

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Saâd DAHLAB-Blida 1



Faculté des Sciences  
Département de Physique  
Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnement-Matière (LPTHIRM)

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE  
*pour l'obtention du diplôme de Master en Physique*

Option : Physique théorique

---

**SUR LES POTENTIELS EXACTEMENT  
SOLVABLES VIA L'ALGÈBRE DE LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$**

---

*présenté par :*

FATEH MERABTINE

*soutenu le mercredi 30 juin 2021 devant le jury composé de :*

Melle. SAMIRA SAIDANI	M.A.A	U. S. D.-Blida 1	Présidente
Mr. M'HAMED HADJ-MOUSSA	M.C.B	U. S. D.-Blida 1	Examinateur
Mr. SID-AHMED YAHIAOUI	M.C.B	U. S. D.-Blida 1	Rapporteur/Superviseur

*Blida, 2020-2021.*



# REMERCIEMENTS

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'étude.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à mon superviseur de mémoire monsieur SID-AHMED YAHIAOUI, Maitre de conférences B à l'université de Blida 1, pour sa confiance, ses encouragements et ses précieux conseils qu'il m'a inculqués durant mon travail de master.

Je tiens à remercier Mr. SAMIRA SAIDANI, Maitre assistante A à l'université de Blida 1, d'avoir accepté de présider le jury de mon présent mémoire.

Je remercie également Mr. M'HAMED HADJ MOUSSA, Maitre de conférences B à l'université de Blida 1, d'avoir voulu expertiser mon travail en sa qualité d'examineur.

Mes plus grands remerciements vont aux membres de ma famille. À mes parents, j'aimerais les remercier de m'avoir aidé pour aller vers l'avant, mais leur amour ne s'embrasse ni ne s'acquiesce de remerciements. À mes sœurs Souhila et Khadidja. Sans oublier tous mes ami(e)s et collègues.

**Résumé.** – Dans ce travail de master, nous combinons la représentation différentielle des générateurs du groupe de LIE  $SO(2, 2)$  aux systèmes quantiques dotés d'une masse dépendante de la position (PDM), afin d'appliquer la méthode des algèbres aux spectres générés (SGA) associée à l'algèbre non-compacte  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . Si cette réalisation est possible, alors il nous est possible de générer l'ensemble des douze (12) potentiels exactement solvables de NATANZON, ainsi que leur spectre en énergie. Cette construction nous conduit à conclure que l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$  est bel et bien une excellente algèbre génératrice de potentiels.

**Mots clés.** – *Algèbres et groupes de LIE ; Masse dépendante de la position ; Algèbre aux spectres générés ; Potentiels de NATANZON.*

**Abstract.** – In the present master's thesis, we will combine differential representation of the  $SO(2, 2)$  generators for the quantum systems endowed with position dependant mass, in order to apply the spectrum generating algebra (SGA) technique for the non-compact algebra  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . If a such realization is indeed possible, then it is available to generate (deduce) all both families of the NATANZON exactly solvable potentials, as well as their associated spectrum energy. A such construction leads us to confirm that the algebra under study is indeed an excellent generating algebra for deducing the different NATANZON potentials.

**Keywords.** – *LIE Groups and Algebra ; Position dependant mass ; Spectrum generating algebra ; NATANZON potentials.*

# TABLE DES FIGURES

2.1	Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type quadratique de la masse pour $m_0 = 0.15$ , (cf., Réf. [31]). . . . .	17
2.2	Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type cosinus de la masse pour $m_0 = 1.15$ , (cf., Réf. [31]). . . . .	18
2.3	Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type linéaire de la masse, (cf., Réf. [31]). . . . .	19

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Liste des figures</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>v</b>
<b>1 Groupes et algèbres de LIE : Cas particulier de l’algèbre <math>\mathfrak{so}(2, 2)</math></b>	<b>1</b>
1.1 Généralités sur la notion de groupe . . . . .	1
1.1.1 Quelques propriétés sur les groupes . . . . .	2
1.2 Structure des groupes de LIE . . . . .	2
1.2.1 Définition : . . . . .	2
1.2.2 Représentation exponentielle d’un groupe de LIE . . . . .	4
1.2.3 Homomorphismes et isomorphismes. Définitions . . . . .	4
1.2.4 Groupes de LIE compacts et non-compacts . . . . .	5
1.3 Algèbre de LIE . . . . .	5
1.3.1 Algèbre de LIE <i>versus</i> groupe de LIE . . . . .	6
1.4 Réalisation de l’algèbre de LIE $\mathfrak{so}(2, 2)$ . . . . .	6
1.4.1 Opérateurs de CASIMIR de l’algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$ . . . . .	8
1.5 Algèbre des spectre générés (SGA) . . . . .	9
1.5.1 Symétries dynamiques (DS, <i>dynamical symmetries</i> ) . . . . .	10
<b>2 Systèmes dotés de masse dépendante de la position</b>	<b>12</b>
2.1 Hamiltonien de DE SOUZA-DUTRA et ALMEIDA . . . . .	13
2.2 Hamiltonien de VON ROOS et BEN DANIEL-DUKE . . . . .	14
2.3 Forme générale du hamiltonien BDD avec des opérateurs d’échelle de premier ordre . . . . .	14
2.4 Exemples de systèmes PDM avec opérateurs d’échelle de premier ordre . . . . .	16
2.4.1 Profil quadratique . . . . .	17
2.4.2 Profil de masse cosinus . . . . .	18
2.4.3 Profil linéaire . . . . .	19
<b>3 Construction des potentiels exactement solvables</b>	<b>20</b>
3.1 Hamiltonien de VON ROOS et sa réalisation différentielle . . . . .	21

3.2	Réalisation différentielle de l'opérateur de CASIMIR de l'algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$ . .	23
3.3	Algèbre des spectres générés (SGA) de l'algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$ . . . . .	25
3.4	Applications : déduction des potentiels exactement solvables de NATANZON	28
3.4.1	Potentiels de NATANZON dégénérés ( $b = 1$ et $q = 0$ ) . . . . .	28
3.4.2	Potentiels de NATANZON non-dégénérés ( $q = 1$ et $b = 1$ ) . . . . .	31
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>35</b>
	<b>Références</b>	<b>37</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Parmi les systèmes physiques qui ont attiré l'attention de la communauté physicienne ces dernières années se trouve les systèmes quantiques dotés d'une masse dépendante de la position [1, 2, 3], i.e.  $m = m(x)$ . Leur particularité réside dans le fait qu'ils permettent de généraliser le cas d'une masse constante, en posant  $m(x) = 1$ . L'équation de SCHRÖDINGER associée est appelée *équation de SCHRÖDINGER à masse effective*. Cette dépendance de la position doit-être prise (en réalité) au sens péjoratif, car on désigne par là que la particule est soumise à un champ (i.e. un potentiel) effectif moyen donnant l'impression que la particule change de masse lors de son déplacement dans des potentiels exactement solvables.

Ces derniers sont des potentiels qui admettent des solutions exactes dans le cadre des équations d'onde non-relativiste (SCHRÖDINGER) et relativistes (KLEIN-GORDON, DIRAC, ...) et sont considérés stationnaires. Ces classes de potentiels sont souvent désignées sous l'appellation *classe des potentiels* de NATANZON [4] et elles sont subdivisées en deux sous-classes : classe de NATANZON dégénérée et classe de NATANZON non-dégénérée. Il a été démontré que ces classes de potentiels peuvent être déduites par plusieurs méthodes et techniques différentes (et qui s'avère être aussi équivalentes). Parmi ces méthodes, on peut citer à titre d'exemple : *la théorie des groupes et algèbres de LIE* [5, 6, 7], *la supersymétrie de la mécanique quantique* [8] et *les intégrales de chemin* [9], etc.

En physique théorique et mathématique, plusieurs méthodes et techniques ont été employées afin de résoudre analytiquement l'équation de SCHRÖDINGER [10, 11, 12]. Parmi ces méthodes, nous avons cité ci-dessus deux méthodes et qui vont nous intéresser tout particulièrement dans le présent mémoire, à savoir : **la supersymétrie de la mécanique quantique** [13, 14] (avec ses variantes : potentiels aux formes invariants [15] et méthode de factorisation [8]) et **l'algèbre de LIE** [5, 6, 7]. La première est reconnue depuis comme une généralisation de la *méthode de la factorisation* en introduisant les opérateurs de création et d'annihilation à deux hamiltoniens isospectraux ; tandis que la seconde introduit des techniques algébriques très puissantes utilisées pour construire l'hamiltonien du système partant de l'opérateur de CASIMIR du groupe en question.

Dans le contexte de la théorie des groupes de LIE, le traitement algébrique par les groupes dynamiques [16] a permis de trouver une large classe de potentiels définie par NATANZON pour lesquels des solutions analytiques aux problèmes des états liés peuvent



être obtenues.

Une conception différente de l'algèbre des spectres générés (*spectrum-generating algebra* (SGA)) [17, 18, 19, 20, 21], bien que pas totalement indépendantes des autres concepts, a été introduite pour décrire des systèmes physiques. Dans sa nouvelle version, les générateurs de l'algèbre des potentiels générés peuvent être utilisés pour remplacer les variables canoniques dans l'équation de SCHRÖDINGER de telle manière que les états liés du spectre d'énergie sont connectés aux valeurs propres du générateur compact du groupe non-compact de LIE [22, 23, 24, 25, 26, 27]. Cette méthode est essentiellement fondée sur une réalisation infinitésimale des générateurs du groupe en termes des opérateurs différentiels ainsi que la connaissance de la représentation unitaire du groupe. Elle a permis de générer les solutions analytiques de l'équation de SCHRÖDINGER à toute la classe hypergéométrique dégénérée de Natanzon comptant trois (3) potentiels (on retrouve, les potentiels de l'oscillateur harmonique simple, COULOMB et MORSE), ainsi que les solutions analytiques de la classe hypergéométrique de NATANZON comptant en tout neuf (9) potentiels (les potentiels hyperboliques de SCARF, PÖSCHL-TELLER, PÖSCHL-TELLER généralisé et leurs version trigonométriques, ainsi que les potentiels d'ECKART, HULTHÈN et ROSEN-MORSE).

Le présent mémoire contient trois (3) chapitres : **le premier chapitre** est consacré à la théorie des groupes de LIE et à leur représentation. Nous introduisons des notions élémentaires sur l'algèbre non-compacte de LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$  [28], puisque c'est elle qu'est utilisée afin de générer l'ensemble des potentiels de NATANZON (dégénérés et non-dégénérés). **Le second chapitre** est entièrement consacré aux systèmes quantiques dotés de masses dépendantes de la position. Nous ferons connaissance avec l'hamiltonien généralisé de VON ROOS et de son importance dans la théorie des potentiels quantiques. **Le dernier chapitre** est dédié à notre travail de mémoire. A cette fin, nous choisirons en amont (et convenablement) la fonction d'onde dans le but est d'exprimer l'hamiltonien de VON ROOS et de le juxtaposer à l'opérateur de CASIMIR du premier chapitre. Cette combinaison nous conduit à déduire l'expression du terme  $V(x) - E$  en termes d'une *fonction génératrice*, notée  $\mathfrak{S}(x)$ , décrivant une équation différentielle ordinaire à résoudre. Sa solution (en appliquant SGA) permet alors de retrouver l'expression du potentiel  $V(x)$  et de son spectre en énergie  $E$ . Ayant ces données en main, il nous reste juste à générer l'ensemble des douze (12) potentiels de NATANZON. Nous verrons que chaque classe est caractérisée par ses propres paramètres. Il en est de même pour les différents potentiels appartenant à ladite classe.

Enfin, une conclusion générale clôt ce manuscrit suivi des références.



# GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE : CAS PARTICULIER DE L'ALGÈBRE $\mathfrak{so}(2, 2)$

Parmi les plus grandes avancées mathématiques conçues au cours du XIX<sup>ième</sup> et XX<sup>ième</sup> siècles, on retrouve certainement la théorie des groupes. Cette dernière est connue sous ses deux versions différentes ; *groupes discrets et continus de LIE*. Son importance est capitale en physique, puisqu'elle nous permet de décrire les symétries qui interviennent dans la description d'un système physique quelconque. Ces symétries apparaissent sous formes de régularités et/ou d'irrégularités dans les structures des systèmes physiques et aussi sous forme d'invariance dans les équations physiques. Ses applications se révèlent d'une grande fécondité en physique ; à titre d'exemple, en physique classique (cristallographie et équations d'HAMILTON), en relativité (groupes de LORENTZ, POINCARÉ, MINKOWSKY), en mécanique quantique (classification des potentiels exactement solvables, quasi-exacts et conditionnellement exacts), et en physique des particules (classifications des particules élémentaires), etc. Son lien avec la physique se trouve dans le concept des représentations des groupes et de leurs algèbres dynamiques.

## 1.1 Généralités sur la notion de groupe

Désignons par  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbf{GL}(\mathbb{E})$  le groupe des isomorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $\mathbb{E}$ . On dit (par définition) que la représentation d'un groupe  $G$  est un objet de l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  et d'un morphisme de groupe  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(\mathbb{E})$ . Par conséquent, l'ensemble des transformations linéaires formant un groupe, muni d'une loi de composition  $*$ , si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. La loi de composition  $*$  doit être interne sur  $G$ , c'est-à-dire  $* : G \times G \rightarrow G$ .

2. L'application est associative, i.e. pour tout  $x, y \in G$ , alors  $\forall x, y \in G, xy = yx$ . En d'autres termes, le produit de deux transformations (dans l'ensemble) appartient également à l'ensemble  $\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ , avec  $g' \in G$ .
3. L'application admet un élément neutre, noté  $e \equiv \mathbb{1}_{\mathbb{E}}$ , tel que  $\forall x \in G, x * e = e * x = e$ . Si une certaine transformation appartient à l'ensemble, alors la transformation inverse existe et appartient à l'ensemble  $\rho(g^{-1}) = \rho^{-1}(g)$ .
4. Enfin, l'application accepte aussi un élément inverse (dit symétrique), tel que  $\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$ . Ceci revient à dire que le produit de toute transformation par son inverse est une transformation identique, i.e.  $\rho(\mathbb{1}_{\mathbb{E}}) = \text{id}_{\mathbb{E}}$ .

