

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université de Blida -1-

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales
Département : Construction Aéronautique



Mémoire De Fin De Cycle
En Vue De L'obtention Du Diplôme
De Master
Option : Structure Avion

06-1/015

EX2

Thème

**Modélisation des plaques
Composites renforcées par MEF**



Présenté par :
M.BELKEBIR Mohammed
M. MAHIOUS Lotfi

Encadré par :
Mr. A BADREDINE

Promotion: 2014/2015

REMERCIEMENT

On tient tout d'abord à remercier en premier lieu **ALLAH LE TOUT PUISSANT** pour nous avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but et accomplir ce présent travail.

Nous tenons à remercier **Mr BADEREDDINE**, notre promoteur pour son soutien, sa générosité et surtout pour ses conseils considérables, nous avons également apprécié la grande liberté qu'il nous a accordé dans la gestion de ce mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente. Bref, merci de nous avoir supporté et d'en avoir fait une période plus qu'agréable pour nous.

Nous exprimons notre gratitude à l'égard des membres des jury qui ont accepté de juger ce modeste travail en consacrant une partie de leur temps pour lire et analyser notre présent mémoire afin d'en extraire les éléments nécessaires pour son évaluation.

Un grand remerciement à tous les enseignants de l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida, qui ont contribué à notre formation le long de notre cursus universitaire.

Que toute personne ait participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail accepte nos grands et sincères remerciements.

Enfin, on exprime notre très grande reconnaissance à nos familles, nos parents, et nos frères et sœurs pour nous avoir encouragés, pour tous les soucis qu'on leur a causés et surtout pour avoir été toujours auprès de nous.

Dédicace

Je dédicace ce travail accomplis, grâce à *ALLAH*, à tous ceux qui m'ont soutenu

de près ou de loin

A ma mère, et ma sœur, mon défunt père, et toute ma famille

A mon binôme *BELKEBIR Mohammed*

et à tout mes camarade et ami de

L'option structure

A tous mes amis et mes proches et en particulier *Hicham, Zaki, Amina, Sadia, Atem,*

Abdou, Hanane, Seif, Moh, Farah, et sans oublier HAFIDA

Et mon promoteur Mr *BADREDDINE*

MAHJOUS Lotfi

Dédicace

Je remercie DIEU le tout puissant de m'a aidé à atteindre cet endroit, et de m'avoir donné une famille solidaire qui a planté en moi autant de volonté et de courage, un binôme frère avant tout et généreux, gentil et compréhensif comme MAHIOUS Lotfi, un promoteur exemplaire comme Mr Badredine et tous mes amis et collègues de ma vie quotidienne et ma vie scolaire.

Et en particulier ma promotion 2014/2015, Zino, Moh Benbrik, Sief Gergour, Zaki, Moh Hafida, Oussama Mamouzzi et son père ami Nordin, Ilyes, Manel, Farah, Sara, et Amina.

Et aussi mes enseignants et en particulier Mr benamia et Mme hamadouche.

Mon DIEU merci pour toutes les biens que vous m'avez donnés.

BELKEBIR Mohammed

RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude dynamique des plaques composites renforcés en flexion et torsion par la méthode des éléments finis pour a travers la détermination des matrices masse et rigidité de la structure. La plaque choisie est de la forme rectangulaire dont le maillage adopté est de la même forme

A l'aide du langage MATLAB, nous avons élaboré un programme de calcul utilisé pour l'analyse modale des plaques et des poutres d'un matériau isotrope ou composite. Les résultats obtenus sont bien comparables à ceux obtenus par ANSYS, SOLIDWORKS et ABAQUS.

Nos résultats montrent l'efficacité de la méthode utilisée.

Mots-Clés : matériau composite, plaques stratifiées, plaques composite, plaques isotrope, comportement mécanique, éléments finis, fréquences propres, mode propre, MATLAB, ANSYS, SOLIDWORKS, ABAQUS.

ملخص

الهدف من العمل هو الدراسة الديناميكية للوحات المركبة بإتباع طريقة العناصر المحددة لتحديد كتلة المصفوفات وصلابة الهيكل، اللوحة المختارة ذات شكل مستطيل، بالإضافة إلى إعتناء شبكة مستطيلة.

بمساعدة لغة MATLAB قمنا بتطوير برنامج يستخدم لتحليل شكل اللوحات والاعمدة وذلك بالنسبة للمواد الخاصة والمركبة، وكانت النتائج المتحصل عليها مماثلة للنتائج المحصل عليها بواسطة .ABAQUS .SOLIDWORKS .ANSYS

النتائج المتحصل عليها اظهرت فعالية الطريقة المستخدمة

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، لوحات مغلقة، لوحات مركبة، لوحات الخواص، السلوك الميكانيكي، MATLAB, ANSYS, SOLIDWORKS, ABAQUS, العناصر التامة، الترددات الطبيعية، الأسلوب الخاص.

ABSTRACT

The objective of this work is the dynamic study of reinforced composite plates by the finite element method via determination the mass and rigidity matrices of the structure. The selected plate is rectangular shape, and the mesh used is also rectangular.

Using MATLAB language, we developed a program used for modal analysis of plates and beams of an isotropic material or composite. The results are comparable to those obtained by ANSYS, ABAQUS and SOLIDWORKS.

The obtained results show the effectiveness of the used method.

Keywords: composite material, laminated plates, composite plates, isotropic plates, mechanical behavior, finite element, natural frequencies, mode shapes, MATLAB, ANSYS, SOLIDWORKS, ABAQUS.

Table de matière

Remerciement	
Dédicace	
Résumé	
Table de matière	
Liste des Nomenclature	
Introduction générale	1

CHAPITRE I : GÉNÉRALITE SUR LES AVIONS

I.1. DÉFINITION.....	3
I.1.1. Les aérostats	3
I.1.2. Les aérodynes	3
I.2. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE L'AVION.....	3
I.2.1. Fuselage	4
I.2.1.1.Fuselage en Treillis.....	5
I.2.1.2.Fuselage Monocoque.....	5
I.2.1.3.Fuselage Semi-Monocoque.....	6
I.2.2. Les Ailes	6
I.2.2.1.Les types d'ailes	8
I.2.2.2. Les composants de l'aile.....	10
a.Les nervures :	10
b.Le longeron :.....	11
I.2.3.Les empennages	12
I.2.4.Le train d'atterrissage	13
I.2.4.1.Le train tricycle	13
I.2.4.2.Le train classique.....	14
I.3.CONCLUSION	14

CHAPITRE II : MATÉRIAUX COMPOSITES

II.1. INTRODUCTION.....	15
II.2. DEFINITION.....	15
II.2.1. Définitions de base	15
II.3. LES CONSTITUANTS DES MATERIAUX COMPOSITES.....	16
II.3.1. Renfort.....	16
II.3.2. Matrice.....	17
II.3.3. Interface.....	18
II.4. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE MATERIAUX COMPOSITES....	18
II.4.1.Avantages	18
II.4 .2. Inconvénients	18
II.5. L'ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITES.....	19
II.5.1. Les Monocouches	19
II.5.2. Les Stratifiés	19
II.5.3. Les sandwich	20
II.6. L'UTILISATION DES MATERIAUX COMPOSITES	21

II.6.1. Applications automobiles	21
II.6.2. Applications navales.....	22
II.6.3. Applications aéronautiques.....	22
II.6.3.1. Les pièces composites dans les avions.....	22
II.6.3.2. Les gros porteurs	23
II.6.4. Applications aérospatiales (satellites).....	26
II.6.5. Les Produits militaires	27
II.7. CONCLUSION.....	27

CHAPITRE III : COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRATIFIES

III.1.INTRODUCTION	28
III.2.CHAMP DES DEPLACEMENTS	28
III.3.LES CONDITIONS DE COMPATILITE.....	29
III.4.CHAMP DES DEFORMATIONS.....	30
III.5.RELATION CONTRAINTES –DEFORMATION	31
III.6.RESULTANTES ET MOMENTS	34
III.7.EQUATION CONSTITUTEVE	34
III.8.POUTRE COMPOSITE	35
III.9.L'EQUATION D'EQUILIBRE DES PLAQUES MOYENNEMENT EPAISSE.....	36
III.9.1.LES PLAQUES ISOTROPES	37
III.9.2.les plaques composites	38
III.10.LES EQUATIONS D'EQUILIBRES. DES POUTRES COMPOSITES.....	38
III.11.CONCLUSION.....	39

CHAPITRE IV : MODÉLISATION DE PLAQUE COMPOSITE

PAR MEF

IV.1.INTRODUCTION.....	40
IV.2.LES PLAQUES MINCES.....	40
IV.2.1. Discrétisation	40
IV.2.2.Calcul des matrices [B] et [N].....	42
IV.2.3.Détermination des matrices élémentaires (masse et rigidité).....	44
IV.2.3.1.Matrice de raideur élémentaire	44
IV.2.3.2.Matrice masse élémentaire	44
IV.3. LES PLAQUES MOYENNEMENT EPAISSES.....	45
IV.3.1.CALCUL DES MATRICES $[B_b]$ ET $[B_s]$	47
IV.3.1.1.La matrice $[B_b]$	47
IV.3.1.2.La matrice $[B_s]$	48
IV.3.2.Détermination des matrices élémentaires (masse et rigidité).....	48
IV.3.2.1.Matrice de raideur élémentaire.....	48
IV.3.2.2.Matrice masse élémentaire	49
IV.4.LA POUTRE COMPOSITE	49
IV.4.1. Déterminations des matrices masses et rigidité	49

IV.4.1.1.Matrice masse élémentaire	49
a.Matrice masse élémentaire pour flexion	51
b.Matrice masse élémentaire pour la torsion	51
c.Matrice masse globale découplée	51
d.Matrice masse globale de couplage	52
e.Matrice masse globale	52
IV.4.1.2.Matrice de rigidité élémentaire.....	52
a.Matrice rigidité élémentaire pour flexion	53
b.Matrice rigidité élémentaire pour la torsion	53
c.Matrice rigidité globale découplée	53
d.Matrice rigidité de couplage	54
e.Matrice rigidité globale	54
IV.4.2.application numérique	54
IV.4.2.1.Les matrice masses (découplée, de couplage et globale).....	55
a.Matrice masse découplée	55
b.Matrice masse de couplage	55
c.Matrice masse globale	55
IV.4.2.2.Les matrices de rigidités (découple, de couplage et globale).....	55
a.Matrice de rigidité découplée	55
b.Matrice de rigidité de couplage	56
c.Matrice rigidité globale	56
IV.5.EQUATIONS DYNAMIQUES DE LA STRUCTUREE.....	56
IV.6.CONCLUSION.....	56

CHAPITRE V : RESULTAT ET INTERPRETATION

V.1. INTRODUCTION.....	28
V.2 MATLAB.....	28
V.2.1.Definition.....	29
V.2.2.Les étape de programmation.....	30
V.3. INFLUENCE DE L'ALLONGEMENT SUR LES FREQUENCES PROPRES DE LA PLAQUE	30
V.3.1 Cas d'un matériau isotrope.....	31
V.3.1.1 $\lambda=1$	31
V.3.1.2. $\lambda=3$	32
V.3.1.3. $\lambda=5$	33
V.3.1.4. $\lambda=10$	35
V.3.2 Cas d'un matériau orthotrope	36
V.3.2.1. $\lambda=1$	37
V.3.2.2. $\lambda=3$	38
V.3.2.3. $\lambda=5$	38
V3.2.4. $\lambda=10$	32
V.4.COMPARAISONS ENTRE LES DIFFERENTS TYPES DE PLAQUE.....	33
V.4.1.Plaque mince.....	35
V.4.2.Plaque moyennement épaisse	36
V.4.3.Plaque épaisse	37
V.6.LES PLAQUES RENFORCEES.....	38
V.6.1.Assemblage 1	38
V.6.2.Assemblage 2	32

V.6.3.Assemblage 3.....	33
V.6.4.Assemblage avec poutre de section carrée creuse.....	35
V.6.5.Assemblage avec poutre en U.....	36
V.6.6.Assemblage avec poutre en I.....	37
V.6.7.Assemblage avec poutre en Z.....	38
V.7.CONCLUSION.....	38

Conclusion générale
Référence
Annexe

LISTE DES NOMENCLATURE

Ωe : Section.

(x, y, z) : Coordonnées cartésiennes.

(ξ, η) : Coordonnées généralisées.

u, v, w : Déplacements.

$\theta x, \theta y$: Rotations autour des axes.

E : Module de Young.

G : Module de cisaillement transversal.

ρ : Masse volumique.

α : Coefficient de cisaillement

T, U : Energie cinétique et énergie potentielle respectivement.

$||J||$: Déterminant de la matrice jacobienne.

$\{q\}$: Vecteur déplacement.

$\{\varepsilon\}$: Vecteur déformation.

$\{\sigma\}$: Vecteur contrainte.

Ke, Me : Matrices masse et rigidité élémentaires.

$[K], [M]$: Matrices masse et rigidité global.

Nx, Ny, Nxy : Résultantes des forces de membrane.

Mx, My, Mxy : Les moments.

E_1 : Module d'élasticité longitudinal.

E_2 : Module d'élasticité transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{23}, G_{13} : Modules de cisaillement transversal.

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson.

$[Q]$: Matrice de rigidité réduite dans le repère du pli.

$[\bar{Q}]$: Matrice de rigidité réduite dans le repère du stratifié.

σ_z : Les contraintes normales à la surface moyenne.

$[T]$: la matrice de changement de base des contraintes.

$[T']$: la matrice de changement de base des déformations.

$[A]$: la matrice d'extension.

$[B]$: la matrice de couplage.

$[D]$: la matrice de flexion.

$[F]$: la matrice de cisaillement transverse.

α_{ij} : Facteurs de correction en cisaillement.

EI : la rigidité de flexion.

GJ : la torsion.

k : le couplage de rigidité flexion-torsion.

m : la masse par unité de longueur.

I : le moment statique.

h : l'épaisseur de la plaque.

$[Z]$: L'opérateur dérivateur.

$[N]$: Matrice des fonctions d'interpolation.

$[K_e]$: La matrice élémentaire de la raideur.

$[M_e]$: La matrice masse élémentaire.

$N_i(\xi, \eta)$: Fonctions d'interpolations.

$\{\epsilon_b\}$: Déformations de flexion.

$\{\epsilon_s\}$: Déformations de cisaillement.

$||J||$: Le déterminant de la matrice jacobienne.

a : rayon de giration.

[Mt] : Masse élémentaire pour la torsion.

[Mg]_d : Matrice masse globale découplée.

[M]_c : Matrice masse globale de couplage.

[Kfe]: Matrice rigidité élémentaire pour flexion.

[Kte]: Matrice rigidité élémentaire pour la torsion.

[M]_d : Matrice masse découplée.

[M]_c : Matrice masse de couplage.

A decorative rectangular border with intricate floral and scrollwork patterns, featuring four small floral motifs at the corners.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les plaques et les poutres sont les éléments structuraux les plus utilisés dans la majorité des domaines que ce soit dans le domaine spatiale, navale, automobile, ...etc. D'où le besoin de connaître les différentes hypothèses qui sont nécessaires pour déterminer le comportement statique et dynamique pour ces structures et ceci dans différentes conditions relatives à l'utilisation et à l'environnement.

D'autre part, les matériaux qui constituent ces structures sont de plus en plus performants, par conséquent, les exigences se sont évoluées du même rythme. L'arrivée des matériaux composites ayant des taux élevés de rigidité/poids et de résistance/poids a marqué un grand essor dans l'industrie aérospatiale et dans les autres applications de l'ingénierie.

Le renforcement des structures ou d'éléments de structure telle que les plaques par collage des poutres en matériaux composites est actuellement une technique reconnue et utilisée au monde entier. Cette technique permet d'augmenter la résistance des éléments renforcés et d'assurer la longévité.

La méthode des éléments finis (M. E. F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs d'industrie : aérospatial, automobile, construction naval ...etc. C'est aussi le plus utilisé aujourd'hui pour résoudre efficacement les équations différentielles de physique et de l'ingénierie. Elle utilise une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Avec les pressions économiques continues pour l'amélioration de la productivité en ingénierie, les programmes d'éléments finis ont joué un rôle important dans l'amélioration et la croissance remarquable de la CAO et cette méthodologie, qui reste toujours passionnante, constitue une partie importante de la « caisse à outils de l'ingénieur ».

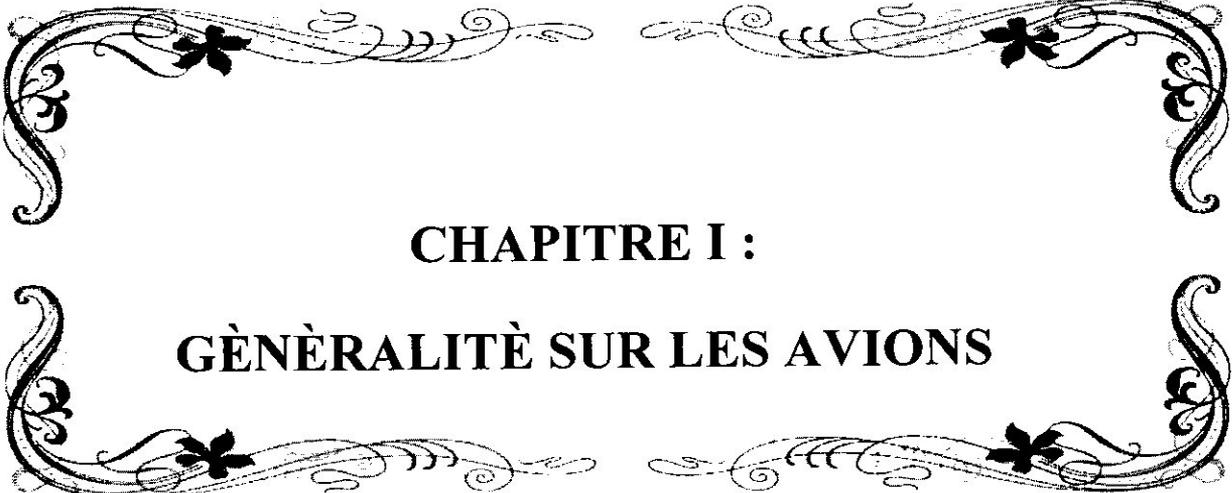
Le but de notre travail est de trouver une structure, qui se compose d'une plaque et d'une poutre, ayant un meilleur comportement statique et dynamique avec le minimum de poids, qui est l'objectif principale dans le domaine d'aéronautique.

Notre travail consiste donc en l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse dynamique de la plaque composite stratifiée renforcée. Pour cela, le travail est organisé de la manière suivante :

- Le premier chapitre représente une étude bibliographique sur les avions portant sur des généralités concernant la conception structurale.
- Le deuxième chapitre traite les matériaux composites et leurs constituants, leur type, leur architecture, leur utilisation et les bénéfices qui nous procurent.
- Le troisième chapitre explique le comportement mécanique des plaques composite set développe les équations fondamentales des plaques stratifiées telles que la relation contraintes déformations, la matrice d'extension $[A]$, la matrice de couplage $[B]$, la matrice de flexion $[D]$ et la matrice de cisaillement $[F]$, cette partie est complétée par le développement des équations dynamiques.
- Le quatrième chapitre consiste à la modélisation des plaques composites par MEF et au calcul des matrices masse et de rigidité élémentaires pour les différent types de plaques.

• Le cinquième chapitre présente les résultats et les interprétations obtenues lors de la résolution du problème aux valeurs propres qui permettent l'obtention des fréquences et leurs modes correspondants pour les plaques isotropes et composites (stratifiées) et les plaques composites renforcées. Les résultats obtenus par notre programme en langage MATLAB sont très bons comparés à ceux donnés par les codes de calculs ANSYS, ABAQUS, SOLIDWORKS.

Enfin, une conclusion générale qui clôture notre étude.

A decorative border with intricate floral and scrollwork patterns, framing the central text. It features four corner pieces and two horizontal pieces, each adorned with small flowers and swirling lines.

