

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université Saad Dahlab, Blida.

Faculté des sciences de l'ingénieur
Département Aéronautique.

**Mémoire pour l'obtention
d'un diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique.**

Filière : Maintenance et Construction Aéronautique.
Spécialité : Propulsion.

Sujet :

**RESOLUTION NUMERIQUE D'UN SYSTEME
ALGEBRIQUE PAR LA METHODE
MULTIGRILLE 2D ET 3D :
Application a une cavité entraînée**

Réalisé par :

Mlle: BAKOUCHE Khedaoudj

Dirigé par :

Mr: CHEGRANI Ahmed

2009/2010

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Résumé

L'objectif de notre travail consiste à faire une étude des méthodes itératives résolvant les systèmes d'équations algébriques linéaires et mettre en valeur une méthode itérative récente (Multigrilles), qui actuellement envahit le monde numérique et notamment la CFD (Computational Fluid Dynamics).

A cet effet, nous avons choisi de résoudre un type de problème fréquent en Aéronautique, qui est l'équation de Navier-Stokes, et on termine notre mémoire par une application concernant la simulation d'une cavité entraînée par le solveur Fluent et compare les résultats obtenus avec ceux de programme réalisé.

Abstract

The objective of our work consists in making a iterative methods solving the linear algebraic systems, to emphasize a recent iterative method (Multigrid), which currently invades the numerical world and in particular the CFD (Computational Fluid Dynamics).

To this end, we chose to solve a type of frequent problem in aeronautics, which is Navier-Stokes's equation and we finish this memory by a simulation of a lid-driven cavity by the solver Fluent and compare the results obtained with the results obtained by the programming.

Remerciement

Je remercie Allah tout puissant de m'avoir donné la volonté, le courage, la patience et la confiance en moi même pour pouvoir continuer mes études et arriver à ce stade.

Puis à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à mon promoteur Mr. CHEGRANI Ahmed qui m'a proposé ce sujet. Je le remercie très chaleureusement pour son constant suivie, son aide et ces précieux conseils, qui m'ont beaucoup aidé à réaliser ce modeste travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury qui me font l'honneur de bien juger ce travail.

Je rends hommage à tous mes maîtres et professeurs à partir du primaire, celles et ceux qui m'ont donné goût aux études et en particulier pour les professeurs de département d'Aéronautique, je leur dis du fond du cœur merci et j'espère que ce travail leur soit aussi dédié comme fruit de leur travail.

Je remercie mes parents, qui son la graine de mon existence, pour leur encouragement et leurs sacrifices, à mes frères et mes sœurs. Je vous remercie pour votre confiance, votre soutien. Je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

Je remercie Mohamed pour son réconfort, sa compréhension, son soutien moral surtout dans les moments difficiles durant cette thèse.

Je remercie également tous les amis et camarades de la promotion ainsi à tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce projet surtout Mohamed Taifour Abdelwahab.

Dédicaces

Je dédie ce travail de fin d'études

A mes très chères au monde mes parents qui m'avaient donner tous ce que j'ai besoin.

A mes sœurs Anissa, Houria, Souad.

A mes deux frères Mohamed lamine et Chouaib.

A mes grands parents.

A mes oncles et ses familles surtout mon oncle Farouk et sa femme Nassima.

A mes tantes surtout Akila, Rachida et ses familles.

A toute ma famille surtout Amina, Lamia, Kenza, Fayza, Hadjer, Amina,

Zoulikha et Abd el Karim sans oubliant Abd el hamid.

A tout mes amis de département surtout : Zineb, Halla, Chouaib, Mohcine Abd el wahab, Nadia, Djihad, Ayoub, Ismahane, Younes et Abd el nour

A ma chère sœur Chafika et sa modeste famille.

A mes amis : Nesrine, Brahim, Linda, Dallel, Rachid, Zahira, Kamel, Faycel, Fatouma, Lamia, Radia, Lkheir, Hadjer et spécialement Mohamed.

A tout les Aeronauticiens spécialement la 5 éme année Ingénieur.

Table des matières

<i>Résumé</i>	
<i>Remerciements</i>	
<i>Dédicaces</i>	
<i>Table des matières</i>	
<i>Liste des figures</i>	
<i>Nomenclature</i>	
Introduction générale	1
CHAPITRE I : Méthodes de discrétisation	3
Introduction	3
I.1. Méthode des différences finies	3
I.1.1. L'approche différences finies en une dimension	4
I.1.2. Approximation par différences finies en dimension supérieures	6
I.2. Méthode des éléments finis	11
I.2.1. Principe	12
I.2.2. Etapes de la mise en œuvre	13
I.3. Méthode des volumes finis	13
I.3.1. Principe	14
I.3.2. Les différentes étapes de la mise en œuvre	17
CHAPITRE II : Méthodes itératives	18
Introduction	18
II.1. Rappel d'algèbre linéaire	19
II.1.1. Valeurs propres et vecteurs propres	19
II.1.2. Rayon spectrale	20

II.1.2.1. Définition	20
II.1.2.2. Bornes du rayon spectral	21
II.2. Etude générale	22
II.2.1. La convergence	22
II.2.2. Décomposition de la matrice A	25
II.3. Méthode de JACOBI	27
II.3.1. Principe	27
II.3.1. Algorithme de JACOBI	29
II.4. Méthode de GAUSS-SEIDEL	29
II.4.1. Principe	30
II.4.2. Condition pour la convergence de GAUSS-SEIDEL	31
II.4.3. Algorithme de GAUSS-SEIDEL	31
II.5. Méthode de relaxation	32
II.5.1. Principe	32
II.5.2. Algorithme de relaxation	33
II.5.3. Condition de convergence des méthodes de relaxation	34
II.6. Méthode d'optimisation	35
II.6.1. Principe	35
II.6.2. Direction de descente et choix optimal du pas.....	36
II.6.2.1. Direction de descente	36
II.6.2.2. Méthodes de descente	37
II.6.2.1. Pas de descente optimale	37
II.7. Méthode de Gradient	38
II.8. Méthode de Gradient conjugué.....	39
II.8.1. Directions conjuguées	39
II.8.2. Justification du choix des directions conjuguées	39
II.8.3. Algorithme du Gradient Conjugué	41

II.8.4. Taux de convergence	41
II.9. Méthode de Thomas	42
II.9.1. Principe	42
II.9.2. Algorithme de Thomas	45
II.10. Méthode de décomposition incomplète LU	45
II.10.1.Principe	45
II.10.2. Algorithme.....	46
II.11. Propriétés des méthodes numériques	46
II.11.1.La stabilité	46
II.11.2. La consistance	47
II.11.3. La convergence.....	47
<i>CHAPITRE III : Méthode Multigrille</i>	48
Introduction	48
III.1. Méthode bigrilles	48
III.1.1. Principe de la méthode de deux grilles	49
III.1.2. Algorithme de la méthode deux grilles	52
III.2. Méthode Multigrilles	53
III.2.1. Présentation	53
III.2.2. Généralisation	54
III.2.3. Algorithme de la méthode Multigrille	55
III.2.4. Stratégie de passage intergrilles	56
III.2.5. Approximation initiale sur la grille fine	58
<i>CHAPITRE IV : Ecoulement visqueux incompressible</i>	59
Introduction	59
IV.1. Equations fondamentales de mécanique des fluides	59
IV.1.1. Equation de transport	60
IV.1.1.1. Principe de conservation de la masse	60

IV.1.1.2. Principe de conservation de la quantité de mouvement	60
IV.1.1.3. Conservation de l'énergie	62
IV.2. L'algorithme SIMPLE	63
IV.3. L'algorithme SIMPLER	64
IV.3.1. Principe	64
IV.3.2. Résumé de l'algorithme SIMPLER	64
IV.4. L'algorithme SIMPLEC	65
IV.5. L'algorithme PISO	65
IV.5.1. Principe	65
IV.5.2. Résumé de l'algorithme PISO	66
CHAPITRE V : Résultats et interprétations	67
Introduction	67
V.1. Première partie : Application en deux dimensions	67
V.1.1. Résultats obtenu par le programme (Matlab)	68
V.1.1.1. Le champ de vitesse	68
IV.1.2. Résultats obtenu par le solveur Fluent	69
V.1.2.1. Le résidu	68
V.1.2.2. Le variation de la vitesse	68
V.3. Interprétation	72
V.1. Deuxième partie : Application en trois dimensions	73
V.2.1. Résultats obtenu par le programme (Fortran)	73
V.2.1.1. Les résultats obtenus pour le maillage (10×10×10)	73
1. Le résidu	73
2. La variation de la vitesse	74
V.2.1.2. Les résultats obtenus pour le maillage (18×18×18)	76
1. Le résidu	76
2. La variation de la vitesse	77

V.2.1.2. Les résultats obtenus pour le maillage (34×34×34)	79
1. Le résidu	79
2. La variation de la vitesse	80
V.2.2. Résultats obtenu par le solveur (Fluent)	82
V.2.2.1. Le résidu	82
V.2.2.2. La variation de la vitesse	83
V.2.3. Interprétation	84
1. Les résultats obtenus par le programme Fortran	84
2. Les résultats obtenus par Fluent	84
Conclusion et perspectives	85

Annexe

Références bibliographiques

Liste des figures

Figure I.1 : Discrétisation en différence finie unidimensionnelle.....	4
Figure I.2 : Grilles différence finie bidimensionnelles	7
Figure I.3 : Grilles différence finie tridimensionnelles.....	7
Figure I.4 : Un volume de contrôle pour une grille cartésienne en une dimension	16
Figure I.5 : Un volume de contrôle pour une grille cartésienne en deux dimensions.....	16
Figure I.6 : Un volume de contrôle pour une grille en trois dimensions	17
Figure III.1 : Présentation de la méthode bigrille	49
Figure III.2 : Un cycle bigrille	51
Figure III.3 : Présentation de la méthode multigrilles	54
Figure III.4 : Trois grilles avec V-cycles	57
Figure III.5 : Trois grilles avec W-cycles	54
Figure V.1 : Schéma du problème	67
Figure V.2 : Distribution de la vitesse	68
Figure V.3 : Contour des lignes de courant	68
Figure V.4 : La variation du résidu en fonction des itérations.....	69
Figure V.5 : Champ de vitesse en module	70
Figure V.6 : Contour de champ de vitesse.....	71
Figure V.7 : Schéma éclaté des vecteurs vitesses	71
Figure V.8 : Contour des lignes de courant	72
Figure V.9 : La variation des résidus en fonction de nombre d'itérations.....	73
Figure V.10 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.2$	74
Figure V.11 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.3$	74
Figure V.12 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.8$	75
Figure V.13 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.9$	75

Figure V.14 : La variation des résidus en fonction de nombre d'itérations.....	76
Figure V.15 : Contour de champ de vitesse pour $y = 0.1$	17
Figure V.16 : Contour de champ de vitesse pour $y = 0.2$	49
Figure V.17: Un cycle bigrille	51
Figure V.18 : Présentation de la méthode multigrilles.....	54
Figure V.19 : Trois grilles avec V-cycles	57
Figure V.20 : Trois grilles avec W-cycles	54
Figure V.21: Schéma du problème	67
Figure V.22: Schéma du problème	67
Figure V.23: Schéma du problème	67

Nomenclatures

Les lettres

A : Matrice quelconque	a_l : Elément de la diagonale inférieure
	a_{ij} : Terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A
B : (bottom)	
D : Matrice diagonale	d_{ii} : Terme de la matrice D
	e : Exponentiel, Erreur
E : Est (east)	GS : Gauss Seidel
	GC : Gradient conjuguée
h : Pas de la grille fine	
N : Nord (north)	Nx : Nombre de points selon l'axe x
	Ny : Nombre de points selon l'axe y
	Nz : Nombre de points selon l'axe z
r : Résidu	rmax : Résidu maximum
	r_h : Résidu dans la grille fine
	r_H : Résidu dans la grille grossière
R(x) : Résiduel	S : Sud (south)
u, v, w : Composants du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes	
U_K : Vecteur solution dans la $K^{\text{ème}}$ grille	
u_h : Solution approximée	
U_h : Solution exacte	
U : Matrice triangulaire supérieure	
TDMA : Tridiagonal matrix algorithm	
T : (top)	
SIP : Strongly Implicit Procédure	
SOR : Successive over relaxation	
n : Ordre de la matrice	
Q : Vecteur du second terme	
MG : Multigrilles	
L : Matrice triangulaire inférieure	
	l _{ij} : le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice L
k : Itération	
I_h^h : Opérateur de prolongation	
I_h^h : Opérateur de restriction	
i, j, k : Vecteurs unitaires dans le repère Cartésien	
H : Pas de la grille grossière	

V : Vecteur quelconque

\vec{V} : Vecteur vitesse

X :

Y(x) : solution approché

Yf(x) : Fonctions testes

W : Ouest (west)

Wj(x) : Fonction pondérée

X, Y, Z : Coordonnées cartésiennes

e : East

GS : Gauss Seidel

h : Pas de la grille fine

H : Pas de la grille grossière

i : Ligne de la matrice

j : Colonne de la matrice

J : Jacobi

n : Nombre total des ligne ou des colonnes, nord (north)

s : Sud (south)

w : Ouest (west)

∞ : Infini

ω : Facteur de relaxation

$\rho(A)$: Rayon spectral de la matrice A

γ_i : Elément de la diagonale supérieure

λ : Scalaire

v_1, v_2 : Nombre d'itérations pour l'opération de lissage

F : Frontière, circulation

$^{-1}$: Inverse

(k) : Itération centrale

(k-1) : Itération retardée

(k+1) : Itération avancée

Les exposants

Les lettres grecques

Les indices

GENERAL

INTRODUCTION

Introduction générale

Bien avant l'introduction des ordinateurs, les mathématiciens et les ingénieurs se sont posé la question du calcul approché dans différents contextes. Il peut s'agir d'évaluer la solution d'un système d'équations, d'approcher la courbe d'une fonction connue à partir de ses valeurs en des points, ou d'une fonction inconnue qui est solution d'une équation différentielle.

L'analyse numérique est la branche des mathématiques qui étudie les méthodes permettant de résoudre ces problèmes et analyse leur performance. Ses développements récents sont intimement liés à ceux des moyens de calcul offerts par l'informatique.

Les équations différentielles partielles sont présentes dans tous les domaines de la physique en particulier dans le domaine de l'Aéronautique.

Notre but est de savoir estimer la solution du problème physique par la modélisation ainsi que la simulation pour mieux comprendre.

A cet effet, on traite la résolution des équations de Navier-Stokes qui sont des équations différentielles partielles non linéaires, nous avons opté pour un plan de travail composé de cinq chapitres, en effet :

Dans le premier chapitre, on a commencé par l'étude des différentes méthodes de discrétisation

Le deuxième chapitre traite les différentes méthodes itératives existant pour la résolution des systèmes algébriques linéaires avec les algorithmes spécifiques à chaque.

Introduction générale

Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode bigrille et ensuite la méthode Mutigrille.

Le quatrième chapitre traite l'écoulement incompressible visqueux et les méthodes de découplage pression-vitesse.

Dans le dernier chapitre, on présente les différents résultats obtenus à l'aide des programmes Matlab et Fortran qui sont comparés aux résultats obtenus lors de la simulation par le logiciel Fluent.

DISCRETION

DE

METHODS

CHAPTER I :

Introduction :

Les équations aux dérivées partielles sont présentes dans toutes les branches de la physique et de l'ingénierie (thermique, mécanique des fluides, électricité, génie chimique, biologie, géologie,....ect) cela rend la résolution de ces dernières très complexe. On fait appel aux méthodes numériques, en choisissant la méthode qui convient mieux au problème traité.

Le principe des méthodes numériques est de remplacer le système d'équations différentielles complexes par un système d'équations algébriques discrétisés. Pour obtenir un système discrétisé, nous avons deux grandes familles de méthodes de discrétisation :

- Les méthodes d'approximation des équations. Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis) ;
- Les méthodes d'approximation des solutions. Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes. Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (la méthode des éléments finis).

1.1. Méthode des différences finies :

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences finies ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Avantages :

- Simplicité de mise en œuvre ;
- Encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et faible cout de calcul.

Inconvénients :

- Le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation ;
- L'apparition d'instabilités numériques ;
- Difficulté pour traiter les géométries plus complexes ;
- Absence de résultats de majoration d'erreurs ;
- Difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue.

1.1.1. L'approche différences finies en une dimension :

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies en une dimension, on discrétise l'intervalle continu en un nombre fini de points.

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées des solutions exactes aux points de la discrétisation.

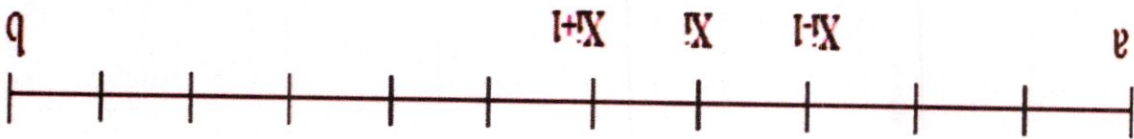


Figure 1.1 : Discretisation en différence finie unidimensionnelle.

Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences finies. Le type de conditions aux limites conditionne le nombre d'inconnues du problème discret. Dans le cas de conditions de Dirichlet, la solution est fixée, en ces points, les

valeurs sont connues. Dans tous les autres cas de conditions aux limites, la valeur de la solution reste inconnue et fait partie du vecteur inconnu.

Le développement en série de Taylor, autour du point i du maillage, de la variable inconnue, est donné par les relations :

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \frac{1}{1} \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_i - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left(\frac{d^3\phi}{dx^3} \right)_i + 0((\Delta x)^4) \quad (I.1)$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{1}{1} \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_i + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left(\frac{d^3\phi}{dx^3} \right)_i + 0((\Delta x)^4) \quad (I.2)$$

$$\text{Avec : } \Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (I.1), ce qui conduit à :

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i = \frac{\Delta x}{\phi_i - \phi_{i-1}} \quad (I.3)$$

Ceci signifie que la dérivée d'ordre un, au point i , est approchée par différences finies inverse d'ordre un. En retenant les premiers deux termes du développement de la relation

(I.2) on obtient :

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i = \frac{\Delta x}{\phi_{i+1} - \phi_i} \quad (I.4)$$

En soustrayant la relation (1.1) de la relation (1.2) on obtient l'approximation par différences finies centrales d'ordre deux :

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (1.5)$$

En additionnant les relations (1.1) et (1.2) on obtient la formule de deuxième ordre suivante :

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_i = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (1.6)$$

1.1.2. Approximation par différences finies en dimension supérieure :

La méthode des différences finies a l'avantage d'être facile à exposer. Nous pouvons présenter son application aux problèmes multidimensionnels. Cela ne sera pas le cas des méthodes d'éléments finis pour lesquelles un exposé plus long, réparti sur plusieurs chapitres, sera nécessaire.

Comme en dimension un, la première étape consiste à discrétiser le domaine. C'est dans l'application aux problèmes bidimensionnels et tridimensionnels que la méthode des différences finies présente sa plus sévère limitation. En effet, elle n'est bien adaptée qu'à la discrétisation de domaines rectangulaires ou parallélépipédiques par des maillages formés de grilles perpendiculaires. Les dérivées partielles dans chaque direction d'axe étant approchées comme les dérivées en dimension un.

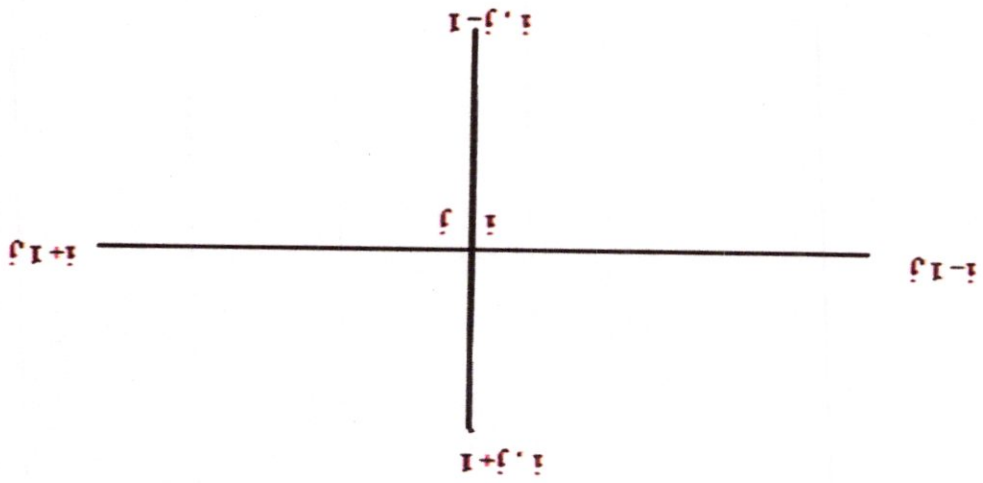


Figure 1.2 : Grilles difference finie bidimensionnelles.

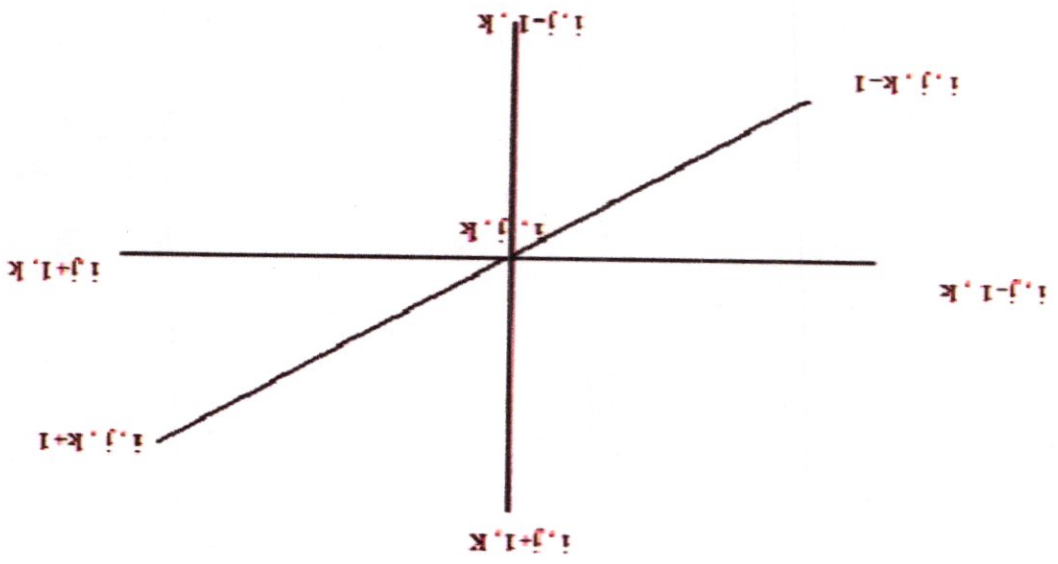


Figure 1.3 : Grilles difference finie tridimensionnelles.

Discrétisation géométrique :

Dans le cas de domaines rectangulaires (parallélépipédiques en trois dimension) de côtés parallèles aux axes, on construit une grille de discrétisation en différences finies par quadrillage selon les deux (ou trois) directions d'axes. On notera Δx le pas de discrétisation selon x et de même Δy et Δz soit respectivement les pas de discrétisation selon y et z .

