Q_4 \left(L_3 + \frac{L_4}{2} \right) + Q_5 \left(L_3 + L_4 + \frac{L_5}{2} \right) + Q_3 \frac{L_3}{2} + Q_6 \left(L_3 + L_4 + L_5 + \frac{L_6}{2} \right) + P_t (L_3 + L_4 + L_5 + X)}{L_3 + L_4 + L_5}$$

$$\sum M/B = 0 \dots\dots\dots (II.10)$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{Q_6 \frac{L_6}{2} - P_t X + Q_5 \frac{L_5}{2} + Q_4 \left(L_3 + \frac{L_4}{2} \right) + Q_3 (L_5 + L_4 + L_3) + Q_2 \left(L_5 + L_4 + L_3 + \frac{L_2}{2} \right) + Q_1 \left(\frac{L_1}{2} + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \right) + P_C (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + Y)}{L_3 + L_4 + L_5}$$

Vérifions l'équation : (II.8) .

$$R_A + R_B = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + P_C + P_t + F_t \quad (juste)$$

b- Sur le plan horizontal :

$$\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_B = F_T \dots\dots\dots (II.11)$$

II.1.3. Dimensionnement et calcul des arbre:

Effort tranchant et moment fléchissant :

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont déterminés par a méthodes des section.

La valeur de l'effort tranchant (*T*) dans une section droite quelconque de la poutre est égale a la somme algébrique des projections de toutes les forces

extérieures (concentres ou reparties) agissant sur la poutre d'un cote de la section considérée, sur l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

La valeur du moment fléchissant (M) dans une section droite quelconque de la poutre est égale a la somme algébrique des moments de toutes les charges extérieures, agissant d'une cote de section considérée, par rapport à l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

On admet que les valeurs positives et négatives de (T) et (M) correspondent aux directions indiquées fig (II.3)

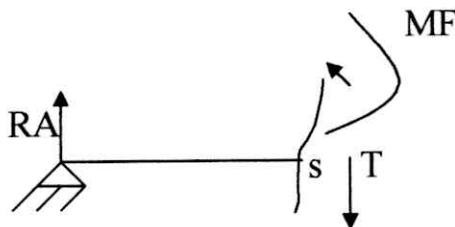


Fig. (II.3)

Solution de notre cas:

Détermination le relations aux appuis d'après la condition de la statique on prenant les sommes des moments par rapporte aux appuis droit et gauche :

Pour simplifier les expressions de (T) et (M) nous considérons des sections du cote gauche dans les partie de : $I_1 = ?$, $I_2 = ?$, $I_3 = ?$, $I_4 = ?$, $I_5 = ?$, $I_6 = ?$



D'après les valeurs ainsi obtenues on construit le diagramme du moment Fléchissant.

II.1.4. Formule donnant le diamètre de l'arbre:

L'arbre soumis à la flexion et la torsion, le moment de flexion équivalent aux droits de la section dangereuse est :

$$M_{eq} = \sqrt{M^2_f + Mt^2} \dots\dots\dots (II.12)$$

En appliquant les formules classiques de RDM on aura :

$$\sigma_i = \frac{M_{eq}.y}{2I} = \frac{32M_{eq}}{\pi d^3} \leq R_p \Rightarrow da \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{eq}}{\pi R_p}} \dots\dots\dots (II.13)$$

L'arbre supporte le moment de flexion dans deux perpendiculaire, l'un horizontale est l'autre vertical d'où :

$$M_f = \sqrt{Mfv^2 + Mfh^2} \dots\dots\dots (II.14)$$

Choix du matériau :

Pour tous les arbres on utilise un acier de nuance 20 MC 5 avec ;

$$[R_m] = 1270 \text{ Mpa}$$

$$R_p = \frac{R}{N}, \text{ avec : } n = (5,10) \dots\dots\dots (II.15)$$

N : coefficient de Sécurité $n = (5,10)$

$$\Rightarrow R_p = 127 \text{ Mpa}$$

II.2. Calcul de l'effort tranchant et du moment fléchissant : [3]

En appliquant la somme des forces et celle des moments pour chaque zone, on trouve les efforts tranchant et les moments fléchissant appliqués le long de la poutre, ainsi on détermine l'effort max., Cela pour estimer la contrainte de cisaillement de notre arbre et vérifier quelle est bien inférieure à la contrainte max. Relative à la nuance du matériau notre arbre en utilisant l'expression suivante :

$$\sigma_{\max} = \frac{mf_{\max}}{I} \cdot \frac{d}{2} = \frac{mf_{\max}}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \dots\dots\dots(\text{II.16})$$

Sachant que I est le moment d'inertie de l'arbre tel que :

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \dots\dots\dots(\text{II.17})$$

Cela implique :

$$\sigma_{\max} = \frac{mf_{\max}}{\pi \cdot d^3} \cdot 32 \dots\dots\dots(\text{II.18})$$

Et la condition à vérifier est

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{admissible}}$$

II.2.1. Determions les moments et les effort tranchant des les différent tronçons:

a- Sur le plan vertical : voir annexe (1)

1^{er} : Zone $0 \leq x \leq l_1 - Y$

$$\sum F/S_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = -q_1 \cdot x - f_t$$

$$\sum M/S_1 = 0 \Leftrightarrow Mf_1 = -\frac{qx^2}{2} - f_t \cdot x$$

2^{em} : Zone $l_1 - Y \leq x \leq l_1$

$$\sum F/S_2 = 0 \Leftrightarrow T_2 = -q \cdot x - f_t - p_c$$

$$\sum M/S_2 = 0 \Leftrightarrow Mf_2 = -P_c(x - l_1 - y) - q_1 \frac{x^2}{2} - f_t \cdot x$$

3^{em} : Zone $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$

$$\sum F/S_3 = 0 \Leftrightarrow T_3 = -q_1 l_1 - p_c - q_2(x - l_1)$$

$$\sum M/S_3 = 0 \Leftrightarrow Mf_3 = -q_1 l_1 \left(x - \frac{l_1}{2} \right) - p_c(x - (l_1 - y)) - \frac{q_2}{2}(x - l_1)^2$$

4^{em} : Zone $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$

$$\sum F/S_4 = 0 \Leftrightarrow T_4 = -q_1 l_1 - q_2 l_2 + R_A - P_c - q_3(x - (l_1 + l_2)) - f_t$$

$$\sum M/S_4 = 0 \Leftrightarrow Mf_4 = -Q_1 \left(x - \frac{l_1}{2} \right) - Q_2 \left(x - \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \right) - \frac{Q_3}{2}(x - (l_1 + l_2))^2 - p_c(x - (l_1 - y)) - f_t x + R_A(x - (l_1 + l_2))$$

8^{em} : Zone $0 \leq x \leq l_6 - x$

$$\sum F/S_8 = 0 \Leftrightarrow T_6 = q x$$

$$\sum M/S_8 = 0 \Leftrightarrow Mf_8 = -q_8 \frac{x^2}{2}$$

7^{em} : Zone $l_6 - x \leq x \leq l_6$

$$\sum F/S_7 = 0 \Leftrightarrow T_7 = P_t x + q_6$$

$$\sum M/S_7 = 0 \Leftrightarrow Mf_7 = -q_2 \frac{x^2}{2} - p_t(x - (l_6 - x))$$

6^{em} : Zone $l_6 \leq x \leq l_6 + l_5$

$$\sum F/S_6 = 0 \Leftrightarrow T_6 = P_t + q_6 l_6 + q_5(x - l_6) - R_B$$

$$\sum M/S_6 = 0 \Leftrightarrow Mf_6 = -Q_6 \left(x - \frac{l_6}{2} \right) - \frac{Q_5}{2} (x - l_6)^2 - p_t(x(l_6 - x)) + R_B(x - l_6)$$

5^{em} : Zone $l_6 + l_5 \leq x \leq l_6 + l_5 + l_7$

$$\sum F/S_5 = 0 \Leftrightarrow T_5 = Q_6 + Q_5 + P_t - R_B + q_4(x - (l_6 + l_5))$$

$$\sum M/S_5 = 0$$

$$Mf_5 = -Q_6 \left(x - \frac{l_6}{2} \right) - Q_5 \left(x - \left(l_6 + \frac{l_5}{2} \right) \right) - \frac{q_4}{2} (x - (l_5 + l_5))^2 - p_t \left(x - \frac{l_6}{2} \right) + R_B \left(x - \frac{l_6}{2} \right)$$

b- Sur le plan horizontal : voir annexe (2)

1^{er} : Zone $0 \leq x \leq l_1 + l_2 + \dots + l_5$

$$\sum F/S_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = -f_t$$

$$\sum M/S_1 = 0 \Leftrightarrow Mf_1 = -f_t \cdot x$$

2^{em} : Zone $0 \leq x \leq l_6$

$$\sum F/S_2 = 0 \Leftrightarrow T_1 = 0$$

$$\sum M/S_2 = 0 \Leftrightarrow Mf_1 = 0$$

Et selon la condition de résistance :

$$[\sigma] \geq \frac{Mf_{\max}}{\omega_p} \dots\dots\dots (II.19)$$

$$\omega_p = \frac{I}{y} = \frac{\frac{\pi.d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi.d^3}{32} \dots\dots\dots (II.20)$$

$$Mf_{\max} = Mf_5$$

$$\omega_p = 32,694mm$$

$$q \leq 11131N$$

Résultats :

	(mm)	D (mm)	d (mm)	q (N/mm)
Zone 1	16	34	26	9461.35
Zone 2	35	36	26	10574.45
Zone 3	48	38	26	10797.07
Zone 4	138	36	26	11019.69
Zone 5	34	40	26	10797.05
Zone 6	28	44	26	10574.45

$$\begin{cases} R_A = 26550N \\ R_B = 14050N \end{cases}$$

**Tableau : efforts tranchant et moment fléchissant "2^{ème} méthode SAP 2000"
Sur le plan vertical : [9]**

		X	T	Mf
Zone1	$0 \leq x \leq 8$	0	382.85	10968.55
		8	-75478.75	-279404.37
Zone2	$8 \leq x \leq 16$	8	-75478.75	-279404.37
		16	-151169.54	-1185997.73
Zone3	$16 \leq x \leq 51$	16	-151169.54	-1185997.73
		51	-521275.98	-12944934.30
Zone4	$51 \leq x \leq 99$	51	-1185968.29	-12944934.30
		99	-775679.62	24334971.45
Zone5	$99 \leq x \leq 237$	99	-775679.62	24334971.45
		237	745037.57	26457783.92
Zone6	$237 \leq x \leq 271$	237	745679.62	26457783.92
		271	111213.26	-5105935.20
Zone7	$271 \leq x \leq 285$	271	-308701.36	-5105925.20
		285	-1864045.63	-154425.71
Zone8	$285 \leq x \leq 299$	285	-1864045.63	-154425.71
		299	0	0

Sur le plan horizontal :

		X	T	Mf
Zone1	$0 \leq x \leq 271$	0	-197.83	53611.93
		271	-197.83	53611.93
Zone2	$271 \leq x \leq 299$	271	0	0
		299	0	0