CHAPITRE I :
GÉNÉRALITÉ SUR LES AVIONS

I.1. DÉFINITION

De manière générale, on appelle aéronef (avion) tout appareil capable d'évoluer dans l'air, quel que soit son mode de sustentation et le moyen utilisé pour sa propulsion. Parmi les aéronefs on distingue :

I.1.1. Les aérostats

Où « plus léger que l'air » dont la sustentation est assurée par l'emploi d'un gaz (air chaud, hélium, hydrogène).

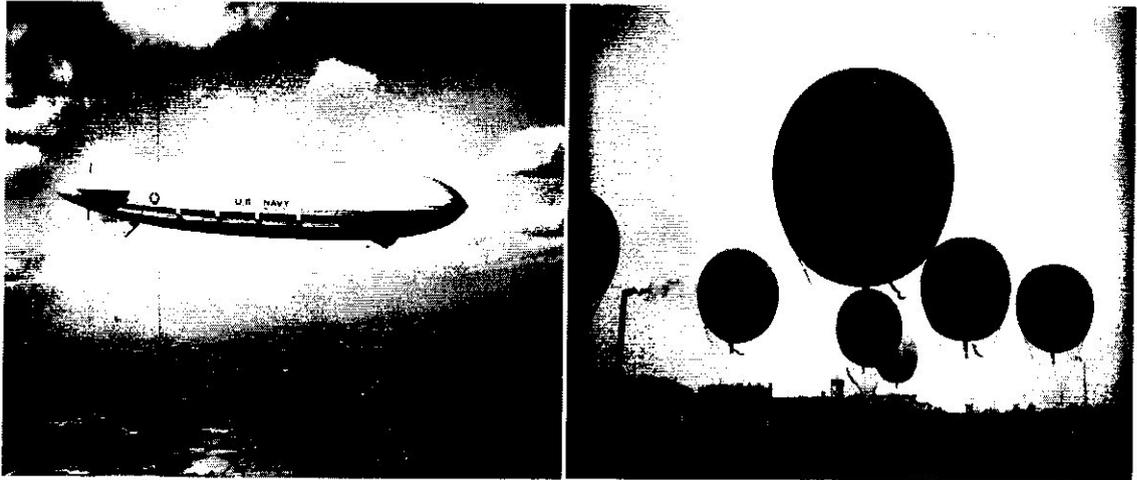


Figure I.01 : Exemple d'avion aérostat

I.1.2. Les aérodynes

Où « plus lourds que l'air » se sont les appareils dont la sustentation est assurée par une voilure.

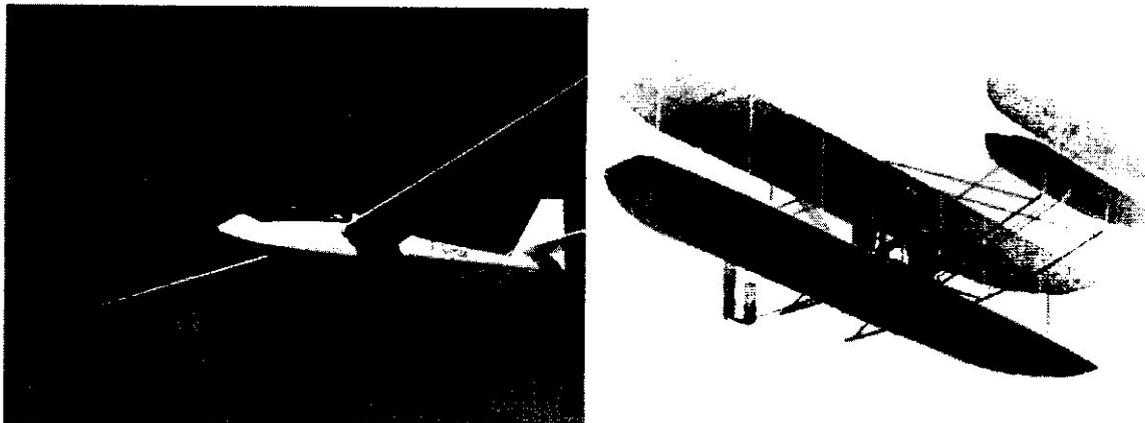


Figure I.02 : Exemple d'avion aérodynes

I.2. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE L'AVION

L'avion est une structure avec quatre principaux éléments, le fuselage, les ailes (voilure), les empennages et le train d'atterrissage. En plus de la structure on a un ou plusieurs systèmes propulsifs, les équipements de pilotage et les systèmes auxiliaires (Figure I.03) [1].

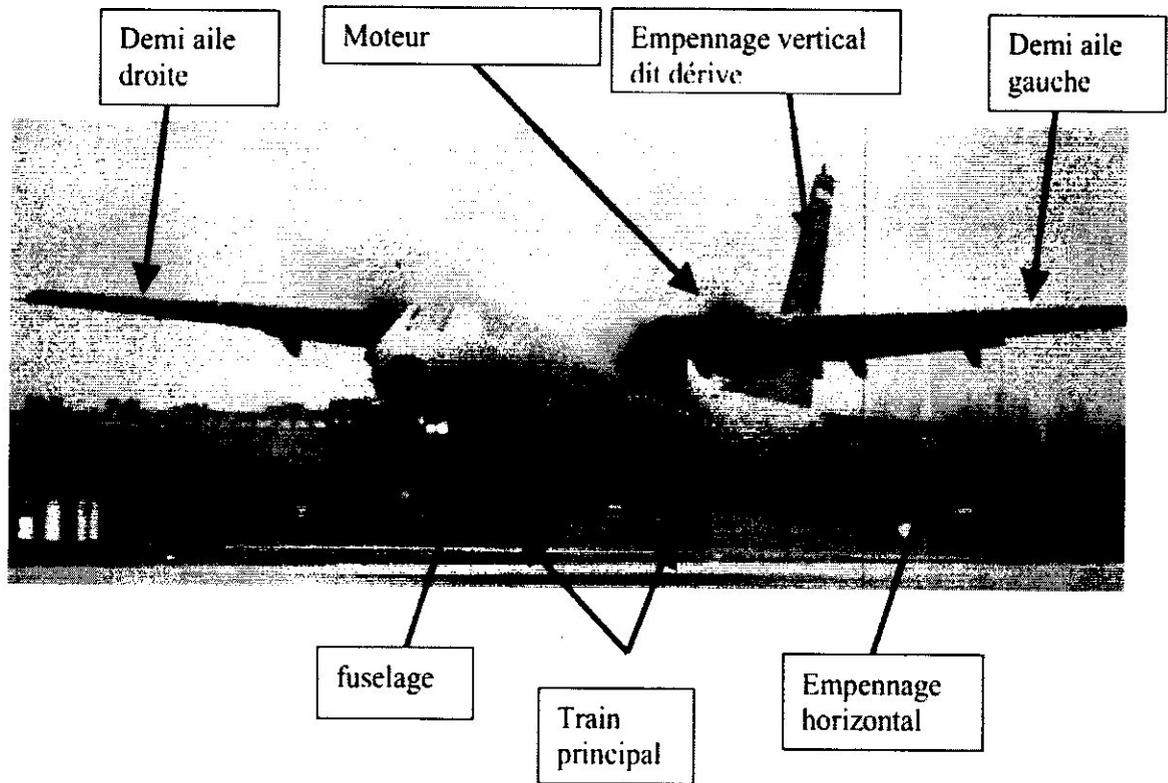


Figure I.03 : Les parties principales d'un avion

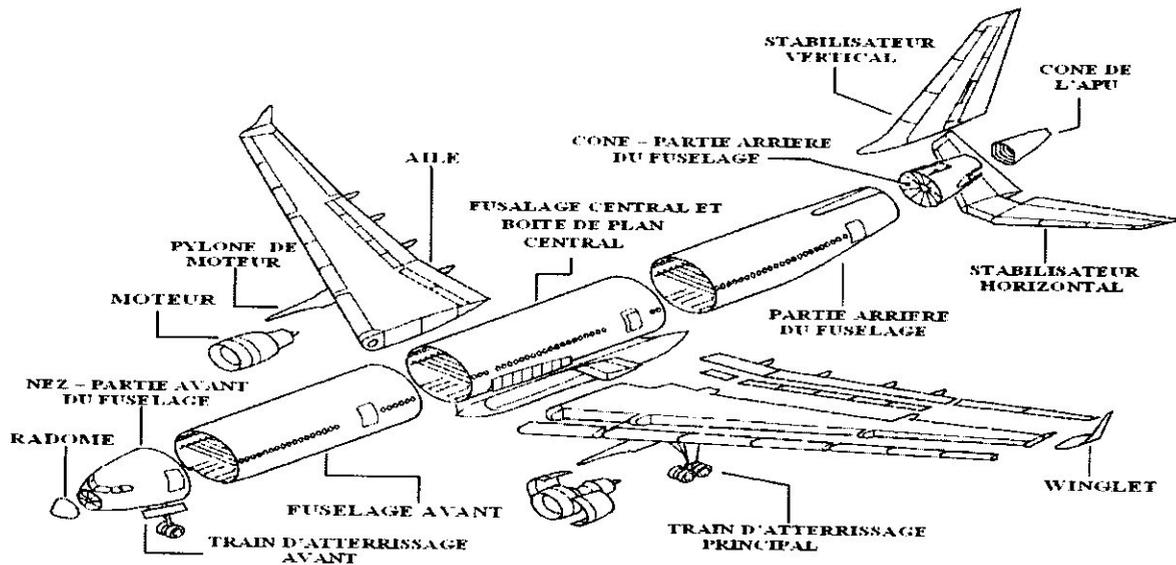


Figure I.04: Composition générale de l'avion

1.2.1. Fuselage

Le fuselage correspond à la carapace d'un avion, il désigne l'enveloppe qui reçoit généralement la charge transportée, ainsi que l'équipage.

Le fuselage est un caisson rigide dont la structure est en bois, en métal ou en matériaux composites. Il est composée des longerons, cadres (ou couples) et raidisseurs, intègre l'habitacle (ou cockpit), porte l'empennage, le train d'atterrissage, le moteur et les ailes.

La structure du fuselage est étudiée par les constructeurs de façon à répondre à de nombreuses exigences techniques [2].

On a plusieurs types de fuselage :

I.2.1.1. Fuselage en Treillis

Le premier et plus ancien type, consiste à fabriquer un squelette du fuselage à l'aide de poutres en bois ou en métal. Les poutres situées dans le sens de la longueur de l'avion sont appelées longerons et les autres sont appelées traverses.

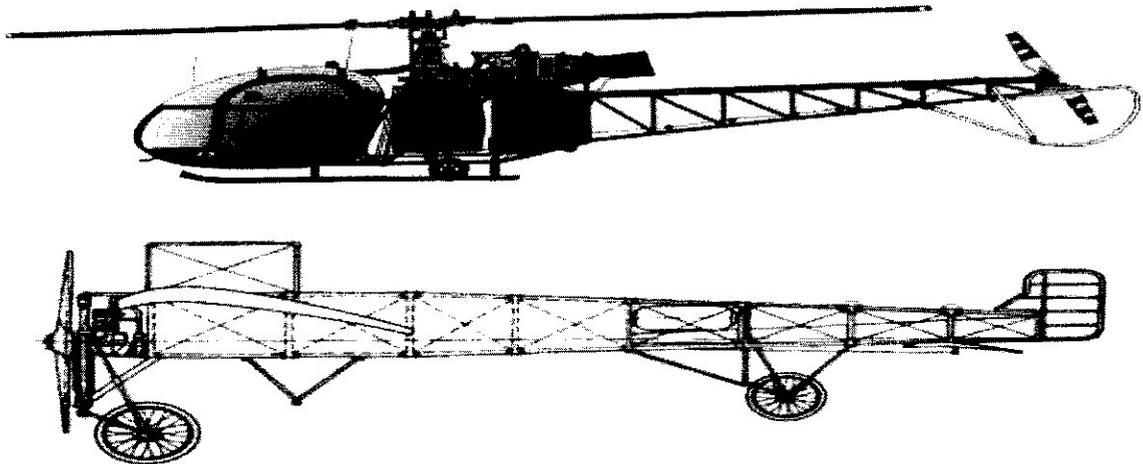


Figure I.05 : Fuselage en Treillis

I.2.1.2. Fuselage Monocoque

Un deuxième type consiste à fabriquer des éléments transversaux appelés cadres, et à fixer en dessus le revêtement. Le revêtement participe alors de façon très importante à la rigidité de l'ensemble et doit supporter une part conséquente des contraintes exercées sur le fuselage (Figure I.06).

Sandwich "nid d'abeille"

structure monocoque

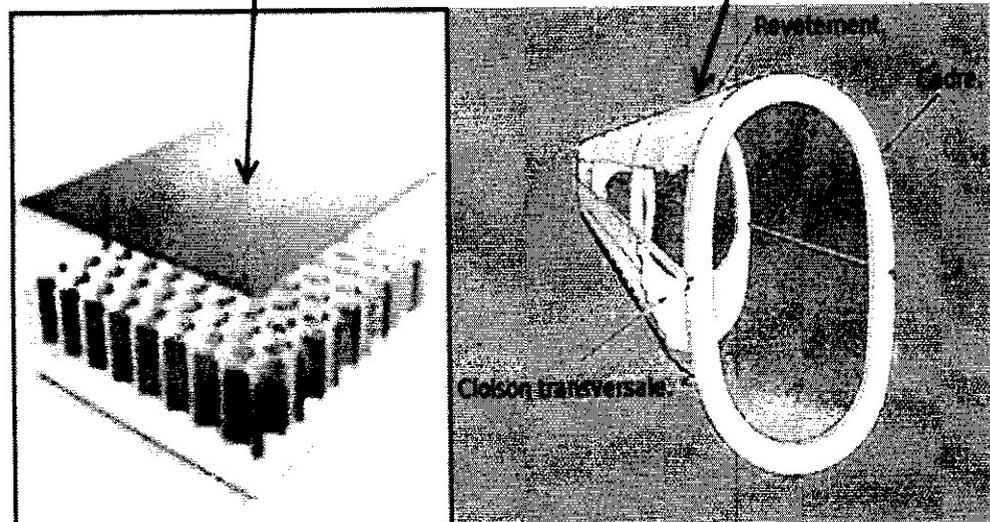


Figure I.06 : Fuselage monocoque

1.2.1.3. Fuselage Semi-Monocoque

Une troisième solution consiste à appuyer des longerons sur les cadres. Ceux-ci assurent alors la rigidité de la structure à la place du revêtement qui n'est plus travaillant et peut donc être plus léger.

Toutefois les longerons alourdissent la structure. Pour gagner du poids, on minimise le nombre de longerons et on les assiste dans leur rôle par des lisses, encore appelées raidisseurs. Ce sont des barres transversales qui relient les cadres également mais elles sont plus petites que les longerons.

Il est très courant. Il est également fréquent que le fuselage d'un avion soit construit en plusieurs tronçons dont la structure est différente. Cela permet d'optimiser le poids de l'appareil en choisissant la structure en fonction des contraintes appliquées sur telle ou telle partie de fuselage (Figure I.07).

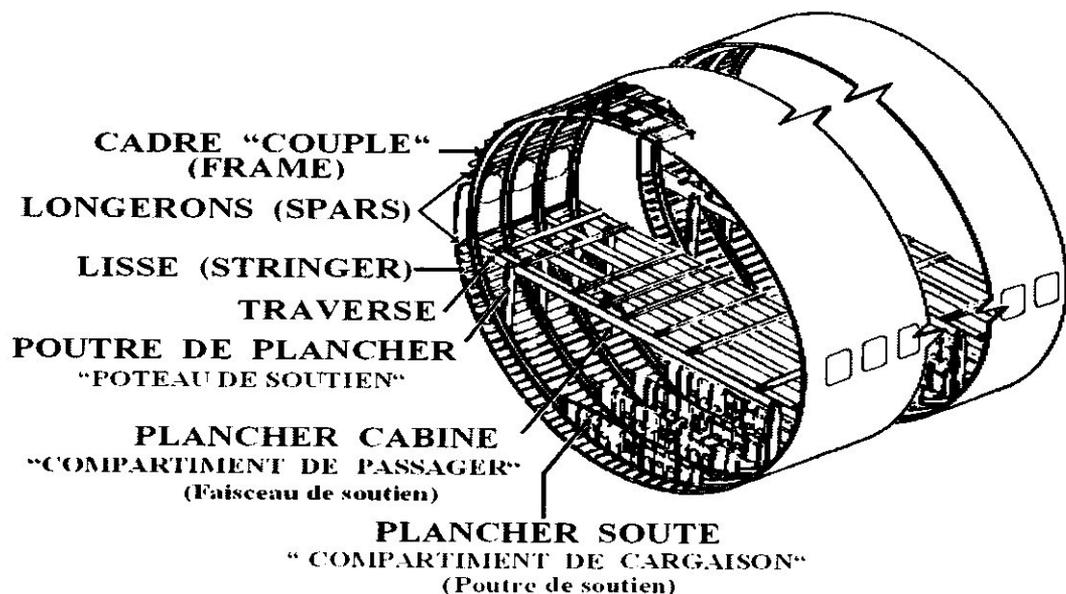


Figure I.07 : Fuselage semi monocoque (A330-200)

1.2.2. Les Ailes

Les ailes sont des éléments extrêmement importants de la cellule ; elles assurent la portance, et sont "porteuses" de différentes gouvernes, quand ce n'est pas le train d'atterrissage; elles sont donc soumises à des contraintes énormes, tant en flexion qu'en torsion. Leur structure doit donc tenir compte de ces faits, et présenter une rigidité maximum.

I.2.2.1. Les types d'ailes

Suivant l'utilisation de l'avion, on trouve plusieurs types d'ailes,

- Aile rectangulaire

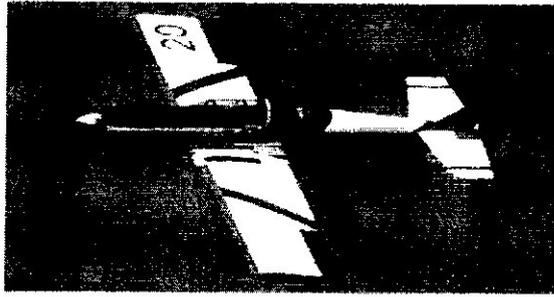


Figure I.09 : Aile rectangulaire

- Aile delta

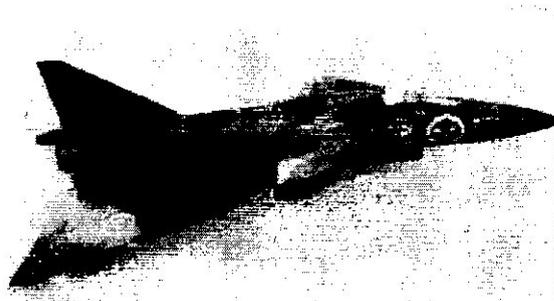


Figure I.10 : Aile delta

- Aile avec flèche

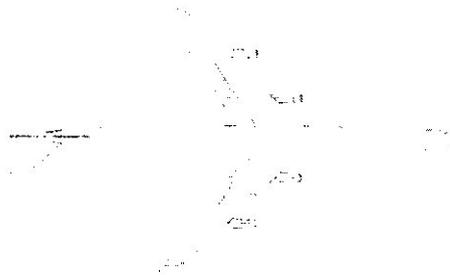


Figure I.11 : Aile flèche

- Aile elliptique

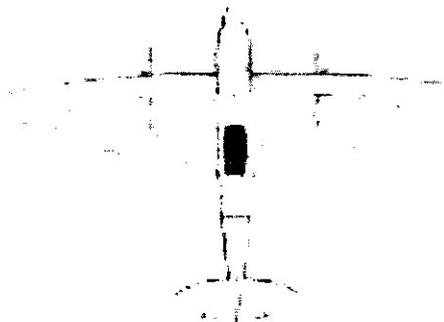


Figure I.12 : Aile elliptique

- Aile trapézoïdale

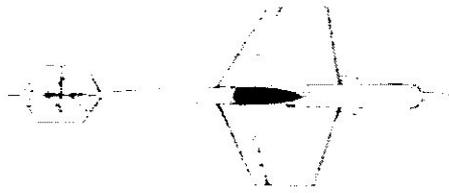


Figure I.13 : Aile trapézoïdale

Suivant la position de l'aile, on trouve:

- Aile haute



Figure I.14 : Aile haute

- Aile basse



Figure I.15 : Aile basse

- Aile médiane

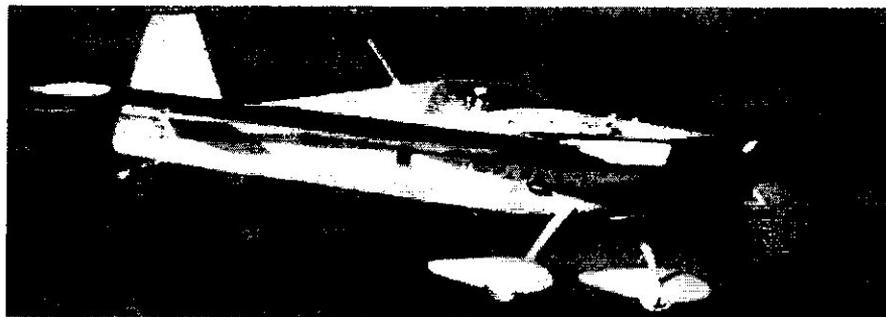


Figure I.16 : Aile médiane

I.2.2.2. Les composants de l'aile

Chaque demi-voilure est constituée d'un (ou de plusieurs) longerons attachés au fuselage au niveau de l'emplanture (Figure I.17).

