

*République Algérienne Démocratique Et Populaire*  
*Ministère De l'Enseignement Supérieure Et De La Recherche Scientifique*



*Université De Blida*  
*Département D'Aéronautique*



# **Mémoire**

**De Fin D'études**

*En vue de l'obtention du Diplôme Ingénieur D'état en Aéronautique.*

**Option : Installation.**

**THEME**

# **Transformation Entre Système De Référence Géodésique**

**Fait par :**

*Mr.SASSOUI Hichem.*  
*Mr.MOKEDDEM Samir.*

**Encadré par :**

*Mr.HADDAD Mehdi.*  
*Mr.BEN OUARD*



**Promotion: 2004 - 2005**

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à tous qui m'ont soutenue de proche ou de loin, durant toutes mes années d'étude, et qui n'ont pas cessé de m'encourager et de me pousser pour la réussite :*

*A mes très chers parents qui présentent toujours ma seule source de l'espoir et qui m'ont beaucoup appris comment atteindre les sommets.*

*A mes frères ; Ali, Adel, Soufiane, Youcef et Oussama.*

*A mes sœurs.*

*A ma fiancée S.*

*A toute la famille.*

*A mes très chers amis ; Farid, Khaled, Lazhar, Houcine, Mourad, Nadir, Youcef,*

*A mon binôme MOKEDDEM Samir et sa famille.*

*A mon promoteur Monsieur HADDAD Mehdi.*

*A mes collègues ; Amine, Hamza, Mounir, Yacine*

*A tous les employés et les cadres de l'institut nationale de cartographie et de télédétection (CNTS)*

*A tous les enseignants et les étudiants de l'institut d'aéronautique de l'université SAAD DAHLAB de BLIDA.*

*Et surtout les étudiants du 5<sup>ème</sup> année installation, promotion 2004/2005.*

*Que dieu tout puissant les protège tous.*

*AMEN*

*Hichem Sassoui*

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à tous qui m'ont soutenue de proche ou de loin, durant toutes mes années d'étude, et qui n'ont pas cessé de m'encourager et de me pousser pour la réussite :*

*A mes très chers parents qui présentent toujours ma seule source de l'espoire et qui m'ont beaucoup appris comment atteindre les sommets.*

*A mes frères.*

*A mes sœurs.*

*A toute la famille.*

*A mon promoteur Monsieur Hadded Mehdi.*

*A mes très chers amies.*

*A mes copains de chambres EL-HADJ, et Achacha*

*A mon binôme Sssoui Hichem et sa famille.*

*A mes collègues.*

*A tous les employeurs et les cadres de l'institut nationale de cartographie et de télédétection (CNTS).*

*A tous les enseignants et les étudiants de l'institut d'aéronautique de l'université SAAD DAHLAB de BLIDA.*

*Et surtout les étudiants du 5<sup>ème</sup> année installation, promotion 2004/2005*

*Que dieu tout puissant les protège tous.*

*AMEN*

*MOKEDDEM SAMIR.*

## RESUMER

Il existe plusieurs systèmes géodésiques dans le monde, pour le passage d'un système à un autre il faut connaître les paramètres de passage, pour ce faire plusieurs modèles de transformations sont utilisés. Les plus courants sont, le modèle de BOURSA-wolf, le modèle MELODENSKY-BADEKAS, et le modèle géographique de MELODENSKY. Une application a été développée, pour la transformation d'un jeu de données réel entre le système WGS84 et Clarke 1880 IGN France.

## ABSTRACT

Several geodesic systems exist in the world, for the passage of a system to another it is necessary to know the parameter of passage, for that to make several models of transformations use. The most current are, the model of BOURSA-Wolf, the MELODENSKY-BADEKAS model, and the geographical model of MELODENSKY. An application to summer to develop, for the transformation of a real data game between the WGS84 system and Clarke 1880 IGN France

## المخلص

يوجد العديد من الأنظمة الجيوديزية في العالم للانتقال من نظام الى آخر يجب معرفة عوامل الانتقال، لهذا الغرض هناك عدة نماذج مستعملة. الشائعة منها هي نموذج BOURSA-wolf نموذج MELODENSKY-BADEKAS نموذج جغرافي MELODENSKY. تم تحليل عملية تطبيقية خاصة بتحويل إحداثيات نقط واقعية بين النظام الجيوديزي العالمي WGS84. و النظام الجيوديزي المحلي Clarke 1880 IGN France

## ACRONYMES

OACI	: Organisation de l'Aviation Civile International.
WGS-84	: Système Géodésique Mondial 1984.
GPS	: System Global de Posionement.
RNAV	: Systèmes de Navigation de Surface.
UAC	: Contrôle de l'Espace Aérien Supérieur.
SAVVAN	: Système automatique de vérification en vol des aides à la navigation.
DME	: Dispositifs de Mesure de distance.
VOR	: Radiophare omnidirectionel VHF.
AIP	: publications d'information aéronautique.
NAD	: Système de référence nord-américain.
ED	: Système de référence européen.
INS	: Système de Navigation par Inertie
GNSS	: Système Mondial de navigation par satellite
NTF	: Nouveau triangulation France
DOD-US	: Département de la défense (USA).
IGN	: Instutie Geographique national - france.
CTS	: Conventional Terres trial Système.
CIS	: Conventional Inertial Système.

## SYMBOLES

$a$	: demi-grand axe.
$b$	: demi-petit axe.
$f$	: aplatissement.
$e$	: La première excentricité.
$e'$	: La deuxième excentricité.
$\xi, \eta$	: composantes de la déviation de vertical.
$\lambda$	: longitude.
$\varphi$	: latitude.
$\mathcal{E}$	: Latitude isométrique.
$\psi$	: Latitude paramétrique.
$A_z$	: Azimute.
$O$	: L'origine (centre de gravité de la terre).
$X$	: L'axe des abscisses.
$Y$	: L'axe des ordonnées.
$Z$	: L'axe de rotation de la terre.
$h_e$	: Hauteur ellipsoïdique.
$r$	: Rayon de courbure
$C$	: Distance focale.
$PN$	: pôle Nord.
$PS$	: pôle sud.
$\vec{n}$	: la normale à l'ellipsoïde.
$T_X, T_Y, T_Z$	: translations selon l'axe des X, des Y et des Z.
$E_X, E_Y, E_Z$	: rotation selon l'axe des X, des Y et des Z.
$\Delta k$	: facteur d'échelle.
$V$	: potentiel terrestre.
$P_{nm}$	: la fonction associées de Legendre
$C_{nm}, S_{nm}$	: Coefficients harmoniques liés à la physique de la terre.
$\mu$	: constante gravimétrique.
$S$	: matrice rotation de la terre incluant le mouvement du pôle.
$N$	: matrice nutation issue de la théorie de WAHR et basée sur les séries de WOOLARD
$P$	: matrice précession issue de la théorie de NEWCOMB.

# TABLE DES MATIERES

**Remerciements**

**Dédicaces**

**Résumé**

**Abréviations et Symboles**

**Liste des figures**

**Liste des tableaux**

**Liste des Organigrammes**

**Introduction** ..... 1

## **CHAPITRE I : La Géodésie en Aéronautique.**

I.1) Introduction ..... 2

I.2) Effets de l'utilisation de différents systèmes de référence géodésique en aviation..... 3

I.3) Ampleur du problème ..... 4

I.4) Répercussions sur la navigation ..... 5

I.5) Solution Au Problème ..... 6

## **CHAPITRE II : Généralité de La Géodésie.**

II.1) Introduction ..... 8

II.2) La géodésie ..... 8

II.2.1) Représentation de la Terre par une sphère ..... 8

II.2.2) Représentation de la Terre par un ellipsoïde ..... 9

II.2.3) Représentation de la Terre par un géoïde ..... 9

II.3) Le Géoïde ..... 10

II.4) ellipse et ellipsoïde..... 11

II.4.1) type de l'ellipsoïde..... 11

II.4.1.1) Ellipsoïde ou datum astro-géodésique ..... 11

II.4.1.2) Ellipsoïde ou datum gravimétrique..... 12

II.4.1.3) Ellipsoïde local et ellipsoïde global ..... 12

II.4.1.3.1) Ellipsoïdes globaux..... 12

II.4.1.3.2) ellipsoïdes locaux..... 12

II.5) Systèmes de Coordonnées ..... 12

II.5.1) Système de coordonnées cartésiennes..... 13

II.5.2) Système de Coordonnées Géographiques..... 13

II.5.3) les coordonnées planes..... 14

II.5.4) Altitude..... 15

II.6) Les différents types de projection ..... 15

II.6.1) Projection Lambert..... 16

II.6.2) Projection UTM .....	17
------------------------------	----

**CHAPITRE III : Géométrie de L'ellipsoïde de Révolution Aplatie.**

III.1) Ellipse et ellipsoïde .....	18
III.1.1) Ellipse .....	18
III.1.1.1) Définition .....	18
III.1.1.2) Caractérisation.....	19
III.1.2) Ellipsoïde de révolution aplati .....	20
III.1.2.1) définition.....	20
III.2) Paramétrages de l'ellipsoïde.....	21
III.2.1) Latitude paramétrique .....	21
III.2.2) Latitude géographique.....	22
III.2.3) Latitude géocentrique .....	24
III.3) Transformations géocentriques.....	25
III.3.1) Problématique .....	25
III.3.2) Passage des coordonnées géographique en coordonnées cartésiennes.....	25
III.3.3) Passage des coordonnées cartésiennes en coordonnées géographique.....	26
III.3.3.1) Processus itératif.....	26
III.3.3.2) Processus direct.....	28

**CHAPITRE IV : Systèmes de Référence et Modèles de Transformation.**

IV.1) systèmes de référence géodésiques.....	29
IV.1.1) Définition .....	29
IV.1.2) Systèmes d'origine terrestre .....	29
IV.1.2.1) Le système général terrestre (CIO - BIH) .....	29
IV.1.2.2) Les Systèmes Locaux .....	30
IV.1.2.2.1) Définition .....	30
IV.1.2.2.2) Exemple .....	30
a) Européenne datum (ED50) .....	30
b) Nouveau triangulation France (NTF) .....	31
c) Le système local NORD-SAHARA .....	31
IV.1.3) Les systèmes d'origine spatiale .....	32
IV.1.3.1) définition .....	32
- Origine O.....	32
- Echelle.....	33
- Orientation .....	33
IV.1.3.2) Exemple .....	34
- Le World Geodetic System 1972 (WGS 72).....	34
- Le World Geodetic System 1984 (WGS 84).....	34



- Le Geodetic System (GRS 80) .....	35
IV.2) Transformation entre système de références géodésiques .....	35
IV.2.1) Expression générale d'une transformation .....	35
IV.2.1.1) La méthode de transformation géocentrique à trois paramètres.....	36
IV.2.1.2) La méthode de transformation géocentrique à 7 paramètres .....	37
IV.3) solution au système .....	39
IV.4) Les modèle de transformation.....	42
IV.4.1) modèle cartésiens .....	43
IV.4.1.1) Modèle cartésien de BURSA-WOLF .....	43
IV.4.1.2) Modèle MOLODENSKY-BADEKAS.....	44
IV.4.2) modèle géographique de molodensky .....	46

## **CHAPITRE V : Application.**

V.1) Introduction.....	50
V.2) Coordonnées géographiques des points les deux systèmes de référence géodésiques ...	51
V.2.1) Coordonnées des points dans le système mondial WGS84 .....	51
V.2.2) Coordonnées des points dans le système local Clarke 1880 IGN France .....	52
V.3) Développement de l'application.....	53
V.3.1) Transformation entre les systèmes de référence géodésique .....	53
V.3.1.1) Organigramme .....	54
- Modèle de Bursa Wolf .....	54
- Modèle de Melodensky Badekas.....	56
- Modèle Géographique de Melodensky.....	58
V.3.1.2) Exécution de l'application .....	59
V.3.1.2.1) Modèle de Bursa Wolf .....	59
- Exécution du programme : bursa.exe .....	59
- Fichiers d'entrée.....	59
- Fichier de sortie .....	60
V.3.1.2.2) Modèle de Melodensky Badekas .....	63
V.3.1.2.3) Modèle de Géographique.....	66
V.4) Analyse des résultats.....	68
<b>Conclusion</b> .....	69
<b>Bibliographie.</b>	

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure I.1</b>	- Problème de systèmes de référence en navigation aérienne.....	<b>4</b>
<b>Figure I.2</b>	- Différence de latitude $\Delta LAT$ , différence de longitude $\Delta LON$ entre les positions des systèmes de référence locaux et celles du système WGS-72 (en ").....	<b>5</b>
<b>Figure II.1</b>	- Coordonnées géodésiques, et projection d'un point sur un ellipsoïde de révolution .....	<b>8</b>
<b>Figure II.2</b>	- Représentation de la terre par un géoïde.....	<b>9</b>
<b>Figure II.3</b>	- Forme du géoïde terrestre.....	<b>10</b>
<b>Figure II.4</b>	- Ellipsoïde global ellipsoïde local .....	<b>12</b>
<b>Figure II.5</b>	- coordonnées cartésiennes.....	<b>13</b>
<b>Figure II.6</b>	- coordonnées géographiques .....	<b>14</b>
<b>Figure II.7</b>	- représentation plane.....	<b>14</b>
<b>Figure II.8</b>	- types de projection.....	<b>15</b>
<b>Figure II.9</b>	- projection conique.....	<b>16</b>
<b>Figure II.10</b>	- Projection cylindrique.....	<b>17</b>
<b>Figure III.1</b>	- ellipse.....	<b>18</b>
<b>Figure III.2</b>	- rotation/demi petit axe .....	<b>20</b>
<b>Figure III.3</b>	- rotation/demi grand axe.....	<b>20</b>
<b>Figure III.4</b>	- Ellipsoïde géodésique.....	<b>21</b>
<b>Figure III.5</b>	- Latitude paramétrique.....	<b>21</b>
<b>Figure III.6</b>	- Latitude géographique .....	<b>22</b>
<b>Figure III.7</b>	- Latitude géocentrique .....	<b>24</b>
<b>Figure IV.1</b>	- Ellipsoïde WGS 84 .....	<b>35</b>
<b>Figure IV.2</b>	- Changement de système de référence .....	<b>36</b>
<b>Figure IV.3</b>	- Transformation à trois paramètres.....	<b>36</b>
<b>Figure IV.4</b>	- Modèle de transformation a trois paramètres .....	<b>37</b>
<b>Figure IV.5</b>	- Transformation à sept paramètres.....	<b>38</b>
<b>Figure IV.6</b>	- Modèle de transformation 7 paramètres.....	<b>38</b>
<b>Figure V.1</b>	- Localisation de la zone de travail.....	<b>50</b>
<b>Figure V.2</b>	- Points utilisées pour le calcul des paramètres de transformation (représentés en bleu) et points de contrôle (représentés en rouge).....	<b>50</b>

## LISTES DES TABLEAUS

<b>Tableau 1</b> - Cordonnées des points dans le système mondial WGS84 .....	<b>51</b>
<b>Tableau 2</b> - Cordonnées des points dans le système local Clarke 1880 IGN France.....	<b>52</b>
<b>Tableau 3</b> - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France .....	<b>61</b>
<b>Tableau 4</b> - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage .....	<b>61</b>
<b>Tableau 5</b> - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées .....	<b>62</b>
<b>Tableau 6</b> - Coordonnées cartésiennes géocentriques dans le Système WGS.....	<b>63</b>
<b>Tableau 7</b> - Coordonnées cartésiennes géocentriques Système Clarke 1880 IGN France...	<b>63</b>
<b>Tableau 6</b> - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France .....	<b>64</b>
<b>Tableau 7</b> - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage .....	<b>64</b>
<b>Tableau 8</b> - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées .....	<b>65</b>
<b>Tableau 9</b> - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France .....	<b>66</b>
<b>Tableau 10</b> - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage .....	<b>67</b>
<b>Tableau 11</b> - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées...	<b>68</b>
<b>Tableau 12</b> - les résultats de l'application des trois programmes sur les points 1009 et 6047 .....	<b>68</b>

## LISTES DES ORGANIGRAMMES

<b>Organigramme 1-a</b> : Détermination des paramètres de passage, modèle Bursa Wolf .....	<b>54</b>
<b>Organigramme 1-b</b> :Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux .....	<b>55</b>
<b>Organigramme 2-a</b> : Détermination des paramètres de passage, modèle Melodensky Badekas .....	<b>56</b>
<b>Organigramme 2-b</b> :Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux, modèle Melodensky Badekas.....	<b>57</b>
<b>Organigramme 3-a</b> :Détermination des paramètres de passage, modèle Géographique de Melodensky .....	<b>58</b>
<b>Organigramme 3-b</b> :Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux, modèle Géographique de Melodensky.....	<b>59</b>

---

# **INTRODUCTION**

## Introduction

Presque tous les pays du monde ont adopté un référentiel géodésique local pour la construction de leurs équipements de base servant à l'élaboration de leur cartographie. Avec l'avènement du GPS, des mesures peuvent être effectuées indépendamment du référentiel utilisé localement. Lorsque toutes ces mesures doivent être intégrées dans un même système, il devient nécessaire de savoir comment transformer les coordonnées géographiques (longitude, latitude et altitude) d'un référentiel géodésique à un autre.

Les ellipsoïdes définis au cours du temps pour approcher la forme de la Terre et positionner un point, diffèrent par leur forme ou leur centre, ou les deux. Pour passer des coordonnées géographiques d'un point par rapport à un référentiel aux coordonnées du même point par rapport à un autre référentiel, il faut donc connaître les formes des deux ellipsoïdes de révolution et les écarts de position entre les deux centres.

La transformation entre les systèmes de références consiste à déterminer des facteurs dits paramètres de passage :

- trois translations  $T_x, T_y, T_z$
- trois rotations  $E_x, E_y, E_z$
- et un facteur d'échelle  $DK$

Dans ce cadre général notre étude a porté sur les points suivants :

- chapitre I : présentation de l'inconvénient de l'utilisation de plusieurs systèmes géodésiques pour la localisation des aéronefs dans les pays européens et commodément dans d'autres régions du monde, et présentation des principales raisons qui ont conduit l'OACI à adopter le système de référence géodésique mondiale WGS84.

- Chapitre II : est consacré à des généralités sur la géodésie, formes géométriques de la terre (sphère, géoïde, ellipsoïde), définition des différents ellipsoïdes de référence, et enfin présentation des systèmes de coordonnées utilisés en géodésie.

- Chapitre III : est consacré à l'étude de la géométrie de l'ellipse et l'ellipsoïde de révolution qui est la forme mathématique la plus proche de la forme de la terre, les différentes latitudes qui peuvent être utilisées pour décrire ce dernier, et à la présentation des algorithmes de transformation entre les coordonnées cartésiennes géocentriques et géographiques est vis versa ; transformations utilisées par la suite.

- Chapitre IV : consacré à la définition des systèmes de références géodésiques, et les différents modèles de transformations entre systèmes géodésiques qui comprennent :

- modèles cartésiens (*bursa-wolf, melodensky-badekas*)

- modèles géographiques de Melodensky.

• Chapitre V : est consacré à l'application des programmes développés sur un jeu de données de points réels situés à la région sud-est de la France, pour la détermination des paramètres de passage entre le système géodésique mondial WGS84 et le système géodésique local Clarke 1880 IGN France d'une part, ainsi qu'au calcul de validation sur les points de contrôle d'autre part.

# **CHAPITRE I**

---

## **La géodésie en aéronautique**



### **1.1) Introduction**

Comme toute autre science (la géophysique, la géodynamique, la génie civil, le cadastre...), l'aéronautique (navigation aérienne) a besoin d'un repère géodésique.

De nombreux systèmes de référence géodésique sont utilisés dans le monde et fournissent des données de référence qui servent à dresser la carte d'une région donnée. On réalisa chacun de ces systèmes de référence en adaptant un modèle mathématique donné de la Terre (ellipsoïdes locaux) à la forme réelle de celle-ci, de manière à réduire à leur minimum les différences entre l'ellipsoïde et le géoïde de la région considérée. Les différents ellipsoïdes et systèmes de référence donnent lieu à différents carroyages de parallèles et de méridiens et. Donc. À différentes sortes de coordonnées géographiques [1].

### **1.2) Effets de l'utilisation de différents systèmes de référence géodésique en aviation**

Lors de l'évolution de l'aviation notamment la navigation aérienne, Les premiers problèmes de systèmes de référence géodésique se sont posés en Europe au début des années 1970. Au cours de l'élaboration de systèmes de poursuite multi radar pour le compte du Centre de contrôle de l'espace aérien supérieur (UAC) d'Eurocontrol, situé à Maastricht. C'est là que l'on traitait les données de tracés fournies par des radars situés en Belgique, en Allemagne et aux Pays-Bas pour former un affichage de routes composite devant servir aux contrôleurs de la circulation aérienne. On s'est alors aperçu que les différences entre les routes radar résultaient de l'incompatibilité des coordonnées.