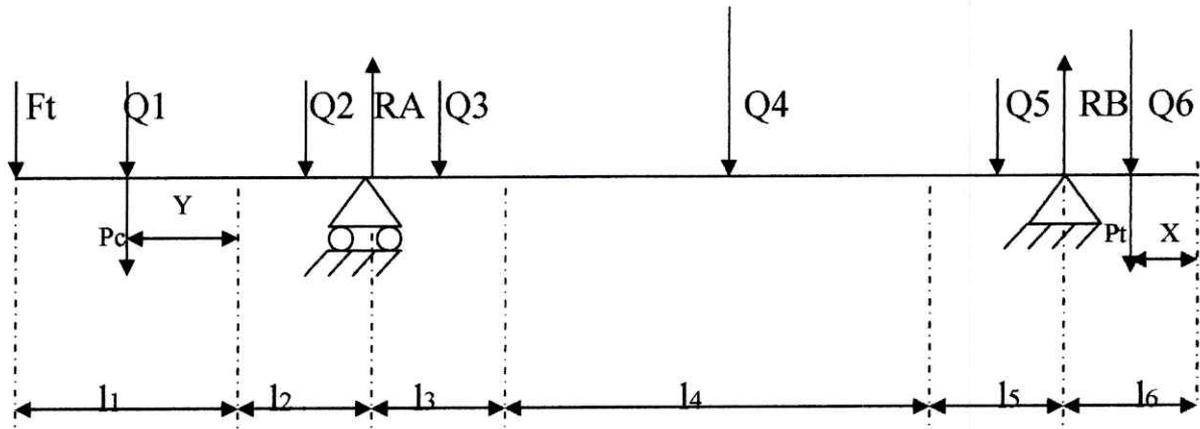
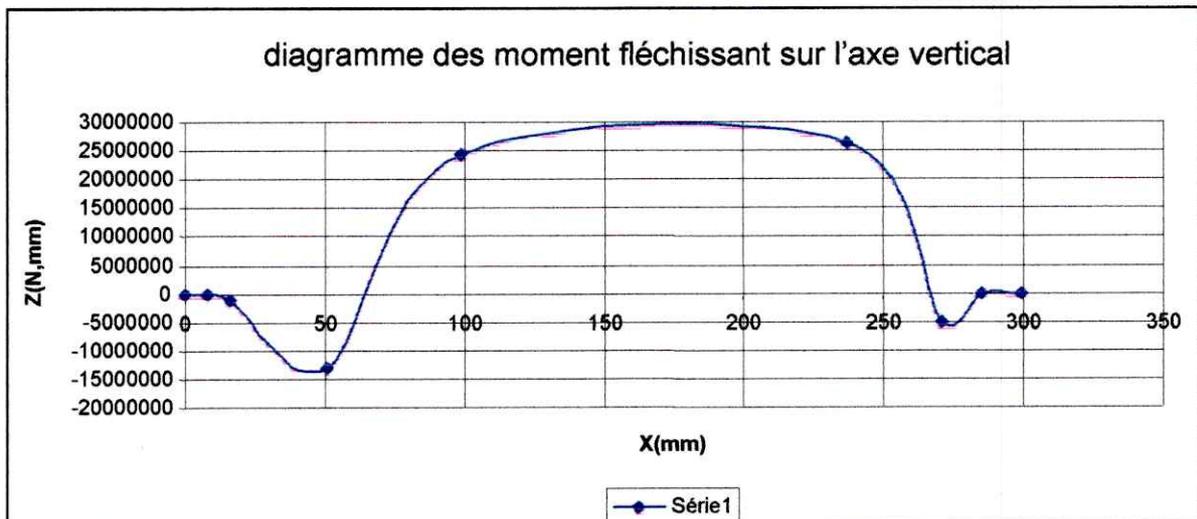
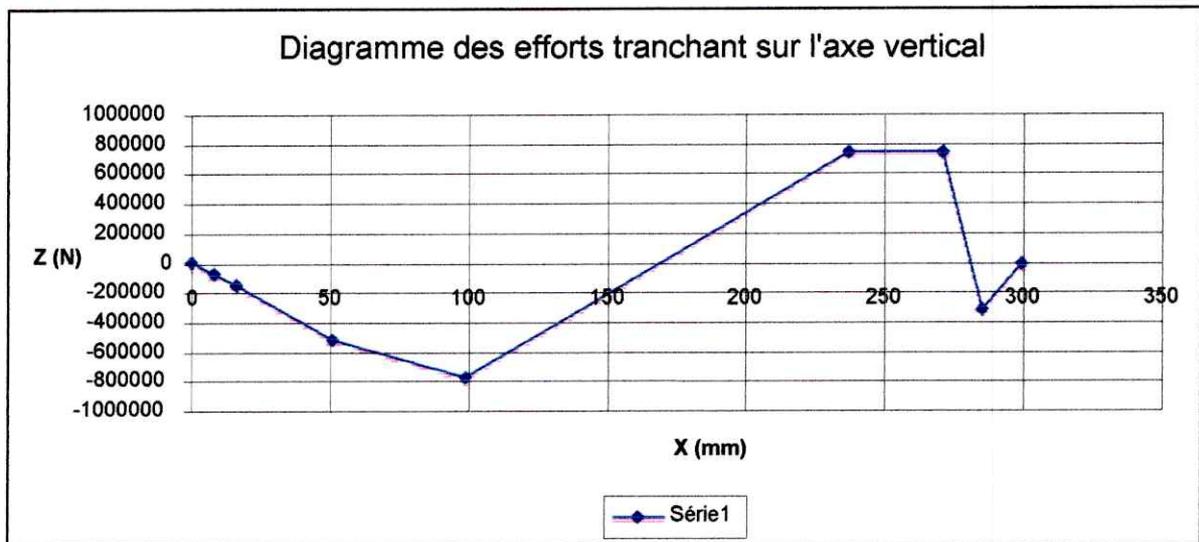


Fig (II.4)



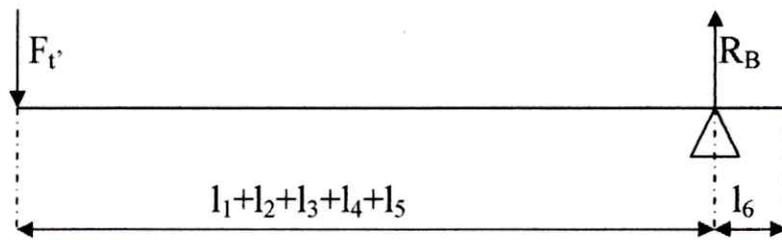
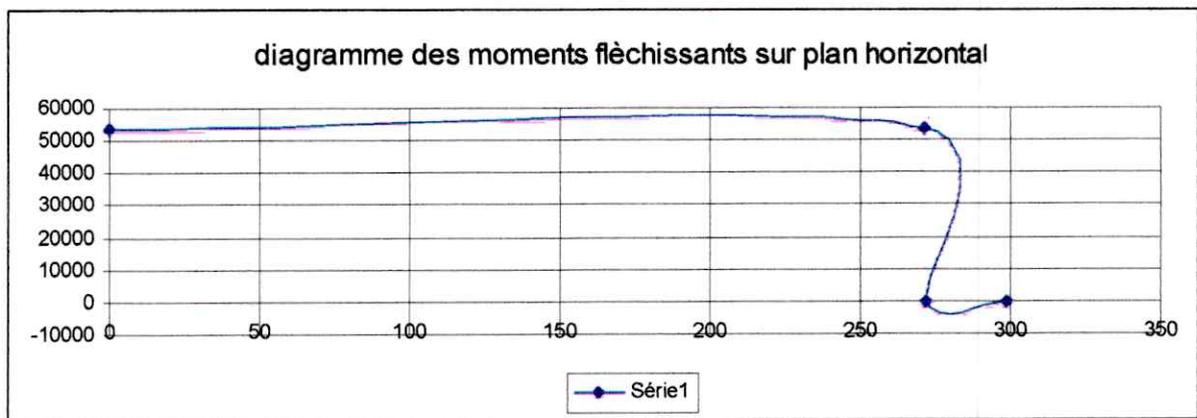
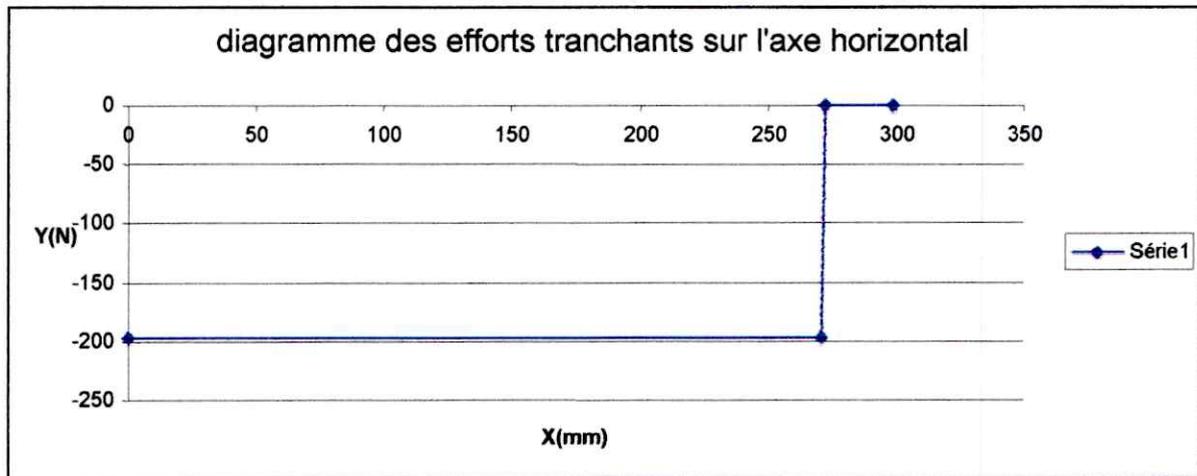


Fig (II.5)



b-La méthode grapho –analytique :

Pour une poutre donnée, on construit le diagramme du moment fléchissant ce diagramme est considéré comme une charge répartie fictive pour une poutre fictive. La rotation θ_x d'une section quelconque de la poutre donnée est déterminée par le rapport de l'effort tranchant Q_{fx} dans la même section de la poutre fictive à

la rigidité de la poutre donnée, c'est à dire $\theta_x = \frac{Q_{fx}}{EI}$

Le déplacement vertical f_x d'une section quelconque de la poutre donnée est déterminé par le rapport du moment fléchissant M_{fx} dans la même section de la poutre fictive à la rigidité EI de la poutre donnée, c'est à dire :

$$f_x = \frac{M_{fx}}{EI}$$

c- La méthode graphique :

Si l'on construit graphiquement pour fictive les diagrammes du moment fléchissant fictif M_{fx} et de l'effort tranchant fictif Q_{fx} , la courbe funiculaire (approximativement le polygone funiculaire) sera la déformée de la poutre donnée, et la ligne de l'effort tranchant, la variation de la rotation des sections.

Les segments verticaux y_x entre la courbe funiculaire et sa ligne de fermeture représenteront des quantités proportionnelles aux déplacements verticaux f_x de la poutre donnée, et les segments verticaux y'_x entre la ligne des efforts tranchants fictifs et la ligne de ses valeurs nulles, des quantités proportionnelles aux rotations θ_x des sections puisque :

$$f_x = \frac{M_{fx}}{EI} = y_x \frac{H(\xi\eta)}{EI} \dots\dots\dots (II.21)$$

dyeta
stab

$$\theta_x = \frac{Q_{fx}}{EI} = y'_x \frac{(\eta)}{EI} \dots\dots\dots (II.22)$$

b- Poutre a section variable :

Quand la variation des dimensions de la section droite de la poutre suivant la longueur est petite et monotone, on peut calculer les contraintes d après les formules établies pour les poutre a section constante.

Les plus rationnelles sont les poutre d'égle résistance, dans les quelles les contraintes normales dans les fibre extrêmes de chaque section droite sont les mêmes.

Calcul des poutres d'égle résistance :

En flexion pure la poutre d'égle résistance est une poutre de section constante, Dans le cas général de flexion, la poutre d'égle résistance a une section qui varie suivant l'équation :

$$W_x = \frac{|M_x|}{[\sigma]} \dots\dots\dots(II.23)$$

Où M_x est le moment fléchissant dans une section arbitraire ; W_x le module de cette section.

Si dans une section droite quelconque de la poutre le moment fléchissant est nul ou a une petite valeur et l'effort tranchant est différent de zéro, ou a une grande valeur, on corrige la forme de la poutre d'égle résistance déterminée par l'équation (21). D'après la condition de résistance au cisaillement.

Dans ce qui suit nous donnons quelques exemples de calcul des poutre d'égle résistance.

II.2.3.Determination des déplacements des poutres à section variable:

Les déplacements des poutres a section variable peuvent être déterminés par calculs analytique, grapho-analytique et graphique.

Dans la méthode analytique on établit pour chaque tronçon de la poutre l'équation différentielle de la déforme

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x} \dots\dots\dots(\text{II.24})$$

Où I_x est le moment d'inertie variable des sections de la poutre par rapport à l'axe neutre.

Après une double intégration, on trouve les fonctions décrivant les variations de la rotation θ_x des sections et du déplacement vertical f_x :

$$E\theta_x = Ey' = \int \frac{M_x}{I_x} dx + c_1 \dots\dots\dots(\text{II.25})$$

Et

$$Ef_x = Ey = \int \left[\int \frac{M_x}{I_x} dx \right] dx + c_1 x + c_2 \dots\dots\dots(\text{II.26})$$

Les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions de liaison de la poutre dans certains tronçons, on utilise aussi les conditions aux limites, c'est à dire les conditions d'égalité des rotations et des déplacements verticaux, quand on s'approche de la ligne de séparation des tronçons de gauche et de droite. La poutre doit être divisée en tronçons non seulement selon les charges mais aussi selon les lois de variation des sections droites.