On trouve aussi un, voir deux longeron(s). Ils sont en quelques sortes la colonne vertébrale de l'aile. Les nervures seront assimilées aux côtes, si on compare l'aile au squelette humain. Les longerons peuvent être monobloc ou en deux morceaux selon l'envergure de l'avion.

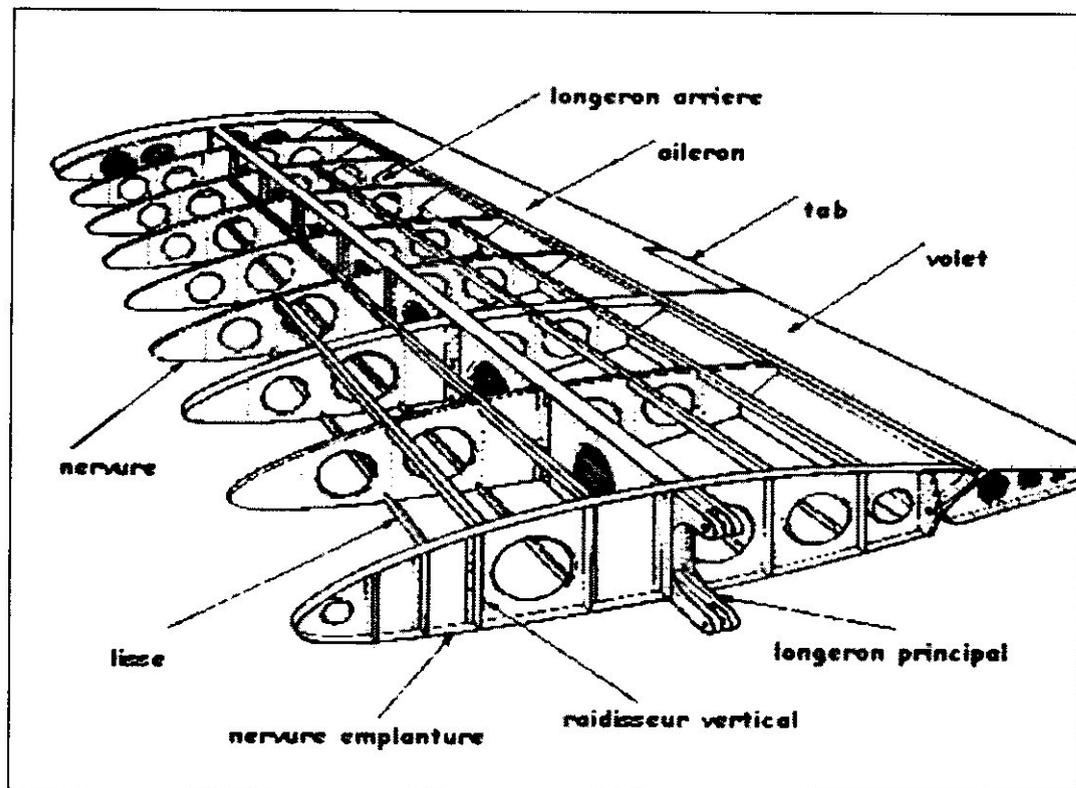


Figure I.17 : La structure interne d'une aile d'avion

Le revêtement de la structure peut être en trois matières :

- Le dacron (récent)
- Tôle d'aluminium (récent)
- Le lin (ancien)
- Le coton (ancien)
- Matériaux composite

a. Les nervures :

Les nervures supportent le revêtement supérieur (extrados) et inférieur (intrados) et transmettent les charges aérodynamiques aux longerons.

L'espace libre laissé entre les nervures est souvent utilisé pour loger les réservoirs de carburant. Cela permet, en même temps, d'utiliser un espace libre en vue de diminuer l'effort de flexion à l'emplanture de l'aile. Il faut savoir aussi qu'une aile forme un angle (le dièdre) qui permet une auto-stabilisation de l'avion en vol à plat.

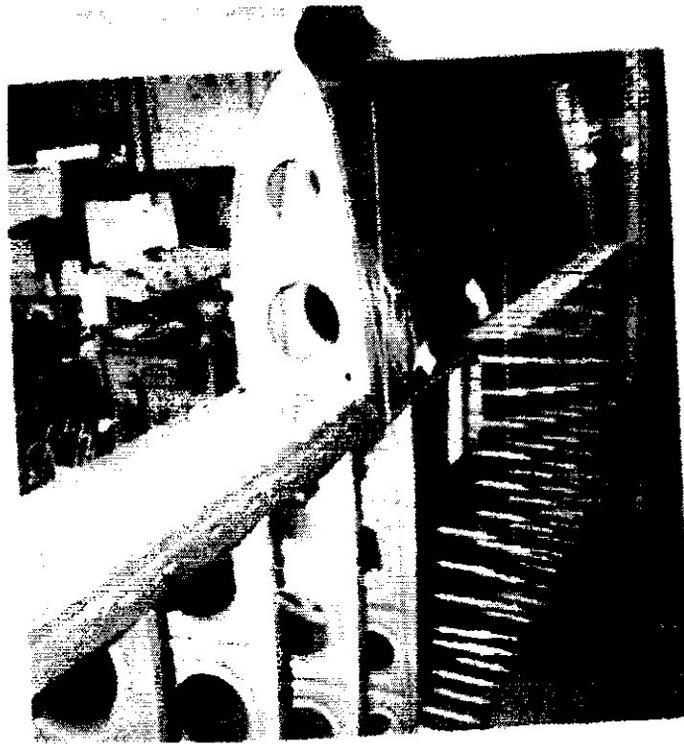


Figure I.18: Montage des nervures et du revêtement (aluminium)

b. Le longeron :

Le longeron est une poutre qui part de l'emplanture de l'aile et qui va jusqu'à son extrémité. C'est cette pièce qui supporte les charges aérodynamiques qui s'appliquent sur la voilure.

Le longeron peut être fabriqué en une seule pièce, ou composé de plusieurs pièces. Ce sont ces « semelles » qui vont supporter 99% des forces dynamiques qui vont affecter l'aile.

La structure des longerons peut être faite soit :

- En métal (souvent de l'alliage d'aluminium), utilisé couramment sur les avions actuels.
- En bois et la toile, utilisés sur les avions de conception ancienne ou les reconstructions d'avions de collection.
- En matériaux composites (alliant généralement la fibre de verre ou de carbone, le Kevlar et des résines synthétiques), dont l'utilisation n'est pas encore généralisée.

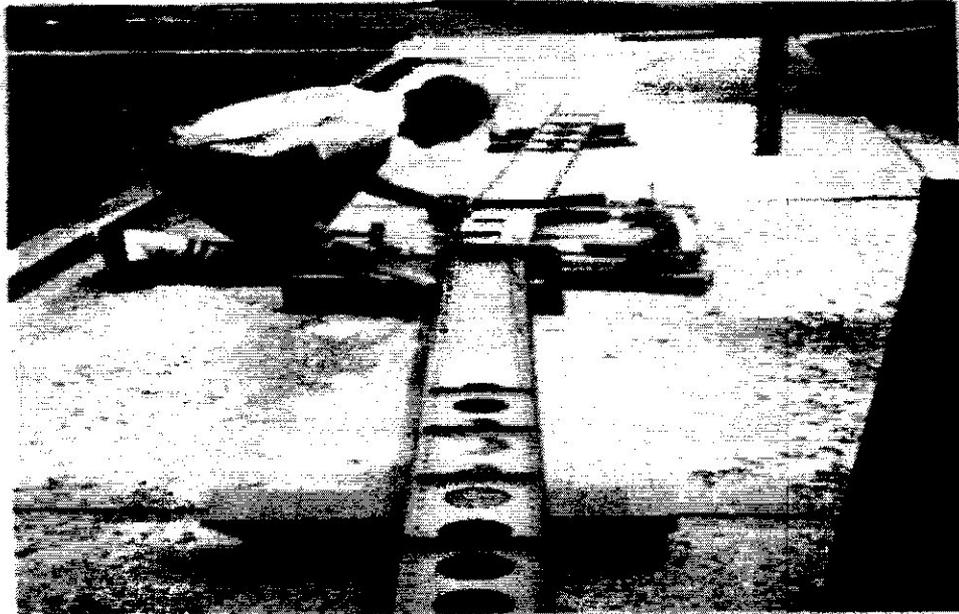


Figure I.19 : Photo d'un longeron

I.2.3. Les empennages

L'empennage est utilisé pour assurer la stabilité et la maniabilité de l'avion. L'empennage vertical est plus couramment appelé « dérive », il se trouve à l'arrière du fuselage.

L'empennage horizontal s'y trouve également le plus souvent. Certains avions comportent néanmoins une configuration dite « canard », dans laquelle l'empennage horizontal est placé à l'avant de l'appareil.

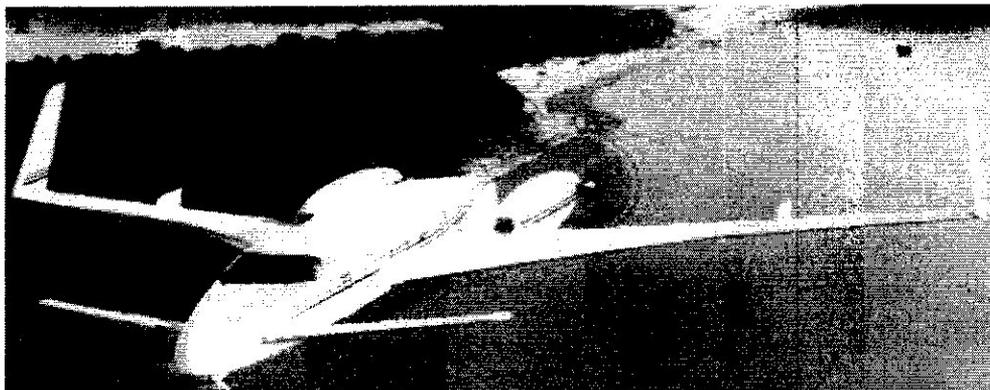


Figure I.20 : Exemple d'empennage canard

Sur les empennages horizontaux, on trouve la gouverne de profondeur ; tandis que sur celui vertical, on trouve la gouverne de direction. Sur l'empennage en V, les gouvernes de directions et de profondeurs sont mixées.

- Empennage en T

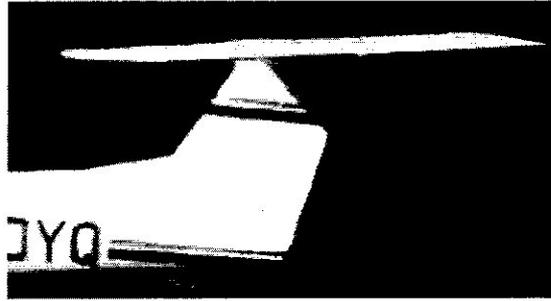


Figure I.21 : Empennage en T

- Empennage en V

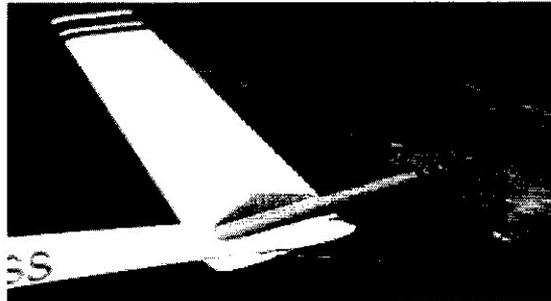


Figure I.22 : Empennage en V

- Empennage cruciforme

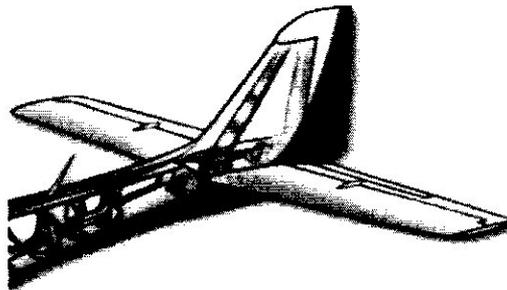


Figure I.23 : Empennage cruciforme

1.2.4. Le train d'atterrissage

Son rôle est de permettre les déplacements de l'avion au sol et d'amortir les efforts subis lors de la prise de contact avec la piste au moment de l'atterrissage.

Il existe deux types de train : le train tricycle et le train classique. Dans les deux cas, le train peut être fixe ou rentrant.

1.2.4.1. Le train tricycle

Il comprend un atterrisseur principal et une roulette de nez qui permet une conduite aisée de l'avion au sol. La roulette de nez est commandée par les palonniers, commande mue par les pieds du pilote, et non par le manche. Au sol, on conduit donc l'avion avec les pieds.

Sur certains avions, il n'y a pas de liaison mécanique entre les palonniers et la roulette de nez, qui s'oriente librement. Le roulage s'effectue à l'aide des freins de chaque jambe du train principal.

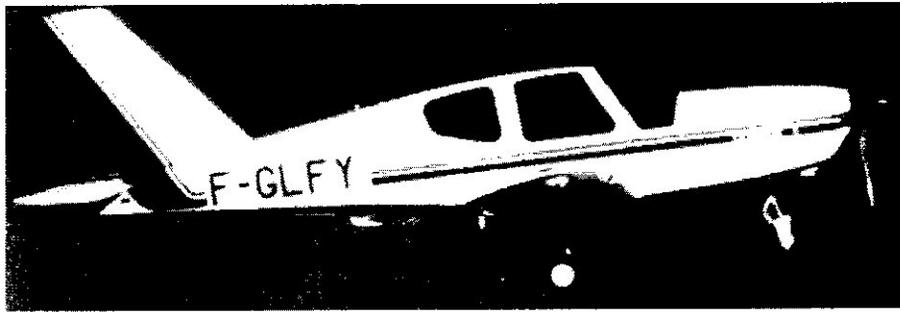


Figure I.24 : Train tricycle

I.2.4.2. Le train classique

De moins en moins répandu sur les avions de tourisme car d'utilisation moins facile au roulage, il est composé d'un atterrisseur principal disposé sous la voilure ou sous le fuselage, de part et d'autre de la cabine, ainsi que d'une roulette de queue orientable qui permet de diriger l'avion au sol. L'orientation de la roulette s'effectue comme le train tricycle grâce aux palonniers.

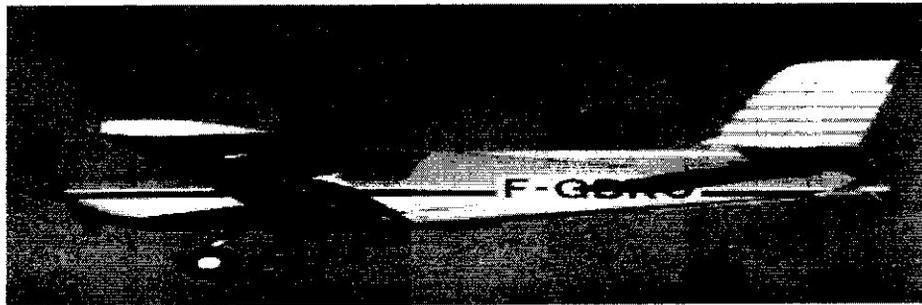
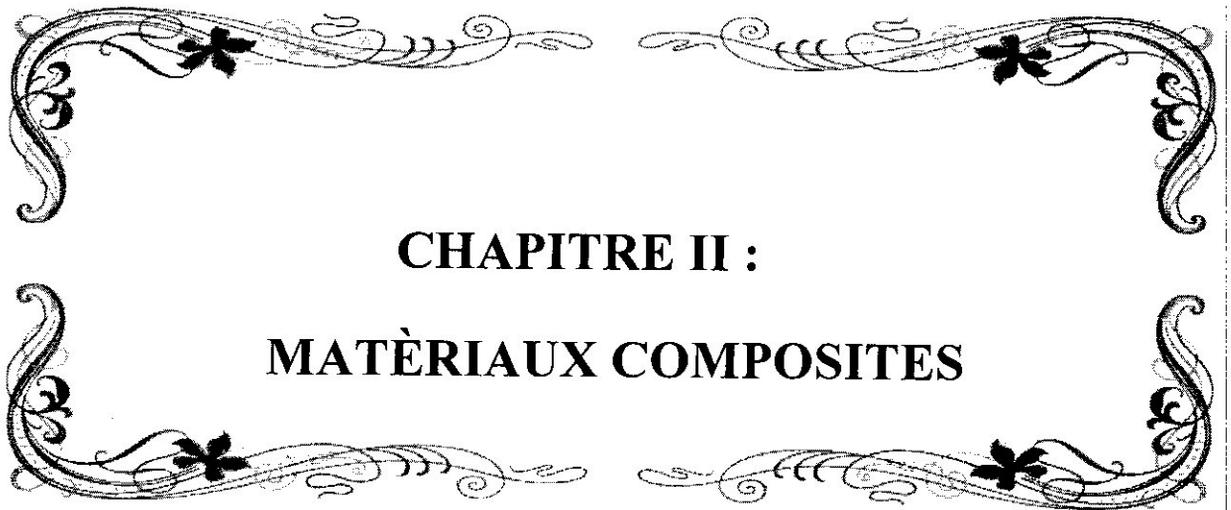


Figure I.25 : Le train classique.

I.3. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté l'aéronef de manière générale, ainsi que l'ensemble de ces composants, et les différents types d'ailes. Nous allons avoir l'occasion de voir, dans le chapitre suivant, l'application des matériaux composites sur les différents composants d'un avion.



CHAPITRE II :
MATÉRIAUX COMPOSITES

II.1. INTRODUCTION

Il existe différentes familles de matériaux : les métaux, les plastiques, les composites...etc. Dans l'état technologique actuel les matériaux composites sont de plus en plus intégrés aux produits de haute technologie surtout dans le secteur aérospatial.

Dans les années soixante dix, les études réalisées sur la tenue des matériaux composites utilisés dans le transport et le stockage de différents fluides, ont montré que malgré une très bonne tenue à la corrosion, les matériaux composites à matrice polymère pouvaient être fortement altérés par les facteurs environnementaux tels que la température, l'humidité ambiante, les rayons ultraviolets, l'immersion dans certains fluides.

Dans le domaine aéronautique, le cas est d'autant important qu'illustratif. Les structures aéronautiques sont réalisées en grandes parties par des composites à matrice polymère, et elles évoluent dans des conditions d'environnement variables, en termes d'altitudes, de vitesses, de températures et d'humidité [14].