On obtient ainsi aux intersections des lignes du quadrillage les nœuds de coordonnées (x_i, y_j, z_k) du maillage en différences finies. Cette technique de maillage est généralisée aux assemblages de rectangles (ou de parallélépipèdes) ainsi qu'aux domaines se ramenant par bijection régulière à un rectangle (ou un parallélépipède). Par contre dans le cas de géométries complexes les discrétisations par éléments finis sont mieux adaptées.

Quelques formules simples d'approximation des dérivées partielles par différences finies en deux dimensions:

En deux dimensions, ϕ_{ij} l'approximation de la valeur exacte $\phi(x_i, y_j)$ pour le point d'indice i, j de la grille.

- Différences finies directes :
- on a les approximations suivantes :

$$(1.7) \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \quad \left(\frac{d\phi}{dy}\right)_{ij} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

- Différences finies régressives :

$$(1.8) \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{ij} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \left(\frac{d\phi}{dy}\right)_{ij} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y}$$

- Différences finies centrées :

On obtient (comme en une dimension) une approximation du second ordre :

$$(1.9) \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \left(\frac{d\phi}{dy}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

L'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies :

$$(1.10) \quad \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad \left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

On en déduit, par double différentiation, l'approximation centrée d'ordre deux du laplacien :

$$(1.11) \quad \Delta\phi(x_i, y_j) = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Quelques formules simples d'approximation des dérivées partielles par différences finies en trois dimensions:

En trois dimensions, $\phi_{i,j,k}$ l'approximation de la valeur exacte $\phi(x_i, y_j, z_k)$ pour le point d'indice i, j, k de la grille.

- Différences finies directes :
 On a les approximations suivantes :

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta x}{\phi_{l+1,j,k} - \phi_{l,j,k}}, \left(\frac{dy}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta y}{\phi_{l,j+1,k} - \phi_{l,j,k}}, \left(\frac{dz}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta z}{\phi_{l,j,k+1} - \phi_{l,j,k}} \quad (1.12)$$

- Différences finies inverses :

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta x}{\phi_{l,j,k} - \phi_{l-1,j,k}}, \left(\frac{dy}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta y}{\phi_{l,j,k} - \phi_{l,j-1,k}}, \left(\frac{dz}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{\Delta z}{\phi_{l,j,k} - \phi_{l,j,k-1}} \quad (1.13)$$

- Différences finies centrées :

On obtient (comme en une dimension) une approximation du second ordre :

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{2\Delta x}{\phi_{l+1,j,k} - \phi_{l-1,j,k}}, \left(\frac{dy}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{2\Delta y}{\phi_{l,j+1,k} - \phi_{l,j-1,k}}, \left(\frac{dz}{d\phi}\right)_{l,j,k} = \frac{2\Delta z}{\phi_{l,j,k+1} - \phi_{l,j,k-1}} \quad (1.14)$$

L'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies :

$$\left(\frac{d^2x}{d\phi^2}\right)_{l,j,k} = \frac{(\Delta x)_z}{\phi_{l-1,j,k} - 2\phi_{l,j,k} + \phi_{l+1,j,k}}, \left(\frac{d^2y}{d\phi^2}\right)_{l,j,k} = \frac{(\Delta y)_z}{\phi_{l,j-1,k} - 2\phi_{l,j,k} + \phi_{l,j+1,k}}, \left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right)_{l,j,k} = \frac{(\Delta z)_z}{\phi_{l,j,k-1} - 2\phi_{l,j,k} + \phi_{l,j,k+1}} \quad (1.15)$$

On en déduit, par double différentiation, l'approximation centrée d'ordre deux du laplacien

$$\Delta\phi(x_i, y_j, z_k) = \frac{\phi_{i-1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j,k-1} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j,k+1}}{(\Delta z)^2} + \frac{\phi_{i,j-1,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j+1,k}}{(\Delta y)^2} \quad (I.16)$$

I.2. Méthode des éléments finis :

Le principe mathématique est basé sur les méthodes suivantes :

- Méthodes variationnelles (minimisation d'une fonctionnelle) ;
- Méthodes des résidus pondérés.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie.

Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à l'autre mais reste en général faible.

Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

Avantages :

- Traitement possible de géométries complexes ;
- Détermination plus naturelle des conditions aux limites ;

- Possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Inconvénients :

- Formalisme mathématique plus compliqué et plus difficile à mettre en œuvre ;
- Coûteux en stockage mémoire (matrices pleines) et en temps de calcul (inversion);
- Caractère conservatif des équations non forcément assuré.

1.2.1. Principe :

La méthode de résidus pondérés de Galerkin est basée sur l'intégrale du résiduel ou par la multiplication de $R(x)$ par la fonction pondérée (x) ($j = 1, 2, \dots$), intégrant les bornes de l'intégration, et plaçant les intégrales des résiduels pondérés égaux à zéro pour donner des équations pour l'évaluation des coefficients C_j des fonctions testes $y_j(x)$.

En principe, toutes les fonctions peuvent être utilisées comme fonctions de pondérée $W_j(x)$. Galerkin a montré en se basant sur ces fonctions et les fonctions testes $y_j(x)$ de la solution approchée $y(x)$ résulte particulièrement en terme de puissances. Ce choix est présenté dans l'analyse suivante.

Les opérations dans la méthode des résidus pondérés de Galerkin sont :

1. Déterminer l'équation différentielle qui doit être résolue.

2. Supposer que la solution est donnée par :

$$\tilde{y}(x) \approx y(x) = \sum_{i=1}^I C_i y_i(x) \quad (I.17)$$

Choisir la formule fonctionnelle des fonctions testes, et s'assurer qu'ils sont linéairement indépendant et remplir les conditions aux limites.

3. Introduire la solution approchée $y(x)$ dans l'équation différentielle et définir le résiduel $R(x)$.

4. Choisir la fonction pondérée $W_j(x)$.

5. Poser les intégrales des résiduels pondérés égales à zéro

$$\int_{x_1}^{x_2} W_j(x) R(x) dx = 0 \quad (1.18)$$

6. Intégrer Equation (1.18) et résoudre le système des intégrales résiduelles pondérées avec les coefficients $C_i (i=1, 2, \dots)$.

1.2.2. Etapes de la mise en œuvre :

- Discrétisation du domaine en un nombre fini d'éléments.

- Choix d'un modèle d'interpolation (variation de la variable ϕ sur l'élément) ;

- Ecriture des équations modèles sous forme algébrique au niveau local (dans un

élément) : détermination des vecteurs et matrices caractéristiques;

- Assemblage des vecteurs et matrices locaux en un vecteur global Q et une

matrice globale A ;

- Résolution du système $A\phi = Q$.

1.3. Méthode des volumes finis :

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et elle est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie.

Avantage :

- Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage ;

- Mise en œuvre relativement simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangles en trois dimensions) ;

- La méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, de traiter des géométries complexes;

- Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande).

Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence.

1.3.1. Principe :

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle.

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire ϕ , valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$(1.19) \quad \oint (\sigma \nabla \phi) \cdot \underline{dA} = \oint (\Gamma \phi \text{ grad} \phi) \cdot \underline{dA} + \int_{V^c} S \phi \, dV$$

Où: p : la densité du fluide;

$$\underline{V} = (V_x \hat{i} + V_y \hat{j}): \text{le vecteur vitesse ;}$$

\underline{A} : le vecteur l'aire de la surface;

Γ_ϕ : le coefficient de diffusion de la grandeur ϕ

$$\text{grad } \phi = \underline{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j}$$

S_ϕ : le terme source (la source par unité de volume)

L'équation (I.19) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse).

La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_{N_{\text{faces}}}^f p_f v_f \phi_f A_f = \sum_{N_{\text{faces}}}^f \Gamma_\phi (\nabla \phi)_n A_f + s_\phi V \quad \text{(I.20)}$$

Où: N_{faces} : le nombre de face du volume de contrôle ;

ϕ_f : la valeur de ϕ transférée par convection à travers l'interface ;

v_f : le flux de masse à travers l'interface ;

$$A_f: (|\underline{A}| = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}): \text{l'aire de l'interface;}$$

$(\nabla \phi)_n$: la valeur de $\nabla \phi$ normal à l'interface ;

V : le volume de contrôle.

Les figure (I.4, I.5 et I.6) présente le volume de contrôle pour une maille en un, deux et trois dimensions

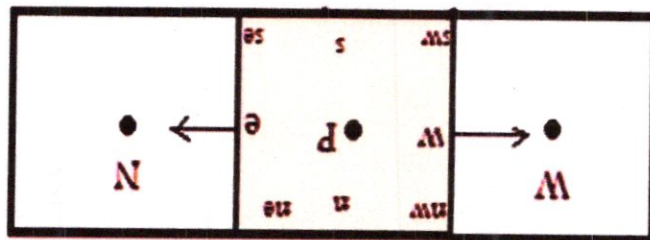


Figure I.4 : Un volume de contrôle pour une grille en une dimension.

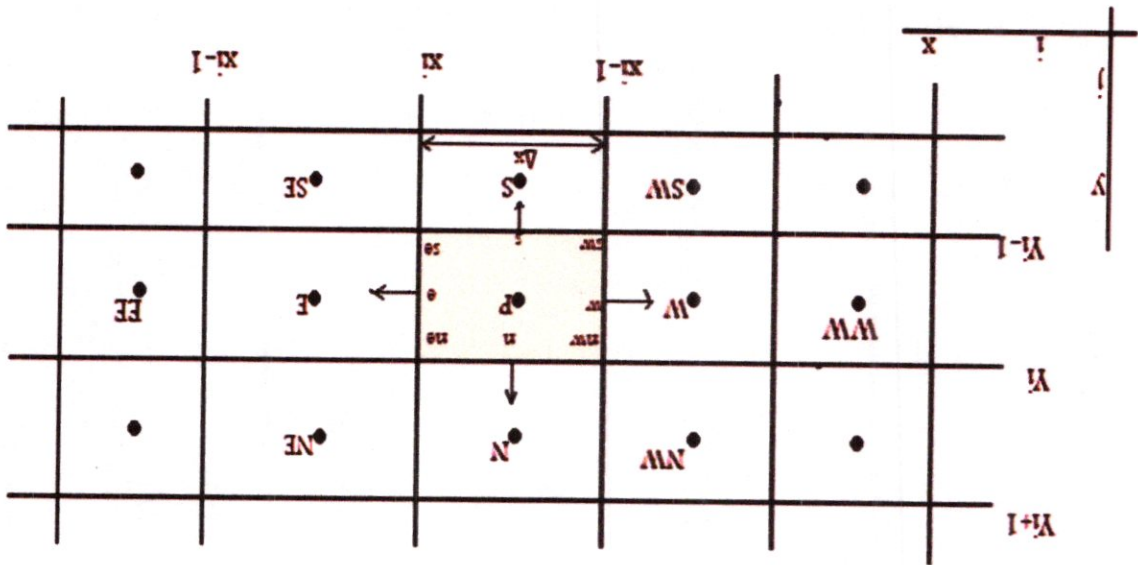


Figure I.5 : Un volume de contrôle pour une grille cartésienne en deux dimensions

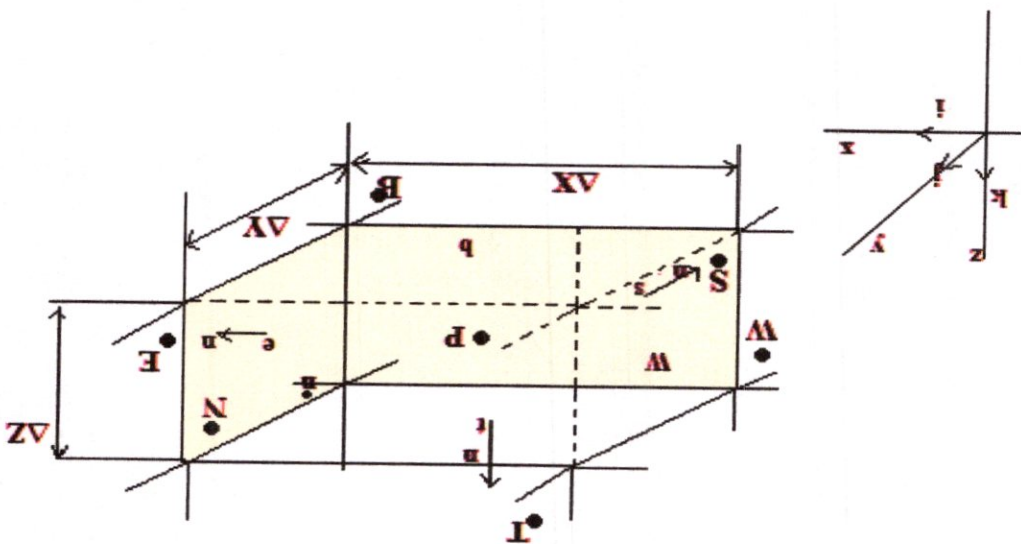


Figure I.6 : Un volume de contrôle pour une grille en trois dimensions

1.3.2. Les différentes étapes de la mise en œuvre :

- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les nœuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle ;
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un nœud donné sont évaluées en approchant la variation de F par des profils ou des lois d'interpolation entre les nœuds voisins du point considéré ;
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de ϕ aux nœuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

CHAPTER II :

METHODS

ITERATIVES

Introduction :

Dans ce chapitre, on considère la résolution du système linéaire de la forme :

$$AX=b, \text{ où } X \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \quad (II.1)$$

Où A étant une matrice $(n \times n)$ de rang n , inversible, mais au lieu de chercher un algorithme permettant d'obtenir la solution directement, si elle existe, on examine des procédés d'itérations qui peuvent créer une suite convergente de vecteurs (X_n) , ayant pour limite la solution désirée.

Ce type de méthode est très utilisé pour des problèmes de grande taille, lorsque la matrice A contient beaucoup de coefficients nuls hors de sa diagonale.

En d'autres termes, nous verrons la généralisation de cette résolution à un système d'équations d'ordre n . Le principe de ces méthodes est en premier lieu, de mettre le système sous la forme : $X = F(X)$

En second lieu de choisir un vecteur estimé initial arbitraire $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_n^{(0)})^t$ (qui réellement représente la 1^{ère} estimation de la solution recherchée) de la solution exacte : $X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$

du système (II.1) et de générer une séquence de vecteurs :

$$X^{(k+1)} = F^{(k)}(X^{(k-1)}, \dots, X^{(k-1)}) \quad (II.2)$$

Si la fonction d'itération $F^{(k)}$ est indépendante de l'itération k , on dit que l'on a une itération stationnaire, dans le cas contraire, elle est dite non-stationnaire.

Si le calcul du vecteur $X^{(k+1)}$ demande la connaissance des $X^{(k)}$ vecteurs estimés qui le précèdent, on a une formule itérative multi pas.

Une fois que la convergence est vérifiée, ce processus de calcul sera arrêté et la solution recherchée sera X_n .

II.1 Rappels d'Algèbre linéaire :

II.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres :

En étudiant des transformations linéaires de la forme :

$$Y = A \times X$$

(II.3)

Où :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de connaître quels sont les vecteurs , s'ils existent, qui gardent la même direction après transformation par l'opération A.

Comme deux vecteurs non nuls ont même direction, si est seulement si, l'un est un multiple scalaire de l'autre alors on cherche les vecteurs X dont les images Y par l'opérateur A sont de la forme :

$$Y = \lambda \times X$$

(II.4)

Où λ est un scalaire.

On cherche les vecteurs tels que :

$$A \times X = \lambda \times X$$

(II.5)

Ou encore :

$$(A - \lambda I) \times X = 0$$

(II.6)

C'est un système d'équations linéaires et homogènes en λ du type :

$$(II.7) \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et l'on sait qu'une solution est différente du zéro existe si et seulement si :

$$(II.8) \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

Or :

$$(II.9) \quad \det(A - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n - B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} \dots + (-1)^n \det(A)] = 0$$

Où les B_m ($m = 1, \dots, n-1$) sont $(-1)^m$ fois la somme de tous les mineurs principaux d'ordre m de A .

Pour les valeurs de λ qui vérifient cette équation, l'équation (II.9) est vérifiée et uniquement pour ces valeurs.

Ces racines de l'équation caractéristique sont appelées valeurs propres de la matrice et les vecteurs solutions correspondants du système (II.7) sont appelés vecteurs propres.

II.1.2. Rayon spectral :

II.1.2.1. Définition :

Soit A (n, n) une matrice complexe dont les n valeurs propres sont notés λ_i , alors :

$$(II.10) \quad \rho(A) = \max |\lambda_i| \quad (1 \leq i \leq n)$$

$\rho(A)$: Le rayon spectral de la matrice A .

Géométriquement, si toutes les valeurs propres de la matrice A sont représentées dans le plan complexe, alors $\rho(A)$ est le rayon du plus petit disque centré sur l'origine et contenant toutes les valeurs propres de la matrice A .

II.1.2.2. Bornes du rayon spectral :

Théorème de Guershgorin :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice complexe :

$$\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II. 11})$$

$$\Lambda_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II. 12})$$

Toutes les valeurs propres de la matrice ont des images dans le plan complexe situées à l'intérieur de l'union des n cercles de centre a_{ii} et de rayon Λ_i (domaine D_1) et à l'intérieur de l'union des n cercles de centre a_{ii} et de rayon Λ_j (domaine D_2), les valeurs propres sont telle que :

$$\lambda_k \in D_1 \cap D_2 .$$

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre correspondant, par définition de λ , on a :

$$(\lambda - a_{ii})X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} X_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II. 13})$$

Normalisons X afin que sa composante de plus grand module X_r soit égale à 1.

et :

$$X^{(k)} = T X^{(k-1)} + V \quad (II.26)$$

En soustrayant les deux équations précédentes, on obtient :

$$e^{(k)} = T e^{(k-1)} \quad (II.27)$$

Soit pour $k=0,1,2,\dots$:

$$e^{(1)} = T e^{(0)} ; e^{(2)} = T e^{(1)} ; e^{(3)} = T e^{(2)} \text{ etc...} \quad (II.28)$$

Et :

$$e^{(k)} = T e^{(k-1)} = T^k e^{(0)} \quad (II.29)$$

La convergence de ce processus est assurée si, quelque soit $e^{(0)}$ (donc quelque soit $X^{(0)}$), nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \quad (II.30)$$

Où :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} e^{(0)} = 0 \quad \forall e^{(0)} \quad (II.31)$$

Ce qui revient à dire que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} = 0 \quad (II.32)$$

où zéro représente la matrice nulle.

La suite définie par $X^{(0)} \in C^n$ et l'équation (II.23) converge vers :

$$X^* = (I - T)^{-1} V \quad (II.33)$$

quelque soit $X^{(0)}$ si et seulement si :

$$\rho(T) < 1.$$

D'une manière générale, on a :

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (\text{II.34})$$

Une condition suffisante de convergence de l'équation (II.23) est telle que :

$$\|T\| \leq 1 \quad (\text{II.35})$$

On doit avoir obligatoirement avoir :

$$\rho(T) < 1.$$

Cette condition sur une norme de T nous fournit une condition de convergence du processus itératif.

II.2.2. Décomposition de la matrice A :

Il est évident que nous devons choisir une matrice T qui assure la convergence et telle que :

$$AX = TX + V \quad (\text{II.36})$$

Qui ne soit pas chère à calculer.

Nous allons chercher des décompositions de la forme $(M - N)$ de la matrice A de telle façon que M soit facilement inversible et vérifie :

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \quad (\text{II.37})$$

Ou ce qui est suffisant :

$$\|M^{-1}N\| < 1.$$

Définissons les matrices D, L, U telles que :

$d_{ii} = a_{ii} \quad \forall i$ D matrice diagonale.

$l_{ij} = -a_{ij} \quad \text{pour } i > j$
 $l_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \leq j$ L matrice inférieure.

$u_{ij} = -a_{ij} \quad \text{pour } j > i$
 $u_{ij} = 0 \quad \text{pour } j \leq i$ U matrice supérieure.

Nous aboutissons à la relation suivante:

$$A = D - L - U \tag{II.38}$$

Qui correspond aux trois types de décompositions suivantes :

- *Méthode de JACOBI :*

$$A = M - N \tag{II.39}$$

Où : $M = D$ et $N = L + U$

$$T_j = D^{-1}(L + U) \tag{II.40}$$

- *Méthode de GAUSS-SEIDEL :*

$$A = M - N$$

Où : $M = D - L$ et $N = U$

$$T_{Gs} = (D - L)^{-1}U \tag{II.41}$$

Ce processus de calcul est répété jusqu'à ce que la différence entre deux vecteurs successifs soit inférieure à l'erreur tolérée.

$$|X^i - X^{i-1}| \leq \varepsilon \quad (II.48)$$

Nous dirons que le processus a convergé vers la solution.

Il faut signaler que la convergence du processus itératif ne dépend pas du vecteur initial choisi et qu'une erreur de calcul n'influe pas sur le résultat final. Chaque vecteur peut être considéré comme un nouveau vecteur initial.

Dans certains cas, il se peut que le processus diverge. Nous citerons ci-après quelques conditions suffisantes mais pas nécessaires, pour lesquelles le processus converge si l'une d'elles est vérifiée.

$$1. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < 1 \quad (1 < i < n) \quad (II.49)$$

$$2. \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < 1 \quad (1 < j < n) \quad (II.50)$$

$$3. |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (1 < i < n) \text{ et } (j \neq i) \quad (II.51)$$

Cette dernière condition suggère que les termes diagonaux de la matrice A sont fortement dominants. Il serait plus judicieux de procéder à des permutations sur les lignes et les colonnes afin de maximiser les éléments de la diagonale.

II.3.2. Algorithme de JACOBI :

1. Données : $n, a_{ij}, b_i, \varepsilon, X_i^{(0)}$ $(1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq n)$

2. Pour $(1 \leq i \leq n)$ $\left\{ \begin{array}{l} d_i = a_{ii} \\ \text{Pour}(1 \leq j \leq n) \\ b_i = b_i / d_i \\ a_{ij} = 0 \end{array} \right. \quad a_{ij} = -a_{ij} / d_i$

3. Tant que $(r_{\max} > \varepsilon)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour}(1 \leq i \leq n) \left\{ \begin{array}{l} x_i = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si}(r_i > r_{\max}) \text{ alors } r_{\max} = r_i \end{array} \right. \\ \text{Pour}(1 \leq i \leq n) \quad x_i^0 = x_i \end{array} \right.$

Nous arrêtons les calculs pour : $(r_{\max} < \varepsilon)$

4. Ecrivons les résultats x_i pour $(1 \leq i \leq n)$

II.4. Méthode de GAUSS-SEIDEL :

Cette méthode suit le même principe que la précédente. La seule différence réside dans la mise à jour dans le calcul de la valeur de x_i par les résultats des k valeurs des x_k qui l'ont précédé. Cette modification permet au processus de converger plus rapidement que la méthode de Jacobi.

