

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA



Faculté des sciences de l'ingénieur

Département d'Aéronautique

067/211
Ex 2

PROJET DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN
AERONAUTIQUE

Filière : Construction et Maintenance en Aéronautique

Spécialité : Structure

THEME

**ETUDE DE STABILITE AEROELASTIQUE DE
FLOTTOMET BINAIRE D'UNE AILE D'AVION**

Présenté par :

BOUTAGHOU Abdellah

&

BENTCHIKOU Djamel Ibrahim

Encadré par :

Mr. Aimadeddine BADEREDDINE

Anne Universities: 2010-2011

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ
وَالصَّلٰةِ وَالسَّلَامِ عَلٰی اَشْرَفِ الْمُرْسَلِیْنَ سَيِّدِنَا مُحَمَّدٍ
وَعَلٰی اٰلِهِ الصَّالِحِیْنَ وَاصْحَابِهِ اَجْمَعِیْنَ

Dédicace

Je dédier ce modeste travail à :

- ❖ *Mon maître*
- ❖ *Mes parents*
- ❖ *Mes grands frères*
- ❖ *Mes frères et mes sœurs*
- ❖ *Ainsi à tous mes amis*

Djamel Abraham

J'offre ce modeste travail avec une grande Fierté à :

- ❖ *Mes chers et aimables parents qui m'ont soutenu tout le long de mes études.*
- ❖ *Mes frères et sœurs*
- ❖ *Tous les professeurs au niveau de l' DAB*
- ❖ *Tous Les membres des familles :*
BOUTAGHOU, LOMANI ET HARTJE
- ❖ *A toute la promotion propulsion et structure 2011*
- ❖ *Tous mes amis.*

Abdellah

Remerciement

Nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu de nous avoir donné le Courage, la patience et la volonté et la capacité de mener ce travail à terme.

Nous exprimons nos vifs remerciements à notre promoteur Monsieur Badereddine AimadEdinne et Mr Bennaimia Ismail, qui ont été très patients avec nous.

Aux membres de jury pour l'honneur qui nous ont accordé en acceptant de juger notre travail.

Enfin on voudrait exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement. que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelque mois seulement, nombreux ceux qui ont participé à notre aide. On les remercie tous.

ملخص

إن الدراسة الديناميكية تلعب دورا هاما في دراسة ظواهر الاهتزاز والارتجاج في الطائرة. نظرية العناصر المنتهية من بين النظريات المتهجة من اجل إيجاد ترددات الهياكل.

في هذا العمل نستعمل نظرية العناصر المنتهية من اجل الدراسة الاهتزازية لجناح الطائرة، ثم نستعمل طريقة رايلي-ريتز لحل معادلة المرونة اليروديناميكية و إيجاد السرعة الحرجة لتفاديها .

المنهجية المتخذة لدراسة الجناح تعتمد على عنصر بسيط و هي عبارة عن شعاع، و هذا بإستعمال برنامج الماتلاب.

RESUME

L'étude dynamique est une étape très importante dans le calcul des structures d'avions pour analyser les phénomènes vibratoires et d'aéroélasticité.

Ce travail concerne l'étude de stabilité Aéroélastique d'une aile d'avion. En utilisant la méthode des éléments finis et la méthode de Raleigh Ritz pour le calcul du flottement binaire, En utilisant le logiciel Matlab comme outil.

ABSTRACT

The dynamic study is a very important step in the calculation of aircraft structures to analyze the vibration phenomena and aeroelasticity. This work concerns the study of aeroelastic stability of a plane wing. Using the finite element method and the method of Raleigh Ritz, for the calculation of binary flutter, by using a Matlab as tool.

Introduction Général

D'une façon générale, l'aéroélasticité est la discipline de la mécanique appliquée qui traite le mouvement d'un corps déformable dans un écoulement gazeux (lorsque l'écoulement envisagé est un liquide, on parle alors plutôt d'*hydro élasticité*). Bien que l'aéroélasticité ait trouvé son origine en aéronautique, ou les problèmes d'aéroélasticité se sont avérés critiques dès les débuts du vol propulsé. Les phénomènes aéroélastiques se sont également révélés très importants par la suite dans d'autres domaines des sciences appliquées. On observe en effet une tendance à construire en génie civil des ouvrages d'une conception toujours plus audacieuse, et donc toujours plus souples (immeubles, ponts, tours, lignes de transmission électrique, ...).

De même, dans la conception des turbomachines, des ouvrages hydro-électriques, des véhicules terrestres ou maritimes, etc. . . . les problèmes aéro- ou hydro-élastiques se révèlent de plus en plus comme des facteurs à prendre en compte. D'où le fait que le domaine de l'aéroélasticité soit toujours un thème de recherche scientifique et industrielle important.

C'est cependant dans la construction aéronautique que les phénomènes aéroélastiques apparaissent de la façon la plus marquée. C'est pourquoi, depuis la seconde guerre mondiale, on accorde une grande importance aux problèmes aéroélastiques dans la conception des avions rapides (régime transsonique et supersonique) et dans celle des avions à grande envergure (planeurs, ...). En particulier, pour les avions rapides, on notera la nécessité de modifier la géométrie de la voilure et l'introduction des servo - commandes qui ont conduit à de nouveaux problèmes. On notera par ailleurs l'apparition de matériaux (tels les composites), qui ont notamment permis l'accroissement de l'envergure (la flexibilité) des différents types d'avions, y renforçant ainsi les effets aéroélastiques.

Ce modeste travail consiste à déterminer la vitesse de flottement d'une aile d'avion en passant par les étapes suivantes :

- Modélisation structurale de l'aile à base d'une poutre par la méthode des éléments finis.
- En utilisant les résultats des éléments finis (mode propres et fréquence naturels) pour les introduire dans le système Raleigh Ritz pour écrire les équations du mouvement

- Faire introduire les forces aérodynamiques et les forces d'amortissement (structural et aérodynamique) pour écrire les équations aéroélastiques
- Faire résoudre le système et tracer les courbes V-g afin de déterminer la vitesse de flottement du système.

Sommaire

INTRODUCTION GENERAL.....	V
I. PHENOMENES AEROELASTIQUES	1
I.1 INTRODUCTION.....	2
I.2 CLASSIFICATION DES PROBLEMES AEROELASTIQUES.....	2
I.3 LE COUPLAGE AEROELASTIQUE.....	3
I.4 LA QUALITE DE VOL DE L'AVION.....	4
I.5 L'AEROELASTICITE STATIQUE :.....	4
<i>I.5.1 la divergence :</i>	4
<i>I.5.2 Redistribution de portance</i>	5
<i>I.5.3 Renversement de contrôle</i>	5
I.6 L'AEROELASTICITE DYNAMIQUE.....	5
I.6.1 Le Buffeting.....	5
I.6.2 Buzz-tansonique.....	5
I.6.3 Le flottement (flutter).....	5
I.6.1	6
I.6.2	6
I.6.3	6
I.7 EQUATIONS AEROELASTIQUE.....	6
I.8 REPRESENTATION MODALE.....	8
I.9 LES TYPES D'AMORTISSEMENT :.....	9
<i>I.9.1 L'amortissement structural :</i>	9
<i>I.9.2 L'amortissement aérodynamique :</i>	10
II. MODELISATION STRUCTURALE DE L'AILE	12
II.1 INTRODUCTION :.....	13
II.2 LE PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :.....	13
II.2.1 <i>Discrétisation spatiale</i>	13
II.2.2 <i>La formulation élémentaire</i>	14
II.2.5 <i>La formulation globale</i>	20
II.2.7 <i>Etude Modale</i>	22
II.2.1	22
II.2.2	22
II.2.3	22
II.2.4	22

II.2.5	22
II.2.6	22
II.2.7	22
II.3 MODEL DE RAYLEIGH RITZ :	23
II.3.1 Matrice Masse :	24
II.3.2 Matrice rigidité :	25
II.3.3 Forces extérieure :	25
III. MODELISATION AEROELASTIQUE	27
III.1 MODELISATION STRUCTURALE :	28
III.1.1 Aile rigide:	28
III.1.2 Aile souple	30
III.2 MODELISATION AERODYNAMIQUE	30
III.3 Résolution de l'équation de flottement	31
IV. RESULTATS ET INTERPRETATION	33
IV.1 INTRODUCTION (PROCESSUS DE PROGRAMMATION)	34
IV.2 CALCUL DES MODES PROPRES ET FREQUENCE PROPRE PAR ELEMENTS FINIS	34
IV.2.1 Flexion pure :	36
IV.2.2 Torsion pure :	38
IV.2.3 Mode découplé flexion torsion	39
IV.2.4 Mode couplé flexion torsion :	40
.....	41
IV.3 CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT	42
IV.3.1 Modèle d'aile rigide [2]	43
IV.1.1	44
IV.3.2 Modèle d'aile souple :	49
IV.1.2	49
IV.1.3	49
CONCLUSION	53
CONCLUSION :	54
A. ANNEXE : CALCUL DES FORCES AERODYNAMIQUES	55
A.1 DERIVES AERODYNAMIQUES HARMONIQUES :	56
A-2- MATRICE AMORTISSEMENT ET RIGIDITE AERODYNAMIQUES :	57

Liste des Illustrations

FIGURE I-1 TESTS STATIQUES SUR UN AIRBUS A340 (CEAT-TOULOUSE)	2
FIGURE I-2 TRIANGLE AEROELASTIQUE DE COLLAR	4
FIGURE II-2 REPRESENTATION DE DEPLACEMENT PAR DIFFERENTE METHODE.	26
FIGURE IV-1 ORGANIGRAMME DE CALCUL DES FREQUENCES PROPRES ET LES MODES PROPRES.....	35
FIGURE IV-2 POUTRE ENCASTRE LIBRE	36
FIGURE IV-3 VARIATION DES FREQUENCES DES MODES 1 A 3 AVEC LE NOMBRE DES ELEMENTS POUR DES VALEURS EXACTES	36
FIGURE IV-4 PREMIER MODE DE LA FLEXION POUR 3,75(Hz)	37
FIGURE IV-5 DEUXIEME MODE DE LA FLEXION POUR 23,12(Hz)	37
FIGURE IV-6 TROISIEME MODE DE LA FLEXION 65 (Hz)	37
FIGURE-IV-7 LES TROIS PREMIERS MODES POUR UNE TORSION PURE	38
FIGURE IV-8 PREMIER MODE DE TORSION POUR F=8,2 (Hz)	38
FIGURE IV-9 DEUXIEME MODE DE LA TORSION POUR 24,8 (Hz)	39
FIGURE IV-10 TROISIEME MODE DE LA TORSION POUR 42,1 (Hz)	39
FIGURE IV-11 PREMIER MODE DECOUPLE A 49 Hz	40
FIGURE IV-12 DEUXIEME MODE DECOUPLE A 87Hz	40
FIGURE IV-13 PREMIER MODE COUPLE A 48 Hz	41
FIGURE IV-14 DEUXIEME MODE COUPLE A 92 Hz	41
FIGURE IV-15 ORGANIGRAMME DE CALCUL DE FLOTTEMENT	42
FIGURE IV-16 MODELE D'UN FLOTTEMENT RIGIDE POUR UNE AILE RIGIDE.....	43
FIGURE IV-17 LES FREQUENCES ET LES CONSTANTES D'AMORTISSEMENT EN FONCTION DE LA VITESSE DE L'AIR [3]	44
FIGURE IV-18 LES FREQUENCES ET LES CONSTANTES D'AMORTISSEMENT EN FONCTION DE LA VITESSE DE L'AIR	44
FIGURE IV-19-SYSTEME AERODYNAMIQUE QUASISTATIONNAIRE ($M\theta=0$, $x_F=0.48c$, $x_M=0.5c$)	45
FIGURE IV-20-SYSTEME AERODYNAMIQUE QUASI STATIONNAIRE ($M\theta=0$, $x_F=0.5c$, $x_M=0.5c$)	46
FIGURE IV-21 SYSTEME AERODYNAMIQUE INSTATIONNAIRE ($M\theta=-1.2$, $x_F=0.5c$, $x_M=0.5c$).....	47
FIGURE IV-22 L'EFFET DE CHANGEMENT DE L'AXE ELASTIQUE	48
FIGURE IV-23-FLOTTEMENT BINAIRE EN MODE SOUPLES A F FLEXION=5 ET F TORSION=10	49
FIGURE IV-24 FLOTTEMENT BINAIRE EN MODE SOUPLES A F FLEXIONS=6 ET F TORSION=9.....	50
FIGURE IV-25 FLOTTEMENT BINAIRE EN MODE SOUPLE AVEC $M=150\text{KG}/\text{M}^2$	51
FIGURE IV-27 FLOTTEMENT MODE SOUPLE POUR AILE GOLAND AVEC SES FREQUENCES.....	52
FIGURE IV-26 FLOTTEMENT MODE SOUPLE POUR AILE GOLAND AVEC NOS FREQUENCES	52
FIGURE A-1 PROFIL AERODYNAMIQUE BIDIMENSIONNEL SUBISSANT LE MOUVEMENT DE POUSSEE ET DE LANCEMENT	56

LISTE DES SYMBOLES

A, S	Section.
(x,y,z)	Coordonnées cartésiennes
u, v, w, w'	Déplacements
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotation autour les axes
E	Module de Young
G	Module de cisaillement transversal
J	La jacobéenne
I, I_p	Moment d'inertie et moment d'inertie polaire respectivement
I_θ	Moment d'inertie de torsion
L, M	Forces aérodynamiques
ρ	Masse volumique
T, U	Energie cinétique et énergie potentielle respectivement
ω	Pulsation
$\{q\}$	Vecteur déplacement
$\{\varepsilon\}$	Vecteur déformation
s	Semi envergure
$\{Q_i\}$	Vecteur des forces aérodynamiques généralise
$[M_e], [k_e]$	Matrice masse et rigidité élémentaires
$[M_e]_g, [k_e]_g$	Matrice masse et rigidité élémentaires dans le repère global
$[M]_g, [K]_g$	Matrice masse et rigidité globales
$[R], [T]$	Matrices de passage
$[\phi]$	Matrice modale
$[A]$	Matrice d'amortissement
$[N]$	Matrice des fonctions d'interpolation
$[\mu], [\gamma]$	Matrices masse et de rigidité modales respectivement
$[M]$	la matrice masse.
$[K]$	la matrice rigidité.
$\{q\}$	le vecteur de déplacements nodaux.
$\{Q\}$	le vecteur des forces aérodynamique appliques aux nœuds de la structure.
ξ	L'amortissement
c	La corde
$[q]$	le déplacement de chaque nœud
x_r	Centre élastique

I. Phénomènes aéroélastiques

I.1 Introduction

Les problèmes aéroélastiques n'existent pas si les structures en particulier celles des avions étaient parfaitement rigides. Il en résulte en présence d'un écoulement une interaction mutuelle entre les forces d'inerties, les forces élastiques et les forces aérodynamiques.

I.2 Classification des problèmes aéroélastiques

Les phénomènes aéroélastiques résultent de l'interaction entre différents types de force :

- Les forces élastiques, d'origine structurale.
- Les forces d'inerties, d'origine structurale également.
- Les forces aérodynamiques, induites par les déformations (stationnaires ou oscillatoires) de la structure d'une part, et résultant de perturbations extérieures (manœuvres, turbulence atmosphérique, rafales, . . .) d'autre part.

Les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si la structure de l'avion restait parfaitement rigide lorsqu'elle est soumise à un écoulement d'air. Les structures d'avion sont toutefois toujours plus ou moins flexibles (comme illustre à la figure I.1), et cette flexibilité est la cause fondamentale des divers types de phénomènes aéroélastiques que l'on peut observer.

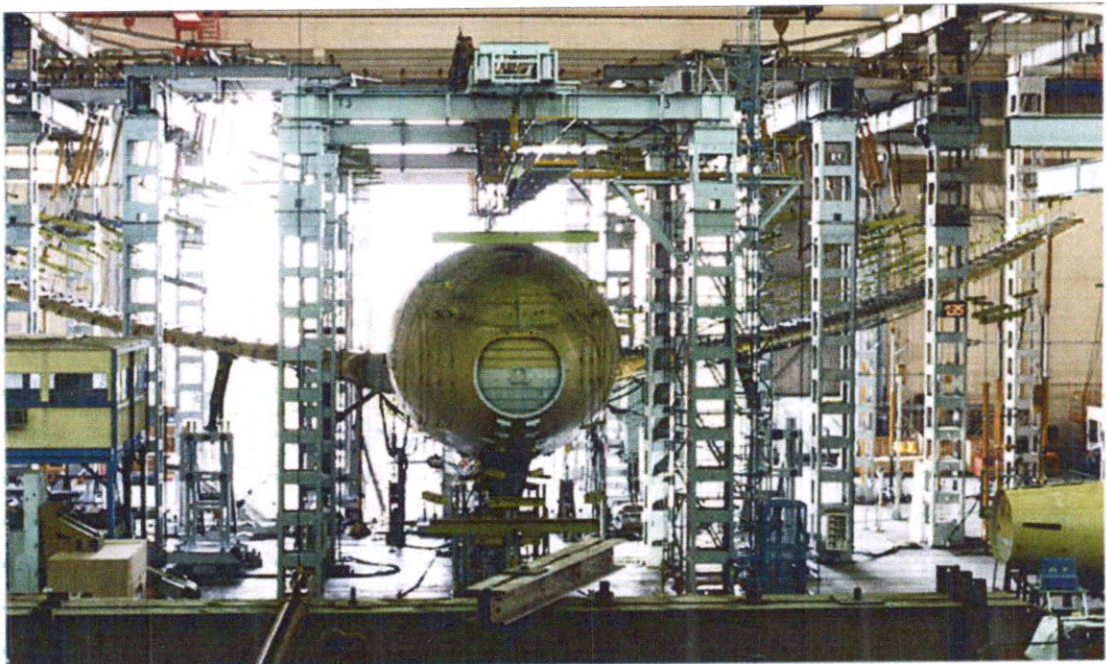


Figure I-1 Tests statiques sur un Airbus A340 (CEAT-Toulouse)

CHAPITRE I : PHENOMENES AEROELASTIQUES

Les effets inertiels peuvent également jouer un rôle très important, et on différenciera donc l'aéroélasticité dynamique, en impliquant l'ensemble des trois forces reprises ci-dessus, de l'aéroélasticité statique, impliquant uniquement les forces élastiques et aérodynamiques.