Au cours d'expériences de trajectographie réalisées au milieu des années 1970 avec le système français SAVVAN (Système automatique de vérification en vol des aides à la navigation), on a observé des «sauts» de position lors du passage entre deux transpondeurs DME (dispositifs de mesure de distance) situés dans des pays différents. Cette fois encore. Les erreurs ne pouvaient être attribuées qu'à l'incompatibilité des coordonnées des aides de navigation au sol.

Si on détermine les coordonnées d'une aide de navigation radar au sol dans deux systèmes de référence géodésique différents ou plus. La position de l'aéronef dans le plan horizontal est donnée par au moins deux ensembles différents de valeurs de latitude et de longitude. En unités du système métrique, les positions d'un aéronef localisé et poursuivi simultanément par deux radars, le Radar 1 et le Radar 2. Peuvent présenter une différence de plusieurs centaines de mètres (figure I.1). Ceci pourrait mener à une situation où un aéronef se trouvant dans la zone frontalière de deux pays aux systèmes de référence géodésique différents pourrait être aperçu par les radars des deux pays et se voir attribuer des positions différentes, ce qui pourrait éventuellement entraîner des erreurs dans

l'interprétation des séparations entre aéronefs et dans celle des autorisations provenant de zones réglementées.

Si on examine la situation actuelle, on doit (reconnaître que dans l'environnement en route, l'utilisation d'aides de navigation au sol dans des cadres de référence différents n'a aucun effet significatif, dans la mesure où le principal moyen de navigation demeure l'utilisation des signaux VOR ou NDB qui définissent les «radiales» parcourues en rapprochement ou en éloignement, avec des points de virage sur le radiophare ou à une distance de celui-ci qui est définie par le DME. Dans de telles circonstances, les coordonnées, publiées de l'aide de navigation ne change en rien la route suivie par l'aéronef. Il en sera tout autrement lors de la phase d'approche et d'atterrissage ou encore lorsqu'on applique entre aéronefs une séparation latérale réduite, comme dans le cas des systèmes de navigation de surface (RNAV), dont les spécifications de précision et d'intégrité sont plus élevées. Ces écarts deviendront donc inacceptables [1].

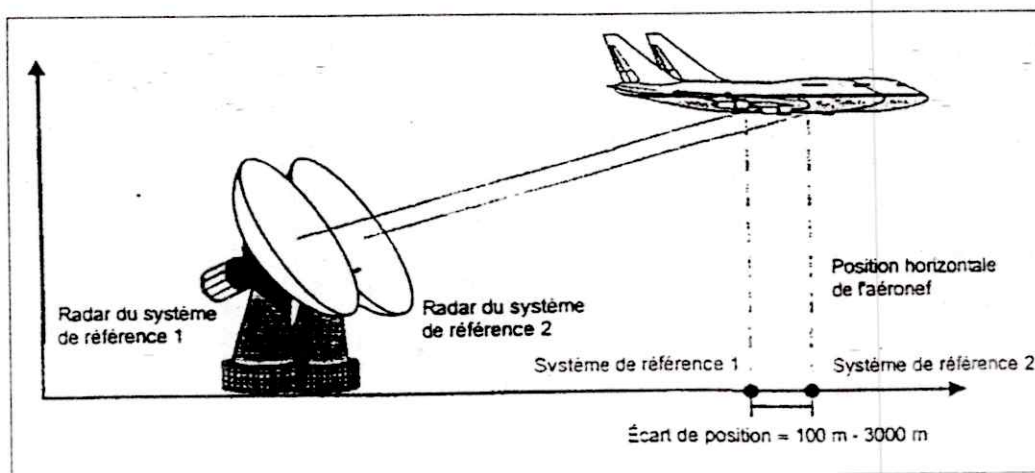


Figure I.1 - Problème de systèmes de référence en navigation aérienne [1]

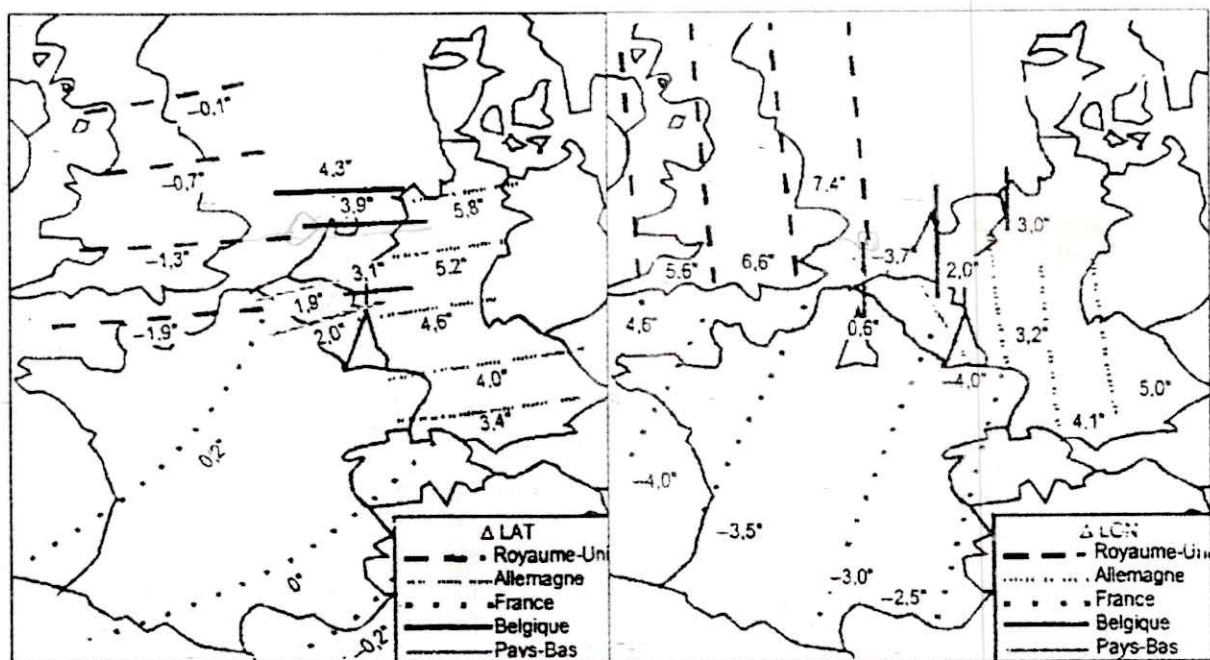
### 1.3) Ampleur du problème

Presque tous les pays possèdent déjà un cadre de référence national avec un ensemble spécifique de paramètres. Les écarts entre les coordonnées des différents systèmes de référence varient de quelques mètres à quelques kilomètres.

Les écarts entre un cadre de référence géodésique et un autre dépendent :

- De l'ordre de grandeur des trois translations à l'origine;
- De l'amplitude des trois rotations axiales;
- De la valeur du facteur d'échelle;
- De la forme de l'ellipsoïde de référence (si on oeuvre en coordonnées géographiques).

La Figure I.2 illustre l'ampleur des différences de position, pour l'Europe, entre des points exprimés dans des systèmes de référence géodésique différents. Cette figure représente les écarts, en secondes d'arc, entre les valeurs établies dans les systèmes de référence géodésique nationaux et le système WGS-72 dans cinq États pour la latitude et la longitude respectivement. On a utilisé le système WGS-72 pour cette explication parce qu'on connaissait les paramètres de transformation à partir des systèmes de référence géodésique nationaux. La Figure I.2 permet de déduire que les positions des points établies selon différents systèmes de référence géodésique nationaux et selon le système WGS-72 peuvent avoir des différences de l'ordre de quelques centaines de mètres pour un État donné [1].



**Figure I.2** – Différence de latitude  $\Delta LAT$ , différence de longitude  $\Delta LON$  entre les positions des systèmes de référence locaux et celles du système WGS-72 (en ") [1]

#### I.4) Répercussions sur la navigation

Les coordonnées géographiques utilisées de nos jours dans le contexte de l'aviation civile sont habituellement de deux types, à savoir les coordonnées terrestres et les coordonnées obtenues par un système de navigation. Les coordonnées terrestres sont celles que l'on obtient au moyen de levés, de calculs et de mesures. Elles sont publiées par l'administration de l'aviation civile dans des publications d'information aéronautique (AIP) et sur des canes auxquelles le public a accès. Par contre, les coordonnées obtenues par des systèmes de navigation sont des coordonnées déterminées par les systèmes de bord à partir d'accéléromètres et de signaux provenant du sol ou de satellites.

Les coordonnées terrestres (latitude et longitude) sont déterminées au moyen de mesures et de calculs effectués sur des modèles de référence mathématiques. Ces modèles

représentent la forme de la Terre dans une région géographique donnée et sont appelés systèmes de référence géodésique. Par exemple les coordonnées utilisées par l'aviation civile aux États-Unis sont mathématiquement rattachées au Système de référence nord-américain (NAD), au Japon au système de référence de Tokyo et en Europe au Système de référence européen (ED), ou calculée par rapport à ceux-ci. Chacune de ces systèmes de référence fait appel à un modèle mathématique différent qui (colle d'avantage) ou qui fournit les meilleures représentations du relief terrestre dans telle région géographique donnée. Les États rendent rarement public un système de référence géodésique, mais il est de pratique courante qu'un État utilise un système de référence spécifique pour toute sa cartographie et toutes ses activités géodésiques. Les paramètres mathématiques et la position du centre de chacun de ces systèmes de référence diffèrent et, sauf dans le cas des pays qui se sont déjà convertis à l'utilisation d'un système de référence géocentrique, le centre de ces systèmes de référence ne coïncide en aucun cas avec le centre massique de la Terre.

À la différence des coordonnées terrestres, les coordonnées déterminées par les systèmes de navigation sont géocentriques. Le système de navigation par inertie (INS) se compose d'accéléromètres dont la plateforme est stabilisée par un gyrostatis mécanique ou à laser pour détecter le mouvement et déterminer la position d'un aéronef. La plateforme est alignée par rapport au centre massique et de rotation de la Terre, et les coordonnées déterminées par un INS sont donc issues du centre de la Terre. Cela signifie que les coordonnées publiées comme étant issues de références géodésiques locales ne peuvent être comparées directement aux coordonnées obtenues par un INS. Étant normalement aligné avant le décollage avec les coordonnées locales, ce dernier constitue l'appareil le plus précis à l'intérieur de la région définie par le système de référence local. Les vols entre deux systèmes de référence différents n'ont pas, jusqu'à présent, été entravés par les différences de coordonnées entre les deux systèmes, cet écart étant mineur comparé à la dérive de l'INS sur la phase en route des longs trajets aériens.

Les coordonnées obtenues par le système mondial de navigation par satellite (GNSS) de bord à partir des signaux provenant des satellites seront géocentriques puisque les satellites du GNSS fonctionnent à partir d'un modèle de référence géocentrique, le WGS-84. Les coordonnées GNSS ne peuvent être comparées aux coordonnées basées sur des systèmes de référence géodésique locaux, sauf dans les régions où les coordonnées ont été adaptées à un système de référence géocentrique. En d'autres termes, il faut tenir compte de la différence entre les coordonnées d'un point déterminé selon un système de référence géodésique local et les coordonnées du même point déterminé selon le système géocentrique WGS-84 [1].

**I.5) Solution Au Problème**

La solution de ce problème exige l'adoption d'un système de référence géodésique commun pour les besoins de l'aviation civile internationale.

Le *World Geodetic System* Commuté du département de la défense des états unis a défini et élaboré un certain nombre de systèmes de référence géocentriques sur lesquels d'autres systèmes géodésiques peuvent être réglés. Le développement continu basé sur la disponibilité croissante des informations satellite a donné naissance au Système géodésique mondial 1960 (WGS-60), 1966 (WGS-66), 1972(WGS-72) et a mené à sa définition actuelle, le Système géodésique mondial 1984 (WGS-84) [1].

L'OACI à adoption le système WGS-84 comme système de référence géodésique mondial de l'aviation civile.

L'expression dans un système local des coordonnées de l'aéronef ou de dispositifs embarqués exprimées dans le système mondial (WGS 84) se voit nécessaire dans certaines applications notamment pour la cartographie (traitement des photos aériennes).

Pour se faire, on fait appel aux techniques de transformation entre système de référence géodésique (translation, rotation et facteur d'échelle).

## **CHAPITRE II**

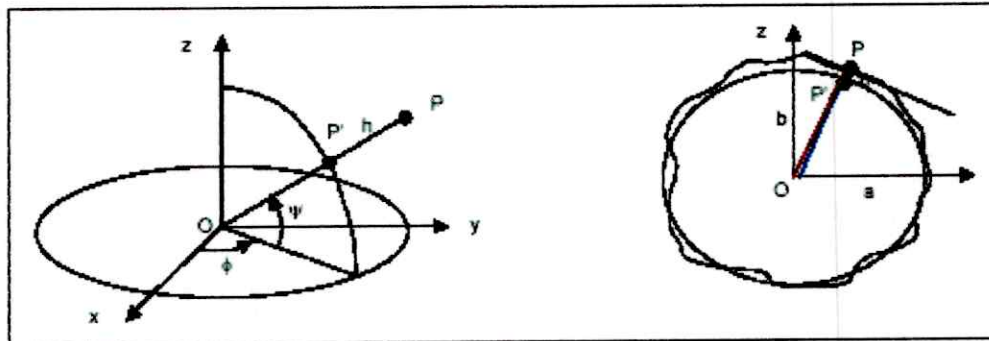
---

# **Notions générales de la géodésie**

### II.1) Introduction

Pour localiser un point sur la Terre, pour mesurer un élément ou un morceau de la surface du globe terrestre, nous sommes confrontés à connaître et mesurer la forme de la Terre pour pouvoir facilement localiser un point à sa surface.

On sait que la Terre est un corps à peu près sphérique, tournant sur lui-même et tournant autour du soleil, avec à sa surface quelques rugosités à peine sensibles par rapport au rayon. Bien sûr, on ne peut se contenter d'une telle approximation. La surface réelle de la Terre comporte des vallées et des montagnes, des creux et des bosses, que l'on ne connaît pas et que l'on essaye de mesurer. Les vallées et les montagnes sont néanmoins négligeables par rapport à la taille de la Terre. Le problème majeur est donc de trouver une surface de forme géométrique simple, représentant la forme globale de la Terre, et qui permette le plus simplement possible de situer un lieu de la surface de la Terre dans deux dimensions par sa projection orthogonale sur cette surface. On pourra exprimer ensuite la troisième dimension (l'altitude par rapport à cette surface) sur la normale au lieu projeté (figure II.1).



**Figure II.1**-Coordonnées géodésiques, et projection d'un point sur un ellipsoïde de révolution [2]

### II.2) La géodésie

Est la discipline dont l'objet est d'étudier la forme et les dimensions de la Terre au sens géométrique, ainsi que la forme des surfaces équipotentielles du champ de gravitation [1].

Depuis l'antiquité les géodésiens, ont représenté la terre sur différentes formes :

#### II.2.1) Représentation de la Terre par une sphère

Diverses opinions concernant la forme de la Terre ont prévalu dans le passé, par exemple le concept du disque terrestre encerclé par la mer **Océanus**. Pythagore (environ 580-500 av. J.-C.) ainsi qu'Aristote (384-322 av. J.-C.), parmi d'autres. Le fondateur de la géodésie scientifique est Ératosthène d'Alexandrie (276-195 av. J.-C.) qui. En formulant l'hypothèse de la sphéricité de la Terre, a calculé, à partir de mesures, le rayon de la Terre avec un degré d'incertitude de 2 % [1].

### II.2.2) Représentation de la Terre par un ellipsoïde

Vers la fin du XVII<sup>e</sup> siècle. Newton démontra que la théorie de la parfaite sphéricité de la Terre n'expliquait pas entièrement l'équilibre de la surface océanique. Il soutint qu'en raison du fait que la Terre est une planète en rotation, les forces créées par sa propre rotation devraient tendre à refouler tous les liquides de surface vers l'équateur. Il démontra, au moyen d'un modèle théorique simple, que l'équilibre hydrostatique serait maintenu si l'axe équatorial de la Terre était plus long que "axe polaire. Ce qui équivaut à déclarer que le corps terrestre si aplati aux pôles [1].

### II.2.3) Représentation de la Terre par un géoïde

Laplace (1802). Gauss (1828). Bessel (1837) et d'autres avaient déjà reconnu que l'hypothèse d'un modèle ellipsoïdal de la Terre ne tenait pas devant des observations de haute précision.

On ne pouvait plus ignorer la déviation de la verticale physique. Qui sert de référence aux mesures, par rapport à la normale ellipsoïdale (déviation de la verticale) (figure II.2)

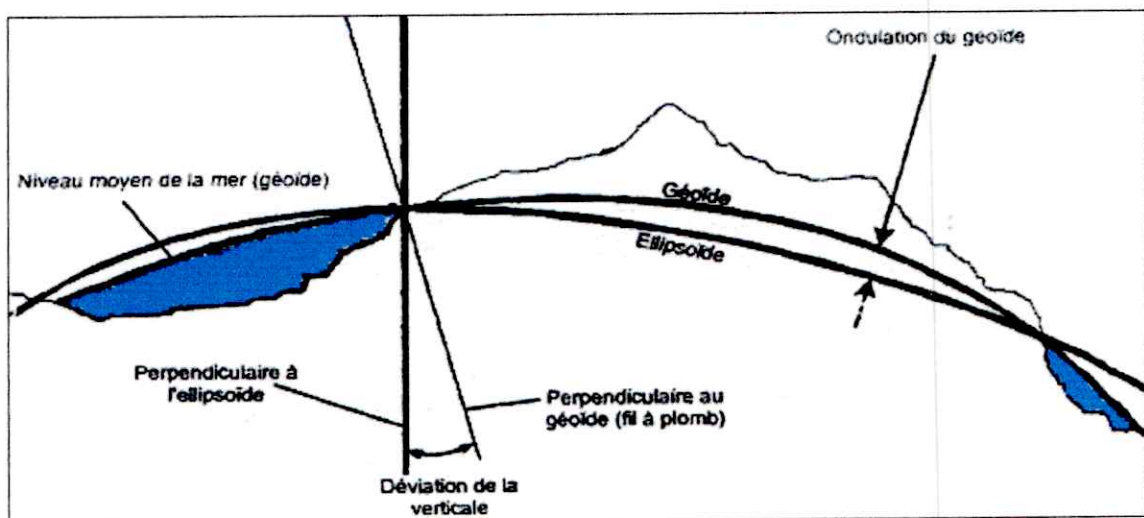


Figure II.2 - Représentation de la terre par un géoïde [1]

Des compensations de plusieurs mesures d'arcs destinées à déterminer les paramètres ellipsoïdaux  $a$  et  $f$  ont permis de faire apparaître des contradictions excédant de beaucoup la précision des observations.

Listing (1873) avait créé le terme de géoïde: Helmert (1880,1884) effectua la transition vers le concept actuel correspondant à la forme de la Terre. Cette fois, les déviations de la verticale sont également prises en compte dans le calcul des paramètres ellipsoïdaux.

La détermination du géoïde a constitué, au cours des cent dernières années, un objectif majeur de la géodésie. Son importance s'est accrue récemment lorsqu'on a commencé à penser à remplacer les mesures effectuées avec des nivelles par des



observations spatiales GPS et par l'utilisation des hauteurs précises au-dessus du géoïde. D'autres facteurs mondiaux exigent une référence verticale unifiée, c'est-à-dire une méthode de détermination du géoïde ayant une précision de l'ordre du centimètre ou même du millimètre. C'est un défi que la géodésie devra relever au cours des prochaines années.

La définition du géoïde comporte certaines difficultés: la topographie des fonds marins, la hausse du niveau des mers (fonte des calottes glaciaires des pôles), les changements de densité (tremblements de terre), etc.

### II.3) Le Géoïde

Les surfaces sur lesquelles le potentiel de pesanteur est constant [ $V = Cte$ ] sont appelées surfaces équipotentielles ou de niveau. D'après les propriétés des fluides en équilibre, la surface moyenne des grandes nappes d'eau : mer, océan,... est une surface équipotentielle. On choisit l'une d'entre elles, appelée géoïde (la surface moyenne des océans) pour définir la surface du niveau zéro à partir de laquelle on comptera les altitudes. En fait, cette surface est difficilement accessible. Même sur les océans, où la houle, les marées peuvent être moyennées, les différences de température, de salinité, les vents, peuvent modifier le niveau moyen. Sous les continents, le géoïde n'est défini que d'une façon indirecte [1].

En 1982, la NASA a calculé un modèle de géoïde en déterminant 20 termes, exclusivement basé sur des données de poursuite de satellites. La précision est de l'ordre du centimètre pour les coefficients d'ordre deux, et de l'ordre du mètre à l'ordre 20. Depuis, d'autres modèles ont utilisé plus de trente termes, en intégrant des données d'altimétrie sur les océans et de gravimétrie au sol [2].