II.2. DEFINITION

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort/matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite [3].

II.2.1. Définitions de base

- Homogène : mêmes propriétés en tout point du matériau.
- Hétérogène : en 2 points différents, propriétés différentes.
- Isotrope : même propriété dans toutes les directions.
- Orthotrope: propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- Anisotrope : les propriétés sont différentes selon les différentes directions.

Les matériaux composites sont répartis en deux familles :

- 1) Les GD (grandes diffusion) représentent 95% des composites utilisés. C'est en général des plastiques armés ou de plusieurs renforts, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes, les principaux constituants de bases sont les résines polyptères (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des couts voisins.

2) Les HP (haute performance), principalement utilisés dans l'aéronautique, sont d'un coût élevé, les renforts sont plutôt des fibres longues, le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux [7].

II.3. LES CONSTITUANTS DES MATÉRIEAUX COMPOSITES

II.3.1. Renfort

C'est le principal porteur constitutif dans le composite (forme, volume). Il confère aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont des propriétés mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une facilité de mise en œuvre, un faible coût. [7]

En fonction de leur utilisation, les renforts peuvent être d'origines diverses comme il est indiquée sur la figure suivante :

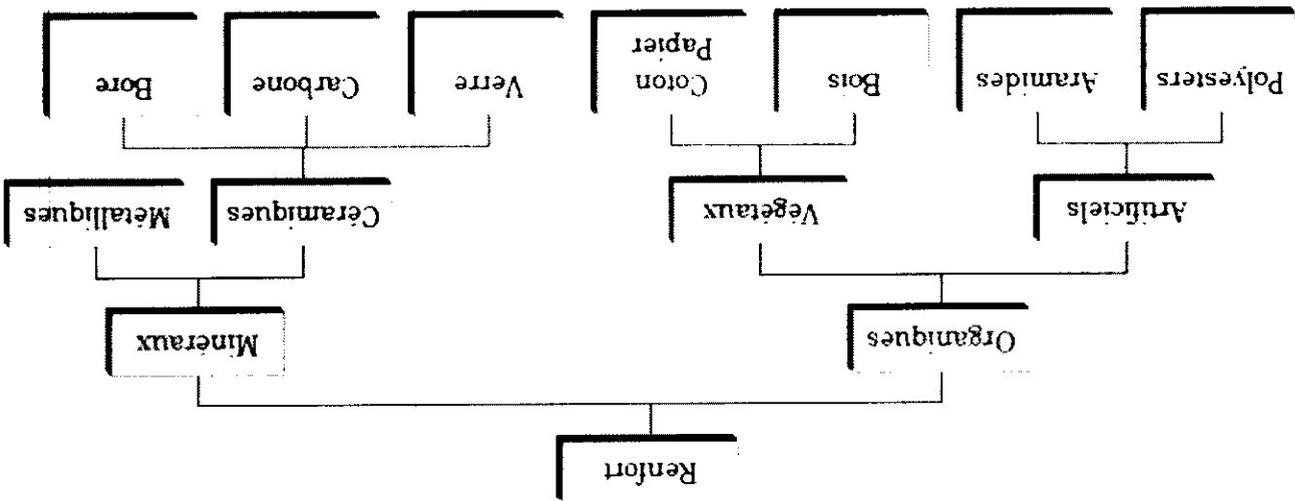


Figure II.01 : Les origines des renforts

La forme du renfort est fonction de l'application et du volume des pièces à réaliser, elle permet de distinguer deux grandes familles :

- Renfort en fibres discontinues.
- Renfort continu.

Ces renforts ont le rôle d'assurer la bonne tenue mécanique des composites et sont disposés au sein du matériau en fonction des propriétés recherchées. Pour créer une structure résistante adaptée aux contraintes mécaniques, il existe plusieurs architectures de renforts : unidirectionnelle (nappes ou roving), bidirectionnelle (tissus ou complexes 2D), tridimensionnelle (fibres orientées suivant trois directions) [4].

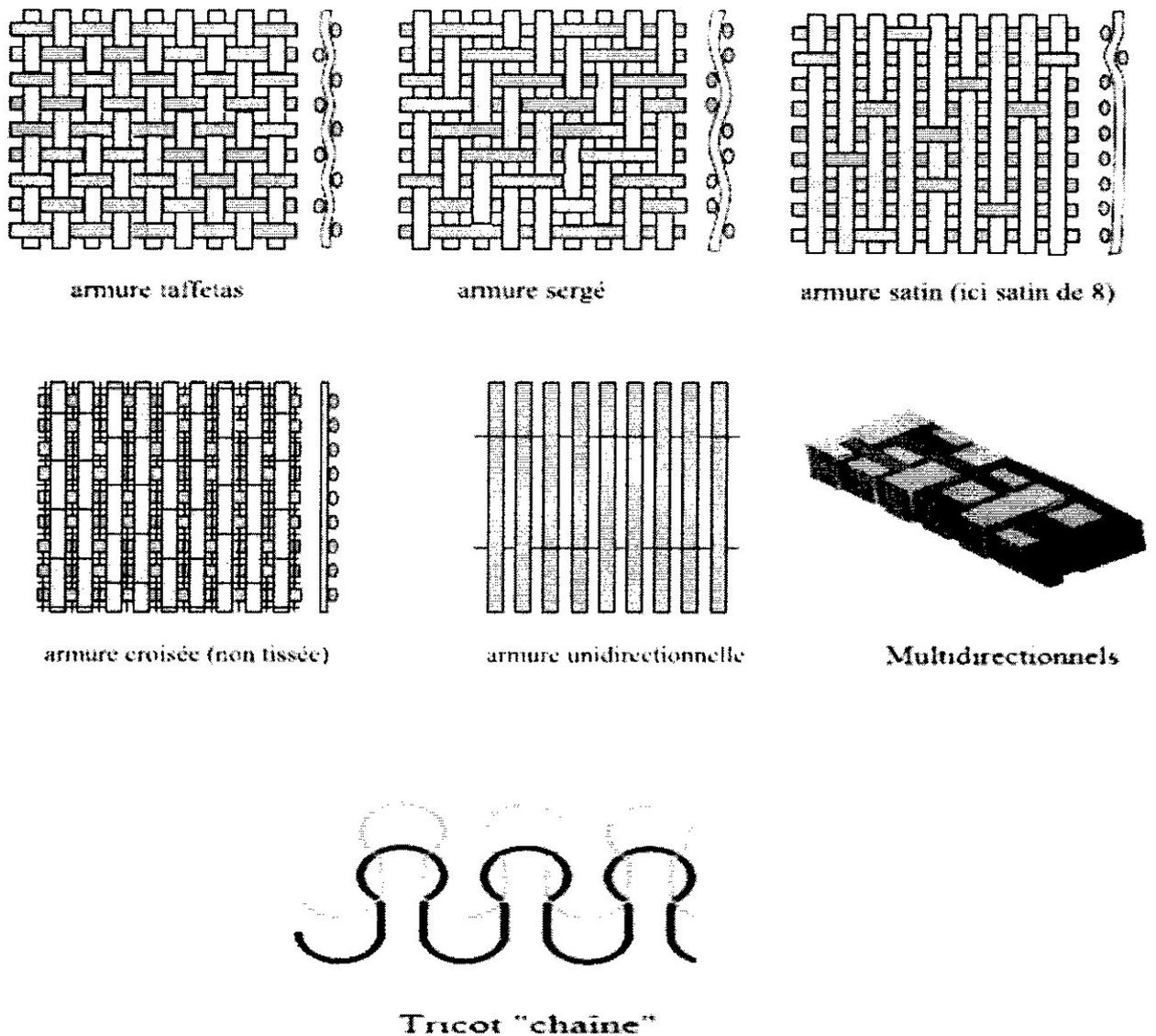


Figure II.02 : Différentes formes de renforts continus [4]

II.3.2. Matrice

La matrice a pour principal but de transmettre les efforts mécaniques au renfort. Elle assure aussi la protection du renfort vis-à-vis des diverses conditions environnementales. Elle permet en outre de donner la forme voulue au produit réalisé.

La matrice est constituée de résine mélangé, pour améliorer ses caractéristiques, a' une charge qui facilite aussi la mise en œuvre et diminue le cout et diminue de la production .le mélange est considéré mécaniquement comme une phase homogène, et nous obtenons ainsi un matériau composite formé d'un renfort et d'une matrice.

Le rôle de la matrice est d'assurer le lien entre les fibres et de transmettre les sollicitations. Elle assure la résistance du matériau dans le sens transverse du renfort, ainsi qu'une protection physico-chimique des fibres contre les agents nocifs de l'environnement. De plus elle conditionne directement la tenue thermique, et la résistance à la compression et au cisaillement inter-laminaire.

Les résines utilisées doivent être assez déformables et doivent présenter une bonne compatibilité avec les fibres. Elles doivent également avoir une masse volumique faible de manière à conserver au matériau composite des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. Il existe deux grandes familles de résines polymériques, soient les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables. [22]

II.3.3. Interface

Au cours de l'élaboration du composite il se produit une interaction physico-chimique entre la matrice et la surface de la fibre. Cette interface 'fibre matrice' conditionne largement la résistance globale du matériau composite, notamment, la résistance au cisaillement interlaminaire, la résistance à la corrosion et au vieillissement, et la tenue en fatigue et aux chocs.

La qualité et le type de l'interface dépendent essentiellement de la nature et de la morphologique du renfort et de la matrice, de la nature de l'agent de couplage ou de l'ensimage de la fibre et des conditions de la même mise en œuvre. [22]

II.4. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE MATERIAUX COMPOSITES

II.4.1. Avantages

- Formes géométriques complexes.
- Résistant à la fatigue.
- Résistance et rigidité directionnelles.
- Résistance/poids et rigidité/poids intéressants.
- Résistant à la corrosion.
- Stabilité dimensionnelle avec la température possible.
- Perméable aux ondes radar (fibre de verre).

II.4 .2. Inconvénients

- Sensible à la chaleur et l'humidité.
- Sensible aux impacts.
- Durée de vie limitée du matériau brut.
- Ateliers à environnement contrôlé.
- Outillage particulier.
- Cout élevé de la matière première.
- Exige beaucoup d'essais – déterminer les propriétés admissibles.
- Processus de fabrication/inspection complexe.
- Carbone génère de la corrosion galvanique.

II.5. L'ARCHITECTURE DES MATERIAUX COMPOSITES

II.5.1. Les Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement) à fibres tissées à fibres courtes.[7]



Figure II.03 : Pli unidirectionnel

II.5.2. Les Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié [7].

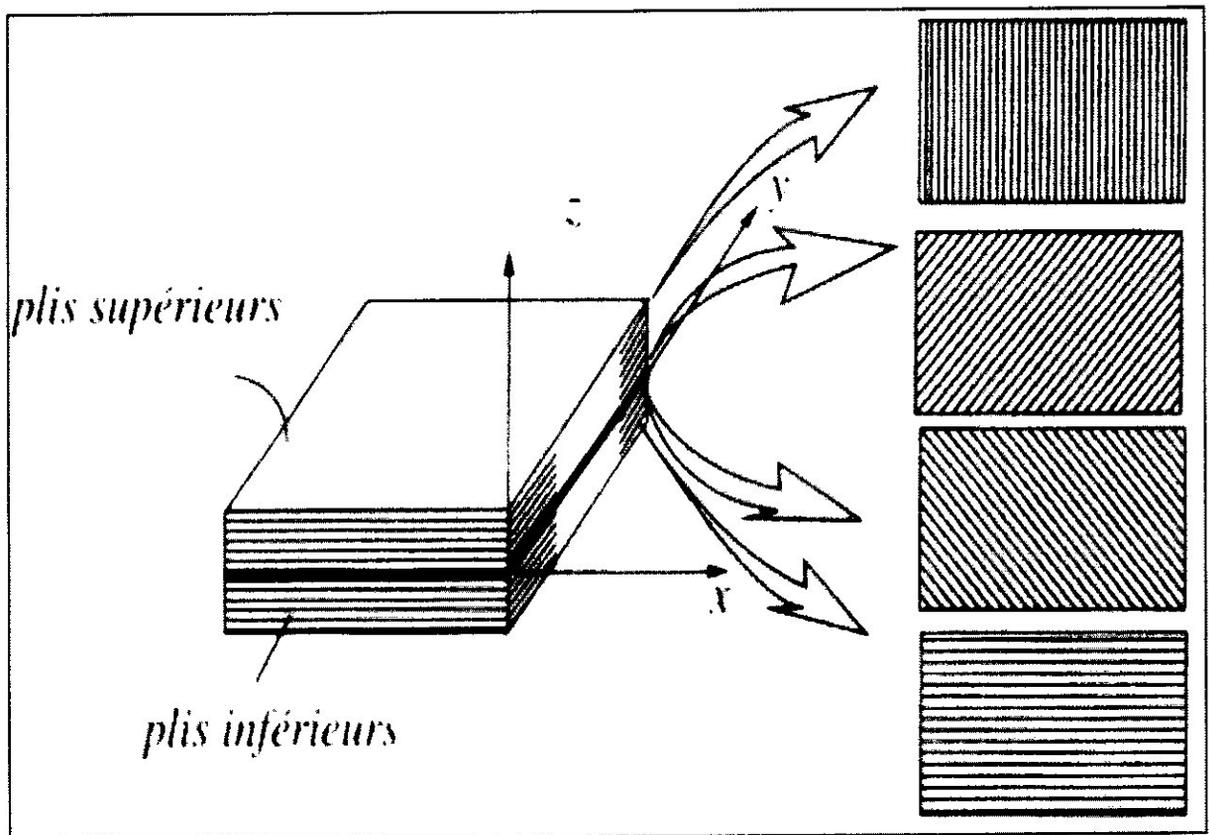


Figure II.04: Schéma représentatif d'un stratifié multicouches

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

➤ **Exemple**

Un stratifié possédant l'empilement (0, +45, +90, -45) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0°, -45°, 90° et +45°, l'orientation 0° coïncidant avec l'axe des abscisses du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

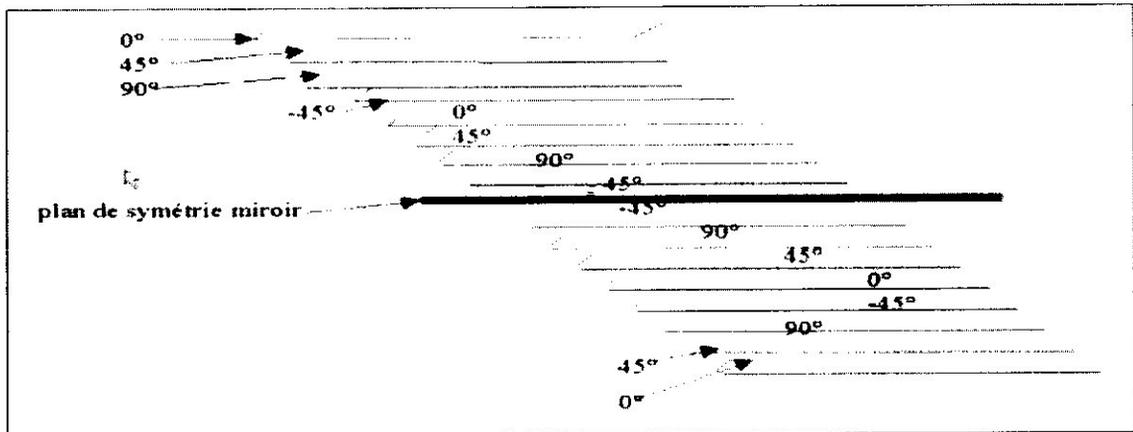


Figure II.05 : Exemple de représentation d'un stratifié

II.5.3. Les sandwich

Matériaux composés de deux semelles (coupeaux) de grande rigidité et d'épaisseur enveloppant une âme (ou cour) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.[7]