Il est classique de répertorier les divers phénomènes aéroélastiques selon le triangle des forces de Collar (figure 1.2). Les trois types de force résultant du mouvement –élastique, aérodynamique, et d'inertie– sont représentés par les trois sommets du triangle.

Chaque phénomène aéroélastique peut être localisé sur ce diagramme selon sa relation avec les sommets. Ainsi, les phénomènes relatifs à l'aéroélasticité dynamique sont placés au centre du triangle, tandis que ceux relatifs à l'aéroélasticité statique sont placés sur le côté gauche. Le côté droit regroupe les phénomènes n'impliquant que les forces aérodynamiques et d'inertie, à savoir la dynamique de l'avion rigide traitée en mécanique du vol.

La base du triangle est relative aux problèmes de vibration traités en dynamique des structures.

1.3 Le couplage aéroélastique

Les phénomènes aéroélastiques qu'effectuent les avions ont pour origine l'effet portant des surfaces portantes. L'énergie couplée à la structure est constituée par le vent relatif ou la détermination du champ de pression due à ce couplage est l'objet de l'aérodynamique instationnaire.

Le triangle aéroélastique permet de classer l'ensemble des phénomènes dû à différentes actions s'exerçant sur les structures en fonction du couplage des forces en présences.

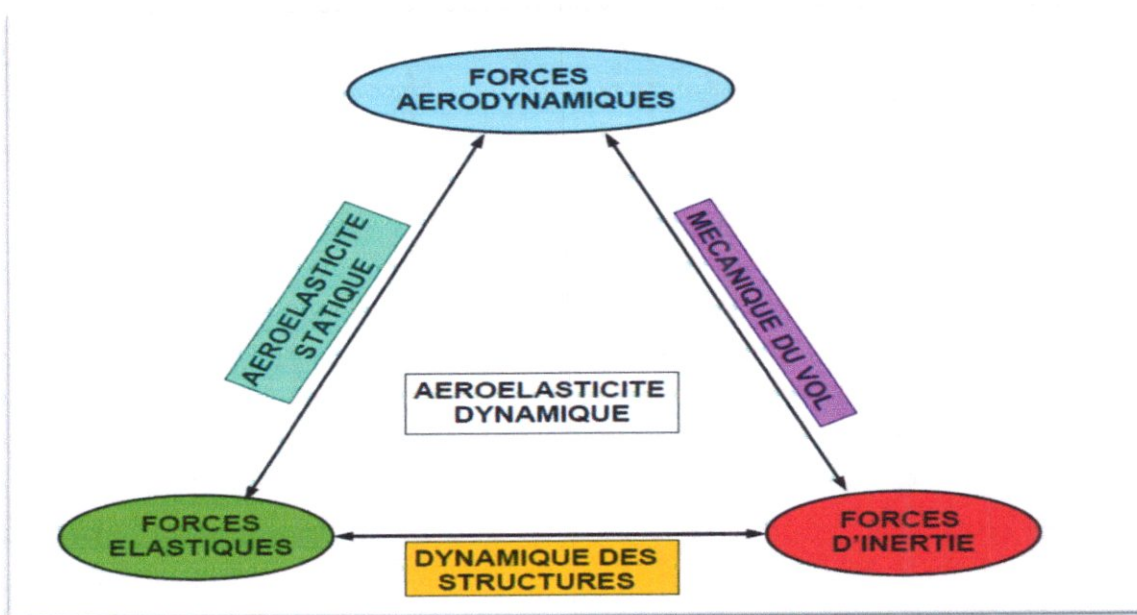


Figure I-2 Triangle aéroélastique de Collar

I.4 La qualité de vol de l'avion

L'étude du mouvement de l'avion concentré en son centre de gravité s'effectue à partir de la résultante des forces aérodynamiques de propulsions, de gravité et d'inertie permettant ainsi de récupérer la position de l'avion dans un trièdre aérodynamique et la performance du vol.

De plus, l'étude de la stabilité de ce mouvement autour de centre de gravité de l'avion fait intervenir le bilan des moments de tangages, de roulis et lacets en fonction de leurs angles respectifs, la solution du system présentant le bilan des forces et des moments dans le trièdre avion permet d'étudier la stabilité de l'avion rigide.

I.5 L'aéroélasticité statique :

Les phénomènes les plus importants en aéroélasticité statique sont :

I.5.1 la divergence :

Pour un avion flexible en vol stationnaire, un équilibre s'établit entre les forces aérodynamiques et les forces de rappel élastique, mais pour une certaine vitesse cet équilibre devient instable, ce qui peut conduire à la ruine brutale de la structure.

1.5.2 Redistribution de portance

Même avant la vitesse de divergence, la déformation des ailes entraîne une modification de la portance sur celles-ci, dont il est important de tenir compte pour prévoir les performances réelles de l'avion.

1.5.3 Renversement de contrôle

L'efficacité des surfaces de contrôle (gouvernes de profondeur, ailerons, . . .) est également modifiée par les effets aéroélastiques, et il peut même exister une vitesse pour laquelle leurs effets s'inversent.

1.6 L'aéroélasticité dynamique

Contrairement à l'aéroélasticité statique, ce type de phénomène dépend des effets d'inertie ou on peut citer le buffeting, buzz-trasonique et le flottement.

1.6.1 Le Buffeting

Dans le cas de forces turbulences, on rencontre souvent les phénomènes de Buffeting sur l'aile ou plus fréquemment sur les empennages horizontaux et les surfaces de contrôle par suite des excitations irrégulières de l'écoulement avec des vitesses et fréquences aléatoires.

1.6.2 Buzz-tansonique

Ce phénomène peut apparaître dans le cas de déplacements d'onde de choc qui poussent les surfaces de contrôle à vibrer en provoquant l'instabilité.

❖ *Dans le cadre de l'aéroélasticité dynamique, on s'intéressera plus particulièrement aux phénomènes suivants :*

1.6.3 Le flottement (flutter)

C'est parmi les problèmes qui risquent un avion en vol de le rencontrer. Le phénomène de flottement est l'origine d'interaction entre le mouvement vibratoire de la structure et l'écoulement de l'air.

Le flottement peut se présenter sous la forme classique qui est associée à l'écoulement potentiel et aux forces aérodynamiques.

Ceux-ci entraînent la coalition des fréquences de deux ou plusieurs modes propres de la structure. Les formes non classiques proviennent de la séparation de l'écoulement tel que le

décollement et le choc retard causé par la forme de l'écoulement et le mouvement de la structure.

Le problème du phénomène flottement peut se résumer en deux problèmes, dynamique et aérodynamique.

La première considération est d'entraîner le mouvement afin d'avoir une nature vibratoire continue par les différentes forces et l'effet d'amortissement internes. Ce problème peut s'associer à un seul pour décrire l'équation de mouvement du système.

La seconde considération c'est de déterminer la nature des forces aérodynamiques afin de maintenir l'équilibre de la structure.

Les types de flottements :

Les types de flottements se résument en

1.6.3.1 Flottement à fréquence nulle

C'est un problème de stabilité statique où les effets d'inertie sont négligeables. Il est appelé aussi phénomène de divergence.

1.6.3.2 Flottement de panneau

C'est un problème qui apparaît en écoulement supersonique ou l'interaction des forces aérodynamiques instationnaire avec la vibration d'un panneau dans le sens normal à sa surface peut entraîner la perforation de la structure.

1.6.3.3 Flottement de décrochage

Ce phénomène se produit à grand angle d'attaque, il est la conséquence de l'interaction entre la torsion de l'aile et le décollement de l'écoulement.

1.6.3.4 Le flottement des modes couplés

Ce type de flottement est le plus fréquent sur les structures d'avions, dans lesquelles les fréquences des oscillations de deux ou plusieurs modes convergent vers une même valeur qui provoque l'instabilité de la structure.

1.7 Equations Aéroélastique

L'avion peut être considéré comme un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par des forces internes et soumises à des forces externes.

CHAPITRE I : PHENOMENES AEROELASTIQUES

Les équations du mouvement vibratoires aéroélastiques sont de la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (I, 1)$$

Avec: [M] : la matrice masse.

[B] : la matrice dissipation.

[K] : la matrice rigidité.

{q}: le vecteur de déplacement nodaux.

{Q}: le vecteur des forces aérodynamique appliqués aux nœuds de la structure.

Il est clair qu'à fin d'obtenir une bonne approximation des déplacements, la structure modélisée par éléments finis devra présenter un maillage très fin. Il en résulte un système d'équation de grande dimension dont les inconvénients sont évidents.

C'est pourquoi, nous devons réduire artificiellement la taille du système élastique en utilisant le principe de la superposition modale.

Tout mouvement vibratoire général d'un système élastique, ayant des déformations à partir d'une configuration d'équilibre, peut être exprimé comme une combinaison linéaire de différents modes naturels. Ceci est le principe de la superposition modale dont le but fondamentale est de créer un nouvel ensemble d'équation découplée.

Dans le cas spécifique du phénomène de flottement cet avantage ne peut être exploité car la transformation du problème en un ensemble de système découplée, à un degré de liberté ne peut être facilement appliqué à cause de présence de la matrice Aérodynamique.

Cependant, nous bénéficierons du fait que nous réduisons artificiellement la taille du système et ainsi le nombre d'équations à résoudre.

Le champ des déplacements transversales de la structure est donné par :

$$w(x, y, t) = \sum_j^p \phi_{ij}(x, y) q_j(t) \quad (I, 2)$$

Nous définissons ainsi une approximation des déplacements en séparant le variable d'espace et de temps.

L'équation (I,2) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{Bmatrix} = b \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{array} \right\}_{m1} \\ \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{array} \right\}_{m2} \\ \dots\dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{array} \right\}_{mp} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_p \end{Bmatrix}$$

Ou plus simplement :

$$w(x, y, t) = b [\phi_{m(x,y)}] \cdot \{q(t)\} \tag{I,3}$$

Avec : longueur de référence de la surface portante.

$\{\phi\}_{mi}$: i^{ème} mode propre ou forme propre d'oscillation de la structure n'appartenant pas au plan (x, y).

$[\phi_m]$: La matrice modal d'ordre $p \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs propres naturels $\{\phi\}_{mi}$, avec : $i=1 \dots p$

La multiplication de second membre de l'équation (1,3) par la longueur de référence n'a été faite que pour rendre le vecteur {q} adimensionnel.

Pour des systèmes de grand ordre, tels que ceux correspondant à des structures d'avions, il n'est pas nécessaire, ni pratique de retenir tous les modes propres. La matrice modale peut être tronquée et le nombre limité de vecteurs propres correspondants aux fréquences naturelles les plus basses, peut approximer la structure vibrant avec une précision suffisante.

Avec : $p \gg n$

Ou encore :

$$\{w_i\} = b \sum_{j=1}^n [\phi_{ij}] \{q_j\} = b [\phi] \{q\} \tag{I,4}$$

Avec: $[\phi_{ij}]$: la matrice modale tronquée.

Contrairement aux composantes des {w} qui a un sens physique, les composants de {q} sont abstraits. Elles sont alors appelées déplacements aux cordonnés généralises.

I.8 Représentation modale

La représentation modale consiste à représenter les déflexions de la structure sur la base de ces formes propres de vibrations. Pour pouvoir exposer cette représentation et montrer toutes les propriétés qu'elles présentent, il faut d'abord étudier le comportement propre de la structure et notamment définir les modes propres de vibrations qui fournissent les éléments de base de cette représentation.

$$\{\mathbf{W}\} = [\boldsymbol{\phi}] \cdot \{q\} \quad (I,5)$$

Avec : $[\boldsymbol{\phi}]$: la matrice modale.

L'introduction des expressions des énergies cinétique, potentielle et dissipation écrites dans la base des coordonnées généralisés dans l'équation de **Lagrange** nous conduit à :

$$[[\boldsymbol{\mu}] \cdot \{q\} + [\boldsymbol{\beta}] \cdot \{q\} + [\boldsymbol{\gamma}] \cdot \{q\}] \cdot \mathbf{b}^2 = \{Q_i\} \quad (I, 6)$$

Cette équation dans lequel $\{Q_i\}$ est le vecteur des forces aérodynamique généralisées, représente la formulation générale des vibrations aéroélastique se produisant sur une structure d'avion ou autre structure en déplacement dans un écoulement.

Les vecteurs propres $\{\boldsymbol{\phi}\}$ peuvent être normalisés par rapport à la matrice masse donnant lieu à une nouvelle forme de l'équation (I, 7).

$$\begin{aligned} & [[I]\{\ddot{q}\} + [\boldsymbol{\mu}^{-1}][\boldsymbol{\beta}]\{\dot{q}\} + [\boldsymbol{\omega}_n^2]\{q\}] \mathbf{b}^2 \\ & = \{Q\}\{\boldsymbol{\mu}^{-1}\} \end{aligned} \quad (I, 7)$$

Avec : $[I]$: la matrice d'identité, d'ordre $n \times n$, et $[\boldsymbol{\omega}_n^2]$ la matrice diagonale des carrées des fréquences naturelles ou des valeurs propres d'ordre $n \times n$.

I.9 Les types d'amortissement :

I.9.1 L'amortissement structural :

Il a pour origine l'hystérésis du matériau et le frottement au niveau des joints et de connexions entre les différents composants de la structure d'avions.

Analyser l'amortissement d'un assemblage structural n'est pas une tâche facile, il est important de considérer, non seulement les matériaux constituant la structure, mais également la façon dont cette structure est assemblée.

En plus de cela, le phénomène de fatigue des matériaux est à prendre en considération. C'est pourquoi souvent on ne cherche pas à calculer l'amortissement structural. Il est quelque fois supposé négligeable ou bien estimé expérimentalement.

Dans ce cas, l'hypothèse de basile est souvent envisagée. Elle considère que seuls les termes de la diagonale de la matrice amortissement structural $[\beta]$ sont prépondérants.

1.9.2 L'amortissement aérodynamique :

Pour le définir, considérons un profil d'aile placé dans un écoulement uniforme horizontal avec une incidence i_0 .

La force aérodynamique qui s'exerce en un point M_1 du profil est verticale et est en fonction de l'angle d'incidence.

Pour la simplicité du raisonnement, nous considérons le profil animé d'un mouvement vibratoire de translation vertical et nous faisons l'hypothèse que chaque position du profil est en état d'équilibre (hypothèse quasi-stationnarité) ; nous voyons ou à chaque instant t . le profil a une vitesse instantané $U_1(t)$ et soumis à la force.

La force aérodynamique $F(t)$ perpendiculaire à la vitesse $V_1(t)$ de l'écoulement relatif par rapport au profil.

Il apparaît ainsi que dans le domaine où la force aérodynamique est une fonction croissante de l'angle d'incidence, lorsque dans son mouvement le profil monte, sa vitesse instantanée se retranche de la vitesse de l'écoulement uniforme pour donner une vitesse relative $V(t)$ dont la direction fait avec la corde du profil un angle $i(t)$ inférieure à l'incidence initiale et qui par conséquent diminue la force aérodynamique et s'oppose au mouvement.

De même lorsque le profil descend, la vitesse $V(t)$ fait avec la corde du profil un angle $i(t)$ supérieur à l'incidence initiale, ce qui augmente la force aérodynamique et s'oppose au mouvement.

Ainsi, lorsque le profil vibre, la force aérodynamique quasi stationnaire tend à le ramener au repos. Ce phénomène reste encore vrai pour les forces aérodynamiques réellement instationnaires agissant sur un profil en mouvement vibratoire quelconque.

C'est ce qui est conventionnellement appelé ; amortissement aérodynamique.

CHAPITRE I : PHENOMENES AEROELASTIQUES

Dans les équations du flottement, la partie imaginaire de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques représente la contribution de l'écoulement dans l'amortissement du mouvement vibratoire.

II. Modélisation structurale de l'Aile

Avec : $\{q(t)\}$: le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément.

$[N(x, y, z)]$: la matrice des fonctions d'interpolation pour l'élément.

$\{u(x, y, z, t)\}$: la matrice des fonctions base de l'approximation spatiale.

II.2.2 La formulation élémentaire

La formulation au niveau de l'élément consiste à exprimer les énergies cinétiques et potentielles respectivement en fonction de la vitesse et des déplacements aux nœuds.

$$V=U-W = 1/2 [q]^t [K]\{q\}-\{F\}\{q\} \quad (II,2)$$

L'énergie de déformation

Avec :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot dV \quad (II, 3)$$

$$\{F\} = \int_V [N]^T \cdot \{f\} \cdot dV + \int_S [N]^T \cdot \{P\} \cdot dS \quad (II, 4)$$

Ou $[K]$: la matrice de rigidité

$\{f\}$: Les forces de volume.

$\{P\}$; les forces de surface.

Et si ρ représente la masse volumique de l'élément, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \quad (II, 5)$$

Et comme :

$$\{u\} = [N]\{q\} \Rightarrow \{\dot{u}\} = [N]\{\dot{q}\} \quad (II, 6)$$

D'où :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \{M\} \{\dot{q}\} \quad (II, 7)$$

Avec :

$$[M] = \int \rho [N]^T [N] dV \quad (\text{II, 8})$$

$[M]$: La matrice masse de l'élément.