Une telle représentation est souvent désignée par la notation  $(\mathbb{E}, \rho)$ , ou encore  $(G, *)$  pour désigner le groupe. La transformation linéaire associée est entièrement définie par sa représentation matricielle. Dans ce cas, on parle de *groupes de transformations linéaires* ou encore de *groupes de matrices*.

### 1.1.1 Quelques propriétés sur les groupes

Des définitions citées ci-dessus, il est possible de tirer quelques propriétés concernant les groupes. Ainsi, on dit :

1. qu'un groupe  $(G, *)$  est abélien si et seulement si la loi de composition  $*$  est commutative.
2. tout groupe possède un seul élément neutre, noté  $e$ . En effet, si l'élément  $e'$  existe, alors  $e * e' = e' \equiv e$ .
3. tout élément possède un seul et unique élément symétrique. Pour ce faire, soit  $x \in G$  et  $y, z$  deux éléments symétriques de  $x$ , i.e.  $y * x = x * z = e$ . Par conséquent, on déduit :

$$(y * x) * z = y * (x * z) \quad \text{implique} \quad y = z.$$

4. le nombre des éléments du groupe désigne l'ordre du groupe.

## 1.2 Structure des groupes de LIE

### 1.2.1 Définition :

Un groupe de LIE est un ensemble muni de deux structures qui se complètent mutuellement. Il doit donc satisfaire :

1. une structure d'une variété différentiable [un genre d'espace de type plan  $\mathbf{P}^1$ , cercle  $\mathbf{C}^1$ , tore  $\mathbf{T}^2$  ou encore une sphère multi-dimensionnelle  $\mathbf{S}^n$ , etc.]
2. et aussi d'une structure de groupe définie précédemment.

On voit bien que la notion des variétés différentiables ont un rôle très important à jouer dans la définition des groupes de LIE, puisque les paramètres du groupe de LIE sont définis continus sur un domaine connexe. Ceci nous conduit à prendre en considération ces autres caractéristiques :

1. Les éléments du groupe sont des fonctions continues et différentiables.
2. Le produit de deux éléments du groupe est une fonction continue et différentiable.
3. L'élément inverse du groupe est une fonction continue et différentiable.

**Exemple illustratif.** – Afin d'illustrer ce qui vient d'être énoncé ci-dessus, prenons cet exemple illustratif (et simple) qui caractérise le groupe de rotation  $SO(2, \mathbb{R})$  dans le plan réel  $\mathbb{R}$ .

Dans les coordonnées polaires, une rotation quelconque peut-être représentée par la matrice de groupe  $SO(2, \mathbb{R})$  :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où  $\theta$  est l'angle de rotation, ainsi que son inverse donné par :

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Il est en effet facile de vérifier que les deux matrices satisfont bel et bien les propriétés d'un groupe citées ci-dessus. Ces fonctions-matrices sont considérées comme des fonctions continues et différentiables par rapport à la variable  $\theta$  sur l'intervalle périodique  $[0, 2\pi]$ . Il en est de même pour le produit  $R(\theta)R(\theta')$  (il est continue et différentiable par rapport à  $\theta$  et  $\theta'$ ). Par conséquent, on peut confirmer que le cercle  $\mathbf{C}^1$  satisfait la propriété d'une variété différentiable sur le groupe de rotation  $SO(2, \mathbb{R})$ .

### 1.2.2 Représentation exponentielle d'un groupe de LIE

Nous avons énoncé précédemment que la représentation d'un groupe  $G$  est un objet de l'espace vectoriel  $\mathbb{E}$  et d'un morphisme de groupe  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(\mathbb{E})$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  sur  $\mathbb{C}$  et que  $\mathbf{GL}(\mathbb{E})$  est le groupe des isomorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $\mathbb{E}$ .

Nous verrons que cette propriété d'*isomorphisme* est entièrement reformalisable par la fonction exponentielle. En effet, soit  $T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  l'élément d'un groupe du LIE (lui-même représenté par  $n$ -éléments  $\lambda_i$ , avec  $i = 1, 2, \dots, n$ ), tels que  $\lambda_i$  sont les paramètres continus de groupe. Bien entendu, l'opérateur  $T$  satisfait la propriété  $T(0, 0, \dots, 0) = \mathbb{1}_G$ . À titre comparatif, l'opérateur  $T$  est équivalent à l'opérateur-matrice  $R(\theta)$  dans l'exemple précédent.

Ainsi, on peut représenter les éléments de groupe comme suit :

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \exp \left[ -i \sum_{\mu=1}^n \lambda_\mu X_\mu \right],$$

où  $X_\mu$  sont communément appelés *les générateurs de groupe de LIE*. De cette dernière, il est tout à fait possible de déduire l'expression fondamentale des générateurs  $X_\mu$  en effectuant la différentiation de l'élément  $T$  par rapport à ses paramètres continus  $\lambda_\mu$ , i.e.

$$-iX_\mu T(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \equiv -iX_\mu = \frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda_\mu} \Big|_{\lambda=0}, \quad (1.1)$$

nous conduisons ainsi à décrire la transformation infinitésimale au voisinage de l'identité :

$$T(\delta\lambda_\mu) = T(0) + \frac{\partial T(\lambda)}{\partial \lambda_\mu} \Big|_{\lambda=0} \delta\lambda_\mu = \mathbb{1}_G - iX_\mu \delta\lambda_\mu.$$

### 1.2.3 Homomorphismes et isomorphismes. Définitions

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes de LIE (tous deux réels ou complexes). Alors un homomorphisme de groupe de LIE de  $G$  sur  $H$  est l'application  $f : G \rightarrow H$  représentant une fonction *différentiable et holomorphe* (il suffit en fait que  $f$  soit continue).

La composition de deux homomorphismes de groupes de LIE est également un homomorphisme de groupe de LIE et la classe de tous les groupes de LIE est appelée une *catégorie*, dont les applications sont les homomorphismes de groupes de LIE. Deux groupes de LIE sont dit *isomorphes* si et seulement s'il existe entre eux un *homomorphisme bijectif* et dont la réciproque est également un homomorphisme de groupe.

### 1.2.4 Groupes de LIE compacts et non-compacts

Un groupe de LIE est habituellement appelé compact si ses paramètres prennent des valeurs continues dans des domaines compacts (fermés et bornés). Sinon, on parlera de groupe non-compact. L'algèbre de LIE correspondante est appelée compacte et non-compacte, respectivement.

Mathématiquement parlant, un groupe de LIE compact est généralement muni d'une *métrique* (ou norme) entièrement conservée lorsque l'action de l'opérateur  $T$  transforme un vecteur  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  en  $\mathbf{V}'$ , i.e.  $\mathbf{V}' = T\mathbf{V}$ . On peut alors conclure (par opposition) qu'un groupe de LIE non-compact ne conserve pas sa métrique (sauf dans le cas général).

#### Exemples.

1. Les groupes *spéciaux unitaires*  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ , et *spécial orthogonal*  $SO(3)$  sont des groupes de LIE compacts. On dit dans ce cas que les matrices de ces groupes conservent leur norme si le tenseur métrique est la *matrice unité*, i.e.  $\hat{g} = \mathbb{1}_G$ .
2. Tandis que les groupes *spéciaux orthogonaux*  $SO(2,2)$ ,  $SO(2,1)$  et *spécial unitaire*  $SU(1,1)$  sont non-compacts. La norme est généralement conservée si le tenseur métrique s'exprime de la forme  $\hat{g} = (\mathbb{1}_G, -\mathbb{1}_G)$ .

## 1.3 Algèbre de LIE

Nous avons vu que les groupes de LIE sont définis par des générateurs (très souvent représentés par des opérateurs de création, d'annihilation et/ou bosoniques et fermioniques). Ces derniers s'avèrent avoir une *réalisation (structure) algébrique* et qui se trouve être plus facile à manipuler que les éléments du groupe. Par conséquent, chaque groupe de LIE est muni de sa *propre structure algébrique*.

Par définition, une *algèbre de LIE* est un espace vectoriel de dimension fini ou infini et générant l'ensemble des générateur de groupe de LIE. Elle est munie d'une application bilinéaire et anti-symétrique, notée  $L$ , telle que :

$$[ \ , \ ] : L \times L \rightarrow L, \quad \forall X, Y : (X, Y) \rightarrow [X, Y] = XY - YX,$$

où l'opération bilinéaire  $[ \ , \ ]$  forme la base d'une algèbre fermée de commutateurs et est appelée le *crochet (algèbre) de LIE*. Cette algèbre commutative de LIE satisfait des identités bien connues, on cite :

1. **Identité de Jacobi.** – Pour les générateurs  $X_i, X_j, X_k$  de l'algèbre  $g$  du groupe  $G$ ,

l'identité de Jacobi,

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0,$$

est satisfaite.

2. **Anti-symétrisation.** – Pour deux générateurs quelconques  $X_i$  et  $X_j$ , on a l'identité suivante :

$$[X_i, X_j] = -[X_j, X_i].$$

Il est évident que de cette dernière on tire la relation suivante :  $[X_i, X_i] = 0$ .

3. **Linéarité.** – L'opération bilinéaire  $[\ , \ ]$  est par définition linéaire sur ses générateurs  $X_i, X_j, X_k$ . En effet, on a

$$[X_i, X_j + X_k] = [X_i, X_j] + [X_i, X_k].$$

4. **Particularité.** – Pour les générateurs  $X_i, X_j$  et  $X_k$ , l'opération bilinéaire  $[\ , \ ]$  s'exprime de la forme suivante :

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = C_{i,j}^k X_k,$$

où  $C_{i,j}^k$  sont appelés les *constantes de structure* de algèbre de LIE. Elles satisfont la condition d'anti-symétrisation  $C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k$ . Cette particularité énonce que *chaque générateur d'une algèbre de LIE peut être déduite en connaissant deux autres générateurs*. On voit bien que cette construction est infinie. Enfin, toute algèbre non-abélienne (où les générateurs de l'algèbre ne commutent pas) est appelée une algèbre semi-simple et le groupe associé est dit semi-groupe.

### 1.3.1 Algèbre de LIE *versus* groupe de LIE

Il est possible d'associer tout naturellement à tout groupe de LIE  $G$  une algèbre de LIE  $g$ . Il existe deux manières équivalentes d'introduire une telle algèbre de LIE. L'une consiste à introduire un espace de champs de vecteurs sur  $G$ , la seconde consiste à munir l'espace tangent en l'élément neutre d'un crochet de LIE, dérivant de l'expression locale de la loi interne de  $G$ .

## 1.4 Réalisation de l'algèbre de LIE $\mathfrak{so}(2, 2)$

Nous allons aborder et discuter dans cette section les différentes propriétés de l'algèbre de LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$  et que nous utiliserons par la suite dans le chapitre 3, afin de générer les



potentiels quantiques de NATAZON dégénérés et non-dégénérés dans le cadre d'une masse dépendante de la position (cette dernière fera l'objet du chapitre suivant). Notre démarche suit celle de la Réf. [29], où nous donnons ici une *réalisation différentielle* constructive des algèbres à six paramètres, telles que celles de  $\mathfrak{so}(4)$  et  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$ .

Nous suivrons les idées conçus, respectivement dans Réfs. [28, 29], pour la construction des générateurs différentiels du premier ordre de l'algèbre  $\mathfrak{su}(1, 1)$  dans le seul but de construire ceux de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . À cet effet, et dû au caractère spécial de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$ , le nombre de fonctions intervenant dans les générateurs de  $\mathfrak{so}(2, 2)$  est au nombre de dix (10), au lieu de quatre (4) pour l'algèbre  $\mathfrak{su}(1, 1)$ . Ces fonctions seront enfin réduites à deux (2) une fois que les relations de commutations (voir ci-après) sont appliquées.

Sur la base de ce qui vient d'être dit, considérons la construction de deux ensembles d'opérateurs  $J_{\pm, z}$  et  $K_{\pm, z}$  :

$$J_{\pm} = e^{\pm i\phi} \left( \pm h_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \pm g_1(x) + f_1(x) J_z + c_1(x) + k_1(x) K_z \right), \quad (1.2)$$

$$J_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (1.3)$$

et

$$K_{\pm} = e^{\pm i\phi} \left( \pm h_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \pm g_2(x) + f_1(x) J_z + c_2(x) + k_2(x) K_z \right), \quad (1.4)$$

$$K_z = -i \frac{\partial}{\partial \chi}. \quad (1.5)$$

où  $h_i, g_i, f_i, c_i$  et  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont des fonctions continues et différentiables. Les opérateurs définis en (1.2)-(1.5) satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = -2a J_z, \quad (1.6)$$

$$[K_z, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = -2b K_z, \quad (1.7)$$

$$[J_i, K_j] = 0, \quad (1.8)$$

avec  $(i, j) = (+, -, z)$  et  $a$  et  $b$  sont deux paramètres à fixer par la suite. Pour  $a = b = 1$ , on obtient l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$ . Tandis que pour  $a = 1, b = -1$  et  $a = b = -1$ , nous obtenons, respectivement, les algèbres  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2, 1)$  et  $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ .

L'action des relations de commutation (1.6)-(1.8) sur les générateurs (1.2)-(1.5) conduisent

(après un long calcul) à un système d'équations différentielles de premier ordre, donné par :

$$k_2^2(x) - h_2(x)k_2'(x) = b, \quad h_2(x)f_2'(x) - f_2(x)k_2(x) = 0, \quad k_2^2(x) - f_2^2(x) = b, \quad (1.9)$$

$$c_1(x) = c_2(x) = 0, \quad (1.10)$$

$$h_1(x) = Ah_2(x), \quad f_1(x) = Ak_2(x), \quad k_1(x) = Af_2(x), \quad g_1(x) = Ag_2(x), \quad (1.11)$$

$$A^2 = \frac{a}{b} = \pm 1. \quad (1.12)$$

Afin que ce système équations différentielles ait une solution, nous supposons que  $h_i(x)$ ,  $k_i(x)$  et  $f_i(x)$  sont non nulles. Nous constatons que sur les dix (10) fonctions introduites, la fonction  $h_2(x)$  peut être considérée comme la fonction *maîtresse*, puisque sa détermination conduit à trouver toutes les autres fonctions, à l'exception de  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$  qui sont indépendantes. Dès lors, la question est de savoir comment déterminer  $h_2(x)$  et  $g_2(x)$ . Nous verrons que  $h_2(x)$  peut-être déterminée dans cette partie, alors que  $g_2(x)$  sera fixée quand on postulera le concept mathématique de *algèbre aux spectres générés* (SGA, Spectrum-Generating Algebra).

### 1.4.1 Opérateurs de CASIMIR de l'algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$

En théorie des groupes (et leur représentation algébriques), toute algèbre de LIE est dotée d'un opérateur de CASIMIR et est caractérisé par sa forme *bilinéaire invariante*. Il est par conséquent une application linéaire continue sur l'espace vectoriel de la représentation. Cet opérateur a une caractéristique exceptionnelle ; elle réside dans le fait qu'il *commute avec l'ensemble de tous les générateurs de l'algèbre en question*. Le nombre d'opérateurs invariants de CASIMIR d'une algèbre quelconque de LIE correspond au *rang* du groupe.

Par exemple, les groupes qui suivent  $SO(2, 1)$ ,  $SU(1, 1)$  et  $SO(3)$  sont des groupes de rang un ( $r = 1$ ), puisque chacun d'eux possède en tout un seul opérateur de CASIMIR, tandis que le groupe qui nous intéresse  $SO(2, 2)$  il en possède deux (2). Il est par conséquent de rang  $r = 2$ .

L'opérateur de CASIMIR permet aussi de déterminer les représentations irréductibles d'une algèbre de LIE associées au groupe de LIE. D'un côté, sa particularité en physique quantique réside à mieux connaître les opérateurs agissant sur les fonctions d'onde d'un système quantique, ainsi qu'aux invariants associés aux différents nombres quantiques, tels que la masse, le spin, l'isospin, etc. D'un autre côté, dans le cadre de la supersymétrie

de la mécanique quantique, on peut trouver une certaine similitude entre l'hamiltonien de système et l'opérateur invariant de CASIMIR menant à la technique SGA, dont nous parlerons plus tard.

Étant donné qu'il commute avec tout les générateurs de l'algèbre, on peut penser qu'il s'exprime comme la somme des générateurs, i.e.

$$C_k = \sum_i \sum_j c_{ij}^k \dots X^i X_j \dots, \quad (1.13)$$

en tenant compte de  $k$ -facteurs dans (1.13). Ici,  $c_{ij}^k$  sont des fonctions bien définies à partir des constantes de structure. Dans le cas de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$ , les opérateurs invariants de CASIMIR sont aux nombres de deux et s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} C_2^{(J,K)} &= 2C_2^{(J)} + 2C_2^{(K)} \\ &\equiv 2(-aJ_+J_- + J_z^2 - J_z - bK_+K_- + K_z^2 - K_z), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\tilde{C}_2^{(J,K)} = 2C_2^{(J)} - 2C_2^{(K)}. \quad (1.15)$$

Cependant, il s'avère que la valeur propre du second opérateur (1.15) est *constamment nulle* pour la réalisation différentielle actuelle de l'algèbre, tandis que la valeur propre du premier opérateur (1.14) est donné par :

$$C_2^{(J,K)}\psi = \lambda(\lambda + 2)\psi \quad (1.16)$$

où  $\lambda$  est un nombre quantique et  $\psi$  son vecteur propre. Cette quantité est liée aux valeurs propres de l'invariant de CASIMIR de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 1)$  (isomorphe à  $\mathfrak{su}(1, 1)$ ), données par  $j(j + 1)$ , via la relation  $\lambda = 2j$ .

## 1.5 Algèbre des spectre générés (SGA)

L'une des applications les plus importantes des algèbres de LIE a été l'étude des systèmes physiques pour lesquels l'hamiltonien  $H$  du système et d'autres opérateurs d'intérêt physique  $T$  peuvent être écrits en termes d'éléments  $G$  d'une algèbre de LIE  $g$ , telles que :

$$H = f(G_\alpha), \quad G_\alpha \in g, \quad (1.17)$$

$$T = t(G_\alpha), \quad G_\alpha \in g. \quad (1.18)$$

Dans de telles considérations, l'algèbre de LIE  $g$  est alors appelée *algèbre des spectre générés* (SGA) du ledit problème. Les fonctionnelles introduites  $f$  et  $t$  sont généralement supposées s'écrire sous une forme polynomiale en termes des éléments  $G_\alpha$ . Il s'avère que

la plupart des problèmes à N-corps, c'est-à-dire les problèmes hamiltoniens pour de nombreuses particules en interaction peuvent être exprimés sous la forme d'un développement polynomial en fonction des éléments du groupe  $G_\alpha$ . Le développement peut alors s'écrire comme suit :

$$H = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} + \dots \quad (1.19)$$

où nous avons adopté la notation à deux indices puisque nous avons affaire à des interactions.

Le terme linéaire dans les éléments est appelé terme à un corps, le second terme (quadratique) est appelé terme à deux corps, ainsi de suite . . . Il est intéressant de signaler que la plupart des théories arrêtent le développement (1.19) à deux corps, bien que dans certains cas les termes à trois corps et plus ont été considérés. Le terme  $E_0$  est une constante globale, qui fixe l'état fondamental de l'énergie, et les coefficients  $\epsilon_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta\gamma\delta}, \dots$  dépendent du système physique étudié.

### 1.5.1 Symétries dynamiques (DS, *dynamical symmetries*)

La technique SGA nous procure une situation très intéressante (particulièrement, en physique quantique) lorsque l'hamiltonien  $H$  contient en lui *uniquement les différentes combinaisons possibles qui forment l'opérateur invariant de CASIMIR d'une chaîne d'algèbres provenant de  $g \supset g' \supset g'' \supset \dots$* , c'est-à-dire :

$$H = f(C_i) \quad (1.20)$$

Pour ce genre de situations, communément appelées *symétries dynamiques* (DS), le problème aux valeurs propres peut être résolu sous forme explicitement analytique, puisque les opérateurs de CASIMIR sont diagonaux dans la base fournie par la chaîne  $g \supset g' \supset g'' \supset \dots$ . Les valeurs propres de l'énergie sont données par des nombres quantiques caractérisant les représentations de  $g \supset g' \supset g'' \supset \dots$  et la formule correspondante lui associée l'appellation *formule énergétique du quantum*. Par contre, les éléments de matrice des opérateurs de transition  $\mathcal{T}$  sont donnés en termes du facteur isoscalaire de la chaîne  $g \supset g' \supset g'' \supset \dots$ . Lorsque l'hamiltonien  $H$  est linéaire à l'opérateur de CASIMIR, i.e.

$$H = E_0 + \alpha C(g) + \alpha' C(g') + \alpha'' C(g'') + \dots \quad (1.21)$$

alors son spectre en énergie s'exprime de la forme :

$$E = \langle H \rangle = E_0 + \alpha \langle C(g) \rangle + \alpha' \langle C(g') \rangle + \alpha'' \langle C(g'') \rangle + \dots \quad (1.22)$$

où par la symbolique  $\langle \rangle$ , nous désignons la valeur moyenne dans la représentation appropriée. Il s'avère que cette technique (i.e. SGA) et ses variantes (i.e. DS) est aussi applicable à la physique moléculaire, à la physique nucléaire et à la physique des particules élémentaires. Si l'hamiltonien  $H$  s'avère être quadratique en termes des éléments de l'algèbre  $g$ , alors l'hamiltonien (à symétrie dynamique) admet un opérateur de CASIMIR de rang 2. Généralement, pour des systèmes ayant des hamiltoniens à symétrie dynamique sont également appelés *problèmes exactement résolubles*. Ce genre de problème fera l'objet de notre présent mémoire et sera traité plus en détails dans le chapitre 3.

# SYSTÈMES DOTÉS DE MASSE DÉPENDANTE DE LA POSITION

Les systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position,  $m = m(x)$  (PDM, Position dependent Mass), ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs et ont inspiré d'intenses activités de recherche au cours de ces dernières années. Il se trouve qu'ils sont très utiles dans l'étude de plusieurs domaines de la physique ; par exemple, dans la description des *propriétés électroniques des semi-conducteurs, des points quantiques, des noyaux atomiques, les impuretés dans les cristaux, et des liquides quantiques de la matière condensée, tels que  $^3\text{He}, ^4\text{He}, \dots$*

La recherche de solutions analytiques et exactement solvables de l'équation de SCHRÖDINGER pour un système PDM est devenue un sujet de recherche très intéressant, car de telles solutions peuvent fournir une compréhension conceptuelle de certains phénomènes physiques, ainsi qu'un terrain d'essai pour certains schémas d'approximation.

Le problème à masse dépendante de la position a été traité dans plusieurs articles scientifiques de physique (et de chimie) et ouvrages. Probablement, l'article pionnier et de référence remonte aux travaux des deux physiciens D. J. BEN DANIEL et C. B. DUKE datant de 1966 [2], généralisé depuis en 1983 par O. VON ROOS [3]. Cela ne nous empêche pas de trouver quelques tentatives de généralisation introduites dans les années 2000 dans le but est de *décrire en mieux la théorie des bandes d'énergie* ; parmi elles existe celle proposée par A. DE SOUZA-DUTRA et C. A. S. ALMEIDA, (cf. Réf. [1] pour plus de détails).

Cependant, des théories de types PDM (peu importe leur nombre) ont toujours été (et sont toujours) *confrontées à une majeure ambiguïté (dilemme)*. C'est le fameux problème d'ordonnement (*ordering problem*). En effet, puisque dans de tels systèmes la masse

(dépendante de la position) et l'opérateur d'impulsion ne commutent pas, alors la question de savoir la forme que peut prendre l'opérateur de l'énergie cinétique reste non encore résolue. Dans ce schéma d'étude, probablement l'hamiltonien de VON ROOS reste pour le moment la meilleure approche. Nous verrons ceci au cours de ce chapitre et dans le suivant.

## 2.1 Hamiltonien de DE SOUZA-DUTRA et ALMEIDA

Le problème de masse dépendante de la position permet de généraliser, et donc, de retrouver en particulier celui de la masse constante. En effet, en imposant l'écriture suivante :

$$M(x) = m_0 m(x), \quad (2.1)$$

où  $M(x)$  est la masse de la particule,  $m_0$  est une constante positive ayant la dimension d'une masse, et  $m(x)$  est une fonction de masse sans dimension, il est tout à fait possible de réduire (2.1) au cas d'un problème avec masse constante en posant  $m(x) = 1$ , i.e.  $M(x) = m_0$ . Dans la suite de notre exposé, il est souvent recommandé de poser dans les calculs  $m_0 = 1$ .

D'un autre côté, une question nous vient à l'esprit en lisant l'intitulé de cette section : *pourquoi utiliser l'hamiltonien de DE SOUZA-DUTRA et ALMEIDA (SDA) alors que nous avons à notre possession celui de VON ROOS ?* Certainement la réponse à cette question se trouve dans le fait que la théorie des bandes énergétiques sont des cas particuliers de l'hamiltonien de SDA. Ce dernier est donné par la contribution de deux termes, ceux de SDA et VON ROOS, i.e. :

$$H_{SDA} = \frac{1}{4(1+a)} \left[ \underbrace{a(m^{-1}p^2 + p^2m^{-1})}_{\text{Contribution de SDA}} + \underbrace{m^\eta pm^\epsilon pm^\rho + m^\rho pm^\epsilon pm^\eta}_{\text{Terme de von Roos}} \right] + V(x), \quad (2.2)$$

où  $V(x)$  est le potentiel profil,  $m \equiv m(x)$ , et  $p (\equiv -i\frac{d}{dx})$  est l'opérateur d'impulsion (avec  $\hbar = 1$ ).  $a$  est un paramètre réel libre, alors que  $\eta, \epsilon$  et  $\rho$  sont des coefficients régis par la contrainte

$$\eta + \epsilon + \rho = -1, \quad (2.3)$$

afin de pouvoir retrouver la *mécanique quantique conventionnelle*. Par la mécanique quantique conventionnelle, nous voulons dire l'équation de SCHRÖDINGER avec masse constante.

On voit bien qu'en substituant l'opérateur d'impulsion  $p$  par son expression dans l'équation (2.2) et en utilisant la contrainte (2.3), on obtient l'équation de SCHRÖDINGER

dans le cadre d'une masse (champ) effective :

$$\left( -\frac{1}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'(x)}{2m(x)} \frac{d}{dx} + V_{\text{eff}}(x) \right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (2.4)$$

où  $V_{\text{eff}}(x)$  désigne l'énergie potentielle effective contenant le potentiel profil  $V(x)$  et le terme de masse effectif, i.e. :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(x) &= V(x) + U_{a,\alpha,\gamma}(x), \\ &= V(x) - \frac{(\alpha + \gamma - a)m(x)m''(x) + 2(a - \alpha\gamma - \alpha - \gamma)m'^2(x)}{4m^3(x)(a + 1)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $U_{a,\alpha,\gamma}(x)$  appelé le potentiel de terme de masse (modifié). On voit bien qu'en posant  $a = 0$  dans (2.2), la seule contribution restante est celle de VON ROOS.