II.4.2. Condition pour la convergence de GAUSS-SEIDEL :

La formule itérative (II.53) permet de définir la matrice d'itération de Gauss-Seidel par :

$$T_{GS} = (D - L)^{-1} U \tag{II.58}$$

Et le vecteur V par :

$$V_{GS} = (D - L)^{-1} b \tag{II.59}$$

La méthode de Gauss-Seidel convergera si $\|T_{GS}\| < 1$, ce qui se traduit par :

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < a_{ii} \quad \text{pour } i=1, n \tag{II.60}$$

II.4.3. Algorithme de GAUSS-SEIDEL :

1. Données : $n, a_{ij}, b_i, \varepsilon, X_i^{(0)}$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$)

2. Pour ($1 \leq i \leq n$) $\left\{ \begin{array}{l} d0 = a_{ii} \\ \text{Pour}(1 \leq j \leq n) \\ b_i = b_i / d0 \\ a_{ii} = 0 \end{array} \right. \quad a_{ij} = -a_{ij} / d0$

3. Tant que ($r \text{ max} > \varepsilon$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour}(1 \leq i \leq n) \\ \left\{ \begin{array}{l} x_i = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si } (r_i > r \text{ max}) \text{ alors } r \text{ max} = r_i \\ x_i^0 = x_i \end{array} \right. \end{array} \right.$

Nous arrêtons les calculs pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (r \max < \varepsilon) \\ \text{Ou} \\ \frac{r \max}{|x_i|} < \varepsilon \end{array} \right.$$

4. Finalement, nous écrivons les résultats.

II.5. Méthode de relaxation :

II.5.1. principe :

Cette méthode est une méthode d'itération qui a les mêmes avantages que la méthode de Gauss-Seidel mais qui converge plus rapidement. Pour cela nous introduisons le paramètre ω différent de zéro et posons :

$$\bar{X}^{(k+1)} = X^k + \omega (X^{(k+1)} - X^{(k)}) \quad (II.61)$$

Où $X^{(k+1)}$ est un vecteur estimé par la méthode de Gauss-Seidel.

Si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

Si $\omega > 1$, on détermine la méthode de sur-relaxation.

Si $\omega < 1$, on détermine la méthode de sous-relaxation.

L'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel nous permet d'obtenir la solution par:

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (II.62)$$

$i = 1, n$

$$3. \text{ Tant que } (r \max > \varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (1 \leq i \leq n) \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_i + \omega \times \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \right) \\ r_i = |x_i^0 - x_i| \\ \text{Si } (r_i > r \max) \text{ alors } r \max = r_i \\ x_i^0 = x_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous arrêtons les calculs pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} (r \max < \varepsilon) \\ \text{Ou} \\ \frac{r \max}{\|x_i\|} < \varepsilon \end{array} \right.$$

4. Ecrivons les résultats x_i pour $(1 \leq i \leq n)$

II.5.3. Condition de convergence des méthodes de relaxation :

Nous cherchons les limites du facteur de relaxation pour lesquelles la convergence de la méthode est assurée. Nous étudierons trois cas :

1. Cas d'une matrice quelconque.
2. Cas d'une matrice symétrique définie positive.
3. Cas d'une matrice tridiagonale.

Alors :

$$E(X) = \frac{1}{2} r^t A^{-1} r \quad (II.70)$$

Le fonctionnel (II.68) est une forme quadratique définie positive dont le minimum unique se trouve au point annulant le gradient de $E(X)$.

De l'équation (II.68) on, obtient :

$$\nabla E(X) = \left\{ \frac{\partial E(X)}{\partial X} \right\} = -(b - Ax) = -r \quad (II.71)$$

Donc, le minimum de $E(X)$ correspond au point :

$$b - Ax = 0 \quad (II.72)$$

Autrement dit la solution du système algébrique correspond au vecteur minimisant $E(X)$. On peut ramener la résolution du système algébrique à celui de la minimisation de la forme quadratique (II.70).

II.6.2. Direction de descente et choix optimal du pas :

II.6.2.1 Direction de descente :

Si $E(X)$ est continue et continument différentiable, alors au voisinage du point $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, on fait le développement de Taylor suivant :

$$E(X^{(k)} + \Delta X) = E(X^{(k)}) + \Delta X \nabla E(X^{(k)}) + \dots \quad (II.73)$$

Si ΔX est petit on peut négliger les termes d'ordre supérieur.

On remarque que si :

$$\Delta X \nabla E(X^{(k)}) < 0 \quad (II.74)$$

Alors :

$$E(X^{(k)} + \Delta X) < E(X^{(k)}) \quad (II.75)$$

Une direction vérifiant l'équation (II.74) est dite direction de descente au point $X^{(k)}$ et pour la fonction du type $E(X)$.

II.6.2.2. Méthodes de descente :

Parmi les méthodes de minimisation d'une fonction, la méthode de descente, opérant une recherche unidimensionnelle dans une direction de descente qui a pour formule générale :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} \quad (II.76)$$

Où :

$P^{(k)}$ est une direction au point $X^{(k)}$ pour $E(X)$.

$\alpha^{(k)}$ est un scalaire dont la valeur reste à définir.

II.6.2.3. Pas de descente optimale :

Cherchons la valeur du pas $\alpha^{(k)}$ minimisant la fonction $E(X^{(k+1)})$ dans la direction de descente $P^{(k)}$, on a :

$$E(X^{(k+1)}) = E(X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)}) \quad (II.77)$$

De l'équation (II.68), on obtient :

$$E(X^{(k+1)}) = \frac{1}{2} (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X^*)^t A (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X^*) \quad (II.78)$$

La fonction exprimée par l'équation (II.68) sera minimale pour $\alpha^{(k)}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(X^{(k+1)})}{\partial \alpha^{(k)}} &= (P^{(k)})^t A (X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} - X^*) = 0 \\ &= (P^{(k)})^t (AX^{(k)} - b + A \alpha^{(k)} P^{(k)}) = 0 \\ &= (P^{(k)})^t (-r^{(k)} + A \alpha^{(k)} P^{(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (II.79)$$

La valeur de $\alpha^{(k)}$ est définie telle que :

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0 \tag{II.80}$$

Qui est le pas optimal dans la direction $P^{(k)}$ pour un résidu $r^{(k)}$ donnée par :

$$\alpha^{(k)} = \frac{P^{(k)T} r^{(k)}}{P^{(k)T} A P^{(k)}} \tag{II.81}$$

La formule générale de la méthode de descente avec pas optimum comme solution du système algébrique linéaire est exprimée par :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{P^{(k)T} r^{(k)}}{P^{(k)T} A P^{(k)}} P^{(k)} \\ \text{où :} \\ r^{(k)} = b^{(k)} - A X^{(k)} \end{cases} \tag{II.82}$$

Les méthodes de descente sont multiples et qui se différencient par le choix de la direction de descente $P^{(k)}$.

II.7.Méthode du Gradient :

On choisit la direction de minimisation de la fonction $E(X)$ par :

$$P^{(k)} = -\nabla E(X^{(k)}) \tag{II.83}$$

C'est-à-dire que l'on prend pour $P^{(k)}$ la direction de plus grande diminution ponctuelle de la fonction. De l'équation (II.71), on remarque que $P^{(k)}$ est colinéaire à $r^{(k)}$ et l'algorithme (II.82) peut s'écrire sous la forme la plus générale suivante :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{r^{(k)T} A r^{(k)}} r^{(k)} \\ r^{(k)} = b - A X^{(k)} \\ \left| \frac{r^{(k+1)} - r^{(k)}}{r^{(k)}} \right| < \varepsilon \end{cases} \quad k=0, \dots, k_{\max} \tag{II.84}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k)} = X^{(k)} + \alpha^{(k)} (r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)}) \tag{II.87}$$

La valeur de $\beta^{(k)}$ minimisant $E(X^{(k+1)})$ vérifie :

$$\frac{\partial E(X^{(k+1)})}{\partial \beta^{(k)}} = 0 \quad (\text{II.88})$$

Soit :

$$-P^{(k-1)} r^{(k)} + \alpha^{(k)} P^{(k-1)t} A r^{(k)} + \alpha^{(k)} \beta^{(k)} P^{(k-1)t} A P^{(k-1)} = 0 \quad (\text{II.89})$$

Comme :

$$P^{(k-1)} r^{(k)} = 0 \quad (\text{II.90})$$

On peut obtenir la valeur optimale de $\beta^{(k)}$ par :

$$\beta^{(k)} = \frac{-P^{(k-1)t} A r^{(k)}}{P^{(k-1)t} A P^{(k-1)}} \quad (\text{II.91})$$

On peut déduire que :

$$\beta^{(k)} P^{(k-1)t} A P^{(k-1)} + P^{(k-1)t} A r^{(k)} = 0 \quad (\text{II.92})$$

Soit :

$$P^{(k-1)t} A (r^{(k)} + \beta^{(k)} P^{(k-1)}) = 0 \quad (\text{II.93})$$

A partir de l'équation (II.86), on note que :

$$P^{(k-1)t} A P^{(k)} = 0 \quad (\text{II.94})$$

Cette expression représente bien des directions A-conjuguées.

Nous avons démontré que la direction $P^{(k)}$ A-conjuguée selon l'équation (II.94) était bien celle qui minimisait la fonctionnelle $E(X^{(k+1)})$. Nous avons aussi calculé le choix du scalaire $\beta^{(k)}$ de l'équation (II.86) qui définit $P^{(k)}$ dans le plan déterminé par $(r^{(k)}, P^{(k)})$. Notons aussi que selon (II.86) :

$$r^{(k)t} P^{(k)} = r^{(k)t} r^{(k)} + \beta^{(k)} r^{(k)t} P^{(k-1)} \quad (\text{II.95})$$

Le second terme du deuxième membre étant nul, on a :

$$r^{(k)T} p^{(k)} = r^{(k)T} r^{(k)} \quad (II.96)$$

II.8.3. Algorithme du Gradient Conjugué :

1. Données : $A, b, k_{\max}, X^{(0)}, \varepsilon$
2. Calculer : $r^{(0)} = b - A X^{(0)}$

$$p^{(0)} = r^{(0)}$$

$$3. \left. \begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{p^{(k)T} r^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} \\ X^{(k+1)} &= X^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \\ r^{(k+1)} &= b - A X^{(k+1)} \\ \beta^{(k)} &= \frac{r^{(k+1)T} r^{(k+1)}}{r^{(k)T} r^{(k)}} \\ p^{(k+1)} &= r^{(k+1)} + \beta^{(k)} p^{(k)} \end{aligned} \right\} k=0,1,\dots,k_{\max}$$

4. Arrêter quand:

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} < \varepsilon$$

II.8.4. Taux de convergence :

On montre que l'algorithme du gradient conjugué appliqué à la résolution d'un système algébrique linéaire d'ordre n converge au maximum en plus de n itérations.

En effet à cause des erreurs d'arrondi dans les calculs des directions conjuguées, on n'obtient pas la solution exacte en n itérations. Toutefois, on montre que le nombre d'itérations nécessaires pour passer à :

$$\frac{E(X^k)}{E(X^{(0)})} < \varepsilon \quad (II.97)$$

Est proportionnel à la racine carrée du conditionnement.

La méthode du gradient nécessite un nombre d'itérations proportionnel à $\text{Cond}(A)$. Alors que celle du gradient conjugué ou le nombre d'itération est proportionnel à la racine carrée de $\text{Cond}(A)$.

II.9. Méthode de Thomas :

Cette méthode permet de résoudre un système de la forme :

$$Ax = y \quad (\text{II.98})$$

où A est une matrice tri diagonale, Alors l'algorithme de Gauss peut être simplifié, en tenant compte de la structure particulière de A .

Adoptant pour les éléments non nuls de A , la notation suivante :

$$A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n & \end{bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

Ce qui signifie que A contient $(3 \times n - 2)$ termes non nuls dans trois vecteurs a, b, c ayant respectivement $(n - 1)$, (n) et $(n - 1)$ éléments, par conséquent $(n^2 - 3n + 2)$ éléments nuls.

II.9.1. principe :

Normalisons la première ligne du système (c'est à dire remplacer le premier terme de la diagonale par l'unité en divisant la première ligne par b_1) :

II.9.2. Algorithme de Thomas :

Soit la notation a, b, c définie en (II.99);

1. Passage d'une matrice tri diagonale à une matrice bi diagonale :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c_1}{b_1} \\ \gamma_i &= \frac{c_i}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} & i=2, n-1 \\ \beta_1 &= \frac{y_1}{b_1} \\ \beta_i &= \frac{y_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} & i=2, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.105})$$

1- Résolution du système à matrice bi diagonal (cas particulier d'un système à matrice triangulaire supérieure):

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \beta_n \\ x_i &= \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad i= n-1, n-2, \dots, 1 \quad (\text{II.106})$$

II.10. Méthode de décomposition incomplète LU :

II.10.1. Principe :

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N = LU - N \quad (\text{II.105})$$

Donc : $M = LU = A + N$

Ou : N est une matrice petite

Dans cette méthode itérative, on ré-écrit (II.1) de la manière suivante :

$$Ax = (M-N)x = (LU-N)x = b \quad (\text{II.106})$$

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \text{ avec : } \|M\| \gg \|N\|$$

On obtient:

$$Mx^{(k+1)} = LUx^{(k+1)} = C^{(k)}$$

$$LUx^{(k)} = L(Ux^{(k+1)}) = LY^{(k)} = C^{(k)}$$

II.10.2. Algorithme:

1. Données: ε
2. Pour : $k = 0, x^{(k)} \{ r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
3. Tant que : $(\|r^{(k)}\|_2 \geq \varepsilon)$

$$\text{calculer } C^{(k)} = Nx^{(k)} + b$$

Résoudre: $LY^{(k)} = C^{(k)}$ par substitution avant

$$Y^{(k)} = L^{-1}C^{(k)}$$

Résoudre: $Ux^{(k+1)} = y^{(k)}$ par substitution arrière.

$$x^{(k+1)} = U^{-1}y^{(k)}$$

III.11. Propriétés des méthodes numériques:

III.11.1. La stabilité:

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.

III.11.2. La consistance:

La consistance est une propriété de la discrétisation, on dit que l'ED discrétisée est consistante par rapport à l'ED réelle, si elle tend vers elle lorsque le pas Δx tend vers 0.

La différence entre l'équation discrétisée et l'équation réelle est appelée l'erreur de troncature.

II.11.3. La convergence:

C'est la propriété qui assure que la solution numérique des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues.

CHAPITRE III :

METHODE

MULTIGRILLE

Introduction :

L'utilisation de plusieurs niveaux de calcul est motivée par l'observation que les méthodes itératives classiques (gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel) présentent un très bon lissage des hautes fréquences de la solution, ce qui se traduit par une décroissance rapide de la norme du résidu durant les toutes premières itérations de résolution.

Le principe des méthodes multigrilles est donc de faire quelques itérations d'une méthode itérative classique sur le niveau de calcul courant afin d'approximer au mieux les hautes fréquences, puis on restreint le problème à un système grossier, plus pauvre en terme de nombre de degrés de liberté mais sur lequel les composantes basses fréquences sont représentées, afin de les évaluer beaucoup plus rapidement.

On présente dans un premier temps la méthode bigrille en ne considérant que le niveau de calcul usuel et un niveau de calcul grossier. On généralise ensuite au cadre des méthodes multigrilles, où le nombre de niveaux de calcul grossiers peut être quelconque.

III.1. Méthode bigrilles :

Le problème consiste à résoudre le système matriciel suivant :

$$AU=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} \quad (III.1)$$

III.1.1.principe de la méthode de deux grilles :

Pour exposer d'une manière simple le principe de la méthode multigrilles, on commence par présenter la méthode deux-grilles ; cette dernière combine deux méthodes peu performantes pour finalement obtenir une méthode très efficace. On considère une grille fine de pas h et une grille grossière de pas H tel que $H= 2h$.

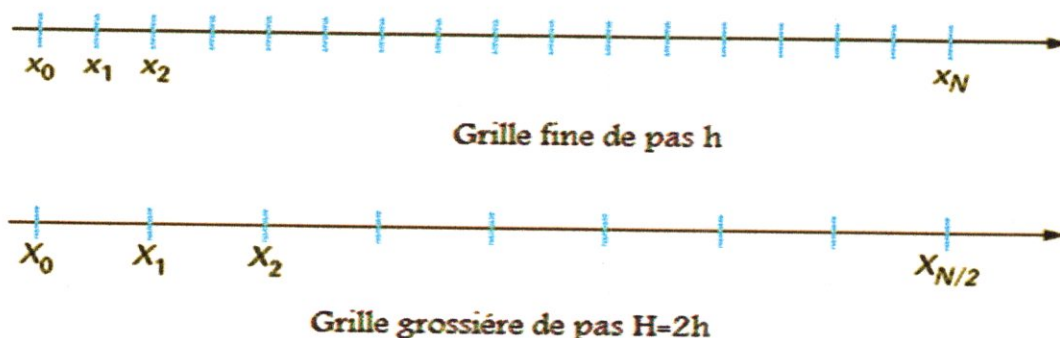


Figure III.1 : Présentation de la méthode bigrille.

Les erreurs de la solution oscillent sur une plage de fréquences (hautes et basses fréquences).

Un cycle de la méthode bigrille se compose de deux phases :

Une méthode de lissage (pas h) :

Elle consiste à faire deux ou trois itérations (v_1) par une méthode de relaxation (Jacobi ou Gauss Seidel), permettant de réduire les hautes fréquences de l'erreur lorsque l'on décompose celle-ci dans la base des vecteurs propres de la matrice ;

U_h : Solution exacte.

u_h : Solution approximée.

L'erreur est donné par :

$$e_h = U_h - u_h \quad (\text{III.2})$$

Soit u_h l'approximation de la solution exacte, le système algébrique linéaire discret s'écrit:

$$A_h U_h = F_h \quad (III.3)$$

Le résidu est défini par:

$$r_h = F_h - A u_h \quad (III.4)$$

Le système (III.3) est mis sous la forme :

$$A_h e_h = r_h \quad (III.5)$$

La méthode de relaxation (Jacobi, Gauss Seidel) réduit l'erreur haute fréquence mais ne détecte pas l'erreur basse fréquence (transformé de Fourier pour la décomposition en fréquence)

$$\text{Si } e_h \rightarrow 0 \Rightarrow r_h \rightarrow 0 \quad (III.6)$$

Comme l'erreur ne peut pas tendre vers zéro dans la grille fine alors on passe vers la grille grossière.

Une méthode de correction sur la grille grossière (pas h) :

Elle traite efficacement les basses fréquences de l'erreur dans la mesure où un mode basse fréquence sur la grille fine se transformera à terme en un mode oscillant sur la grille grossière et sera, par conséquent bien lissé par une méthode de relaxation.

La grille grossière de pas H traite d'une manière efficace les basses fréquences avec le moins coût de calcul (nombre de points est réduit de moitié).

On définit r_H le résidu dans la grille grossière.

$$r_H = I_h^H \times r_h \quad (III.7)$$

Où :

I_h^H est l'opérateur de restriction qui exprime le passage de la grille fine vers la grille grossière.

L'erreur dans la grille grossière est :

$$A_H \times e_H = r_H \tag{III.8}$$

L'erreur e_H est une approximation faite dans la grille grossière alors que e_h est celle définie dans la grille fine.

On applique un opérateur de prolongation I_H^h pour faire cette fois-ci le chemin inverse c'est-à-dire passer de la grille grossière vers la grille fine afin que l'erreur e_H soit transformé vers la grille fine par conséquent la solution au niveau de la grille fine est:

$$U_h = u_h + e_h = u_h + I_H^h e_H \tag{III.9}$$

La procédure n'est pas encore terminée dans la pratique car pour encore diminuer l'erreur on fait ν_2 itérations avec la méthode de relaxation bien sûr après le passage de la grille grossière vers la grille fine.

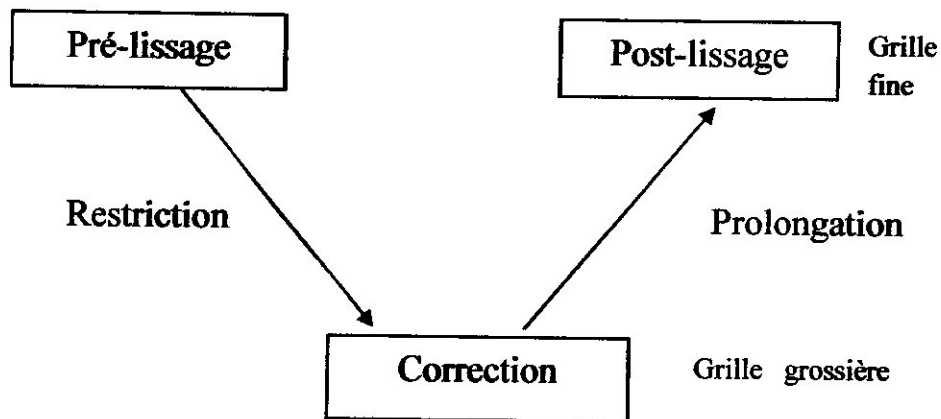


Figure III.2 : Un cycle bigrille.

III.1.2. Algorithme de la méthode deux grilles :

1. Lissage sur la grille fine :

$$U_h = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = 1, \dots, v_1 \quad (III.10)$$

S : opérateur de lissage (Jacobi ou Gauss Seidel).

v_1 : Le nombre d'itérations.

2. Calcul de résidu sur la grille fine :

$$R_h = F_h - A_h U_h^{(v_1)} \quad (III.11)$$

3. Passage de la grille fine vers la grille grossière par l'opérateur de restriction pour la détermination de résidu :

$$r_H = I_h^H r_h \quad (III.12)$$

4. Calcul de l'erreur dans la grille grossière :

$$e_H = (A_H)^{-1} r_H \quad (III.13)$$

5. Passage de la grille grossière vers la grille fine par l'opérateur de prolongation I_H^h , la correction de la solution dans la grille fine sera :

$$U_h^{(v_1+1)} = U_h^{(v_1)} + I_H^h e_H \quad (III.14)$$

6. Lissage de la solution sur la grille fine par Gauss ou Jacobi

$$U_h^{(l)} = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = v_1 + \dots, +v_2 + 1 \quad (III.15)$$

III.2. Méthode Multigrille :

Le passage d'une méthode bigrille à une méthode multigrilles s'effectue en modifiant l'étape de correction du cycle bigrille. On remplace la méthode de résolution du problème grossier par une nouvelle méthode bigrille utilisant un système encore plus grossier. Il suffit pour cela de définir de nouveaux opérateurs de restriction et de prolongement ainsi que les éléments du système de ce nouveau niveau. En itérant le processus, on obtient une méthode basée sur n grilles.

III.2.1. Présentation :

Les méthodes Multigrilles sont des méthodes de résolution de systèmes linéaires relativement récentes, apparues dans les années 1960 [Fedorenko]. Historiquement introduites pour la résolution de l'équation de Poisson, leur emploi se généralise dans le cadre de la mécanique des fluides, où leur utilisation se conjugue assez facilement avec des discrétisations volumes finis ou différences finis [Wesseling]. On trouve ainsi des travaux traitant de la résolution des équations d'Euler [South et al.], [Jameson et al.], [Ollivier-Gooch], du problème de Stokes [Vincent], de Navier-Stokes [Brandt et al.], [Wesseling et al.] et de problèmes de turbulence [Sheng et al.], [Carre]. Leur utilisation dans le cadre d'une discrétisation éléments finis est plus récente. On peut noter dans le domaine de la mécanique des solides des travaux sur la visco-plasticité [El Hadj],[Mocellin], sur l'élasticité [LeDain], [Lee] mais aussi sur l'élasto-plasticité [Feng et al.].

La caractéristique la plus intéressante de ces méthodes multigrilles est la convergence asymptotique en $O(N)$ où N est le nombre d'inconnues du système résolu. Cette complexité théorique a été démontrée dans divers cas de discrétisation d'équations elliptiques [Wesseling], [Bachvalov], [Hackbusch]. Leurs performances sont ainsi bien meilleures que celles des méthodes itératives classiques utilisées jusqu'alors et qui présentent des convergences asymptotiques de l'ordre de $O(N^\alpha)$, avec $1 < \alpha \leq 2$.