Le calcul s'effectue par intégration numérique et ne fait intervenir que la masse volumique, la géométrie de l'aile et la matrice d'interpolation de l'élément.

Les fonctions d'interpolation d'une poutre

En flexion sont :

$$\begin{cases} N1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ N2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N3(x) = \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ N4(x) = \frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

En torsion sont :

$$\begin{cases} N5(x) = 1 - \frac{x}{l} \\ N6(x) = \frac{x}{l} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Matrice masse $[M]$

Par la méthode d'énergie cinétique on trouve :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\{\ddot{w}\} + r\{\ddot{\theta}\})^2 dx dy dz \quad (\text{II.11})$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\{\ddot{w}\} + r\{\ddot{\theta}\})^T (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\{\dot{w}\}^T + r\{\dot{\theta}\}^T) (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\}) + (\{\dot{w}\}^T r\{\dot{\theta}\}) + (r\{\dot{\theta}\}^T \{\dot{w}\} + r^2 \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\}) dx dy dz$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\int \rho \{\dot{w}\}^T \dot{w} \, dx dy dz + \int \rho r \{\dot{w}\}^T \dot{\theta} \, dx dy dz \right. \\ \left. + \int \rho r \{\dot{\theta}\}^T \dot{w} \, dx dy dz + \int \rho r^2 \{\dot{\theta}\}^T \dot{\theta} \, dx dy dz \right]$$

$T =$

$$\frac{1}{2} \left[\int \rho A \{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\} \, dx + \int I_{\theta} \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\} \, dx + \int \rho a A \{\dot{w}\}^T \{\dot{\theta}\} \, dx + \int \rho a A \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{w}\} \, dx \right] \quad (\text{II.12})$$

On pose $S(x) = \rho a A$ moment statique.

$a(x)$: distance entre centre de gravité et centre d'élasticité.

A : section transversale de la poutre.

$I_{\theta} = \rho I_{xx}$: Moment d'inertie de torsion

$$w(x) = \{N_w\} \{q_e\} \quad (\text{II.13})$$

$$\theta(x) = \{N_{\theta}\} \{q_e\} \quad (\text{II.14})$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

$$w(x) = N_1 W_1 + N_2 \theta_1 + N_3 W_2 + N_4 \theta_2$$

$$\theta(x) = N_5 \psi_1 + N_6 \psi_2$$

$$\{f(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{N_w\} \\ \{N_{\theta}\} \end{Bmatrix} \{q_e\}$$

$$\{f(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = [N] \{q\}$$

Donc :

$$T = \frac{1}{2} \left[\int \rho A \{q_e\}^T \{N_w\}^T \{q_e\} dx + \int I_\theta \{q_e\}^T \{N_\theta\}^T \{N_\theta\} \{q_e\} dx \right. \\ \left. + \int S(x) \{q_e\}^T \{N_w\}^T \{N_\theta\} \{q_e\} dx + \int S(x) \{q_e\}^T \{N_\theta\}^T \{N_w\} \{q_e\} dx \right]$$

$$T = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \{q_e\} \left[\int \rho A \{N_w\}^T \{N_w\} dx + \int I_\theta \{N_\theta\}^T \{N_\theta\} dx + \int S(x) \{N_w\}^T \{N_\theta\} dx + \int S(x) \{N_\theta\}^T \{N_w\} dx \right] \quad (II.16)$$

$$[M_e] = \left[\int \rho A \{N_w\}^T \{N_w\} dx + \int I_\theta \{N_\theta\}^T \{N_\theta\} dx + \int S(x) \{N_w\}^T \{N_\theta\} dx + \int S(x) \{N_\theta\}^T \{N_w\} dx \right] \quad (II.17)$$

Matrice masse élémentaire (flexion pure)

$$[M_{f e}] = \int_0^l \rho A \{N_w\}^T \{N_w\} dx \quad (II.18)$$

Matrice masse élémentaire (torsion pure)

$$[M_{t e}] = \int_0^l I_\theta \{N_\theta\}^T \{N_\theta\} dx \quad (II.19)$$

Matrice masse élémentaire couplage (flexion torsion)

$$[M_{f t e}] = \int_0^l S(x) \{N_w\}^T \{N_\theta\} dx \quad (II.20)$$

Matrice masse élémentaire couplage (torsion flexion)

$$[M_{t f e}] = \int_0^l S(x) \{N_\theta\}^T \{N_w\} dx \quad (II.21)$$

Matrice masse élémentaire globale

$$[M_e]_g = [M_{f e}] + [M_{t e}] + [M_{f t e}] + [M_{t f e}] \quad (II.22)$$

$$[M_{f e}] = \int_0^l \rho A \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \{N_1 N_2 \ 0 \ N_3 N_4 \ 0\} dx$$

$$[M_{fe}] = \int_0^l \rho A \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$[M_{fe}] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0] = \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

$$[M_{fte}] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 N_5 & 0 & 0 & N_1 N_6 \\ 0 & 0 & N_2 N_5 & 0 & 0 & N_2 N_6 \\ N_1 N_5 & N_2 N_5 & 0 & N_3 N_5 & N_4 N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 N_5 & 0 & 0 & N_3 N_6 \\ 0 & 0 & N_4 N_5 & 0 & 0 & N_4 N_6 \\ N_1 N_6 & N_2 N_6 & 0 & N_3 N_6 & N_4 N_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

$$[M_{tfe}] = [0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 N_5 & 0 & 0 & N_1 N_6 \\ 0 & 0 & N_2 N_5 & 0 & 0 & N_2 N_6 \\ N_1 N_5 & N_2 N_5 & 0 & N_3 N_5 & N_4 N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 N_5 & 0 & 0 & N_3 N_6 \\ 0 & 0 & N_4 N_5 & 0 & 0 & N_4 N_6 \\ N_1 N_6 & N_2 N_6 & 0 & N_3 N_6 & N_4 N_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$[M_{te}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_5 \\ 0 \\ 0 \\ N_6 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 N_5 & 0 & 0 & N_5 N_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_6 N_5 & 0 & 0 & N_6 N_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

$$[M_e]_g = \begin{bmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 & N_1N_5 & N_1N_3 & N_1N_4 & N_1N_6 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_5 & N_2N_3 & N_2N_4 & N_2N_6 \\ N_5N_1 & N_5N_2 & N_5N_5 & N_5N_3 & N_5N_4 & N_5N_6 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_5 & N_3N_3 & N_3N_4 & N_3N_6 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_5 & N_4N_3 & N_4N_4 & N_4N_6 \\ N_6N_1 & N_6N_2 & N_6N_3 & N_6N_4 & N_6N_5 & N_6N_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

$$[M_e]_g = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 147 & 54 & -13L & 63 \\ 22L & 4L^2 & 21L & 13L & -3L * L & 14L \\ 147 & 21L & 140 & 63 & -14L & 70 \\ 54 & 13L & 63 & 1164156 & -22L & 147 \\ -13L & -3L * L & -14L & -22L & 4L^2 & -21L \\ 63 & 14L & 70 & 147 & -21L & 140 \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Matrice Rigidité [K]

Par la méthode d'énergie potentielle on trouve :

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (\text{II.29})$$

$$U = \frac{1}{2} \int E I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int G J \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int E I \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int G J \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^T \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int E I (\{N''_w\} \{q_e\})^T (\{N''_w\} \{q_e\}) dx + \frac{1}{2} \int G J (\{N'_\theta\} \{q\})^T (\{N'_\theta\} \{q\}) dx$$

$$U = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \{q_e\} \left[\int E I_{yy} \{N''_w\}^T \{N''_w\} dx + \int G J \{N'_\theta\}^T \{N'_\theta\} dx \right]$$

$$U_e = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_e] \{q_e\} \quad (\text{II.30})$$

CHAPITRE II MODELISATION STRUCTURALE DE L'AILE

Matrice rigidité élémentaire (flexion pure)

$$[K_{fe}] = \int E I_{yy} \{N''_w\}^T \{N''_w\} dx \quad (\text{II.31})$$

Matrice rigidité élémentaire (torsion pure)

$$[K_{\theta e}] = \int G J \{N'_\theta\}^T \{N'_\theta\} dx \quad (\text{II.32})$$

Matrice rigidité élémentaire globale

$$[K_e]_g = \int E I_{yy} \{N''_w\}^T \{N''_w\} dx + \int G J \{N'_\theta\}^T \{N'_\theta\} dx \quad (\text{II.33})$$

$$[K_e]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{12.EI}{L^3} & \frac{6.EI}{L^2} & 0 & -\frac{12.EI}{L^3} & \frac{6.EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6.EI}{L^2} & \frac{4.EI}{L} & 0 & -\frac{6.EI}{L^2} & \frac{2.EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{12.EI}{L^3} & -\frac{6.EI}{L^2} & 0 & \frac{12.EI}{L^3} & -\frac{6.EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6.EI}{L^2} & \frac{2.EI}{L} & 0 & -\frac{6.EI}{L^2} & \frac{4.EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

II.2.5 La formulation globale

La formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir de l'expression des énergies cinétiques et potentielles en fonction des vitesses et des déplacements aux nœuds de la structure.

Les équations de Lagrange permettant d'obtenir les équations discrètes du mouvement.

On a les énergies cinétiques, potentielles et de dissipation ont les expressions suivantes :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \quad (\text{II, 35})$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\} \quad (II, 36)$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [B] \cdot \{\dot{q}\} \quad (II, 37)$$

Pour un système discret non conservatif d'ordre $\ll r \gg$, les équations différentielles de Lagrange prennent la forme suivant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_I} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_I} + \frac{\partial U}{\partial q_I} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_I} = \{Q_I\} \quad (II, 38)$$

D'où :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} \quad (II, 39)$$

Avec : [M], [B], [K] : sont respectivement les matrices masse, dissipation et élastique dans un système de coordonnées généralisées.

Les matrices de rigidité des éléments sont souvent calculées d'un système de cordones locale, pour obtenir la matrice de rigidité de tous les éléments qui composent la structure on doit introduire les matrices de transformation nécessaire pour passer au système globale de la structure.

Si :

(o, x', y', z') : représente le système locale.

(o, x, y, z) : représente le système globale.

Alors les déplacements s'expriment comme suit :

$$\{q\}_{locale} = [R] \cdot \{q\}_{globale} \quad (II, 40)$$

Avec : [R] : la matrice de passage.

D'où, la matrice de rigidité s'écrit :

$$[K]_{globale} = [R]^T \cdot [K]_{Locale} \cdot [R] \quad (II, 41)$$

II.2.7 Etude Modale

II.2.7.1 Les modes propres et les vecteurs propres

Dans le cas de structure faible amortie, on se ramène à l'étude des petites oscillations libre, c'est-à-dire à la relation du problème à la valeur propre générale, de la forme :

$$[K].\{q\} = w^2.[M].\{q\} \tag{II, 42}$$

Avec : $[K]$: la matrice de la rigidité de la structure.

$[M]$: La matrice masse de la structure.

Ce système (n) équation possède (n) solutions propres permettant de définir les déformations nodales de la structure et les (n) valeurs propres associés ($\lambda_i = w_i^2$).

La difficulté principale de résolution de ce problème réside dans son ordre élevé,

Pour cela il peut être utile de ramener la résolution du problème aux valeurs propres sous sa forme générale à celle d'un problème aux valeurs propres sous sa forme classique, de la forme :

$$[D].\{y\} = \lambda.\{y\} \tag{II, 43}$$

Où d'utilise la méthode des itérations inverse qui convient pour la résolution des problèmes aux valeurs propres sous sa forme générale, lorsqu'on s'intéresse à petit nombre de solutions propres.

II.2.7.2 Méthode des itérations inverses :

Elle consiste à itérer sur un vecteur de telle sorte qu'à l'itération (i), on ait à résoudre un système linéaire, les itérés successifs sur le vecteur converge vers un vecteur propre correspondant à la valeur propre le plus petite.

II.2.7.3 L'Algorithme :

On a pour : $i=1, 2, 3, \dots$

$$[K].\{Z_i\} = [M].\{y_{i-1}\} \tag{II, 44}$$

$$\{y_i\} = \frac{\{z_i\}}{\|z_i\|} \quad (II, 45)$$

D'après un nombre suffisant d'itérations, on a :

$$\{z_i\} = \frac{1}{\lambda_1} \quad (II, 46)$$

Remarque :

Cette méthode ne nécessite pas le passage à la forme standard du problème aux valeurs propres ce qui est un avantage important. Cependant, elle nécessite à chaque nouvelle itération la résolution d'un système linéaire.

II.3 Model de RAYLEIGH RITZ :

Pour un système où la déformation varie dans un seul sens, la déformation de flexion $w(y, t)$ peut être représenté par la série

$$w(y, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(y)q_j(t) \quad (II.47)$$

Le $\psi_j(y)$ est le j ème déformation (une fonction de y), le $q_j(t)$ est le coefficient inconnu, qui est une fonction de temps, et N est le nombre de limites de la série. L'idée est que cette combinaison représente la vraie déformation du système aussi étroitement comme possible,

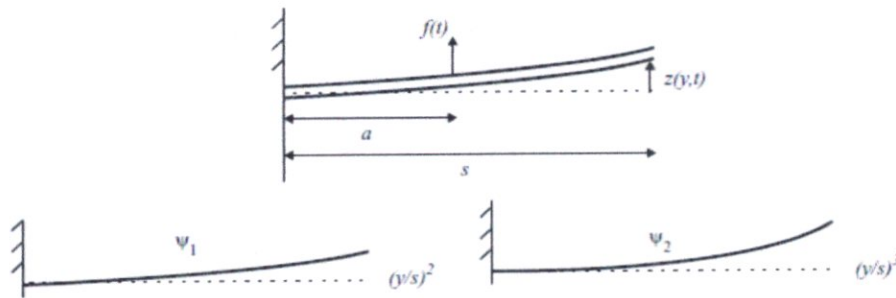


Figure II.3 Déformation d'un membre mince en le ployage. $N=2$

$$w(y, t) = f_1(y)q_1(t) + f_2(y)q_2(t) = \left(\frac{y}{s}\right)^2 q_1(t) + \left(\frac{y}{s}\right)^3 q_2(t) \quad (II.48)$$

Pour une déformation à deux dimensions (par exemple flexion--torsion), les formes assumées peuvent être un produit des fonctions qui varient le long de chaque dimension.

CHAPITRE II MODELISATION STRUCTURALE DE L'AILE

La forme des déformations sont classiquement de forme polynôme, trigonométrique ou hyperbolique. Cependant, l'exactitude de la représentation sera améliorée si les formes remplissent également les conditions de limite.

Pour un système continu, théoriquement il y a un nombre proche-infini de mode propres, avec chaque mode défini on sa propre fréquence.

Quand en utilisant un nombre fini N de formes assumées, alors l'analyse rapportera des évaluations de modes propres de N.

Premièrement, l'expression de série doit être écrite sous la forme de matrice, ainsi

$$w(y, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(y)q_j(t) = \{\psi\}^T \{q\} \text{ Ou } \{q\}^T \{\psi\} \quad (\text{II.49})$$

Ou :

$$\psi(y) = \{\psi_1(y)\psi_2(y) \dots \psi_N(y)\}^T, \quad q(t) = \{q_1(t)q_2(t) \dots q_N(t)\}^T \quad (\text{II.50})$$

Noter que parce que le ψ et le q sont des vecteurs de colonne et $z(y, t)$ est une grandeur scalaire, le produit intérieur de ces vecteurs peut être écrit dans l'un ou l'autre ordre. Dans ce qui précède N = l'exemple 2, ces vecteurs sera donné par :

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{y}{s}\right)^2 \\ \left(\frac{y}{s}\right)^3 \end{Bmatrix} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

II.3.1 Matrice Masse :

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^s \rho \dot{w}^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^s \rho (\{\dot{q}\}^T \{\psi\}) (\{\psi\}^T \{\dot{q}\}) dy \quad (\text{II.51})$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}^{\circ T}\} [M] \{\dot{q}^{\circ}\} \quad (\text{II.52})$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\rho s}{5} & \frac{\rho s}{6} \\ \frac{\rho s}{6} & \frac{\rho s}{5} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

L'ordre des produits de vecteur est choisi soigneusement de sorte que les vecteurs des coordonnées généralisées puissent être pris en dehors de l'intégrale puisqu'ils ne sont pas des fonctions de Y. Noter que l'expression pour T est une forme quadratique concernant la matrice de masse généralisée Mq. Dans la notation de deux formes, l'énergie cinétique serait donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 & \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho s}{5} & \frac{\rho s}{6} \\ \frac{\rho s}{6} & \frac{\rho s}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

II.3.2 Matrice rigidité :

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s EI \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^s EI (\{q^T\} \{\ddot{\psi}\}) (\{\ddot{\psi}^T\} \{q\}) dy$$

$$U = \frac{1}{2} \{q^T\} [k] \{q\} \quad (\text{II.55})$$

La matrice de rigidité devient :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & \frac{6EI}{s^3} \\ \frac{6EI}{s^3} & \frac{12EI}{s^3} \end{bmatrix} \quad (\text{II.56})$$

II.3.3 Forces extérieure :

Le travail virtuel :

Le travail virtuel de force f (t) appliqué à la position y = a est exprimé comme produit scalaire de vecteur

$$\delta W = \{f(t) \delta w(a, t)\} = [\{\delta q^T\} \{\psi(a)\}] \{f(t)\} \quad (\text{II.57})$$