Au lieu de l'équation (1) on peut utiliser l'équation suivante :

$$EI_0 Y'' = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_{red} \dots\dots\dots(\text{II.27})$$

Où I_0 est le moment d'inertie constant à laquelle est réduite conventionnellement la poutre :

$$M_{red} = M_x \frac{I_0}{I_x} \dots\dots\dots(\text{II.28})$$

On applique la méthode de section variable dans ce calcul :

Condition aux limites :

Condition d'appuis
Condition de contrainte

Pour l'appuis simple ou double :

$$y=0$$

$$Q=0$$

Pour la continuité :

$$Y_I(a) = Y_{II}(a)$$

$$Q_I(a) = Q_{II}(a)$$

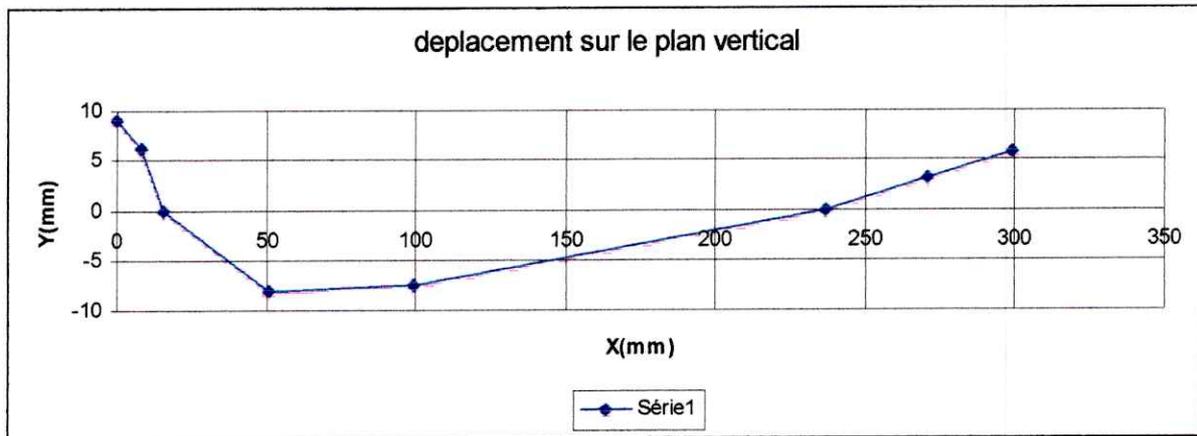
L'équation de déplacement :

$$EI_Q = \int Mt_z + C_1 \dots\dots\dots \text{(II.29)}$$

$$EI_Y = \iint Mt_z + C_1x + C_2 \dots\dots\dots \text{(II.30)}$$

Tableau de déplacement :

Point	Y (mm)	Z (mm)
1	9.112	8.47E-04
2	6.215	7.80E-04
3	0	6.93E-04
4	-8.031	5.57E-04
5	-7.572	9.48E-05
6	0	0
7	05.855	0



II.3. la torsion: [4]

a.Moment de torsion:

Le moment de torsion se détermine par la méthode de torsion. la valeur du moment de torsion (M_t) dans une section droite arbitraire de la barre est égale à la somme algébrique des moments de tous les couples extérieurs, agissant autour de l'axe géométrique de la barre et appliqués à l'une des parties isolées de cette section. La formule générale donnant la valeur du moment de torsion de l'une section arbitraire de la barre est de la forme :

$$M_t = \sum M + \sum \int m dx_s \dots\dots\dots (II.31)$$

L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, soumise à des couples répartis, la somme à tout le portier se trouvant d'un côté de la section considérée.

Par convention, nous admettons que le moment de torsion considéré de côté normale extérieure à la section est positif, s'il est dirigé dans le sens contraire des aiguilles d'un montre.

Contraintes tangentielles, angle de torsion et énergie potentielle de déformation élastique :

Les valeurs des contraintes tangentielles maximales aux points les plus éloignés des sont :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \dots\dots\dots(\text{II.32})$$

Où

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3 \dots\dots\dots(\text{II.33})$$

Est le module de résistance polaire de la section non circulaire la contrainte tangentielle maximale peut-être déterminée par la formule :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \dots\dots\dots(\text{II.34})$$

Où : W_t est le module de résistance de la section en torsion .

L'angle de torsion (φ) dans une partie de longueur (l), ou le moment de torsion (Mt) est constant, est déterminée d'après la loi de hook.

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \dots\dots\dots(\text{II.35})$$

Pour les arbres de transmission les angles de torsion sont calculés de deux cotes de la section, on se trouve le poulie motrice la formule générale donnant la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique, accumulée dans la barre

pendant la torsion est :

$$U = \sum \int \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_t} \dots\dots\dots(\text{II.36})$$

L'intégration et la sommation s'effectuent de la même manière que pour déterminer l'angle de torsion.

Où I_t est le moment d'inertie de la section droite de la barre en torsion égal pour une section circulaire à (I_p), pour les autres formes de section les valeurs de (I_t) sont données dans les manuels de résistance des matériaux.

Si la barre est constituée de plusieurs tronçon dans chacun des quels le moment de torsion (M_t) varie selon une loi donnée, l'angle de torsion total (le glissement relatif de deux sections extrêmes de la barre est déterminée par la formule) :

$$\varphi = \sum \int \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} \dots\dots\dots(\text{II.37})$$

L'intégration s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, la sommation a toutes les parties de la barre.

b-Calcul les moments dans chaque zone:

$$M_{rot} = \frac{P_{mot}}{W} \dots\dots\dots (II.38)$$

$$W = \frac{2\pi m}{60} = \frac{1}{10} = \frac{38157.150}{10} \approx 3816$$

$$P_{mot} = 43.60$$

$$M_{rot} = \frac{P_{mot}}{W} = \frac{43.6 \times 10^3}{3816} = 11.425(N/m)$$

$$M_{rot} = 11425(N/mm)$$

Tableau de rendement dans chaque zone :

Les zones	Le rendement moteur
Tuyère	0.85
Turbine Stator	0.95
Turbine rotor	0.97
Chambre de combustion	0.99
Compresseur centrifuge	0.97
Compresseur axial	0.95

$$\eta_{engrונage} = 0.96$$

$$M_{rot_{engrונage}} = 11425 \times 0.96 = 10968.55(N/mm)$$

$$M_{rot_1} = 9327.27(N.mm)$$

$$M_{rot_2} = 8860.91(N.mm)$$

$$M_{rot_3} = 8595.08(N.mm)$$

$$M_{rot_4} = 8509.13(N.mm)$$

$$M_{rot_5} = 8253.85(N.mm)$$

$$M_{rot_6} = 7841.16(N.mm)$$

Calcul moment de torsion dans le point B :

$$\sum M = 0 \Leftrightarrow MB = Mt_1 + Mt_2 + \dots + Mt_6 + Mt_{engr} \dots \dots \dots (\text{II.39})$$

$$MB = 62345.65 \text{ N.mm}$$

Calcul moment de torsion dans chaque zone : voir annexe (3)

1^{er} : zone $0 \leq Z \leq l_1$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_1 = M_{ENG} + M_1$$

2^{em} : zone $l_1 \leq W \leq l_2 + l_2$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_2 = M_{ENG} + M_1 + M_2$$

3^{em} : zone $l_1 + l_2 \leq W \leq l_2 + l_2 + l_3$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_3 = M_{ENG} + M_1 + M_2 + M_3$$

4^{em} : zone $l_1 + l_2 + l_3 \leq W \leq l_2 + l_2 + l_3 + l_4$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_3 = M_{ENG} + M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

5^{em} : zone $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \leq W \leq l_2 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_3 = M_{ENG} + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$$

6^{em} : zone $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 \leq W \leq l_2 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$

$$\sum \frac{M}{T} = 0 \Leftrightarrow Mtz_3 = M_{ENG} + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$$

Calculer l'angle de torsion :

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t} \dots \dots \dots (\text{II.40})$$

$$\varphi_i = \frac{Mtz_i \cdot l_i}{G\pi \left(\frac{D_i - d}{32} \right)^4}$$

Calculer la déformation élastique

$$U = \sum \int \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_t} \dots \dots \dots (\text{II.41})$$

$$U = \frac{(Mt_z)_i^2 \cdot l_1}{2G\pi \frac{(D_i - d)^4}{32}}$$

Résultats :

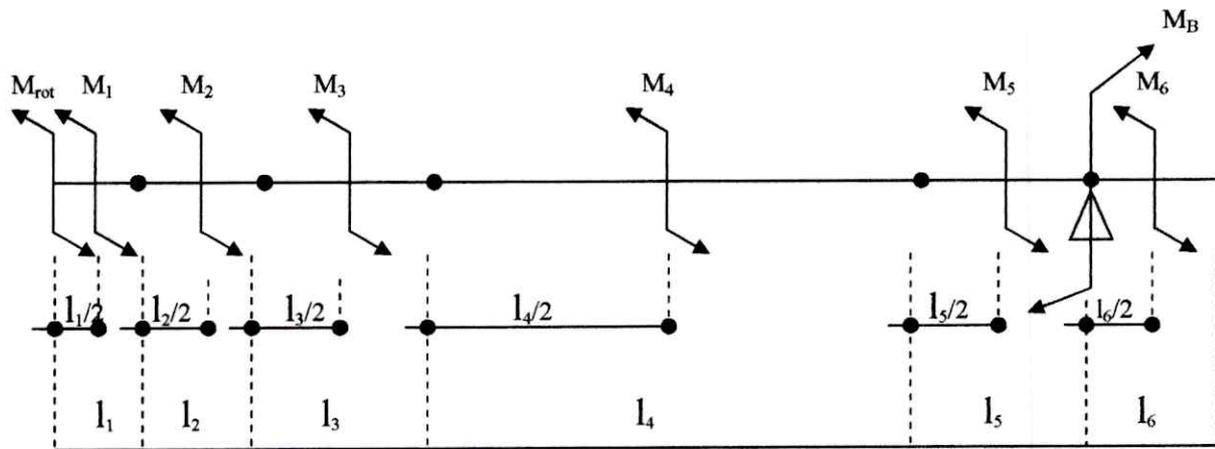
Zone	M_{rot} (N.mm)	Mt_z (N.mm)	U_T (N)	φ_i
1	9327.27	20295.85	8.1990	0.00081
2	8860.91	29156.73	15.1612	0.00104
3	8595.91	37751.81	13.1608	0.000705
4	8509.13	46260.94	150.48682	0.0065
5	8253.85	-7841.16	0.5134	0.00013
6	7841.16	0	0	0

$$\sum \varphi = 0.1756$$

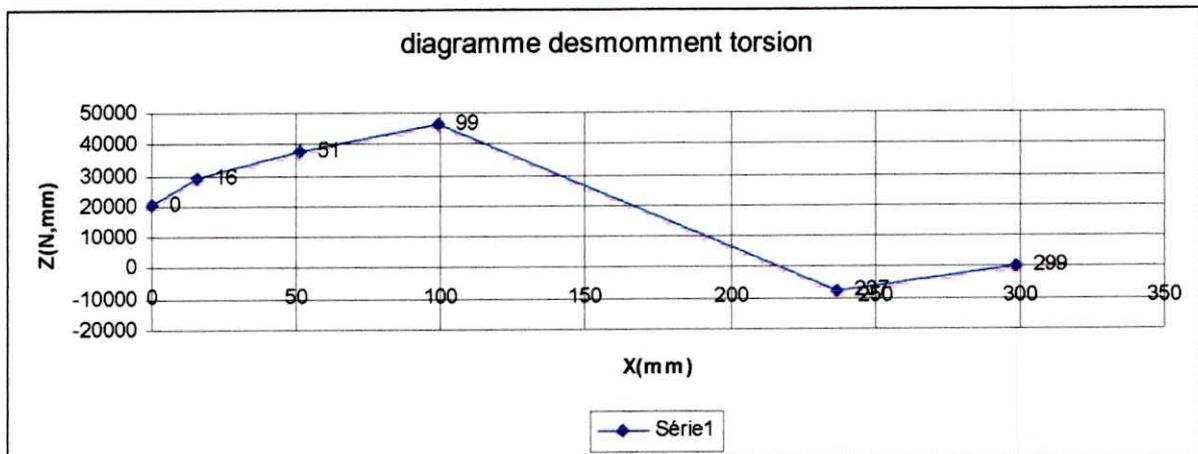
$$\sum U_T = 187.669(N)$$

Calcule la contraint tangentielle

$$\tau_{max} = \frac{Mt_{max} \cdot \left(\frac{D-d}{2}\right)}{\pi \cdot \frac{(D-d)^4}{32}} = 90.94 \left(\frac{N}{mm^2}\right)$$



Fig(II.6)



Chapitre III
Etude Vibratoire

Pour prédire correctement le comportement vibratoire en flexion, nous avons utilisé la méthode numérique : la méthode de Rayleigh-Ritz afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomènes de base.

III.1 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor : [4]

Les éléments de base d'un rotor : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser disque, arbre et balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. L'expression du travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer les forces généralisées. Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et le travail virtuel des forces extérieures δw sont calculés pour tous les éléments du système ;
- Les équations de Lagrange sont appliquées sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Fq_i \dots \dots \dots (III \cdot 1)$$

Où $N(1 \leq i \leq N)$ est le nombre de degrés de liberté, q_i sont les coordonnées généralisées et où ($^\circ$) : par rapport aux temps.