La connaissance de la valeur de la pesanteur en tout point de l'espace est d'une importance primordiale en science spatiale et en balistique : elle permet, entre autre, de prévoir la trajectoire exacte d'un satellite artificiel ou d'un missile (Figure II.3)

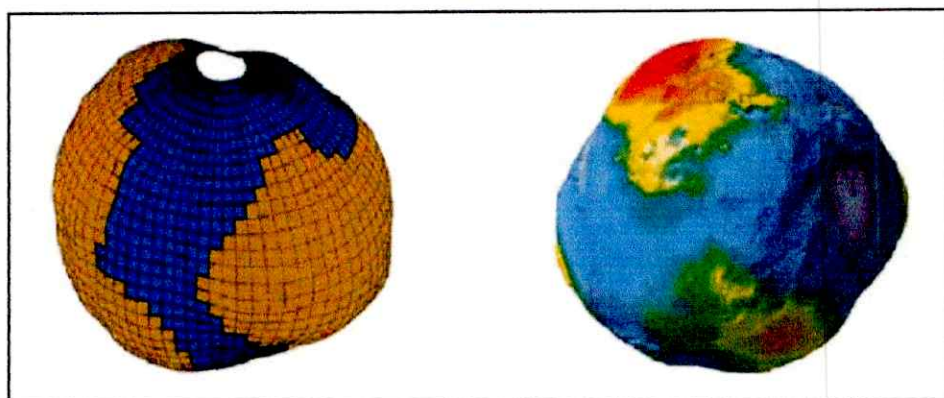


Figure II.3 - Forme du géoïde terrestre [2]

## II.4) Ellipse et ellipsoïde

L'ellipsoïde de révolution est une surface mathématique simple. Elle est caractérisée dans un repère cartésien par la position de son centre, par son grand axe (habituellement désigné par  $a$ ), et par son petit axe (habituellement désigné par  $b$ ). Souvent, un ellipsoïde est caractérisé par son grand coté et par son aplatissement  $f = (a-b)/a$  ou par le carré de son excentricité  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ . Pour plus de détail regarder le chapitre III (ellipse et ellipsoïde de révolution aplatie).

### II.4.1) Type de l'ellipsoïde

Dans chaque pays, les services de géodésie ont calculé les paramètres de l'ellipsoïde de référence à partir de leurs propres observations. Les résultats sont bien sûr différents. La précision des observations est variable, mais surtout chacun a adopté l'ellipsoïde qui, localement, colle le mieux avec la forme de la Terre.

Depuis l'avènement des mesures spatiales, la tendance est d'employer un ellipsoïde "global", valable pour la Terre entière. Mais cet ellipsoïde n'est qu'une approximation de la forme réelle de la Terre, et, encore une fois, il y a autant de manières de faire cette approximation que de services géodésiques [6].

#### I.4.1.1) Ellipsoïde ou datum astro-géodésique

L'ensemble constitué par :

1. Les coordonnées astronomiques du point fondamental.
2. l'azimut astronomique de la base de départ de la triangulation.
3. les paramètres de l'ellipsoïde ( $a, b$ ) sur lequel les calculs sont effectués.
4. d'autres paramètres liés à la hauteur du géoïde,...

Soit un total de 8 paramètres :

$a, e$  : Ellipsoïde.

$\zeta, \eta$  : Composante de la déviation de verticale.

$\lambda, \varphi$  : Coordonnées astronomiques.

$N$  : Hauteur du géoïde ( $n = 0$  en générale).

$Az$  : Azimut de LAPLACE du départ.

### II.4.1.2) Ellipsoïde ou datum gravimétrique

Dans le cas d'un datum gravimétrique, le point fondamental est le centre de gravité de la terre.

L'ellipsoïde de révolution est à partir de données gravimétriques (pesanteur)

### II.4.1.3) Ellipsoïde local et ellipsoïde global

#### II.4.1.3.1) Ellipsoïdes globaux

Les ellipsoïdes globaux sont utilisés pour des cartographies couvrant l'ensemble (ou une grande partie) de la surface terrestre. Par exemple, le système de positionnement GPS fournit, par défaut, le positionnement en coordonnées longitude/latitude sur l'ellipsoïde GRS80. On notera que ce même ellipsoïde est utilisé par le système géodésique RGF93 (figure II.4) [3].

#### II.4.1.3.2) Ellipsoïdes locaux

Les ellipsoïdes locaux sont définis de manière à "épouser" au mieux la forme du géoïde sur une zone restreinte de la surface terrestre (une région ou un pays). Par exemple, Pour l'Algérie on utilise l'ellipsoïde de Clarke 1880 pour le système géodésique nord-sahara servant aux systèmes de coordonnées Lambert. Localement, afin de mieux suivre la forme du géoïde, la forme de l'ellipsoïde local est modifiée et son centre est décalé par rapport au centre des ellipsoïdes globaux (figure II.4) [3].

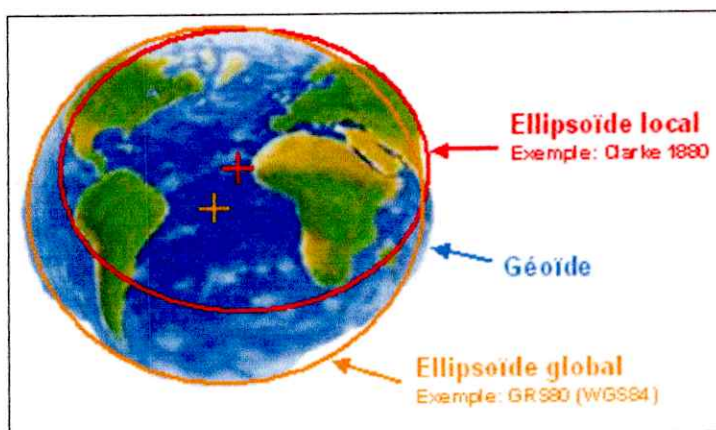


Figure II.4 - Ellipsoïde global ellipsoïde local [3]

## II.5) Systèmes de Coordonnées

Pour la localisation d'un élément dans l'espace (et donc à la surface de la terre), connaître la distance le cap entre deux lieux, on a besoin d'un système de coordonnées.

Les systèmes de coordonnées peuvent se classer en trois catégories :

- Système de coordonnées cartésiennes.
- Système de coordonnées géographiques.

- Système de coordonnées planes.

### II.5.1) Système de coordonnées cartésiennes

Ce sont des repères orthonormés (figure II.5).

- **Une origine O**: le centre de gravité de la Terre.

- **Trois axes** :

**L'axe des X** : dans le plan de l'équateur et dans le plan d'un méridien de référence,

**L'axe des Y** : lui aussi dans le plan de l'équateur et perpendiculaire à l'axe des X,

**L'axe des Z** : perpendiculaire au axes OX et OY et passant, à peu près, par le pôle Nord.

Elles sont souvent utilisées comme système de coordonnées intermédiaire lors des calculs de changement de systèmes géodésiques

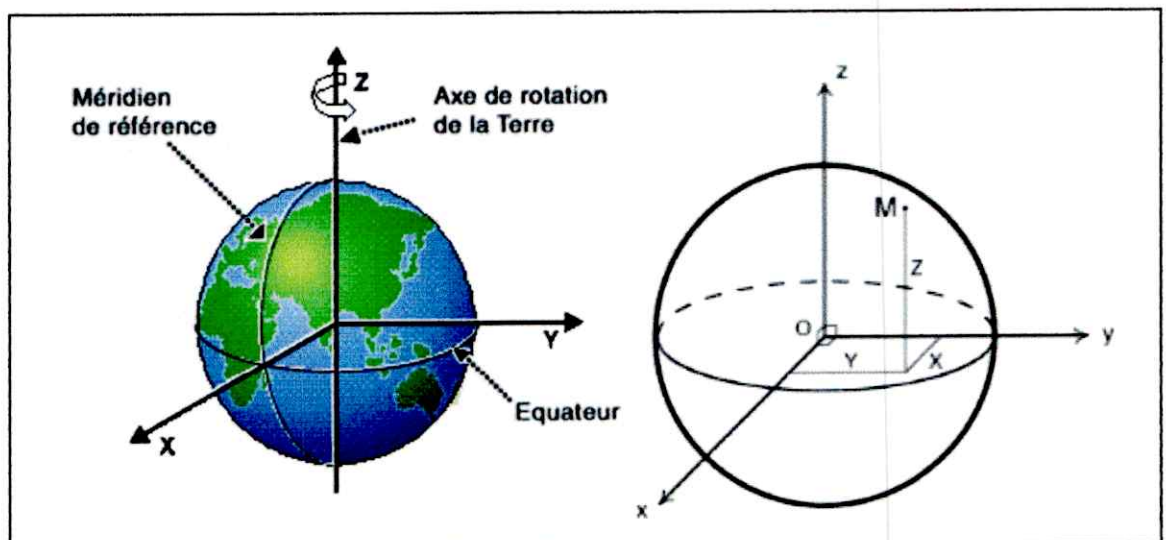


Figure II.5 - coordonnées cartésiennes[3] .

### II.5.2) Système de Coordonnées Géographiques

Le plan méridien géodésique est le demi-plan contenant à la fois la normale et le petit axe de l'ellipsoïde (figure II.6).

- **La longitude géodésique**  $\lambda_g$  : est l'angle dièdre de deux plans méridiens dont l'un est choisi comme origine.
- **La latitude géodésique**  $\varphi_g$  : est l'angle que fait la normale avec le plan "équatorial" contenant le grand axe de l'ellipsoïde.

Ceci nous donne une direction et non un point. L'insuffisance de la géodésie bi-dimensionnelle conduit à définir une troisième grandeur, distance du point à l'ellipsoïde comptée sur la normale et appelée "élévation ellipsoïdique" notée  $h$ .

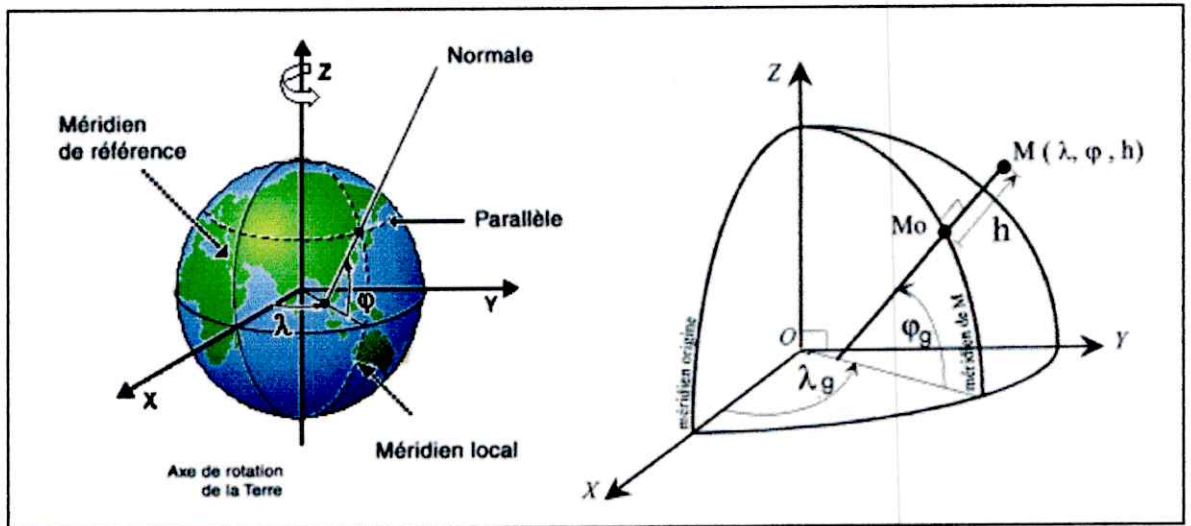


Figure II.6 - coordonnées géographiques[3].

II.5.3) les coordonnées planes

La terre étant ronde, et les cartes étant plates, la conversion de positions géographiques d'une surface courbe sur une surface plane nécessite l'utilisation d'une formule mathématique appelée La représentation plane (projection cartographique) (figure II.7). Une fois cette projection définie, la localisation d'un élément peut alors s'exprimer sous la forme de coordonnées planes à l'aide de deux valeurs linéaires ( $E, N$ ) ou  $(x, y)$ . La connaissance de  $h$  n'est pas nécessaire Ces deux distances à l'origine  $(0,0)$  peuvent être exprimées dans différentes unités : Mètres, Kilomètres, Miles, Miles nautiques, Pieds, ...

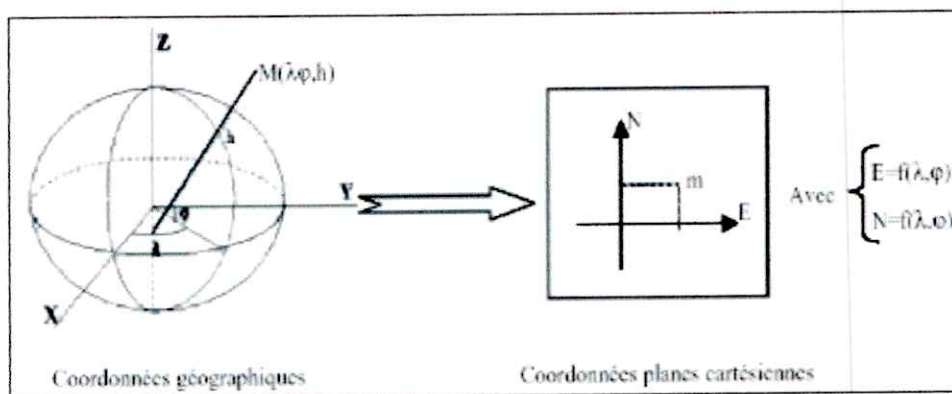


Figure II.7 représentation plane

### II.5.4) Altitude

Une altitude  $H$  est une grandeur dynamique traduisant l'éloigné par rapport au géoïde.

L'écart entre  $H$  et  $h$  peut atteindre quelques centaines de mètres, puisque si  $N$  représente la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence, au niveau millimétrique on peut écrire:

$$h \approx H + N$$

Il va de soi que  $N$  dépend de l'ellipsoïde et du système géodésique considérés.

Une altitude est complètement définie par la donnée d'un système *altimétrique*. Lui-même composé des trois éléments suivants :

- la surface équipotentielle de référence, autrement dit le modèle de géoïde utilisé,
- le type d'altitude (orthométrique, normale ou dynamique),
- l'unité dans laquelle sont exprimées les altitudes.

### II.6) Les différents types de projection

La projection est le moyen utilisé en cartographie pour représenter dans un plan des éléments qui sont situés sur une sphère (un ellipsoïde). Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour projeter des coordonnées sphériques en coordonnées linéaires. Ce processus de "mise à plat" entraîne des altérations de la forme et de la surface des éléments cartographiés mais également des distances et des directions entre ces éléments. La variété des méthodes mathématiques permet de choisir parmi plusieurs systèmes de projection selon leur aptitude à représenter des portions particulières de la surface terrestre et à préserver les distances, les surfaces ou les directions. Certaines projections minimisent la distorsion d'une propriété particulière au détriment des autres, tandis que d'autres projections minimisent globalement les altérations (figure II.8) [3].

Les illustrations ci-dessous représentent les pays du monde selon cinq projections différentes.

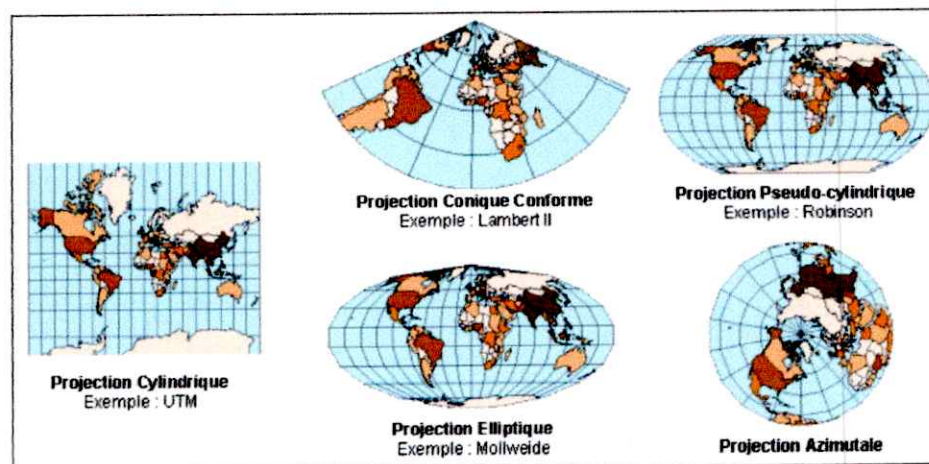


Figure II.8 – types de projection [3].

Les projections les plus importantes sont celle de Lambert et UTM :

### II.6.1) Projection Lambert

La grande majorité des bases de données spatiales utilisées sont stockées dans les projections Lambert I, II, III, IV ou Lambert 93. Ces projections sont toutes des projections coniques conformes sécantes. Le schéma ci-dessous montre les paramètres qui définissent ce type de projection.

Le méridien central correspond à l'axe de symétrie à partir duquel sera développé le cône de projection. Il constitue l'axe des Y du système de coordonnées projetées.

Le parallèle origine correspond, dans le cas d'une projection tangente, à la ligne de tangence entre le cône et l'ellipsoïde. Il constitue l'axe des X du système de coordonnées projetées. Dans le cas d'une projection sécante, le parallèle d'origine est situé au milieu des deux parallèles standard. Dans ce cas, les deux parallèles standard correspondent aux deux lignes d'intersection entre le cône et l'ellipsoïde.

L'origine du système de projection correspond simplement à l'intersection entre le méridien d'origine et le parallèle origine (figure II.9). Pour plus de commodités de nombreux systèmes de coordonnées ajoute des constantes en X et en Y aux coordonnées de l'origine ( $X_0, Y_0$ ) afin de ne pas avoir de coordonnées négatives. Par exemple, pour le système de coordonnées "Lambert II étendu", l'origine du système de coordonnées n'est pas 0,0 mais 600000,2200000 [3].

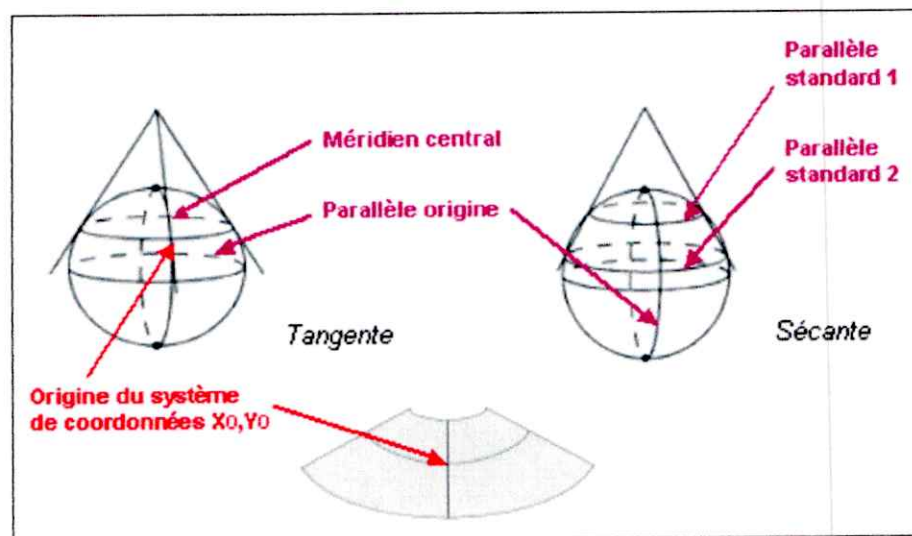


Figure II.9 - projection conique [3].

### II.6.2) Projection UTM

Les projections de Mercator sont utilisées un peu partout dans le monde sur des zones géographiques généralement restreintes. La plus courante est la projection cylindrique UTM (**U**niversal **T**ransverse **M**ercator) qui couvre la totalité de la surface terrestre (figure II.10). Constituée de 60 fuseaux de 6 degrés d'amplitude en longitude, elle permet de couvrir par des bandes successives tout le globe. Le schéma ci-dessous montre les paramètres qui définissent ce type de projection.

Dans le cas des projections transverses, le méridien central correspond à la ligne de tangence entre le cylindre et l'ellipsoïde. Il constitue l'axe des Y du système de coordonnées projetées.

Dans le cas des projections transverses, le parallèle origine correspond à l'axe (horizontal) à partir duquel développé le cylindre. C'est également la latitude du point origine du système de coordonnées. Il constitue l'axe des X du système de coordonnées projetées [3].

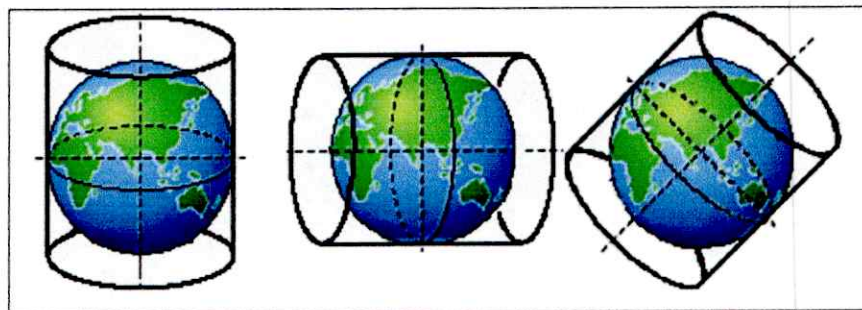


Figure II.10 - Projection cylindrique [3]



## **CHAPITRE III**

---

# **géométrie de l'ellipsoïde de révolution aplatie**

## III.1) Ellipse et ellipsoïde

## III.1.1) Ellipse

## III.1.1.1) Définition

Rappelons que la fonction  $A \left( \begin{array}{l} R^3 \rightarrow R^3 \\ M \rightarrow A(M) = P \end{array} \right)$  avec  $\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  (III.1)

Et  $\mathbf{OP} \begin{pmatrix} kx \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est appelée *affinité* de rapport  $K$  selon  $i$

On appelle *ellipse* l'image d'un cercle par une affinité.