Ou $\psi(a)$ est le vecteur de forme à y = a. Pour les deux exemples assumés de forme :

$$\psi(a) = \left\{ \left(\frac{a}{s} \right)^2 \left(\frac{a}{s} \right)^3 \right\}^T$$

$$\delta W = f(t) \delta w(a, t) = f(t) \left[\left(\frac{a}{s}\right)^2 \delta q_1 + \left(\frac{a}{s}\right)^3 \delta q_1 \right] \quad (\text{II.58})$$

Les équations de Lagrange peut s'écrire sous forme matricielle ;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta q)}$$

Après le remplacement on obtient :

$$\left[\int_0^s \rho(\{\psi\}\{\psi^T\}) dy \right] \{\ddot{q}\} + \left[\int_0^s EI \{\{\ddot{\psi}\}\{\ddot{\psi}^T\}\} dy \right] \{q\} = \{\psi(a)\}f(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho s}{5} & \frac{\rho s}{6} \\ \frac{\rho s}{6} & \frac{\rho s}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & \frac{6EI}{s^3} \\ \frac{6EI}{s^3} & \frac{12EI}{s^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{a}{s}\right)^2 \\ \left(\frac{a}{s}\right)^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.59})$$

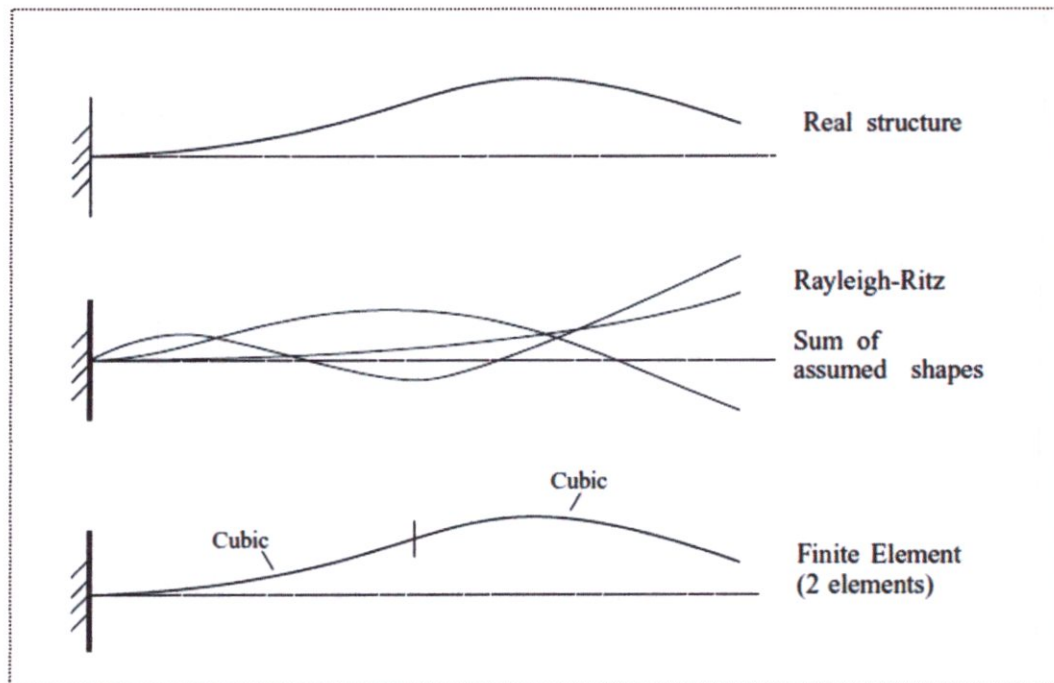


Figure II-2 représentation de déplacement par différente méthode.

III. MODELISATION AEROELASTIQUE

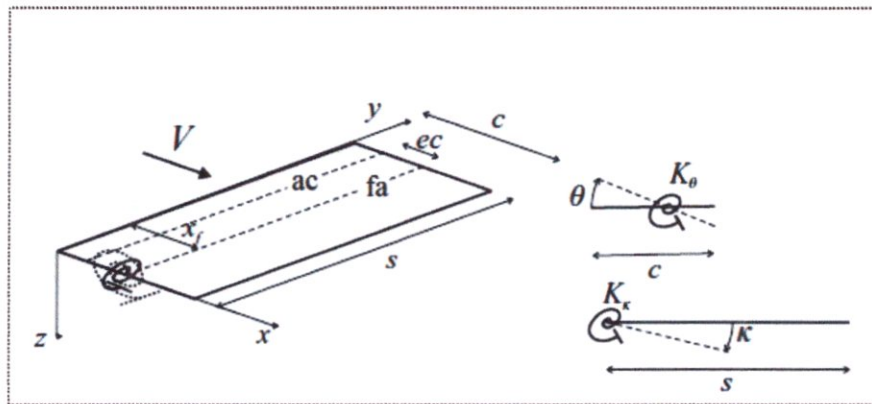
III.1 Modélisation structurale :

III.1.1 Aile rigide:

Notre modèle structural est basé sur une poutre de longueur 's' qui se considère comme l'envergure de l'aile, et de largeur de c qui se considère comme la corde de l'aile, avec fa l'axe ou se trouve le centre élastique, et ac l'axe aérodynamique et la distance entre les deux est la différence entre eux qu'on l'appelle ec, comme indiqué dans la figure ci-dessous. Ce modèle est employé pour le reste de cette thèse pour le calcul du flottement binaire.

Pour le cas où l'aile est rigide avec couplage entre la flexion et la torsion, on a comme exemple le model suivant :

$$w(x, y, t) = yw(t) + (x - x_f)\theta(t) = \phi_k w + \phi_\theta \theta \tag{III.1}$$



On considère que l'aile a une distribution de masse uniforme et l'axe de masse se trouve ainsi sur la mi- corde. Le déplacement w d'un point général sur l'aile est décrit par l'équation (III.1).

Le w et le theta sont les coordonnées généralisés et le phi_k et le phi_theta sont des formes assumées simples.

Dans ce cas les équations du mouvement peuvent être trouvées à l'aide des équations de Lagrange. L'énergie cinétique maintenant existe en raison du mouvement dynamique et égale à :

$$T = \int \frac{1}{2} dm \dot{w}^2 = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c (y\dot{w} + (x - x_f)\dot{\theta})^2 dx dy \tag{III.2}$$

CHAPITRE III MODELISATION AEROELASTIQUE

Où m est la masse par unité de superficie de l'aile.

L'énergie potentielle (ou contrainte) est due seulement des ressorts, telle que

$$U = \frac{1}{2} K_w w^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 \quad (\text{III.3})$$

L'application des équations de Lagrange pour les deux coordonnées généralisées (w, θ) donne :

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) = m \int_0^s \int_0^c (y^2 \{\ddot{w}\} + y(x - x_f) \{\ddot{\theta}\}) dx dy = m \left[\frac{s^3 c}{3} \{\ddot{w}\} + \left(\frac{s^2 c^2}{2} - x_f c \right) \{\ddot{\theta}\} \right] \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m \iint_{00}^{sc} \left[y(x - x_f) \{\ddot{w}\} + (x - x_f)^2 \{\ddot{\theta}\} \right] dx dy \\ &= m \left[\frac{s^2}{2} + \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) \{\ddot{w}\} + s \left(\frac{c^3}{3} - c^2 x_f + x_f^2 c \right) \{\ddot{\theta}\} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial w} = K_w w. \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_\theta \theta. \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{ms^3 c}{3} & \frac{ms^2 c}{2} (c^2 - cx_f) \\ \frac{ms^2 c}{2} (c^2 - cx_f) & ms \left(\frac{c^3}{3} - c^2 x_f + cx_f^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{w}\} \\ \{\ddot{\theta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_w] & 0 \\ 0 & [K_\theta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

La matrice d'inertie prend la forme

$$\begin{bmatrix} [I_w] & [I_{w\theta}] \\ [I_{w\theta}] & [I_\theta] \end{bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Et nous aurons :

$$I_w = \int_0^s y^2 dm, \quad I_\theta = \int_0^c (x - x_f)^2 dm, \quad I_{w\theta} = \int_0^s \int_0^c (x - x_f) y dm \quad (\text{III.8})$$

Ces intégrales sont les moments d'inerties de l'aile.

S'il n'y a aucun couplage inertiel ($I_{w\theta}=0$, c.-à-d. $x_f=c/2$ pour ce modèle) les fréquences naturelles sont :

$$\omega_w = \sqrt{\frac{K_w}{I_w}}, \quad \omega_\theta = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_\theta}} \quad (\text{III.9})$$

III.1.2 Aile souple

Pour le cas où l'aile est souple avec couplage entre la flexion et la torsion, on a comme exemple le model suivant :

$$w(x, y, t) = y^2 w(t) + y(x - x_f) \theta(t) = \phi_w w + \phi_\theta \theta \quad (\text{III.10})$$

L'énergie potentielle prend la forme m

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int GJ \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 dy \quad (\text{III.11})$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \iint_0^s \left[y^2 (x - x_f) \{\ddot{w}\} + y (x - x_f)^2 \{\ddot{\theta}\} \right] dx dy \quad (\text{III.12})$$

L'équation aéroélastique devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{ms^5 c}{5} & \frac{ms^4 c}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) \\ \frac{ms^4 c}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) & \frac{ms^3}{3} \left(\frac{c^3}{3} - c^2 x_f + cx_f^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{cas^5}{10} & 0 \\ -\frac{c^2 eas^4}{8} & -\frac{M_\theta s^3 c^3}{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \left(\rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cas^4}{8} \\ 0 & -\frac{c^2 eas^3}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4EIs & 0 \\ 0 & GJs \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

III.2 Modélisation aérodynamique

Les forces généralisées Q_w et Q_θ sur le système sont sous forme de forces aérodynamiques instationnaires ; pour un mouvement harmonique ces forces peuvent être écrites en termes de dérivés aérodynamiques pour une fréquence réduite particulière

$$k = \omega c / (2V) \quad (\text{III.14})$$

Ces forces sont complexes mais peuvent être exprimées en termes des déplacements et des vitesses. (On note que les détails de calcul de L et M se trouve dans l'annexe).

$$dL = \frac{1}{2} \rho V^2 c dy a \left(\frac{y \dot{w}}{V} + \theta \right), \quad dM = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 dy \left[ea \left(\frac{y \dot{w}}{V} + \theta \right) + M_\theta \frac{\dot{\theta} c}{4V} \right] \quad (\text{III.15})$$

$$\delta W = \int_{aile} [dL(-y \delta w) + dM \delta \theta] \quad (\text{III.16})$$

Et ainsi les forces généralisées sont

$$Q_k = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta w)} = - \int_0^s y \, dL = -\frac{1}{2} \rho V^2 c s^2 a \left(\frac{ks}{3V} + \frac{\theta}{2} \right),$$

$$Q_\theta = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta \theta)} = \int_0^s dM = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 s \left[ea \left(\frac{ks}{3V} + \theta \right) + M_\theta \frac{\theta c}{4V} \right]. \quad (\text{III.17})$$

Ainsi, les équations du mouvement aéroélastiques deviennent

$$\begin{bmatrix} [I_w] & [I_{w\theta}] \\ [I_{w\theta}] & [I_\theta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V \begin{bmatrix} \frac{cs^3 a}{6} & 0 \\ -\frac{ec^2 s^2 a}{4} & -\frac{c^3 s}{8} M_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \left\{ \rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs^2 a}{4} \\ 0 & -\frac{ec^2 sa}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_w] & 0 \\ 0 & [K_\theta] \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Il est évident que les matrices de masse et de rigidité soient symétriques tandis que les matrices aérodynamiques sont dissymétriques. Ainsi les deux modes vibratoires sont couplés et c'est ce couplage qui peut provoquer le flottement.

III.3 Résolution de l'équation de flottement

L'équation aéroélastique peut être résolue en utilisant la solution aux valeurs propres pour déterminer les fréquences aéroélastiques du système et les coefficients d'amortissements pour des conditions déterminées (vitesse et altitude).

C'est ramener le système différentiel du deuxième ordre au premier ordre

$$\begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -(\rho V^2 [C] + [E]) & -(\rho V [B] + [D]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Où [I] est la matrice identité.

Cette équation peut être réécrite

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -[A]^{-1}(\rho V^2 [C] + [E]) & -[A]^{-1}(\rho V [B] + [D]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou $\{\dot{X}\} - [Q]\{X\} = \{0\}$ (III.20)

CHAPITRE III MODELISATION AEROELASTIQUE

L'équation (III.20) est maintenant en forme de premier ordre mais notons que la matrice $[Q]$ a une taille double que celle de l'équation aéroélastique.

L'équation peut être résolue en supposant $\{X\} = \{X_0\}e^{\lambda t}$ et l'équation aéroélastique devient ainsi :

$$([I]\lambda - [Q])\{X_0\} = \{0\} \quad (\text{III.21})$$

Ce qui est sous la forme classique de calcul des valeurs propres.

$$([I]\lambda - [A])\{X\} = \{0\}$$

Pour un système oscillant, tel que le système aéroélastique considéré ici, les valeurs propres λ du système vont être dans un repère complexe conjugué :

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (\text{III.22})$$

Où le ω_j , $j = 1, 2, \dots, N$, sont les fréquences du système amorti et les ζ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, sont les constantes d'amortissement.

Si la partie réelle des valeurs propres complexes est positive le système devient instable. On parle donc de l'instabilité aéroélastique de flottement. Cependant si les valeurs propres sont réelles positives (avec $k \rightarrow 0$) le système est statiquement instable, on parle donc de l'instabilité aéroélastique statique ou divergence.

IV. RESULTATS ET INTERPRETATION

IV.1 Introduction (Processus de programmation)

La présentation des résultats c'est l'étape la plus importante après toute étude théorique ou expérimentale, ainsi que la validité de ces résultats. Pour obtenir les résultats un code de calcul qui a été conçu en langage de programmation MATLAB. Dont les différents modules qui le comportent sont organisés comme suit.

- Calcul des modes propre et fréquence propres d'une poutre par élément finis pour :
 - ❖ Mode flexion pure
 - ❖ Mode torsion pure
 - ❖ Mode couplé flexion-torsion
- Calcul de la vitesse du flottement binaire par la méthode V- ζ (V-g)

IV.2 Calcul des modes propres et fréquence propre par éléments finis

L'Organigramme donne le processus de calcul des modes propres et les fréquences propres pour une poutre donné.

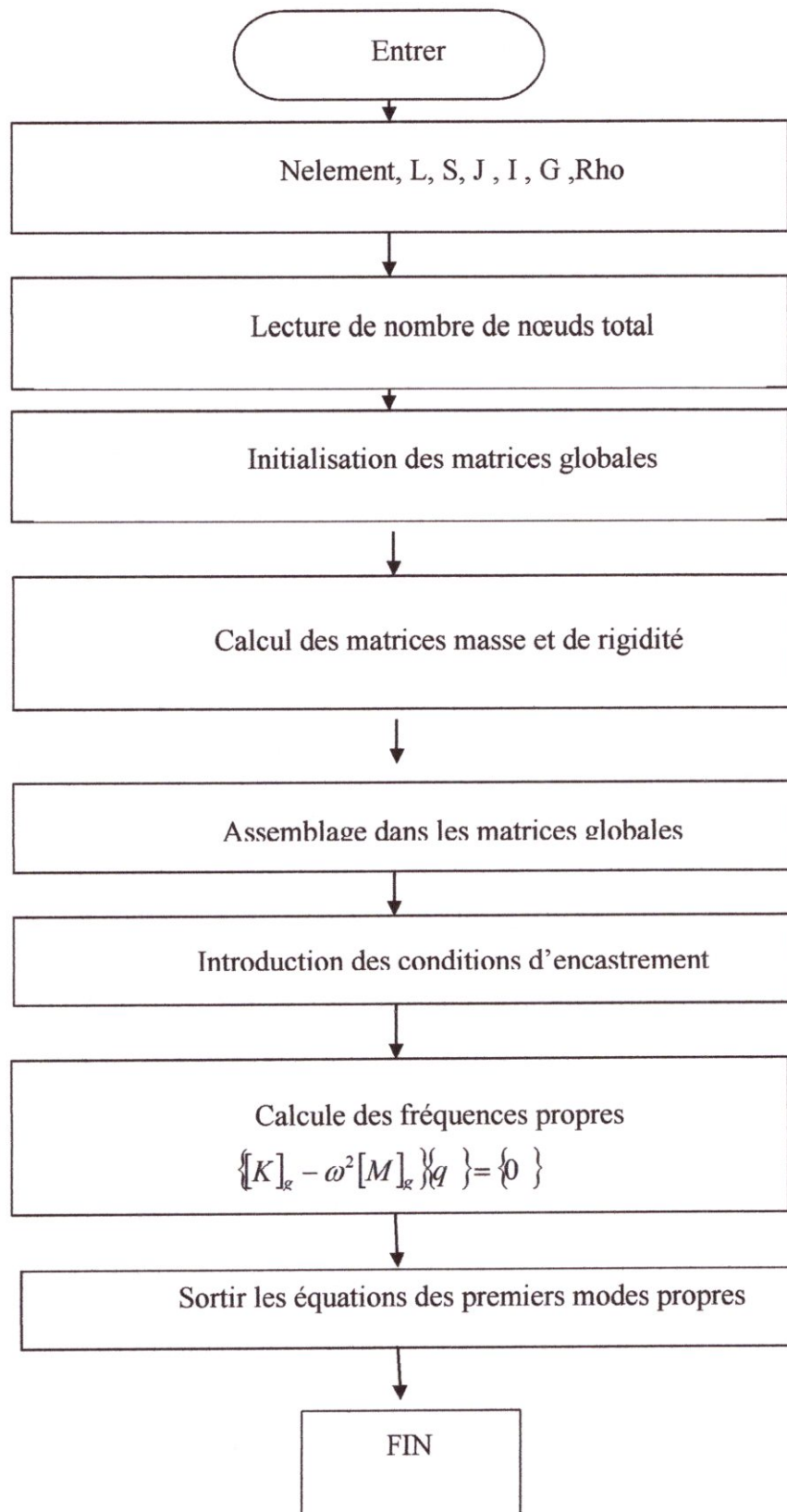


Figure IV-1-Organigramme de calcul des fréquences propres et les modes propres

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

Pour une poutre encastré de longueur 10m, $E=70 \cdot 10^9 \text{Pa}$, $I=2 \cdot 10^{-4}$, $S=0.04 \text{m}^2$, $\rho=2500 \text{Kg/m}^3$

donnée par la référence [2]

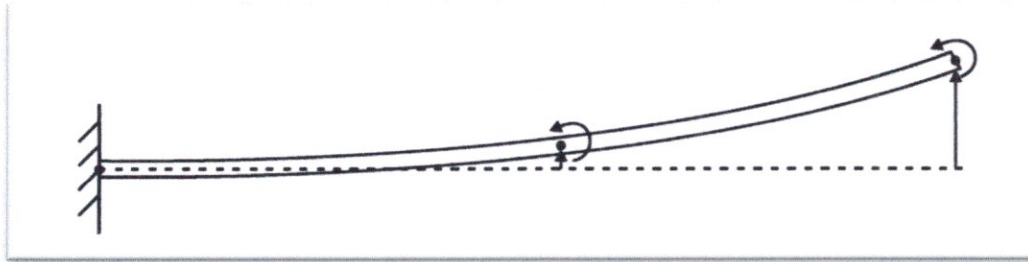


Figure IV-2 poutre encastré libre

IV.2.1 Flexion pure :

Pour une flexion pure on introduit les termes de flexion dans la matrice rigidité et la matrice masse.