## 2.2 Hamiltonien de VON ROOS et BEN DANIEL-DUKE

L'hamiltonien de VON ROOS a été introduit afin de décrire le comportement d'une particule dotée d'une masse dépendante de la position. Ce modèle mathématique complète et généralise les différents modèles existants (séparément) et permette de les regrouper dans un seul modèle. VON ROOS proposa une expression générale dépendante de trois paramètres ajustables et vérifiant (2.3). Elle est donnée par :

$$H_{\text{VR}} = \frac{1}{4} [m^\eta(x) p m^\epsilon(x) p m^\rho(x) + m^\rho(x) p m^\epsilon(x) p m^\eta(x)] + V(x). \quad (2.6)$$

L'ajustement des paramètres selon la contrainte (2.3) permet de déduire une large classe d'hamiltoniens, et probablement le plus connu d'entre eux (et le plus ancien) est celui de BEN DANIEL-DUKE (BDD). Il satisfait les paramètres  $\eta = \rho = 0$  et  $\epsilon = 1$ , donnant ainsi :

$$H_{\text{BDD}} = p \frac{1}{2m(x)} p + V(x). \quad (2.7)$$

## 2.3 Forme générale du hamiltonien BDD avec des opérateurs d'échelle de premier ordre

Considérons un système régi par un hamiltonien  $H_{\text{BDD}}$  donné dans l'équation (2.7) et deux opérateurs  $L^\pm$ , vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[H_{\text{BDD}}, L^\pm] = \pm \Delta_E L^\pm, \quad (2.8)$$



### 2.3. Forme générale du hamiltonien BDD avec des opérateurs d'échelle de premier ordre 15

avec  $\Delta_E \in \mathbb{R}$ . Cette dernière (2.8) satisfait les conditions aux limites suivantes :

$$H_{\text{BDD}}(L^\pm \psi) = (\epsilon \pm \Delta_E)(L^\pm \psi), \quad (2.9)$$

où  $\epsilon$  est la valeur propre de  $H_{\text{BDD}}$  et donc  $L^\pm \psi$  est aussi un état propre à  $H_{\text{BDD}}$ . Puisque l'hamiltonien de BDD est hermitien, on peut choisir  $L^+$  comme adjoint de  $L^-$ , et inversement.

Si le spectre d'énergie de  $H_{\text{BDD}}$  est borné par le bas, il doit exister un ensemble de fonctions propres formelles à  $H_{\text{BDD}}$  qui peuvent être annihilées par  $L^-$ , i.e.  $L^- \psi_0 = 0$ . Certains d'entre elles pourraient remplir les conditions aux limites, ainsi les valeurs propres correspondantes appartiennent au spectre de  $H_{\text{BDD}}$  et ils seront appelés *états extrêmes du système*, en analogie avec les problèmes de masse constante régis par les algèbres polynomiales de HEISENBERG. Le niveau d'énergie le plus bas associé à ces états extrêmes sera également appelé *énergie de l'état fondamental*.

Supposons maintenant que  $L^-$  soit un opérateur d'échelle différentiel de premier ordre de la forme :

$$L^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_1(x) \frac{d}{dx} + \beta_1(x) \right), \quad (2.10)$$

et en insérant (2.10) dans (2.8), on déduit l'ensemble des équations différentielles suivantes :

$$\alpha_1'(x) + \frac{m'(x)}{2m(x)} \alpha_1(x) = 0, \quad (2.11)$$

$$\beta_1'(x) = -\frac{1}{2} \alpha_1''(x) + \frac{m'(x) \alpha_1(x)}{2m(x)} + \alpha_1(x) \left[ \frac{m'^2(x)}{m^2(x)} + \Delta_E m(x) - \frac{m''(x)}{2m(x)} \right], \quad (2.12)$$

$$\alpha_1(x) V'(x) = \Delta_E \beta_1(x) + \frac{m'(x) \beta_1'(x)}{2m^2(x)} - \frac{\beta_1''(x)}{2m(x)}, \quad (2.13)$$

et leurs solutions sont données en termes de la fonction-masse  $m(x)$  :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{m(x)}}, \quad (2.14)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \right)' + a \Delta_E \int \sqrt{x} dx, \quad (2.15)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \Delta_E^2 \left[ \int m^{1/2}(x) dx \right]^2 - \frac{1}{8} \left( (m^{-1/2}(x))' \right)^2 - \frac{(m^{-1/2}(x))''}{4m^{1/2}(x)}. \quad (2.16)$$

Comme  $L^-$  est un opérateur différentiel de premier ordre, nous obtenons juste une fonction propre formelle pour les états extrêmes du système (l'état fondamental), qui est

donnée par :

$$\psi_0(x) = c_0 m^{1/4}(x) \exp\left(-\frac{\Delta_E}{2} \left[\int m^{1/2}(x) dx\right]^2\right), \quad (2.17)$$

et l'énergie associée est alors

$$E = \frac{\Delta_E}{2}. \quad (2.18)$$

Comme il a été dit précédemment, l'adjoint de l'opérateur d'annihilation  $L^-$  est le opérateur de création  $L^+$  donné par :

$$L^+ \equiv (L^-)^\dagger = \frac{1}{2} \left( -\alpha_1(x) \frac{d}{dx} + \beta_1(x) - \alpha_1'(x) \right), \quad (2.19)$$

et par conséquent les autres états existants sont évalués par l'action de l'opérateur  $L^+$  sur l'état fondamental. En effet, ceci est donné par l'identité :

$$\psi_n(x) \propto (L^+)^n \psi_0(x), \quad \text{avec} \quad E_n = E_0 + n\Delta_E. \quad (2.20)$$

Une fois les opérateurs d'échelle définis, il est simple de calculer le commutateur entre eux, qui est donné par :

$$[L^-, L^+] = a^2 \Delta_E. \quad (2.21)$$

Ainsi, la présence ou l'absence des valeurs propres formelles correspondantes dans le spectre de  $H_{\text{BDD}}$  dépend des états générés satisfont ou pas les conditions aux limites imposées par la théorie de STURM-LIOUVILLE.

## 2.4 Exemples de systèmes PDM avec opérateurs d'échelle de premier ordre

Il n'est pas difficile de trouver dans la littérature des exemples où des structures telles que GaAs et  $\text{Al}_z\text{Ga}_{1-z}\text{As}$ , pour  $z$  réel, sont mises au point. À l'intérieur de ce type de semi-conducteurs, les électrons et les trous possèdent une masse qui varie en fonction de  $m = m_0 + m_1 z$ , où  $m_0$  et  $m_1$  étant deux constantes définies par le matériau. La variable  $z$  est définie par le gradient de Al dans la structure ; spécifiquement,  $z$  varie en tant que fonction d'erreur, mais il est également suggéré que la concentration peut adopter en quelque sorte n'importe quel profil souhaité. Cette suggestion a été utilisée, où des profils inverses quadratiques et inverses linéaires ont été considérés. Ci-dessous, nous en tiendrons également à cette proposition, en choisissant des profils simples pour la fonction masse qui nous fourniront des informations physiquement intéressantes.

## 2.4.1 Profil quadratique

En travaillant en unités atomiques ( $\hbar = c = \omega = 1$ ), nous supposons que le profil de masse prenne la forme  $m(x) = x^2/2 + m_0$ . Des calculs simples et directs nous amènent aux expressions suivantes (où le potentiel a un spectre équidistant infini) :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{m_0 + \frac{x^2}{2}}}, \quad (2.22)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a \left( \sqrt{2m_0 + x^2} \left( \frac{\Delta_E x}{2} - \frac{x}{(2m_0 + x^2)^2} \right) + m_0 \Delta_E \log(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) \right)}{\sqrt{2}}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{8} m_0 \Delta_E^2 x^2 + \frac{\Delta_E^2 x^4}{16} - \frac{5}{4(2m_0 + x^2)^2} \\ &+ \frac{7m_0}{2(2m_0 + x^2)^3} + \frac{1}{4} m_0^2 \Delta_E^2 \log^2(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) \\ &+ \frac{1}{4} m_0 \Delta_E^2 x \sqrt{2m_0 + x^2} \log(\sqrt{2m_0 + x^2} + x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec une fonction d'onde de l'état fondamental exprimée par :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt[4]{2m_0 + x^2} \left( \sqrt{2m_0 + x^2} + x \right)^{-\frac{1}{4} \Delta_E x \sqrt{2m_0 + x^2}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{16} \Delta_E \left[ 4m_0 \log^2(\sqrt{2m_0 + x^2} + x) + 2m_0 x^2 + x^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

On voit clairement sur la figure 2.1 qu'en point  $x = 0$ , la forme du potentiel change radicalement ; cependant, il n'est pas singulier pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

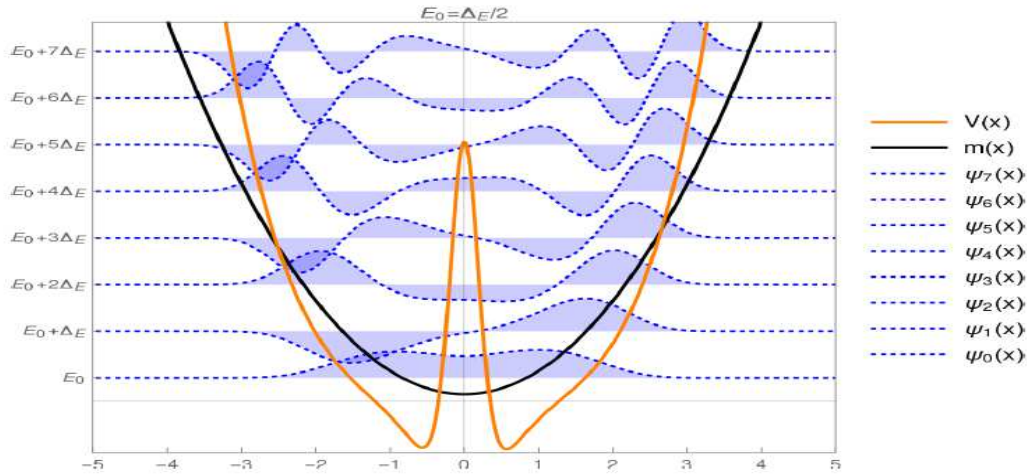


FIGURE 2.1 – Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type quadratique de la masse pour  $m_0 = 0.15$ , (cf., Réf. [31]).

## 2.4.2 Profil de masse cosinus

Supposons maintenant qu'un profil de masse cosinus, de type :  $m(x) = \cos(x) + m_0$ , et d'hauteur  $m_0 > 1$  est choisi. Lorsque  $m_0$  est proche de 1, le profil de masse s'approche de zéro aux points  $\pm(2n + 1)\pi$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ , et donc les états sur le potentiel induit l'approximité d'une singularité ressemble au comportement autour de  $x = 0$  de l'exemple précédent (voir figure 2.2). Les fonctions pour ce système sont maintenant explicitement données par :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{m_0 + \cos(x)}}, \quad (2.26)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a \left( 8(m_0 + 1)^2 \Delta_E \left( \frac{m_0 + \cos(x)}{m_0 + 1} \right)^{3/2} E \left[ \frac{x}{2}, \frac{2}{m_0 + 1} \right] + \sin(x) \right)}{4(m_0 + \cos(x))^{3/2}}, \quad (2.27)$$

$$V(x) = \frac{1}{64} \left( 128 \Delta_E^2 (m_0 + 1) E \left[ \frac{x}{2}, \frac{2}{m_0 + 1} \right]^2 + \frac{-8m_0 \cos(x) + 3 \cos(2x) - 11}{(m_0 + \cos(x))^3} \right), \quad (2.28)$$

tandis que la fonction propre de l'état fondamental est donnée par :

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{m_0 + \cos(x)} e^{-2\Delta_E(m_0+1)E\left[\frac{x}{2}, \frac{2}{m_0+1}\right]}. \quad (2.29)$$

Dans les expressions précédentes,  $E[\phi, K]$  est l'intégrale elliptique incomplète du second type, définie par

$$E[\phi, \kappa] = \int_0^\phi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Notons que lorsque le profil de masse change lentement, le potentiel tend vers l'oscillateur harmonique (voir la figure 2.2).

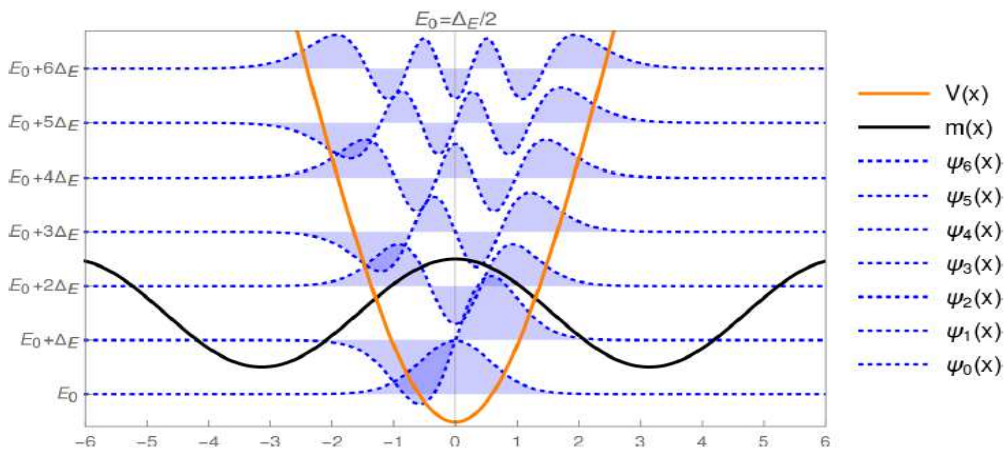


FIGURE 2.2 – Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type cosinus de la masse pour  $m_0 = 1.15$ , (cf., Réf. [31]).