III.2.2. Généralisation :

Dans la méthode deux grilles le pas du maillage de la grille grossière est le double du pas de maillage de la grille fine $H=2h$.

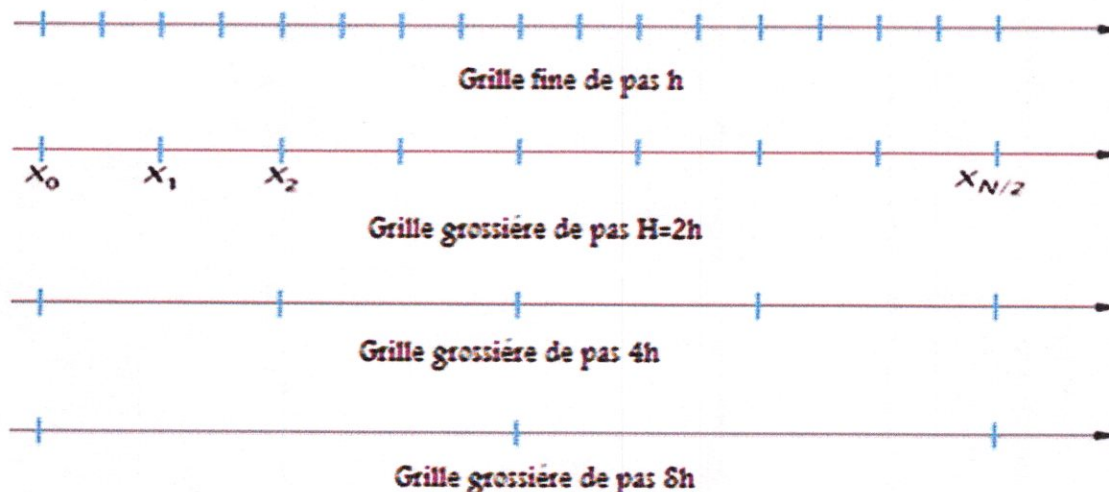


Figure III.3 : Présentation de la méthode Multigrilles.

Le passage vers la grille grossière pose le même problème que la grille fine par la détermination du résidu pour permettre le calcul de l'erreur par l'équation (III.8), qui est résolu par le cycle deux grilles.

Ce processus peut être répété d'une manière récursive jusqu'à ce que la grille grossière ne comporte que quelques points correspondants à l'équation de résidu qui est moins cher à calculer.

La description détaillée de la méthode multigrilles consiste à considérer un ordre de grilles avec le pas du maillage :

$$h_1 > h_2 > \dots > h_{k-1} > h_k > \dots > h_l \quad (\text{III.16})$$

De sorte que :

$$h_{k-1} = 2h_k \quad \text{Avec } k = 1, 2, \dots, l \quad (\text{III.17})$$

k : est appelé le numéro du niveau.

Avec Ω_{h_k} l'ensemble de points de grille de niveau k de pas h_k .

Le nombre de points intérieur au niveau k est N_k .

Selon chaque niveau k , nous définissons le problème suivant:

$$A_k U_k = F_k \quad (III.18)$$

Dans ce cas A_k est la matrice $N_k \times N_k$ et U_k et F_k ce sont des vecteurs de taille N_k .

Le transfert se fait entre les niveaux intermédiaires avec un opérateur de restriction I_k^{k-1} et de prolongation I_{k-1}^k .

La solution s'obtient par l'opération de lissage est :

$$U_k = S_k(U_k, F_k) \quad (III.19)$$

III.2.3. Algorithme de la méthode Multigrille :

L'algorithme de la méthode Multigrille pour la résolution du système (III.18), est donné par les étapes suivantes :

1. Si $k=1$, la résolution du système se fait directement telle que :

$$A_k U_k = F_k \quad (III.20)$$

2. Etape de pré lissage sur la grille fine :

$$U_h^{(l)} = S(U_h^{(l-1)}, F_h) \quad l = 1, \dots, v_1 \quad (III.21)$$

3. Calcul de résidu :

$$r_k = F_k - A_k U_k^{(v_1)} \quad (III.22)$$

4. Restriction du résidu :

$$r_k = I_k^{k-1} r_k \quad (III.23)$$

5. Prendre :

$$U_{k-1} = 0 \quad (III.24)$$

6. Appelle γ fois la méthode multigrilles pour résoudre :

$$A_{k-1} U_{k-1} = r_{k-1} \quad (III.25)$$

7. Correction de la grille grossière :

$$U_k^{(v_1+1)} = U_k^{(v_1)} + I_{k-1}^k U_{k-1} \quad (III.26)$$

8. Etape après lissage sur la grille fine :

$$U_k^{(l)} = S(U_k^{(l-1)}, F_k) \quad l = v_1 + 2 + \dots + v_1 + v_2 + 1 \quad (III.27)$$

III.2.4. Stratégie de passage intergrilles :

Dans la méthode Multigrille, les changements de grille se font en deux circonstances :

- Quand on restreint le résidu d'une grille fine vers une grille plus grossière, pour définir le second membre du problème dont la solution est une approximation de la correction à apporter,
- Quand on interpole la correction approchée d'une grille grossière vers une grille plus fine.

Mais quand doit-on changer la grille ? Plusieurs stratégies sont possibles.

Dans la première, le nombre d'itérations de Gauss-siedel sur chaque niveau de grille et l'ordre dans lequel elles sont faites, sont fixés à l'avance. Par exemple, on impose d'effectuer un nombre fixe p , d'itérations de Gauss-Siedel avant de calculer le résidu à transférer sur la grille grossière. Par ailleurs, lors de la remonté d'une grille grossière à la grille immédiatement plus fine, on peut envisager, après avoir apporté la correction, de refaire q itérations de Gauss-Siedel pour le problème défini sur cette grille, avant d'apporter la correction à la grille de niveau supérieur. Cela conduit au schéma de la figure (III.4), dans le cas de 3 niveaux de grilles, ce que l'on appelle la stratégie de V-cycles. On peut également n'interpoler la correction sur une grille donnée qu'après

avoir effectué deux cycles sur la grille immédiatement plus grossière, conformément à la figure (III.5), ce que l'on appelle la stratégie W-cycles

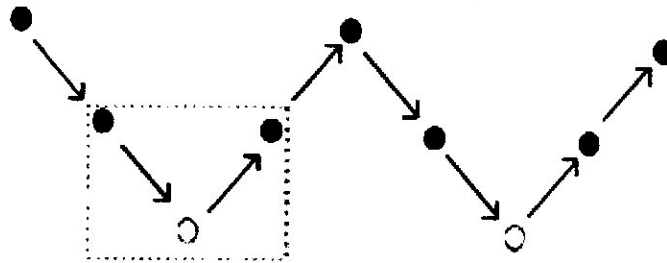


Figure III.4 : Trois grilles avec -cycles

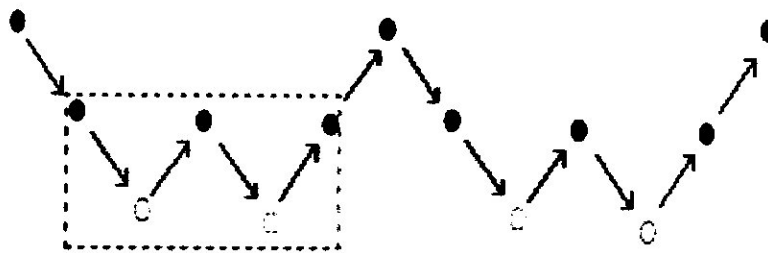


Figure III.5 : Trois grilles avec W-cycles.

Une autre stratégie consiste à changer de niveau en fonction de la valeur du résidu et de la rapidité de décroissance de ce résidu. Tant que le résidu est à peu près divisé par deux d'une itération de Gauss-Siedel à l'autre, on décide de descendre à la grille plus grossière. On poursuit ce processus sur chaque grille jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment petit, pour ce cas, on admet avoir résolu, avec une précision suffisante, le problème sur ce niveau de grille et on peut remonter pour apporter la correction au niveau de grille immédiatement supérieur.

Cette seconde stratégie, bien qu'apparemment plus souple, présente l'inconvénient de choix des seuils sur le facteur de décroissance ou sur la norme du résidu pour changer de grille. De toute façon, il s'avère que les valeurs optimales de p et q dans les stratégies sont petites.

On a intérêt à utiliser cette stratégie à nombre d'itérations fixé à l'avance, ce qui a l'avantage de la simplicité.

III.2.5. Approximation initiale sur la grille fine :

Au lieu de choisir au hasard une approximation initiale sur la grille la plus fine, on peut envisager de la construire à partir de la solution des problèmes correspondants aux discrétisations sur chacune des grilles les plus grossières.

Supposons que l'on ait obtenu la solution sur le niveau k . On peut interpoler cette solution sur la grille la plus fine de niveau $(k+1)$ et s'en servir d'approximation initiale pour calculer la solution du problème discrétisé sur cette grille de niveau $(k+1)$. En pratique, un ou deux cycles sur chaque grille sont suffisants. L'avantage de cette méthode réside dans son coût relativement faible, compte tenu du fait que le rapport entre le nombre de points d'une grille et celui des points de la grille immédiatement plus fine est environ $\frac{1}{4}$ pour un problème à deux dimensions d'espaces.

CHAPITRE IV :

ÉCOULEMENT

INCOMPRESSIBLE

VISQUEUX

Introduction :

En mécanique des fluides, on distingue généralement les écoulements irrotationnels, les écoulements de fluides compressibles et enfin les écoulements de fluides incompressibles.

Si les deux premiers concernent principalement les aérodynamiciens, on retrouve les troisièmes dans pratiquement tous les domaines allant des processus industriels aux phénomènes naturels pour lesquels la condition d'incompressibilité est une hypothèse suffisante. Tous les fluides étant en effet plus ou moins compressibles, la condition d'incompressibilité revient à considérer comme négligeables les influences de la pression et de la température sur la masse volumique. Un gaz peut être considéré comme incompressible si le nombre de Mach est faible ($M < 0,2$) et si la variation de température l'est aussi. Les petites variations de masse volumique qui sont à l'origine des mouvements de convection naturelle sont prises en compte quant à elles par un terme source dans les équations de conservation de la quantité de mouvement.

On ne s'intéressera ici qu'à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles où l'on se trouve confronté à de nombreuses difficultés intrinsèques parmi lesquelles on notera :

- La détermination de la pression ;
- Le couplage vitesse-pression ;
- la discrétisation du terme de convection.

IV.1. Equations fondamentales de mécanique des fluides :

De nombreux problèmes d'ingénierie sont liés au transport d'une ou plusieurs quantités scalaires par un fluide newtonien. Lorsque le fluide est homogène, le modèle mathématique décrivant l'écoulement est composé des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'équation de conservation de l'énergie. Dans cette partie, on présente ces équations

IV.1.1. Equation de transport :

Trois principes généraux apparaissent, tirés de la mécanique et de la physique, qui conduisent à écrire ces équations :

IV.1.1.1. Principe de conservation de la masse :

C'est un principe de physique, qui permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques du fluide et ses mouvements, indépendamment des causes qui le provoquent.

{ Quelque soit le volume du fluide que l'on suit dans son mouvement, sa masse reste constante (Fluide Conservatif)}

Il se traduit par l'équation de continuité, sous sa forme générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{U} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Dans le cas d'un fluide permanent (stationnaire) et incompressible où la masse volumique est invariable, l'équation de continuité se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

IV.1.1.2. Principe de conservation de la quantité de mouvement :

C'est un principe de mécanique qui permet d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ces mouvements et les causes qui les produisent (Forces).

{ Quelque soit le domaine du fluide que l'on suit dans son mouvement, la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités du mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au domaine (Forces de volume et Forces de Surface)}

Ce principe se traduit par les équations de NAVIER- STOKES, qui ont été établies en 1822 par ces derniers.

Les équations de Navier Stokes sont représentées par des dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. Elles gouvernent par exemple les courants atmosphériques ou océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. La paternité de ces équations est partagée par Claude Navier (1785-1836) et George Stokes (1819-1903). Dans l'approximation incompressible (masse volumique constante),

On les obtient en écrivant l'équilibre du système de forces s'exerçant sur un parallélépipède élémentaire dx, dy, dz :

- Forces extérieures : \vec{F} (forces de volume)
- Forces de Pression : $\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}P}$ (forces de surface)
- Forces d'inertie : $\vec{\gamma}$
- Forces de Viscosité : $\nu \Delta V$

Pour un fluide incompressible, on a :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}P} = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu \Delta V \quad (\text{IV.3})$$

Et sous forme cartésiennes, par projections sur les trois axes :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \quad (\text{IV.4})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = F_y - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v \quad (\text{IV.5})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = F_z - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Les équations de NAVIER- STOKES sont très complexes, des solutions Analytiques ne peuvent être obtenues que pour certaines configurations simples. On peut dire que si on sait les intégrer, on pourrait résoudre analytiquement les problèmes d'hydrodynamique.

IV.1.1.3. Conservation de l'énergie :

Equation de bilan de l'énergie est sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho e + p) \vec{v}] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r \quad (\text{IV.7})$$

Avec :

- t : le temps (unité SI : s) ;
- ρ : la masse volumique du fluide (unité SI : kg.m^{-3}) ;
- $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$: la vitesse eulérienne d'une particule fluide (unité SI : m.s^{-1}) ;
- P : la pression (unité SI : Pa) ;
- $\vec{\tau} = (\tau_{i,j})_{i,j}$: le tenseur des contraintes visqueuses (unité SI : Pa) ;
- \vec{f} : la résultante des forces massiques s'exerçant dans le fluide (unité SI : N.kg^{-1}) ;
- e : l'énergie totale par unité de masse (unité SI : J.kg^{-1}) ;
- \vec{q} : le flux de chaleur perdu par conduction thermique (unité SI : $\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$) ;
- r : la perte de chaleur volumique due au rayonnement (unité SI : $\text{J.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$) ;

IV.3. L'algorithme SIMPLER :

IV.3.1. Principe :

L'algorithme SIMPLER (**SIMPLE Revised**), mise au point par Patankar (1980) est une version améliorée de l'algorithme SIMPLE. Selon cet algorithme, l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation de correction de pression comme dans l'algorithme SIMPLE. Le champ de pression est obtenu directement, sans correction de pression, mais le champ de vitesse est obtenu à l'aide de la correction.

IV.3.2. Résumé de l'algorithme SIMPLER :

L'algorithme consiste dans la résolution de l'équation de la pression pour obtenir le champ de pression et dans la résolution de l'équation de correction de pression seulement pour corriger les vitesses.

Les étapes qui doivent être parcourues dans cet algorithme sont :

1. On commence par l'estimation (choix initial) du champ de vitesses, u^* et v^*, w^* et du champ de pression p^* ;
2. Calculer les pseudo-vitesses \hat{u} et \hat{v} ;
3. Calculer les coefficients et résoudre l'équation de la pression pour obtenir le champ de pression p ;
4. Initialiser le champ de pression initial p^* , avec le nouveau champ de pression obtenu à la troisième étape ($p^* = p$) et résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement pour obtenir u^* et v^*, w^* ;
5. Calculer les coefficients et le terme-source et puis résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir la correction de pression p' ;

6. Corriger le champ de vitesses, mais sans corriger la pression ;
7. Calculer les coefficients et le terme-source et puis résoudre l'équation de transport pour une autre variable (la température T , par exemple, si on utilise l'équation de conservation de l'énergie) ;
8. Réinitialiser toutes les variables calculées aux étapes 3, 6, et 7 ($p^* = p$, $u^* = u$, $v^* = v$, $w^* = w$, $T^* = T$) et puis retour à l'étape 2 ;
9. Répéter les étapes 2 à 8 jusqu'à l'obtention de la convergence.

IV.4. L'algorithme SIMPLEC :

L'algorithme SIMPLEC (**SIMPLE Consistent**) a été mis au point par Van Doormal et Raithby (1984). Les étapes de cet algorithme sont presque les mêmes que celles de l'algorithme SIMPLE avec la différence que dans les équations de correction des vitesses on néglige les termes les moins significatifs.

IV.5. L'algorithme PISO :

IV.5.1. Principe :

L'algorithme PISO (**Pressure Implicit with Splitting of Operators**) a été mis au point par Issa (1986). Cet algorithme a été développé initialement comme une procédure non itérative pour le calcul des écoulements compressibles instationnaires. Ultérieurement l'algorithme a été bien adapté pour la procédure itérative appliquée aux problèmes stationnaires.

L'algorithme est une extension de l'algorithme SIMPLE ayant une étape de correction de plus.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement sont résolues à partir d'un champ de pression p^* pour obtenir les composantes u^* et v^*, w^* en utilisant la même méthode de l'algorithme SIMPLE.

IV.5.2. Résumé de l'algorithme PISO :

Les étapes qui doivent être parcourues dans cet algorithme sont :

1. L'estimation initiale du champ de vitesses u^* , v^* et w^* , du champ de pression p^* ;
2. Parcourir les étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme SIMPLE, c'est-à-dire :
 - Résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement ;
 - Résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir p' ;
 - Corriger la pression et les vitesses ; Pour actualiser p^* , u^* et v^* , w^* .
3. Calculer les coefficients et le terme source puis résoudre la deuxième équation de correction de pression ;
4. Corriger la pression et les vitesses ;
5. Actualiser la pression et les vitesses, $p = p^{***}$, $u = u^{***}$ et $v = v^{***}$, $w^{***} = w$,
6. Calculer les coefficients et le terme source puis résoudre l'équation de transport pour la variable Φ ;
7. Réinitialise toutes les variables calculées aux étapes 5 et 6 ($p^* = p$, $u^* = u$, $v^* = v$, $w^* = w$, $\Phi^* = \Phi$) et puis retour à l'étape 2 ;
8. Répéter les étapes 2 à 7 jusqu'à la convergence.

CHAPITRE V :

RESULTATS

ET

INTERPRETATIONS

Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différents résultats obtenus par la simulation en utilisant le logiciel Fluent pour le cas d'un écoulement incompressible laminaire visqueux.

Il est à noter que les étapes de la simulation sont données dans l'annexe A

V.1. Première partie : Application en deux dimensions

Nous considérons une Cavité à une paroi entraînée avec les caractéristiques géométriques et physiques suivantes :

La longueur est de 1 m ;

La largeur est de 1 m ;

La viscosité dynamique μ est de 10^{-3} Kg/m.s ;

La masse volumique ρ est de 1Kg/m^3 ;

La vitesse suivant l'axe x est de 1m /s ;

$$Re = \frac{\rho U H}{\mu} = \frac{1 \times 1 \times 1}{10^{-3}} = 1000$$

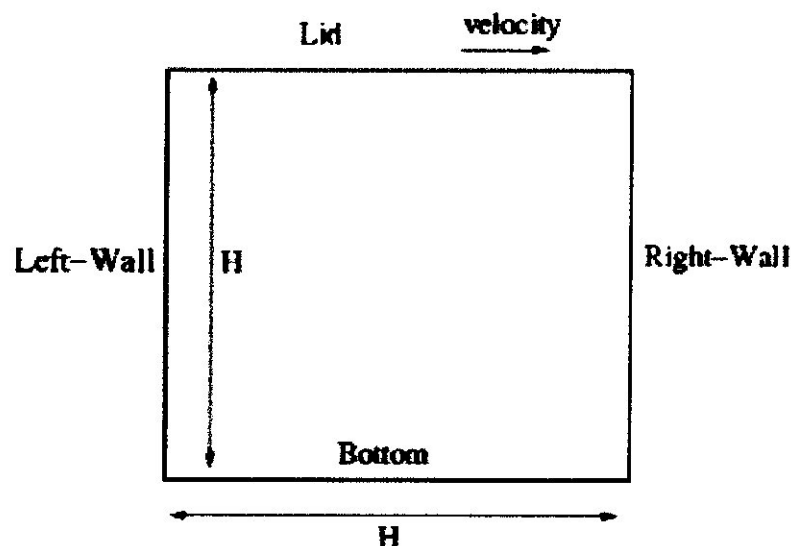


Figure V.1 : schéma du problème.

V.1.1. Résultats obtenus par le programme (Matlab) :

V.1.1.1. Le champ de vitesse :

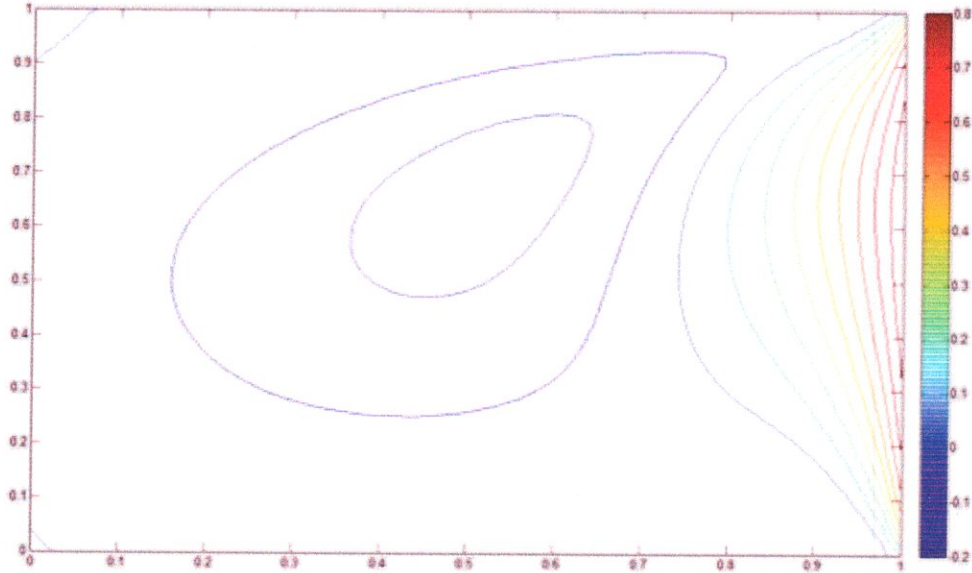


Figure V.2 : Distribution de la vitesse.

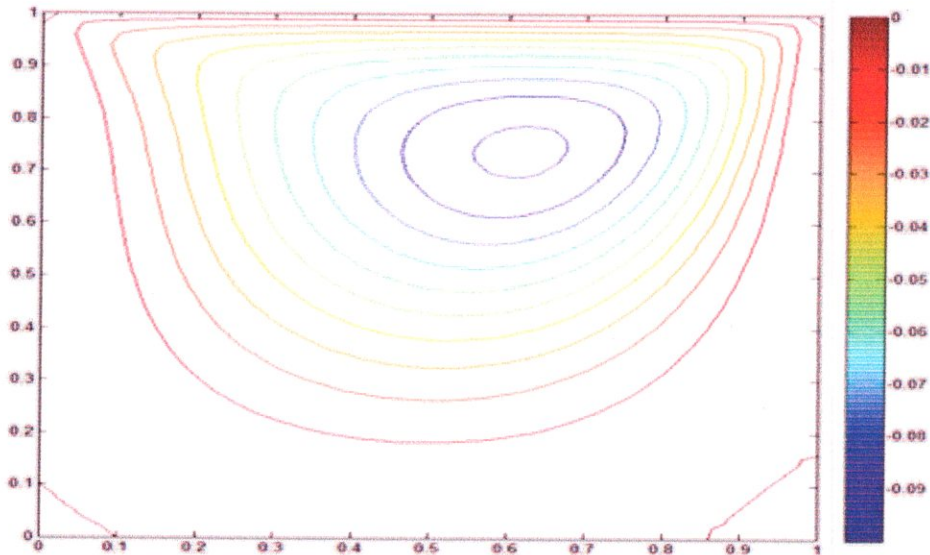


Figure V.3: Contour des lignes de courant.