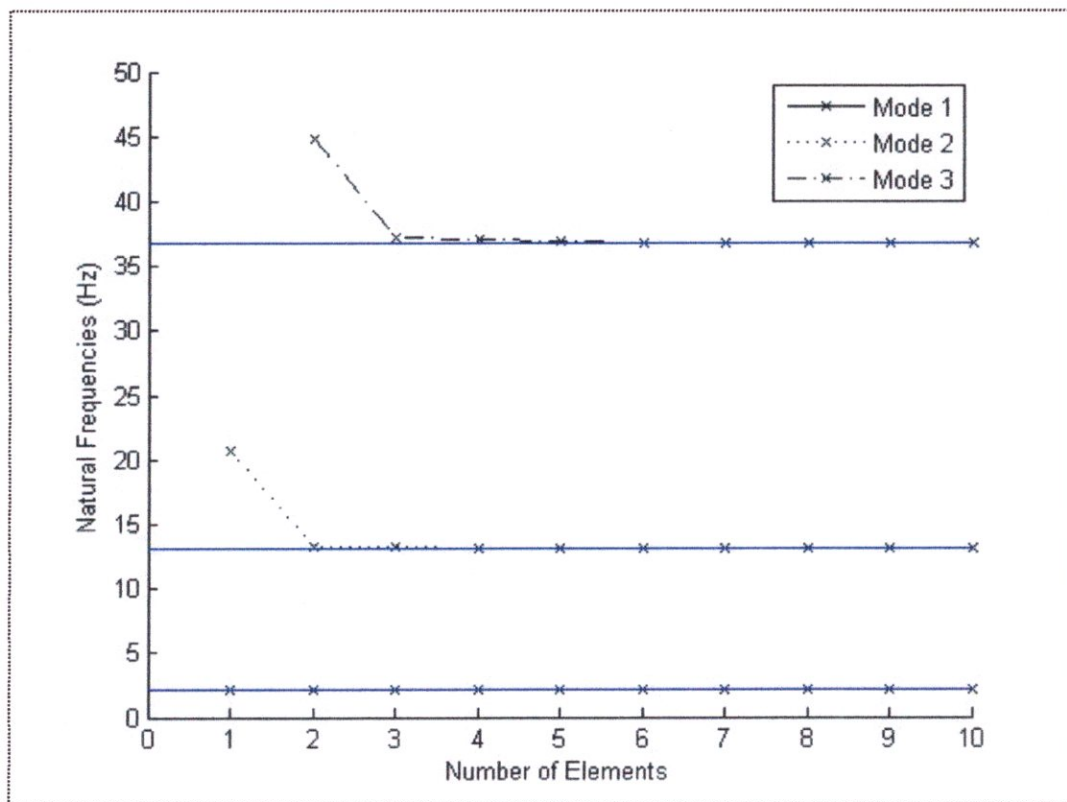


Figure IV-3 Variation des fréquences des modes 1 à 3 avec le nombre des éléments pour des valeurs exactes

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

On voit bien d'après le graphe que si on augmente le nombre d'élément les fréquences sont identiques que celle obtenue par la méthode exacte.

Les résultats des trois premiers modes de la poutre pour chaque fréquence sont représentés dans les figures suivantes :

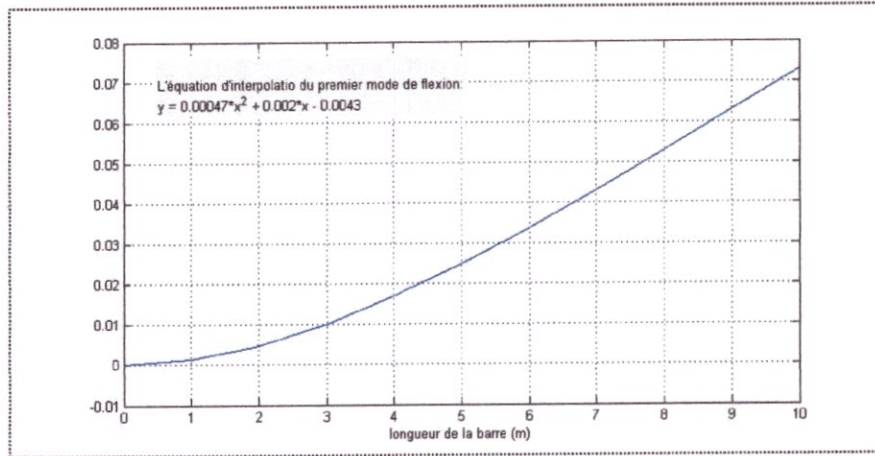


Figure IV-4 premier mode de la flexion pour 3.75(Hz)

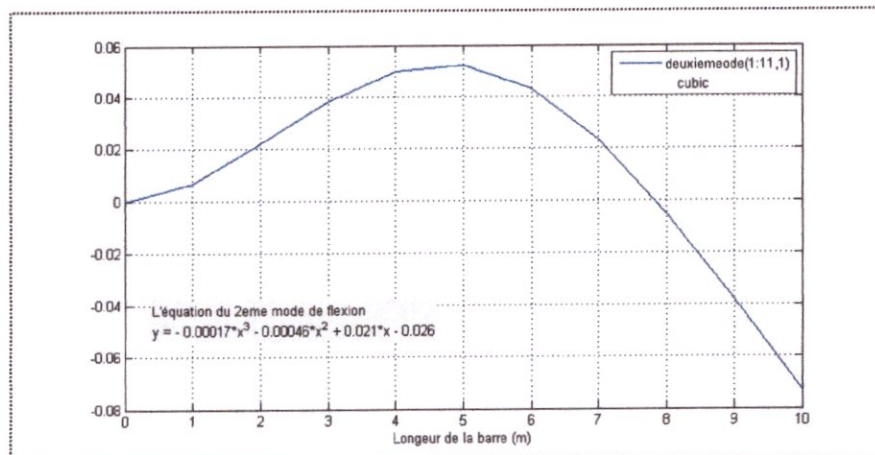


Figure IV-5 deuxième mode de la flexion pour 23,12(Hz)

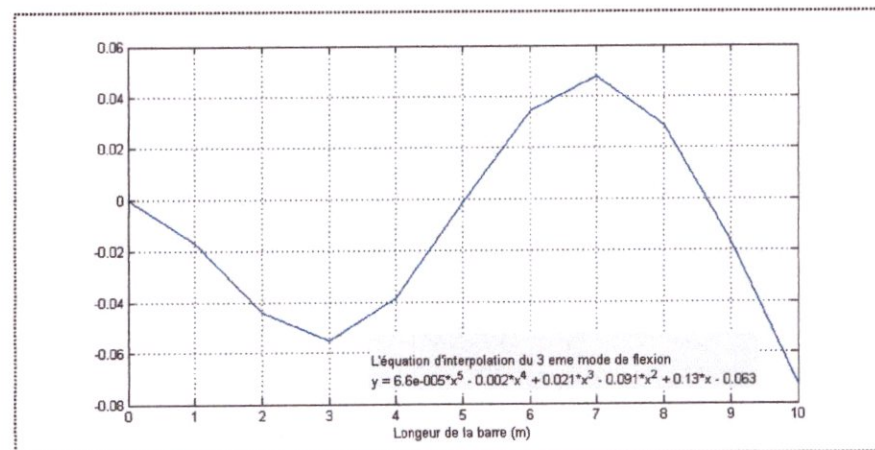


Figure IV-6 troisième mode de la flexion 65 (Hz)

IV.2.2 **Torsion pure :**

Pour une torsion pure On obtient (pour la même poutre précédente) :

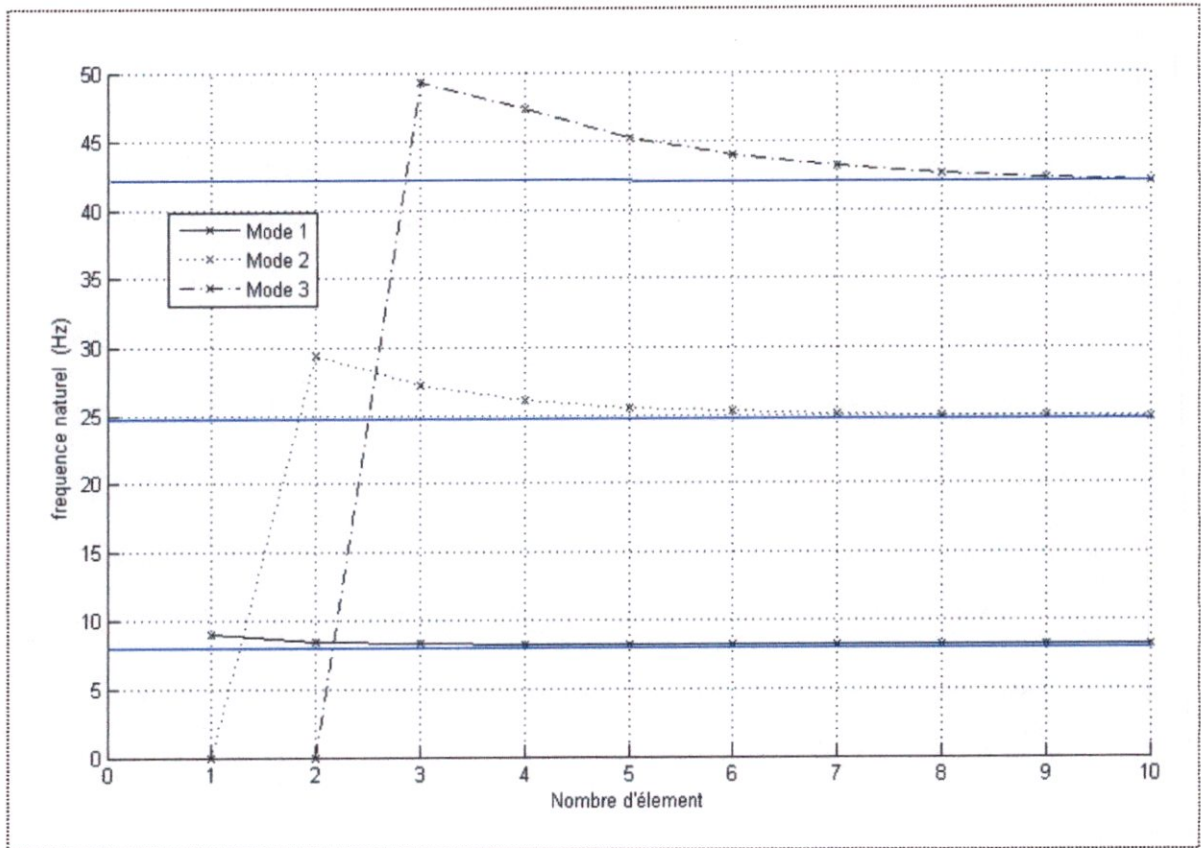


Figure-IV-7 les trois premiers modes pour une torsion pure

Même chose que la flexion pure, quand on augmente le nombre d'éléments les fréquences obtenues atteignent les fréquences calculées par la méthode exacte.

Les résultats des trois premiers modes de la poutre pour chaque fréquence sont représentés dans les figures suivantes :

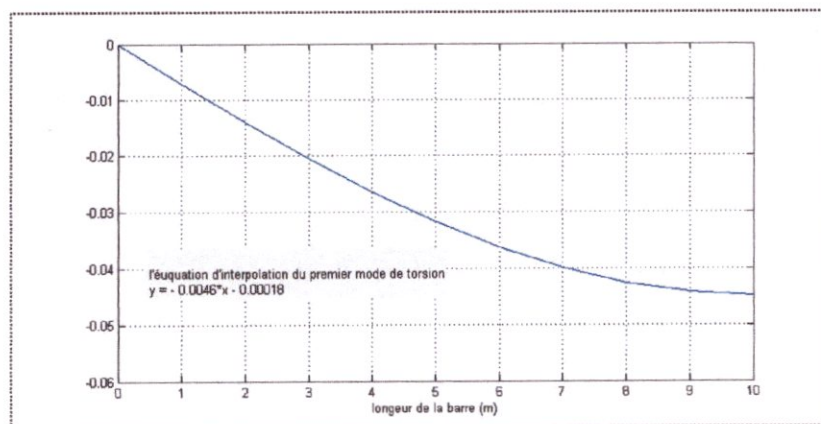


Figure IV-8 premier mode de torsion pour F=8,2 (Hz)

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

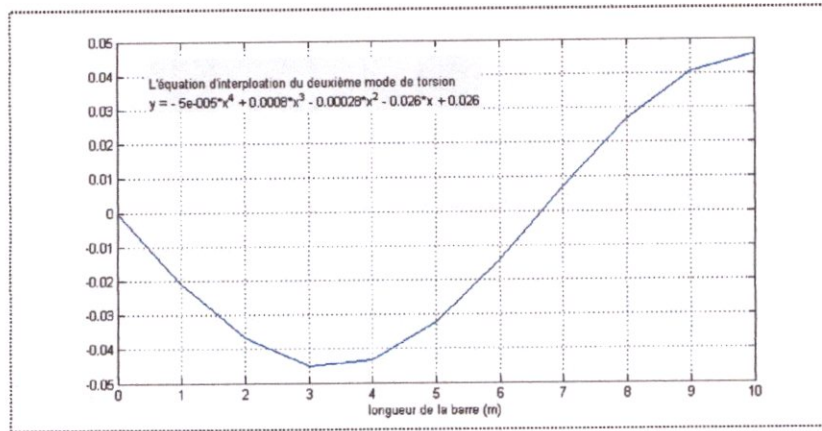


Figure IV-9 deuxième mode de la torsion pour 24,8 (Hz)

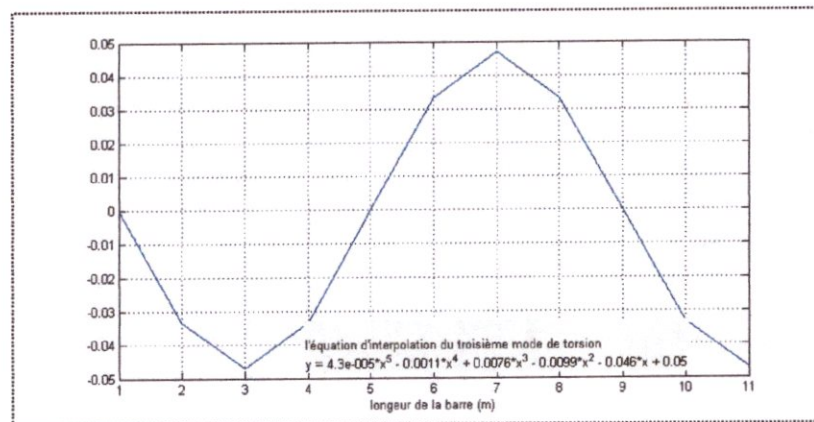


Figure IV-10 troisième mode de la torsion pour 42,1 (Hz)

IV.2.3 Mode découplé flexion torsion

Pour un modèle de Goland wing [31], c'est une aile souple qui a les caractéristiques suivantes :

$EI=9.7567 \cdot 10^6$ (N m²), $GJ=9.88 \cdot 10^5$ (N m²), $m=35.75$ (Kg/m) $I_a=8.65$ (Kgm) , $L=6.096$ (m)

	Notre résultat	Résultat de l'article
1 ^{ère} fréquence	49.42	50.53
2 ^{ème} fréquence	87.17	90.1