## 2.4.3 Profil linéaire

Comme dernier exemple, supposons que le profil de masse varie linéairement comme  $m(x) = x$ , ce qui induira une singularité du potentiel au point  $x = 0$ . Les fonctions définissant l'opérateur d'échelle et le potentiel sont maintenant données par :

$$\alpha_1(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}, \quad (2.30)$$

$$\beta_1(x) = \frac{a}{8} \left( \frac{16}{3} \Delta_E x^{3/2} - \frac{2}{x^{3/2}} \right), \quad (2.31)$$

$$V(x) = \frac{1}{96} \left( \frac{64 \Delta_E^2 x^3}{3} - \frac{21}{x^3} \right), \quad (2.32)$$

et la fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par :

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{x} e^{-2\Delta_E x^3/9}. \quad (2.33)$$

Sur la figure 2.3, nous pouvons voir que, parmi toutes les fonctions propres formelles générées en agissant itérativement  $L^+$  sur  $\psi_0$ , seule la moitié d'entre elles satisfont aux conditions aux limites à l'origine discutées dans la section 2.1 (ceux étiquetés par des index impairs).

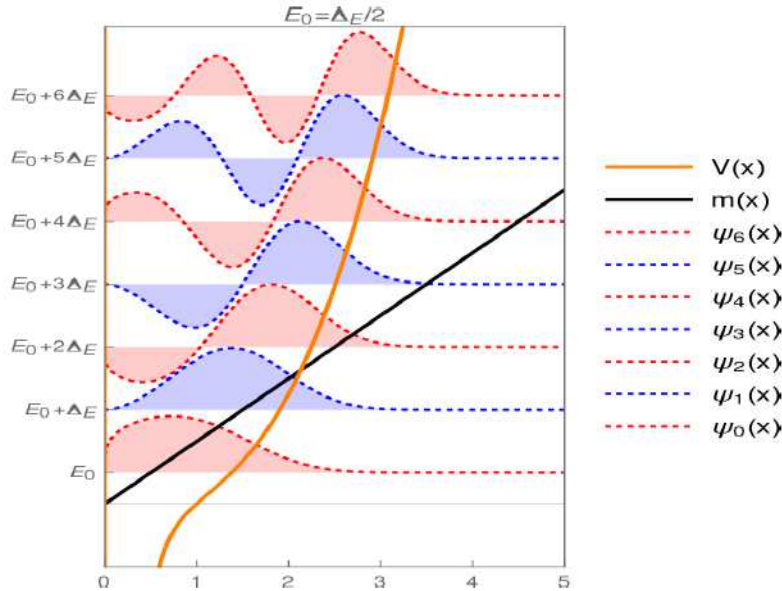


FIGURE 2.3 – Fonctions d'onde associées au potentiel avec un profil de type linéaire de la masse, (cf., Réf. [31]).

# CONSTRUCTION DES POTENTIELS EXACTEMENT SOLVABLES POUR DES SYSTÈMES PDM SOUS $\mathfrak{so}(2, 2)$

Dans ce chapitre, nous allons présenter tout le cadre mathématique de notre mémoire de master. Nous combinerons la représentation différentielle des générateurs de  $\mathfrak{so}(2, 2)$  au système quantique muni d'une masse dépendante de la position afin de générer l'ensemble des classes de potentiels exactement solvables de NATANZON.

Notre première étape consiste à déduire l'hamiltonien de VON ROOS pour un système PDM, suivi par la construction de l'opérateur de CASIMIR associé à l'algèbre de LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . Enfin, nous combinerons les résultats obtenus sous "*la bannière*" de la technique de l'algèbre des spectres générés (SGA) pour déduire l'expression analytique  $V(x) - E$ . Cette dernière est donnée en termes de six (6) paramètres arbitraires ; trois (3) contrôlent entièrement le potentiel  $V(x)$ , tandis que les trois (3) autres déterminent complètement le spectre en énergie  $E$ . Chaque potentiel est caractérisé par ses propres paramètres (à déterminer arbitrairement). Nous terminerons ce présent chapitre par déduire les deux classes de potentiels de NATANZON, ainsi que les potentiels et leurs spectres d'énergie associés dans leur classe respective. Elles sont cataloguées comme suit :

1. Potentiels de Natanzon dégénérés (en tout trois (3) potentiels) :
  - Potentiel de l'oscillateur harmonique radial.
  - Potentiel de MORSE.
  - Potentiel de COULOMB radial.
2. Potentiels de Natanzon non-dégénérés (en tout neuf (9) potentiels) :

- Potentiel hyperbolique de SCARF (S II).
- Potentiel trigonométrique de SCARF (S I).
- Potentiel hyperbolique de PÖSCHL-TELLER (PT II).
- Potentiel trigonométrique de PÖSCHL-TELLER (PT I).
- Potentiel hyperbolique de PÖSCHL-TELLER généralisé (PTG II).
- Potentiel trigonométrique de PÖSCHL-TELLER généralisé (PTG I).
- Potentiel d'ECKART.
- Potentiels d'HULTHÈN, de YUKAWA et de COULOMB.
- Potentiel ROSEN-MORSE.
- Potentiel MANNING-ROSEN.

Nous verrons que la stratégie de déduire les potentiels d'HULTHÈN, de YUKAWA et de COULOMB *passé nécessairement* par la déduction de celui de MANNING-ROSEN, puisque ce dernier est réduit aux trois premiers moyennant un choix convenable de transformations. Ces transformations sont illustrées selon le schéma suivant :

$$\text{MANNING-ROSEN} \longrightarrow \text{HULTHÈN} \longrightarrow \text{YUKAWA} \longrightarrow \text{COULOMB.}$$

### 3.1 Hamiltonien de VON ROOS et sa réalisation différentielle

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que VON ROOS a introduit un hamiltonien, (2.6), dans le but de généraliser et d'unifier les différents modèles proposés jusqu'à alors pour décrire le comportement d'une particule dotée d'une masse dépendante de la position. Par le concept d'une masse dépendante de la position, nous nous référons à une particule soumise à un champ effectif moyen,  $V_{\text{eff}}(x)$ , donnant l'impression que la particule change de masse lors de son déplacement dans l'espace.

L'hamiltonien de VON ROOS s'écrit sous la forme :

$$H_{\text{vR}} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{4} [m^\eta(x)pm^\epsilon(x)pm^\rho(x) + m^\rho(x)pm^\epsilon(x)pm^\eta(x)] + V(x), \quad (3.1)$$

où  $\eta$ ,  $\epsilon$ , et  $\rho$  sont des paramètres réels vérifiant la contrainte :  $\eta + \epsilon + \rho = -1$ . L'opérateur  $p$  est l'opérateur d'impulsion, i.e.  $p = -i\frac{d}{dx}$ , ( $\hbar = 1$ ). La fonction  $m(x)$  est sans dimension.

En substituant l'opérateur  $p$  dans (3.1), on trouve :

$$H_{\text{vR}} = -\frac{1}{4} \left[ m^\eta(x) \frac{d}{dx} m^\epsilon(x) \frac{d}{dx} m^\rho(x) + m^\rho(x) \frac{d}{dx} m^\epsilon(x) \frac{d}{dx} m^\eta(x) \right] + V(x), \quad (3.2)$$

telle que le premier terme de (3.2) s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} m^n(x) \frac{d}{dx} m^\epsilon(x) \frac{d}{dx} m^\rho(x) &= m^n(x) \frac{d}{dx} m^\epsilon \left[ \rho m'(x) m^{\rho-1}(x) + m^\rho(x) \frac{d}{dx} \right] \\ &= \frac{1}{m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + (2\rho + \epsilon) \frac{m'(x)}{m^2(x)} \frac{d}{dx} + \rho \frac{m''(x)}{m^2(x)} \\ &\quad + \rho(\rho + \epsilon - 1) \frac{m^2(x)}{m^3(x)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En tenant compte de la symétrie existante entre les paramètres d'ambiguïté, le second terme de (3.2) est donné par :

$$m^\rho(x) \frac{d}{dx} m^\epsilon(x) \frac{d}{dx} m^n(x) = \frac{1}{m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + (2\eta + \epsilon) \frac{m'(x)}{m^2(x)} \frac{d}{dx} + \eta \frac{m''(x)}{m^2(x)} + \eta(\eta + \epsilon - 1) \frac{m^2(x)}{m^3(x)}, \quad (3.4)$$

de sorte que l'expression de (3.2) devient donc :

$$H_{\text{vR}} = -\frac{1}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'(x)}{2m^2(x)} \frac{d}{dx} + \frac{1 + \epsilon m''(x)}{4 m^2(x)} - \frac{1 + \epsilon + \eta(1 + \epsilon + \eta)}{2} \frac{m^2(x)}{m^3(x)} + V(x). \quad (3.5)$$

Introduisons à présent la fonction d'onde d'essai suivante :

$$\psi_\sigma(x) = 2\sigma m(x) \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 R(x), \quad (3.6)$$

où  $\sigma$  est un paramètre réel à déterminer. L'action de l'hamiltonien (3.5) sur la fonction d'onde d'essai donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} H_{\text{vR}} &= -\sigma \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma \frac{y(x)}{y'(x)} \left[ 4 + \frac{m'(x)}{m(x)} \frac{y(x)}{y'(x)} - \frac{4y(x)y''(x)}{y'^2(x)} \right] \frac{d}{dx} \\ &\quad + 2\sigma \frac{y(x)}{y'^2(x)} \left[ 3y''(x) + \frac{y(x)y'''(x)}{y'(x)} - \frac{3y(x)y''^2(x)}{y'^2(x)} \right] \\ &\quad + \sigma \frac{m'(x)}{m(x)} \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \left[ 2 \frac{y(x)y''(x) - y'^2(x)}{y(x)y'(x)} + \frac{\epsilon - 1}{2} \frac{m''(x)}{m'(x)} - (1 + \eta)(\eta + \epsilon) \frac{m'(x)}{m(x)} \right] \\ &\quad - 2\sigma + 2\sigma m(x) \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 V(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans le cadre de la méthode de l'algèbre des spectres générés (SGA), l'hamiltonien (3.7) sera identifié à l'opérateur invariant de CASIMIR de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . La détermination de cet opérateur sous l'effet de la fonction d'onde d'essai (3.6) est notre prochain objectif.



## 3.2 Réalisation différentielle de l'opérateur de CASIMIR de l'algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$

Afin de mener à bien notre tâche, nous aurons besoin d'introduire un nouveau concept (des transformations, pour être plus précis) et qui s'avèrera être très utile dans la suite de notre travail. Il s'agit des *transformations similaires*. Comme son nom l'indique, ce sont des transformations qui laissent les équations invariantes (une sorte de jauges). Étant donné que les algèbres de LIE représentent des symétries, nous pouvons alors conclure que les équations déduites par les différentes algèbres *restent invariantes* une fois que les transformations similaires sont appliquées.

Par conséquent, les équations différentielles déduites de l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$  sont invariantes sous l'effet des transformations similaires suivantes :

$$h_2(x) \rightarrow \tilde{h}_2[y](x) = h_2(x) \frac{dy(x)}{dx} \equiv \sqrt{b} y(x), \quad (3.8)$$

$$g_2(x) \rightarrow \tilde{g}_2[y](x) = g_2(x), \quad (3.9)$$

$$f_2(x) \rightarrow \tilde{f}_2[y](x) = f_2(x), \quad (3.10)$$

$$k_2(x) \rightarrow \tilde{k}_2[y](x) = k_2(x), \quad (3.11)$$

$$c_2(x) \rightarrow \tilde{c}_2[y](x) = c_2(x). \quad (3.12)$$

via la transformation ponctuelle :

$$x \rightarrow y(x). \quad (3.13)$$

Cette dernière fixe l'allure de la fonction  $h_2(x)$  et est donnée par :

$$h_2(x) = \sqrt{b} \frac{y(x)}{y'(x)}, \quad (3.14)$$

où on voit dans (3.14) l'expression du rapport  $y/y'$  déduit dans (3.7). Nous verrons par la suite que la détermination de  $y(x)$  (i.e. la transformation ponctuelle) fixe l'ensemble des potentiels physiques.

La détermination de la fonction  $k_2(x)$  revient à appliquer la transformation ponctuelle à la première équation de (1.9), i.e. :

$$k_2^2(x) - \sqrt{b} \frac{y(x)}{y'(x)} k_2'(x) = b, \quad (3.15)$$

et dont la solution est donnée par

$$k_2(x) = \sqrt{b} \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)}, \quad (3.16)$$

où  $q$  est une constante d'intégration (à fixer par la suite dans les applications).

La dernière fonction à déduire est  $f_2(x)$ . Pour cela, en insérant (3.16) dans la deuxième équation (1.19) (en tenant compte bien entendu de la transformation ponctuelle), on retrouve l'équation différentielle régissant  $f_2(x)$ ,

$$\sqrt{b} \frac{y(x)}{y'(x)} f_2'(x) - \sqrt{b} f_2(x) \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} = 0, \quad (3.17)$$

et dont la solution est :

$$f_2(x) = \frac{\delta y(x)}{1 - qy^2(x)}, \quad (3.18)$$

avec  $\delta$  est une (autre) constante d'intégration (à fixer dans les applications).