Au centre de la cavité, le champ de vitesse subit des variations en module et en direction qui s'explique par la présence d'un tourbillon principale. Cette variation tend à diminuer en se dirigeant vers la base de la cavité.

On remarque la présence de quelques cercles concentriques indépendante sur les deux coins de la paroi inférieure.

Pour le contour des lignes de courant sont des cercles, les valeurs augmentent de la partie centrale jusqu'à la paroi de la cavité et également, on distingue quelque lignes de courant sous forme de cercle concentrique sur les deux coins de la paroi inférieure.

V.1.2. Résultats obtenus par le solveur Fluent :

V.1.2.1. Le résidu :

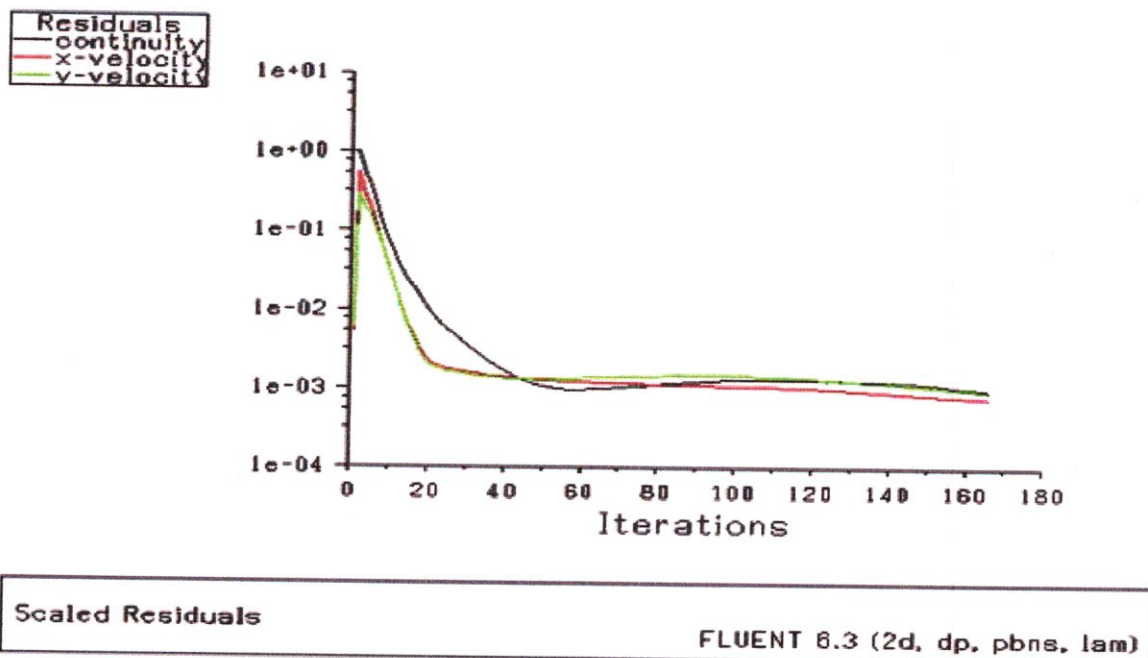


Figure V.4 : La variation du résidu en fonction des itérations.

Les résidus sont calculés à partir des corrections faites sur les variables de pression et de vitesse du problème entre l'itération actuelle et précédente.

La variation de résidu est une courbe qui représente l'évolution des paramètres par les équations de Navier stocks en fonction des itérations qui se stabilise lorsque la convergence est atteinte.

Après avoir obtenu la convergence du procédé de calcul, on va s'intéresser surtout à l'évolution de champ de la vitesse.

V.1.2.2. La variation de la vitesse :

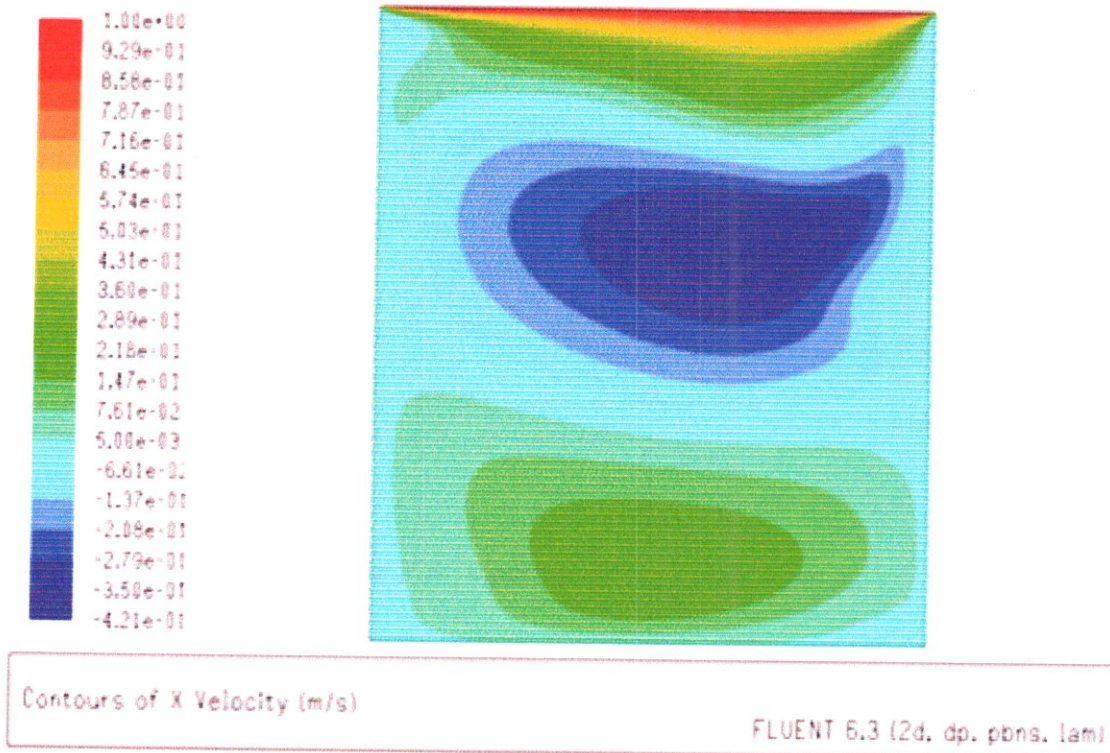


Figure V.5 : Champ de vitesse en module.

D'après la figure (V.5), on remarque qu'au centre de la cavité, le champ du vitesse subit des variations en module. Nous expliquons cette dernière par la présence d'un tourbillon principal. Cette variation tend à diminuer en se dirigeant vers la partie inférieure de la cavité.

Les figures (V.6, V.7) présentent clairement la variation des vecteurs vitesses au centre de la cavité, donc la présence d'un tourbillon est créée par la variation de la direction du vecteur vitesse.

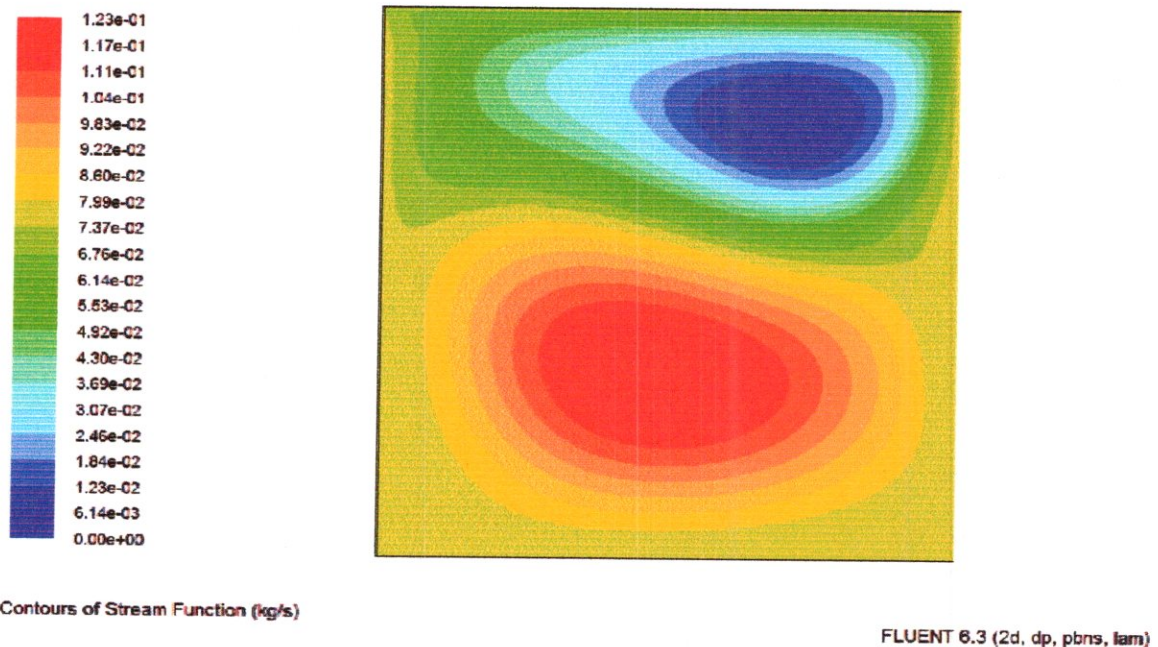


Figure V.8 : Contour des lignes de courant.

La figure (V.8) présente le contour des lignes de courant qui sont présentés sous forme des cercles, on constate que les valeurs augmentent de la partie centrale jusqu'à la paroi de la cavité.

V.1.3. Interprétation :

1. Les résultats obtenus par Matlab :

La variation de champ de la vitesse en module et en direction s'explique par la présence d'un tourbillon principal au centre de la cavité et des tourbillons secondaires moins intenses dans les coins inférieures de la cavité.

2. Les résultats obtenus par Fluent :

On retrouve les mêmes formes de l'évolution des lignes de courant et la vitesse par Fluent.

2 .La variation de la vitesse :

On va présenter plusieurs figures pour la variation de la vitesse pour différentes stations suivant l'axe y

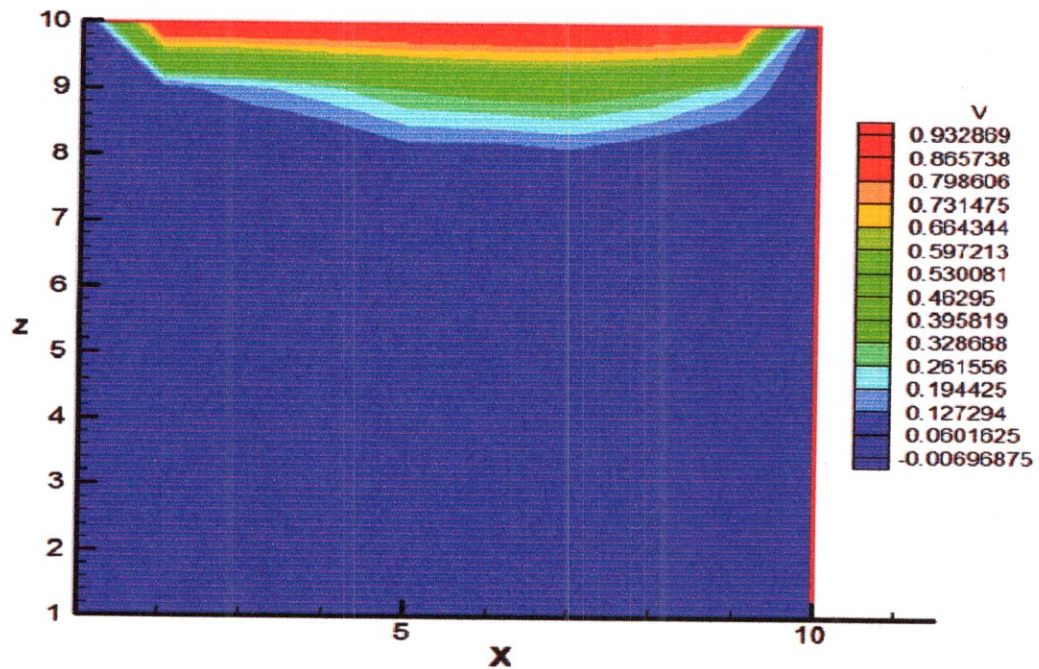


Figure V.10 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.2$.

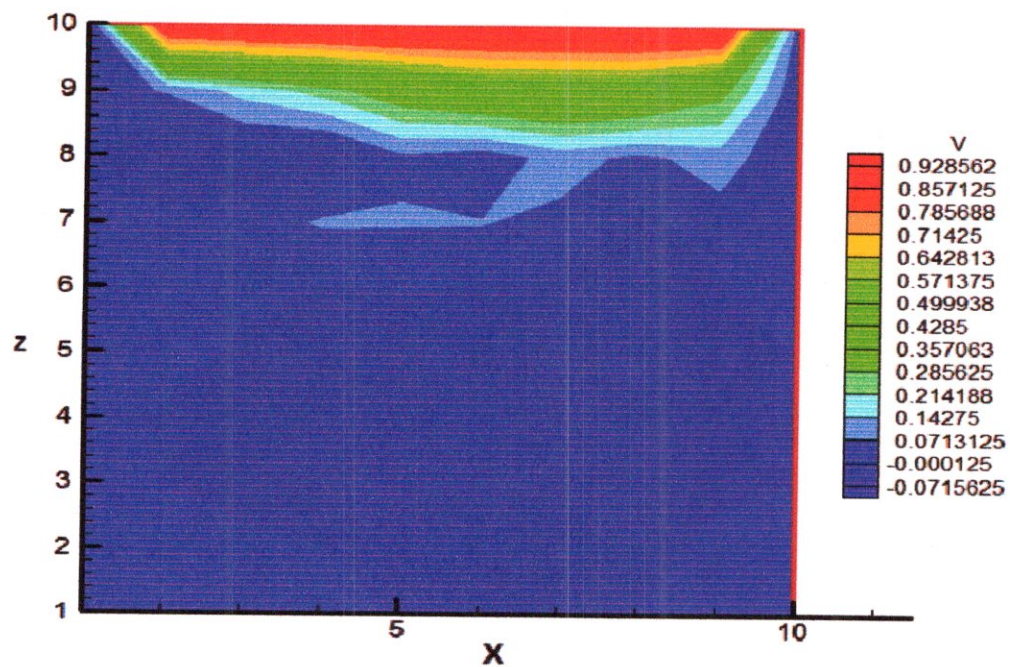


Figure V.11 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.3$.

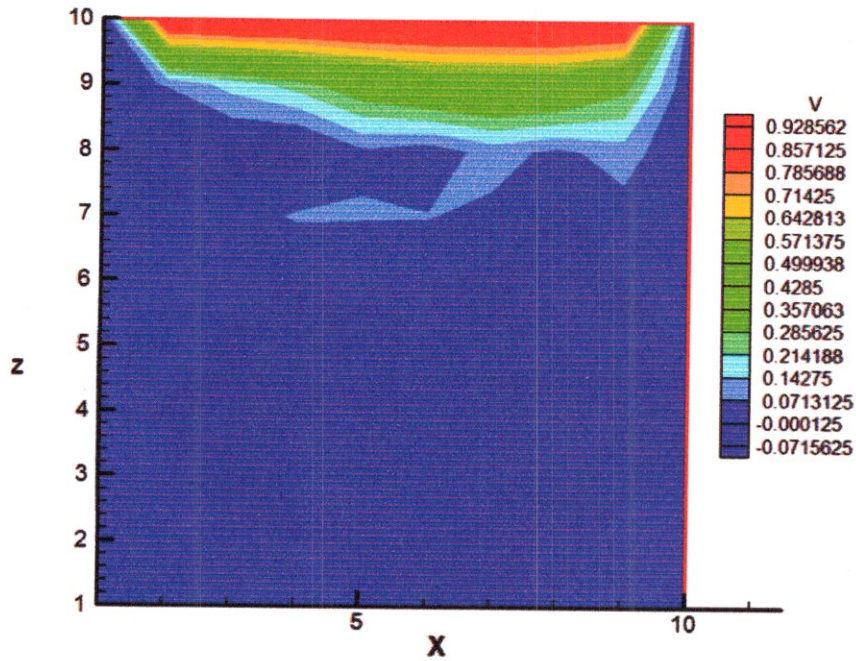


Figure V.12 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.8$.

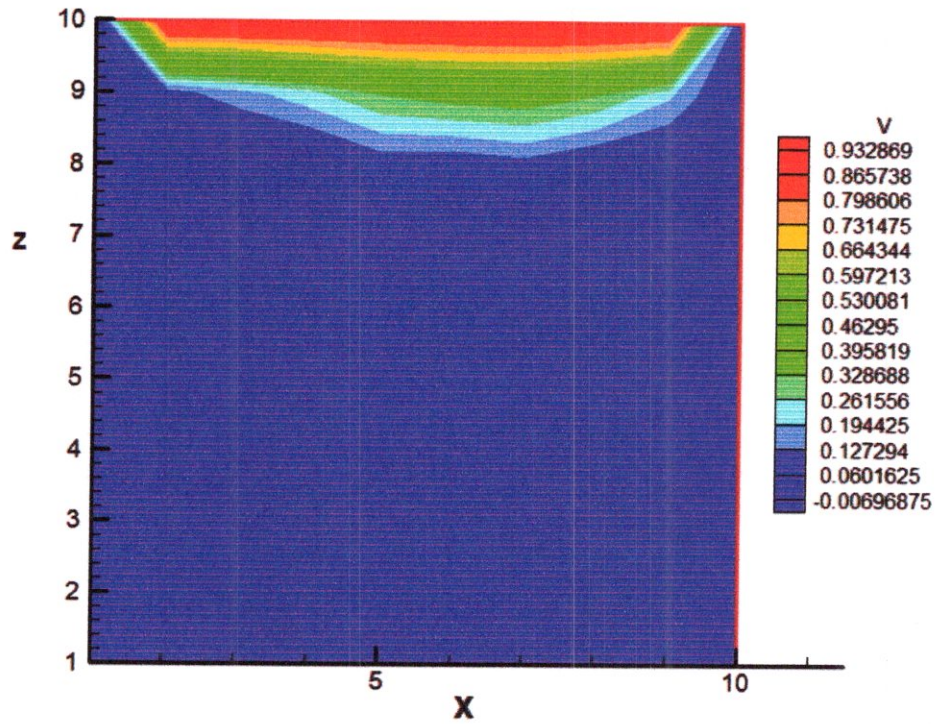


Figure V.13 : Contour de variation de vitesse pour $y = 0.9$.

D'après les figures (V.10, V.11, V.12, V.13) on remarque qu'au centre de la cavité, le champ de vitesse subit des variations en module et en direction qui s'explique par la présence d'un tourbillon principale. Cette variation tend à diminuer en se dirigeant vers la base de la cavité.

V.2.1.2. Les résultats obtenus pour le deuxième maillage ($18 \times 18 \times 18$) :

1. Le résidu :

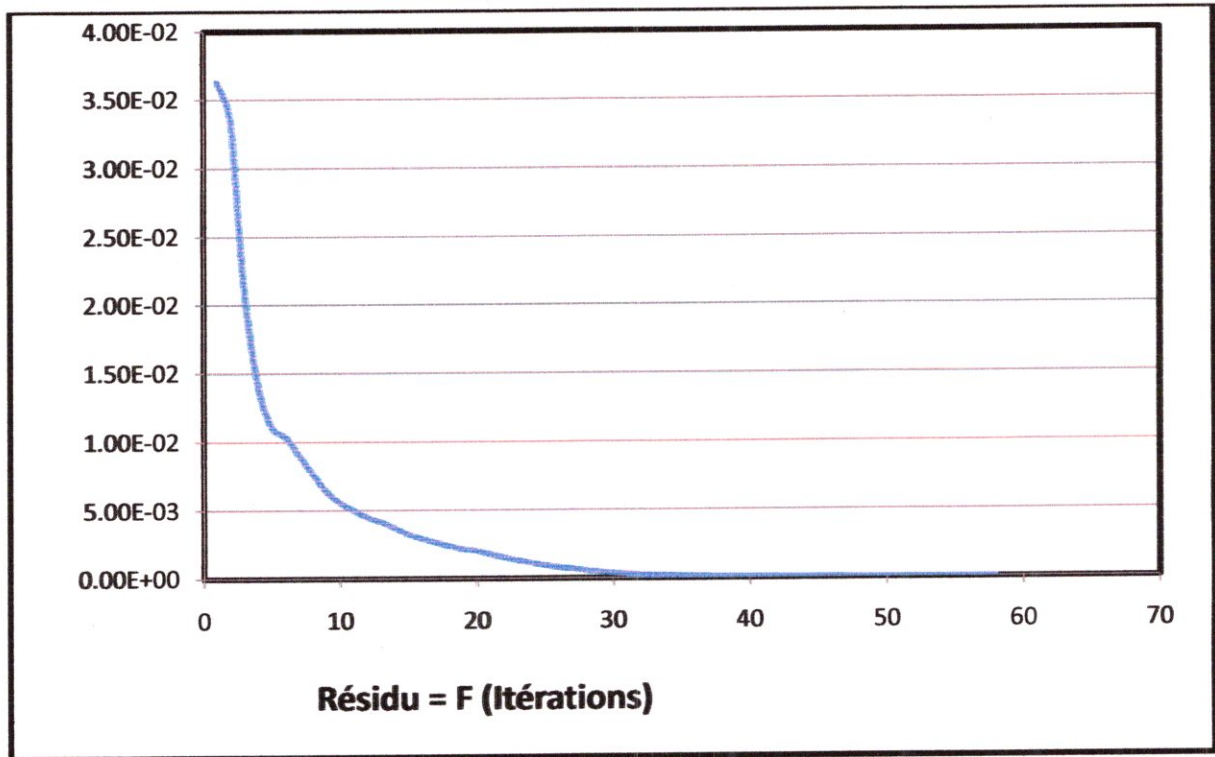


Figure V.14 : La variation de résidu en fonction de nombre d'itérations.

On remarque, d'après la figure (V.14) que la convergence est atteinte après 22 itérations.

Figure V.16 : Contour de champ de vitesse pour $y = 0.2$.