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

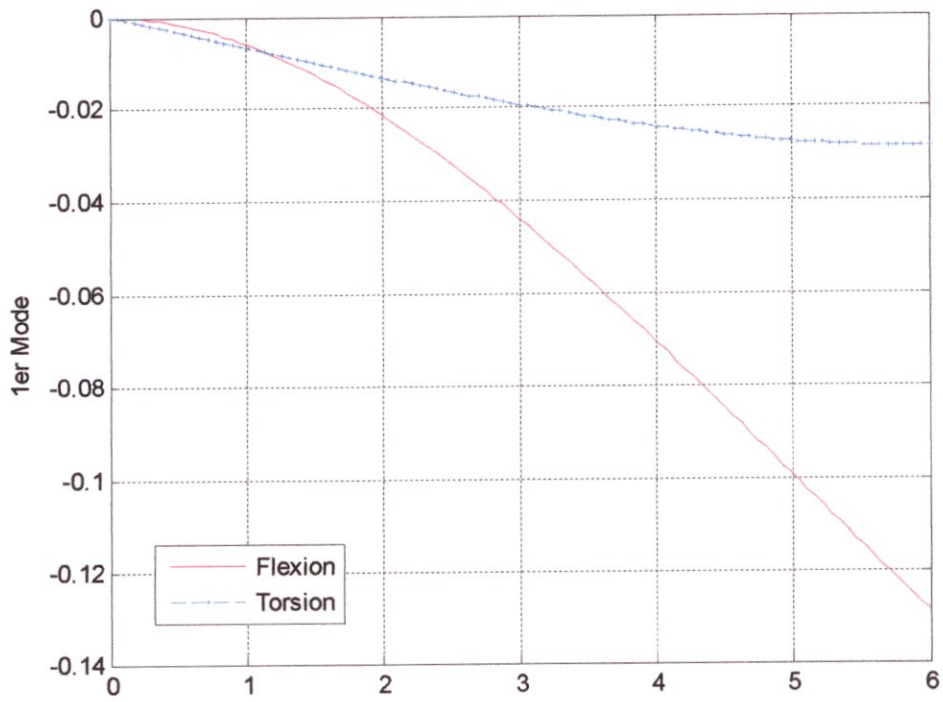


Figure IV-13 premier mode couplé a 48 Hz

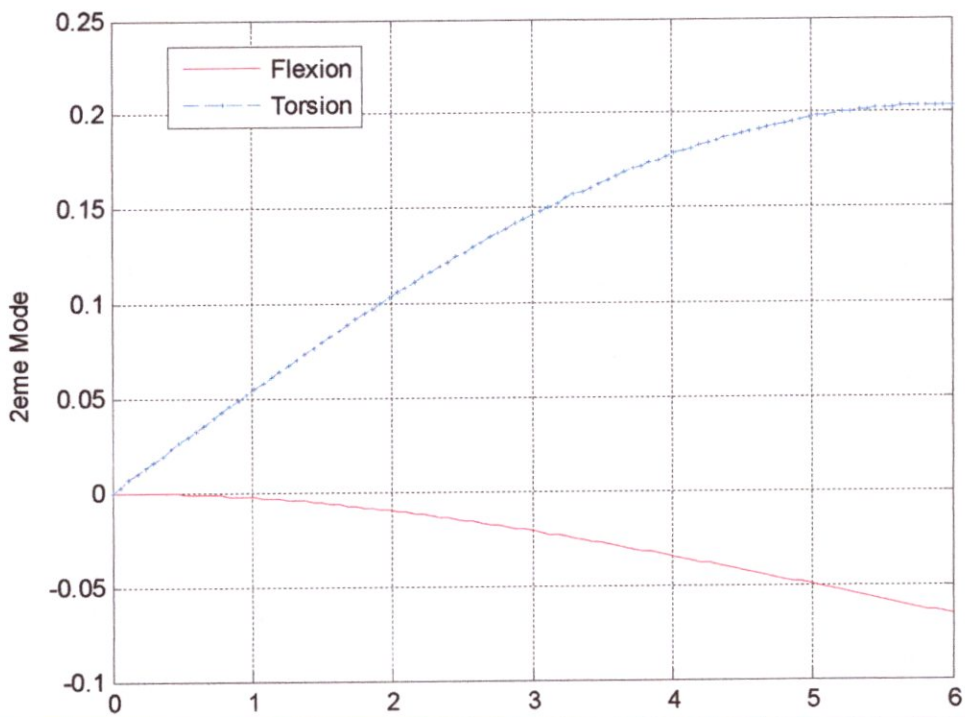


Figure IV-14 deuxième mode coplé a 92 Hz

IV.3.1 Modèle d'aile rigide [2]

On a pris les modes rigides suivant :

Mode de battement: $f_1(y)=y$

Mode de tangage: $f_2(y)=1$

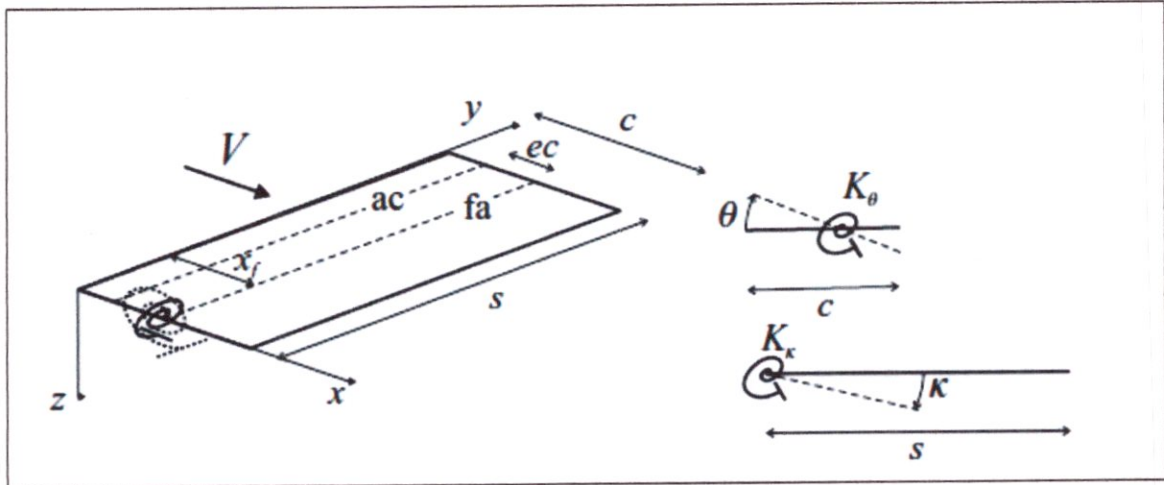


Figure IV-16 modèle d'un flottement rigide pour une aile rigide

Demi aile $s=7,5\text{m}$

Chorde $c=2\text{m}$

Masse par unité de surface de l'aile $m=100\text{ kg/m}^2$

Fréquence de flexion :5 hz

Fréquence de torsion :10 hz

Position de de centre de masse $x_{cm}=0.5$ de la corde

Position de centre élastique $x_f=0.48$ de la corde

Le domaine de vitesse est entre 1 et 300 m/s avec incrémentation de 0.1m/s

La densité de l'aire= 1.225

La pente polaire est $a=2\pi$

IV.1.1.1 Cas ou l'amortissement structural est nul

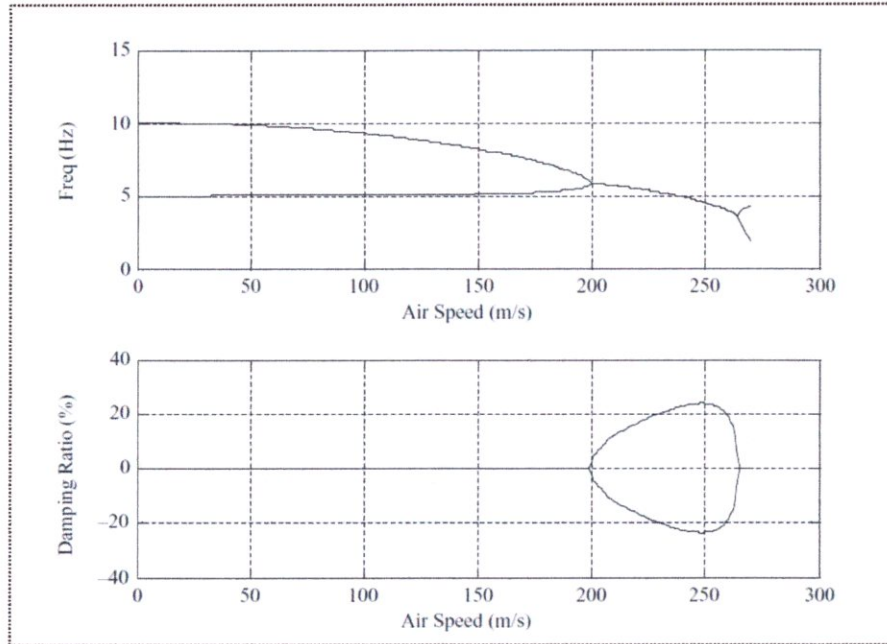


Figure IV-17 les fréquences et les constante d'amortissement en fonction de la vitesse de l'air [3]

Le résultat obtenu par notre programme de calcul sont les suivants :

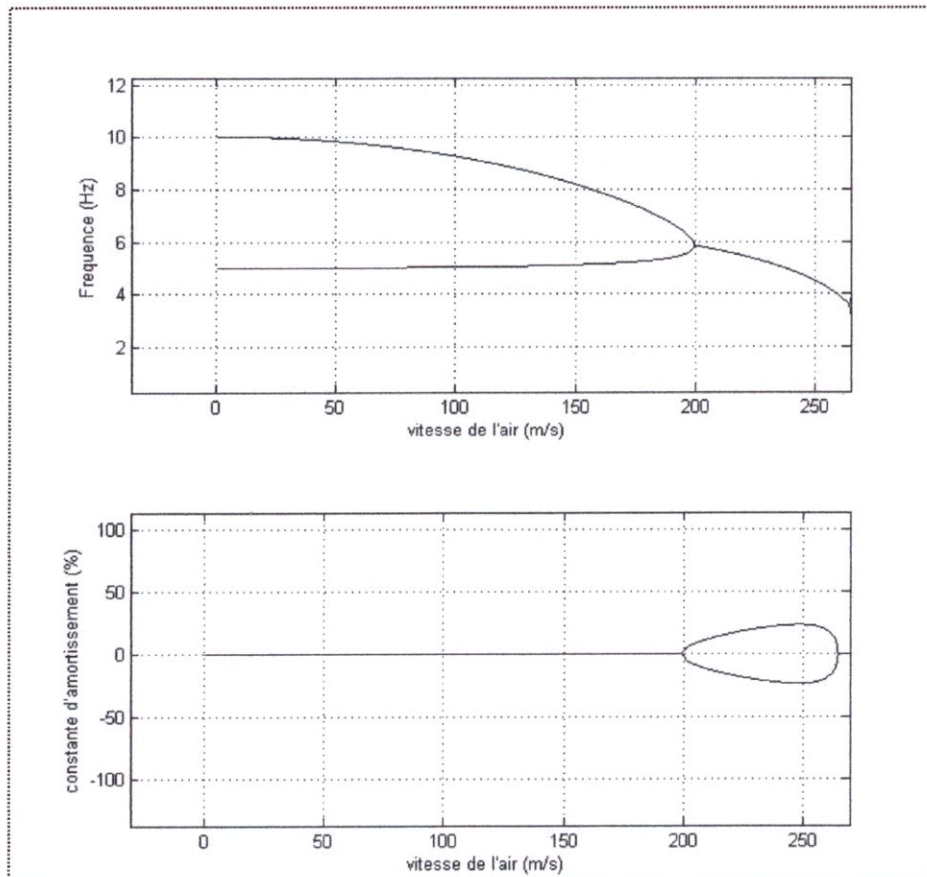


Figure IV-18 les fréquences et les constante d'amortissement en fonction de la vitesse de l'aire

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

En comparant les deux figures on constate que la vitesse de flottement obtenue est la même, qui est égale à 200 m/s.

Pour des amortissements structural et aérodynamiques nulles (C.-à-d. $B = D = 0$) on voit sur les graphes obtenus que si la vitesse d'air augmente, les deux fréquences se rapprochent l'une de l'autre.

Cependant, l'atténuation des deux modes demeure à zéro. Une fois que les deux fréquences deviennent égales à environ 200 m/s, les modes se fusionnent ; une des constantes d'amortissement devient positive et l'autre négative. Par conséquent le système devient instable, qui est l'état de flottement. Au-delà de $V = 264$ m/s, les fréquences se dispersent.

En principe les fréquences d'un système aéroélastique doivent être fusionnées pour que le flottement se produise, mais c'est dû à l'absence d'amortissement.

IV.1.1.2 Cas où l'amortissement aérodynamique est nul :

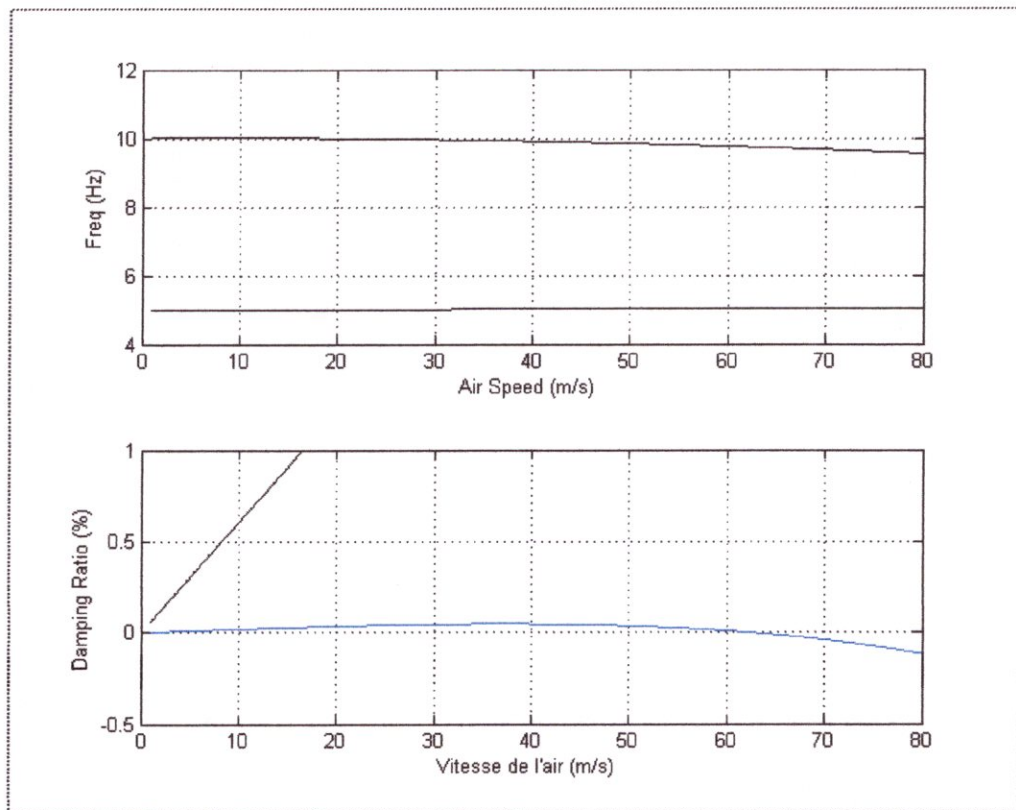


Figure IV-19-système aerodynamique quasistationnaire ($M_{\theta} = 0, x_r = 0.48c, x_m = 0.5c$).

Dans le cas où l'amortissement aérodynamique est nul, les fréquences sur le schéma (IV.19) commencent à converger graduellement le long de l'augmentation de la vitesse d'air, mais ne se fusionnent pas.

IV.1.1.3 L'amortissement Aérodynamique nul et sans couplage

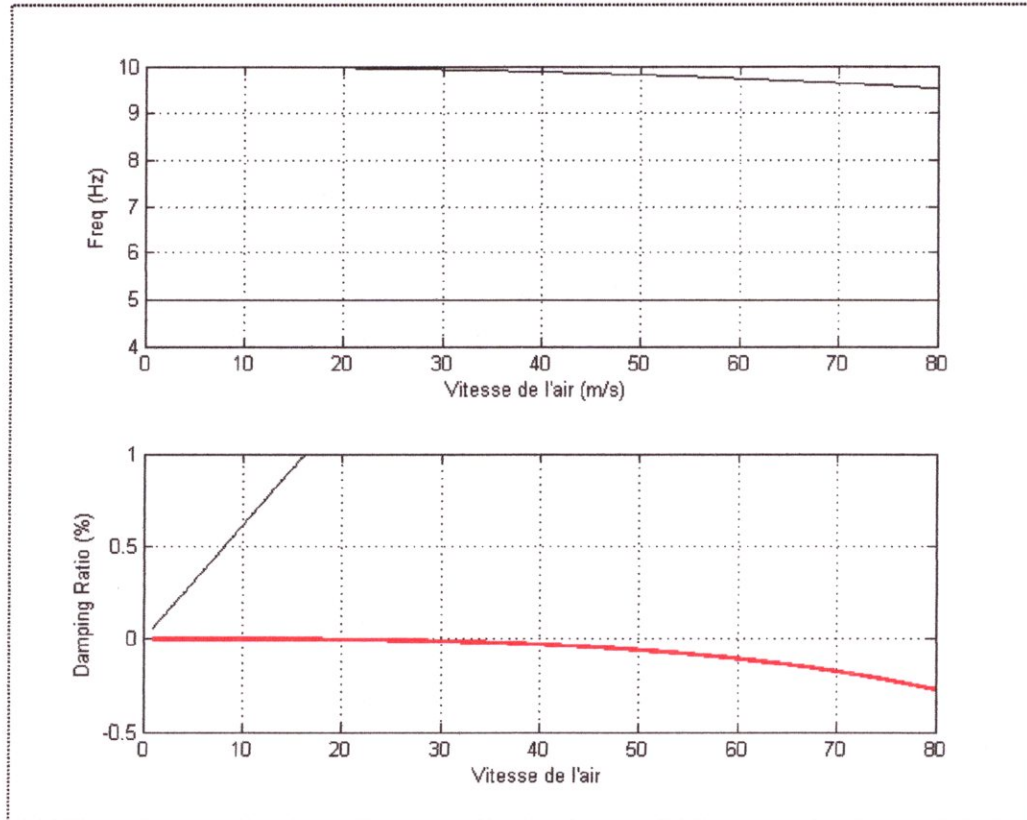


Figure IV-20-système aérodynamique quasi stationnaire ($M\theta=0$, $x_f = 0.5c$, $x_m = 0.5c$).