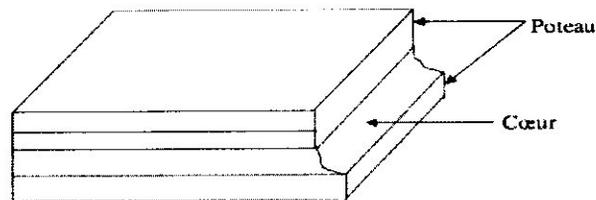


Figure II.06: Schéma d'un sandwich

II.6. L'UTILISATION DES MATERIAUX COMPOSITES

II.6.1. Applications automobiles



Figure II.07 : Suspensions pour les taxis



Figure II.08 : Suspensions pour camions

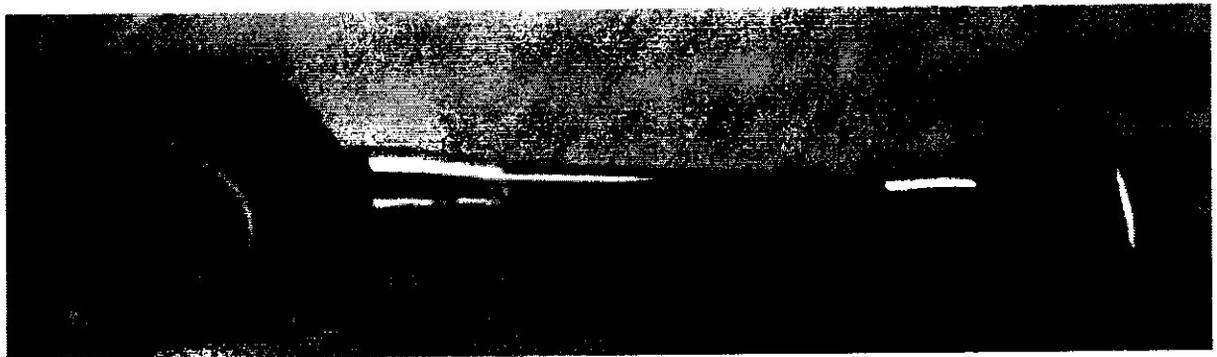


Figure II.09 : Barre anti-roulis en carbone et acier

II.6.2. Applications navales

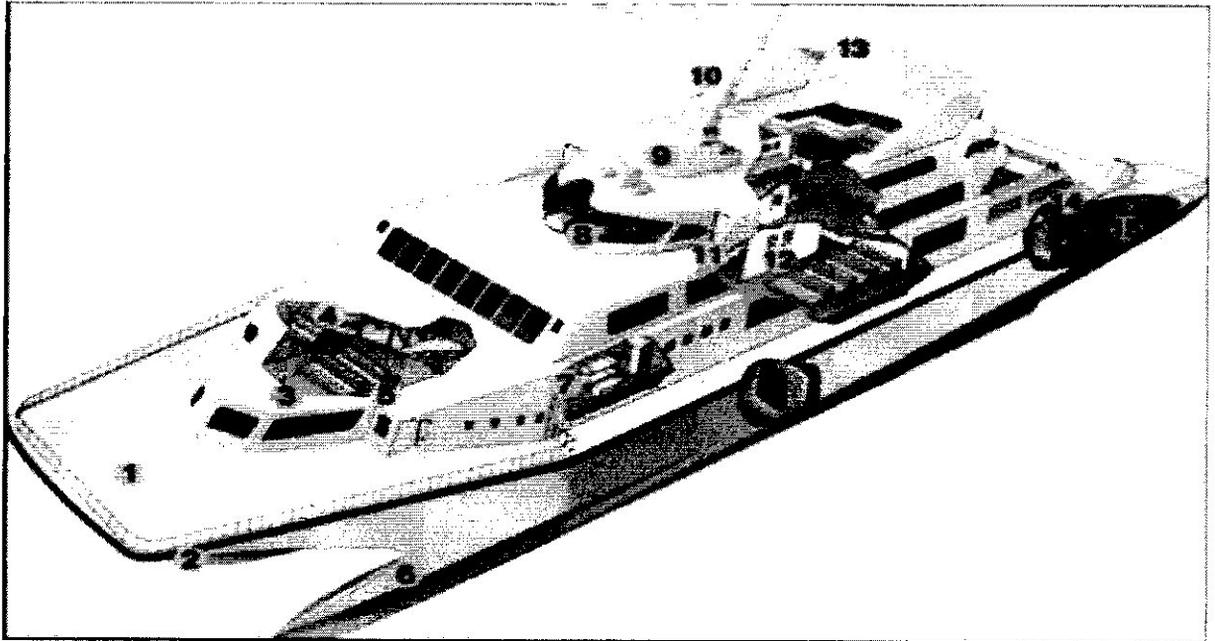


Figure II.10 : Coques sandwich et Structures en composite

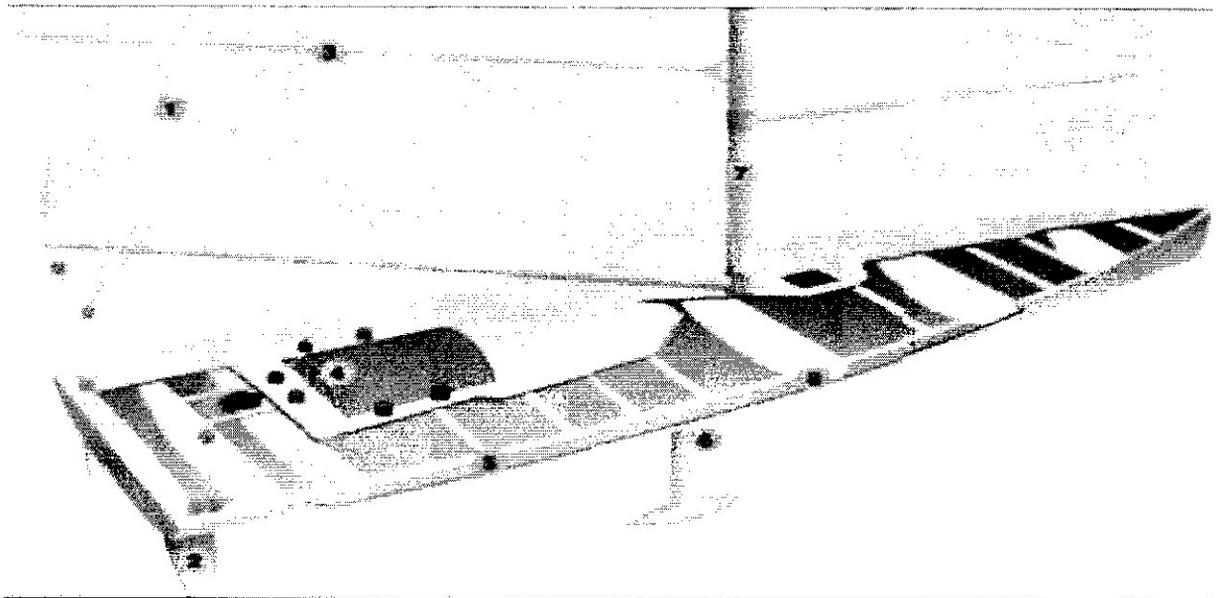


Figure II.11 : Mat et voiles en carbone

II.6.3. Applications aéronautiques

II.6.3.1. Les pièces composites dans les avions

On utilise aujourd'hui une grande variété en matériaux composites dans les avions. Suivant le rôle plus ou moins important qu'elles soient amenées à tenir pour assurer l'intégrité de l'appareil, on peut citer.

- Des pièces de structures primaires, c'est-à-dire dont la bonne tenue est vitale. Pour l'appareil :
 - Caissons de la voilure.
 - Caissons d'empennage.
 - Caissons de fuselage.
- Des gouvernes :
 - Ailerons.
 - Volets de direction de profondeur.
 - Volets hypersustentateurs.
 - Spoilers : aérofreins.
- L'habillage extérieur :
 - Carénages.
 - Portes de soutes.
 - Portes de trains d'atterrissage.
 - Radomes.
- L'habillage intérieur :
 - Planchers.
 - Cloisons.
- Portes. etc.

II.6.3.2. Les gros porteurs

Le tableau suivant donne une idée de l'évolution de l'utilisation des composites sur les avions Airbus [32].

Tableau II.1 : L'évolution de l'utilisation des composites sur les avions Airbus.

Appareils	Alliages Al	Alliages Ti	Composites	Aciers	Autres
A310	67%	5%	10%	13%	5%
A320	58%	6%	20%	13%	3%
A330/340	63%	6.5%	17%	7.5%	3%
A380	36%	3%	53%	5%	3%

➤ Exemple

Sur Airbus A330.

CFRP : Carbon fiber reinforced polymer

AFRP : Aramid fiber reinforced polymer

GFRP : Glass fiber reinforced plastic

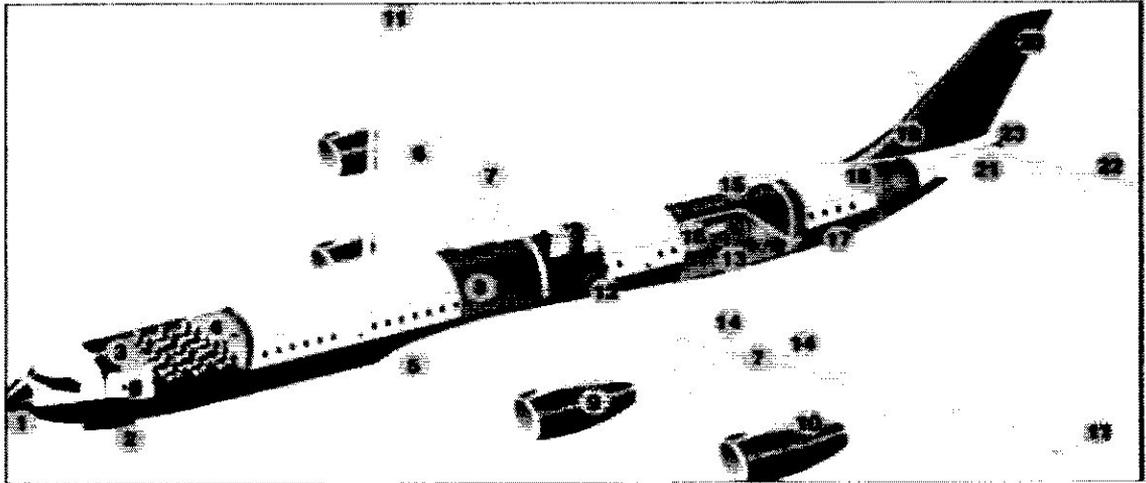


Figure II.14 :Plusieurs parties structurales et aérodynamiques (A380)

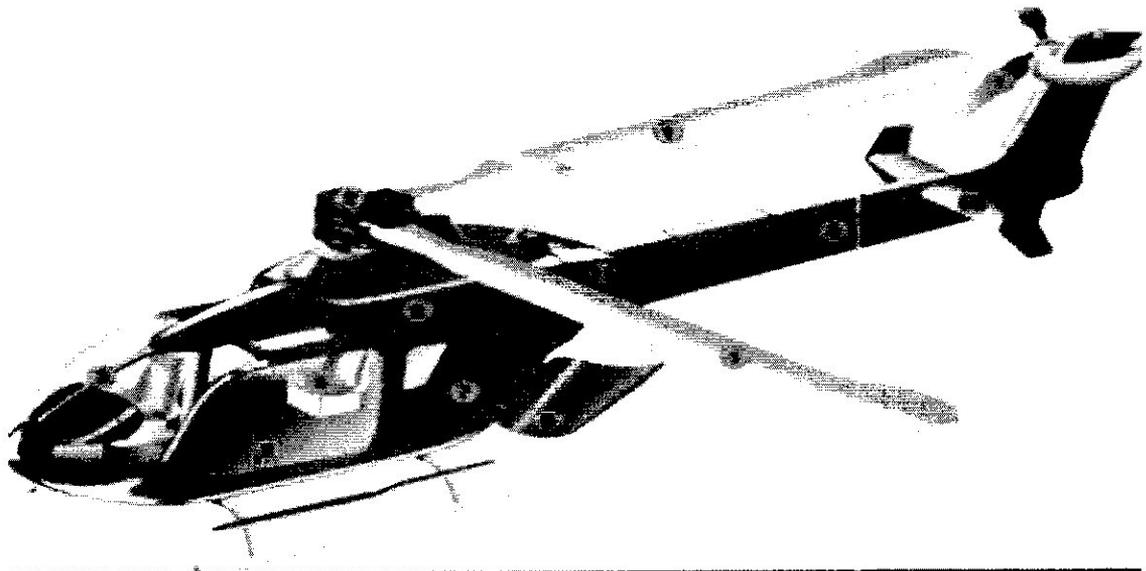


Figure II.15 :Plusieurs parties structurales d'un hélicoptère

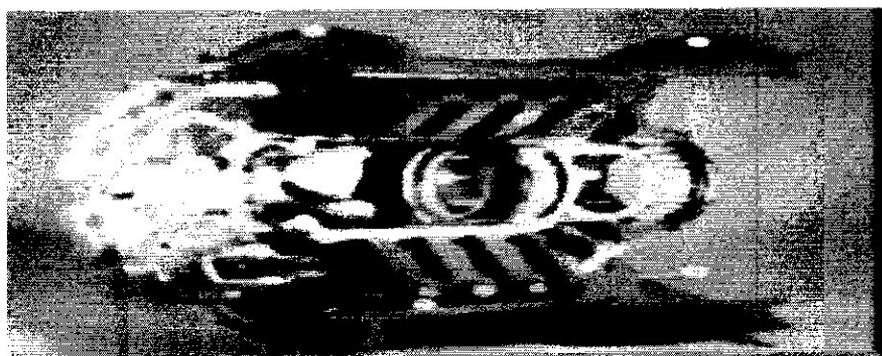


Figure II.16 : Freins en carbone

II.6.4. Applications aérospatiales (satellites)

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions à la température pouvant varier entre -180°C lorsque le satellite est dans l'ombre, et $+160^{\circ}\text{C}$ lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique, de part la valeur négative du coefficient de dilatation thermique des fibres de carbone et la valeur positive du coefficient de dilatation thermique de la matrice, peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure. La stabilité géométrique de la structure est apportée par sa raideur globale.

L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement [6].

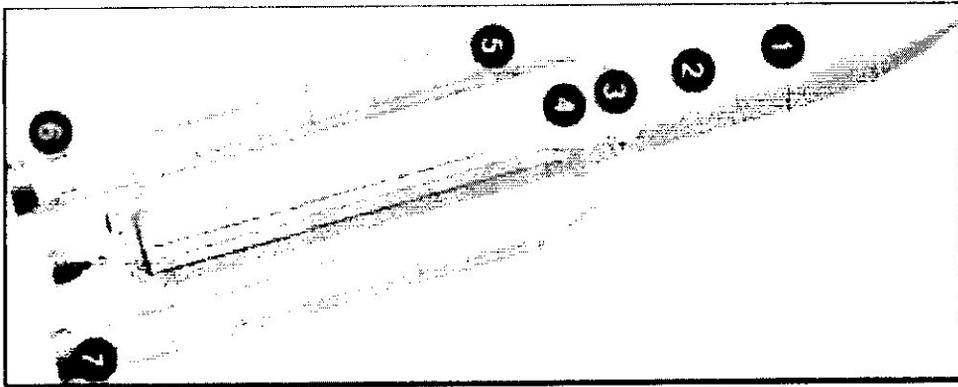


Figure II.17 : Structures de satellites et lanceurs (sandwich Al-C, stratifiés en C et B)

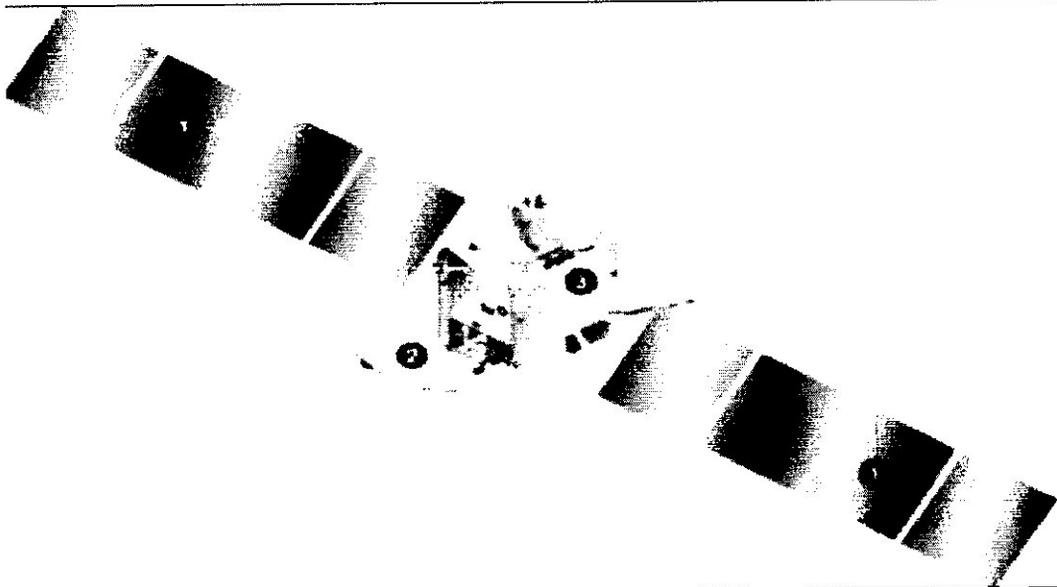


Figure II.18 : Protections thermiques

II.6.5. Les Produits militaires

Pour les missiles, le principal avantage pour le constructeur d'utiliser des matériaux composites est de pouvoir proposer à ces clients des produits associant performance et légèreté. Par contre l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage des missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir.

L'utilisation de matériaux composites sur les ailettes de part leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.[21]

II.7. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis d'avoir un aperçu global sur les matériaux composites .Nous avons vu leur définitions, leur propriétés, et leur domaine d'application.

Ces domaines se développent continuellement avec le temps et ouvre les portes de l'innovation et du développement.

A decorative border with intricate floral and scrollwork patterns, featuring four small flower motifs at the corners, framing the central text.

CHAPITRE III :
COMPORTEMENT MECANIQUE DES
STRATIFIES

III.1.INTRODUCTION

Le Comportement mécanique consiste à développer les équations fondamentales des plaques stratifiées. La relation contraintes déformations diffère de celle des plaques homogènes du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes et en courbures. Par contre, les hypothèses rapportées aux plaques homogènes restent valables aux plaques stratifiées, et sont les suivantes :

- Les contraintes normales à la surface moyenne sont négligeables par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes. $\sigma_z \approx 0$
- La normale à la surface moyenne avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne après déformation. Ceci revient à la prise en compte de cisaillement transverse.
- Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque.
- Les différentes couches du stratifié restent parfaitement collées [33].

III.2.CHAMP DES DEPLACEMENTS

Considérons une plaque stratifiée rectangulaire constituée de n couches de même matériau et d'orientations des fibres différentes. On définit un système de référence (x, y, z) situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe z correspond à la direction suivant l'épaisseur. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont indiquées sur la (Figure III.01).

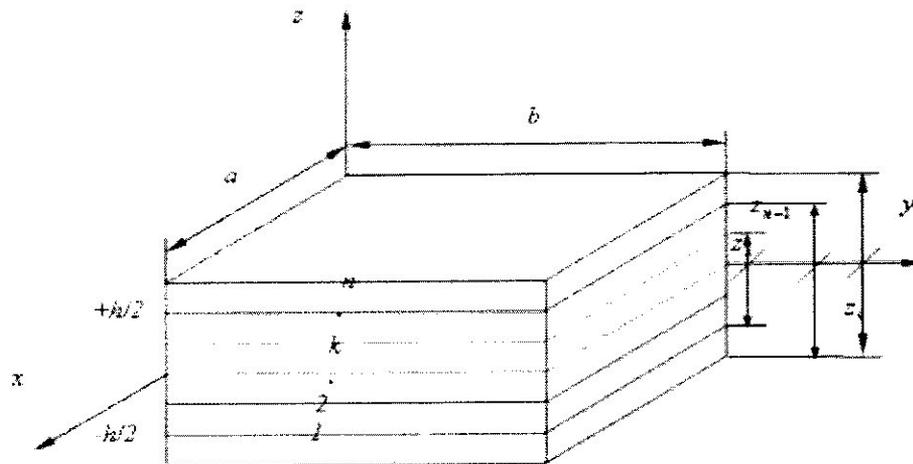


Figure III.01: Schéma représentatif d'une plaque stratifiée

Le champ des déplacements d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de la plaque en présence du cisaillement transverse est approché par un polynôme linéaire en z à coefficients en (x, y) de la forme suivante [11] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, 0, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, 0, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.01})$$

Où $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z .

$\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0$: sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z , d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

θ_x, θ_y : sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes x, y .

Cette forme répond aux conditions de compatibilité des déformations et permet de prendre en compte le couplage entre les déformations planes et de courbures.

III.3.LES CONDITIONS DE COMPATILITE

Etant donné le tenseur des déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{III.02})$$

Les éléments de la matrice $[\varepsilon]$ sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.03})$$

Où $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont respectivement les composantes des déplacements suivant x, y, z .

Le champ des déplacements est obtenu par intégration des équations (III.03). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes (u, v, w) du déplacement.

Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial z \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{III.04}$$

Ces expressions constituent les six relations de compatibilité.

III.4.CHAMP DES DEFORMATIONS

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (III.03) et s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z k_x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z k_y \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy0} + z k_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{III.05}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
 k_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{III.06}$$

III.5.RELATION CONTRAINTES –DEFORMATION

La loi de Hooke généralisée permet, pour une plaque composite stratifiée, d’écrire la relation entre les contraintes et les déformations. Il est nécessaire d’exprimer cette relation pour chaque pli k à cause de la discontinuité des contraintes inter laminaires. Par souci de simplification, on définit un système d’axes principal (local) (1,2,3) dont l’axe (1) correspond à la direction longitudinale des fibres (Figure.III.02).

- 1. Direction « 1 » parallèle aux fibres.
- 2. Direction « 2 » perpendiculaire aux fibres
- 3. Direction « 3 » orthogonale au plan de la couche

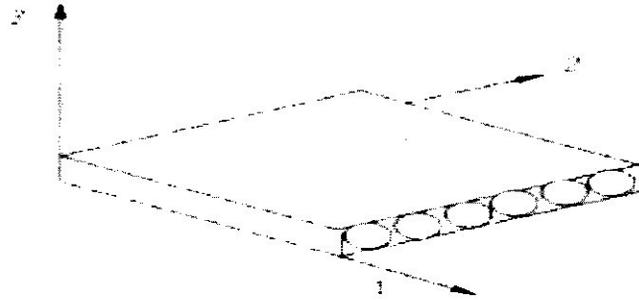


Figure III.02 : Directions principales dans un pli

La relation contraintes-déformations par rapport à ce système d’axe s’écrit [12] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \tag{III.07}$$

Où :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \tag{III.08}$$

$$Q_{33} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

Avec :

- E_1 : Module d’élasticité longitudinale.
- E_2 : Module d’élasticité transversale.
- G_{12} :Module de cisaillement longitudinal.
- G_{13}, G_{23} :Modules de cisaillement transversal.
- ν_{12}, ν_{21} :Coefficients de Poisson.

relation (III.07) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma\}_{123}^k = [Q]\{\varepsilon\}_{123}^k \quad (\text{III.09})$$

Généralement, dans un stratifié, la direction des fibres est décalée d'un pli à un autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (III.07) par rapport au système d'axes global (x, y, z), cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations [Annexe A].

Soit donc pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [T]\{\sigma\}_{123}^k \quad (\text{III.10})$$

Où [T] est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

θ : Est l'angle que font les axes 1, 2 avec x, y respectivement.

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (x, y, z) s'écrit :

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^k = [T']\{\varepsilon\}_{123}^k \quad (\text{III.12})$$

Où [T'] est la matrice de changement de base des déformations, elle est donnée par :

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & -2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Il est à noter que le changement de base est effectué en faisant une rotation autour de la direction 3(Figure III.03).