- Deux méthodes numériques sont choisies : la méthode de Rayleigh-Ritz pour mettre en évidence les phénomènes ou la méthode des éléments finis pour les applications industrielles ;

III.1.1 Disque :

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique. $R_0 (XYZ)$ est un repère galiléen et $R (xyz)$ un repère fixé au disque (figure III.1). Le système de coordonnées (XYZ) par l'intermédiaire des angles Ψ , θ , ϕ . Pour

déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle Ψ au tour de l'axe Z, puis d'un angle θ autour du nouvel axe x, noté x_1 ; enfin d'un angle ϕ autour de l'axe de rotation propre du disque y. le vecteur de rotation instantanée traduisant la position du repère xyz est :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}Y \dots \dots \dots (III \cdot 2)$$

Où Z, x_1 et Y sont les vecteurs unitaires des axes $O\vec{Z}, O\vec{x}_1, O\vec{Y}$.

L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse O est calculée en utilisant le repère R. dans ce repère, le vecteur rotation instantanée est :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \dots \dots \dots (III \cdot 3)$$

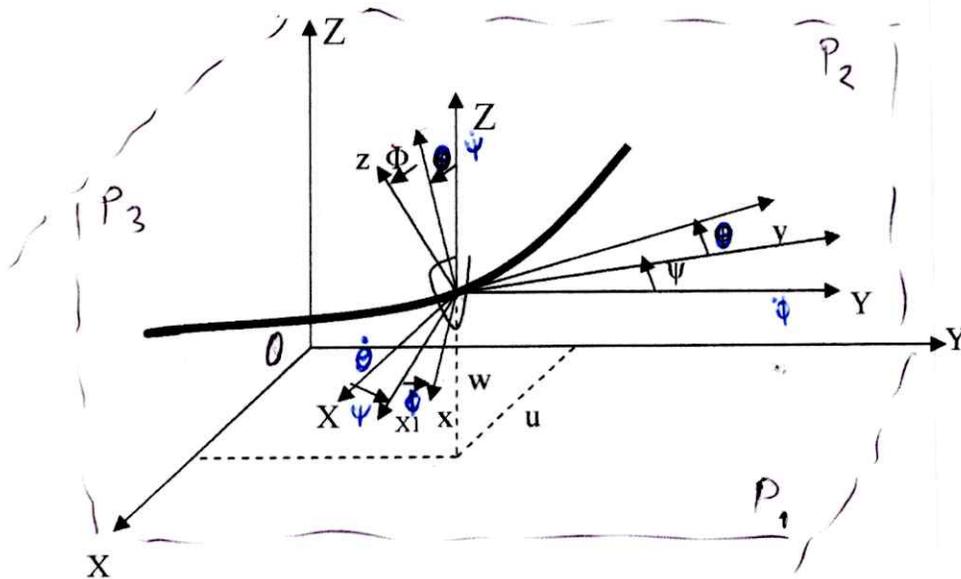


Fig. (III.1) Repère de référence du disque sur l'arbre flexible

Soit u et w les coordonnées suivant X, Y de O dans R_0 , la coordonnée suivant Y est constante. Par ailleurs, la masse du disque est M_d et son tenseur d'inertie en O , comme xyz sont les directions principales d'inertie, a comme expression :

$$I_{10} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III.4)$$

En peut être simplement car le disque est symétrique ($I_{dx} = I_{dz}$) ; les angles θ et Ψ petits et la vitesse angulaire constante ($\dot{\phi} = \Omega$). L'équation (III.5) devient alors

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \dots\dots\dots(III \cdot 5)$$

Où le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$, qui est constant, n'a pas d'influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω , dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le dernier terme, $I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique, (Coriolis).

III.1.2 Arbre :

L'arbre est représenté par une poudre de section circulaire, il est caractérisé par l'énergie de cinétique et l'énergie de déformation.

III.1.2.1 Energie cinétique :

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque (III.6). Pour un élément de longueur L , de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{U}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \dots\dots\dots(III \cdot 6)$$

Où ρ est la masse par unité de volume, S est l'aire de la section droite de la poudre et I le mouvement d'inertie diamétral.

Le première intégrale de (III.7) est l'expression classique d'une poudre de flexion ; la seconde intégrale correspond à l'effet secondaire d'inertie de rotation

(poutre de Timoshenko) ; le terme $\rho IL\Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement, enfin la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

III.1.2.2 Energie de déformation :

Le point C est le centre géométrique de la poutre, B(x, z) est un point de la section droite (figure III.2), E est le module 'Young, ϵ et σ sont les déformations et les contraintes, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x, z. Si les termes du second ordre ne sont pas pris en compte, la déformation longitudinal du point B s'écrit :

$$\epsilon = -z \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \pm z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \dots \dots \dots (III \cdot 7)$$

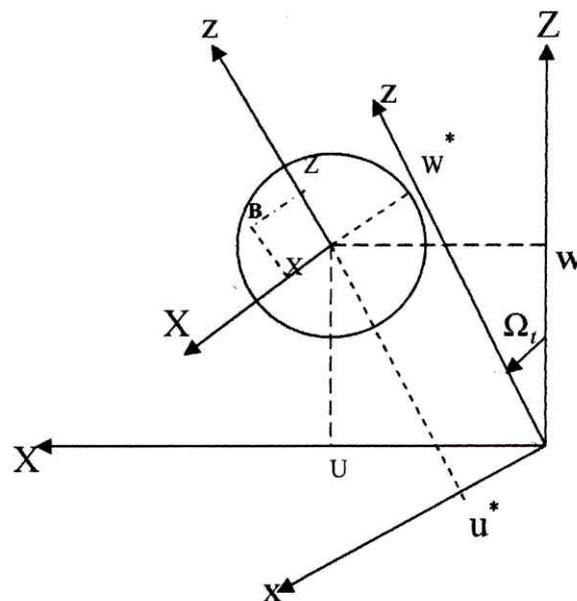


Fig. (III.2) Section droite de L'arbre

L'énergie de déformation à comme expression :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon \epsilon^t d\tau \dots\dots\dots (III \cdot 8)$$

Où « t » est le symbole matriciel de transposition.

La relation entre contraintes et déformations est

$$\sigma = E\varepsilon \dots\dots\dots (III \cdot 9)$$

Alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon^2 d\tau \dots\dots\dots (III \cdot 10)$$

Compte tenu de (III.8) l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy$$

$$= \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy \dots\dots\dots (III \cdot 11)$$

Par suite de la symétrie de la section d'intégrale correspondant au troisième terme de (III.13) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à x et z on a :

$$I_x = \int_S z^2 dS \dots\dots\dots (III \cdot 12)$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \dots\dots\dots (III \cdot 13)$$

Et l'énergie de déformation a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_S \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) \right] dy \dots\dots\dots (III \cdot 14)$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement en fonction du temps.

Il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers (III.1.3), d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de u et w composantes du déplacement dans R₀. Le passage de u, w à u*, w* s'écrit (figure III.2) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \dots\dots\dots(III \cdot 15)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \dots\dots\dots(III \cdot 16)$$

L'équation (III.14) devient alors:

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_s \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots(III \cdot 17)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique (où I=I_x=I_z), l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots(III \cdot 18)$$

III.1.3 Palier :

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont supposées connues. Le travail virtuel δw des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme fig (III.3)

$$\delta W = -K_{xx} \delta u - K_{xz} w \delta u - K_{zz} w \delta w - K_{zx} u \delta w - C_{xx} \dot{u} \delta u - C_{xz} \dot{w} \delta u - C_{zz} \dot{w} \delta w - C_{zx} \dot{u} \delta w \dots\dots(III \cdot 19)$$

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta w = F_u \delta u + F_w \delta w \dots\dots\dots(III \cdot 20)$$

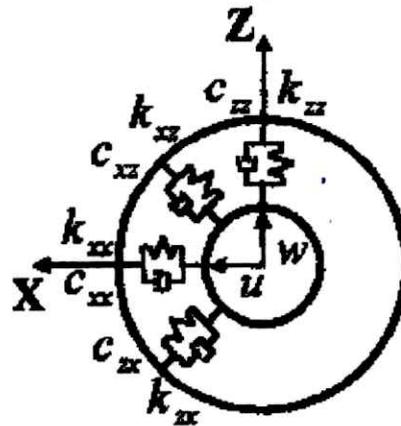


Fig. (III.3) Amortissement et raideur d'un palier

F_u et F_w sont les composantes de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III \cdot 21)$$

Fréquemment en particulier dans le cas de palier hydrodynamique :

$$k_{xx} \neq k_{zz}, c_{xx} \neq c_{zz} \text{ et } k_{zx} \neq k_{xz}, c_{zx} \neq c_{xz}.$$

III.1.4. Balourd :

Le balourd Fig. (III.4) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique de l'arbre et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y et sa coordonnée selon l'axe y est constante.

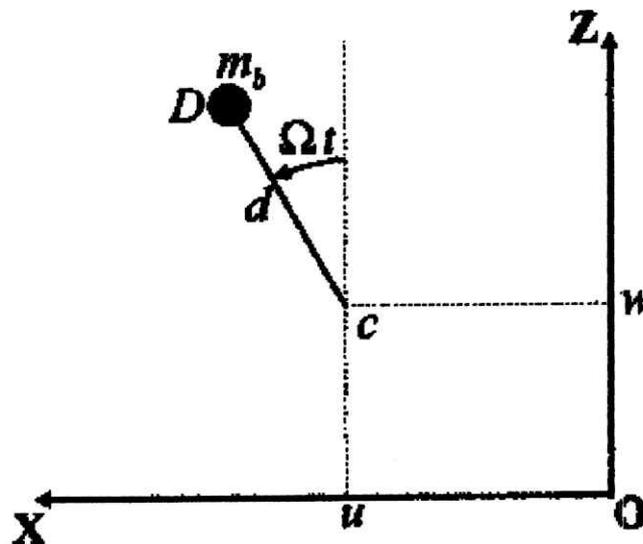


Fig. (III.4) Balourd

Dans le repère R_0 les coordonnées de la masse sont :

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{Cte} \\ w + d \cos \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (III \cdot 22)$$

D'où la vitesse :

$$V = \frac{d\vec{OD}}{dt} = \begin{pmatrix} u^* + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ w^* + d\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix} \dots\dots\dots (III \cdot 23)$$

Et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2} \left(u^{*2} + w^{*2} + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d u^* \cos \Omega t - 2\Omega d w^* \sin \Omega t \right) \dots\dots\dots (III \cdot 24)$$

Le terme $m_b^2 \Omega^2 d/2$ es constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_b \approx m_b \Omega d (u^* \cos \Omega t - w^* \sin \Omega t) \dots\dots\dots (III \cdot 25)$$

L'application des équations de Lagrange fournit la force tournante due au balourd.

III.2 La méthode de Rayleigh-Ritz : [5]

Elle est utilisée pour réduire le nombre de degrés de liberté n du système, et permet de déterminer simplement une valeur approchée de la plus basse fréquence de résonance d'un système avec une précision satisfaisante.

Le principe de la méthode est le suivant : à partir d'une hypothèse raisonnable sur les déplacements des points du système (vérifiant essentiellement les conditions de la cinétique), on déduit une expression de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'application des équations de Lagrange conduit alors aux équations du mouvement.

Les méthodes énergétiques: [6]

Rappelons tout d'abord qu la méthode énergétique est basée sur le principe de RAYEIGH qui stipule qu'au cours du mouvement et en l'absence de forces dissipative, le maximum de l'énergie potentielle est égal au maximum de l'énergie cinétique.

Désignons par M le point courant d'abscisse x . le déplacement $u(x, t)$ de ce point dépend à la fois de la coordonnée spatiale x et du temps t . nous admettrons que la fonction $u(x,t)$ est le produit de deux fonctions dont l'une dépend du temps et l'autre de la coordonnée spatiale. On écrira donc : $u(x, t)=y(x) h (t)$. Quand on se borne à l'étude des mouvements harmoniques de pulsation ω , on a :

$$U(x, t)=y(x \cos \omega t)$$

Dans la méthode de RAYLEIGH, on se donne une fonction $y(x)$ qui satisfait aux conditions aux limites. On a évidemment intérêt à choisir des fonctions analytiquement simples, telles les fonctions sinusoïdales. Et on adoptera par exemple la fonction :

$$y(x) = y_0 \sin\left(k\pi \frac{x}{l}\right),$$

Où k est un entier. Cette fonction satisfait bien aux conditions aux limites car pour $x=0$ et pour $x=1$, la valeur est nulle. La fonction $u(x, t)$ est donc donnée par la relation :

$$u(x; t) = y_0 \sin k\pi \frac{x}{1} \cos \omega t$$

Il nous faut maintenant calculer séparément l'énergie potentielle résultant de la déformation $y(x)$ de la poutre et l'énergie cinétique.