Ayant déterminé les fonctions  $h_2(x)$ ,  $k_2(x)$  et  $f_2(x)$ , intéressons-nous à présent à l'opérateur invariant de CASIMIR de l'algèbre de LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$  obtenu dans (1.14). Pour ce faire, insérons (3.14), (3.16) et (3.18) dans (1.2)-(1.5) [en tenant compte aussi de (1.10)-(1.12)], et en substituant ces dernières dans (1.14), on obtient finalement l'expression différentielle du second ordre de l'opérateur invariant de CASIMIR et est donné par :

$$\begin{aligned} C_2^{(J,K)} &= 4bh_2^2 \frac{d^2}{dx^2} + 4bh_2 (h_2' + 2g_2 - k_2) \frac{d}{dx} + 4b (h_2 g_2' + g_2^2 - k_2 g_2) \\ &\quad + 2 (1 - bk_2^2 - bf_2^2) (J_z^2 + K_z^2) - 8bf_2 k_2 J_z K_z \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les fonctions propres de  $C_2^{J,K}$  sont les fonctions propres de  $J_z$  et  $K_z$  et sont données par :

$$\psi_{\nu, \nu'}(\phi, \chi, x) = e^{i(\nu\phi + \nu'\chi)} R(x), \quad (3.20)$$

où  $R(x)$  est la fonction identique [à cause de SGA] à celle introduite dans (3.6). Les variables auxiliaires  $\phi$  et  $\chi$  sont multipliées par  $\nu$  et  $\nu'$ , les valeurs propres des générateurs  $J_z$  et  $K_z$ , respectivement.

Par conséquent, l'action de l'opérateur de CASIMIR (3.19) sur la fonction d'onde (3.20) donne la forme différentielle suivante :

$$\begin{aligned} C_2^{(J,K)} &= 4 \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{y(x)}{y'(x)} \left[ \frac{2}{\sqrt{b}} g_2(x) - \frac{2qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} - \frac{y(x)y''(x)}{y'^2(x)} \right] \\ &\quad + 4 \left[ \frac{y(x)}{y'(x)} \frac{g_2'(x)}{\sqrt{b}} + \left( \frac{g_2(x)}{\sqrt{b}} \right)^2 - \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} \frac{g_2(x)}{\sqrt{b}} \right] \\ &\quad + 2 (\nu^2 + \nu'^2) \left[ 1 - \frac{b\delta^2 y^2(x)}{1 - qy^2(x)} - \left( \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} \right)^2 \right] \\ &\quad + 8b\sqrt{b}\delta\nu\nu' y(x) \frac{1 + qy^2(x)}{(1 - qy^2(x))^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où nous avons pris en considération les expressions analytiques des fonctions  $f_2(x)$ ,  $k_2(x)$ ,  $h_2(x)$  et  $c_2(x)$ . Il est intéressant de signaler que seules les fonctions  $g_2(x)$  et  $y(x)$  restent indéterminables. Nous verrons que l'usage de la technique SGA déterminera l'allure analytique de ces dernières. Il est important de signaler la ressemblance entre les expressions (3.7) et (3.21); ceci nous suggère qu'il y a bel et bien une relation les reliant. Cette connexion est établie par la méthode de l'algèbre des spectres générés (SGA) pour l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$  et qui est l'objet de notre prochaine section.

### 3.3 Algèbre des spectres générés (SGA) de l'algèbre $\mathfrak{so}(2, 2)$

Cette méthode énonce qu'il est possible de connecter l'opérateur de CASIMIR d'une algèbre quelconque [ici, en occurrence,  $\mathfrak{so}(2, 2)$ ] à l'hamiltonien du système physique en étude via l'identité,

$$H_{\text{vR}} - E = Z(x) \left( C_2^{(J,K)} - c \right), \quad (3.22)$$

où  $Z(x)$  est une certaine fonction à déterminer,  $E$  est l'énergie du système et  $c = \lambda(\lambda + 2)$  est la valeur propre de l'opérateur de CASIMIR ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Ainsi, en insérant (3.7) et (3.21) dans (3.22), on trouve l'expression,

$$\begin{aligned} & -\sigma \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} - \sigma \frac{y(x)}{y'(x)} \left[ 4 + \frac{m'(x)}{m(x)} \frac{y(x)}{y'(x)} - \frac{4y(x)y''(x)}{y'^2(x)} \right] \frac{d}{dx} + 2\sigma \frac{y(x)}{y'^2(x)} \left[ 3y''(x) \right. \\ & \left. + \frac{y(x)y'''(x)}{y'(x)} - \frac{3y(x)y''^2(x)}{y'^2(x)} \right] + \sigma \frac{m'(x)}{m(x)} \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \left[ 2 \frac{y(x)y''(x) - y'^2(x)}{y(x)y'(x)} \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon - 1}{2} \frac{m''(x)}{m'(x)} - (1 + \eta)(\eta + \epsilon) \frac{m'(x)}{m(x)} \right] - 2\sigma + 2\sigma m(x) \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 (V(x) - E) \\ & = Z(x) \left( 4 \left( \frac{y(x)}{y'(x)} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{y(x)}{y'(x)} \left[ \frac{2}{\sqrt{b}} g_2(x) - \frac{2qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} - \frac{y(x)y''(x)}{y'^2(x)} \right] + 4 \left[ \frac{y(x)}{y'(x)} \frac{g_2'(x)}{\sqrt{b}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{g_2(x)}{\sqrt{b}} \right)^2 - \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} \frac{g_2(x)}{\sqrt{b}} \right] + 2(\nu^2 + \nu'^2) \left[ 1 - \frac{b\delta^2 y^2(x)}{1 - qy^2(x)} - \left( \frac{1 + qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + 8b\sqrt{b}\delta\nu\nu' y(x) \frac{1 + qy^2(x)}{(1 - qy^2(x))^2} - c \right), \quad (3.23) \end{aligned}$$

telle que la comparaison entre les différents coefficients différentiels nous conduit à déduire les relations régissant les fonctions  $g_2(x)$  et  $y(x)$ . En effet, en comparant termes-à-termes les coefficients différentiels du second ordre et du premier ordre, il est facile d'en déduire,

respectivement,

$$Z(x) = -\frac{\sigma}{4} = \text{constante}, \quad (3.24)$$

$$g_2(x) = \frac{2 - qy^2(x)}{1 - qy^2(x)} + \frac{m'(x)y(x)}{2m(x)y'(x)} - \frac{3y(x)y''(x)}{2y'^2(x)}. \quad (3.25)$$

De l'expression comparative (3.23), il est possible de déterminer expression analytique de  $V(x) - E$ . Pour cela, il suffit juste de substituer les expressions de  $Z(x)$ ,  $g'_2(x)$  et  $g_2^2(x)$  dans (3.23). Les longs calculs analytiques nous ont conduit à l'expression du *potentiel effectif* suivant :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(q,b)}(x) - E_{\nu,\nu',c} = & \left[ \frac{\nu^2 + \nu'^2}{4} \frac{4q + \delta^2 b}{(1 - qy^2(x))^2} + b^{3/2} \nu \nu' \delta \frac{1 + qy^2(x)}{y(x)(1 - qy^2(x))^2} \right. \\ & \left. - \frac{q}{2(1 - qy^2(x))^2} + \frac{c}{8y^2(x)} \right] \frac{y'^2(x)}{m(x)} + \frac{3y''^2(x)}{8m(x)y'^2(x)} - \frac{y'''(x)}{4m(x)y'(x)} \\ & + V_m^{(\eta,\epsilon)}(x). \end{aligned} \quad (3.26)$$

où  $V_m^{(\eta,\epsilon)}(x)$ , appelé le *potentiel du terme de masse*, s'exprime sous la forme :

$$V_m^{(\eta,\epsilon)}(x) = \frac{4\epsilon(\eta + 1) + (2\eta + 1)^2 m'^2(x)}{8} - \frac{\epsilon m''(x)}{4m^2(x)}. \quad (3.27)$$

et contient uniquement les termes de masse ainsi que les paramètres d'ambiguïté  $\eta$  et  $\epsilon$ . Il exprime la dérivée schwartzienne du terme de masse.

Le potentiel effectif (3.26) dépend du profil de la masse  $m(x)$  et la fonction ponctuelle  $y(x)$ . La détermination de cette dernière, avec la fixation des paramètres libres  $q$  et  $b$ , conduit à la détermination de l'expression analytique du potentiel effectif  $V_{\text{eff}}^{(q,b)}(x)$ , ainsi que son spectre en énergie  $E_{\nu,\nu',c}$ . C'est la raison pour laquelle on appelle cette approche *l'algèbre des spectres générés*.

Faisons appliquer quelques changements sur les paramètres dans le seul but est de simplifier davantage (3.26). D'un côté, introduisons le changement sur les paramètres  $\nu$  et  $\nu'$ , de type :

$$(\nu, \nu') \rightarrow (r, t), \quad (3.28)$$

tels que :

$$\nu = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{t}}{2}, \quad (3.29)$$

$$\nu' = \frac{\sqrt{r} - \sqrt{t}}{2}. \quad (3.30)$$

D'un autre côté, introduisons une nouvelle fonction, que nous appellerons *fonction génératrice*, notée  $\mathfrak{S}(x)$ , et est définie positive,

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{y'^2(x)}{m(x)} > 0. \quad (3.31)$$

de telle sorte que (3.26) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(q,b)}(x) - E_{r,t,c} = & \left[ \frac{r}{8}W_+(x) + \frac{t}{8}W_-(x) + \frac{c}{8y^2(x)} - \frac{q}{2(1-xy^2(x))^2} \right] \mathfrak{S}(x) \\ & + \frac{3y''^2(x)}{8m(x)y'^2(x)} - \frac{y'''(x)}{4m(x)y'(x)} + V_m^{(\eta,\epsilon)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

et dont les expressions, respectives, de  $W_+(x)$  et  $W_-(x)$  sont données par :

$$W_+(x) = \frac{4q + b\delta^2}{(1-xy^2(x))^2} + 2b^{3/2}\delta \frac{1 + xy^2(x)}{y(x)(1-xy^2(x))^2}, \quad (3.33)$$

$$W_-(x) = \frac{4q + b\delta^2}{(1-xy^2(x))^2} - 2b^{3/2}\delta \frac{1 + xy^2(x)}{y(x)(1-xy^2(x))^2}. \quad (3.34)$$

Nous appelons (3.32) l'*équation maîtresse*, puisqu'elle permet de retrouver l'allure du potentiel effectif  $V_{\text{eff}}^{(q,b)}(x)$  et son spectre d'énergie  $E_{r,t,c}$  une fois que l'expression de  $y(x)$  est déterminée. Cela dit, il nous faudra résoudre (3.32) pour pouvoir déterminer les différents potentiels physiques générés par l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . Pour ce faire, nous proposons deux idées essentielles qui vont nous aider à débloquer la situation :

- primo, on observe que le membre de gauche de (3.32) contient un terme constant (en occurrence l'énergie  $E_{r,t,c}$ ). Alors il en sera de même pour le membre de droite ; il doit contenir un terme constant représentant l'énergie  $E_{r,t,c}$ . Le reste du terme est nécessairement associé au potentiel effectif  $V_{\text{eff}}^{(q,b)}(x)$ , et
- secundo, l'énergie  $E_{r,t,c}$  étant constante ne dépend que des paramètres libres  $r, t$ , et  $c$  et par conséquent les deux fonctions  $y(x)$  et  $\mathfrak{S}(x)$  sont indépendantes de  $E_{r,t,c}$ .

Avec de telles considérations en main, nous différencions la formule (3.32) par rapport à  $E_{r,t,c}$  et l'expression de la fonction génératrice  $\mathfrak{S}(x)$  s'en suit immédiatement, telle que

$$\mathfrak{S}(x) = - \left( \frac{W_+(x)}{8} \frac{dr}{dE_{r,t,c}} + \frac{W_-(x)}{8} \frac{dt}{dE_{r,t,c}} + \frac{1}{8y^2(x)} \frac{dc}{dE_{r,t,c}} \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Comme  $\mathfrak{S}(x)$  est défini positive, nous supposons alors que les différentielles des paramètres libres  $r, t$  et  $c$  par rapport à  $E_{r,t,c}$  sont des constantes. Par conséquent, les formes explicites de  $r(E)$ ,  $t(E)$  et  $c(E)$  se déduisent directement

$$r(E) = -r_0E + a_r, \quad (3.36)$$

$$t(E) = -t_0E + a_t, \quad (3.37)$$

$$c(E) = -c_0E + a_c. \quad (3.38)$$

où ici  $r_0$ ,  $t_0$ ,  $c_0$ ,  $a_r$ ,  $a_t$  et  $a_c$  sont six (6) paramètres libres et réels à déterminer par la suite dans nos applications. Ces six paramètres contrôlent entièrement la forme du potentiel effectif  $V_{\text{eff.}}^{(q,b)}(x)$  [en ajoutant les paramètres  $q$  et  $b$ ] et de son spectre d'énergie  $E_{r,t,c}$ .

En tenant compte de (3.31), la fonction génératrice  $\mathfrak{S}(x)$  prend la forme,

$$\mathfrak{S}(x) \equiv \frac{y'^2(x)}{m(x)} = \frac{8y^2(x)}{r_0 W_+(x)y^2(x) + t_0 W_-(x)y^2(x) + c_0}, \quad (3.39)$$

où on voit de cette dernière que la détermination de la fonction ponctuelle  $y(x)$  revient juste à résoudre une équation différentielle en  $y(x)$ . C'est une fois cette détermination est obtenue qu'il est possible de générer des potentiels de NATANZON, ainsi que leur spectre d'énergie correspondant.

### 3.4 Applications : déduction des potentiels exactement solvables de NATANZON

Cette section a pour principal objectif d'illustrer l'efficacité de notre modèle dans l'unique but est de générer les différents potentiels de NATANZON et leur spectre d'énergie associé.

Il est important (encore) de signaler que chaque potentiel (effectif) est caractérisé par ses propres paramètres libres, i.e.  $r_0$ ,  $t_0$ ,  $c_0$ ,  $a_r$ ,  $a_t$  et  $a_c$ . Comme il a été mentionné dans l'introduction de ce chapitre, les potentiels de NATANZON sont catalogués dans deux familles distinctes, appelées *classes de potentiels dégénérés et non-dégénérés*. La première contient trois potentiels, tandis que la seconde possède neuf.