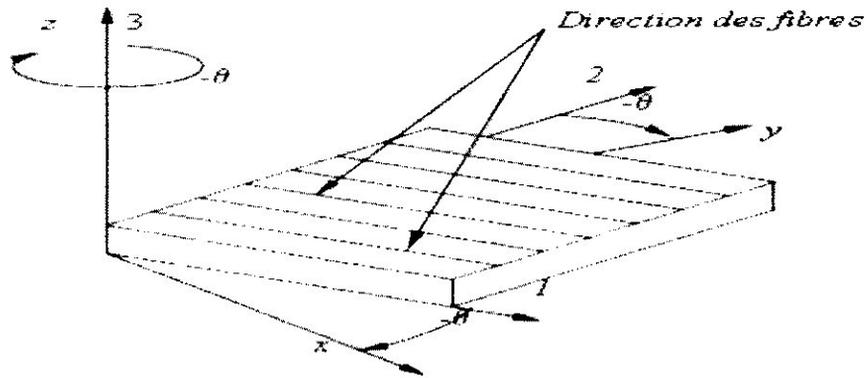


Figure III.03 : Changement du repère dans un pli

Par substitution de (III.10) et (III.12) dans (III.09), la relation contraintes déformations devient:

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [\bar{Q}]\{\varepsilon\}_{xyz}^k \quad (\text{III.14})$$

Où $[\bar{Q}]$ est la matrice de rigidité du pli k exprimée dans le repère du stratifié (x, y, z) :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T'] \quad (\text{III.15})$$

La relation (III.14) s'écrit sous la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (\text{III.16})$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\bar{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux et de l'angle θ :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})sc \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Avec:

$$c = \cos(\theta) \text{ et } s = \sin(\theta)$$

III.6.RESULTANTES ET MOMENTS

La discontinuité des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié conduit à exprimer la relation contrainte-déformation en termes des résultantes et moments : Les résultantes en membrane sont définies par [13] :

$$\vec{N}(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (\text{III.18})$$

De même, les résultantes en cisaillement sont définies par [5] :

$$\vec{Q}(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \quad (\text{III.19})$$

Les moments de flexion et de torsion sont donnés par [11] :

$$\vec{M}(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (\text{III.20})$$

Où n représente le nombre de couches constituant le stratifié.

Il faut bien noter que les relations (III.18), (III.19) et (III.20) sont définies par unité de longueur du stratifié.

III.7.EQUATION CONSTITUVE

La combinaison des relations (III.16) à (III.20) conduit à formuler l'équation constitutive du stratifié qui est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (III.22)$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (III.23)$$

Les coefficients de la matrice d'extension [A], la matrice de couplage [B] et la matrice de flexion [D] sont définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (III.24)$$

Et ceux de la matrice de cisaillement transverse [F] sont définis par :

$$(F_{ij}) = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (III.25)$$

Où α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement, permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse.

La détermination de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches [11]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs respectivement égaux à 2/3, 5/6 et $\pi^2/12$. Il a été remarqué que les résultats obtenus avec des valeurs de 5/6 sont les plus satisfaisants.

III.8. POUTRE COMPOSITE

Pour le cas de la poutre, c'est un cas particulier de la plaque parce que la largeur est très petite par rapport à la longueur $L_y \ll L_x$

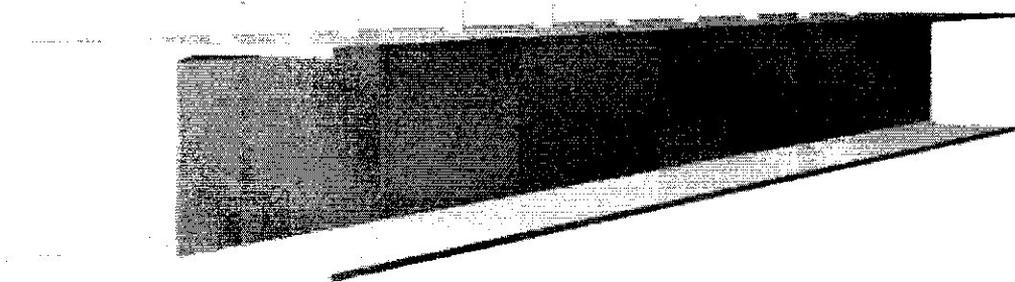


Figure III.04 : Poutre en forme I

Les coefficients de la matrice d'extension [A], la matrice de couplage [B] et la matrice de flexion [D] sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k, \quad i, j = 1, 2, 6 \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k, \quad i, j = 1, 2, 6 \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k, \quad i, j = 1, 2, 6
 \end{aligned} \tag{III. 26}$$

➤ Détermination de la rigidité de flexion (EI).

$$EI = b \left(D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) \tag{III. 27}$$

➤ Détermination de la rigidité de torsion (GJ).

$$GJ = 4b \left(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) \tag{III. 28}$$

➤ Détermination de la rigidité de couplage (k).

$$k = 2b \left(D_{26} - \frac{D_{12} D_{16}}{D_{11}} \right) \tag{III. 29}$$

Avec b est la largeur du stratifié

III.9.L'EQUATION D'EQUILIBRE DES PLAQUES MOYENNEMENT EPAISSE

Dans la théorie des plaques moyennement épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. Si θ_x et θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe z, ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen[7] , on a donc

$$\begin{aligned}
 \theta_x &\neq -\frac{\partial \omega}{\partial X} \\
 \theta_y &\neq -\frac{\partial \omega}{\partial Y}
 \end{aligned} \tag{III. 30}$$

Les équations d'équilibre des plaques moyennement épaisses par l'utilisation de l'élasticité tridimensionnelle :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + q_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{III. 31})$$

L'intégration de l'équation d'équilibre suivant z donne :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{III.32.a})$$

En multipliant les deux premières équations d'équilibre par z et en intégrant sur l'épaisseur de la plaque.

On trouve les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = \frac{ph^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{ph^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{III. 32. b})$$

III.9.1.LES PLAQUES ISOTROPES

De l'équation (III.21) :

Les moments :

$$\begin{aligned} \bullet M_x &= D(k_x + \nu k_y) \\ \bullet M_y &= D(k_y + \nu k_x) \\ \bullet M_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} D k_{xy} \end{aligned} \quad (\text{III. 33})$$

Et les efforts tranchants :

$$\begin{aligned} \bullet Q_x &= \alpha^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \\ \bullet Q_y &= \alpha^2 Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \end{aligned} \quad (\text{III. 34})$$

Dans les équations d'équilibre (III. 32) remplaçons les moments et les efforts Q_x et Q_y par leur expressions données ,on obtient alors trois nouvelles équations :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \theta_x + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] - \alpha^2 Gh \left(\theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{ph^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \bullet \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \theta_y + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] - \alpha^2 Gh \left(\theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{ph^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \bullet \alpha^2 Gh \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 35})$$

III.9.2.les plaques composites

Dans cette partie les effort et les moments sont données par l'équation constitutive (III.21). Leurs insertions dans les équations d'équilibre de la plaque(III. 32) donnent :

$$D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (D_{16} + D_{12} + D_{26}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + (D_{16} + D_{12} + D_{26}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - F_{44} \theta_y - F_{45} \theta_x - F_{45} \frac{\partial w}{\partial x} - F_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III. 36})$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (D_{16} + D_{12} + D_{26}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + (D_{16} + D_{12} + D_{26}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - F_{45} \theta_y - F_{55} \theta_x - F_{55} \frac{\partial w}{\partial x} - F_{45} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{p h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III. 37})$$

$$F_{45} \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + F_{45} \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + F_{45} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + F_{55} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + F_{45} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + F_{44} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + (F_{44} + F_{55}) \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} + q - p h \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III. 38})$$

III.10.LES EQUATIONS D'EQUILIBRES DES POUTRES COMPOSITES

Plusieurs recherches ont conduit à l'utilisation de couplage flexion –torsion pour optimiser les caractéristiques vibratoires de poutres anisotropes composites. Les bénéfices de l'utilisation des matériaux composites pour l'optimisation sont dues à leurs rigidité directionnelles et leurs bonnes propriétés, le rapport rigidité/légereté est élevé et l'habilité de coupler les déplacements de flexion et de torsion .L'effet de couplage de rigidité flexion-torsion en vibration d'une poutre encastree est examiné par Weisshaar et Foist.

La méthode de rigidité dynamique DSM est utilisée pour réaliser l'analyse vibratoire d'une poutre composite. Une matrice de rigidité dynamique pour chaque élément est obtenue par la solution analytique exacte des équations différentielle de mouvements suivantes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) + k \frac{\partial \theta^3}{\partial x^3} + m \frac{\partial w^2}{\partial t^2} - S \frac{\partial \theta^2}{\partial t^2} = L(x.t)$$

$$GJ \frac{\partial \theta^2}{\partial x^2} + k \frac{\partial w^3}{\partial x^3} + s \frac{\partial w^2}{\partial t^2} - I_\theta \frac{\partial \theta^2}{\partial t^2} = M(x.t) \quad (\text{III. 39})$$

Ou EI , GJ et k sont la rigidité de flexion, la torsion et le couplage de rigidité flexion-torsion respectivement, m et I sont la masse par unité de longueur, le moment statique, et le moment d'inertie polaire.

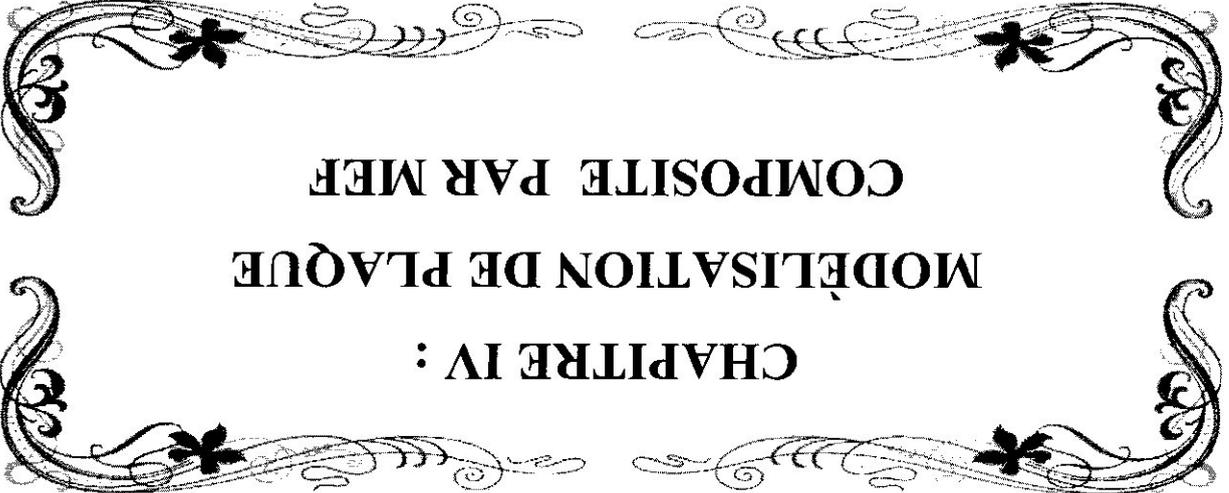
Les fréquences et les modes propres sont déterminés par l'algorithme de Wittrick et Williams.

La modélisation en poutre est insuffisante pour la modélisation des problèmes complexes (l'aéroélasticité). Elle est applicable pour le calcul du flottement binaire où on s'intéresse seulement au calcul du premier mode de flexion et du premier mode de torsion.

III.11. CONCLUSION

L'étude dynamique des plaques et des poutres peuvent être obtenue par résolution des équations d'équilibres correspondantes, citées ci-dessus, en utilisant la méthode d'intégration analytique. Cependant la solution n'est possible que pour les formes simples des structures ainsi que pour des conditions aux limites simples

Pour rendre l'étude dynamique possible pour les configurations complexes, nous allons utiliser la MEF qui nécessite la connaissance de la loi constitutive du matériau, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

A decorative border with intricate floral and scrollwork patterns, featuring four small flower motifs at the corners.

CHAPITRE IV :
MODÉLISATION DE PLAQUE
COMPOSITE PAR MEF

IV.1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est couramment utilisée et elle est appliquée dans divers domaines scientifiques : en analyse des structures, en constructions aéronautiques et navales, en génie mécanique, en génie civil, etc. Elle permet de ramener les problèmes des milieux continus à des problèmes discrets ayant un nombre fini de paramètres inconnus (forces, déplacements) qui sont déterminés par application de critères énergétiques. Le principe consiste à discrétiser une structure en un nombre fini d'éléments interconnectés entre eux par des nœuds, chaque nœud est repéré par ses coordonnées par rapport à un système d'axe[25].

IV.2. LES PLAQUES MINCES

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'éclatement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'éclatement est $h/L < 0.05$ où h a et b représentent les dimensions dans le plan xy et h est l'épaisseur de la plaque[15].

IV.2.1. Discrétisation

Après la déformation de la plaque, la normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne (Figure IV.01).

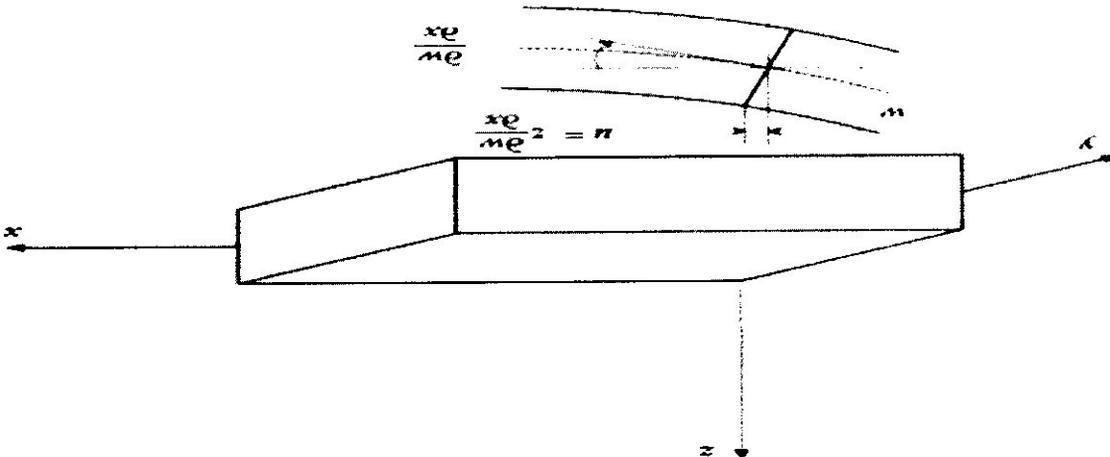


Figure IV.01: Equilibre de l'élément de plaque

$$\{W(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (IV.01)$$

(IV.02)

$$\{u\} = -z \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

Les déformations associées à ces déplacements sont données comme suit :

(IV.03)

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

Les déformations sont alors:

(IV.04)

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \end{Bmatrix} \{u\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

On substitue l'équation (IV.01) dans l'équation (IV.02):

(IV.05)

$$\{e\} = -z \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\partial x}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial v} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = -z [Z] \{W\}$$

Où [Z] est l'opérateur dérivateur.

Les relations entre les fonctions des déplacements et les degrés de liberté

élémentaires sont données par :

(IV.06)

$$\{w\} = \{N^w\} \{q^e\}, \quad \{\theta_x\} = \{N^{\theta_x}\} \{q^e\}, \quad \{\theta_y\} = \{N^{\theta_y}\} \{q^e\}$$

Avec :

(IV.07)

$$\{N^w\} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}] \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial N^w} \right\} = \{N^{\theta_x}\}, \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial N^w} \right\} = \{N^{\theta_y}\}$$

Donc :

(IV.08)

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{N^w\} \\ \{N^{\theta_x}\} \\ \{N^{\theta_y}\} \end{Bmatrix} \{q^e\} = [N] \{q^e\}$$

On injecte l'équation (V.09) dans l'équation (V.03):

$$\{ \epsilon \} = -z[Z][N]\{q_e\} = [B]\{q_e\} \quad (IV.09)$$

D'où :

$$[B] = -z[Z][N] \quad (IV.10)$$

IV.2.2.Calcul des matrices [B] et [N]

Pour un élément rectangulaire en flexion sans cisaillement transversal, dans le cas de la flexion des plaques où les flèches sont petites, l'état des déplacements en chaque point de l'élément peut-être représentés par trois composantes (Figure IV.02)

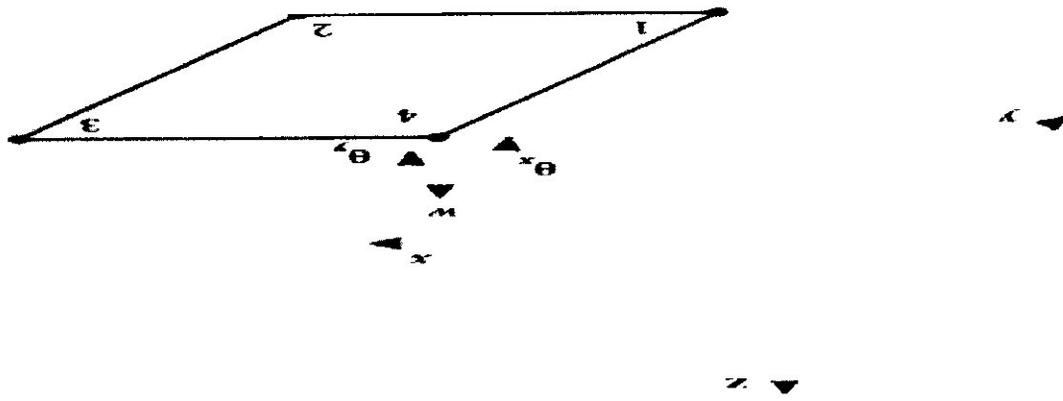


Figure IV.02 : Elément rectangulaire à 12 degrés de liberté

Nous avons 12 degrés de liberté pour l'élément rectangulaire de plaque, il est nécessaire de choisir seulement les 12 termes les plus appropriés pour $w(y,x)$ [16]:

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8yx^2 + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}yx^3 + a_{12}xy^3$$

La fonction de déplacement donne les expressions suivantes pour les rotations :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + 2a_8yx + a_9y^2 + 3a_{11}yx^2 + a_{12}y^3 \quad (IV.12)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 3a_{12}xy^2 \quad (IV.13)$$

$$\{W(x,y)\} = [X]\{a\} \quad (IV.14)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & y^2x^2 & yx^2 & 2yx^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2yx & y^2 & 0 & 3yx^2 & y^3 & xy^3 & 3xy^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 3xy^2 & 3xy^2 \end{bmatrix} \quad (IV.15)$$

$$\{a\} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12}]^T \quad (IV.16)$$

L'évaluation de l'équation précédente (V.14) pour les quatre nœuds de plaque donne :

IV.2.3.Détermination des matrices élémentaires (masse et rigidité)

Pour l'étude dynamique ou le calcul des modes propres ainsi que la réponse d'une structure à une excitation donnée (réponse transitoire et harmonique), les matrices de masse et de rigidité sont déterminées par la méthode énergétique (la méthode de l'énergie cinétique pour la matrice masse et celle de l'énergie potentielle pour la matrice de rigidité).