Calcul de l'énergie potentielle maximum

Soient un élément MM' de la poutre de longueur dx . Soit M le moment et θ l'angle de la tangente à la déformée au point A de même M $\left(\frac{\delta M}{\delta X}\right)$

Ne l'angle θ est petite, $\theta = y'$ et $\frac{\delta \theta}{\delta x} = y''$, le travail des moments est :
 $d\tau = \left(\frac{\delta M}{\delta X}\right) y' dx dx$ comme $M = EI y''$

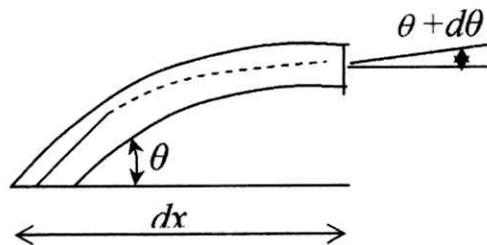


Fig. (III.5) poutre en flexion

$$\tau = \int_0^1 \int EI y''' y'' dx dx$$

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^1 EI (y'')^2 dx$$

Comme nous avons supposé que la déformée est de forme sinusoïdale, on a :

$$\sin k\pi \left(\frac{x}{1}\right) \quad \text{D'où} \quad y'' = -y_0 \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2 \sin \left(\frac{k\pi x}{1}\right).$$

En portant ces valeurs dans l'expression de on obtient :

$$\tau = \frac{EI}{2} \int_0^1 y_0^2 \left(\frac{k\pi}{1} \right)^4 \sin^2 \left(k\pi \frac{x}{1} \right) dx = \frac{EI}{2} y_0^2 \left(\frac{k\pi}{1} \right)^4 x \frac{1}{2}$$

L'énergie potentielle maximale de la poutre est donc :

$$E_{p\max} = \frac{EI \cdot y_0^2 \cdot (k\pi)^4}{4l^3}$$

Calcul de l'énergie Cinétique maximale :

Nous supposons comme précédemment que l'énergie cinétique de l'arbre est négligeable devant l'énergie cinétique du disque, soit a l'abscisse du disque , on

$$\text{a alors : } E_c = \frac{1}{2} m v_a^2$$

Où : v_a Est la vitesse transversale au point de l'abscisse a :

D'où

$$v_a = u(a) = -\omega y_0 \sin k\pi \frac{a}{l} \sin \omega t$$

L'énergie cinétique maximum a ainsi pour valeur :

$$E_c(\max) = \frac{1}{2} m y_0^2 \sin^2 k\pi \frac{a}{l}$$

En égalant les énergies cinétiques et potentielles, on a :

$$\omega^2 = \frac{EI(k\pi)^4}{2l^3 \sin^2(k\pi \frac{a}{l})}$$

Module de d'YOUNG : $E=2 \cdot 10^{11} \text{ MKSA}$

Inertie diamétrale : $I = \pi \frac{d^4}{64} = \frac{\pi}{64} 10^{-8}$

Il apparaît aussi que les méthodes énergétiques donnent théoriquement les fréquences propres de tous les modes successifs. Cela sous-entend que l'on est en mesure de définir les déformées correspondantes. Pour les lignes d'arbre

présentant plusieurs discontinuités d'ordre géométrique ou massique, les déformées sont difficiles à exhiber. Pour le premier mode on prend généralement la déformée statique de l'arbre sous son propre poids, mais pour les modes supérieurs, l'obtention de la formulation analytique exacte est difficile et problématique. En pratique, avec la méthode de RAYLEIGH. On se limite aux calculs des deux premiers modes.

III.3 Equation du mouvement : [7]

Force vive du système :

$$2T = I \dot{\varphi}^2 \dots\dots\dots(III \cdot 26)$$

Fonction de force :

$$u = \frac{K}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \dots\dots\dots(III \cdot 27)$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \dots\dots\dots(III \cdot 28)$$

Les équations de Lagrange sont applicables car il n'existe pas de relation entre les paramètres :

$$I \ddot{\varphi}_1 + K\varphi_1 - K\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots(III \cdot 29)$$

Recherche des pulsation propres et déformées :

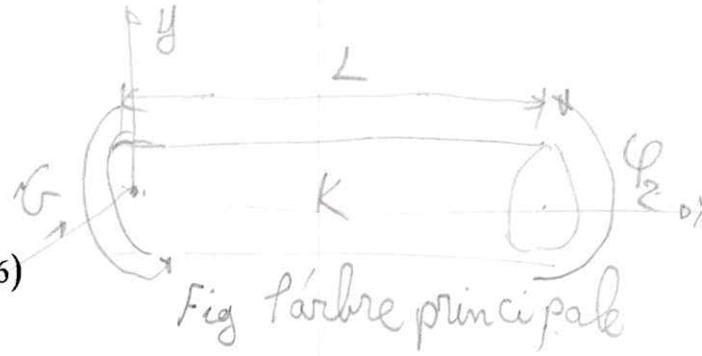
$$\begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III \cdot 30)$$

Matrice d'inertie :

$$[M] = \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité :

$$[L] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}$$



--Pulsations propres et déformées modales :

Les pulsations propres de la ligne d'arbres ramifiée sont égales aux racines carrées des valeurs propres de la matrice :

$$[C] = [M]^{-1} \cdot [L]$$

Pour faciliter le calcul de la fréquence propre les contraintes dues aux réactions au palier ne sont pas prises en considération.

Modélisation des systèmes dynamiques l'analyse des vibrations structurales :

Pour préciser : - les fréquences propres ·

- Les réponses à une excitation donnée.

En effet l'excitation au voisinage d'une fréquence propre provoque une résonance (augmentation rapide de l'amplitude du mouvement des contraintes dynamiques, des niveaux de bruit il est souhaitable d'éviter des résonances une structure réelle une infinité de degrés de liberté par conséquent une infinité de fréquences propres et de modes propres à chaque fréquence la structure se comporte différemment pendant que dans un nombre limité de fréquences ce qui limite le calcul propre de résonance.

L'analyse des vibrations est souvent faite sur la base de modèles mathématiques allant des plus simples (système masse ressort de un ou plusieurs degrés de liberté) à des modèles plus compliqués.

Calcul I_z :

$$d_e = 44 \text{ mm} \quad d_i = 26 \text{ mm}$$

$$I_{z0} = \frac{\pi(d_e - d_i)^4}{64} = 5,15 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

Calcul de la rigidité K :

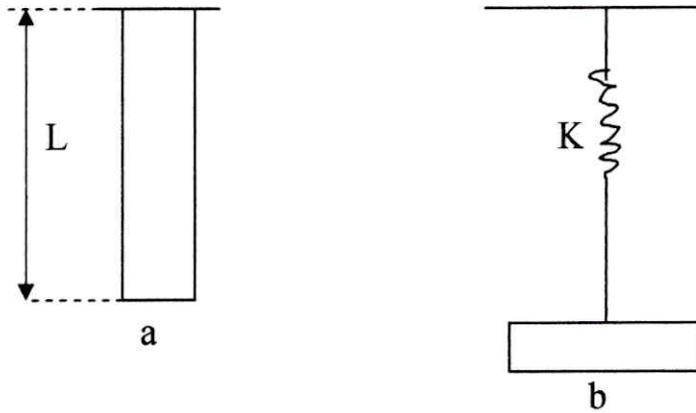


Fig.(III.6)

$$P_0^2 = \frac{K}{m_r}$$

P_0 : pulsation principale.

K : constante de raideur.

m_r : masse réduite.

Pour le cas (a) et après le calcul on trouve la plus petit pulsation.

$$P_0 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Si on applique une force unitaire ou bout de la tige (arbre) (traction compression) alors :

$$P_0 = \frac{L}{EF} \text{ Donc } K = \frac{EF}{L} = 33,44 N/mm$$

$$\begin{bmatrix} 5,15 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33,44 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & -33,44 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5,15 \cdot 10^{-9} \ddot{\varphi}_1 + 33,44 \cdot 10^3 \varphi_1 - 33,44 \cdot 10^3 \varphi_2 = 0 \dots \dots \dots (III \cdot 31)$$

Les déplacements étant proportionnels aux efforts, la solution de cette équation matricielle est de la forme :

$$\varphi = A \sin(\omega t + \psi)$$

En effet, pour un mode donné, l'arbre vibre en phase et à la même pulsation. En reportant cette solution dans l'équation matricielle, nous obtenons :

$$-[M]A\omega^2 + [L]A = 0$$

$$[-[M]\omega^2 + [L]]A = 0$$

Ou encore :

$$[-[M]^{-1}[M]\omega^2 + [M]^{-1}[L]]A = 0$$

Donc les valeurs de ω^2 cherchées sont les valeurs propres de la matrices :

$$[C] = [M]^{-1} \cdot [L]$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I} & \frac{1}{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{I} & \frac{1}{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [C] = \begin{bmatrix} \frac{K}{I} & \frac{K}{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1,54 \cdot 10^{-13} & 1,54 \cdot 10^{-13} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vitesses dangereuses et optimisation de l'arbre :

Tous les rotors sont imparfaitement équilibrés statiquement, il existe toujours un balourd résiduel qui provoque des déformations de flexion responsable d'excitations en torsion.

La pulsation de l'excitations qu'ils provoquent est égale à :

$$\omega_b = \frac{\pi N}{30}$$

Avec N ($\frac{tr}{min}$) : vitesse de rotation du rotor.

$$F = m\omega^2 r \dots \dots \dots \text{voir (CH.IV)}$$

$$m = 2\text{kg}$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30}$$

$$I_3 \ddot{\theta} + K\theta_1 - K\theta_2 = F(\text{excitation})$$

but : $\omega_0 \neq \omega_{\text{excitation}}$

R = d (CH III)

Chapitre IV
L'Equilibrage de l'arbre
principal

IV-1. GENERALITES : [8]

L'obtention d'une disponibilité élevée des machines tournantes une organisation des opérations de la maintenance, ces opérations peuvent être :

- préventives, systématique ou conditionnelles
- correctives après une défaillance
- prédictives, ouvertes sur les situations de l'avenir.

L'équilibrage des machines tournantes peut se placer dans l'une de ces catégories.

L'équilibrage est une procédure de maintenance qui repose sur des lois de la physique.

Et dépend des critères liés aux amplitude des vibrations et aux forces appliquées au système en rotation, cette procédure permet de réduire les niveaux vibratoire de la machine tournante jusqu'à les rendre acceptables, c'est-à-dire permettre une disponibilité de la machine vis-à-vis son comportement vibratoire.

IV-1-1.Vibrations des machines tournantes :

Un système en rotation dit –rotor-à- vitesse constante autour d'un axe matérialisé par une structure fixe dit- stator-constitue un ensemble doué en général de certains caractères vibratoires stationnaire influant sur la bonne marche de la machine.

Ces caractères sont dus essentiellement au fait que le lieu des barycentres massiques des éléments du rotor est différent de l'axe de rotation, leur différence est désignée par l'excentricité.

Les excentricités résultent des imperfections d'usinage, de montage ou de la défaillance d'un des éléments de rotor.

Au niveau du rotor, ces excentricités engendrent des balourds responsables des vibrations.

Les phénomènes vibratoires caractérisés par des fréquence et des amplitudes peuvent être constatées sur le rotor, sur le stator (paliers), ou dans le mouvement relatif rotor-stator.

En cas de déséquilibre important, les niveaux vibratoires peuvent Devenir trop élevé et excessif il en résulte fréquemment des détériorations Plus ou moins grave des éléments de la machine provoquant des dangers. Les Dépenses afférentes sont alors souvent un chapitre important du budget D'exploitation.

IV-1-2.Equilibrage des machines tournantes :

Dominer les phénomènes vibratoires c'est amener par l'équilibrage, les Amplitudes des vibrations en deçà des limites qui satisfont la sécurité, la Fiabilité et le confort de la machine.

L'équilibrage résulte d'une procédure qui permet la détermination des Masses dites - masses correctrices - à disposer sur le rotor afin de réduire les Vibrations initiales.

En vue d'augmenter les rendements, les constructeurs s'orientent de plus En plus vers des lignes d'arbres fonctionnant au delà de la première vitesse Critique et même parfois, au delà de la seconde et de la troisième...

Le franchissement de ces vitesses critiques n'est possible que si les Déséquilibres dus aux balourds soient eux même très faibles.

L'importance de l'équilibrage s'est encore accrue ces dernières années En raison de l'augmentation continue des vitesses de rotation. Comme les Forces centrifuges engendrent les balourds initiaux (responsables des vibrations) sont proportionnelles au carré ces vitesses, on imagine aisément que les niveaux vibratoires peuvent devenir inacceptables

IV -1-3.les caractéristiques des rotors à équilibrer :

Selon leurs constructeurs, les rotors à équilibrer ont des comportements différents, en ce qui concerne les forces centrifuges on distingue deux groupes principaux :

IV -1-3-1. Rotors rigides :

On peut considérer un rotor comme rigide tant qu'il se conserve l'état obtenu pour des vitesses différentes car il possède la raideur suffisante pour empêcher la flexion pouvant être causée par des balourds partiels.