Une ellipse est donc une courbe plane. Désormais, nous n'étudierons que les ellipses inscrites dans le plan  $(O ; i ; K)$ , issues d'un cercle  $\partial$  centré en  $O$  par une affinité de rapport  $K \leq 1$ .

Cette hypothèse n'est pas réductrice ; en effet, il est immédiat de s'y ramener par un changement de repère.

Conventionnellement, on note  $a$  le rayon du cercle  $\partial$ . Les axes  $(O ; i)$  et  $(O ; K)$  sont appelés respectivement *grand axe* et *petit axe* de l'ellipse.

Les longueurs  $a$  et  $b=ka$  en sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe.

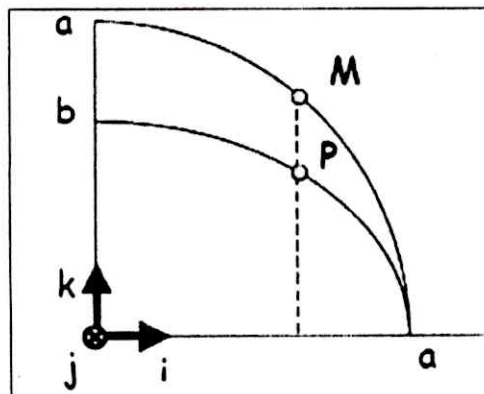


Figure III.1 - ellipse [2]

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  appartienne à  $\partial$  étant :

$$\|OM\| = a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (\text{III.2})$$

On en déduit l'équation cartésienne de l'ellipse transformée :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (\text{III.3})$$

L'ellipse admet par  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = 0 \\ z = a \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$  et nous retiendrons que l'ellipse admet le

paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ z = b \sin \theta \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

### III.1.1.2) Caractérisation

➤ L'*aplatissement* (en anglais *flattening*)  $f$  est défini par  $f = \frac{a-b}{a}$ . (III.5)

➤ La *première excentricité*  $e$  est définie par  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ , et la *deuxième excentricité*

par  $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ . (III.6)

➤ La grandeur  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  est la distance *focale* et les points  $F(c, 0, 0)$  et  $F'(-c, 0, 0)$  sont les *foyers*. Il est remarquable qu'une propriété caractéristique de l'ellipse est :

$$\|MF\| + \|MF'\| = 2a. \quad (\text{III.7})$$

➤ Deux ellipses ayant même distance focale sont dites *homofocales*.

Il est clair que l'ellipse est caractérisée par la donnée de  $(a, b)$ ,  $(a, f)$ ,  $(a, e^2)$  ou  $(a, c)$ . Entre ces différents paramètres, on dispose, entre autres, des relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 1 - f = \sqrt{1 - e^2} \\ e^2 = 2f - f^2 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

III.1.2) Ellipsoïde de révolution aplati

III.1.2.1) définition

Un ellipsoïde de révolution aplati est la surface engendrée par la rotation d'une ellipse autour de son demi-petit axe.

Numériquement, la terre peut être modélisée par un ellipsoïde d'aplatissement

$$f = \frac{1}{300} \text{ environ ; autrement dit } e^2 = \frac{1}{150} .$$

L'ellipsoïde de révolution aplati est donc le support de la nappe paramètre  $(D, g)$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = [0, 2\pi] \times \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ g \left( \begin{array}{l} D \rightarrow R^3 \\ (\lambda, \psi) \rightarrow g(\lambda, \psi) = M \end{array} \right) \end{array} \right. \quad \text{Ou} \quad M \begin{cases} x = a \cos \lambda \cos \psi \\ y = a \sin \lambda \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \quad \text{(III.9)}$$

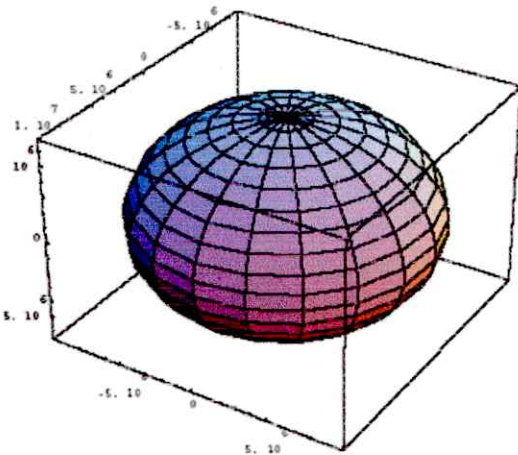


Figure III.2 - rotation/demi petit axe [2]

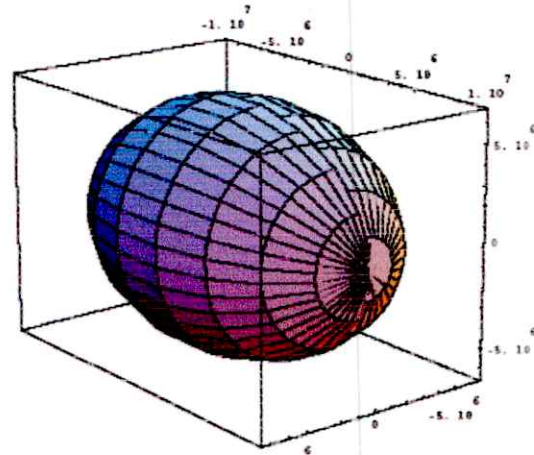


Figure III.3 - rotation/demi grand axe [2]

Le repère  $(O ; i, j, k)$  permet de distinguer différentes parties de l'ellipsoïde :

- l'ensemble des points  $M$  tels que  $OM \cdot K \geq 0$  (respectivement  $OM \cdot K \leq 0$ ) forment l'hémisphère nord ou boréal.

- les points PN  $(0, 0, b)$  et PS  $(0, 0, -b)$  sont appelé nord et sud, et l'axe  $(O ; K)$  est l'axe des pôles.

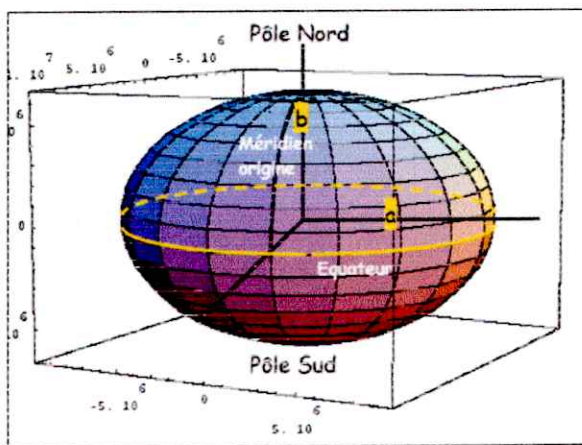


Figure III.4 - Ellipsoïde géodésique [2]

-l'intersection du plans  $(O ; i, j)$  et de l'ellipsoïde est appelé *équateur*, L'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, 0, z)$ ,  $x \geq 0$ , est appelé *méridien origine*.

En fait, l'axe  $i$  est choisi de telle sorte que le méridien origine passe par l'observation astronomique de Greenwich (près de Londres). On l'appelle *méridien origine de Greenwich*, et  $(O ; i, k)$  est appelé *repère terrestre équatorial*.

Tout courbe méridienne est une ellipse, donc, si  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{III.10}$$

D'où on tire l'équation cartésienne de l'ellipsoïde de révolution aplati :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{III.11}$$

### iii.2) Paramétrages de l'ellipsoïde

#### iii.2.1) Latitute paramétrique

$\lambda$  Est la longitude de  $M$ .  $\psi$  en est la latitute paramétrique.

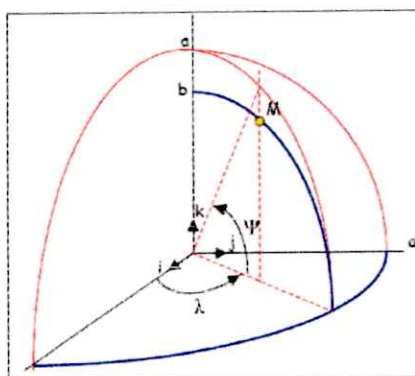


Figure III.5 - Latitute paramétrique [2]

Le paramétrage d'une surface de révolution est défini par la donnée de 2 fonctions

$$\begin{aligned} r(\psi) &= a \cos \psi \\ Z(\psi) &= b \sin \psi \end{aligned} \tag{III.12}$$

Avec

$$M \begin{cases} x = r(\psi) \cos \lambda \\ y = r(\psi) \sin \lambda \\ z = r(\psi) \end{cases} \tag{III.13}$$

D'où

$$M \begin{cases} x = a \cos \lambda \cos \psi \\ y = a \sin \lambda \cos \psi \\ z = b \sin \psi \end{cases} \tag{III.14}$$

### III.2.2) Latitude géographique

Appelle  $\varphi$  l'angle entre  $\vec{n}$  la normale à l'ellipsoïde et le plan équatorial  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

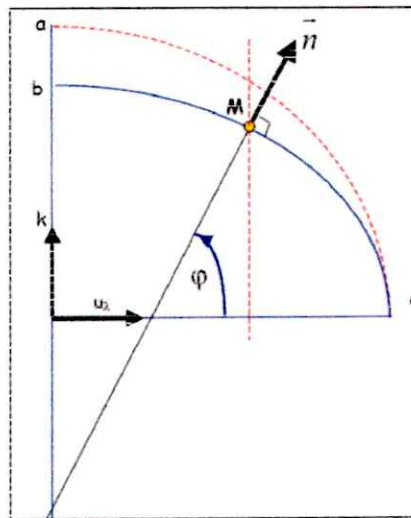


Figure III.6 - Latitude géographique [2]

(Schéma dans un plan méridien)

On a  $\vec{n} = \cos \varphi \vec{u}_\lambda + \sin \varphi \vec{k}$  (III.15)

Avec  $\vec{u}_\lambda = \cos \lambda \vec{i} + \sin \lambda \vec{j}$  (III.16)

Exprimons d'autre part  $\vec{n}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\psi$  :

$$\begin{cases} r(\psi) = a \cos \psi \\ Z(\psi) = b \sin \psi \end{cases} ; \begin{cases} r' = -a \sin \psi \\ Z' = b \cos \psi \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Et  $G = r'^2 + Z'^2 = a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi$  (III.19)

Avec

$$\sqrt{G} = b \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi + 1 - \sin^2 \psi} = b \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi} \quad (\text{III.20})$$

En posant  $w = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi}}$  (III.21)

On obtient:

$$\sqrt{G} = \frac{b}{w} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} w \cos \lambda \cos \psi \\ w \sin \lambda \cos \psi \\ \frac{a}{b} w \sin \psi \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

D'où:

$$\cos \varphi = w \cos \psi$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{b} w \sin \psi$$

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \psi$$

(III.23)

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi}}$$

$\varphi$  Peut donc être utilisé comme paramétrage de l'ellipse méridienne;  $\varphi$  est appelé latitude géographique.

$w$  Peut s'exprimer également en fonction de  $\varphi$ , en effet:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1 = \frac{\cos^2 \varphi}{w^2} + \frac{b^2}{a^2 w^2} \sin^2 \varphi$$

$$\Leftrightarrow w^2 = \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1 = \frac{\cos^2 \varphi}{w^2} + \frac{b^2}{a^2 w^2} \sin^2 \varphi$$

$$\Leftrightarrow w^2 = \cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

Donc  $w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$  (III.24)

### III.2.3) Latitude géocentrique

Considérons l'angle entre le plan équatorial et OM. Cet angle est traditionnellement noté  $\omega$ .

Les coordonnées  $(\lambda, \omega)$  forment un paramétrage de l'ellipsoïde.

$\omega$  Est appelée latitude géocentrique.

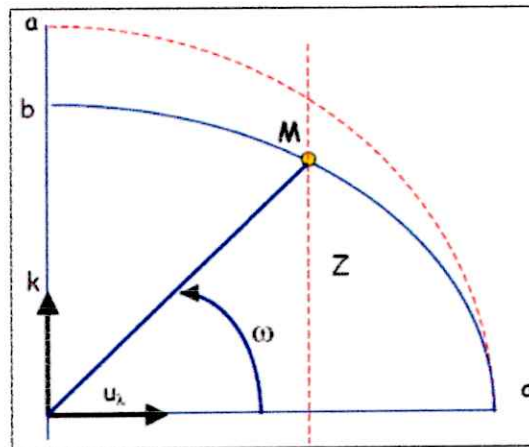


Figure III.6 - Latitude géocentrique [2]  
(Schémas dans un plan méridien)

Si  $r \neq 0$  alors il est clair que

$$\tan \omega = \frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{Z}{r} \quad (\text{III.25})$$

On sait aussi que  $\tan \psi = \frac{a}{b} \frac{Z}{r}$  (III.26)

Nous retiendrons donc:

$$\tan \psi = \frac{a}{b} \tan \omega = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi \quad (\text{III.27})$$



### III.5) Transformations géocentriques

#### III.5.1) Problématique

Le GPS, affiche et mémorise les coordonnées dans le système géodésique WGS84 (un système de coordonnées géographiques), mais font tous les calculs de positionnement en coordonnées cartésiennes. Car ils sont simples à définir et que les calculs y sont beaucoup plus faciles, donc plus rapides ou, à puissance égale, plus exacts. Leur gros inconvénient, c'est qu'ils sont à peu près inutilisables sur le terrain ou sur une carte. Ils sont donc cantonnés à des utilisations peu visibles de l'utilisateur : changement de repère, calcul de trajectoire de satellite, représentation 3D de la Terre ou d'autres corps célestes. C'est pour cette raison que nous faisons la transformation entre ces deux system.

#### III.5.2) Passage des coordonnées géographiques en coordonnées cartésiennes:

Soient  $M(X, Y, Z)_R$  un point quelconque de l'espace et  $M^*(x^*, y^*, z^*)_R$  sa projection normale sur l'ellipsoïde;  $M^*$  est donc définie de telle sorte que  $\overline{M^*M} = h \cdot \vec{n}$ . Est la hauteur de  $M$  au-dessus de l'ellipsoïde (éventuellement  $h < 0$ ).

Les coordonnées  $(\lambda, \varphi, h)$  sont appelées coordonnées géographiques de  $M$ .

On a

$$\begin{cases} x^* = a \cos \lambda \cos \psi \\ y^* = a \sin \lambda \cos \psi \\ z^* = b \sin \psi \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Or

$$\begin{cases} \cos \varphi = w \cos \psi \\ \sin \varphi = \frac{a}{b} w \sin \psi \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

L'expression de  $(x^*, y^*, z^*)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\varphi$  est donc:

$$\begin{cases} x^* = \frac{a \cos \lambda \cos \varphi}{w} \\ y^* = \frac{a \sin \lambda \cos \varphi}{w} \\ z^* = \frac{b^2}{aw} \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = N \cos \lambda \cos \varphi \\ y^* = N \sin \lambda \cos \varphi \\ z^* = N (1 - e^2) \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

➤ calcul d'une valeur approchée  $\varphi_0$  par  $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$  (III.35)

➤ Utilisation de  $\varphi_0$  pour calculer  $h_0$  puis  $\varphi_1$  avec les formules:

$$\begin{cases} h_0 = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_0} - N_0 \\ \varphi_1 = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \times \frac{1}{1 - T_2(\varphi_0, h_0)}\right) \end{cases} \quad \text{(III.36)}$$

De la même manière, utilisation de  $\varphi_{n-1}$  et  $h_{n-1}$  pour calculer  $h_n$  et  $\varphi_n$ .

On peut démontrer que le processus itératif que nous venons de définir converge. Nous retiendrons donc les formules de transformation ci-dessous:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X} \quad \text{(III.37)}$$

$\varphi$  et  $h$  sont les limites des suite convergentes respectives  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h_0 = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_0} - N_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} \varphi_n = \arctan \left[ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \times \frac{1}{1 - e^2 \frac{N_{n-1}}{N_{n-1} + h_{n-1}}} \right] \\ h_n = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi_n} - N_n \end{cases} \quad \text{(III.38)}$$

### III.5.3.2) Processus direct

Une autre formulation dite processus direct permet le passage des coordonnées géographiques au coordonnées cartésiennes. Cette formulation s'exprime de la manière suivante:

**Source:** Bowring, 1985, « The accuracy of geodetic latitude and height equations », survey review, 28, pp202-206

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \text{(III.39)}$$

$$\mu = \arctan \left[ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( (1-f) + \left( \frac{e^2}{R} \right) \right) \right] \quad (\text{III.40})$$

$$\varphi = \arctan \left[ \frac{Z(1-f) + e^2 a \sin^3 \mu}{(1-f) \left[ \sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 \cos^3 \mu \right]} \right] \quad (\text{III.41})$$

$$h = \left[ \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot \cos \varphi \right] + \left[ Z \sin \varphi \right] - \left[ a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right] \quad (\text{III.42})$$

Les deux processus fournissent un résultat numérique identique.

## **CHAPITRE IV**

---

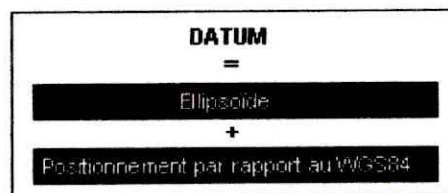
# **Systemes de référence et modèles de transformation**

## IV.1) Systèmes de Référence Géodésiques

### IV.1.1) Définition

Ce sont les systèmes dont l'origine est proche ou voisine du centre des masses de la terre et sont liés à un ellipsoïde local ou mondial (global).

Pour pouvoir définir un système de coordonnées, la seule spécification d'un ellipsoïde n'est pas suffisante. En effet, un système géodésique (en anglais datum) se définit par son ellipsoïde mais également par la position de cet ellipsoïde par rapport au centre de la terre. Pour les calculs géodésiques, par convention, on utilise le centre du système géodésique WGS84 (World Geodetic System 1984) pour définir la position des autres systèmes géodésiques [2].



Ainsi, définition d'un système nécessite la connaissance des paramètres suivants :

- 1) la forme de l'ellipsoïde
- 2) la position de l'ellipsoïde par rapport au système géodésique WGS84.
  - Décalage (en m) du centre du repère en X ( $T_x$ )
  - Décalage (en m) du centre du repère en Y ( $T_y$ )
  - Décalage (en m) du centre du repère en Z ( $T_z$ )
  - Angle de rotation (en degrés) de l'axe X du repère ( $E_x$ )
  - Angle de rotation (en degrés) de l'axe Y du repère ( $E_y$ )
  - Angle de rotation (en degrés) de l'axe Z du repère ( $E_z$ )
  - Facteur d'échelle ( $1 + \Delta K$ ) de la norme des vecteurs du repère ( $K$ )

### IV.1.2) Systèmes d'origine terrestre

Ils sont basés sur l'utilisation des mesures de géodésie terrestre classique : angles horizontaux, verticaux, distances, coordonnées et azimuts astronomique.

Ils sont définis par un point fondamental et calculés sur un ellipsoïde de révolution aux dimensions proches de la terre [6].

#### IV.1.2.1) Le système général terrestre (CIO - BIH)

C'est le système terrestre moyen appelé CIO-BIH ou CTS (Conventional international system) et défini par :

$O$  : Centre de masse de la terre.

$OX$  : contenu dans le plan méridien de GREENWICH et déterminé par le BIH (Bureau international de l'Heur) aujourd'hui IERS.

$OY$  : Direction telle que le système  $OXYZ$  soit direct.

$OZ$  : Axe dirigé vers le pôle CIO (Conventional international origine) pour la période de 1900 à 1905. [6]

#### **IV.1.2.2) Les Systèmes Locaux**

##### **IV.1.2.2.1) Définition**

Les systèmes locaux, issus de réalisations terrestres, sont positionnés à quelques centaines de mètres du centre des masses de la Terre.

Ils ont tous été créés à l'aide de triangulation, procédé terrestre qui consiste à mesurer des angles de triangles et quelques distances pour la mise à l'échelle.

Les paramètres de positionnement du système peuvent être calculés :

➤ à partir d'un point fondamental en fixant six paramètres : les coordonnées du point fondamental  $(\lambda, \varphi, h)$  où  $h$  est la hauteur ellipsoïdique, les deux composantes de la déviation de la verticale  $(\xi, \eta)$  et  $AZ$  l'azimut d'une ligne géodésique liant le point fondamental et un point du réseau.