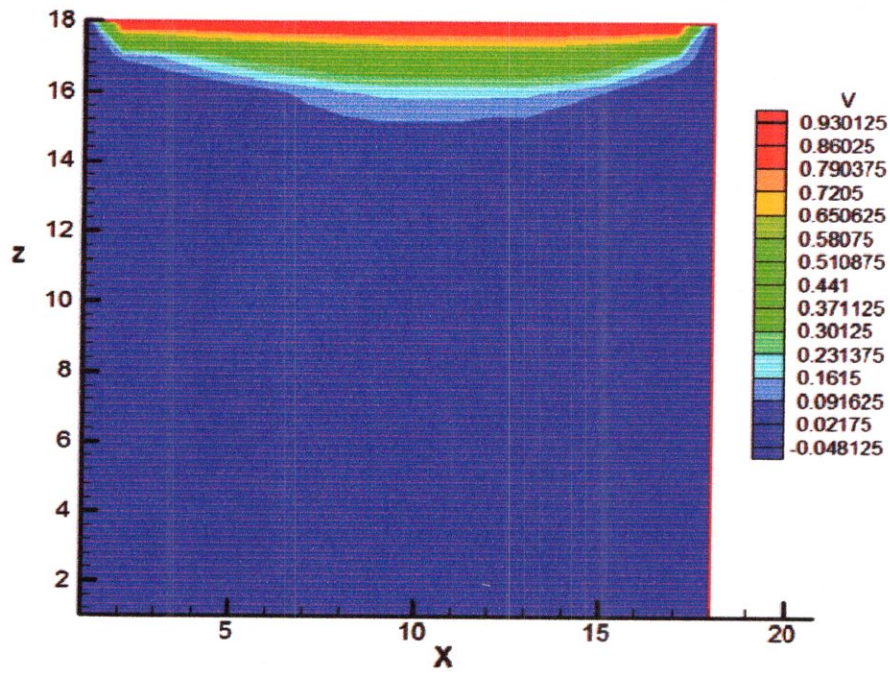


Figure V.17 : Contour de champ de vitesse pour $y=0.9$.

On remarque qu'au centre de la cavité, le champ de vitesse subit des variations qui s'expliquent par la présence d'un tourbillon principale. Cette variation tend à diminuer en se dirigeant vers la base de la cavité.

On constate presque la même variation de champ pour les stations 0.1, 0.9 présentées dans les figures (V.14, V.16)

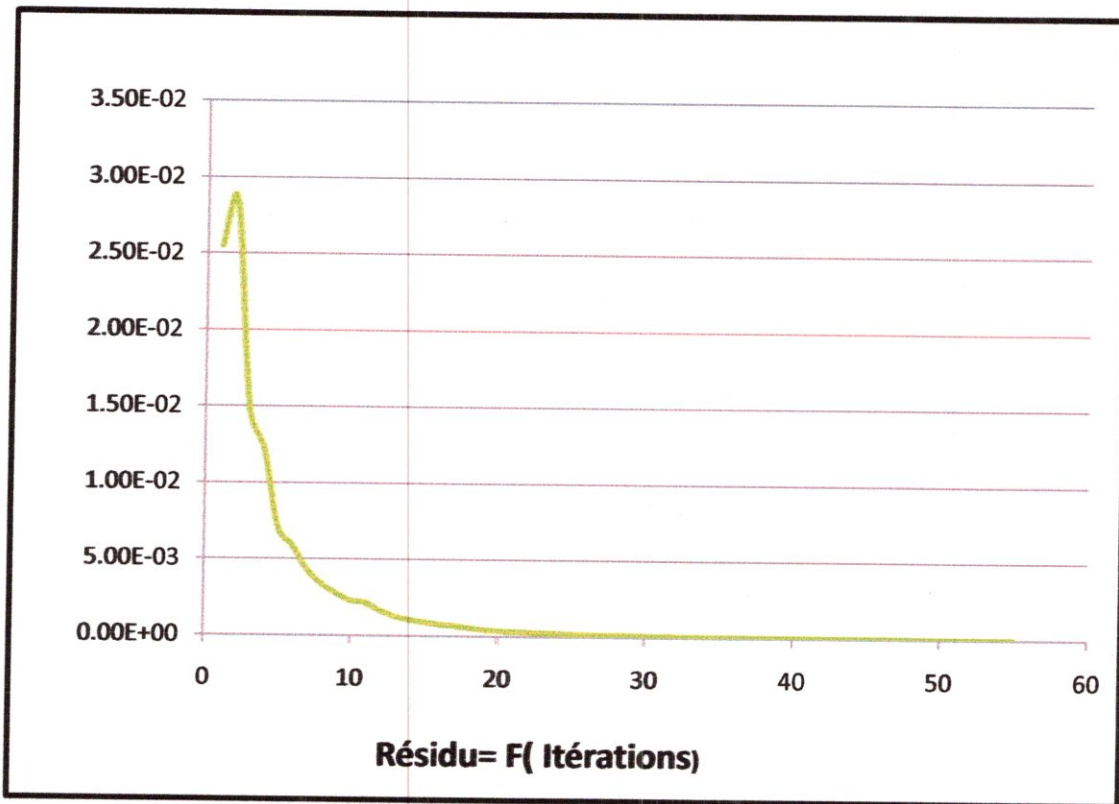
*V.2.1.3. Les résultats obtenus pour le deuxième maillage (34×34×34) :**1. Le résidu :*

Figure V.18 : La variation des résidus en fonction de nombre d'itérations.

On remarque, d'après la figure (V.17) que la convergence est atteinte après 14 itérations.

2 .La variation de la vitesse :

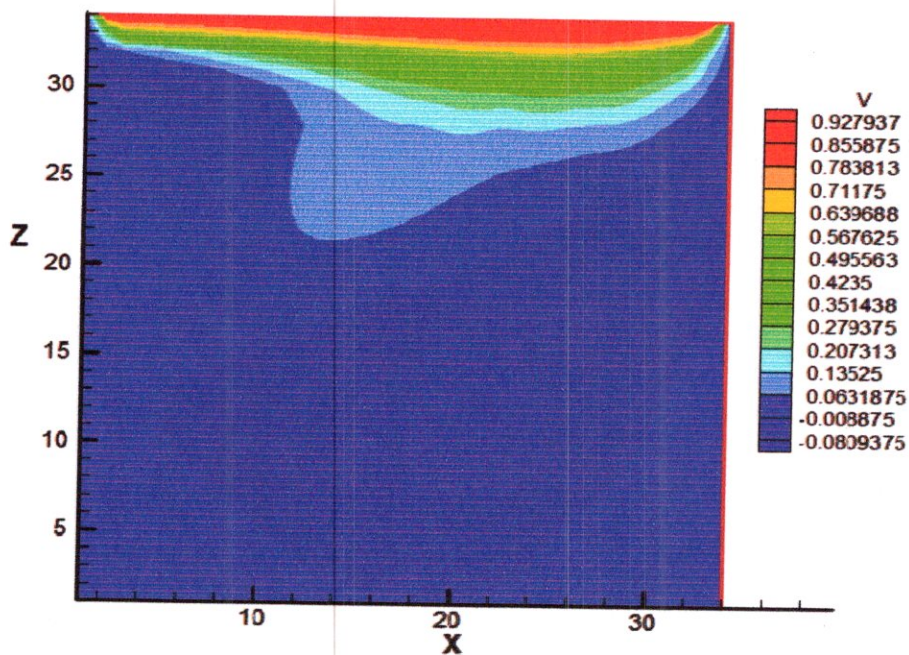


Figure V.19: Contour de champ de vitesse pour $y=0.2$.

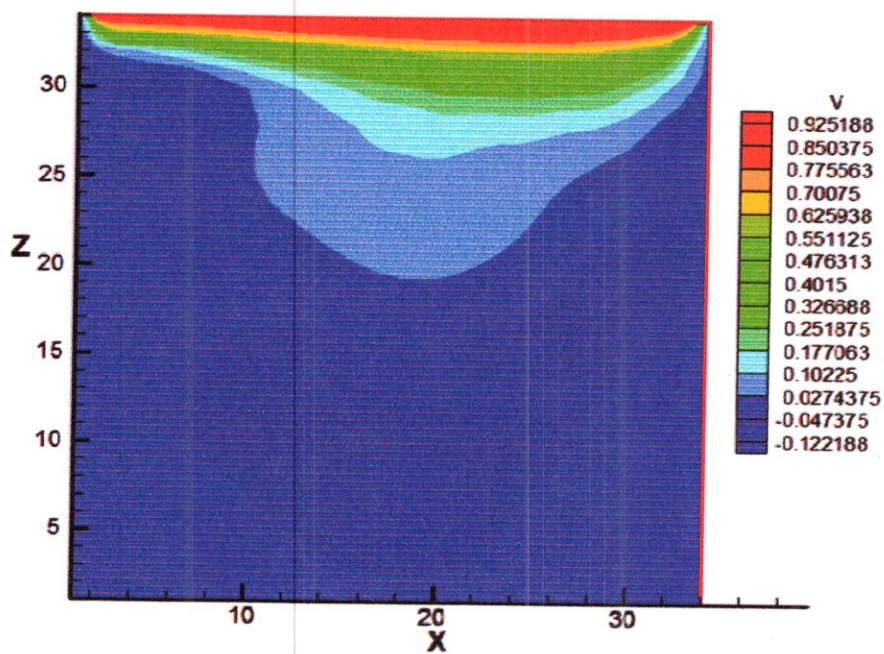


Figure V.20: Contour de champ de vitesse pour $y=0.5$.

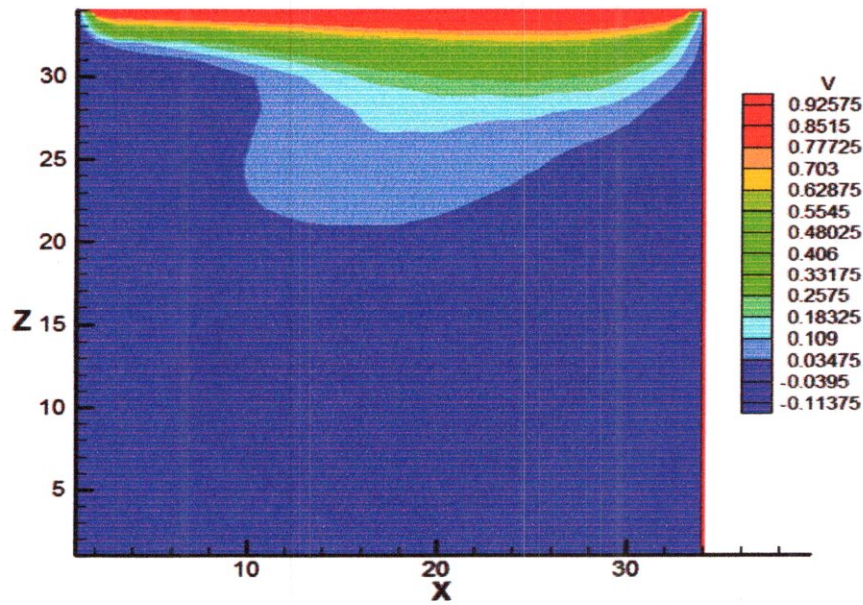


Figure V.21: Contour de champ de vitesse pour $y=0.7$.

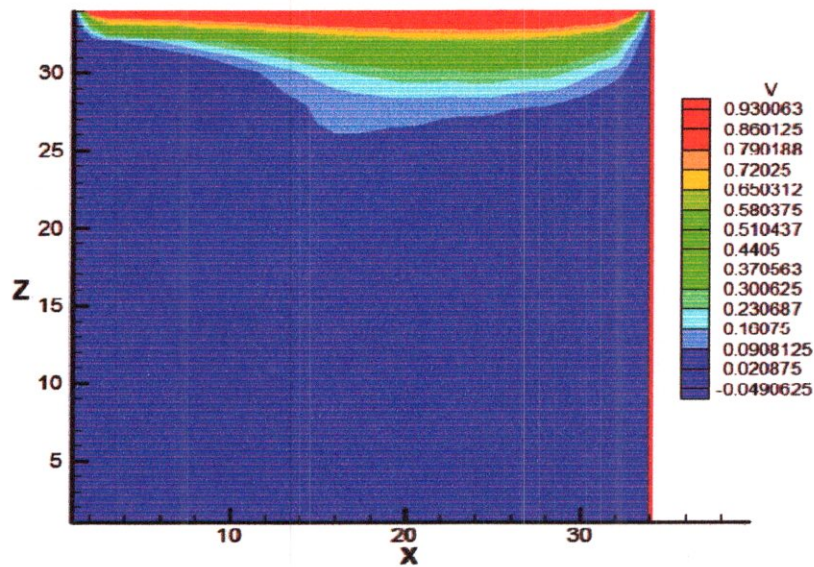


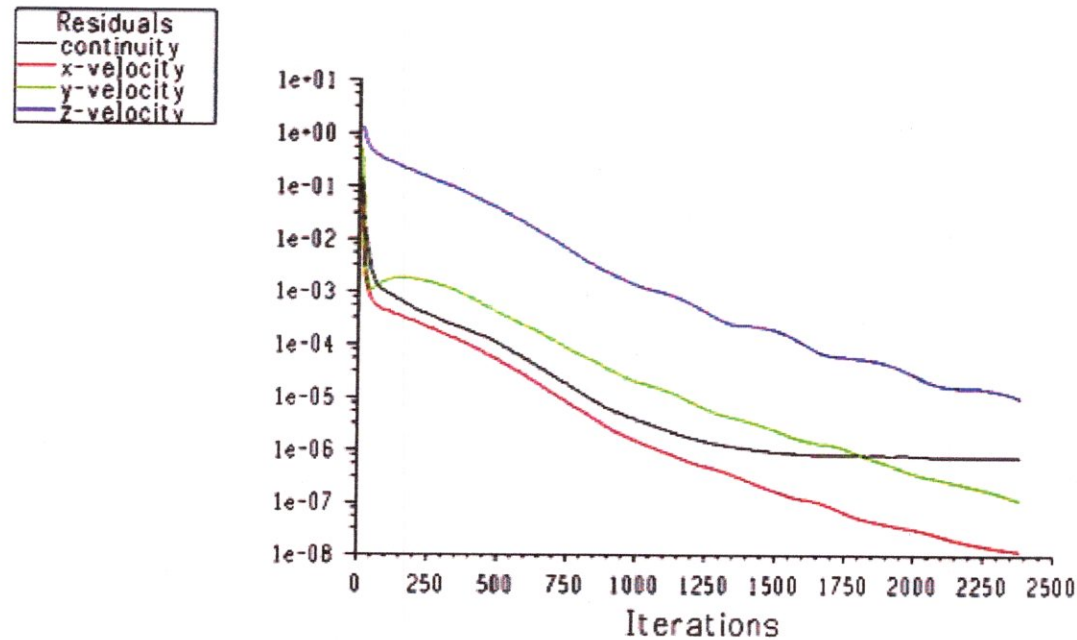
Figure V.22: Contour de champ de vitesse pour $y=0.9$.

On note que la variation de champ de vitesse d'une station à l'autre est presque constante.

On voit qu'au centre de la cavité le champ de vitesse subit des variations en module et en direction qui tend à diminuer à la base de la cavité, on explique cette variation par la création d'un tourbillon au centre de la cavité.

V.2.2. Résultats obtenus par le solveur (Fluent) :

V.2.2.1. Le résidu :



Normalized Scaled Residuals FLUENT 6.3 (3d, pbns, lam)

Figure V.23 : La variation du résidu en fonction du nombre d'itérations.

La variation de résidu présente par la courbe concernant l'équation de continuité et les composantes vitesses de l'équation de quantité de mouvement en fonction des itérations qui se stabilise indiquent la convergence.

Après avoir la convergence de notre système, on va passer à l'étude des évolutions des paramètres de la pression et la vitesse.

V.2.2.2. La variation de la vitesse :

On présente la distribution de vitesse pour deux faces de la cavité.

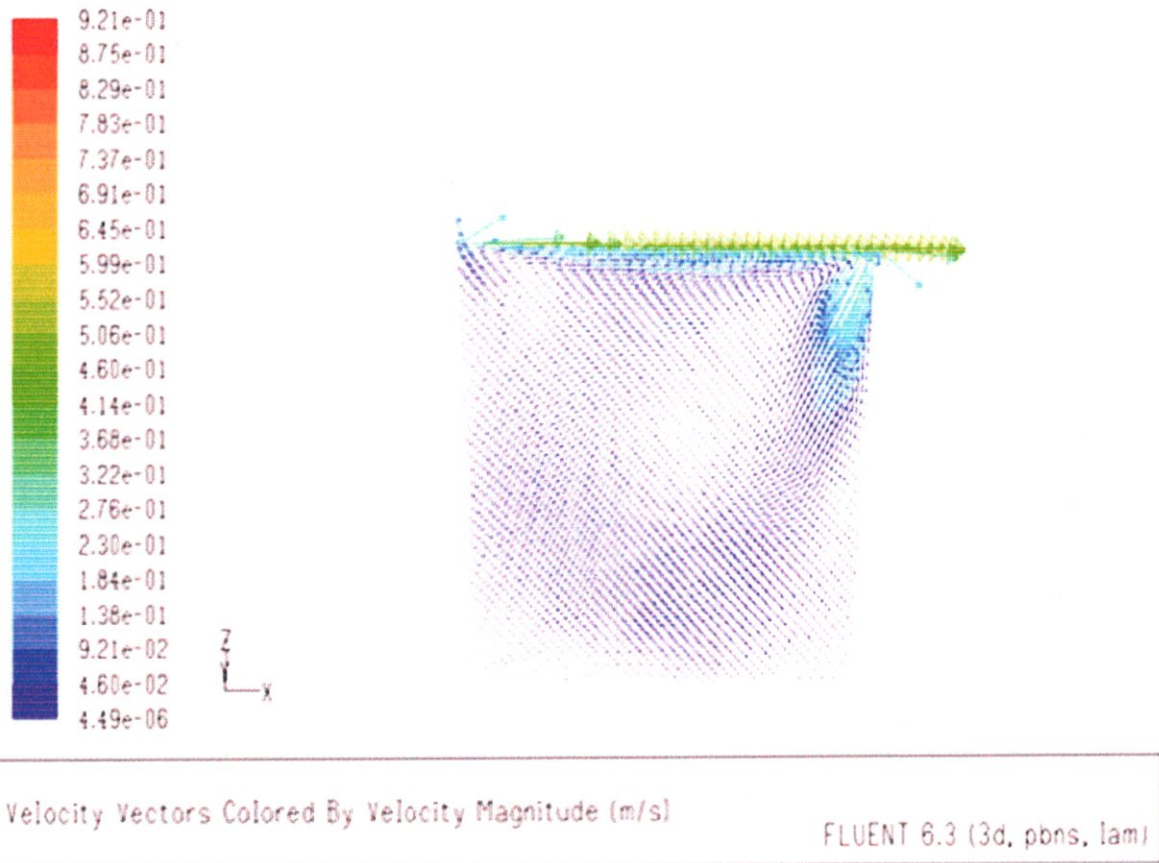


Figure V.24 : Contour du vecteur vitesse de la face parallèle à l'écoulement.

On remarque que, sur la face supérieure de la cavité la vitesse est linéaire.

Au centre de la cavité, le champ de vitesse subit des variations en module et en direction qui s'explique par la présence d'un tourbillon. Cette variation tend à diminuer en se dirigeant vers la base de la cavité.

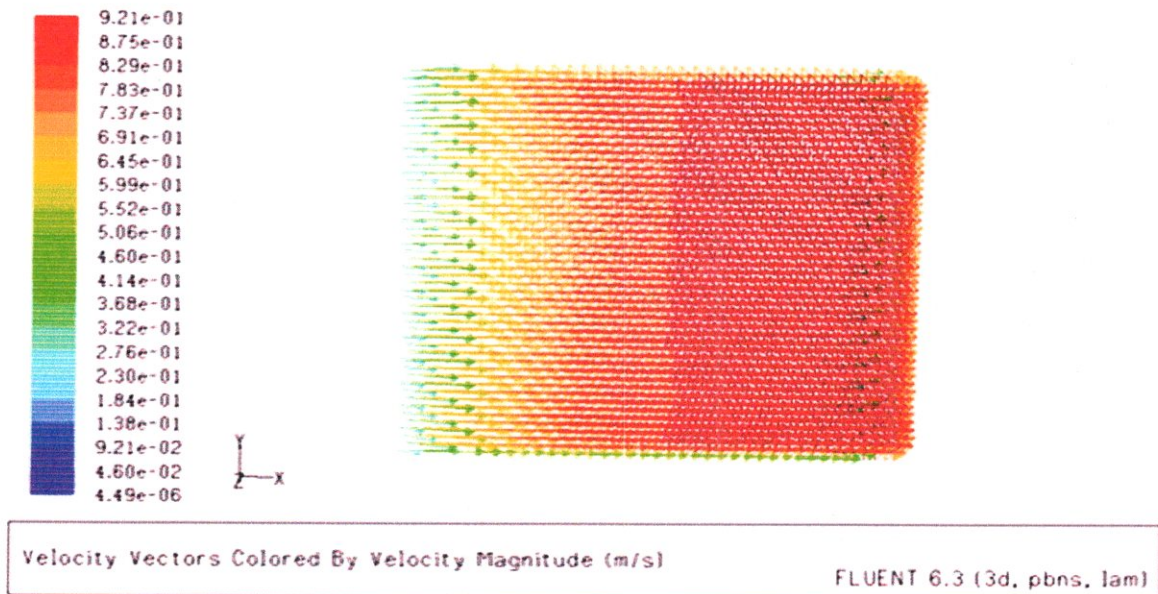


Figure V. 25 : Contour des vecteurs vitesses dans la face supérieure.

On voit que la variation de la vitesse sur la face supérieure de la cavité est presque linéaire.

V.2.3. Interprétation :

1. Les résultats obtenus par le programme Fortran :

La variation de champ de vitesse en module et en direction s'explique par la présence d'un tourbillon au centre de la cavité

2. Les résultats obtenus par Fluent :

On retrouve les mêmes formes de l'évolution de la vitesse qui sont obtenus par le solveur Fluent.

CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES

Conclusion et Perspectives

Dans toutes les branches d'activités industrielles et économiques, en particulier dans tous les génies (chimique, civil, électrique, mécanique, métallurgique,...), les ingénieurs sont amenés à résoudre des problèmes d'optimisation c'est à dire à choisir entre plusieurs solutions possibles, celle qui est la meilleure. Il s'agit donc de minimiser, ou de maximiser un critère (coût, temps, vitesse, énergie, rendement,...) sur l'ensemble de toutes les solutions admissibles.

Notre travail s'inscrit dans cette aspect, c'est-à-dire de comparer la méthode Multigrilles avec des autres méthodes de résolution du système algébrique en termes du taux de convergence pour une solution spécifique. Nous avons étudié les équations de Navier-Stockes.

Au cours de nos recherches, nous avons abouti à des résultats importants: Ci dessus

- La méthode Multigrilles est la plus performante, elle converge à 80 itérations pour un nombre de points totales $10 \times 10 \times 10$, à 58 itérations pour un nombre de points totales $18 \times 18 \times 18$, à 55 itérations pour un nombre de points totales $34 \times 34 \times 34$ et à 31 itérations pour un nombre de points totales $66 \times 66 \times 66$.

Donc on dit que, plus on raffine le maillage plus la méthode Multigrilles converge rapidement.

Pendant cette investigation, on a éprouvé énormément de difficultés à la compréhension des différents algorithmes en particulier la méthode multigrilles ainsi que les tests de convergence qui exigent beaucoup de notions mathématiques.

Conclusion et Perspectives

- Il en est de même pour les méthodes de discrétisation particulièrement celle des éléments finis qui nous a posé des difficultés surtout dans la recherche bibliographique malgré nos résultats qui ont été concluants.
- Les ordinateurs dont nous disposons sont très en deçà des capacités nécessaires pour établir les calculs des systèmes matriciels importants, c'est la raison pour laquelle nous n'avons pas réalisé une étude à grande échelle. Pour cela une centrale de calculs est indispensable.

Toutefois, une amélioration notable de ce travail serait à ajouter des sous-routines des méthodes itératives au programme Fortran en 3D et compare entre eux.