Le résultat obtenu dans la figure (IV.20) prouve que le flottement se produit à toutes les vitesses au-dessus de la vitesse d'air nulle (la plus basse constante d'amortissement est toujours négative). Et la vitesse critique est diminuée à 40 (m/s).

IV.1.1.4 Cas où l'amortissement Aérodynamique est nul avec couplage

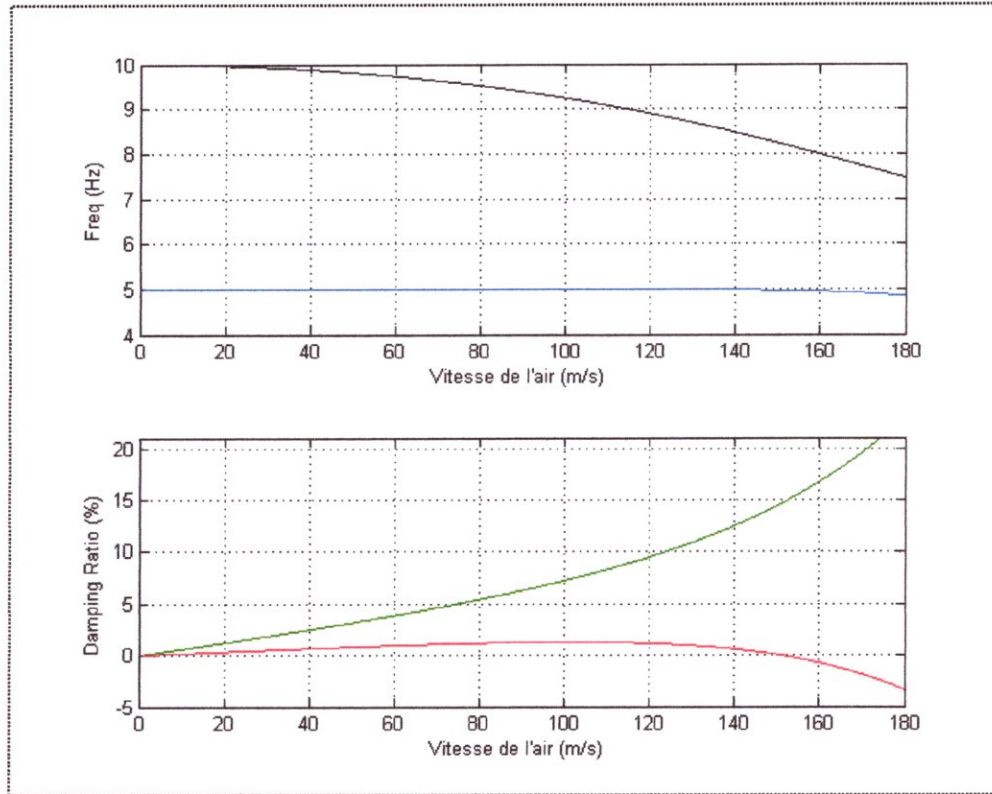


Figure IV-21 système aérodynamique instationnaire ($M\theta = -1.2$, $x_f = 0.5c$, $x_m = 0.5c$).

La figure (IV.21) montre le comportement de flottement binaire classique. Quand la vitesse d'air augmente, les fréquences commencent à converger. Au commencement, toutes les deux constantes d'amortissement augmentent, mais l'une d'entre elles continue à augmenter alors que la deuxième commence à diminuer et devient égale à zéro à la vitesse de flottement (environ 155 m/s). Au-delà de cette vitesse la deuxième constante d'amortissement devient négative et le flottement se produit. On voit encore que les deux fréquences ne se fusionnent pas, mais se déplacent étroitement pour que les deux modes se rapprochent.

IV.1.1.5 Effet de changement de distance entre l'axe élastique et l'axe de gravité

La façon dont la position de l'axe élastique et l'axe des centres de gravité de l'aile affecte le comportement aéroélastique est de grande importance pour la conception des ailes tels que le flottement ne se produira pas à l'intérieur de l'intervalle de vol.

Si on rajoute une masse M le long du bord d'attaque, la position de l'axe des masses peut s'écrire :

$$x_{cm} = \frac{m c^2}{2(mc+M)} \tag{IV, 4}$$

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

L'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$T = \int_{aile} \frac{1}{2} dm \dot{w}^2 = \frac{m}{2} \int_0^s \int_0^c [y\dot{w} + (x - x_f)\dot{\theta}]^2 dx dy + \frac{M}{2} + \int_0^s (y\dot{w} - x_f\dot{\theta})^2 \quad (IV.5)$$

Et la matrice d'inertie devient :

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{ms^3c}{3} + \frac{Ms^3}{3} & \frac{ms^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) - \frac{Ms^2x_f}{2} \\ \frac{ms^2}{2} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) - \frac{Ms^2x_f}{2} & ms \left(\frac{c^3}{3} - c^2x_f + cx_f^2 \right) + Msx_f^2 \end{bmatrix} \quad (IV.6)$$

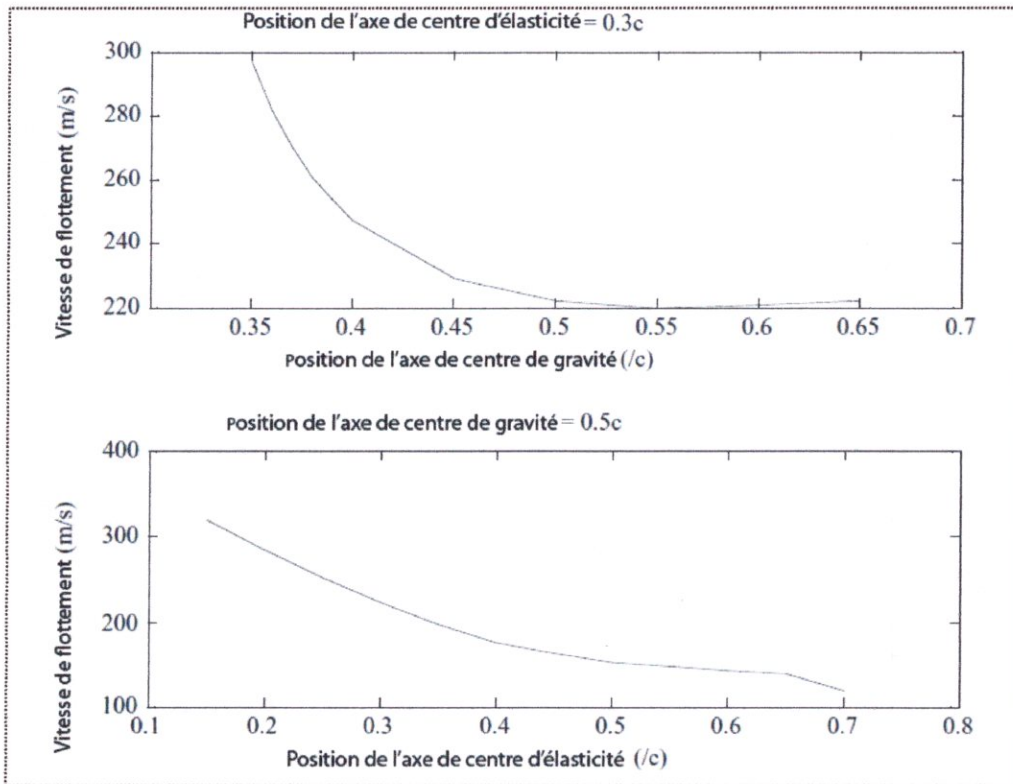


Figure IV-22 l'effet de changement de l'axe élastique

Le schéma (IV.22) montre comment la vitesse de flottement varie en fonction du changement de la position de l'axe élastique et celle de l'axe des centres de masse. En gardant la position de l'axe élastique fixe, le déplacement de l'axe des gravités en avant augmente la vitesse de flottement.

Quand on garde la position de l'axe des gravités constante et on varie celle de l'axe élastique en avant, la diminution de la distance entre l'axe élastique et l'axe des centres aérodynamiques augmente la vitesse de flottement.

IV.3.2 Modèle d'aile souple :

Nous avons le premier mode de flexion : $f_1=y^2$

et le premier mode de torsion $f_2=y$

Le déplacement devient : $w = y^2q_1+y(x-xf)q_2$ (IV.7)

IV.3.2.1 Premier modèle

Le premier model concerne celui de la référence [2] (c'est le même qu'on a utilisé pour le mode rigide).

Les résultats obtenus sont donnés par les graphes suivants :

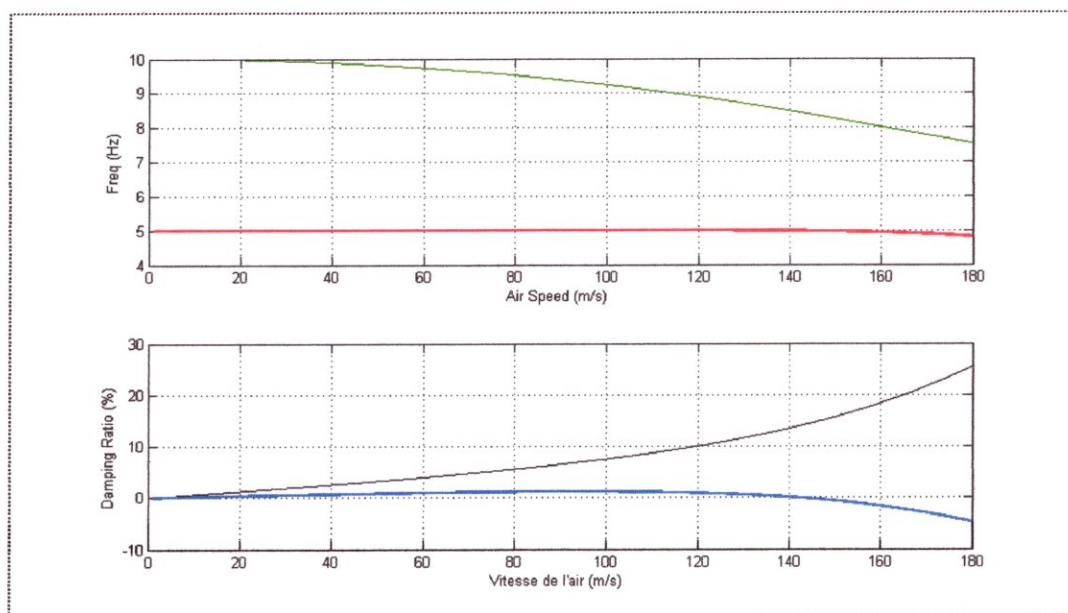


Figure IV-23-flottement binaire en mode souples à f flexion=5 et f torsion=10

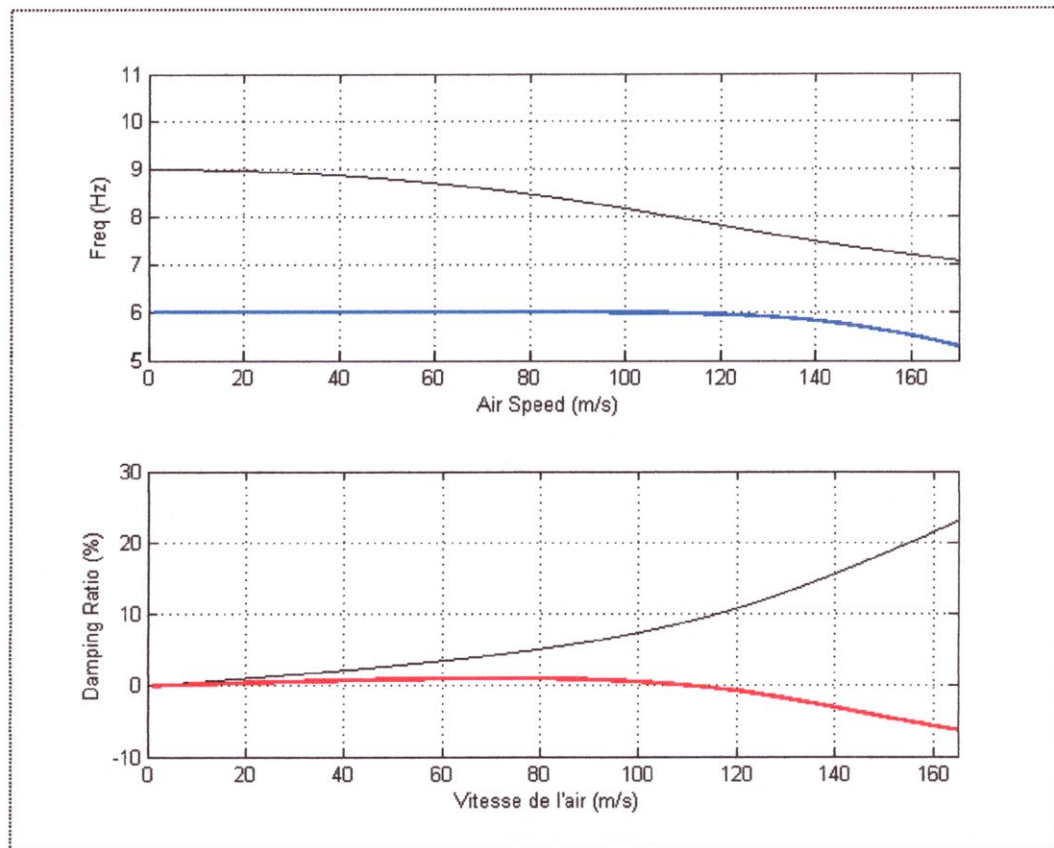


Figure IV-24 flottement binaire en mode souples à f flexions=6 et f torsion=9

D'après les figure (IV.23) et (IV.24), quand les fréquences se rapproches ; la vitesse de flottement se réduit. Les concepteurs essayent souvent d'augmenter l'espace de fréquence entre les modes (en changeant la distribution de masse ou augmentant la rigidité).

Si on considère le même modèle mais on augmente le poids jusqu'à 150kg/m^2 on obtient, d'après la figure (IV-25), une augmentation de la vitesse critique de $140(\text{m/s})$ à $155(\text{m/s})$

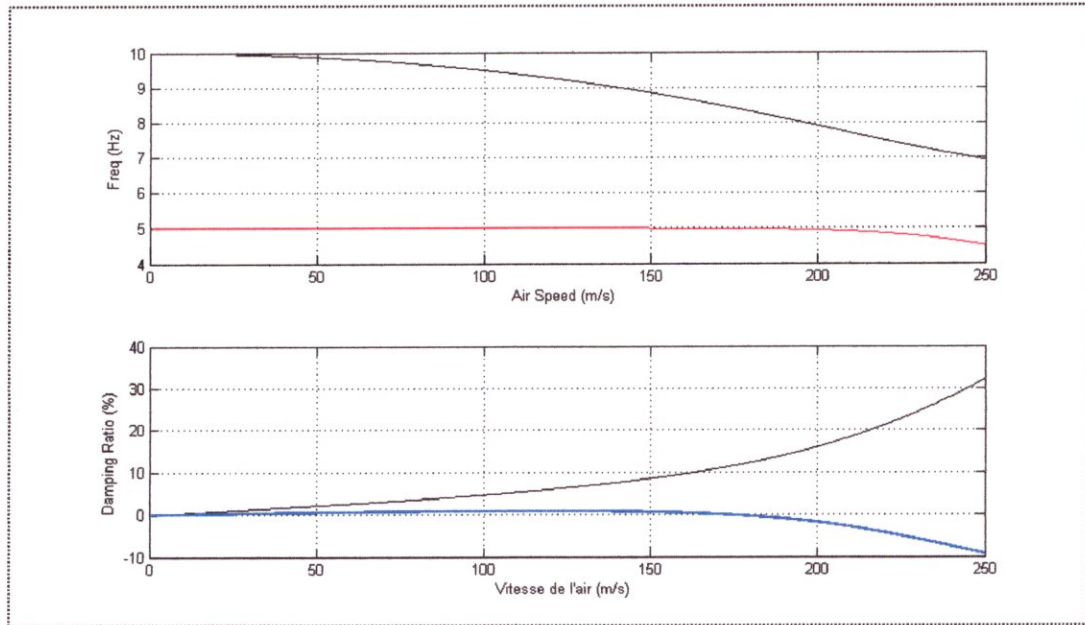


Figure IV-25 flottement binaire en mode souple avec $m=150\text{kg/m}^2$

IV.3.2.2 Deuxième modèle

C'est le model de Goland Asheley donné par la référence [30], c'est une aile souple qui a les caractéristiques suivantes :

$$EI=23.6.10^6, GJ=2.39, m=35.75, I_a=1.943, L=20, a=-1/3 \text{ et } c= 1.$$

On utilise le programme d'élément finis pour obtenir les fréquences propres du système et on les compare avec les fréquences de la référence :

	Notre résultat	Résultat de l'article
1 ^{ère} fréquence	7.7985	7.4803
2 ^{ème} fréquence	14.164	15.11

On introduit nos deux fréquences et ces deux fréquences dans le programme de calcul de la vitesse de flottement