➤ à l'origine d'un repère géocentrique conventionnel en fixant sept paramètres : trois rotations, trois translations, un facteur d'échelle. Un tel système de référence étant défini, chaque point est repéré à un instant donné par des coordonnées, cela implique la connaissance d'un ellipsoïde associé et sa position dans l'espace [6].

##### **IV.1.2.2.2) Exemple**

###### **a) Européenne datum (ED50)**

A la fin de la Deuxième Guerre mondiale, une compensation globale d'un réseau géodésique européen a été exécutée pour la première fois sur base d'observations de direction classiques et de bases invar. Par la suite, des mesures de distance ont été introduites.

En 1987 un certain nombre de stations spatiales (Laser, Doppler) ont été incluses dans la compensation. En 1987, la commission RETrig (Réseau Européen de Triangulation) a été abrogée et remplacée par le groupe EUREF actuel. il a les caractéristiques suivantes :

-Ellipsoïde de référence : International 1924 (Hayford 1909)

- ◆ Grand axe : 6 378 388.000 m.
- ◆ petit axe : 6 356 911.946 m.

-Somme des observations nationales européennes. Point fondamental : Helmert Tower à Postdam.

-Coordonnées géographiques : en degrés, méridien de référence : Greenwich

-Projection et coordonnées associées : UTM

### **b) Nouveau triangulation France (NTF)**

- Ellipsoïde de référence : <sup>Clarke</sup> Clarke 1880 IGN

◆ Grand axe : 6 378 249.200 m.

◆ petit axe : 6 356 515.000 m.

- Triangulation de l'IGN, point fondamental : Panthéon à Paris.

- Niveau de référence des altitudes : niveau moyen de la mer à Marseille

- Coordonnées géographiques : en grades, méridien de référence : Paris

- Projections et coordonnées associées : Projections coniques conformes Lambert

### **c) Le système local NORD-SAHARA**

Le calcul du premier ordre et du premier ordre complémentaire entrepris par l'IGN et l'A.M.S (Army Map Service) et incluant les données :

- Du nouveau parallèle Algérien (réfection de 1953-1954 et calculs de 1955).
- Du parallèle sud.
- De la méridienne de GABES (TUNISIE).
- De la méridienne de GUERCIF (MAROC).

Fournit un réseau homogène et compense dans le system EUROPE 1950 (ellipsoïde international).Mais le système cartographique en AFRIQUE est basé sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880 (recommandé à la conférence de BUKAVU en 1953) et d'autre part les cartes saharienne sont établi sur un canevas astronomique qui, arrivant au contact du réseau géodésique, présent un hiatus.

Pour concilier le canevas provenant des deux sources, l'IGN et l'AMS ont établi, sur l'ellipsoïde de CLARKE 1880, un système de méridien et parallèle où les discordance entre coordonnées géographiques issus de la triangulation et de l'astronomie sont minimaux.

Le system de coordonnées qui répond à ces conditions est le système géodésique NORD-SAHARA. Il est déduit du système EUROPE 50 (ED50) par la translation suivante :

$$\lambda_{nordsahara} = \lambda_{ED50} - 4.000 dcmgr \quad (IV.1)$$

$$\epsilon_{nord sahara} = \epsilon_{Ed 50} - 48.400 dcmgr \quad (IV.2)$$

Ou ED50 : Europe 50.

$\lambda$  : Longitude.

$\epsilon$  : Latitude isométrique

L'ellipsoïde associé à ce système est celui de CLARKE 1880 Anglais de paramètres :

- ♦ Grand axe : 6378249.145 m.
- ♦ petit axe : 6356514.870 m.

### IV.1.3) Les systèmes d'origine spatiale

#### IV.1.3.1) définition

Ce sont les system définis par le traitement de mesures de géodésie spatiale suivant une méthode dynamique en considérant le champ de pesanteur terrestre.

L'origine, l'échelle, et l'orientation sont déterminées de manière suivante ;

a) **Origine O:** Centre de masse de la terre obtenu en annulant les termes de degré un (01) dans le développement en harmonique sphériques du potentiel terrestre :

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm} \cos \theta [C_{nm} \cos(m\theta) + S_{nm} \sin(m\theta)] \quad (IV.3)$$

$$\begin{cases} C_{nm} = \frac{\delta}{Ma^n} \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint r'^n P_{nm}(\cos \theta') \cos m\lambda' dm \\ S_{nm} = \frac{\delta}{Ma^n} \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint r'^n P_{nm}(\cos \theta') \sin m\lambda' dm \end{cases} \quad (IV.4)$$

$\theta$  : Latitude géocentrique.

$M$  : Masse de la terre.

$P_{nm}$  : sont les fonction associées de Legendre.

$C_m, S_m$  : Coefficients harmonique lie a la physique de la terre.



Le centre de gravité est obtenu par :

$$C_{11} = \frac{1}{M.a} \iiint x'.dm \quad (\text{IV.5})$$

$$S_{11} = \frac{1}{m.a} \iiint y'.dm$$

$$C_{10} = \frac{1}{M.a} \iiint z'.dm$$

$$S_{10} = 0$$

$x', y', z'$  : sont les coordonnées sphériques

Si les quatre coefficients sont nuls  $C_{11} = S_{11} = C_{10} = S_{10} = 0$ , le centre de gravité serait confondu avec l'origine du système.

b) **Echelle** : l'unité de longueur est donnée par le choix de la constante gravitationnelle.

$$\mu = G.M = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3 \quad (\text{IV.6})$$

$\mu$  : la constante gravitationnelle.

c) **Orientation** : elle s'obtient par rotation à partir du système inertiel dans lesquels les équations dynamique sont calculées et par l'introduction des phénomènes de précession, nutation, mouvement du pôle et rotation de la terre (pôle instantané).

Nous obtenons :

$$[CTS] = S.N.P[CIS] \quad (\text{IV.7})$$

$S$  : matrice rotation de la terre incluant le mouvement du pôle.

$N$  : matrice nutation issue de la théorie de WAHR et basée sur les série de WOOLARD

$P$  : matrice précession issue de la théorie de NEWCOMB.

$CTS$  : Conventional Terres trial Système.

$CIS$  : Conventional Inertial Système.

Système inertiels : sont définis à partir de la position des étoiles, des sources extragalactiques ou du mouvement des planètes et satellites.

En négligeant le mouvement de la terre autour du soleil et en supposant qu'un système d'axes centre de gravité de la terre et ayant des directions fixes, est inertiels. L'erreur qu'on commet sur cette hypothèse sera corrigée des perturbations luni-solaires (force des marées).

#### IV.1.3.2) Exemple

##### a) Le World Geodetic System 1972 (WGS 72)

Ce système fut réalisé par le département de la défense (USA), à la suite des **WGS1960** et **WGS1966** ; il est utilisé par les systèmes de navigation **TRANSIT** et **GPS**. Il s'agit d'un datum gravimétrique (système géodésique mondial déterminé par des mesures de gravimétrie), l'ellipsoïde de référence est :

- ◆ Grand axe : 6378135.000 mètres.
- ◆ Aplatissement :  $f=1/298.26$ .

Le méridien origine est le méridien de GREENWICH.

##### b) Le World geoditic System 1984 (WGS 84)

Les systèmes WGS (World Geodetic System) sont développés par le DOD-US. Depuis WGS 60, l'approximation de la figure de la terre et de son champ de gravité a évolué pour aboutir à la définition actuelle du **WGS 84** qui est le système de référence pour les éphémérides GPS radiodiffusées et précises.

Ce système est une version améliorée du **WGS 72** qu'il doit remplacer dans toutes les applications.

Le trièdre de référence comprend un pôle conventionnel et un plan méridien origine. Les principaux paramètres de l'ellipsoïde sont :

- ◆ Demi grand axe  $a = 6378137.000$  mètres
- ◆ Aplatissement  $f = 1/298.257223563$
- ◆ Vitesse angulaire  $\omega = 7292115.1467 \cdot 10^{-11} \text{ rad } s^{-1}$
- ◆ Constante gravitationnelle  $GM = 3982115.1467 \cdot 10^{-8} m^3 s^{-2}$

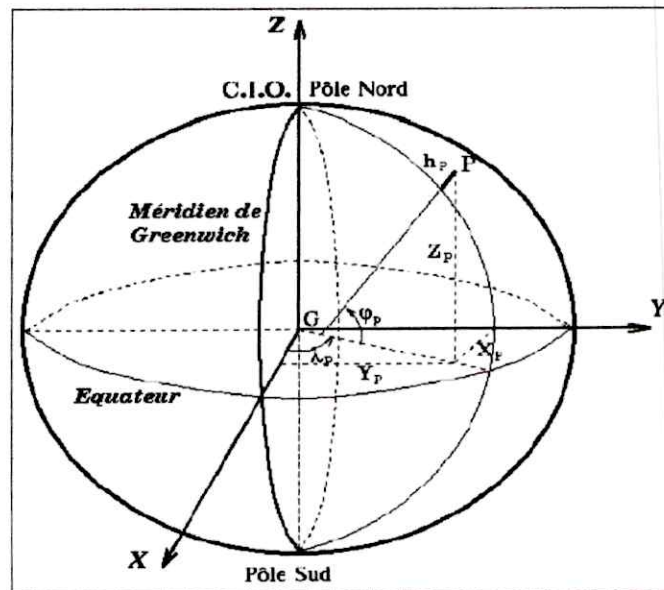


Figure IV.1 - Ellipsoïde WGS 84 [2]

### c) Le Geodetic System (GRS 80)

Adopté par l'union Internationale de Géodésie et de Géophysique U.G.G.I (CANBERRA 1979), le GRS 80 est basé sur un ellipsoïde équipotentiel de paramètres :

- ◆ Demi grand axe  $a = 6378137.000$  mètres
- ◆ Aplatissement  $f = 1/298.2572236$
- ◆ Vitesse angulaire  $\omega = 729211510^{-11} \text{ rad } s^{-1}$
- ◆ Constante gravitationnelle  $GM = 3986005.1467 \cdot 10^{-8} m^3 s^{-2}$

*Remarque :* Les paramètres liés au WGS 84 sont presque les même que ceux du GRS 80. (Modèle de potentiel légèrement différent).

## IV.2) Transformation entre système de références géodésiques

### IV.2.1) Expression générale d'une transformation

La transformation des données d'un système géodésique à un autre (exemple : Nord SAHARA, qui est la base du système cartographie en vigueur et dont lequel les résultats des travaux géodésique doivent être exprimés), nécessite la connaissance des paramètre de passage avec l'emploi d'un modèle adéquat.

Il n'existe aucune méthode théorique directe de passage d'un système à l'autre car chaque système géodésique (spatial,...) repose sur le choix d'un modèle.

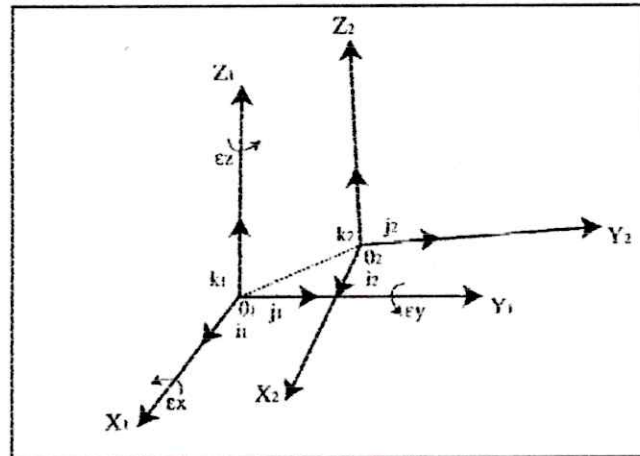


Figure IV.2 - Changement de système de référence [6]

La transformation ne peut s'effectuer que par la connaissance des coordonnées de certaine station dans les deux systèmes on obtint une transformation tridimensionnelle à trois ou à sept paramètres :

#### IV.2.2.1) La méthode de transformation géocentrique à trois paramètres

Cette méthode permet de prendre en compte le décalage  $dX$ ,  $dY$  et  $dZ$  existant entre les ellipsoïdes des deux systèmes géodésiques. Avec cette méthode de transformation, un des deux systèmes géodésiques est défini comme étant centré sur le point  $(0, 0, 0)$ . Le centre du deuxième système géodésique est alors situé à la position  $dX$ ,  $dY$  et  $dZ$ . Habituellement les paramètres de transformation sont définis comme ceux permettant de passer du système géodésique local au système géodésique WGS84.

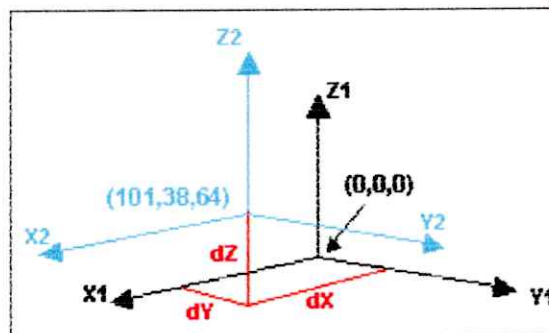


Figure IV.3 Transformation à trois paramètres [3]

Ci-dessous l'équation permettant de calculer les nouvelles coordonnées cartésiennes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  à partir des anciennes. Ces coordonnées sont ensuite converties en coordonnées géographiques (Long/Lat).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{Nouveau}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{Ancien}} \quad (\text{IV.8})$$

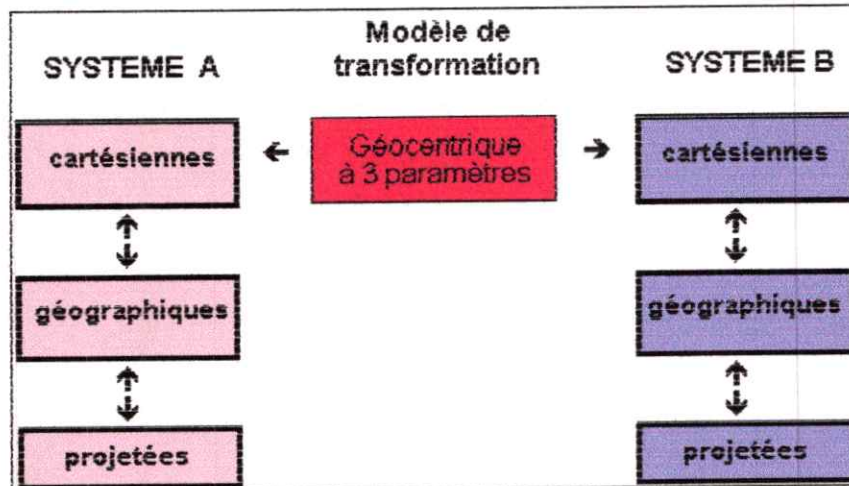


Figure IV.4 - Modèle de transformation à trois paramètres [3]

La transformation géocentrique à 3 paramètres permet d'obtenir une précision de l'ordre de 1 à 5 mètres sur les coordonnées X/Y projetées.

#### IV.2.2.2) La méthode de transformation géocentrique à 7 paramètres

Cette méthode permet de réaliser une similitude 3D c'est à dire une translation du centre de l'ellipsoïde, une rotation de chacun des 3 axes ainsi qu'un changement d'échelle de l'ellipsoïde si nécessaire. Il est possible de définir deux sens de rotation positifs (sens des aiguilles d'une montre ou sens inverse des aiguilles d'une montre) autour des axes X, Y et Z. L'équation figurant ci-dessous est celle utilisée par Etats-Unis et l'Australie. Cette méthode de transformation est généralement nommée "Coordinate Frame Rotation". Les rotations sont positives dans le sens des aiguilles d'une montre. En Europe, on utilise la convention inverse.

La formule générale d'une transformation à sept paramètres est :

$$\vec{X} = \vec{T} + (1 + \Delta k) \cdot R \cdot \vec{x} \quad (\text{IV.9})$$

Avec :

- X : vecteur coordonnées dans le système 1.
- x : vecteur coordonnées dans le système 2.
- $\Delta k$  : Variation du facteur d'échelle.
- R : La matrice rotation.

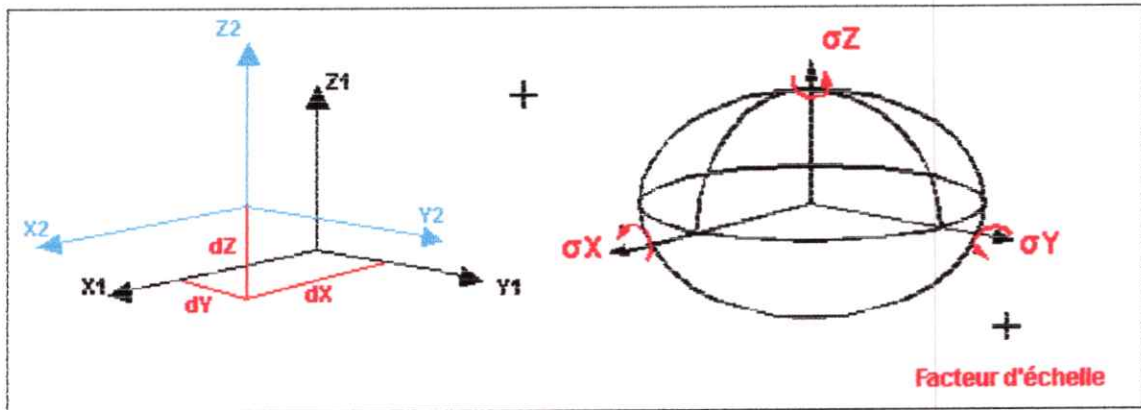


Figure IV.5 - Transformation à sept paramètres

Donc Les paramètres de transformation sont

- trois constantes de translation.
- trois paramètres définissant la rotation générale dans l'espace. Ils sont exprimés en secondes décimales
- un facteur d'échelle. Est exprime en parties par million (ppm).

La transformation géocentrique à 7 paramètres permet d'obtenir une précision de l'ordre de 1 à 2 mètres sur les coordonnées X/Y projetées.

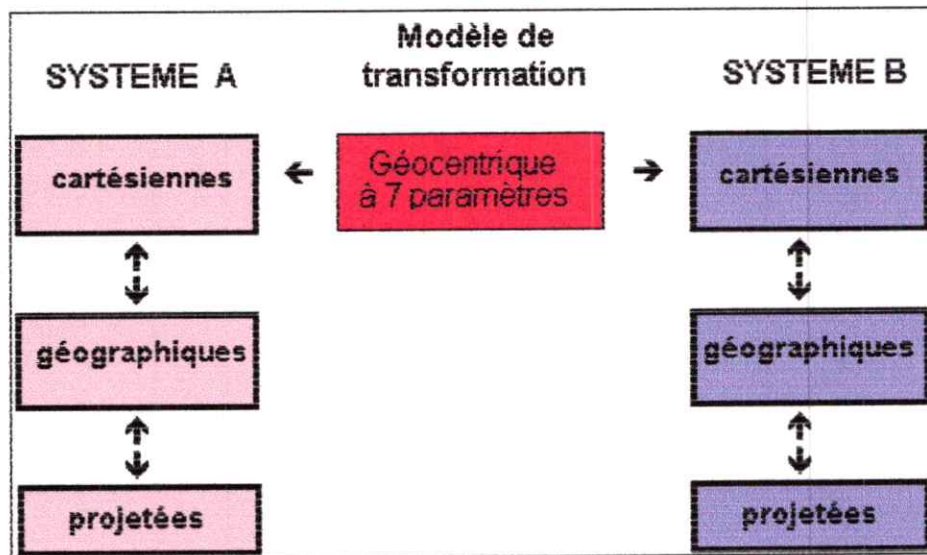


Figure IV.6 - Modèle de transformation 7 paramètres

IV.3) solution au système

Du fait de la construction de deux système de référence géodésique quelconque sont proche l'un de l'autre et les ordre de grandeur des paramètres intervenant dans une transformation sont résumé de la façon suivante :

- Les transformations  $T_x, T_y, T_z$  sont inférieures à quelque certaines mètre.
- Les rotation  $E_x, E_y, E_z$  sont de l'ordre de quelque seconde d'arc.
- Le facteur d'échelle est proche de l'unité, on peut écrire que  $k = 1 + \Delta k$  et que  $\Delta k < 0.000001$

Si on a un point quelconque dans l'espace **elle** ces coordonnées dans les systèmes sont comme suite :

$$O\vec{M} = O\vec{O}' + O'\vec{M} \text{ (vecteur exprimés dans le même système)}$$

Soient  $I.J.K$  la base orthogonale du système  $O, X, Y, Z$  et  $i, j, k$  celle du système  $O, x, y, z$ .

$$O\vec{M} = x.\vec{I} + y.\vec{J} + z.\vec{K} \text{ Dans } (O, X, Y, Z) \tag{IV.10}$$

$$O\vec{M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \text{ Dans } (O, x, y, z) \tag{IV.11}$$

Le vecteur  $OM$  a pour composantes  $(X.Y.Z)$  qui sont les projections orthogonales sur  $OX, OY, OZ$ .

$$\vec{X} = O\vec{M}.\vec{I} = (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}).\vec{I} \tag{IV.12}$$

$$\vec{Y} = O\vec{M}.\vec{J} = (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}).\vec{J}$$

$$\vec{Z} = O\vec{M}.\vec{K} = (x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}).\vec{K}$$

$$D'où \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}.\vec{I} & \vec{j}.\vec{I} & \vec{k}.\vec{I} \\ \vec{i}.\vec{J} & \vec{j}.\vec{J} & \vec{k}.\vec{J} \\ \vec{i}.\vec{K} & \vec{j}.\vec{K} & \vec{k}.\vec{K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{IV.13}$$

En identifiant les produits scalaires dans la matrice de rotation, nous obtenons :

$$\vec{i}.\vec{I} = \cos E_y.\cos E_z \tag{IV.14}$$

$$\vec{j}.\vec{I} = \cos E_z.\sin E_y.\sin E_x - \sin E_z.\cos E_x$$

$$\vec{k}.\vec{I} = \sin E_z.\sin E_x + \cos E_z.\sin E_y.\cos E_x$$

$$\vec{i} \cdot \vec{J} = \sin E_z \cdot \cos E_y$$

$$\vec{j} \cdot \vec{J} = \cos E_z \cdot \cos E_x + \sin E_z \cdot \sin E_y \cdot \sin E_x$$

$$\vec{k} \cdot \vec{J} = -\cos E_z \cdot \sin E_x + \sin E_z \cdot \sin E_y \cdot \cos E_x$$

$$\vec{i} \cdot \vec{K} = -\sin E_y$$

$$\vec{j} \cdot \vec{K} = \cos E_y \cdot \sin E_x$$

$$\vec{k} \cdot \vec{K} = \cos E_x \cdot \cos E_y$$

Où **Ex, Ey, Ez** : Rotations autour des axes **OX, OY, OZ**.