IV.2.3.1.Matrice de raideur élémentaire

L'énergie potentielle est donnée par :

(IV.24)
$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

La relation entre la contrainte et la déformation pour un état de déformation plane

est donnée par :

(IV.25)
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Où :

(IV.26)
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Avec la relation entre la déformation et le déplacement est donnée par :

(IV.27)
$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = [B] \{q^e\}$$

En remplaçant les équations (IV.26) et (IV.27) dans celle (IV.25), l'expression de

l'énergie potentielle devient :

(IV.28)
$$U = \frac{1}{2} \int_V ([B] \{q^e\})^T ([D] [B] \{q^e\}) dV = \frac{1}{2} \{q^e\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{q^e\} =$$

D' où la matrice élémentaire de la raideur est identifier à :

(IV.29)
$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = h \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega^e$$

IV.2.3.2.Matrice masse élémentaire

D'après l'expression de l'énergie cinétique on a :

(IV.30)
$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{w\}^T \{w\} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (\{N^w\} \{q^e\})^T (\{N^w\} \{q^e\}) dV = \frac{1}{2} \{q^e\}^T \left(\int_V \rho \{N^w\} \{N^w\}^T dV \right) \{q^e\}$$

D' où la matrice masse élémentaire est identifier à :

$$[M_e] = \int_{h/2}^{\eta_e} \int_{h/2}^{\eta_e} \rho \{N_w\}_T \{N_w\} d\Omega_e dz = \rho h \int_{\Omega_e} \{N_w\}_T \{N_w\} d\Omega_e \quad (IV.31)$$

IV.3. LES PLAQUES MOYENNEMENT EPAISSES

On applique les relations qui vont suivre quand les rapports dimensions-épaisseur sont compris entre 4 et 20 ($0.05 < h/L < 0.25$) [15]. La prise en compte du cisaillement transverse revient à considérer que les points situés sur la normale au plan moyen de la plaque ne sont plus forcement sur cette même normale après déformation. Les déplacements horizontaux sont alors fonction des rotations $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$ mesurées par rapport à la normale au plan moyen non déformé, d' où :

$$\begin{aligned} u &= -z\theta_x(x, y) \\ v &= -z\theta_y(x, y) \end{aligned} \quad (IV.32)$$

Et le déplacement transversal est :

$$w = w(x, y) \quad (IV.33)$$

Les θ_x, θ_y sont les rotations du plan moyen autour des axes y et x respectivement.

D'après le champ des déformations des cisaillements transversales donnés comme

suit :

$$\{\epsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (IV.34)$$

Les rotations auront alors comme expressions :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (IV.35)$$

Cette situation peut être visualisée par la (Figure IV.03) présentant la cinématique de la poutre épaisse de Timochenko :

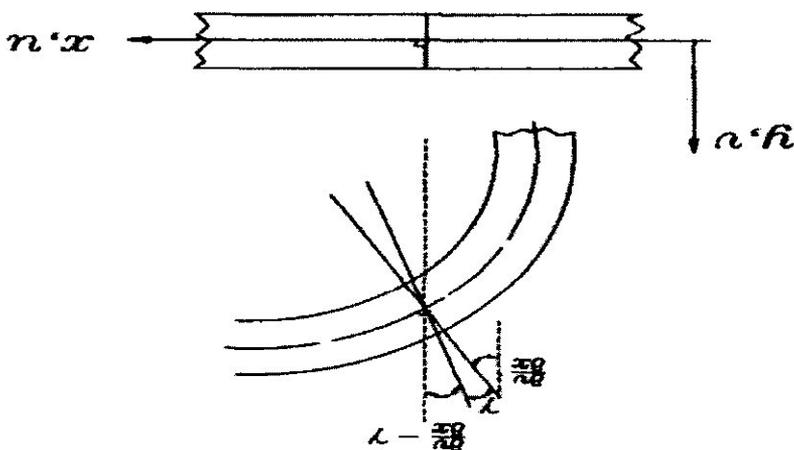


Figure IV.03 : Cinématique de la poutre Timochenko

Le déplacement transversal w et les rotations θ_x et θ_y sont indépendants, on utilise donc les mêmes fonctions d'interpolations [16] :

$$(IV.36) \quad w = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) w_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \theta_{yi}$$

Les fonctions d'interpolations $N_i(\xi, \eta)$ pour les quatre nœuds sont données par [19] :

$$(IV.37) \quad \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \end{aligned}$$

Ainsi, les déformations de flexion et de cisaillement peuvent être écrites respectivement sous les formes discrètes suivantes :

$$(IV.38) \quad \begin{aligned} \{\epsilon_b\} &= [B_b]\{q^e\} \\ \{\epsilon_s\} &= [B_s]\{q^e\} \end{aligned}$$

IV.3.1.CALCUL DES MATRICES [B_p] ET [B_s]

IV.3.1.1.La matrice [B_p]

Le champ de déformation est donné par la relation suivante :

$$(IV.39) \quad \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \right\} - z \left\{ \begin{matrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_x \theta_y + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{matrix} \right\}$$

Donc :

$$(IV.40) \quad \left\{ \epsilon_p \right\} = -z \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} \end{matrix} \right\} = -z [Z_p] \left\{ \theta \right\}_w$$

Alors

$$(IV.41) \quad \left\{ \epsilon_p \right\} = -z [Z_p] [N] \{q_e\} = [B_p] \{q_e\}$$

D'où, par identification :

$$(IV.42) \quad [B_p] = -z \left[\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]$$

En fin la matrice [B_p] pour la flexion est :

$$(IV.43) \quad [B_p] = -z \left[\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial N_1} & \frac{\partial x}{\partial N_2} & \frac{\partial x}{\partial N_3} & \frac{\partial x}{\partial N_4} \\ \frac{\partial y}{\partial N_1} & \frac{\partial y}{\partial N_2} & \frac{\partial y}{\partial N_3} & \frac{\partial y}{\partial N_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]$$

La matrice de rigidité $[K_e]$ est obtenue alors par intégration numérique de type Gauss. ||est le déterminant de la matrice jacobienne : $[[\xi, \eta]] [15] [18]$:

$$dx dy = ||d\xi d\eta \quad (IV.51)$$

Avec :

$$[K_e] = \frac{12}{h^3} \int_1^{-1} \int_1^{-1} [B_b]^T [D_b] [B_b] ||d\xi d\eta + \alpha h \int_1^{-1} \int_1^{-1} [B_s]^T [D_s] [B_s] ||d\xi d\eta \quad (IV.50)$$

Ou après un changement des variables [15] [18] :

$$[K_e] = \frac{12}{h^3} \int_{\Omega_e} [B_b]^T [D_b] [B_b] d\Omega_e + \alpha h \int_{\Omega_e} [B_s]^T [D_s] [B_s] d\Omega_e \quad (IV.49)$$

Et la matrice de la raideur élémentaire :

Avec $a=5/6$ Paramètre de correction pour la section apparente

$$U = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \int_{\Omega_e} [B_b]^T [D_b] [B_b] dz d\Omega_e \{q_e\} + \frac{z}{\alpha} \{q_e\}^T \int_{\Omega_e} [B_s]^T [D_s] [B_s] dz d\Omega_e \{q_e\} \quad (IV.48)$$

expression:

L'énergie potentielle de déformation de la plaque moyennement épaisse a pour

IV.3.2.1. Matrice de raideur élémentaire

IV.3.2. Détermination des matrices élémentaires (masse et rigidité)

$$[B_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & -N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.47)$$

En fin la matrice $[B_s]$ pour le cisaillement est :

$$[B_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_2 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.46)$$

D'où, par identification :

$$\{e_s\} = [Z_s] \{W\} = [Z_s] [N] \{q_e\} = [B_s] \{q_e\} \quad (IV.45)$$

Alors :

$$\{e_s\} = \begin{bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{bmatrix} \quad (IV.44)$$

écrire:

D'après le champ des déformations donné par l'équation (IV.43) nous pouvons

IV.3.1.2. La matrice $[B_s]$

V.3.2.2. Matrice masse élémentaire

L'énergie cinétique de la plaque moyennement épaisse a pour expression [20]:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho \left[h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right] d\Omega_e \quad (\text{IV. 52})$$

Qui peut être réécrite sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} d\Omega_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho \{\dot{W}\}^T [H] \{\dot{W}\} d\Omega_e \quad (\text{IV. 53})$$

Sous la forme discrétisée, cette dernière devient :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \rho ([N] \{q_e\})^T [H] [N] \{q_e\} d\Omega_e \quad (\text{IV. 54})$$

$$T = \frac{1}{2} \{q_e\}^T \left(\int_{\Omega_e} \rho [N]^T [H] [N] d\Omega_e \right) \{q_e\} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [M_e] \{q_e\} \quad (\text{IV. 55})$$

La matrice de masse élémentaire est obtenue par identification :

$$[M_e] = \rho \int_{\Omega_e} [N]^T [H] [N] d\Omega_e \quad (\text{IV. 56})$$

ou, après le changement de variables :

$$[M_e] = \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T [H] [N(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (\text{IV. 57})$$

IV.4. LA POUTRE COMPOSITE

La poutre est un élément de la structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur.

IV.4.1. Déterminations des matrices masses et rigidité

Pour l'étude dynamique ou le calcul des pulsations et des modes propres ainsi que la réponse d'une structure a une excitation donnée (réponse transitoire et harmonique). Les matrices masse et rigidité sont déterminés par la méthode énergétique.

IV.4.1.1. Matrice masse élémentaire

Par la méthode de l'énergie cinétique en trouve :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int \rho (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\})^2 dx dy dz \\ T &= \frac{1}{2} \int \rho (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\})^T (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\}) dx dy dz \\ T &= \frac{1}{2} \int \rho (\{\dot{w}\}^T + r\{\dot{\theta}\}^T) (\{\dot{w}\} + r\{\dot{\theta}\}) dx dy dz \quad (\text{IV.58}) \\ T &= \frac{1}{2} \int \rho [(\{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\}) + (\{\dot{w}\}^T r\{\dot{\theta}\}) + (r\{\dot{\theta}\}^T \{\dot{w}\}) + (r^2 \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\})] dx dy dz \\ T &= \frac{1}{2} \int \rho A \{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\} dx + \frac{1}{2} \int I_{\theta} \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\} dx + \frac{1}{2} \int \rho a A \{\dot{w}\}^T \{\dot{\theta}\} dx + \frac{1}{2} \int \rho x_a A \dot{\theta}^T \{\dot{w}\} dx \end{aligned}$$

Avec :

$$A = \int dydz$$

$$S(x) = \int \rho \cdot r \cdot dydz = \rho x_a A \text{ (moment statique)}$$

$$w(x) = \{N_f\} \cdot \{q\}_e$$

$$\theta(x) = \{N_t\} \cdot \{q\}_e$$

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \Psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \Psi_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.59})$$

Avec

$$w(x) = N_1 W_1 + N_2 \Psi_1 + N_3 W_2 + N_4 \Psi_2$$

$$\theta(x) = N_5 \theta_1 + N_6 \theta_2 \quad (\text{IV.60})$$

D'où

$$w(x) = \{N_1 N_2 \ 0 \ N_3 N_4 \ 0\} \cdot \{q\}$$

$$\theta(x) = \{0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6\} \cdot \{q\}$$

$$w(x) = \{N_1 N_2 \ 0 \ N_3 N_4 \ 0\} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \Psi_1 \\ 0 \\ w_2 \\ \Psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\theta(x) = \{0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

Alors :

$$w(x) = \{N_f\} \cdot \{q\} \quad (\text{IV.62})$$

$$\theta(x) = \{N_t\} \cdot \{q\}$$

on trouve la fonction de déplacement de (V.62) :

$$\{W(x)\} = \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \Psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \Psi_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N] * \{q\} \quad (\text{IV.63})$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\int \rho \{q_e\}^T \{N_f\}^T \{N_f\} \{q_e\} dx + \int I_0 \{q_e\}^T \{N_t\}^T \{N_t\} \{q_e\} dx + \int S(x) \{q_e\}^T \{N_f\}^T \{N_t\} \{q_e\} dx + \int S(x) \{q_e\}^T \{N_t\}^T \{N_f\} \{q_e\} dx \right] \quad (\text{IV.64})$$

$$[Me] = \int \rho A \{N_f\}^T \{N_f\} dx + \int I_0 \{N_t\}^T \{N_t\} dx + \int S(x) \{N_f\}^T \{N_t\} dx + \int S(x) \{N_t\}^T \{N_f\} dx \quad (\text{IV.65})$$

a. Matrice masse élémentaire pour flexion

$$[Mf] = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \quad 0] dx \quad (\text{IV.66})$$

$$[Mt] = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} N^2 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

b. Matrice masse élémentaire pour la torsion

$$[Mt] = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_5 \\ 0 \\ 0 \\ N_6 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad N_5 \quad 0 \quad 0 \quad N_6] dx \quad (\text{IV.67})$$

$$[Mt] = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5^2 & 0 & 0 & N_5 N_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_6 N_5 & 0 & 0 & N_6^2 \end{bmatrix} dx$$

c. Matrice masse globale découplée :

$$[Mg]_d = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_3 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} dx$$

$$[Mg]_d = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & N_1 N_4 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_5^2 & 0 & 0 & N_5 N_6 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 & 0 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & N_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & N_6 N_5 & 0 & 0 & N_6^2 \end{bmatrix} dx \quad (\text{IV.68})$$

d. Matrice masse globale de couplage

$$[M]_c = \int \rho A(x) a [\{Nf\}^T \{Nt\} + \{Nt\}^T \{Nf\}] dx$$

$$[M]_c = \int_0^1 \rho x_a A(x) \left(\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ N_6] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_5 \\ 0 \\ 0 \\ N_6 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0] \right) dx$$

$$[M]_c = \int_0^1 \rho x_a A(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 N_5 & 0 & 0 & N_1 N_6 \\ 0 & 0 & N_2 N_5 & 0 & 0 & N_2 N_6 \\ N_1 N_5 & N_2 N_5 & 0 & N_3 N_5 & N_4 N_5 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 N_5 & 0 & 0 & N_3 N_6 \\ 0 & 0 & N_4 N_5 & 0 & 0 & N_4 N_6 \\ N_1 N_6 & N_2 N_6 & 0 & N_3 N_6 & N_4 N_6 & 0 \end{bmatrix} dx \quad (IV.69)$$

e. Matrice masse globale

$$[M] = [Mg]_d + [M]_c$$

$$[Mg] = \int_0^1 \rho A(x) \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_5 a & N_3 N_3 & N_1 N_4 & N_1 N_6 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_5 a & N_2 N_3 & N_2 N_4 & N_2 N_6 \\ N_1 N_5 a & N_2 N_5 a & N_5^2 & N_3 N_5 a & N_4 N_5 a & N_5 N_6 a \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_5 a & N_3^2 & N_3 N_4 & N_3 N_6 a \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_5 a & N_4 N_3 & N_4^2 & N_4 N_6 a \\ N_1 N_6 a & N_2 N_6 a & N_6 N_5 & N_3 N_6 a & N_4 N_6 a & N_6^2 \end{bmatrix} dx \quad (IV.70)$$

IV .4.1.2. Matrice de rigidité élémentaire

Par la méthode d'énergie potentielle en troue

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz$$

$$U = \frac{1}{2} \int \{EI\} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int \{GJ\} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int \{EI\} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int \{GJ\} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^T \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx \quad (IV.71)$$

On substitue l'équation (V.61) dans l'équation (V.71):

$$Ue = \frac{1}{2} \int EI (\{Nf''\} \{q\})^T (\{Nf''\} \{q\}) dx + \frac{1}{2} \int GJ (\{Nt'\} \{q\})^T (\{Nt'\} \{q\})^T dx \quad (IV.72)$$

$$Ue = \frac{1}{2} \{qe\}^T [Ke] \{qe\} \quad T = \frac{1}{2} \{qe\}^T [M] \{qe\} \quad (IV.73)$$

$$[Ke] = \int EI \{Nf''\}^T \{Nf''\} dx + \int GJ \{Nt'\}^T \{Nt'\} dx \quad (IV.74)$$

$$[Ke] = [Kfe] + [Kte] \quad (IV.75)$$

a. Matrice rigidité élémentaire pour flexion

$$[K]_{fe} = \int_0^l Elyy \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ 0 \\ N_3'' \\ N_4'' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & 0 & N_3'' & N_4'' & 0 \end{bmatrix} dx \quad (IV.76)$$

D'où

$$[K]_{fe} = Elyy \int_0^l \begin{bmatrix} N_1''^2 & N_1'' N_2'' & 0 & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' & 0 \\ N_2'' N_1'' & N_2''^2 & 0 & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & 0 & N_3''^2 & N_3'' N_4'' & 0 \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & 0 & N_4'' N_3'' & N_4''^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx \quad (IV.77)$$

b. Matrice rigidité élémentaire pour la torsion

$$[K]_{te} = \int_0^l GJ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_5' \\ 0 \\ 0 \\ N_6' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_5' & 0 & 0 & N_6' \end{bmatrix} dx \quad (IV.78)$$

D'où

$$[K]_{te} = \int_0^l GJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5'^2 & 0 & 0 & N_5' N_6' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_6' N_5' & 0 & 0 & N_6'^2 \end{bmatrix} dx \quad (IV.79)$$

c. Matrice rigidité globale découplée

$$[K_g]_d = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'^2 EI & N_1' N_2' EI & 0 & N_1' N_3' EI & N_1' N_4' EI & 0 \\ N_2' N_1' EI & N_2'^2 EI & 0 & N_2' N_3' EI & N_2' N_4' EI & 0 \\ 0 & 0 & N_5'^2 GJ & 0 & 0 & N_5' N_6' GJ \\ N_3' N_1' EI & N_3' N_2' EI & 0 & N_3'^2 EI & N_3' N_4' EI & 0 \\ N_4' N_1' EI & N_4' N_2' EI & 0 & N_4' N_3' EI & N_4'^2 EI & 0 \\ 0 & 0 & N_5' N_6' GJ & 0 & 0 & N_6'^2 GJ \end{bmatrix} dx \quad (IV.80)$$

d. Matrice rigidité de couplage
 $k=0$

$$[K]_c = \int_0^l K [B]^T [B] \quad \text{avec : } [B] = \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & 0 & N_3' & N_4' & 0 \\ 0 & 0 & N_5' & 0 & 0 & N_6' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.81})$$

$$[K]_c = K \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'' & 0 \\ N_2'' & 0 \\ 0 & N_5' \\ N_3' & 0 \\ N_4' & 0 \\ 0 & N_6' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & 0 & N_3' & N_4' & 0 \\ 0 & 0 & N_5' & 0 & 0 & N_6' \end{bmatrix} dx \quad (\text{IV.82})$$

$$[K]_c = \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1' & N_5' & k & 0 & 0 & 0 & N_1' & N_6' & k \\ 0 & 0 & N_2' & N_5' & k & 0 & 0 & 0 & N_2' & N_6' & k \\ N_1'' & N_5' & k & N_2'' & N_5' & k & 0 & N_3'' & N_5' & k & N_4'' & N_5' & k & 0 \\ 0 & 0 & N_3'' & N_5' & k & 0 & 0 & 0 & N_3'' & N_6' & k \\ 0 & 0 & N_4'' & N_5' & k & 0 & 0 & 0 & N_4'' & N_6' & k \\ N_1'' & N_6' & k & N_2'' & N_6' & k & 0 & N_3'' & N_6' & k & N_4'' & N_6' & k & 0 \end{bmatrix} dx \quad (\text{IV.83})$$

e. Matrice rigidité globale

$$[K_g] = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1''^2 EI & N_1'' N_2'' EI & N_1'' N_5' k & N_1'' N_3'' EI & N_1'' N_4'' EI & N_1'' N_6' k \\ N_2'' N_1'' EI & N_2''^2 EI & N_2'' N_5' k & N_2'' N_3'' EI & N_2'' N_4'' EI & N_2'' N_6' k \\ N_1'' N_5' k & N_2'' N_5' k & N_5'^2 GJ & N_3'' N_5' k & N_4'' N_5' k & N_5' N_6' GJ \\ N_3'' N_1'' EI & N_3'' N_2'' EI & N_3'' N_5' k & N_3''^2 EI & N_3'' N_4'' EI & N_3'' N_6' k \\ N_4'' N_1'' EI & N_4'' N_2'' EI & N_4'' N_5' k & N_4'' N_3'' EI & N_4''^2 EI & N_4'' N_6' k \\ N_1'' N_6' k & N_2'' N_6' k & N_5' N_6' GJ & N_3'' N_6' k & N_4'' N_6' k & N_6'^2 GJ \end{bmatrix} dx \quad (\text{IV.84})$$

$$[K_g] = [K]_d + [K]_c$$

IV .4.2.application numérique

Les fonctions d'interpolation d'une poutre en flexion sont :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + 2x^3/l^3 \\ N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l} + x^3/l^2 \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - 2x^3/l^3 \\ N_4(x) &= -\frac{x^2}{l} + x^3/l^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.85})$$