ANNEXE A :
LES ETAPES DE
LA SIMULATION

Introduction

On présente les étapes d'une simulation d'une façon générale, en précisant le cas étudié (Lid-driven cavity)

Tout d'abord ; on commence à construire la géométrie par le logiciel Gambit et ensuite on fait les calculs par Fluent. On s'intéresse à la simulation pour ce type de cavité en deux dimensions et finalement et traite celle à trois dimensions.

1. Simulation de la cavité couvercle entraînée en 2 dimensions :

1.1. Construction de la géométrie dans Gambit :

On a crée quatre points et faisant la liaison entre eux et pour crée une face

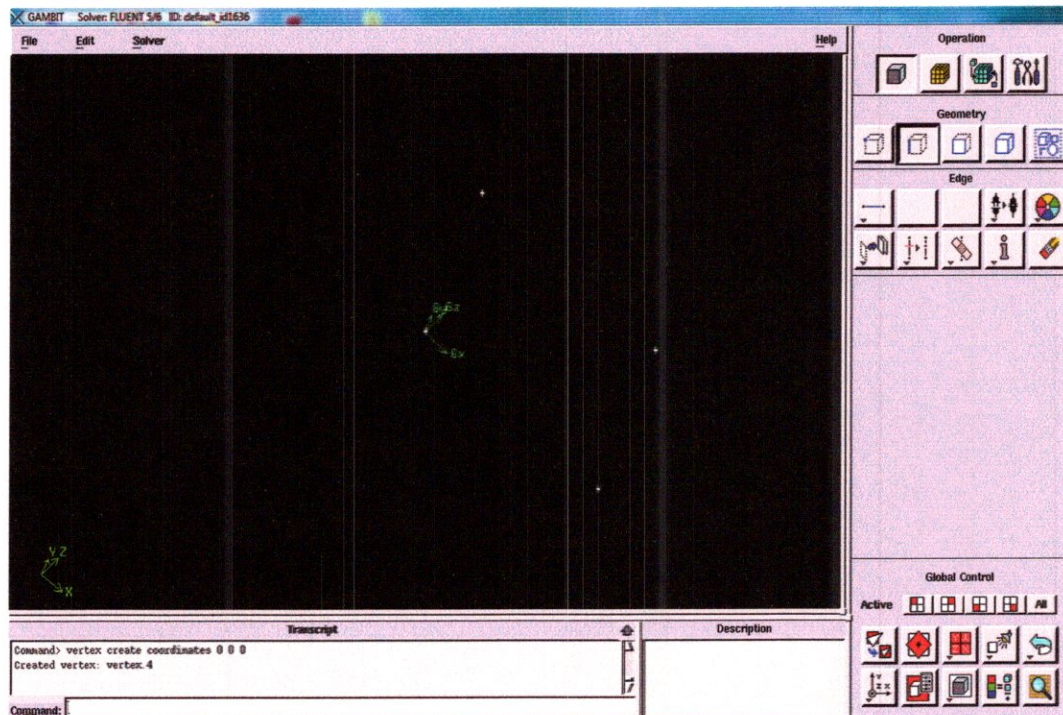


Figure A.1: Création des points.

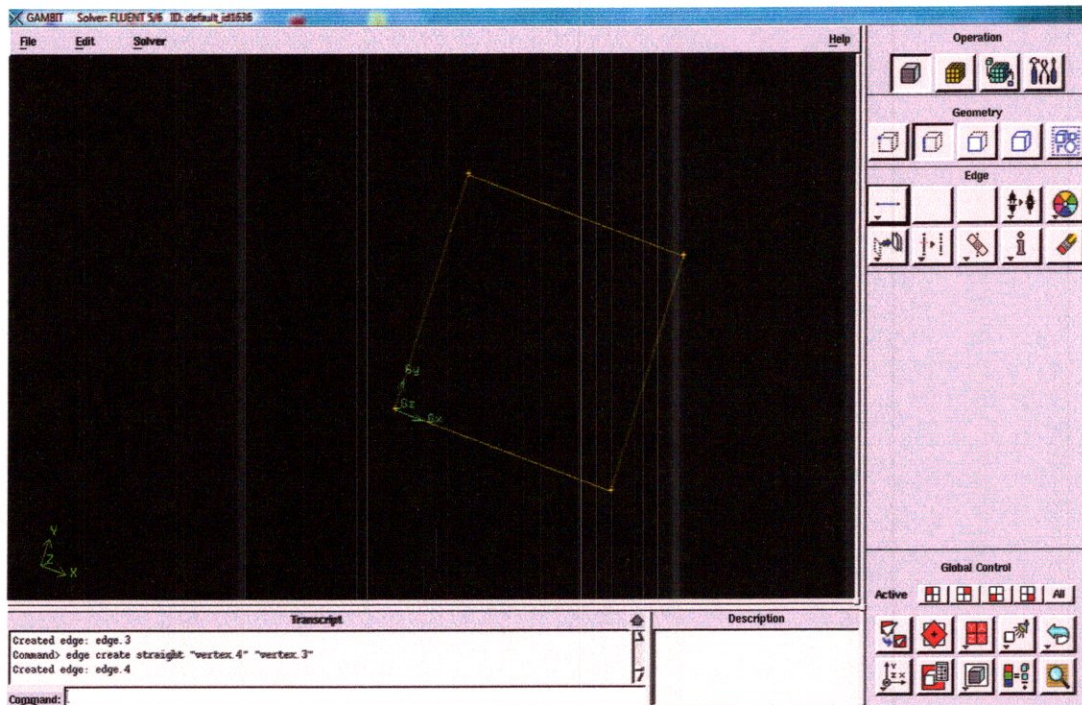


Figure A.2 : Génération de la face.

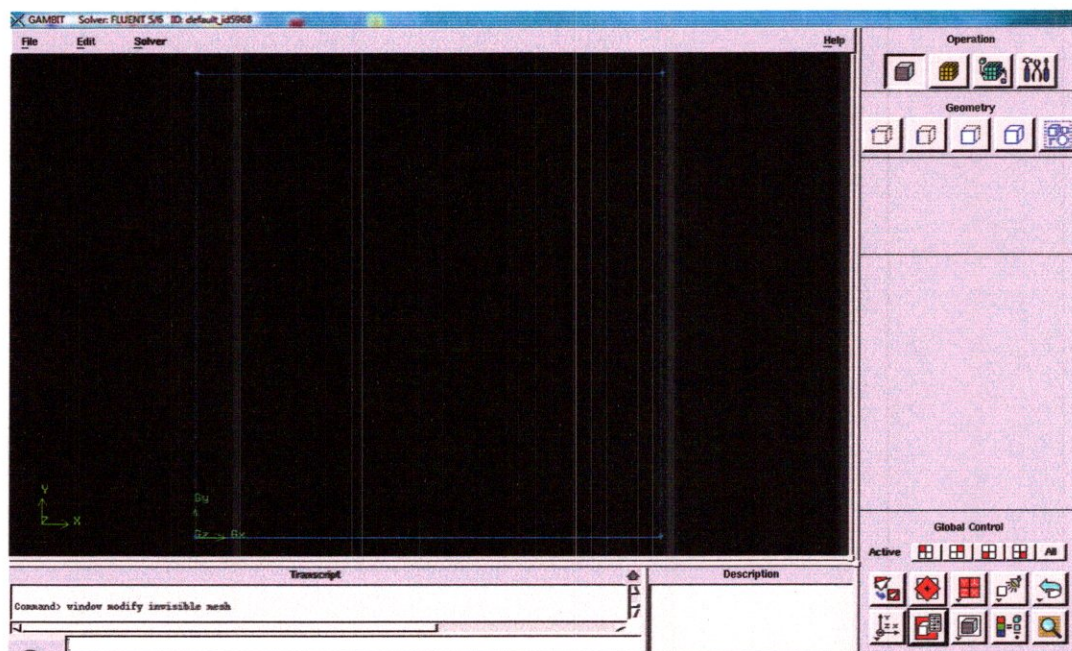


Figure A.3 : Présentation de la géométrie finale.

1.2. Les conditions aux limites et la génération du Maillage:

On crée les conditions aux limites pour les lignes et la face et on lance un maillage structuré rectangulaire non uniforme.

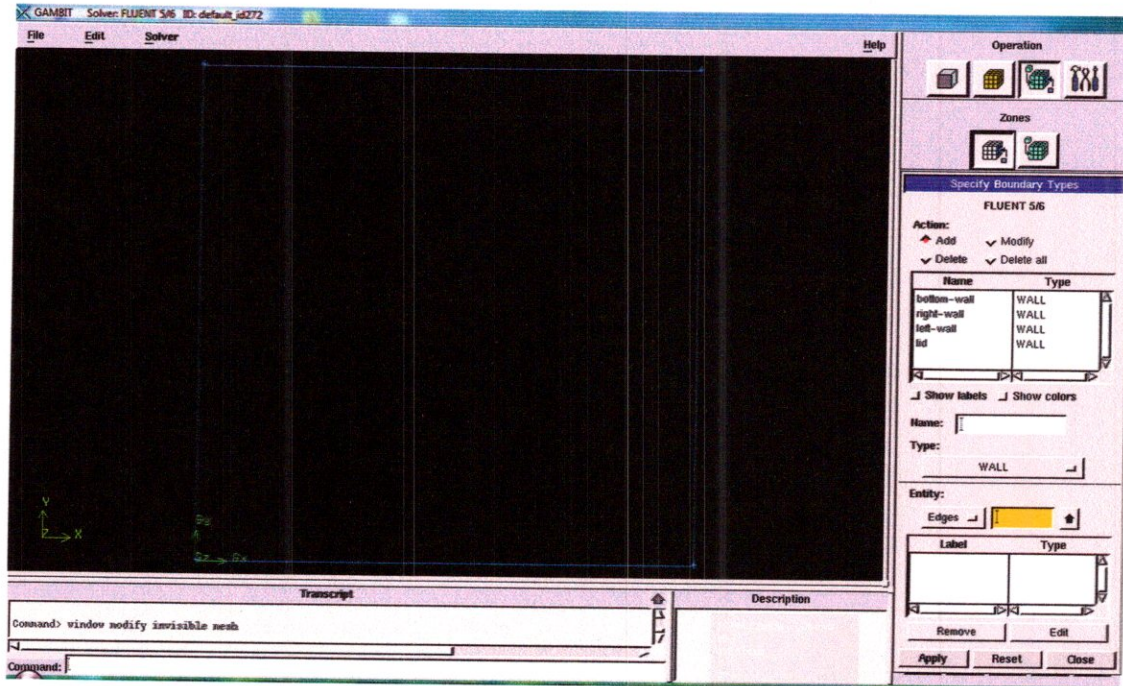


Figure A.4: Création des conditions aux limites.

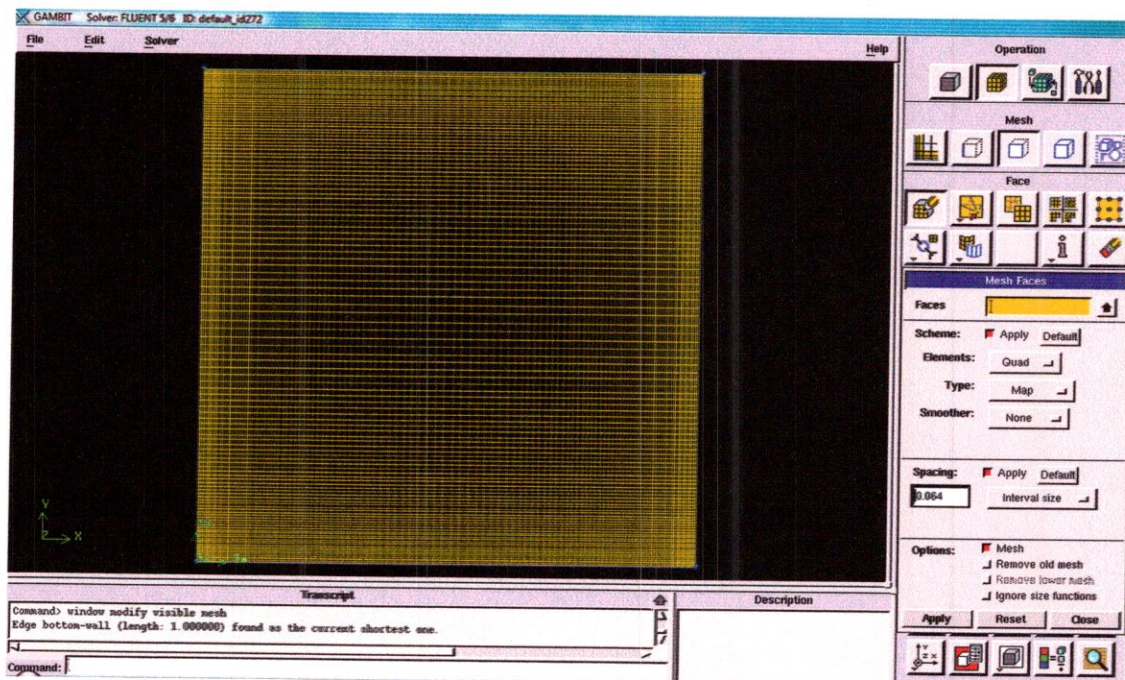


Figure A.5 : Le maillage de la cavité.

1.3. Le calcul dans Fluent :

On suit les étapes suivantes :

L'étape 01 : Maillage

- Lire le fichier maillage :

Fluent affichera le fichier de maillage et enregistrera de fichier.

- Vérification du maillage :

Ce procédé contrôle l'intégrité de la maille. S'assurer que le volume minimum enregistré est un numéro positif.

- Evaluer la grille :

Contrôler les limites du domaine pour savoir si elles correspondent aux dimensions matérielles réelles. Autrement la grille doit être évaluée avec les unités appropriées.

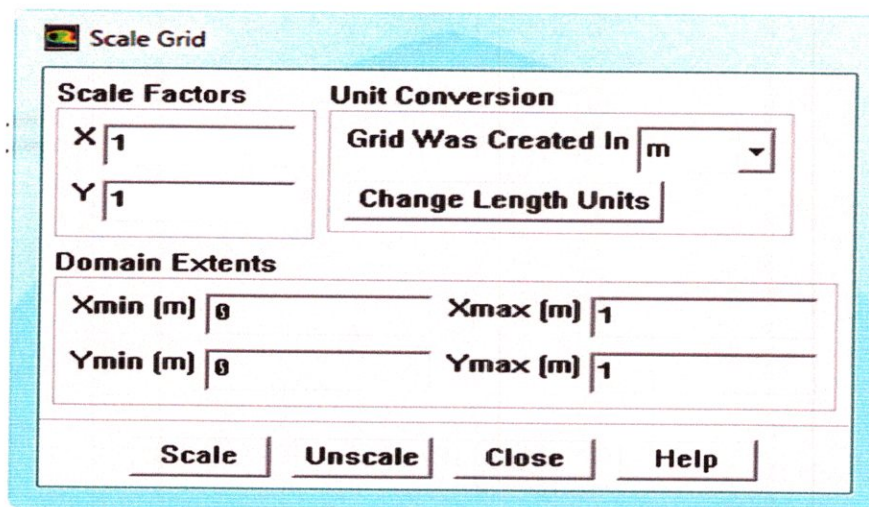


Figure A.6 : icône du contrôle du maillage.

- Visualiser le maillage :

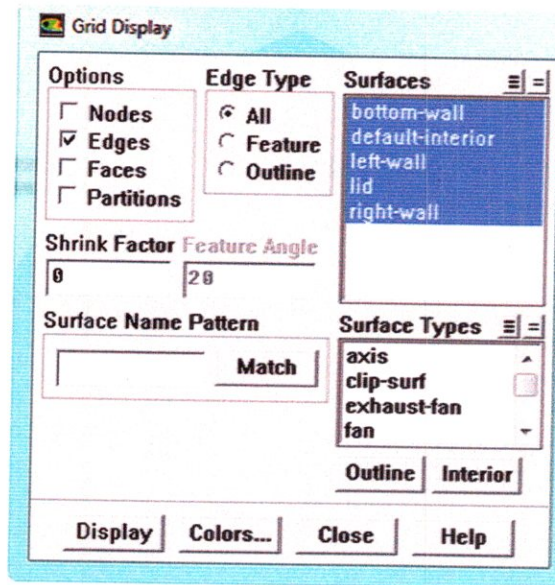


Figure A.7 : icône pour la présentation des différents graphes

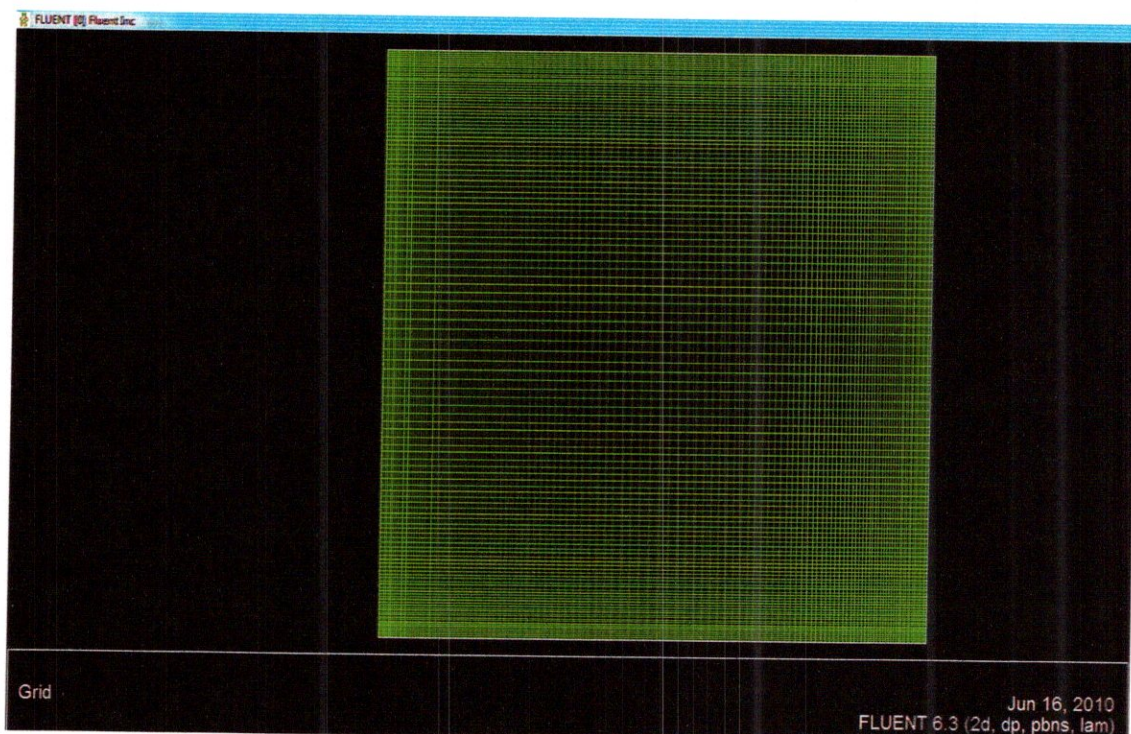


Figure A.8 : Présentation du maillage de la cavité dans FLUENT

L'étape 02 : Matériels

On introduit les valeurs de la masse volumique et la viscosité dynamique

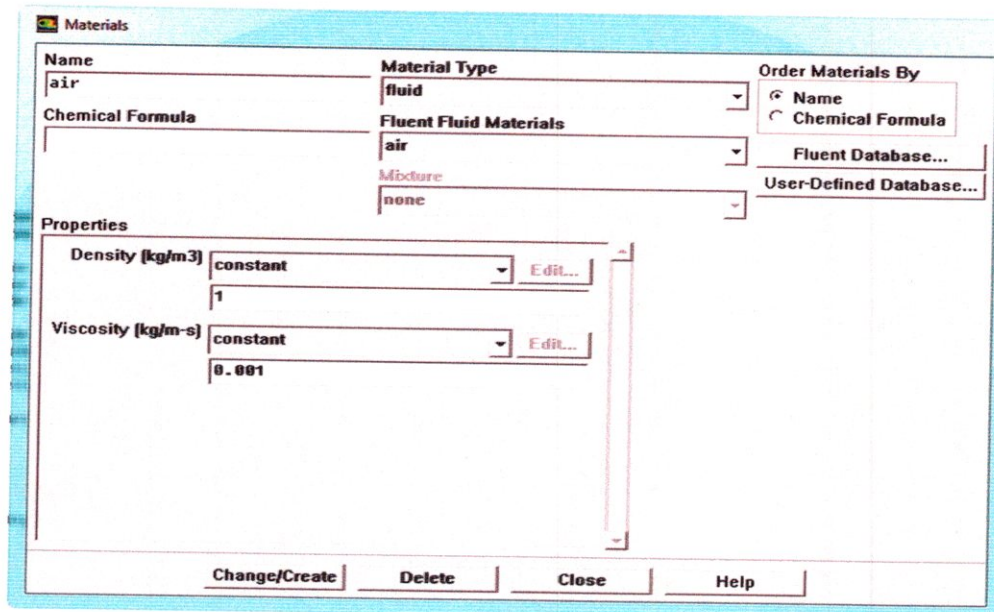


Figure A.9 : icône pour citer le type d'écoulement.

L'étape 03 : Les conditions aux limites

Citer les conditions aux limites de chaque cotés et le mouvement de translation de la partie supérieure avec une vitesse de 1m/s

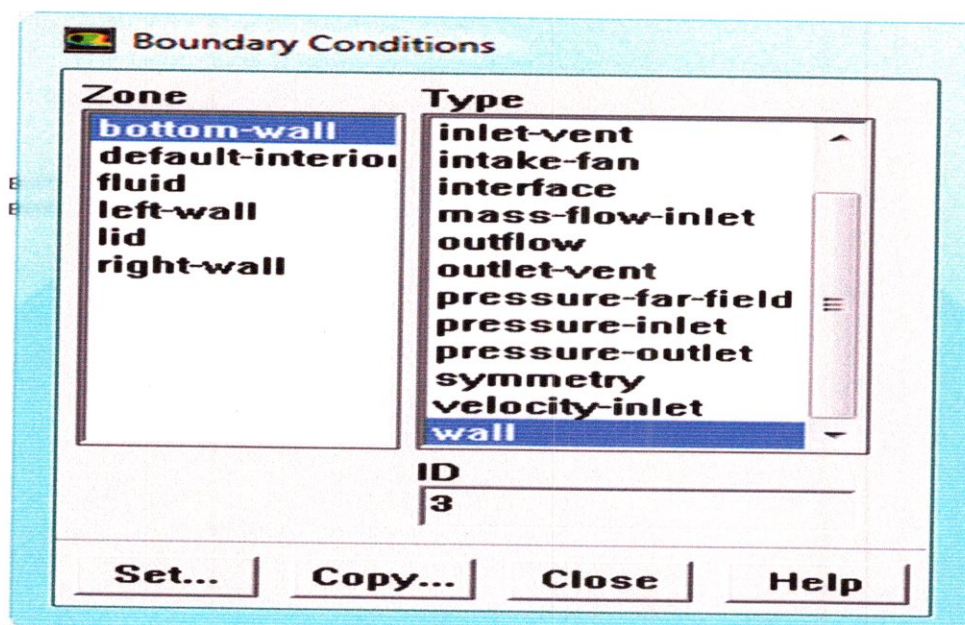


Figure A.10 : définition des conditions aux limites

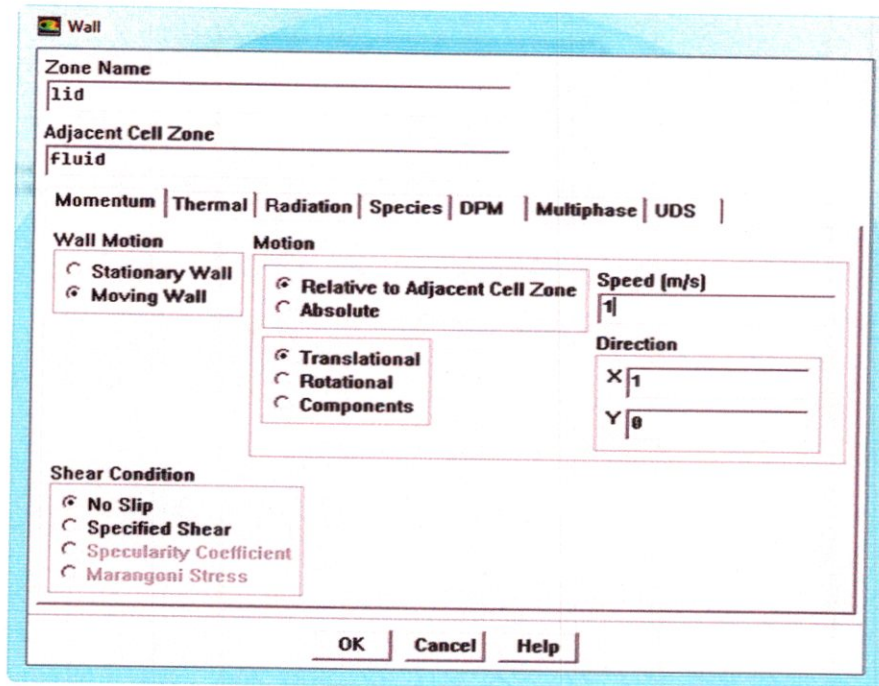


Figure A.11 : définition du mouvement suivant l'axe x.