#### 3.4.1 Potentiels de NATANZON dégénérés ( $b = 1$ et $q = 0$ )

Cette famille de potentiels dégénérés est caractérisée par les paramètres  $b = 1$  et  $q = 0$ . Les fonctions  $W_{\pm}(x)$  données dans (3.33) et (3.34) s'expriment alors

$$W_+(x) = \delta^2 + \frac{2\delta}{y(x)}, \quad (3.40)$$

$$W_-(x) = \delta^2 - \frac{2\delta}{y(x)}, \quad (3.41)$$

menant à exprimer la fonction génératrice  $\mathfrak{S}(x)$  comme suit :

$$\mathfrak{S}(x) \equiv \frac{y'(x)^2}{m(x)} = \frac{8y(x)^2}{(r_0 + t_0)\delta^2 y(x)^2 + 2\delta(r_0 - t_0)y(x) + c_0}. \quad (3.42)$$

De cette dernière, il est possible de générer les potentiels caractérisant la classe de NATANZON dégénérée ; à savoir les potentiels de l'oscillateur harmonique radial, de COULOMB radial et de MORSE. Il suffit pour cela de choisir convenablement les paramètres libres  $r_0, t_0$  et  $c_0$  afin trouver la fonction  $y(x)$ .

**1. L'oscillateur harmonique radial.** – Pour ce potentiel, on choisi les paramètres tels que  $r_0 = -t_0 \neq 0$  et  $c_0 = 0$ . Dans ce cas, la fonction génératrice (3.42) est une équation différentielle,

$$\frac{y'(x)^2}{m(x)} = \frac{2y(x)}{\delta r_0}, \quad (3.43)$$

facile à résoudre et dont la solution est

$$y(x) = \frac{\alpha^2}{4} \xi^2(x), \quad (3.44)$$

où  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{\delta r_0}}$  et la fonction  $\xi(x)$  désigne une notation prise sur le terme de masse (et sera utilisée par la suite) et est donnée par

$$\xi(x) = \int^x \sqrt{m(x')} dx'. \quad (3.45)$$

Par conséquent, le potentiel recherché peut être déduit une fois (3.44) est substitué dans (3.32) ; en effet on trouve après simplification

$$V_{\text{eff}}^{(0,1)}(x) - E_{r,t,c} = \frac{-r_0 \delta \alpha^2 E}{2} + \frac{(a_r - a_t)}{4} \delta \alpha^2 + \frac{(a_r - a_t)}{32} \delta^2 \alpha^4 \xi^2(x) + \frac{1}{2\xi^2(x)} \left( a_c + \frac{3}{4} \right) + V_m^{(\eta,\epsilon)}(x), \quad (3.46)$$

avec le potentiel de masse effective  $V_m^{(\eta,\epsilon)}(x)$  s'exprime par :

$$V_m^{(\eta,\epsilon)}(x) \equiv \left( \frac{4\epsilon(\eta + 1) + (2\eta + 1)^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \right) \frac{\xi'^2(x)}{\xi'^4(x)} - \left( \frac{\epsilon}{2} + 1 \right) \frac{\xi'''(x)}{\xi'^3(x)}. \quad (3.47)$$

On constate que les deux membres de (3.46) contiennent des constantes ; dès lors l'identification conduit à déduire l'expression du spectre d'énergie

$$-E = \frac{-r_0 \delta \alpha^2 E}{2} + \frac{(a_r - a_t)}{4} \delta \alpha^2, \quad (3.48)$$

et en combinant (3.36) et (3.37), avec le choix  $\delta \alpha^2 = -2\omega$  et  $\nu\nu' = n$ , l'expression du spectre d'énergie est alors :

$$E = 2\omega n. \quad (3.49)$$

Enfin, en tenant compte de (3.38) que  $c(E) \equiv a_c = \lambda(\lambda + 2)$ , on tire de (3.46) la forme standard au potentiel de l'oscillateur harmonique radial [en termes de  $\xi(x)$ ]

$$V(x) = \frac{1}{8} (a_r + a_t) \omega^2 \xi^2(x) + \frac{\lambda(\lambda + 2) + 3/4}{2\xi^2(x)}. \quad (3.50)$$

**2. Potentiel de Coulomb radial.** – Pour le potentiel de COULOMB radial, on choisit les paramètres suivants  $r_0 = t_0 \neq 0$  et  $c_0 = 0$ . L'équation (3.42) est réduite à :

$$\frac{y'^2(x)}{m(x)} = \frac{4}{r_0 \delta^2}, \quad (3.51)$$

où  $\alpha = 2/\sqrt{r_0 \delta^2}$ . En termes de  $\xi(x)$ , la solution de (3.51) est :

$$y(x) = \alpha \xi(x), \quad (3.52)$$

et (3.32) devient alors (après simplification),

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(0,1)}(x) - E_{r,t,c} &= \frac{-2r_0 E}{8} \alpha^2 \delta^2 + \frac{(a_r + a_t)}{8} \alpha^2 \delta^2 + \frac{(a_r - a_t)}{4} \frac{\delta \alpha}{\xi(x)} + \frac{a_c}{8 \xi(x)^2} \\ &+ V_m^{(\eta,\epsilon)}(x), \end{aligned} \quad (3.53)$$

avec

$$V_m^{(\eta,\epsilon)}(x) \equiv \left[ \frac{4\epsilon(\eta+1) + (2\eta+1)^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \right] \frac{\xi''^2(x)}{\xi'^4(x)} - \left[ \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{4} \right] \frac{\xi'''(x)}{\xi'^3(x)}. \quad (3.54)$$

De même que pour l'oscillateur harmonique radial, l'expression du spectre d'énergie est identique au terme constant du membre de droite ; soit

$$-E = -\frac{r_0 E \delta^2 \alpha^2}{4} + \frac{(a_r + a_t)}{8} \delta^2 \alpha^2, \quad (3.55)$$

et en tenant compte du choix  $\delta \alpha \equiv -Z e^2$ , on obtient :

$$E_{\nu\nu'} = -\frac{Z^2 e^4}{4} (\nu^2 + \nu'^2). \quad (3.56)$$

Sachant que  $a_c \equiv \lambda(\lambda+2)$ , (3.53) conduit à la génération du potentiel de COULOMB radial :

$$V(x) = -\frac{(a_r - a_t) Z e^2}{4 \xi(x)} + \frac{\lambda(\lambda+2)}{8 \xi^2(x)}. \quad (3.57)$$

**3. Potentiel de Morse.** – Pour le potentiel de MORSE, nous optons pour le choix suivant des paramètres :  $r_0 = t_0 = 0$  et  $c_0 \neq 0$ . L'équation (3.42) est réduite à,

$$\frac{y'^2(x)}{m(x)} = \frac{8y^2(x)}{c_0}, \quad (3.58)$$

où  $\alpha = \sqrt{8/c_0}$  et dont la solution est :

$$y(x) = e^{-\alpha \xi(x)}. \quad (3.59)$$



La substitution dans (3.32) donne l'expression suivant :

$$V_{\text{eff}}^{(0,1)}(x) - E_{r,t,c} = \frac{(a_r + a_t)}{8} \delta^2 \alpha^2 e^{-2\alpha\xi(x)} + \frac{(a_r - a_t)}{4} \delta \alpha^2 e^{-\alpha\xi(x)} + \frac{\alpha^2}{8} (c + 1) + V_m^{(\eta,\epsilon)}(x), \quad (3.60)$$

avec

$$V_m^{(\eta,\epsilon)}(x) \equiv \left[ \frac{4\epsilon(\eta + 1) + (2\eta + 1)^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \right] \frac{\xi''^2(x)}{\xi'^4(x)} - \left[ \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{4} \right] \frac{\xi'''(x)}{\xi'^3(x)}, \quad (3.61)$$

Par identification, on obtient l'expression du spectre d'énergie :

$$E = -\frac{\alpha^2}{8} (\lambda + 1)^2. \quad (3.62)$$

ainsi que l'allure du potentiel de MORSE donné par

$$V(x) = \frac{(a_r + a_t)}{8} \delta^2 \alpha^2 e^{-2\alpha\xi(x)} + \frac{(a_r - a_t)}{4} \delta \alpha^2 e^{-\alpha\xi(x)}. \quad (3.63)$$

### 3.4.2 Potentiels de NATANZON non-dégénérés ( $q = 1$ et $b = 1$ )

Cette large classe de potentiels est caractérisée par le choix convenable des paramètres  $q = 1$  et  $b = 1$ . Ainsi, les fonctions  $W_{\pm}(x)$  sont données respectivement par :

$$W_+(x) = \frac{4 + \delta^2}{(1 - y^2(x))^2} + 2\delta \frac{1 + y^2(x)}{y(x)(1 - y^2(x))^2}, \quad (3.64)$$

$$W_-(x) = \frac{4 + \delta^2}{(1 - y^2(x))^2} - 2\delta \frac{1 + y^2(x)}{y(x)(1 - y^2(x))^2}, \quad (3.65)$$

et la fonction génératrice est réduite à :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x) &\equiv \frac{y'(x)^2}{m(x)} \\ &= \frac{8y^2(x)(1 - y^2(x))^2}{(r_0 + t_0)(4 + \delta^2)y^2(x) + 2\delta(r_0 - t_0)(1 - y^2(x))y(x) + c_0(1 - y^2(x))^2}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

et qui s'avère être plus compliquée que celle obtenue en (3.42). On en conclut, par conséquent, qu'elle contient plus de potentiels que la classe précédente.

**4. Potentiel hyperbolique de Pöschl-Teller généralisé.** – À ce type de potentiel lui convient le choix suivant  $r_0 = t_0 = 0$  et  $c_0 \neq 0$ . Ces contraintes conduisent à l'équation différentielle :

$$\frac{y'^2(x)}{m(x)} = \frac{8y^2(x)}{c_0}, \quad (3.67)$$

et dont la solution est donnée par

$$y(x) = e^{-\alpha\xi(x)}. \quad (3.68)$$

La substitution dans (3.32) conduit (après simplification) à la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(1,1)}(x) - E_{r,t,c} &= \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4] \frac{1}{\sinh^2(\alpha\xi(x))} \\ &+ \frac{\delta\alpha^2}{8} (a_r - a_t) \frac{1}{\sinh(\alpha\xi(x)) \tanh(\alpha\xi(x))} + \frac{\alpha^2}{8} (c + 1) + V_m^{(\eta,\epsilon)}(x), \end{aligned} \quad (3.69)$$

où  $V_m^{(\eta,\epsilon)}(x)$  est identique à celle déjà déduite précédemment dans (3.61). En identifiant termes-à-termes, on déduit les caractéristiques suivantes :

$$E = -\frac{\alpha^2}{8} (\lambda + 1)^2, \quad (3.70)$$

$$V(x) = \frac{\alpha^2 (a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4}{32 \sinh^2(\alpha\xi(x))} + \frac{\delta\alpha^2}{8} \frac{a_r - a_t}{\sinh(\alpha\xi(x)) \tanh(\alpha\xi(x))}. \quad (3.71)$$

**5. Potentiel trigonométrique de Pöschl-Teller généralisé.** – La version trigonométrique du potentiel de PÖSCHL-TELLER peut être générer du cas hyperbolique en opérant la transformation  $\alpha \rightarrow i\alpha$  dans les expressions (3.70) et (3.71). On déduit par conséquent :

$$E = \frac{\alpha^2}{8} (\lambda + 1)^2, \quad (3.72)$$

$$V(x) = \frac{\alpha^2 (a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4}{32 \sin^2(\alpha\xi(x))} + \frac{\delta\alpha^2}{8} \frac{a_r - a_t}{\sin(\alpha\xi(x)) \tan(\alpha\xi(x))}. \quad (3.73)$$

**6. Potentiel de Scarf hyperbolique.** – Il est bien connu que le potentiel de SCARF hyperbolique est isospectral au potentiel hyperbolique de PÖSCHL-TELLER généralisé. Dû à cette propriété, la fonction ponctuelle (i.e.  $y$ ) est maintenue la même moyennant quelques changements, telle que

$$y(x) = e^{-\alpha\xi(x)+i\pi/2} = ie^{-\alpha\xi(x)}. \quad (3.74)$$

En effectuant les mêmes étapes du calcul que précédemment, on finit par déduire le spectre d'énergie et l'allure du potentiel de SCARF hyperbolique ; ils sont donnés par

$$E = -\frac{\alpha^2}{8} (\lambda + 1)^2, \quad (3.75)$$

$$V(x) = -\frac{\alpha^2 (a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4}{32 \cosh^2(\alpha\xi(x))} + i \frac{\delta\alpha^2}{8} \frac{a_r - a_t}{\cosh(\alpha\xi(x))} \tanh(\alpha\xi(x)). \quad (3.76)$$

**7. Potentiel de Scarf trigonométrique.** – Encore une fois, la version trigonométrique du potentiel de SCARF est isospectral à celle du PÖSCHL-TELLER trigonométrique. Sinon, il est tout à fait possible de le déduire de celui du SCARF hyperbolique en apportant la transformation (rotation d'angle  $\pi/2$ ) au paramètre  $\alpha$ , tel que  $\alpha \rightarrow i\alpha$ . Dès lors, on déduit

$$E = \frac{\alpha^2}{8}(\lambda + 1)^2, \quad (3.77)$$

$$V(x) = \frac{\alpha^2}{32} \frac{(a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4}{\cos^2(\alpha\xi(x))} + i \frac{\delta\alpha^2}{8} \frac{a_r - a_t}{\cos(\alpha\xi(x))} \tan(\alpha\xi(x)). \quad (3.78)$$