La correction en deux plans pour tels rotors conduit toujours à un résultat d'équilibrage satisfaisant à toutes les vitesses de service.

IV -1-3-2. Rotors élastiques :

Dans le cas d'un rotor élastique, l'état de déséquilibre varie suivant la variation de la vitesse, ce fait explique qu'il est rare de pouvoir faire fonctionner calmement un rotor non rigide présentant des vibrations en état de marche en agissant que sur les plans extrêmes.

La raison de ce phénomène réside dans les moments internes demeurant lors de la transformation des composants individuels du balourd dans les plans extrêmes. Ces moments augmentent comme le carré de la vitesse et fléchissent le rotor.

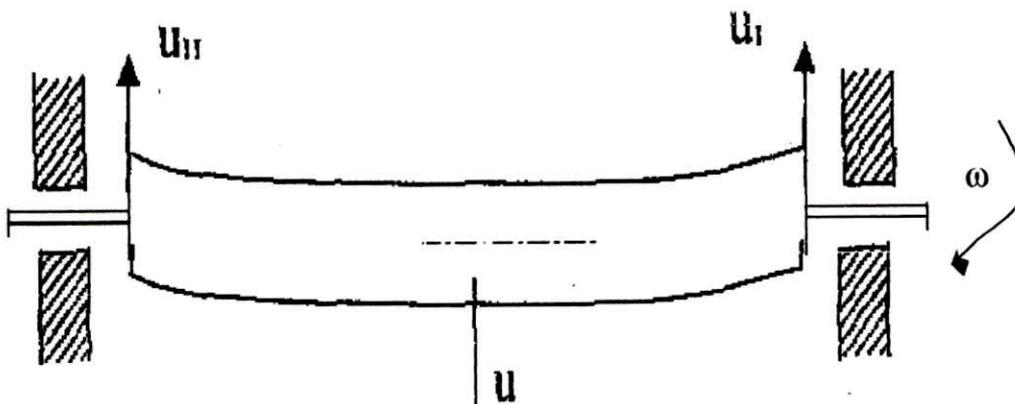


Fig. (IV.1) Flexion d'un rotor élastique au cours de rotation.

Ces déformations se traduisent généralement par des vibrations sur les Paliers. Ce type de rotor est à équilibrer en deux temps.

1 er temps : Equilibrer à basse vitesse (en dessus de la 1 ème vitesse critique) le Rotor étant alors considéré comme rigide.

2ème temps : Equilibrage à la vitesse de service Le nombre de plans d'équilibrage à prendre en compte n'est pas deux mais il Est déterminé par la méthode du nombre minimal de plan qu'on fixe à $(2 + k)$

K : désignant le nombre de vitesse critique inférieur à la vitesse de service.

IV -1-4. Équilibrages des machines spécialisées et équilibrage sur site :

La réductions des niveaux vibratoires d'une machine tournante par L'équilibrage peut se faire sur des machines spécialisées ou sur site. L'équilibrage en atelier utilise des machines spécialisées équipées de Systèmes électroniques plus ou moins perfectionnés qui simplifie les opérations Parce que certaines sont imprimées dans leurs structures, ces machines traitent Les rotors isolés de leurs stators, la procédure d'équilibrage ce fait à basses Vitesses.

Pour l'équilibrage des machines installées en plate-forme ou sur le site, on utilise le plus souvent des appareils électroniques utilisables à d'autres fins ; Plusieurs méthodes sont possibles pour l'équilibrage sur site.

D'où l'un du but essentiel de ce chapitre est d'exposer les méthodes D'équilibrage sur site des rotors rigides.

IV -1-5.Le balourd :

Le balourd est dû à une dissymétrie dans la répartition des masses d'un Rotor par rapport à son axe de rotation. Le balourd s'exprime par le produit de Masse de déséquilibre par le rayon :

$$U = m. r. [\text{gr. mm}]$$

La valeur du balourd pour un mobile dépend de la masse de ce dernier et de la vitesse de rotation, un corps lourd admet un balourd résiduel plus important qu'un corps léger, aussi utilisons-nous la notion du balourd spécifique « e » défini comme suit :

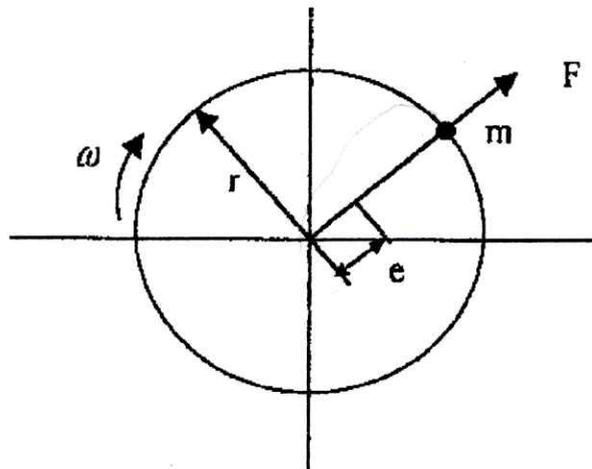


Fig. (IV.2)

En mouvement, le balourd est soumis à une force centrifuge «F» qui tend à l'écartier de l'axe de rotation « YY' » en conséquence cette force crée des vibrations sur les paliers.

$$F = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

F : Force centrifuge

m : Masse

ω : vitesse angulaire

IV -1-6. Equilibrage statique :

L'équilibrage statique se fait sur un seul plan de correction si le rotor ci-dessous est tel que le centre de gravité ne se trouve pas sur l'axe de rotation, les forces centrifuges élémentaires ne s'équilibrent pas. Le rotor est soumis à une

force résultante f appliquée en G ayant pour valeur : $F=M. \omega^2 .r$

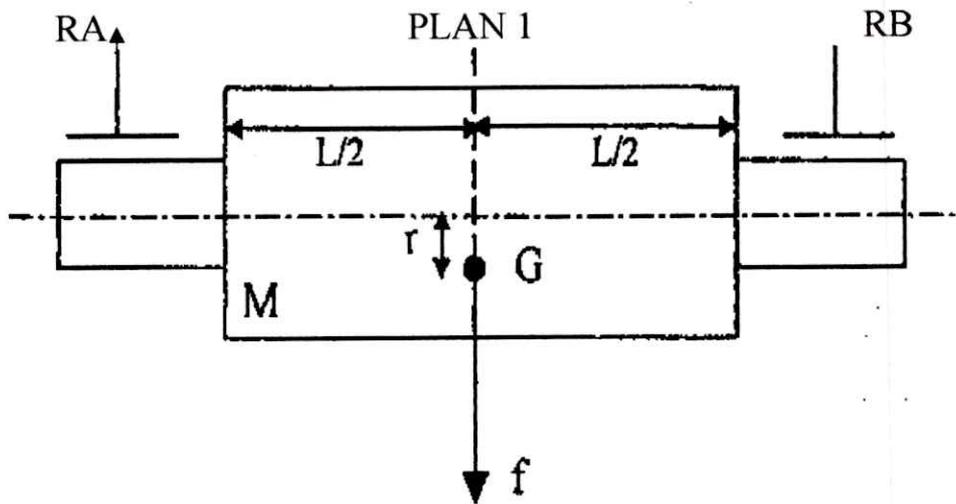


Fig. (IV.3) : Déséquilibre de force

La force f est équilibrée par les réactions R_a et R_b des paliers du rotor, ces réactions sont parallèles et de même sens, elles donnent naissance à des Vibrations ont la fréquence correspondante à la vitesse de rotation. Alors, on dit que le rotor présente un déséquilibre statique, on peut Corriger les défauts de ce rotor en ramenant son centre de gravité sur l'axe de rotation ou ajoutant un poids identique au même rayon et diamétralement opposé à 180° .

IV -1-7.Equilibrage dynamique :

L'équilibrage dynamique se fait sur deux plans de corrections contrairement à l'équilibrage statique qui corrige le balourd par un poids unique opposé à 180° en tenant compte de la position angulaire.

Mais pas de la position longitudinale, alors on fait que corriger le poids sans tenir compte de la position réelle.

En réalité, tout corps a une certaine épaisseur et il peut être divisé en une multitude de disque plats, chacun étant affecté d'un balourd partiel

$$du=dm.r \quad u=\sum_1^n du$$

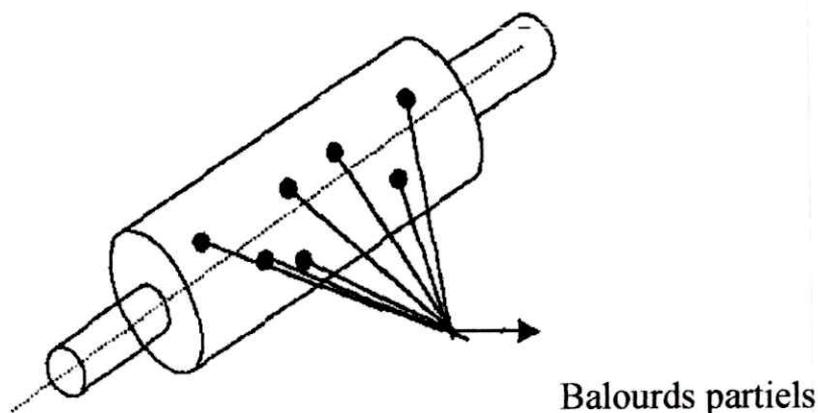


Fig (IV.4)

Ces balourds peuvent être réduites à deux balourds u_1 et u_2 situés dans les plans de référence du rotor.

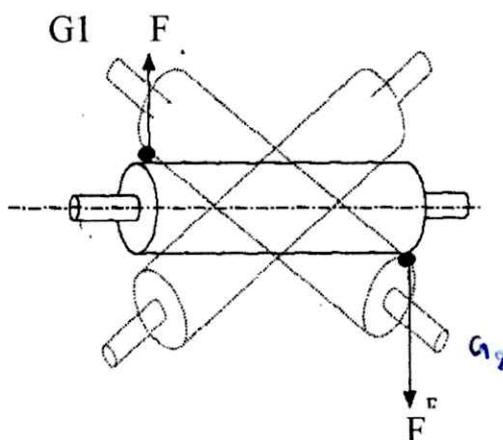


Fig (IV.5) Déséquilibre de couple

Les forces appliquées en G_1 et G_2 constituent un couple dont les forces F et $-F$ sont de la forme suivante : $F = M_1 \omega^2 r_1 = M_2 \omega^2 r_2$

La coupe de produit est équilibrée par des réaction R_a et R_b qui sont parallèles de sens opposés qui tournant à la vitesse ω et engendrent des vibrations dans les paliers.

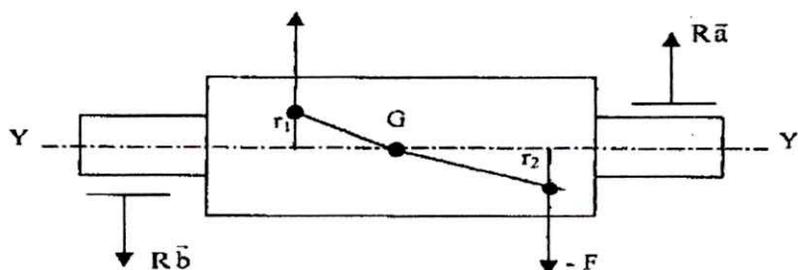


Fig. (IV.6)

Dans la pratique un rotor présente toujours un balourd statique et un balourd dynamique combiné.

Le balourd statique dû aux balourds résiduels obtenus au cours de l'équilibrage statique, si le rotor est composé de plusieurs disques, on ajoute un balourd dû aux défauts d'excentricité lors de l'assemblage.

La force f du balourd statique peut se décomposer dans les plans I et II en deux forces f_1 et f_2 équivalentes définies par :

$$f_1 + f_2 = f$$

De même le couple créé par le balourd dynamique peut se décomposer dans les plans I et II en deux forces F_1 et F_2 , l'addition de ces forces donne une résultante f_1' dans le plans I et une résultante f_2' dans le plans II.

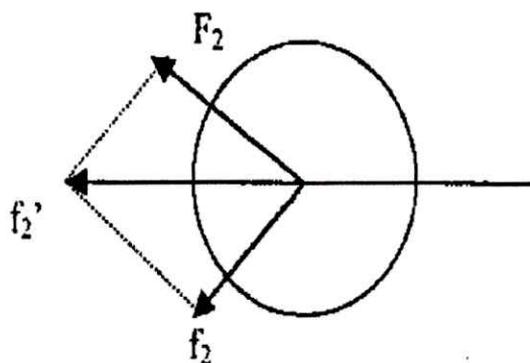


Fig (IV.7)

En conclusion, pour obtenir la tranquillité de rotation du rotor, il est nécessaire de prévoir des masses de compensations en deux plans de correction au même rayon et diamétralement opposé.