Donc l'équation (IV.9) deviendra comme suit :

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1+D) \cdot R \times \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}_{Ancien} \tag{IV.15}$$

Avec

$$R = \begin{pmatrix} \cos E_y \cos E_z & \cos E_x \cos E_z & -\sin E_y \\ -\cos E_x \sin E_z & \cos E_x \cos E_z & \sin E_x \sin E_y \\ +\sin E_x \sin E_y \cos E_z & +\sin E_x \sin E_y \cos E_z & \cos E_x \cos E_y \\ \sin E_x \sin E_z & -\sin E_x \sin E_z & \cos E_x \cos E_y \\ +\cos E_x \sin E_y \cos E_z & +\cos E_x \sin E_y \cos E_z & \cos E_x \cos E_y \end{pmatrix}$$

Lorsque  $\Delta k, E_x, E_y, E_z$  sont suffisamment petits, on peut négliger les termes d'ordres supérieurs à 1, et la formule générale peut se linéariser en:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} + (1+\Delta K) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -E_z & E_y \\ E_z & 1 & E_x \\ -E_y & E_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{IV.16}$$

On conclut que la rotation R (Ez, Ey, Ex) est une matrice qui peut être linéarisée de la façon suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -E_z & E_y \\ E_z & 1 & -E_x \\ -E_y & E_x & 1 \end{pmatrix} \tag{IV.17}$$

Cette rotation peut être décomposée-en :

$$R = 1 + \delta R \tag{IV.18}$$



Avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta R = \begin{pmatrix} 0 & -Ez & Ey \\ Ez & 0 & -Ex \\ -Ey & Ex & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

En tenant compte des petites rotations en géodésie, topographie et du facteur d'échelle

( $K$  : voisin de l'unité).

Nous obtenons la formule générale de transformation entre les systèmes de coordonnées

Tri-rectangulaires

$$\vec{X} = \vec{T} + (1 + \Delta k) \cdot (I + \Delta R) \cdot \vec{x} \quad (\text{IV.20})$$

Où  $X$  : vecteur coordonnées dans le système 1.

$x$  : vecteur coordonnées dans le système 2.

$I$  : Matrice identité.

$\Delta k$  : Variation du facteur d'échelle.

$\Delta R$  : Variation de la matrice rotation.

On transforme ce système sous la forme  $A \cdot X = B$  un système de trois (03) équation à sept (07) inconnues. La solution exige un minimum de trois (03) points.

En générale, le système est surabondant ( $n > 3$ ) :

-le nombre d'équation est  $n_e = 3 \cdot n$  ( $n$  : nombre de points)

-la redondance est  $n_e - 7$

Ce système peut être résolu par la méthode des moindres carrés.

Soit  $A \cdot X - B = 0$  un système linéaire où  $B$  étant le vecteur d'observation en générale entaché.

Ce système s'écrit en général :

$$A \cdot X - B = V \quad (\text{IV.21})$$

$A$  : matrice des coefficients ou de configuration.

$X$  : vecteur des inconnues.

$B$  : vecteur des observation.

$V$  : vecteur des écarts ou résidus.

La méthode de résolution exige :

- pas d'erreurs systématique.

$$\bullet \sum_{i=1}^n V_i^2 = \text{minimum} \quad \text{Où} \quad V^T \cdot V = \text{minimum} \quad (\text{IV.22})$$

Soit :

$$A \cdot X - B = V \quad (\text{IV.23})$$

Et soit la transposée égale à :

$$X^T \cdot A^T - B^T = V^T \quad (\text{IV.24})$$

Multiplions à gauche le système par sa transposée :

$$(X^T \cdot A^T - B^T) \cdot (A \cdot X - B) = V^T \cdot V \quad (\text{IV.25})$$

$$X^T \cdot A^T \cdot A \cdot X - X^T \cdot A^T \cdot B - B^T \cdot A \cdot X + B^T \cdot B = V^T \cdot V \quad (\text{IV.26})$$

Le minimum de  $V^T \cdot V$  est atteint lorsque les dérivées partielles s'annulent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^T \cdot V}{\partial X^T} &= \frac{\partial V^T \cdot V}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial V^T \cdot V}{\partial X^T} &= A^T \cdot A \cdot X - A^T \cdot B = 0 \\ \frac{\partial V^T \cdot V}{\partial X^T} &= X^T \cdot A^T \cdot A - B^T \cdot A = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

Nous avons en finale, le système d'équations normales :

$$A^T \cdot A \cdot X - A^T \cdot B = 0 \quad (\text{IV.28})$$

En reprenant :

$$A \cdot X - B = V \quad (\text{IV.29})$$

Multiplions à gauche le système par  $A^T$ , nous obtenons :

$$A^T \cdot A \cdot X - A^T \cdot B = A^T \cdot V = 0 \quad (\text{IV.30})$$

Avec  $A^T \cdot V = 0$  (vérification de la normalisation)

La solution est tel que :

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{Où} \quad X = (Tx, Ty, Tz, \Delta k, Ex, Ey, Ez)^T \quad (\text{IV.32})$$

#### IV.4) Les modèle de transformation

Les modèle de transformation cites ce présent cours se présentent sous forme :

- de formalismes cartésiens à 7 paramètre (*BURSA WOLF*, *MOLODENSKY* *BADEKAS*.....) déduits de la forme générale ci-dessus.
- d'un formalisme géographique issu des équations différentielles de *MOLODENSKY*.

Dans ce qui suit, nous détaillons les trois modèles de transformations entre système géodésiques de référence : Modèle de *BURSA-WOLF* Modèle de *MOLODENSKY* *BADEKAS* Modèle géographique de *molodensky*. Les trois modèles sont fréquemment utilisés dans les travaux de géodésie.

##### IV.4.1) Modèle cartésiens

Les modèles cartésiens se trouvent sous des formes dans la littérature spécialisée. Les modèles mathématiques publiés, peuvent se rapporter à l'un des deux modèles formels présentés dans ce cours.

- Modèle de *BURSA-WOLF*.
- Modèle de *MOLODENSKY* *BADEKAS*.

Remarque : d'autre modèle, non introduits dans ce utilisées pour la transformation entre systèmes de références géodésiques (modèle de *HOTINE*, *KRAKIWSKI-THOMSON*, *VANICEK-WELLS*, *VEIS* ....)

##### IV.4.1.1) Modèle cartésien de *BURSA-WOLF*

Le modèle cartésien de *BURSA-WOLF* n'est autre que celui qui a été présenté précédemment. Il compte :

- Trois (03) translation  $T_x, T_y, T_z$ .
- Trois (03) rotations  $E_x, E_y, E_z$
- Un (01) facteur d'échelle  $\Delta k$  .

C'est un modèle à (07) sept paramètre dont l'équation générale :

$$\vec{X} = \vec{T} + (1 + \Delta k) \cdot (I + \Delta R) \cdot \vec{x}$$

$X$  : vecteur coordonnée dans le système 1.

$x$  : vecteur de coordonnée dans le système 2.

$I$  : matrice identité.

L'écriture matricielle pour un point est :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1 + \Delta k) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -Ez & Ey \\ Ez & 1 & Ex \\ -Ey & Ex & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (IV.33)$$

En classant les inconnues dans un même vecteur, nous obtenons le modèle de BURSA-WOLF sous sa forme matricielle :

**1°-Pour un point**

En classant les inconnues dans un même vecteur, nous obtenons l'écriture matricielle pour 01 points dans le modèle de BURSA-WOLF.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \\ \Delta k \\ Ex \\ Ey \\ Ez \end{pmatrix} \quad (IV.34)$$

**2°-Pour n points (n>3)**

$$\begin{pmatrix} X_1 - x_1 \\ X_2 - x_2 \\ \dots \\ X_n - x_n \\ Y_1 - y_1 \\ Y_2 - y_2 \\ \dots \\ Y_n - y_n \\ Z_1 - z_1 \\ Z_2 - z_2 \\ \dots \\ Z_n - z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & z_1 & -y_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & z_2 & -y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & x_n & 0 & z_n & -y_n \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & -z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 & -z_2 & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & y_n & -z_n & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 1 & z_1 & y_1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_2 & y_2 & -x_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & z_n & y_n & -x_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \\ \Delta k \\ Ex \\ Ey \\ Ez \end{pmatrix} \quad (IV.35)$$

Ce système peut être résolu comme il a été présent précédemment [IV.3] par la méthode des moindres carrés.

IV.4.1.2) Modèle MOLODENSKY-BADEKAS

Le modèle de MOLODENSKY-BADEKAS en formalisme cartésien est obtenu par l'introduction d'un vecteur définissant un point initial autour duquel s'effectuent les rotation (Ex,Ey,Ez ).Ce point est généralement pris comme centre de gravité ou iso barycentre dans les deux (02) système de coordonnées .

Le modèle est généralement utilisé pour transformation locale du type cadastre.

On prendra comme point initial, le centre de gravité exprimé dans le deux (02) système :

$$\vec{x}_0 \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} \end{pmatrix} \tag{IV.36}$$

Système n°1
Système n°2

A la différence du modèle d BURSA-WOLF ,MOLODENSKY introduit dans son modèle , un point initial tel que :

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{T} + (1 + \delta K) \cdot (1 + \delta R) \cdot (\vec{X} - \vec{X}_0) \tag{IV.37}$$

En posant  $(\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{x}$  (IV.38)

Et en ordonnant la matrice, le modèle MOLODENSKY-BADEKAS devient pour n points :

$$\begin{array}{c}
 \bar{X}_1 - \bar{x}_1 \\
 \bar{X}_2 - \bar{x}_2 \\
 \dots \\
 \bar{X}_n - \bar{x}_n \\
 \bar{Y}_1 - \bar{y}_1 \\
 \bar{Y}_2 - \bar{y}_2 \\
 \dots \\
 \bar{Y}_n - \bar{y}_n \\
 \bar{Z}_1 - \bar{z}_1 \\
 \bar{Z}_2 - \bar{z}_2 \\
 \dots \\
 \bar{Z}_n - \bar{z}_n
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & \bar{x}_1 & 0 & \bar{z}_1 & -\bar{y}_1 \\
 1 & 0 & 0 & \bar{x}_2 & 0 & \bar{z}_2 & -\bar{y}_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & 0 & \bar{x}_n & 0 & \bar{z}_n & -\bar{y}_n \\
 0 & 1 & 0 & \bar{y}_1 & -\bar{z}_1 & 0 & \bar{x}_1 \\
 0 & 1 & 0 & \bar{y}_2 & -\bar{z}_2 & 0 & \bar{x}_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 1 & 0 & \bar{y}_n & -\bar{z}_n & 0 & \bar{x}_n \\
 0 & 0 & 1 & \bar{z}_1 & \bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \bar{z}_2 & \bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 1 & \bar{z}_n & \bar{y}_n & -\bar{x}_n & 0
 \end{array} \right|
 \begin{array}{c}
 Tx \\
 Ty \\
 Tz \\
 \delta k \\
 Ex \\
 Ey \\
 Ez
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{IV.39}$$

Ce système peut être résolu comme il a été présent précédemment [IV.3] par la méthode des moindres carrés.

**IV.4.2) Modèle géographique de molodensky**

Chaque système de référence géodésique lui est associé un ellipsoïde de révolution défini par ses composantes (a, b), (a, e) ou (a, f).

Avec :

a : demi grand axe.

b : demi petit axe.

e : excentricité.

f : aplatissement.

Les coordonnées géographiques (longitude et latitude) sont des valeurs plus représentatives dans la pratique que les coordonnées cartésienne (x, Y, Z).

La transformation mise en œuvre est alors à neuf (09) paramètres dans laquelle s'ajoutent deux autres paramètres (Da et Df ou De).

Où :  $Da = a2 - a1$

$Df = f1 - f2$

$De = e1 - e2$

(IV.40)

Il existe des formules qui permettent de s'affranchir des coordonnées géocentriques liées à deux (02) ellipsoïdes et permettent d'aboutir à une transformation directe. Cette transformation est issue des équations différentielles de MOLODENSKY.

En pratique si les systèmes de coordonnées  $X$  et  $x$  sont identiques, on obtient un modèle :

$$\begin{aligned}\bar{X} &= F(\bar{x}, \bar{\alpha}) \\ \bar{X} &= (X, Y, Z) \\ \bar{x} &= (\lambda, \varphi, he) \\ \bar{\alpha} &= (a, f)\end{aligned}\tag{IV.41}$$

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}d\bar{X} &= \frac{\partial F}{\partial x} . d\bar{x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} . d\bar{\alpha} \\ d\bar{X} &= J . d\bar{x} + K . d\bar{\alpha}\end{aligned}\tag{IV.42}$$

$J, K$  est les applications linéaires tangentes (appelées jacobiens de la transformation) :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial H} \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial H} \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial H} \end{vmatrix} \text{ et } K = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial f} \\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial f} \\ \frac{\partial Z}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial f} \end{vmatrix}\tag{IV.43}$$

$$d\bar{x} = J^{-1} . d\bar{X} - J^{-1} . K . d\bar{\alpha}\tag{IV.44}$$

C'est le modèle de MOLODENSKY en formalisme géographique.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \\ dhe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \varphi_2 & \varphi_1 \\ he_2 & he_1 \end{pmatrix}\tag{IV.45}$$

$$d\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ f_2 - f_1 \end{pmatrix}\tag{IV.46}$$

$$\bar{X} = F(\bar{x}, \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} (N + he) . \cos \varphi . \cos \lambda \\ (N + he) . \cos \varphi . \sin \lambda \\ (N (1 - e^2) + he) . \sin \varphi \end{pmatrix}\tag{IV.47}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (\text{Grande normale}) \quad (\text{IV.48})$$

En écrivant que  $d\vec{X} = U d\vec{\theta}$  (IV.49)

Et que :  $d\vec{\theta} = (Tx, Ty, Tz, \delta K, Ex, Ey, Ez)'$  , (IV.50)

On déduit :  $d\vec{x} = J^{-1} \cdot U d\vec{\theta} - J^{-1} \cdot K \cdot d\vec{\alpha}$  (IV.51)

Avec :  $A = J^{-1} \cdot U$  ,  $B = -J^{-1} \cdot K$  , l'équation différentielle de MOLODENSKY

Devient :  $d\vec{x} = A \cdot d\vec{\theta} + B \cdot d\vec{\alpha}$  (IV.52)

Le modèle obtenu est à nef (09) paramètres. Les équation différentielles en formalisme géographique donnent finalement : le modèle géographique de MOLODENSKY.

**1°-Pour 1 point**

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 \\ \varphi_2 - \varphi_1 \\ he_2 - he_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(1,1) & \dots & A(1,7) \\ A(2,1) & \dots & A(2,7) \\ A(3,1) & \dots & A(3,7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \\ \Delta K \\ Ex \\ Ey \\ Ez \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(1,1) & B(1,2) \\ B(2,1) & B(2,2) \\ B(3,1) & B(3,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

$A(1, 1) = -\sin \lambda / (N + he) \cdot \cos \varphi$  (IV.54)

$A(1, 2) = \cos \lambda / (N + he) \cdot \cos \varphi$

$A(1, 3) = 0$

$A(1, 4) = 0$

$A(1, 5) = -\left(1 - \left(N \cdot e^2 / (N + he)\right)\right) \cdot \text{tg} \varphi \cdot \cos \lambda$

$A(1, 6) = -\left(1 - \left(N \cdot e^2 / (N + he)\right)\right) \cdot \text{tg} \varphi \cdot \sin \lambda$

$A(1, 7) = 1$

$A(2, 1) = -\sin \varphi \cdot \cos \lambda / (\rho + he)$

$A(2, 2) = -\sin \varphi \cdot \cos \lambda / (\rho + he)$

$A(2, 3) = \cos \varphi / (\rho + he)$



$$A(2, 4) = N.e^2 \sin \varphi . \cos \varphi / (\rho + he)$$

$$A(2, 5) = (a.w + he) \sin \lambda / (\rho + he)$$

$$A(2, 6) = -(a.w + he) \cos \lambda / (\rho + he)$$

$$A(2, 7) = 0$$

$$A(3, 1) = \cos \varphi . \cos \lambda$$

$$A(3, 2) = \cos \varphi . \sin \lambda$$

$$A(3, 3) = \sin \varphi$$

$$A(3, 4) = (a.w + he)$$

$$A(3, 5) = N.e^2 \sin \varphi . \cos \varphi . \sin \lambda$$

$$A(3, 6) = N.e^2 \sin \varphi . \cos \varphi . \cos \lambda$$

$$A(3, 7) = 0$$

$$B(1, 1) = 0$$

$$B(1, 2) = 0$$

$$B(2, 1) = e^2 \sin \varphi . \cos \varphi / w . (\rho + he)$$

$$B(2, 2) = a.(1-f)(2-e^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi . \cos \varphi / (\rho + he) w^3$$

$$B(3, 1) = -w$$

$$B(3, 2) = a(1-f) \sin^2 \varphi / w$$

$$w = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.55})$$

$$\text{ET} \quad N = a/w \quad (\text{IV.56})$$

$$\rho = a.(1 - e^2) / w^3 \quad (\text{IV.57})$$

C'est l'écriture matricielle pour seul point, pour le cas n point, la solution est donnée par la méthode des moindres carrés.

2°-Pour n point (n>3)

$$\begin{pmatrix} \lambda_2^1 - \lambda_1^1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_2^n - \lambda_1^n \\ \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \\ \varphi_2^2 - \varphi_1^2 \\ \dots \\ \varphi_2^n - \varphi_1^n \\ he_2^1 - he_1^1 \\ he_2^2 - he_1^2 \\ \dots \\ he_2^n - he_1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 & A_{1,3}^1 & A_{1,4}^1 & A_{1,5}^1 & A_{1,6}^1 & A_{1,7}^1 \\ A_{1,1}^2 & A_{1,2}^2 & A_{1,3}^2 & A_{1,4}^2 & A_{1,5}^2 & A_{1,6}^2 & A_{1,7}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1,1}^n & A_{1,2}^n & A_{1,3}^n & A_{1,4}^n & A_{1,5}^n & A_{1,6}^n & A_{1,7}^n \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 & A_{2,3}^1 & A_{2,4}^1 & A_{2,5}^1 & A_{2,6}^1 & A_{2,7}^1 \\ A_{2,1}^2 & A_{2,2}^2 & A_{2,3}^2 & A_{2,4}^2 & A_{2,5}^2 & A_{2,6}^2 & A_{2,7}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2,1}^n & A_{2,2}^n & A_{2,3}^n & A_{2,4}^n & A_{2,5}^n & A_{2,6}^n & A_{2,7}^n \\ A_{3,1}^1 & A_{3,2}^1 & A_{3,3}^1 & A_{3,4}^1 & A_{3,5}^1 & A_{3,6}^1 & A_{3,7}^1 \\ A_{3,1}^2 & A_{3,2}^2 & A_{3,3}^2 & A_{3,4}^2 & A_{3,5}^2 & A_{3,6}^2 & A_{3,7}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{3,1}^n & A_{3,2}^n & A_{3,3}^n & A_{3,4}^n & A_{3,5}^n & A_{3,6}^n & A_{3,7}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \\ \Delta K \\ Ex \\ Ey \\ Ez \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1}^1 & B_{1,2}^1 \\ B_{1,1}^2 & B_{1,2}^2 \\ \dots & \dots \\ B_{1,1}^n & B_{1,2}^n \\ B_{2,1}^1 & B_{2,2}^1 \\ B_{2,1}^2 & B_{2,2}^2 \\ \dots & \dots \\ B_{2,1}^n & B_{2,2}^n \\ B_{3,1}^1 & B_{3,2}^1 \\ B_{3,1}^2 & B_{3,2}^2 \\ \dots & \dots \\ B_{3,1}^n & B_{3,2}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \tag{IV.58}$$

Ce système peut être résolu comme il a été présent précédemment [IV.3] par la méthode des moindres carrés.