**8. Potentiel hyperbolique de Pöschl-Teller.** – Ce potentiel admet la même fonction  $y$  obtenue en (3.68), à exception que  $\alpha = \sqrt{2/c_0}$ . Ainsi, la solution en  $y(x)$  est donnée par :

$$y(x) = e^{-2\alpha\xi(x)}, \quad (3.79)$$

et en remplaçant dans (3.32), on trouve donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(1,1)} - E_{r,t,c} &= \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) + 4\delta(a_r - a_t) - 4] \frac{1}{\sinh^2(\alpha\xi(x))} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4\delta(a_r - a_t) + 4] \frac{1}{\cosh^2(\alpha\xi(x))} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2}(\lambda + 1)^2 + V_m^{(\eta,\epsilon)}(x). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Une identification immédiate conduit aux expressions du spectre d'énergie et du potentiel recherchées :

$$E = -\frac{\alpha^2}{2}(\lambda + 1)^2, \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) + 4\delta(a_r - a_t) - 4] \frac{1}{\sinh^2(\alpha\xi(x))} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4\delta(a_r - a_t) + 4] \frac{1}{\cosh^2(\alpha\xi(x))}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

**9. Potentiel trigonométrique de Pöschl-Teller.** – La rotation du paramètre  $\alpha \rightarrow i\alpha$  dans (3.81) et (3.82) nous mène directement aux caractéristiques du potentiel de PÖSCHL-TELLER trigonométrique. On trouve alors

$$E = \frac{\alpha^2}{2}(\lambda + 1)^2, \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) + 4\delta(a_r - a_t) - 4] \frac{1}{\sin^2(\alpha\xi(x))} \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{32} [(a_r + a_t)(4 + \delta^2) - 4\delta(a_r - a_t) + 4] \frac{1}{\cos^2(\alpha\xi(x))}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

**10. Potentiel d'Eckart.** – Pour ce potentiel, nous optons pour le choix suivant des paramètres  $r_0 = t_0 \neq 0$  et  $c_0 = 0$ . Dans ce cas, la fonction génératrice est réduite à l'équation différentielle,

$$\frac{y'^2(x)}{m(x)} = \frac{2}{r_0(4 + \delta^2)} (1 - y^2(x))^2, \quad (3.85)$$

avec  $\alpha = \sqrt{2/\sqrt{r_0(4 + \delta^2)}}$ . Alors l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{y'(x)}{1 - y^2(x)} = \alpha \sqrt{m(x)}, \quad (3.86)$$

et dont la solution est finalement :

$$y(x) = \tanh \frac{\alpha}{2} \xi(x). \quad (3.87)$$

En insérant cette dernière dans (3.32) (en tenant compte de quelques relations hyperboliques), on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(1,1)}(x) - E_{r,t,c} = & -\frac{r_0 E \alpha}{16} (4 + \delta^2) + \frac{a_r + a_t}{32} \alpha^2 (4 + \delta^2) + \frac{\delta \alpha^2 (a_r - a_t)}{8} \frac{1}{\tanh(\alpha \xi(x))} \\ & + \frac{a_c \alpha^2}{8} \frac{1}{\sinh^2(\alpha \xi(x))} + V_m^{(\eta, \epsilon)}(x). \end{aligned} \quad (3.88)$$

L'identification conduit aux expressions du spectre d'énergie et du potentiel :

$$E = -\frac{\alpha^2}{16} (\nu^2 + \nu'^2) (4 + \delta^2), \quad (3.89)$$

$$V(x) = \frac{\delta \alpha^2 (a_r - a_t)}{8} \frac{1}{\tanh(\alpha \xi(x))} + \frac{\lambda(\lambda + 2) \alpha^2}{8} \frac{1}{\sinh^2(\alpha \xi(x))}. \quad (3.90)$$

**11. Potentiel de Rosen-Morse.** – Le potentiel de ROSEN-MORSE est isospectral au potentiel d'ECKART. Par conséquent, nous maintenons la même fonction ponctuelle  $y(x)$ , tout en opérant certaines transformations ; en effet, adoptons ce changement :

$$y(x) = \tanh \left( \frac{\alpha}{2} \xi(x) + i \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.91)$$

et en utilisant quelques relations hyperboliques, on finit par obtenir :

$$E = -\frac{\alpha^2}{16} (\nu^2 + \nu'^2) (4 + \delta^2), \quad (3.92)$$

$$V(x) = \frac{\delta \alpha^2}{8} (a_r - a_t) \tanh(\alpha \xi(x)) - \frac{\alpha^2}{8} \lambda(\lambda + 2) \frac{1}{\cosh^2(\alpha \xi(x))}. \quad (3.93)$$

**12. Potentiel de Manning-Rosen.** – Comme nous l’avons énoncé dans l’introduction de ce chapitre, la génération de ce potentiel est d’une importance capitale, puisqu’elle permet de déduire, à la fois, les potentiels d’HULTHÈN, de YUKAWA et celui de COULOMB. Ces réductions se font moyennant des transformations aux niveaux des paramètres caractérisant le potentiel de MANNING-ROSEN. Commençons donc par trouver ce dernier en choisissant la fonction ponctuelle  $y(x)$  comme suit :

$$y(x) = \tanh \frac{\alpha}{4} \xi(x). \quad (3.94)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{r_0(4 + \delta^2)}}. \quad (3.95)$$

En insérant (3.94) dans (3.32), on déduit donc :

$$E = -\frac{\alpha^2}{16}(4 + \delta^2)(\nu^2 + \nu'^2) - \frac{\delta\alpha^2}{4} \nu\nu', \quad (3.96)$$

$$V(x) = \frac{\alpha^2}{16} [2\lambda(\lambda + 2) + \delta\nu\nu'] \frac{e^{-\alpha\xi(x)}}{1 - e^{-\alpha\xi(x)}} + \frac{\alpha^2}{8} \lambda(\lambda + 2) \frac{e^{-2\alpha\xi(x)}}{(1 - e^{-\alpha\xi(x)})^2}. \quad (3.97)$$

De (3.97), nous pouvons déduire les potentiels d’HULTHÈN, de YUKAWA et celui de COULOMB, considérés comme des variants au potentiel de MANNING-ROSEN.

**a. Potentiel d’Hulthèn.** – En appliquant le développement limité (i.e. limite) au voisinage de  $\lambda = 0$ , (3.97) est réduite au potentiel d’HULTHÈN :

$$V(x) = \frac{\alpha^2}{16} \delta\nu\nu' \frac{e^{-\alpha\xi(x)}}{1 - e^{-\alpha\xi(x)}}. \quad (3.98)$$

**b. Potentiel de Yukawa.** – Le potentiel de YUKAWA est obtenu en partant du potentiel d’HULTHÈN en passant au développement limité au voisinage de  $\alpha \rightarrow 0$ , i.e.

$$V(x) = \frac{1}{16} \delta\nu\nu' \frac{e^{-\alpha\xi(x)}}{\xi(x)}. \quad (3.99)$$

**c. Potentiel de Coulomb.** – Enfin, le potentiel de COULOMB est obtenu de celui de YUKAWA en posant  $\alpha = 0$  (i.e. en éliminant la barrière des interactions résiduelles fortes) ; soit l’expression bien connu :

$$V(x) = \frac{1}{16} \delta\nu\nu' \frac{1}{\xi(x)}, \quad (3.100)$$

où, par convention, nous admettons que  $\delta\nu\nu'/16 = -Ze^2$ .

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons fait connaissance dans ce mémoire d'une approche mathématique essentiellement fondée sur la théorie des groupes continus de LIE, appelée algèbre des spectres générés. Comme son nom l'indique, son objectif principal est de générer les spectres d'énergie des différents systèmes physiques (quantiques) soumis à des potentiels divers. Cette méthode s'avère être très puissante, puisque des potentiels physiques et leurs spectres en énergie sont générés *sans avoir à résoudre aucune équation d'onde*. Sur ce point, la théorie des groupes semble être très puissante et efficacement redoutable.

En se fondant sur ces renseignements, nous avons opté dans ce mémoire de combiner l'approche algébrique des spectres générés aux systèmes physiques dotés d'une masse dépendante de la position (PDM). Le choix porté à ce genre de systèmes est sciemment choisi, puisqu'il permet d'expliquer beaucoup de phénomènes physiques, tels que les bandes d'énergie, mais surtout il permet de généraliser le cas d'un système à masse constante. Il suffit pour cela de réduire l'expression de la fonction-masse à l'unité.

Nous avons tenu à prendre en considération dans notre étude l'algèbre de LIE  $\mathfrak{so}(2, 2)$ . Elle est plus large que beaucoup d'autres algèbres et contient des sous-algèbres qui s'avèrent être très utiles. Une fois appliqué aux systèmes PDM, nous avons obtenu une large classe de potentiels quantiques exactement solvables (par des équations d'onde) et définie par NATANZON. De part ce travail, nous voulions répondre à une question essentielle : **l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$  est-elle une excellente algèbre génératrice de potentiels quantique ?**. Vu la pléiade des potentiels déduits dans le chapitre 3, nous pensons que nous avons résolument apporté une réponse à cette question par **l'affirmative**. Nous avons aussi remarqué que l'ensemble des différents potentiels ainsi que leur spectre d'énergie sont indépendants des paramètres d'ambiguïté  $\eta, \epsilon$  et  $\rho$ . Certainement la seule difficulté que nous avons eu dans ce modèle concerne le choix des différents paramètres  $q, b$ , et  $r_0, t_0, c_0, a_r, a_t$  et  $a_c$ , car il y a pas de contrainte préétablie qui contrôle et fixe définitivement ces paramètres.

Cependant, il est important à signaler que l'ensemble de tous nos résultats obtenus concerne uniquement le cas de la théorie des états de bande d'énergie. Si nous voulons étendre notre travail aux cas des états de diffusion, l'algèbre  $\mathfrak{so}(2, 2)$  ne donne pas satisfaction et par conséquent elle n'est pas adaptée à ce type d'étude. Pour une meilleure approche, il est souhaitable de considérer les sous-algèbres de  $\mathfrak{so}(2, 2)$ , tel que  $\mathfrak{so}(2) \otimes \mathfrak{so}(2)$ . Les états de diffusion sont alors décrites sous de telles sous-algèbres, (voir Réfs. [34, 35]).

# RÉFÉRENCES

- [1] A. de Souza Dutra, C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A **275** (2000) 25.
- [2] D. J. BenDaniel, C. B. Duke, Phys. Rev. **152** (1966) 683.
- [3] O. von Roos, Phys. Rev. B **27** (1983) 7547.
- [4] G. A Natanzon, Teor. Mat. Fiz. **38** (1976) 146.
- [5] A. O. Barut, R. Raczka, "*Theory of Group Representation and Applications*", (PWN, Warsaw, 1977).
- [6] F. Iachello, "*Lie Algebras and Applications*", (Springer, Berlin 2006).
- [7] R. Gilmore, "*Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*", (Wiley, New York, 1974).
- [8] L. Infeld, T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 21.
- [9] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367 ;  
Voir aussi, H. Kleinert, "*Path-Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymers Physics and Financial Markets*", (4th ed., World Scientific, Singapore, 2006).
- [10] Y. Alhassid, F. Gürsey, F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 873.
- [11] Y. Alhassid, F. Gürsey, F. Iachello, Ann. Phys. **148** (1983) 346.
- [12] Y. Alhassid, F. Iachello, J. Wu, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 271.
- [13] B. Bagchi, "*Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*", (Chapman & Hall, Florida, 2000).
- [14] G. Junker, "*Supersymmetric Methods in Quantum Mechanics and Statistical Physics*", (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [15] L. E. Gendenshtein, JETP Lett. **38** (1983) 356.
- [16] R. Koc, M. Koka, J. Phys. A : Math. Gen. **36**, (2003) 8105.
- [17] P. Cordero, G. C. Ghirardi, Nuovo Cimento A **2** (1971) 817.
- [18] P. Cordero, G. C. Ghirardi, Fortsch. Phys. **20** (1972) 105.
- [19] P. Cordero, S. Hojman, P. Furlan, G. C. Ghirardi, Nuovo Cimento A **3** (1971) 807.
- [20] P. Cordero, S. Salomo, J. Phys. A : Math. Gen. **24** (1991) 5299.
- [21] P. Cordero, S. Salomo, Found. Phys. **23** (1993) 675.

- [22] B. Roy, P. Roy, J. Phys. A : Math. Gen. **35** (2002) 3961.
- [23] B. Roy, P. Roy, Phys. Lett. A **340** (2005) 70.
- [24] B. Gönül, O. Özer, B. Gönül, F. Üzgün, Mod. Phys. Lett. A **17** (2002) 2453.
- [25] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V. M. Tkachuk, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005) 2929.
- [26] J. Yu, S. H. Dong, G. H. Sun, Phys. Lett. A **322** (2004) 290.
- [27] C. Y. Cai, Z. Z. Ren, G. X. Ju, Commn. Theor. Phys. **43** (2005) 1019.
- [28] G. Lévai, F. Cannata, A. Ventura, J. Phys. A : Math. Gen. **35** (2002).5041.
- [29] G. Lévai, J. Phys. A : Math. Gen. **27** (1994) 3809.
- [30] S.-A. Yahiaoui. Thèse de doctorat (Physique théorique, Université Saâd Dahlab-Blida 1, juin 2009).
- [31] M. I. Estrada-Delgado, D. J. Fernández, Eur. Phys. J. Plus **134** (2019) 341.
- [32] S.-A. Yahiaoui, M. Bentaiba, Int. J. Theor. Phys. **48** (2009) 315.
- [33] S.-A. Yahiaoui, M. Bentaiba, J. Phys. A : Math. Theor. **45** (2012) 444034.
- [34] S. A. Baran, A. Dalgic, G. A. Kerimov, J. Math. Phys. 42 **543** (2001).
- [35] S. A. Baran, G. A. Kerimov, J. Math. Phys. **45** 1249 (2004).