IV -1-8.Types de corrections :

En générale, la correction d'un déséquilibre d'un corps se fait en deux méthodes (par addition ou par enlèvement de matière).

Dans les compresseurs et les turbines axiales, la correction se fait par addition plus couramment à l'aide des masses fixées par vis munies d'une rondelle frein, on peut également utiliser des vis de longueurs différentes.

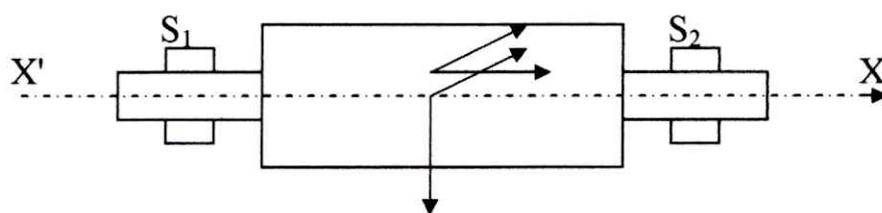
Dans les petits moteurs (compresseurs et turbines centrifuges) la correction se fait par enlèvement de matière c'est à dire par moulage et limage de matière sur un plan prévu à cet effet.

IV -2.Equilibre des rotors rigides : [10]

Soit la ligne d'arbre considérée dans la figure (IV.8) tourbillonnant à l'intérieur de deux paliers S_1 et S_2 supposés sans jeu (roulement à billes ou paliers lisses).

IV -2-1.Les trièdres de références :

Soit $X'X$ la droite qui joint les centres des deux paliers S_1 et S_2 , O étant point d'intersection de cette droite avec le plan perpendiculaire $X'X$ contenant le centre de gravité G du rotor.



Coupe longitudinale

Fig (IV.8): les trièdres de référence

a- Le trièdre de référence lié aux paliers :

Il est défini par ces trois axes

- OX est confondu avec $X'X$
- OZ est vertical
- OY complète le trièdre direct

Dans le cas des paliers lisses ou des paliers équipés de roulement, le centre géométrique du palier est confondu avec le centre de rotation.

b-Le trièdre de référence lié au mobile :

Soient O' le centre géométrique du rotor et E l'encoche du top de tour. Il est défini par ses trois axes

- $O'X$ est parallèle à OX ;
- $O'Z$ est confondu avec OE ;
- $O'Y$ complète le trièdre direct

IV -2-2. Les plans de référence :

a- Les plans de compensation :

On appelle plans de compensation les sections du rotor où seront placé les balourds correcteurs.

Dans le cas où le rotor, nous montrerons que deux plans de compensation suffisent.

Sur la figure (IV.9) les plans P , et PZ de compensation ont été placés arbitrairement aux extrémités gauche et droite du rotor X_1 et X_2 sont les abscisses de ces deux plans dans le repère mobile.

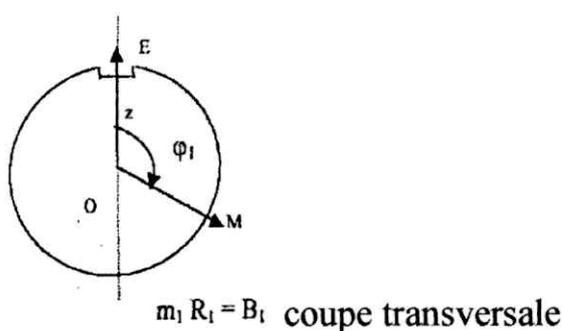


Fig (IV.9) : les plans de compensation

b- Plan de mesure :

Les plans de mesures correspondent aux sections droites. dans lesquelles sont placés les capteurs.

Ces capteurs peuvent être des accéléromètres, des vélocimétries ou des sondes de déplacement. Les plans choisis par l'expérimentateur.

IV -2-3.Les balourds :

a-Les balourds inhérents et Ici ligne d'arbre :

- Le balourd élémentaire :

Considérons un élément cylindrique de longueur dx et l'abscisse x_1 Soit G_1 le centre de graviter de cet élément.

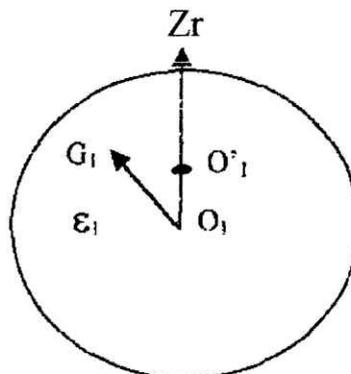


Fig (IV.10)

Dans le plan perpendiculaire à $X'X$ et passant par G_1 , on note les points

Suivant :

- O_i le point d'intersection de $X'X$ avec ce plan

- O'_i le centre géométrique

D'autre part l'axe O_iZ est parallèle à OZ

En notant : $O_i G_i = \varepsilon_i$ on appelle « balourd élémentaire » le vecteur : si dm_i où dm_i est la masse de déséquilibre.

Le balourd de ligne d'arbre :

Le balourd de la ligne d'arbre est la somme de tous les balourds Élémentaires.

On a donc
$$B_I = \int \varepsilon_i dm_i$$

h-Les balourds compensateurs :

- Masse de compensation :

Aux balourds B_{C_1} et B_{C_2} , (Fig (IV.9)) correspondent des masses de Compensation m_1 , m_2 telles que :

$$|B_{C_1}| = m_1 R_1 \quad \text{et} \quad |B_{C_2}| = m_2 R_2$$

- R_1 et R_2 sont les rayons de compensation des plans P_1 et P_2

- φ_1 est l'angle formé par les deux vecteurs OE et OM_1

- φ_2 est l'angle formé par les deux vecteurs OE , et OM_2

IV -2-4. Le torseur des efforts agissant sur le rotor :

En rotation, l'accélération centrifuge du centre de gravité G_i de l'élément à pour valeur

$$\vec{O_i G_i} \omega^2 = \varepsilon_i \omega^2$$

La force centrifuge correspondante est

$$dF_i = \omega^2 dm_i \varepsilon_i$$

Le moment de cette force par rapport au point O est :

$$dM_i = dF_i \wedge \vec{O_i O} = \omega^2 dm_i \varepsilon_i \wedge \vec{O_i O}$$

En composant toutes les forces et tous les moments élémentaires, on a

$$\vec{F} = \int \varepsilon_i \omega^2 dm_i = \omega^2 \int \varepsilon_i dm_i$$

$$M = \omega^2 \int [\varepsilon_i \wedge \vec{O_i O}] dm_i$$

Le couple (F.M) est appelé torseur des forces extérieures.

Lorsque $M = 0$, seule subsiste la force F : le balourd est alors dit statique.

Lorsque $F = 0$, seule subsiste le moment M : le balourd est alors dit dynamique. Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces et des moments appliqués au système soient nulle.

IV-2.5. Le lancer (RUN) :

L'opération qui consiste à faire tourner le moteur (la machine) à sa vitesse d'équilibrage dans une configuration donnée est appelée « lancer »

IV-3. Méthodes d'équilibrage des rotors rigides: [11]

1-3-1. Méthode de coefficient d'influence :

a) Définition du coefficient d'influence

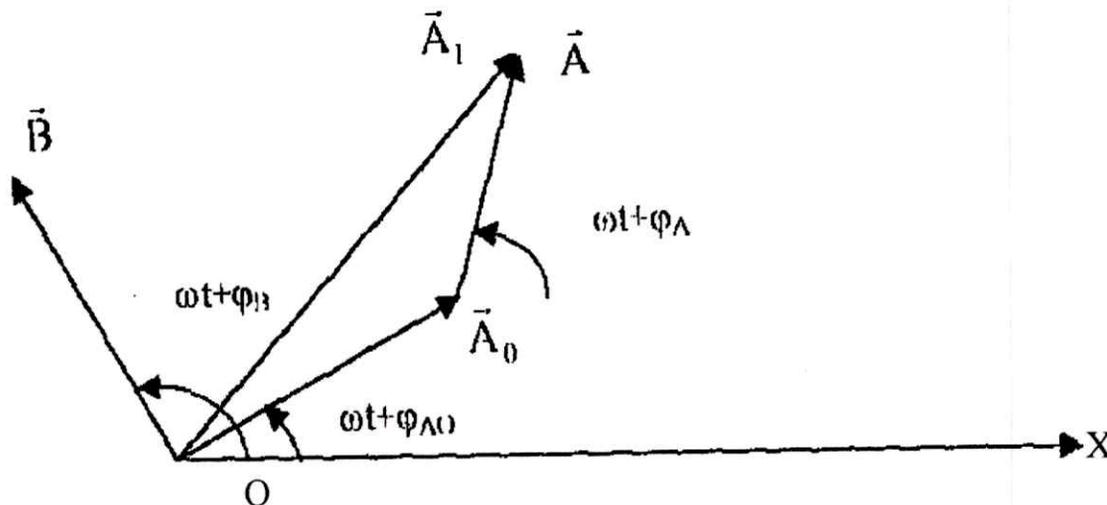


Fig. (IV.11) : Vecteurs tournants associés aux vibrations et au balourd.

Considérons un système rotor - liaisons, soit ω , la vitesse du rotor. En un Point O et pour une direction fixe du système (Fig. IV.11), la vibration absolue d'un élément ou la vibration relative d'un élément par rapport à un autre peut être caractérisée par une amplitude (de déplacement, de vitesse, d'accélération) et par une phase par rapport à un repère sur le rotor .

A un instant donné un vecteur tournant A_0 peut être associé à la Vibration Fig.(IV.11).

Dans un plan du rotor perpendiculaire à son axe de rotation plaçons un balourd B (masse x distance de l'axe), on peut lui associer un vecteur tournant B.

Ce balourd s'ajoute aux balourds initiaux qui affectant le rotor, la Vibration résultante est caractérisée par A_1 de sorte que l'influence de B est représentée par A

A partir de la figure (IV.11), on peut écrire :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 - \vec{A}_0$$

$$|\vec{A}|^2 = |\vec{A}_1|^2 + |\vec{A}_0|^2 - 2|\vec{A}_1||\vec{A}_0|\cos(\varphi_{A1}, \varphi_{A0})$$

$$\varphi_A = -\arcsin[\sin(\varphi_{A1}, \varphi_{A0})] + \pi + \varphi_{A0}$$

Connaissant les amplitudes A_0 et A_1 et les phases φ_{A0} et φ_{A1} , on peut calculer

L'amplitude A et la phase φ_A caractérisant le vecteur A En représentant les vecteurs tournants par des nombres complexes on a :

$$|\vec{A}| \exp[j(\Omega t + \varphi_A)] = C |\vec{B}| \exp[j(\Omega t + \varphi_B)]$$

Avec $j = \sqrt{-1}$

φ_A et φ_B sont définis sur la figure (IV.11) par suite

$$C = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|} \exp[j(\varphi_A - \varphi_B)] = |C| \exp(j\psi)$$

C définit le coefficient d'influence du balourd test B à sur le plan de mesure.

ψ : retard de phase.

b- procédure d'équilibrage :

Pour équilibrer un rotor rigide, quatre lancers sont nécessaires et Théoriquement suffisants lorsqu'on dispose d'un phasemètre

- Le lancer n° permet d'obtenir les niveaux vibratoires aux endroits des Capteurs de mesure dans l'état dit initial. Les relevées ainsi obtenues sont Appelées «relevées initiaux ou conditions initiales ».

- Le lancer n°1 est effectué avec la masse d'essai placée dans le plan de Compensation P_1 .

- Le lancer n°2 est effectué avec la masse d'essai placée dans le plan de Compensation P_2 .

Comme nous le verrons dans ce qui suit, on possède tout les éléments pour Calculer les coefficients d'influence et déterminer en suite les balourds Compensateurs.

Le lancer n°3 est effectuée après mise en place des masses compensatrice cette quatrième rotation permet de vérifier si la classe d'équilibrage exigée et atteinte ou non. si cette qualité n'est pas atteinte, on procède à un nouveau des calculs des balourds compensateurs.

Les valeurs du lancer $n : 3$ servant de conditions initiales on recommence ainsi les opérations jusqu'à l'obtention de la classe exigée . quand les spécifications d'équilibrage seront satisfaites, il reste toujours un certain balourd dit :

«Balourd résiduel» qui est généralement cité sur le livre machine.

IV.3.2 Méthode d'équilibrages sans mesure de phase :

La méthode des coefficients d'influence expose précédemment présente l'avantage de limite le nombre de lancers, le quel peut être réduit a trois dans le cas d'un équilibrage uni plan . qui plus est, les résultats obtenus sont plus précis que ceux obtenus avec les méthodes d'équilibrages sans mesures de phase . la méthode des coefficients d'influence, par contre, nécessite un appareillage mesure des phases, ce qui, pour certains utilisateurs ceci représente un investissement onéreux. C'est la raison pour la quelle les méthodes d'équilibrages basées seulement sur la mesure des amplitudes sont encore utilisées.