# **CHAPITRE V**

---

## **Application**

### V.1) Introduction

L'objectif de cette application est la détermination des paramètres de passage entre le système géodésique mondial WGS84 et le système géodésique local Clarke 1880 IGN France. Pour se faire, un jeu de données réel de points connus dans les deux systèmes a été utilisé.

La localisation de la zone de travail est représentée par la figure suivante (zone encadrée en rouge) :

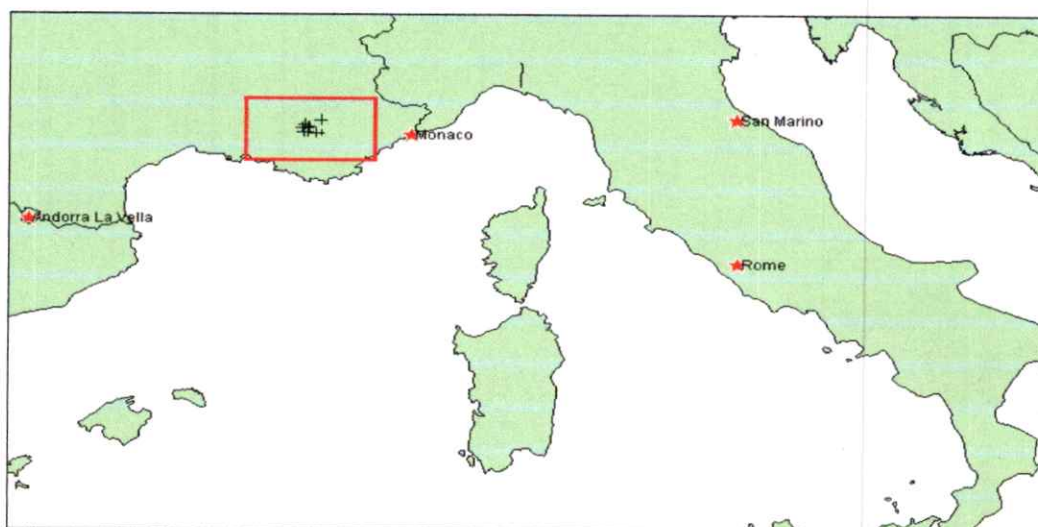


Figure V.1 - Localisation de la zone de travail.

La zone d'étude est couverte de neuf points : sept points serviront à la détermination des paramètres de passage (translations, rotations et facteur d'échelle) et deux points serviront comme points de contrôle. Les points de contrôle ont été choisis de manière à ce qu'ils soient encadrés par des points ayant servi la détermination des paramètres de passage :

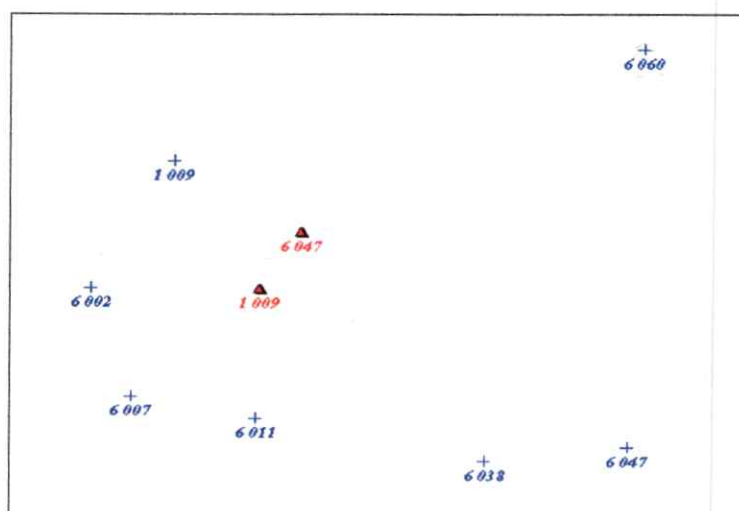


Figure V.2 - Points utilisés pour le calcul des paramètres de transformation (représentés en bleu) et points de contrôle (représentés en rouge).

## V.2) Coordonnées géographiques des points les deux systèmes de référence géodésiques

### V.2.1) Coordonnées des points dans le système mondial WGS84

Paramètres de l'ellipsoïde associé (WGS84) :

- ✓ Demi-grand axe : 6378137.000 m
- ✓ Excentricité : 0.0818191911

Les coordonnées des points dans le système mondial WGS84 sont données par le tableau suivant :

Numéro du point	Longitude (degré, minute,seconde)	Latitude (degré, minute, seconde)	Hauteur ellipsoïdale (mètre)
1009	E 5 48 35.21831	N 43 52 47.25155	840.929
6002	E 5 45 57.15481	N 43 49 22.69850	524.519
6011	E 5 51 13.95937	N 43 45 51.69796	527.867
6027	E 5 52 40.86291	N 43 50 53.29473	411.308
6060	E 6 3 39.02932	N 43 55 48.52952	756.415
6038	E 5 58 34.25055	N 43 44 43.50623	544.831
6007	E 5 47 14.71950	N 43 46 26.57047	336.082
6023	E 5 51 20.66210	N 43 49 22.40749	429.149
6047	E 6 3 08.26832	N 43 45 05.31050	627.905

**Tableau 1** - Cordonnées des points dans le système mondial WGS84

**V.2.2) Coordonnées des points dans le système local Clarke 1880 IGN France**

Paramètres de l'ellipsoïde associé (local Clarke 1880 IGN France) :

- ✓ Demi-grand axe : 6378249.200 m
- ✓ Excentricité : 0.0824832565

Les coordonnées des points dans le système mondial WGS84 sont données par le tableau suivant :

<b>Numéro du point</b>	<b>Longitude (degré, minute, seconde)</b>	<b>Latitude (degré, minute, seconde)</b>	<b>Hauteur ellipsoïdale (mètre)</b>
1009	E 5 48 37.12592	N 43 52 47.19850	798.910
6002	E 5 45 59.06253	N 43 49 22.64289	482.510
6011	E 5 51 15.85216	N 43 45 51.63858	485.970
6027	E 5 52 42.75695	N 43 50 53.23787	369.480
6060	E 6 03 40.90885	N 43 55 48.47703	714.090
6038	E 5 58 36.13201	N 43 44 43.44025	502.750
6007	E 5 47 16.62073	N 43 46 26.51227	294.140
6023	E 5 51 22.55923	N 43 49 22.34882	387.330
6047	E 6 03 10.13655	N 43 45 05.24553	585.700

**Tableau 2** - Coordonnées des points dans le système local Clarke 1880 IGN France.

### V.3) Développement de l'application

Le langage de programmation choisi pour le développement de notre application est le Fortran PowerStation 4.0, du faite de la précision du calcul qu'il offre.

#### V.3.1) Transformation entre les systèmes de référence géodésique

Trois modèles de transformations entre référentiel géodésique ont été ainsi élaborés :

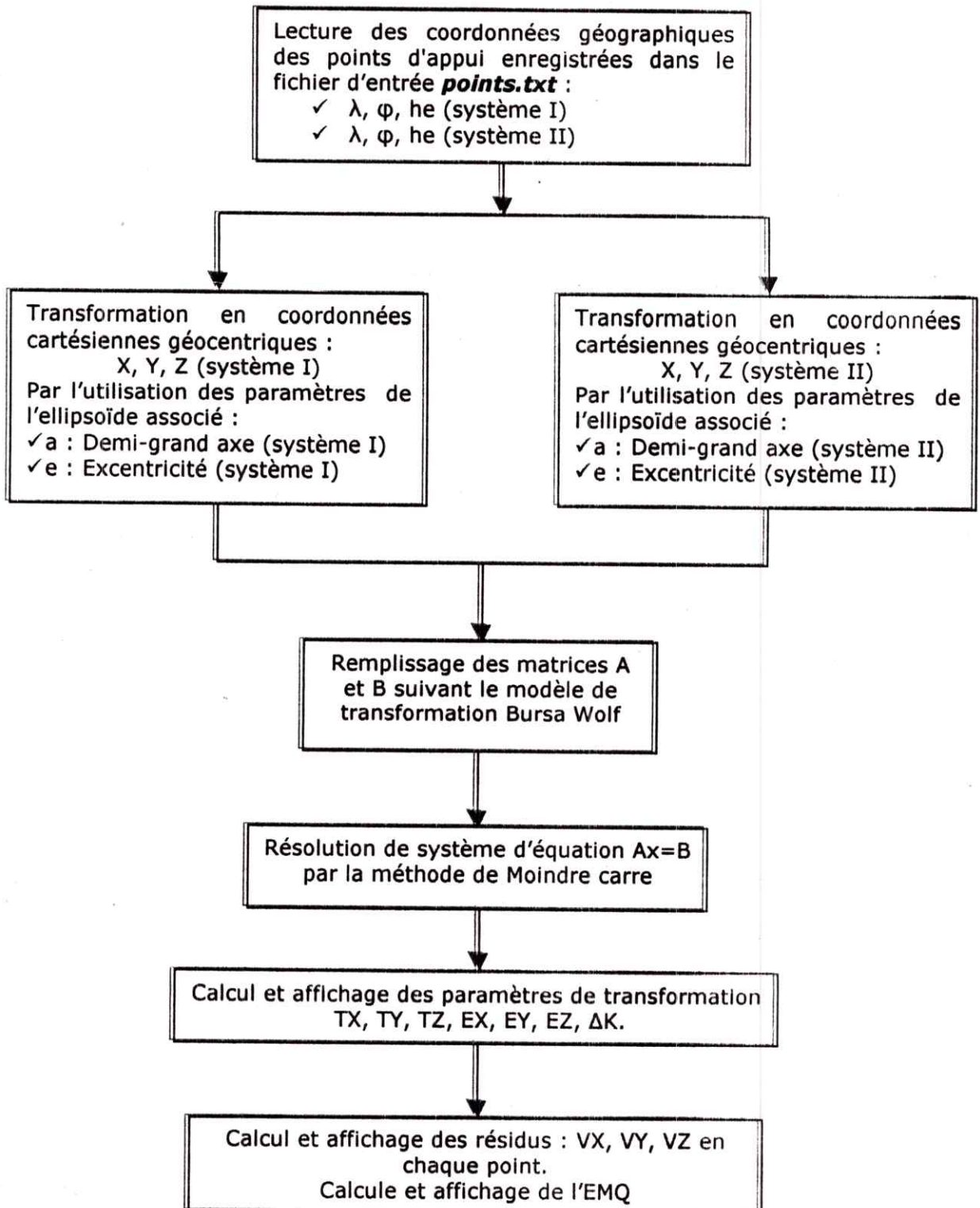
- Programme **Bursa.for** : calcul des paramètres de transformation, modèle de Bursa Wolf
- Programme **Molodensky.for** : calcul des paramètres de transformation, modèle de modèle de Molodensky.
- Programme **Badekas.for** : calcul des paramètres de transformation, modèle de Molodensky Badekas.

Les principales sous-routines de ces programmes sont :

- ✓ **convers1** : transformation des coordonnées géographiques aux coordonnées géocentriques cartésiennes.
- ✓ **convers2** : transformation des coordonnées géocentriques cartésiennes aux coordonnées géographiques.
- ✓ **resolution** : résolution du système d'équation  $AX = B$ , par l'approche des moindres carrées.
- ✓ **transmat** : transposée d'une matrice.
- ✓ **prodmatrix** : produit de deux matrices.
- ✓ **Inversmat** : inversion d'une matrice carrée.

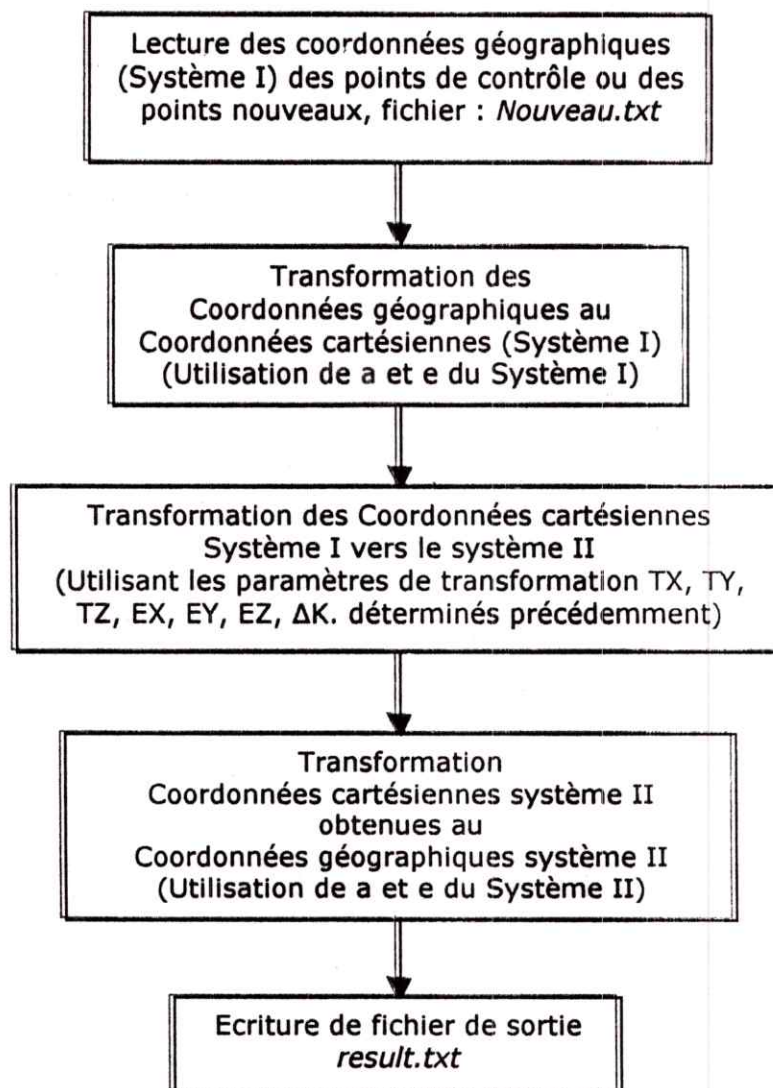
## V.3.1.1) Organigramme

Nous présentons Dans ce qui suit les algorithmes de calcul des trois programmes de transformation élaborés :

➤ **Modèle de Bursa Wolf**

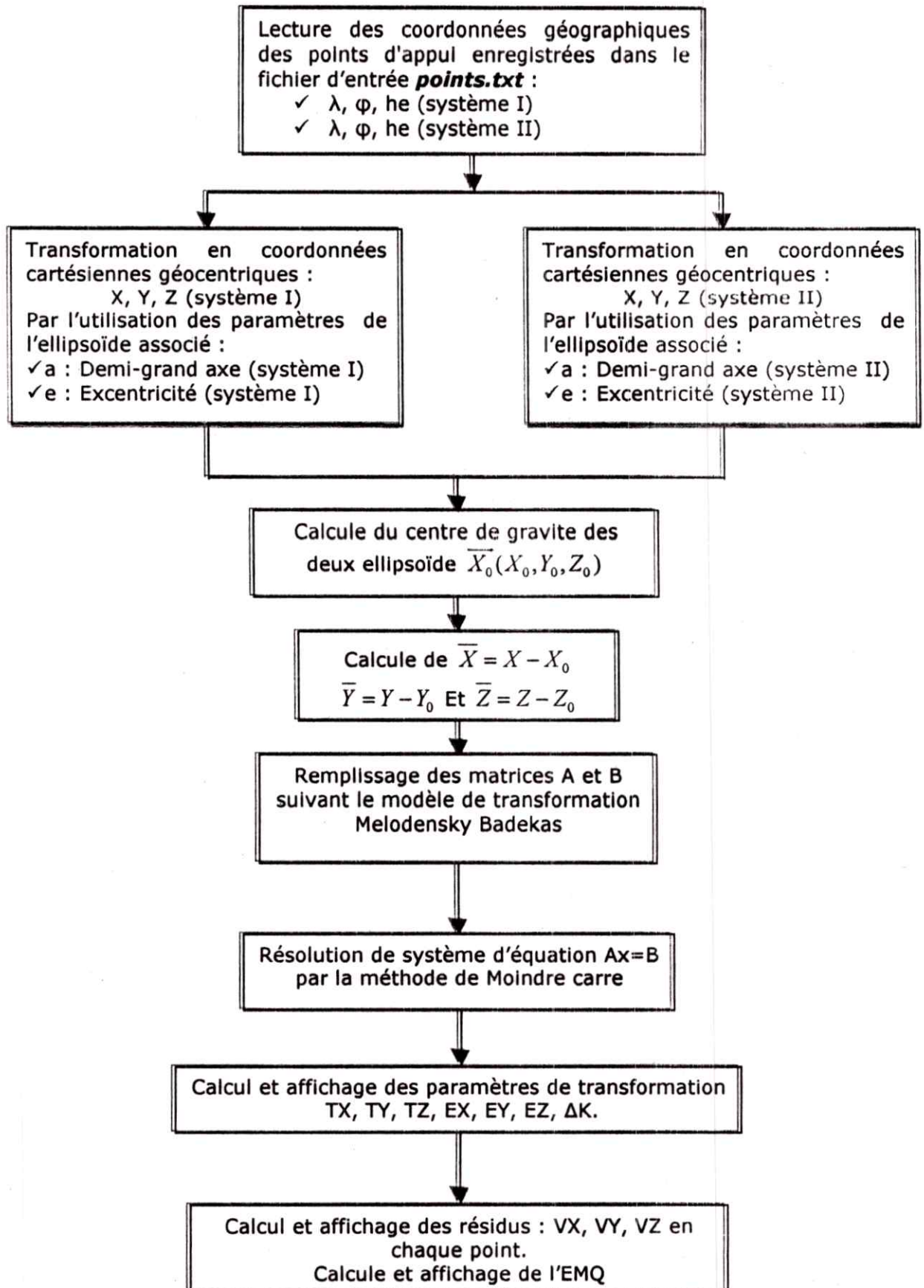
**Organigramme 1-a** : Détermination des paramètres de passage, modèle Bursa Wolf.