L'étape 04 : Solution

- Initialiser l'écoulement :

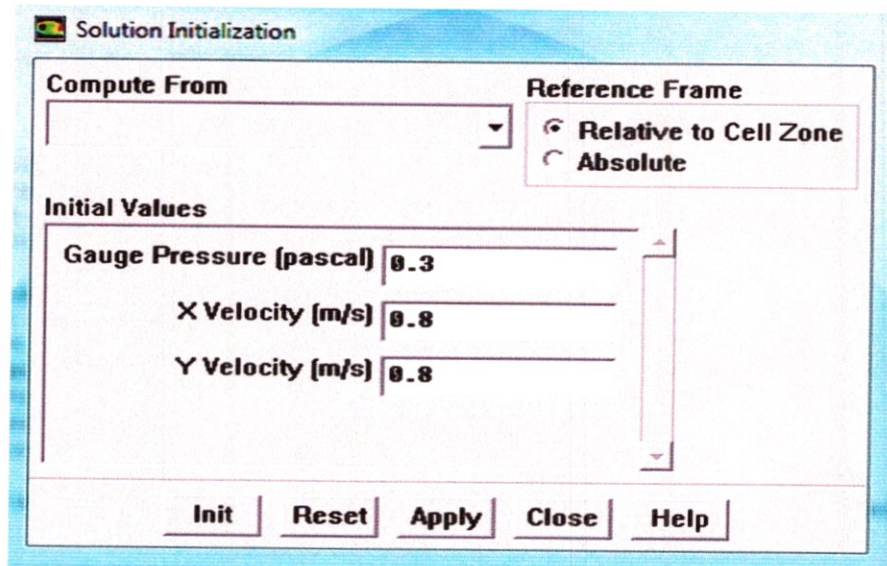


Figure A.12 : Icône pour initialiser les valeurs.

- Permettre le traçage des résiduels pendant le calcul :

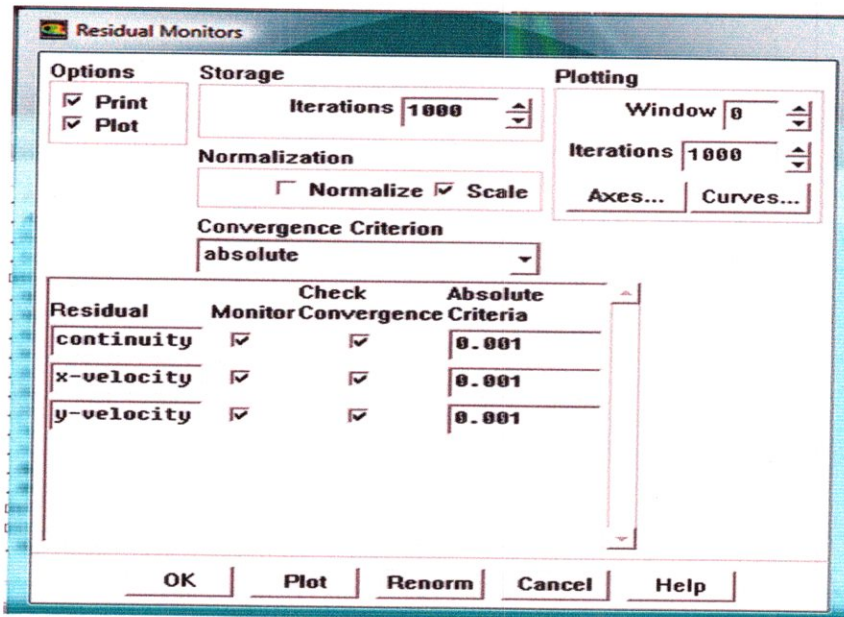


Figure A.13 : fenêtre pour permettre le traçage du résiduel.

- Commencer le calcul par demander 400 itérations

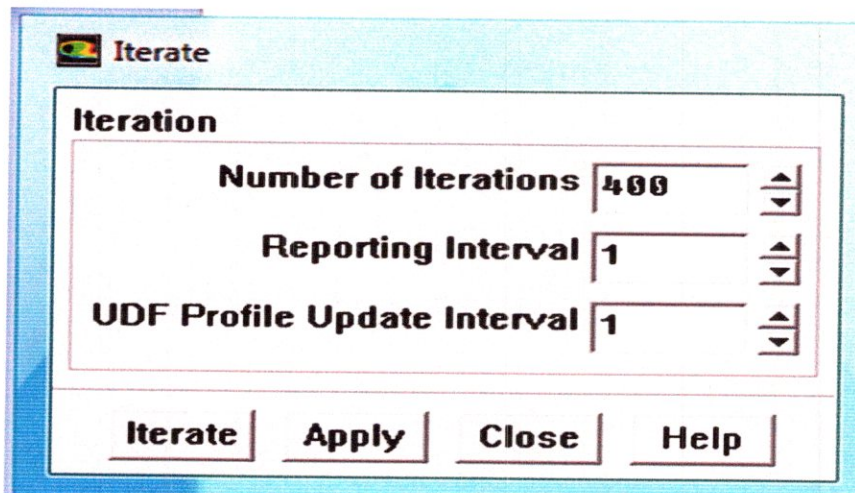


Figure A.14 : fenêtre pour introduire le nombre d'itérations.

2. Simulation de la cavité couverte entraînée en trois dimensions :

2.1. Construction de la géométrie dans Gambit :

On crée le volume avec ses propres dimensions avec les conditions aux limites

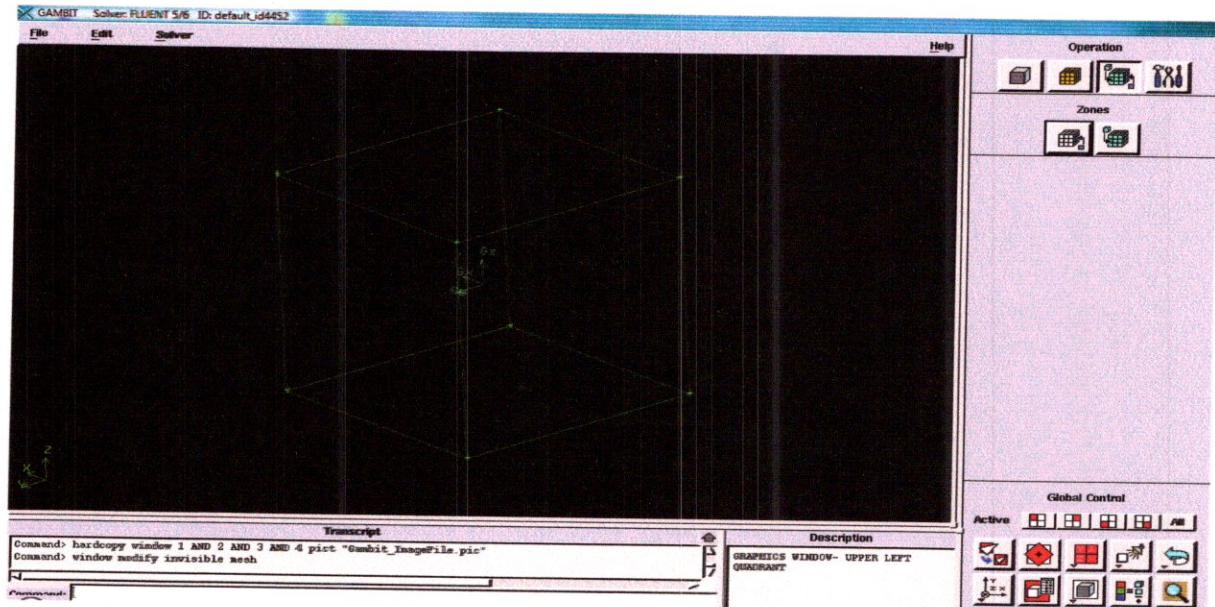


Figure A.15 : création du volume

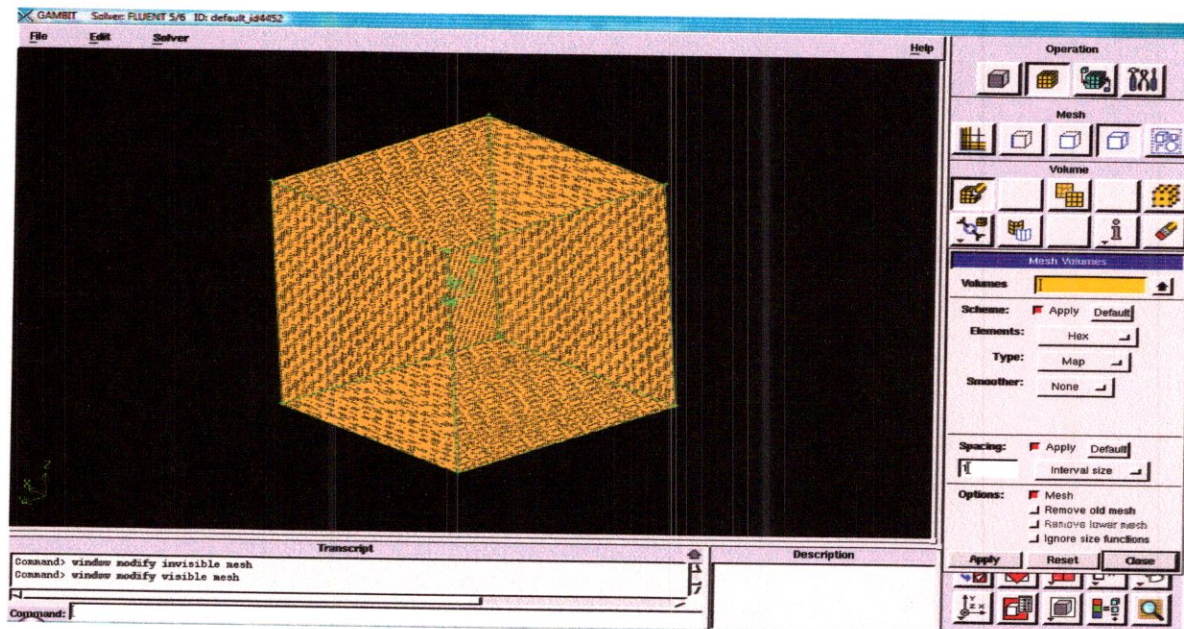


Figure A.16 : Présentation du maillage de la cavité en trois dimensions dans Gambit

2.2. Le calcul par Fluent :

On suit les même étapes que précédemment lors de la simulation en deux dimensions qui sont:

L'étape 01 : Maillage

- Lire le fichier maillage :

Fluent affichera le fichier de maillage et enregistrera ce derniers.

- Vérification du maillage :

Ce procédé contrôle l'intégrité de la maille. S'assurer que le volume minimum enregistré est un numéro positif.

- Evaluer la grille :

Contrôler la limite du domaine pour savoir si elles correspondent aux dimensions matérielles réelles. Autrement la grille doit être évaluée avec les unités appropriées.

- Visualiser le maillage :

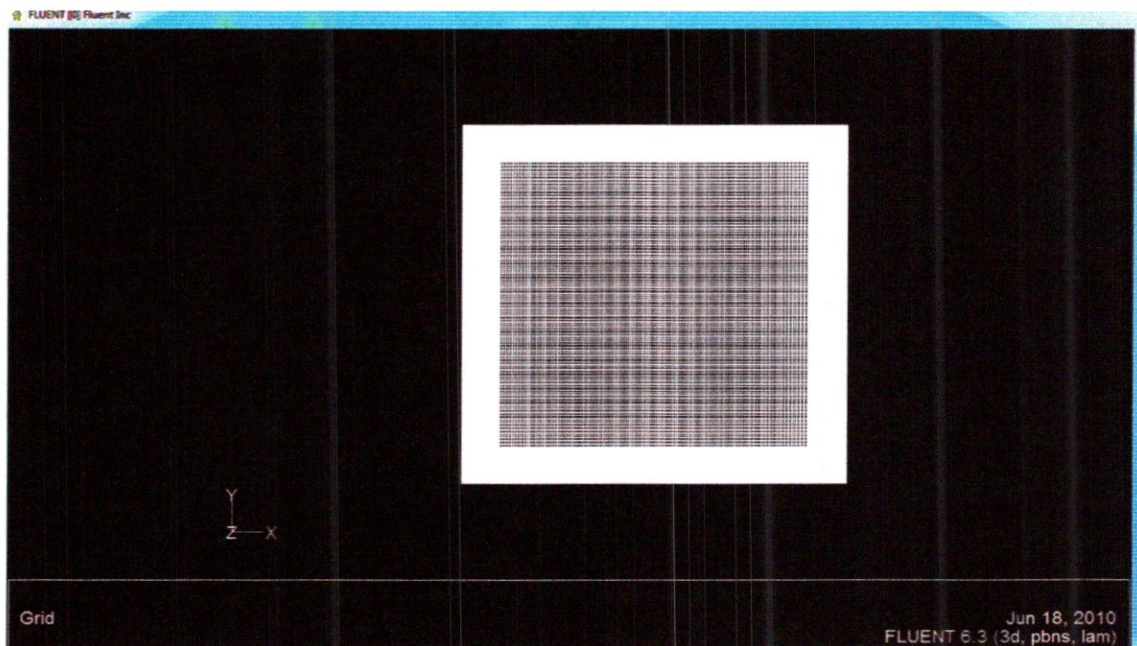


Figure A.17: Présentation du maillage de la cavité dans Fluent.

L'étape 02 : Matériels

On introduit les valeurs de la masse volumique et la viscosité dynamique.

L'étape 03 : Les conditions aux limites

Citer les conditions aux limites de chaque coté et le mouvement de translation de la partie supérieure avec une vitesse de 1m/s.

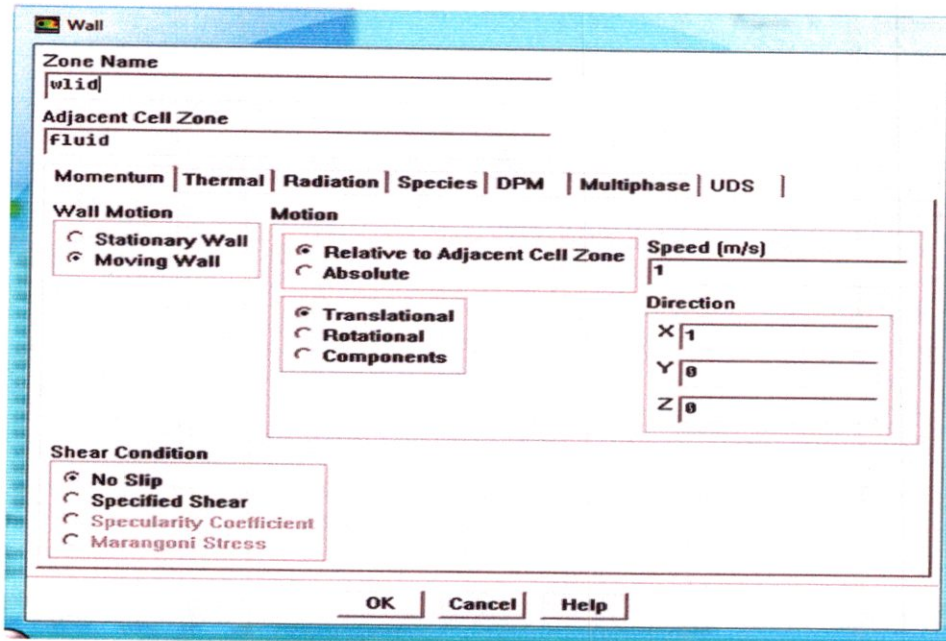


Figure A.18 : définition du mouvement de la partie supérieure de la cavité.

L'étape 04 : Solution

- Initialiser l'écoulement :

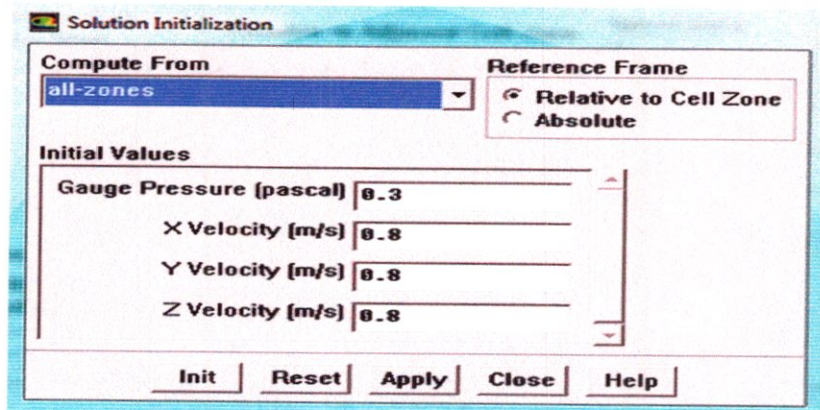


Figure A.19: fenêtre d'initialisation

- Traçage des résiduels pendant le calcul :

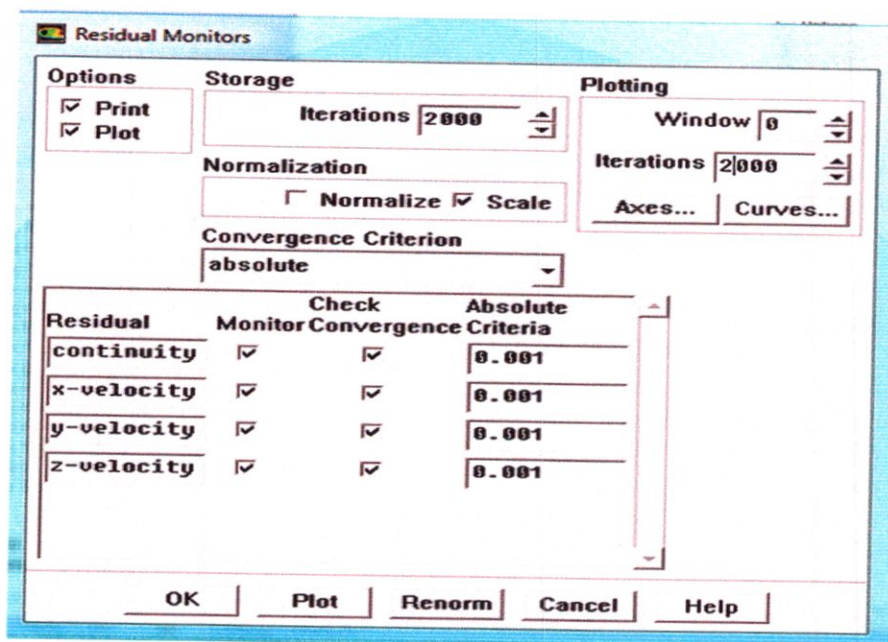


Figure A. 20: fenêtre pour le traçage de résiduels.

- Démarrer le calcul avec deux mille itérations

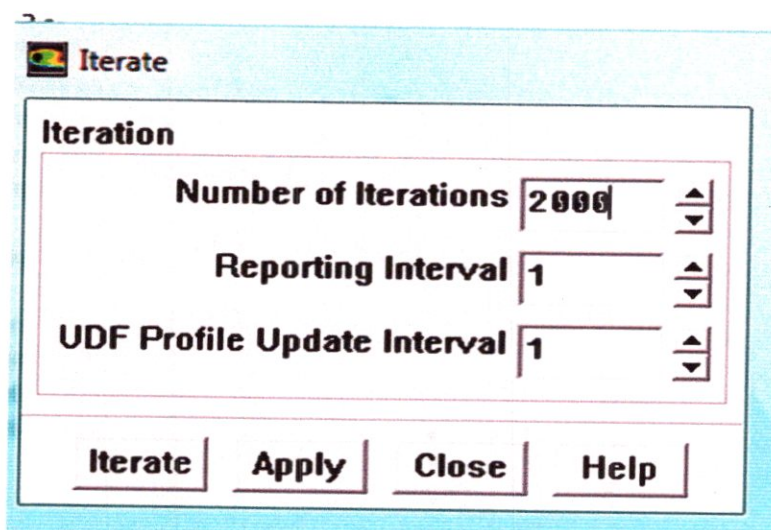


Figure A. 21: Icône pour le nombre d'itérations.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] : Ioan C. POPA. « MODELISATION NUMERIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE METHODE DES VOLUMES FINIS». UNIVERSITARIA Craiova, 2002.
- [2] : A. GOURDIN et M .BOUMAH RAT. « METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77 ». Technique et documentation Paris France, Octobre 1991, 2^{ème} Édition.
- [3] : P. LASCAUX et R. THEODOR. « ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE APPLIQUEE A L'ART DE L'INGENIEUR Tome 2 : méthodes itératives» 2ème cycle. ECOLES D'INGENIEUR.
- [4]: J.H.Ferziger et M.Péric «COMPUTATIONAL METHODS FOR FLUID DYNAMICS » 3^{ème} Édition.
- [5]: A.DJERAD. Thèse de Magistère «ETUDE NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT REACTIF DANS UNE CONFIGURATION AXISYMETRIQUE PAR LA METHODE DE VOLUMES FINIS»
- [6]: Joe D. Hoffman «NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS» Second Edition Revised and Expanded
- [7]: Eric Goncalvès. Thèse «RESOLUTION NUMERIQUE, DISCRETISATION DES EDP ET EDO» septembre 2005
- [8]: VICTOR METREVELI « MECANIQUE DES FLUIDES » OFFICES DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
- [9] : Claude BREZINSKI « METHODES NUMERIQUES DE BASE » techniques de l'ingénieur.
- [10] : Michele Gaffuri «Calcul aérodynamique de l'avion Smartfish » Octobre 2004 - F'évrier 2005