Par mes ces méthodes la méthode des trois lancers a 120° . les calculs des balourds compensateurs par ces méthode repose essentiellement sur des constructions graphiques et les calculs vectoriels

IV.3.3. Masse correctrice dans un plan :

Avec une masse, on peut toujours créer une force qui s'oppose à la réaction sur une liaison. Si le rotor comprend un arbre et une roue de dimension importante, celle-ci pourra être très avantageusement constituée le plan D'équilibrage P qui, selon une grande probabilité, contiendra le balourd initial à corriger par suite, la réaction sur chacune des liaisons pourra être annulée.

Les méthodes d'équilibrage uni-plan sont des cas particuliers d'équilibrage à deux plans de compensation.

De ce fait, on n'exposera ci-dessous que la méthode par mesure d'amplitude et de phase et la méthode des trois lancers à 120° sans mesure de phase. Notons que ces méthodes sont parfois utilisables pour équilibrer des Rotors sur deux plans de compensation, cela se fait par des actions successives sur les deux plans.

a) Méthode par les amplitudes et les phases :

La méthode par mesure d'amplitude et de phase c'est un cas particulier de la méthode des coefficients d'influence en utilisant un seul plan de Compensation.

b- Méthode des trois lancers à 120° :

- Dans cette méthode, on effectue les rotations suivantes
- rotation initiale sans masse additionnelle : amplitude de U_0
 - rotation avec balourd d'essai B_t , à 0° : amplitude U_1 ,
 - rotation avec balourd d'essai B_t , à 120° : amplitude U_2
 - rotation avec balourd d'essai B_t , à 240° : amplitude U_3

Traçons un cercle $C(A, U_0)$ de centre A et de rayon U_0 et positionnant sur ce cercle trois points b, c, d régulièrement espacés de 120° .

"Traçons le cercle $C_1(b, U_1)$ de centre b et de rayon U_1 , le cercle $C_2(c, U_2)$ de centre c et de rayon U_2 et le cercle $C_3(d, U_3)$ de centre d et de rayon U_3 .

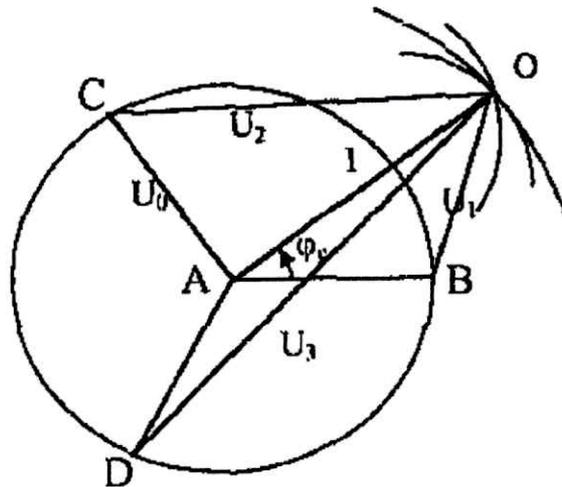


Fig. (IV.12) : Méthode des lancers à 120°

Ces trois cercles se coupent en un seul point O Fig.(IV.12)

$$O\vec{B} = O\vec{A} + A\vec{B}$$

$O\vec{B}$ est l'addition du balourd initial $A\vec{B}$ et du vecteur $O\vec{A}$ correspondant à l'adjonction du balourd test B_t au repère O.

Le minimum de vibration sera enregistré en plaçant la masse

Compensatrice au point E. dans ces conditions le vecteur balourd compensateur \vec{B}_c est défini par:

$$|\vec{B}_c| = \frac{|A\vec{B}|}{|O\vec{B}|} B_t \quad \text{et} \quad \varphi_c = \widehat{BAO} \quad \text{avec} \quad |A\vec{B}| = U_0$$

$$|O\vec{B}| = U_1$$

et

$$O\vec{A} = O\vec{B} - A\vec{B}$$

Conclusion

Conclusion :

Le projet de fin d'étude, nous a permis de faire une approche entre la théorie et la pratique. On a soulevé de près les problèmes de construction aéronautique.

Une étude théorique détaillée de conception d'un arbre principal d'un moteur aéronautique de laboratoire et déterminée un dessin de définition de cette pièce principale du moteur a été proposé pour la réalisation.

Nous espérons une pour suite dans le même domaine de recherche sera proposée et qui touche exactement le domaine de fabrication mécanique, c'est-à-dire le bureau de méthode à la base de dessin de définition proposé une gamme d'usinage type et cela pour la réalisation de cette pièce qui sera un modèle type des pièces restantes qui constituent les modules de ce moteur aéronautique de labos .

BIBLIOGRAPHIE

[1] : ALLALI abderrazak thèse (élaboration de l'assemblage final d'un turboréacteur adaptable turbopropulseur (prototype de laboratoire))
Université de Blida 2003-2004.

[2] : ALLALI abderrazak thèse (étude et conception d'une réducteur de vitesse adapte à un moteur aéronautique de labos)
Université de Blida 2003-2004.

[3] : BENTRAD Hocine Thèse (étude et réalisation d'un micro turboréacteur) 2002-2003 Université de Blida 2003-2004.

[4] : brobleme des résistance des matériaux édition mir Moscou 495page.

[5] : BEDER-EDDINE aimad-eddine thèse (la prédiction du comportement vibratoire des lignes d'arbre en torsion et en flexion).
Université de Blida 2002-2003.

[6] : louis Bourgain, roger dart-jacque bourgain. (Machines tournantes et circuits pulses) Paris.

[7] : cours 1^{er} année poste gradiation 2003-2004,
Mr.ouali Mohamed département de mécanique Blida.

[8] : FERDJOUNI (thèse élaboration d'un logiciel d'équilibrage dynamique d'un turboréacteur CFM56-3).
Université de Blida 1998-1999.

[9] : SAP 2000.

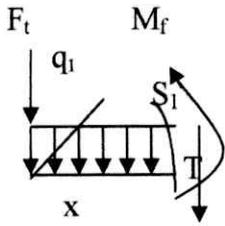
[10] : Techniques d'ingénieur B 5771.

[11] : Machines tournants et circuits pulses .

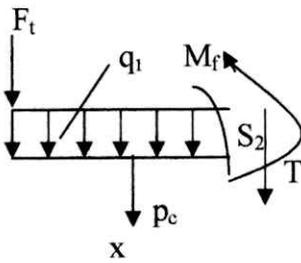
Annexe

Annexe :1

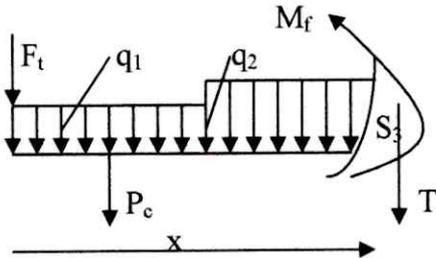
1^{er}:zone $0 \leq x \leq l_1 - y$



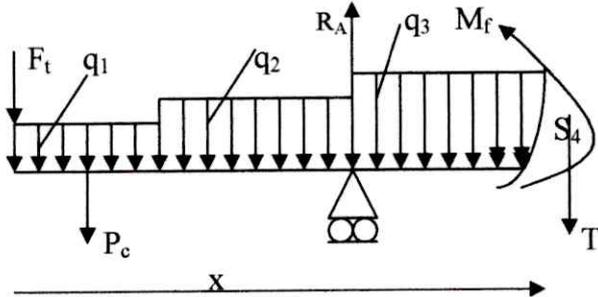
2^{em}:zone $l_1 - y \leq x \leq l_1$



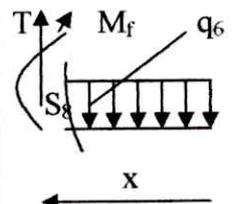
3^{em}:zone $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$



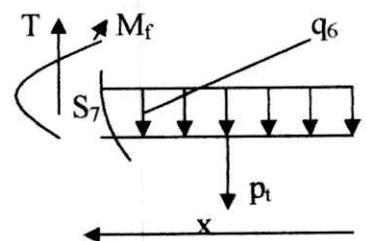
4^{em}:zone $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$



8^{em}:zone $0 \leq x \leq l_6 - x$



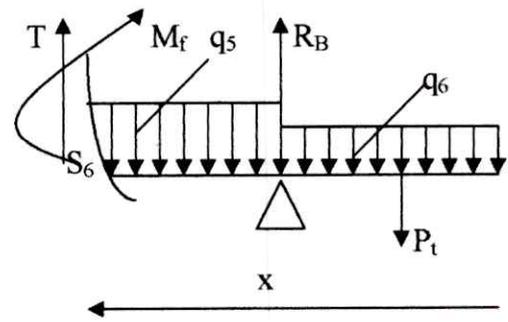
7^{em}:zone $l_6 - x \leq x \leq l_6$



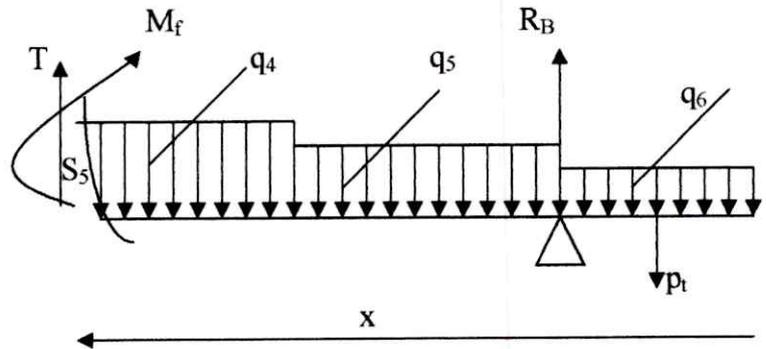
Annexe :1

∴

6^{em}: zone $l_6 \leq x \leq l_5 + l_6$

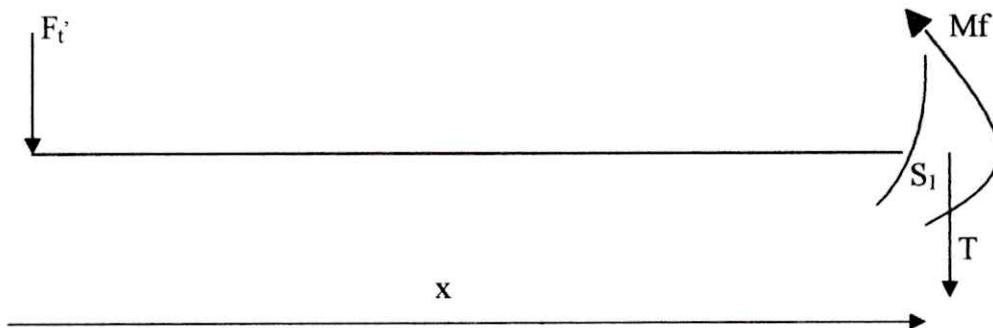


5^{em}: zone $l_5 + l_6 \leq x \leq l_4 + l_5 + l_6$

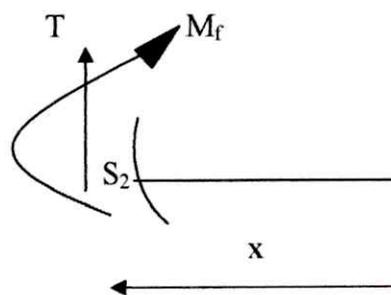


Annexe :2

1^{em} : zone $0 \leq x \leq l_1 + l_2 + \dots + l_5$



2^{em} : zone $0 \leq x \leq l_6$



Résumé :

L'état des connaissances à un instant donné et la complexité d'une ligne d'arbre, par exemple, conduisent à substituer à la réalité des esquisses simplifiées aux modèles qui s'appliquent aux lois de la physique, chaque modèle exprimant l'une des manifestations de l'objet. Ainsi, il est nécessaire de créer, pour une ligne d'arbres, différents modèles pour :

- réaliser l'équilibrage.
- connaître la fréquence propre de la vibration de torsion, de flexion ou axiale.
- Déterminer les amplitudes en quelques points particuliers des oscillations forcées de torsion, de flexion ou axiales.

ملخص:

- حالة التعقيد المتقات من العمود الدوراني تقودنا إلى وضع قوانين رياضية تسيير هذه الأنظمة وتسهل تطبيق القوانين الفيزيائية وكذلك من الواجب لمختلف الأنظمة الدوارانية
- تحقيق التوازن.
 - معرفة الذبذبات الخاصة بالنظام.
 - استخراج الأبعاد لنقاط خاصة لاهتزازات قصريه التوائية (اللف) انحنائية و طولية.