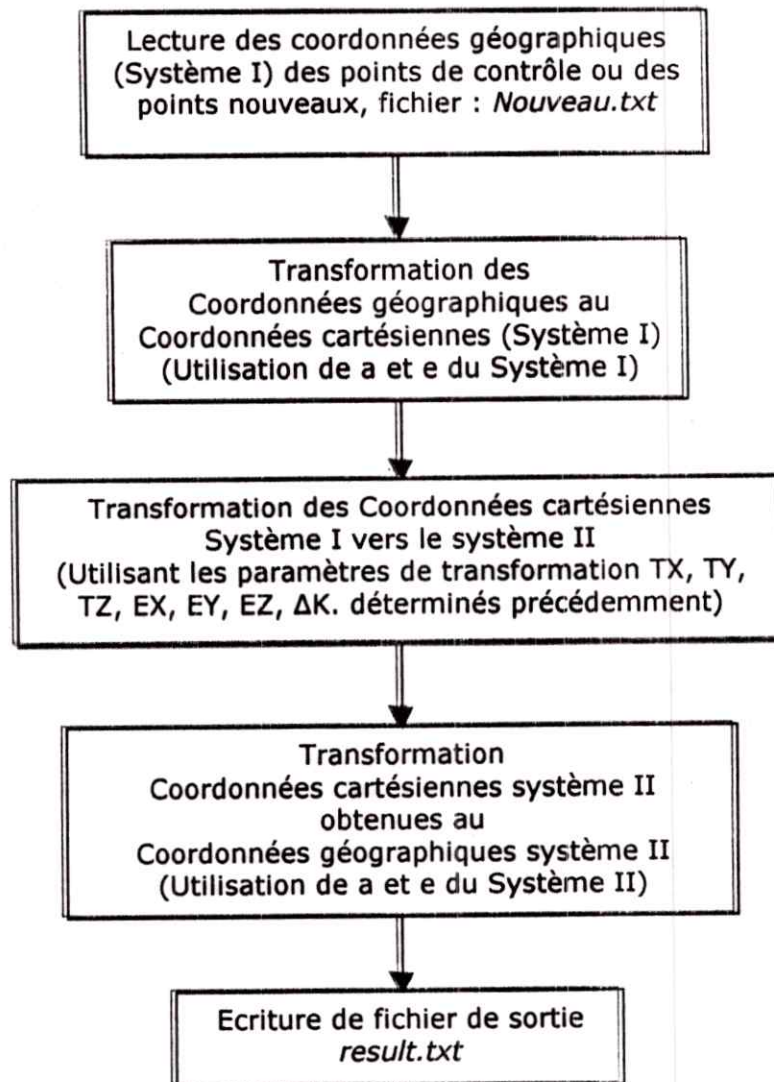


**Organigramme 1-b** : Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux, modèle Bursa Wolf.

➤ **Modèle de Melodensky Badekas**

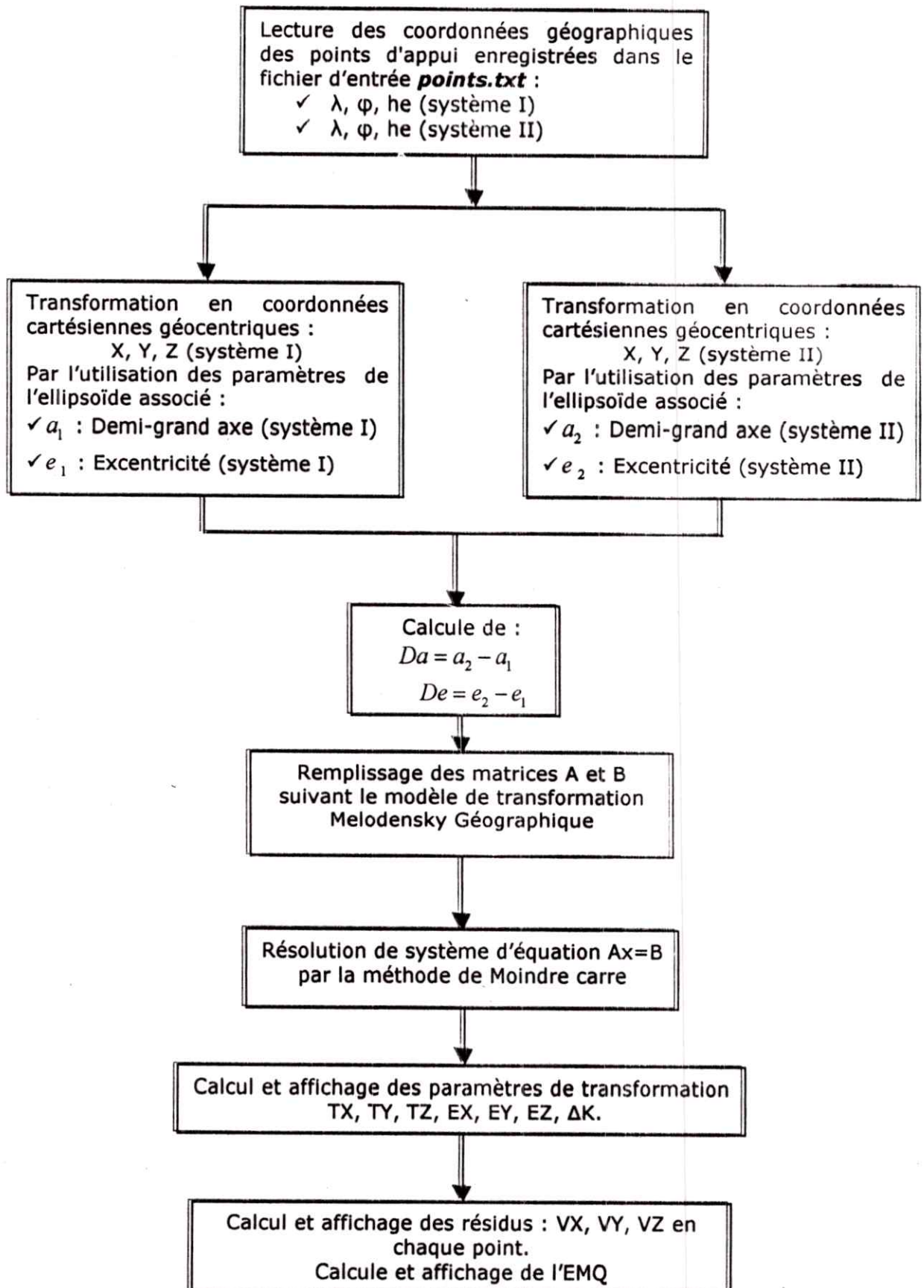


**Organigramme 2-a :** Détermination des paramètres de passage, modèle Melodensky Badekas.

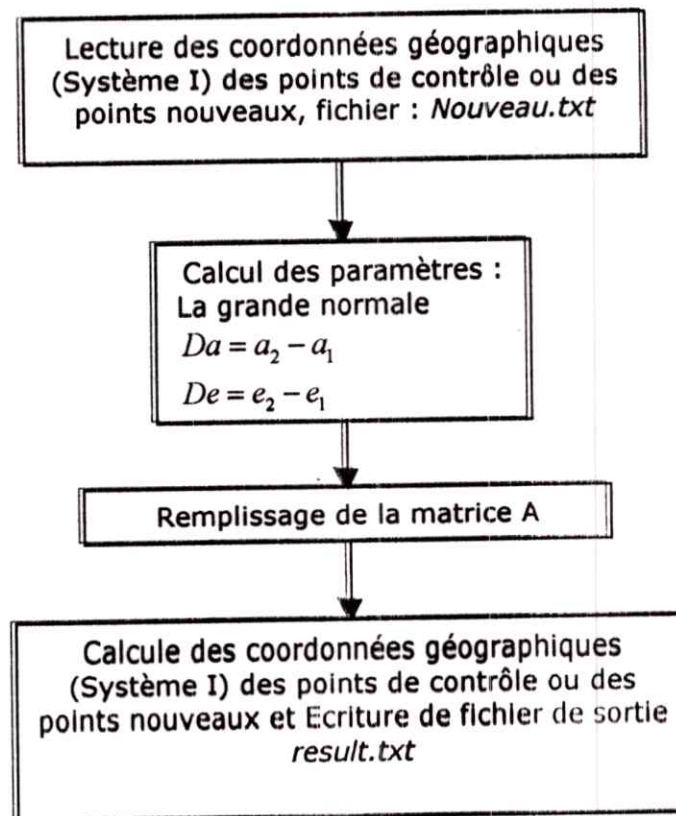


**Organigramme 2-b** : Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux, modèle Melodensky Badekas.

➤ **Modèle Géographique de Melodensky**



**Organigramme 3-a** : Détermination des paramètres de passage, modèle Géographique de Melodensky.



**Organigramme 3-b :** Transformation des coordonnées des points de contrôle ou des points nouveaux, modèle Géographique de Melodensky.

### V.3.1.2) Exécution de l'application

#### V.3.1.2.1) Modèle de Bursa Wolf

- ✓ Points utilisés pour la détermination des paramètres de passage du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France : 6002, 6011, 6027, 6060, 6038, 6007 et 6023.
- ✓ Points utilisés comme points de contrôle : 1009 et 6047.

Les paramètres de passage déterminés par l'utilisation des sept points sont exprimés dans le tableau suivant :

**Exécution du programme : bursa.exe**

#### a) Fichiers d'entrée

Deux fichiers d'entrée sont utilisés :

- Fichier des coordonnées des points doubles dans le système I, système II.
- fichier des points de contrôle ou de points nouveaux Système I.

Fichier	Edition	Format	Affichage	?
6002	E	5 45	57.15481	N 43 49 22.69850 524.519 E 5 45 59.06253 N 43 49 22.64289 482.510
6011	E	5 51	13.95937	N 43 45 51.69796 527.867 E 5 51 15.85216 N 43 45 51.63858 485.970
6027	E	5 52	40.86291	N 43 50 53.29473 411.308 E 5 52 42.75695 N 43 50 53.23787 369.480
6060	E	6 3	39.02932	N 43 55 48.52952 756.415 E 6 03 40.90885 N 43 55 48.47703 714.090
6038	E	5 58	34.25055	N 43 44 43.50623 544.831 E 5 58 36.13201 N 43 44 43.44025 502.750
6007	E	5 47	14.71950	N 43 46 26.57047 336.082 E 5 47 16.62073 N 43 46 26.51227 294.140
6023	E	5 51	20.66210	N 43 49 22.40749 429.149 E 5 51 22.55923 N 43 49 22.34882 387.330

Figure V.3 - Fichier des coordonnées des points doubles dans le système I, système II.

Fichier	Edition	Format	Affichage	?
1009	E	5 48	35.21831	N 43 52 47.25155 840.929
6047	E	6 3	08.26832	N 43 45 05.31050 627.905

Figure V.4 - fichier des points de contrôle ou de points nouveaux Système I.

Exécution du programme

```

C:\Documents and Settings\Mukadem\Bureau\la imprimer\trans\trans\Bursa1.exe
Nbr de points d appui = 7
Les Parametres de Transformations et leurs precision
Parametres      RMS      Unite
Tx = 180.2694    28.619   m
Ty = -65.7752    32.211   m
Tz = -363.2776   30.634   m
Ex = -3.233970   .8975    sec
Ey = -1.334577   1.1696   sec
Ez = 2.451275    .8711    sec
Dk = 4.688071    3.319463 ppm
Pause - Please enter a blank line <to continue> or a DOS command.
    
```

Figure V.5 - Fenêtre d'exécution du programme

Fichier de sortie

Fichier	Edition	Format	Affichage	?
1009	E	5 48	37.14519	N 43 52 47.18595 798.940
6047	E	6 3	10.09379	N 43 45 5.25395 585.733

Figure V.6 - exemple d'un fichier de sortie système II.

Résultats de l'application Bursa.for

Les résultats ainsi obtenus, sont :

Paramètre	Valeur	EMQ
Tx : Translation en X	180.2694 m	28.619 m
Ty : Translation en Y	-65.7752 m	32.211 m
Tz : Translation en Z	-363.2776 m	30.634 m
Ex : Rotation en X	-3.233970 sec	0.8975 sec
Ey : Rotation en Y	-1.334577 sec	1.1696 sec
Ez : Rotation en Z	2.451275 sec	0.8711 sec
Dk : correction sur le facteur d'échelle	4.688071 ppm	3.319463 ppm

**Tableau 3** - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France.

Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage, dans le système Clarke 1880 IGN France, par l'utilisation des paramètres de passage déterminés précédemment sont donnés dans le tableau suivant :

Numéro du point	Résidu en longitude (seconde)	Résidu en latitude (seconde)	Résidu en X (m)	Résidu en Y (m)	Résidu en hauteur ellipsoïdale (m)
6002	0.00255	0.00016	0.079	0.005	0.124
6011	0.00101	0.00122	0.031	0.038	-0.078
6027	-0.00530	0.00052	-0.163	0.016	-0.081
6060	0.00210	-0.00082	0.065	-0.025	0.060
6038	0.00161	-0.00166	0.050	-0.051	0.005
6007	0.00262	0.00121	0.081	0.037	0.028
6023	-0.00459	-0.00063	-0.142	-0.019	-0.058

**Tableau 4** - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage.

La validation des paramètres de passage obtenus se fait par la comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées par l'utilisation des paramètres de passage entre les deux systèmes géodésiques :

Point de contrôle numéro : 1009			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12592	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12369
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.19850	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.20105
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	798.910	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	798.985
Point de contrôle numéro : 6047			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 6 03 10.13655	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 6 03 10.13864
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 45 05.24553	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 45 05.24227
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	585.700	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	585.775

**Tableau 5** - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées.

Les écarts au point de contrôle N°1009 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00223 seconde donc 6,8758259 cm
- en latitude 0,00255 seconde 7,8624915 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,5 cm

Les écarts au point de contrôle N°6047 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00209 seconde donc 6,4441597 cm
- en latitude 0,00326 seconde donc 10,0516558 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,5 cm

**Note :**

1 degré = 111 km.

Donc 1 seconde =  $0,0308333 \times 1000 = 30,8333$  mètres



Autres résultats :

Numéro de Point de contrôle	X	Y	Z
6002	4586175.991	463087.364	4394284.631
6011	4589945.303	470590.709	4389585.685
6027	4583252.886	471855.959	4396223.123
6060	4575689.025	485837.373	4403030.051
6038	4590390.382	480540.133	4388077.267
6007	4589609.610	465177.632	4390230.416
6023	4585381.801	470273.401	4394212.134

**Tableau 6** Coordonnées cartésiennes géocentriques dans le Système WGS

Numéro de Point de contrôle	X	Y	Z
6002	4586343.602	463147.139	4393964.104
6011	4590113.177	470650.484	4389265.492
6027	4583420.771	471915.777	4395902.810
6060	4575856.351	485897.305	4402709.279
6038	4590557.941	480600.006	4387756.648
6007	4589777.176	465237.356	4389909.900
6023	4585549.544	470333.224	4393891.671

**Tableau 7** Coordonnées cartésiennes géocentriques Système Clarke 1880 IGN France

#### V.3.1.2.2) Modèle de Melodensky Badekas

✓ Points utilisés pour la détermination des paramètres de passage du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France : 6002, 6011, 6027, 6060, 6038, 6007 et 6023.

✓ Points utilisés comme points de contrôle : 1009 et 6047.

Les paramètres de passage déterminés par l'utilisation des sept point sont exprimés dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur	EMQ
Tx : Translation en X	167.7249	0.033 m
Ty : Translation en Y	59.8248	0.033 m
Tz : Translation en Z	-320.4167	0.033 m
Ex : Rotation en X	-3.233970	0.8975 sec
Ey : Rotation en Y	-1.334577	1.1696 sec
Ez : Rotation en Z	2.451275	0.8711 sec
Dk : correction sur le facteur d'échelle	-4.688071	3.319463 ppm

**Tableau 6** - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France.

Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage, dans le système Clarke 1880 IGN France, par l'utilisation des paramètres de passage déterminés précédemment sont donnés dans le tableau suivant :

Numéro du point	Résidu en longitude (seconde)	Résidu en latitude (seconde)	Résidu en X (m)	Résidu en Y (m)	Résidu en hauteur ellipsoïdale (m)
6002	0.00255	0.00016	0.079	0.005	0.124
6011	0.00101	0.00122	0.031	0.038	-0.078
6027	-0.00530	0.00052	-0.163	0.016	-0.081
6060	0.00210	-0.00082	0.065	-0.025	0.060
6038	0.00161	-0.00166	0.050	-0.051	0.005
6007	0.00262	0.00121	0.081	0.037	0.028
6023	-0.00459	-0.00063	-0.142	-0.019	-0.058

**Tableau 7** - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage.

La validation des paramètres de passage obtenus se fait par la comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées par l'utilisation des paramètres de passage entre les deux systèmes géodésiques :

Point de contrôle numéro : 1009			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12592	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12369
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.19850	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.20105
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	798.910	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	798.985
Point de contrôle numéro : 6047			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 6 03 10.13655	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 6 3 10.13864
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 45 05.24553	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 45 5.24227
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	585.700	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	585.775

**Tableau 8** - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées.

Les écarts au point de contrôle N°1009 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00223 seconde donc 6,8758259 cm
- en latitude 0,00255 seconde 7,8624915 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,5 cm

Les écarts au point de contrôle N°6047 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00209 seconde donc 6,4441597 cm
- en latitude 0,00326 seconde donc 10,0516558 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,5 cm

#### V. 3.1.2.3) Modèle de Géographique

- ✓ Points utilisés pour la détermination des paramètres de passage du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France : 6002, 6011, 6027, 6060, 6038, 6007 et 6023.
- ✓ Points utilisés comme points de contrôle : 1009 et 6047.

Les paramètres de passage déterminés par l'utilisation des sept points sont exprimés dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur	EMQ
Tx : Translation en X	175.7360	27.944m
Ty : Translation en Y	-66.4615	33.019 m
Tz : Translation en Z	-367.4712	30.233 m
Ex : Rotation en X	-3.246215	.8844 sec
Ey : Rotation en Y	-1.324106	1.1993 sec
Ez : Rotation en Z	2.450376	.8589 sec
Dk : correction sur le facteur d'échelle	5.663197	2.785322 ppm

**Tableau 9** - Paramètres de passage calculés du système WGS84 au système Clarke 1880 IGN France.

Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage, dans le système Clarke 1880 IGN France, par l'utilisation des paramètres de passage déterminés précédemment sont donnés dans le tableau suivant :

Numéro du point	Résidu en longitude (seconde)	Résidu en latitude (seconde)	Résidu en X (m)	Résidu en Y (m)	Résidu en hauteur ellipsoïdale (m)
6002	-0.00052	0.00117	-0.016	0.036	0.143
6011	0.00142	-0.00279	0.044	-0.086	-0.029
6027	0.00145	0.00184	0.045	0.057	-0.172
6060	-0.00081	0.00039	-0.025	0.012	0.086
6038	-0.00220	-0.00112	-0.068	-0.035	0.035
6007	0.00097	-0.00138	0.030	-0.043	0.080
6023	-0.00031	0.00189	-0.010	0.058	-0.143

**Tableau 10** - Les résidus de la re-détermination des coordonnées géographiques des points utilisés pour la détermination des paramètres de passage.

La validation des paramètres de passage obtenus se fait par la comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées par l'utilisation des paramètres de passage entre les deux systèmes géodésiques :

<b>Point de contrôle numéro : 1009</b>			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12592	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 5 48 37.12346
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.19850	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 52 47.20129
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	798.910	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	798.986
<b>Point de contrôle numéro : 6047</b>			
Longitude initiale (degré, minute, seconde)	E 6 03 10.13655	Longitude calculée (degré, minute, seconde)	E 6 3 10.13920
Latitude initiale (degré, minute, seconde)	N 43 45 05.24553	Latitude calculée (degré, minute, seconde)	N 43 45 5.24202
Hauteur ellipsoïdale initiale (mètre)	585.700	Hauteur ellipsoïdale calculée (mètre)	585.775

**Tableau 11** - Comparaison aux points de contrôle des coordonnées initiales et calculées.

Les écarts au point de contrôle N°1009 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00246 seconde donc 7,5849918 cm
- en latitude 0,00279 seconde 8,6024907 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,6 cm.

Les écarts au point de contrôle N°6047 entre les coordonnées initiales et calculées sont de :

- en longitude 0,00265 seconde donc 8,1708245 cm
- en latitude 0,00351 seconde donc 10,8224883 cm
- en hauteur ellipsoïdale 7,5 cm.

## V.4) Analyse des résultats

		Modèle Bursa Wolf (cm)	Modèle Melodensky Badekas (cm)	Modèle Melodensky Géographique (cm)
		RMS =0.427	RMS =0.439	RMS =0,517
Point de contrôle 1009	Différence de la longitude $\Delta\varphi$	6,8758259	6,8758259	7,5849918
	Différence de la latitude $\Delta\lambda$	7,8624915	7,8624915	8,6024907
	Différence de la hauteur $\Delta h$	7,5	7,5	7,6
Point de contrôle 6047	Différence de la longitude $\Delta\varphi$	6,4441597	6,4441597	8,1708245
	Différence de la latitude $\Delta\lambda$	10,0516558	10,0516558	10,8224883
	Différence de la hauteur $\Delta h$	7,5	7,5	7,5

**Tableau 12** – les résultats de l'application des trois programmes sur les points 1009 et 6047

L'analyse des résultats récoltés de l'application des trois modèles de transformations sur le même jeu de données, montrent des écarts types assez proches (0.427 cm pour le modèle Bursa Wolf, 0.439 cm pour le modèle Melodensky Badekas, 0,517 Modèle Melodensky Géographique).

La validation des résultats sur les points de contrôle (points 1009 et 6047) montre que les deux modèles (Bursa et melodensky) donne exactement les même résultats des paramètres de passage, et de plus ils sont plus précis que le troisième (melodensky géographique).

Néanmoins, un jeu de données plus dense, et bien réparti sur une zone d'étude plus large, pourra confirmer ou infirmer le choix sur le modèle de transformation le plus précis.

---

# CONCLUSION

### **Conclusion :**

L'objectif principal de cette étude est l'étude des modèles de transformation entre systèmes géodésique de référence.

Trois applications ont été développées et appliquées :

Modèle de Bursa-Wolf, Modèle de Melodensky-Badekas, Modèle de Melodensky géographique.

Un jeu de données réel de points déterminés dans le système spatial WGS84 et dans le système classique Clarke 1880 IGN France, ont été utilise pour la détermination des paramètres de passage entre ces deux derniers systèmes géodésiques.

L'utilisation des points de contrôle après ont relevé des erreurs centimétriques, confirmant ainsi la validité des applications développées.

Ces applications pourront être utilisé pour les travaux de géodésie en Algérie, pour la détermination des paramètres de passages entre système géodésique en vigueur " NORD SAHARA " et autres systèmes, notamment le système mondial WGS84, dont actuellement le positionnement spatial, se réfère par GPS.



## BIBLIOGRAPHIE

[ 1 ] Manuel du Système Géodésique Mondial – 1984 (WGS-84)

Première édition – 1997.

Organisation de l'Aviation Civile Internationale.

[ 2 ] [www.ign.con](http://www.ign.con) : site français de la géodésie.

[ 3 ] [www.ign-belgique.con](http://www.ign-belgique.con) : site belge français de la géodésie.

[ 4 ] cours transformation entre systèmes de références géodésiques.

ALI ZEGGAI avril-mai 2003.

Centre Nationale des Techniques Spatiales.

[ 5 ] Introduction a la géodésie.

Jean-Philippe Dufour

Collection ENSG-IGN

Ecole nationale des sciences géographiques