CHAPITRE IV: RESULTATS ET INTERPRETATION

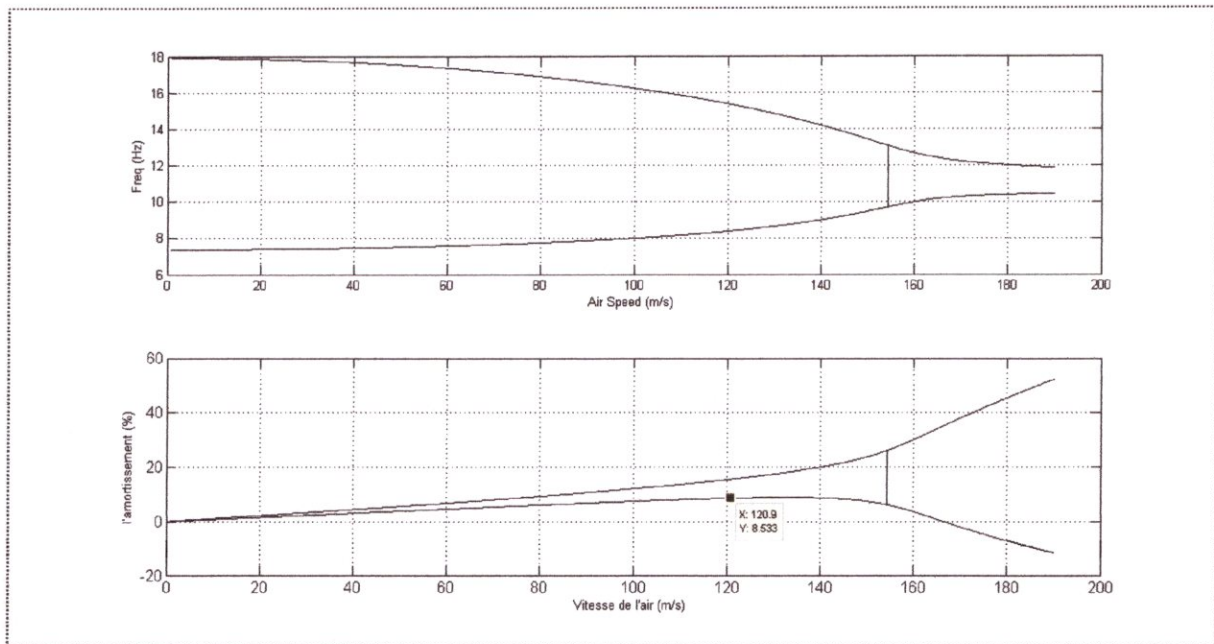


Figure IV-26 flottement mode souple pour aile goland avec nos fréquence

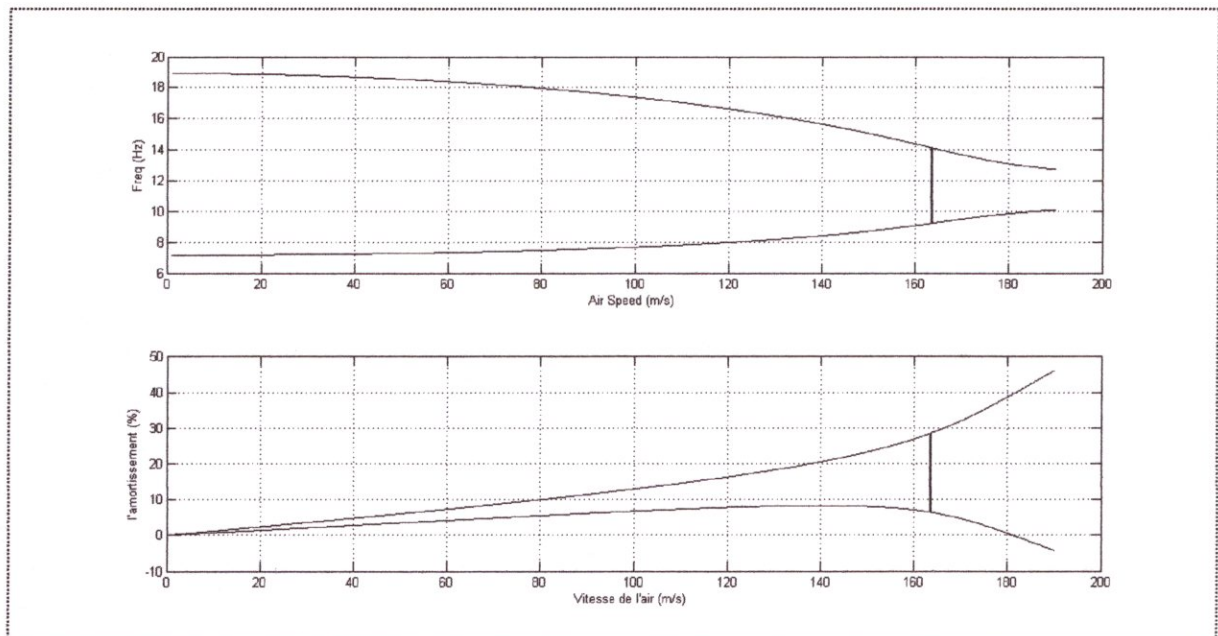


Figure IV-27 flottement mode souple pour aile goland avec ses fréquences

On voit que la vitesse de flottement calculer par nos fréquence est égale à 168(m/s) par contre les résultats obtenus par ses fréquences c'est 180 (m/s), la différence est dû à l'effet de cisaillement qu'il la tenue en compte car il a pris une aile épaisse.

Conclusion

CONCLUSION

Conclusion :

Le flottement des surfaces portantes est un phénomène très important en aéroélasticité car il peut engendrer la destruction de la structure. Il s'agit d'oscillations auto-entretenues provoquées par l'absorption d'une partie de l'énergie de l'écoulement par la surface portante du système dynamique. Le flottement s'enclenche à partir d'une vitesse critique qui apparaît comme une limite de stabilité du système aéroélastique. Au-delà de cette vitesse, une vibration divergente s'amorce spontanément sous l'action de petites perturbations, l'amplitude vibratoire croît de façon exponentielle. La limite de flottement est bien évidemment fonction de la raideur ainsi que de la masse de la structure.

Afin d'augmenter la vitesse critique, il faut bien choisir les matériaux afin d'augmenter la rigidité mais sans augmenter le poids qui est un inconvénient dans notre domaine. Aussi on peut jouer sur la distance entre l'axe élastique et l'axe de rotation.

Dans notre étude on a utilisé au début les éléments finis pour déterminer les modes propres et les fréquences propres, ceci donne de bons résultats en les comparant avec les résultats obtenus analytiquement. Puis on a introduit ces résultats dans la méthode de Rayleigh- Ritz, pour calculer le flottement binaire.

Enfin on souhaite que ce travail enrichisse la bibliothèque de notre département dans le domaine d'aéroélasticité et servira pour de futures promotions. Pour continuer le calcul de flottement en modes multiples et l'introduction d'autres composants dans le calcul comme les ailerons, et les empennages... etc.

**A. Annexe : Calcul des forces
aérodynamiques**

A.1 Dérivés aérodynamiques harmoniques :

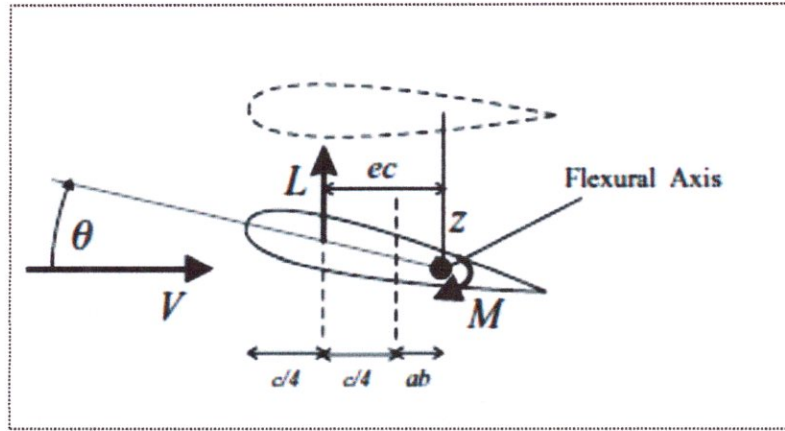


Figure A-1 Profil aérodynamique bidimensionnel subissant le mouvement de poussée et de lancement

Considérer un profil aérodynamique bidimensionnel symétrique ($C_{m_0} = 0$) de la corde c , avec l'axe élastique placé à la distance ($ab = ac/2$) à l'arrière de la demi-corde suivant les indications du (schéma A.1). Le profil aérodynamique subit un mouvement harmonique oscillant, avec $w = w_0 e^{i\omega t}$ et $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$ (bord d'attaque vers le haut). La solution classique pour la portance et le moment autour de l'axe élastique peut être :

$$L = \pi \rho b^2 [\ddot{w} + V \dot{\theta} - ba \ddot{\theta}] + 2\pi \rho V b C(k) \left[\dot{w} + V \theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (A.1)$$

$$M = \pi \rho b^2 \left[ba \ddot{w} - V b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] + 2\pi \rho V b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[\dot{w} + V \theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (A.2)$$

La dérivation de ces deux équations décrit la façon dont la portance aérodynamique et le moment varie avec la fréquence réduite. La première partie de chaque expression montre les termes non circulatoires et la deuxième partie

On prend les deux expressions (A.1) et (A.2) et on les remplace par la forme complexe de la fonction de Theodorsen :

$$L = \left\{ \pi \rho b^2 \left[-\omega^2 w_0 + i\omega V \theta_0 + \omega^2 ba \theta_0 \right] + 2\pi \rho V b (F + iG) \left[i\omega w_0 + V \theta_0 + i\omega b \left(\frac{1}{2} - a \right) \theta_0 \right] \right\} e^{i\omega t} \quad (A.3)$$

ANNEXE

$$M = \left\{ \pi \rho b^2 \left(-\omega^2 b a w_0 - i \omega V b \left(\frac{1}{2} - a \right) \theta_0 + b^2 \omega^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \theta_0 \right) + 2 \pi \rho V b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) (F + iG) (i \omega w_0 + V \theta_0 + i \omega b \left(\frac{1}{2} - a \right) \theta_0) \right\} e^{i \omega t} \quad (\text{A.4})$$

Ces équations peuvent alors être écrites sous la forme dérivée harmoniques

$$\begin{cases} L = \left[\rho V^2 b (L_w + i k L_{\dot{w}}) \frac{w_0}{b} + (L_\theta + i k L_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i \omega t} \\ M = \left[\rho V^2 b (M_w + i k M_{\dot{w}}) \frac{w_0}{b} + (M_\theta + i k M_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i \omega t} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

L_w , et M_w etc., sont les dérivés aérodynamiques harmoniques non dimensionnels.

Exprimés en termes de déplacement et vitesse normalisés.

$$\left\{ L_w = \frac{\partial c_L}{\partial (w/b)}, \quad L_{\dot{w}} = \frac{\partial c_L}{\partial (\dot{w}/V)}, \quad L_\theta = \frac{\partial c_L}{\partial (\theta c/V)}. \right. \quad (\text{A.6})$$

Avec :

$$\begin{cases} L_w = 2\pi \left(-\frac{k^2}{2} - Gk \right), \quad L_{\dot{w}} = 2\pi F \\ L_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2 a}{2} + F - Gk \left(\frac{1}{2} - a \right) \right], \quad L_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[\frac{1}{2} + F \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \right] \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} M_w = 2\pi \left[-\frac{k^2 a}{2} - k \left(a + \frac{1}{2} \right) G \right], \quad M_{\dot{w}} = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) F \\ M_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) + F \left(a + \frac{1}{2} \right) - kG \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \\ M_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[-\frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) + kF \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Les valeurs quasi-stationnaires des dérivés aérodynamiques ($k \rightarrow 0$, $F \rightarrow 1$, $G \rightarrow 0$) peuvent être trouvées

$$\begin{cases} L_w = 0, \quad L_{\dot{w}} = 2\pi, \quad L_\theta = 2\pi, \quad kL_\theta = 0, \quad M_w = 0. \\ M_{\dot{w}} = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right), \quad M_\theta = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right), \quad kM_\theta = 0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A-2- Matrice amortissement et rigidité aérodynamiques :

$$\left\{ k = \frac{\omega b}{V}, \quad w = w_0 e^{i \omega t}, \quad \dot{w} = i \omega w_0 e^{i \omega t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i \omega t}, \quad \dot{\theta} = i \omega \theta_0 e^{i \omega t}. \right. \quad (\text{A.10})$$

La substitution de ces expressions dans les équations de portance et de moment (A.5) donne :

ANNEXE

$$\begin{cases} L = \rho V^2 (L_w w + L_{\dot{w}} \frac{b\dot{w}}{V} + L_{\theta} b\theta + L_{\dot{\theta}} \frac{b^2\dot{\theta}}{V}), \\ M = \rho V^2 (M_w bw + M_{\dot{w}} \frac{b^2\dot{w}}{V} + M_{\theta} b^2\theta + M_{\dot{\theta}} \frac{b^3\dot{\theta}}{V}) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Et ceci peut être écrit sous la forme de matrice

$$\begin{Bmatrix} L \\ M \end{Bmatrix} = \rho V \begin{bmatrix} bL_{\dot{w}} & b^2L_{\dot{\theta}} \\ b^2M_{\dot{w}} & b^3M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 \begin{bmatrix} L_w & bL_{\theta} \\ bM_w & b^2M_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \rho V B \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 C \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Avec : [B] : matrice amortissement aérodynamique.

[C] : matrice amortissement structurale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Peter I. Kattan matlab Guideto Finite Elements an Interactive Approach.
- [2] Introduction to Aircraft Aeroelsticity de Jan R. Wright University of Manchester and J2W Consulting Ltd, UK. Et JonathanE. Coope University of Liverpool, UK
Introduction to aircraft aeroelasticity and loads.
- [3] Aéroélasticité (aero-016) Notes de cours Laurent stainier Année académique.
2006-2007.
- [4] Responsable du cours : D. FEDALA djaafer.fedala@paris.ensam.fr .
- [5] Sup aero école Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace [http : //www.supaero.fr](http://www.supaero.fr).
- [6] performances et stabilité des avions Gérard dégrééz automne 2001.
- [7] pascal Hémon Laboratoire d'hydrodynamique, ladhyx Ecole polytechnique,
Palaiseau
Octobre 2004.
- [8] Teeside Laureadi: Giulio Romanelli, matr. 679778 Elisa Seriola, matr. 67977.
- [9] thèse présentée devant l'école centrale de Lyon.
- [10] école nationale des ponts et chaussées titre: étude de la stabilité de systèmes
Aéroélastiques en présence d'excitations aléatoires multiplicatives.
- [11] thèse Doctorat : Alain LERAT. Co-encadrement de la thèse : Jacques PETER et
Gérald CARRIER.
- [12] Thèse préparée au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides Numérique,
LMFN-CORIA, UMR 6614 CNRS.
- [13] Académie de Lille Université de valenciennes et du Hainaut Cambrésis : Thèse
Doctorat : Contribution à la caractérisation numérique et Expérimentale d'assemblages
structuraux rivetés Sous sollicitation dynamique.
- [14] Académie de Lille Université de valenciennes et du Hainaut Cambrésis : thèse
Doctorat :
Éléments finis hybride déplacement perfores pour le calcul des structures
aéronautiques rivetées.
- [15] Conservatoire National des Arts et Métiers : thèse Doctorat : construction de
modèles d'ordre réduit Non-linéaires basés sur la décomposition Orthogonale propre pour
l'aéroélasticité.
- [16] Marc Rapin Jean-Marc Noël énergie éolienne.

[17] Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines
Edited by KENNETH C. HALL Duke University, Durham, North Carolina, U.S.A.
ROBERT E. KIELB Duke University, Durham, North Carolina, U.S.A.

[18] JEFFREY P. THOMAS Duke University, Durham, North Carolina, U.S.A.

[19] Batoz, J.L et Dhatt, "Modélisation des Structures par Eléments Finis", Volumes I, II et III, Edition Hermès (1990).

[20] Tizzi, S, "Numerical Procedure for the Dynamic Analysis of three dimensional Structures", Journal of aircraft V. 34, n° 1, (January, February 1997), 120-130.

[21] Lillio, M, Butler, R, Guo, S, Banarjee, "Aeroelastic Optimization of Composite Wings using the Dynamic Stiffness Method", The Aeronautical Journal (February 1997).

[22] Taylor, J. M, and Butter, R, "Optimum design and validation of flat Composite Beams subject to Frequency Constraints", AIAA Journal, V. 35, n° 3, (March 1997), 540-545.

[23] Grouas, J. "Dynamique des structures", ENSICA (1984).

[24] Eastep, F.E. and Olsen, J.J, "Transonic Flutter Analysis of Rectangular Wing with conventional Aircraft sections", AIAA Journal, V. 1, n° 10, (October 1980), 1159-1164.

[25] Giles, G.L, "Design-Oriented Analysis of Aircraft Fuselage Structures", AIAA Journal (1998) 1749.

[26] Giles, G.L, "Further generalization of an Equivalent Plate Representation for Aircraft Structures", V. 26, n° 1 (January 1989).

[27] Giles, G.L, "Equivalent Plate Analysis of Aircraft Wing Box Structures with general planform Geometry", Journal of Aircraft, V. 23, n° 11m (November 1986), 859-864.

[28]Gupta, K.K., "STARS- An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Elements, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program", NASA, USA (May 1997).

[29] Calculs des Structures par Eléments Finis : Barres – Poutres Elasticité plane
Axisymétrie Plaques – Coques.

[30]Use of Generalised mass in the interpretation of dynamic response of bending-torsion (31 may 2000)

[31] Subsonic flutter suppression using self-straining actuators (2001)