Les fonctions d'interpolation d'une poutre en torsion sont :

$$\begin{aligned} N_5(x) &= 1 - \frac{x}{l} \\ N_6(x) &= \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (\text{IV.86})$$

IV.4.2.1. Les matrices masses (découplée, de couplage et globale)

a. Matrice masse découplée

$$[M]_d = \begin{bmatrix} 156\rho Al/420 & 22\rho Al^2/420 & 0 & 54\rho Al/420 & -13\rho Al^2/420 & 0 \\ 22\rho Al^2/420 & 4\rho Al^3/420 & 0 & 13\rho Al/420 & -3\rho Al^3/420 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho Al/6 & 0 & 0 & \rho Al/6 \\ 54\rho Al/420 & 13\rho Al^2/420 & 0 & 156\rho Al^2/420 & -22\rho Al^2/420 & 0 \\ -13\rho Al^2/420 & -3\rho Al^3/420 & 0 & -22\rho Al^2/420 & 4\rho Al^3/420 & 0 \\ 0 & 0 & \rho Al/6 & 0 & 0 & 2\rho Al/6 \end{bmatrix} \quad (IV.87)$$

b. Matrice masse de couplage

$$[M]_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{7\rho Ax_a}{20} & 0 & 0 & \frac{3\rho Ax_a}{20} \\ 0 & 0 & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & 0 & 0 & \frac{l^2\rho Ax_a}{30} \\ \frac{7\rho Ax_a}{20} & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & 0 & \frac{7\rho Ax_a}{20} & -\frac{l^2\rho Ax_a}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7\rho Ax_a}{20} & 0 & 0 & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} \\ 0 & 0 & -\frac{l^2\rho Ax_a}{30} & 0 & 0 & -\frac{l\rho Ax_a}{20} \\ \frac{3\rho Ax_a}{20} & \frac{l^2\rho Ax_a}{30} & 0 & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & -\frac{l\rho Ax_a}{20} & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.88)$$

c. Matrice masse globale

$$[M]_g = \begin{bmatrix} \frac{156\rho Al}{420} & \frac{22\rho Al^2}{420} & \frac{7\rho Ax_a}{20} & \frac{54\rho Al}{420} & -\frac{13\rho Al^2}{420} & \frac{3\rho Ax_a}{20} \\ \frac{22\rho Al^2}{420} & \frac{4\rho Al^3}{420} & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & \frac{13\rho Al^2}{420} & -\frac{3\rho Al^3}{420} & \frac{l^2\rho Ax_a}{30} \\ \frac{7\rho Ax_a}{20} & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & \frac{2\rho Al}{6} & \frac{7\rho Ax_a}{20} & -\frac{l^2\rho Ax_a}{30} & \frac{\rho Al}{6} \\ \frac{54\rho Al}{420} & \frac{13\rho Al^2}{420} & \frac{7\rho Ax_a}{20} & \frac{156\rho Al^2}{420} & -\frac{22\rho Al^2}{420} & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} \\ -\frac{13\rho Al^2}{420} & -\frac{3\rho Al^3}{420} & -\frac{l^2\rho Ax_a}{30} & -\frac{22\rho Al^2}{420} & \frac{4\rho Al^3}{420} & -\frac{l\rho Ax_a}{20} \\ \frac{3\rho Ax_a}{20} & \frac{l^2\rho Ax_a}{30} & \frac{\rho Al}{6} & \frac{l^2\rho Ax_a}{20} & -\frac{l\rho Ax_a}{20} & \frac{2\rho Al}{6} \end{bmatrix} \quad (IV.89)$$

IV.4.2.2. Les matrices de rigidités (découplée, de couplage et globale)

a. Matrice de rigidité découplée

$$[K]_d = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{k}{l} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (IV.90)$$

b. Matrice de rigidité de couplage

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{l} & 0 & 0 & -\frac{k}{l} \\ 0 & -\frac{k}{l} & 0 & -\frac{12k}{l^2} & -\frac{k}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12k}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12k}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{k}{l} & 0 & 0 & \frac{k}{l} \\ 0 & -\frac{k}{l} & 0 & 0 & \frac{k}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.91)$$

c. Matrice rigidité globale

$$[K]_g = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{k}{l} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{k}{l} & \frac{GJ}{L} & \frac{12k}{l^2} & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12k}{l^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12k}{l^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{k}{l} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{k}{l} \\ 0 & -\frac{k}{l} & -\frac{GJ}{L} & \frac{12k}{l^2} & \frac{k}{l} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (IV.92)$$

IV.5.EQUATIONS DYNAMIQUES DE LA STRUCTUREE

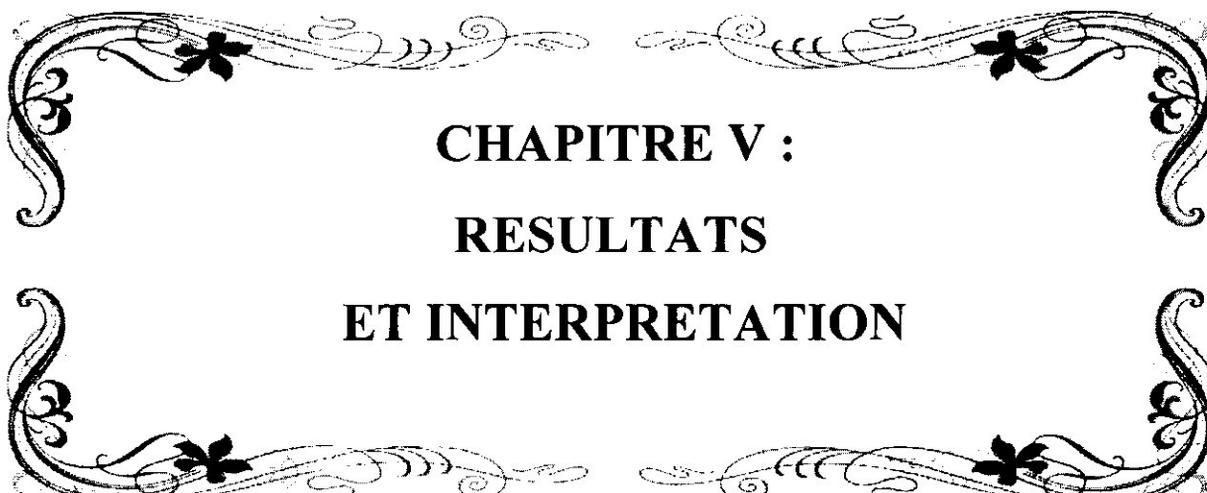
Après assemblages des matrices élémentaires, nous obtenons les matrices globales ([K] et [M]) de la structure. Ainsi les équations de mouvement dynamiques de la structure deviennent :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (IV.93)$$

Où {q} est le nombre de degrés de liberté total de la structure.

IV.6.CONCLUSION

Après introduction des conditions aux limités (plaque encastree - libre), le système d'équations ci-dessus est conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres permettant d'avoir les fréquences et les modes correspondants de cette structure, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

A decorative border with intricate floral and scrollwork patterns, featuring four small flowers at the corners and symmetrical flourishes along the top and bottom edges.

CHAPITRE V :
RESULTATS
ET INTERPRETATION

V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre notre étude est basée sur l'identification des caractéristiques dynamique de la structure (fréquences et modes propres).

Lors de la recherche des fréquences et modes propres, les équations de mouvement sont obtenues par la MEF ,pour cela nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que, les dimensions (L'allongement), le type de la plaque et la nature du matériau sur les caractéristiques de la structure.

Ces différentes étape sont illustrées par un programme de calcul Matlab dont les résultats sont comparés avec ceux obtenus par les logiciels : Ansys [Annexe C], SolidWorks [Annexe D] et Abaqus [Annexe E].

La méthode utilisée est la même pour tous les logiciels car pour chaque calcul on a trois étapes à suivre qui sont :

- Pre-processing : dans cette étape la géométrie et les propriété du matériau utilisé sont définies, puis le maillage est crée, ensuite les conditions aux limites sont fixées.
- Processing : c'est la phase du traitement (le programme calcule les fréquences et les modes propres).
- Post-processing : dans cette étape les résultats sont affichés et étudiés.

V.2 MATLAB

V.2.1. Définition

MATLAB est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique.

Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et le Fortran. Les utilisateurs de MATLAB sont de milieux très différents comme l'ingénierie, les sciences et l'économie dans un contexte aussi bien industriels que pour la recherche, il permet d'exécuter des commandes simples. Des séquences de commandes peuvent être sauvegardés dans un fichier texte, typiquement avec l'éditeur MATLAB, sous la forme d'un « script » ou encapsulé dans une fonction [26].

V.2.2. Les étape de programmation

La mise en œuvre informatique de la MEF requiert la programmation des opérations suivantes [27]:

- La description géométrique et mécanique de la plaque, à savoir s'il s'agit d'une plaque mince ou épaisse, plaque isotrope ou stratifiée, ou même une poutre;
- Le calcul des matrices élémentaires et l'assemblage du système global;
- La résolution du système;
- La visualisation des résultats et le post-traitement.

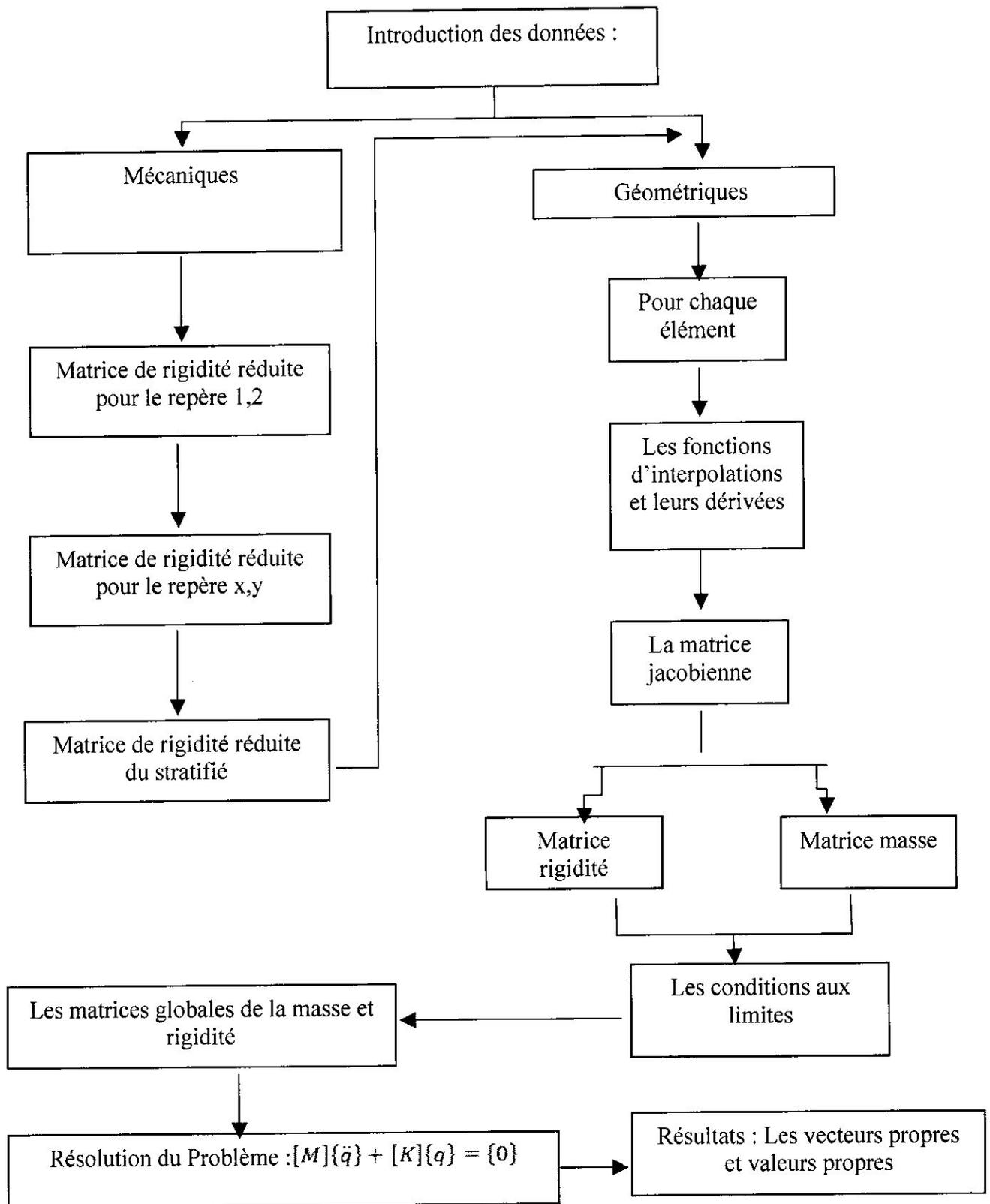


Figure V.01 : Organigramme représentant les étapes utilisées

V.3. INFLUENCE DE L'ALLONGEMENT SUR LES FREQUENCES PROPRES DE LA PLAQUE

Dans cette partie on va prendre une plaque moyennement épaisse avec différentes valeurs d'allongement (1, 3, 5 et 10).

Cette plaque encadrée-libre a les caractéristiques géométriques suivantes :

L_x = la largeur

L_y = la longueur

h = l'épaisseur

V.3.1 Cas d'un matériau isotrope

Notre matériau isotrope choisis c'est l'Acier ASTM A36 dont les propriétés sont les suivantes :

Tableau V.01: Propriété physique de l'acier ASTM A36

Propriété	Valeur	Unités
Module d'élasticité	2e+011	N/m ²
Coefficient de Poisson	0.26	S.O.
Module de cisaillement	7.93e+010	N/m ²
Masse volumique	7850	kg/m ³

V.3.1.1 $\lambda=1$

Une plaque carrée de $L_x=L_y=0,3m$ $h=0,015m$:

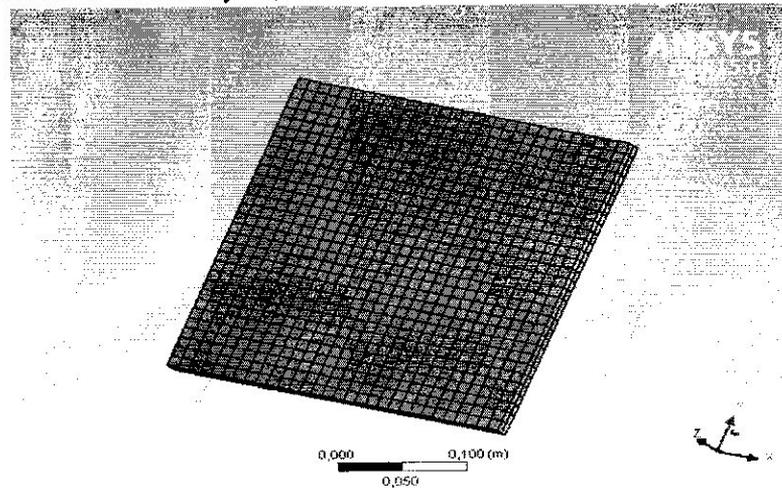


Figure V.02: Plaque obtenue par ANSYS ($\lambda=1$)

Tableau V.02 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque ($\lambda=1$)

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	139.02	139,18	139.23	139.16	0.11	1er mode de flexion
2	340.82	340,93	341.34	342.28	0.03	1er mode de torsion
3	851.84	848,46	848.27	866.57	0.39	2eme mode de flexion
4	1076.73	1073,5	1073.1	1089.1	0.29	3eme mode de flexion
5	1226.61	1222,1	1223.2	1244.2	0.36	2eme mode de torsion

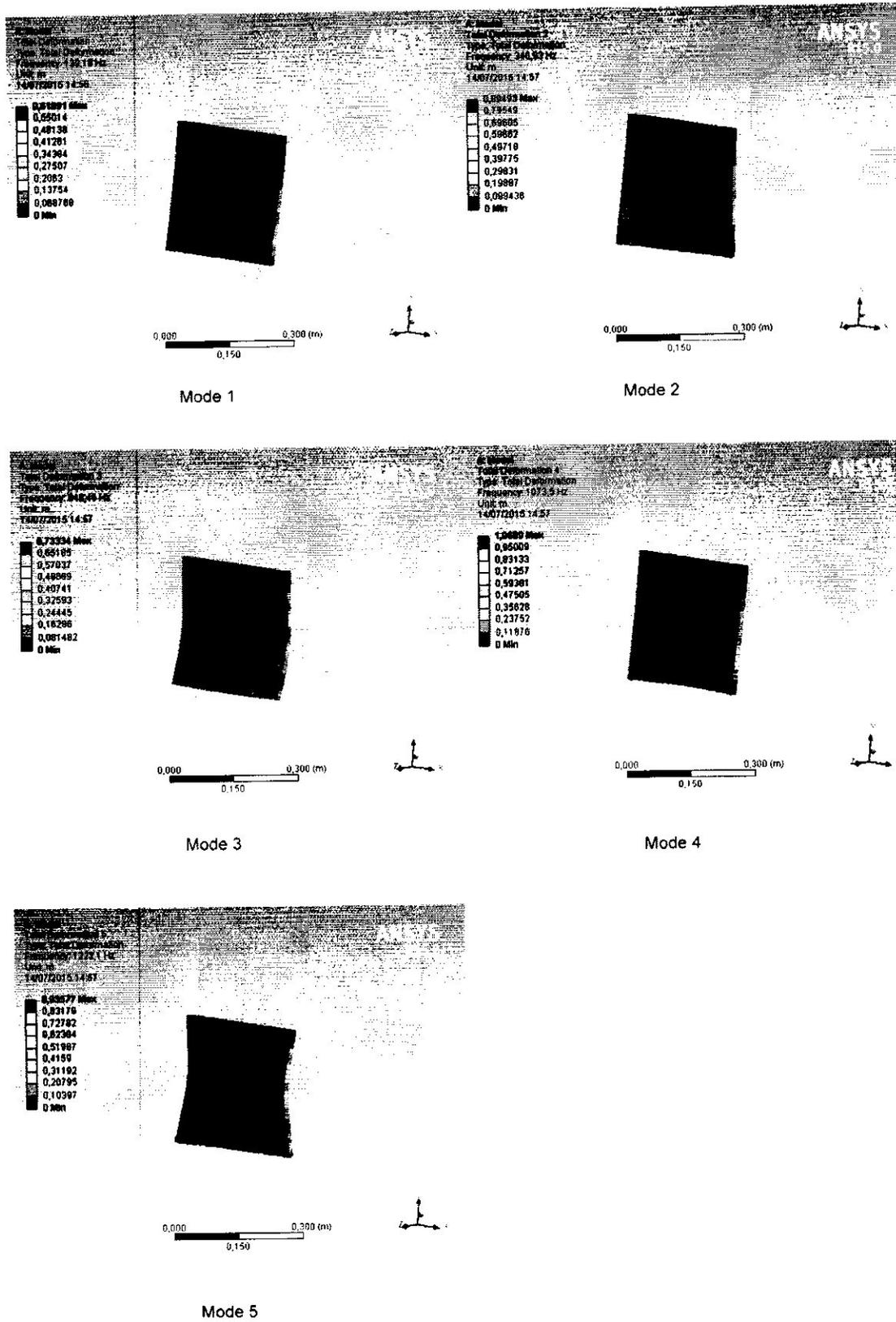


Figure V.03 : Les cinq premiers modes pour une plaque isotrope moyennement épaisse ($\lambda=1$)

V.3.1.2. Lambda=3

Une plaque de $L_x=0,9m$ $L_y=0,3m$ $h=0,015m$:

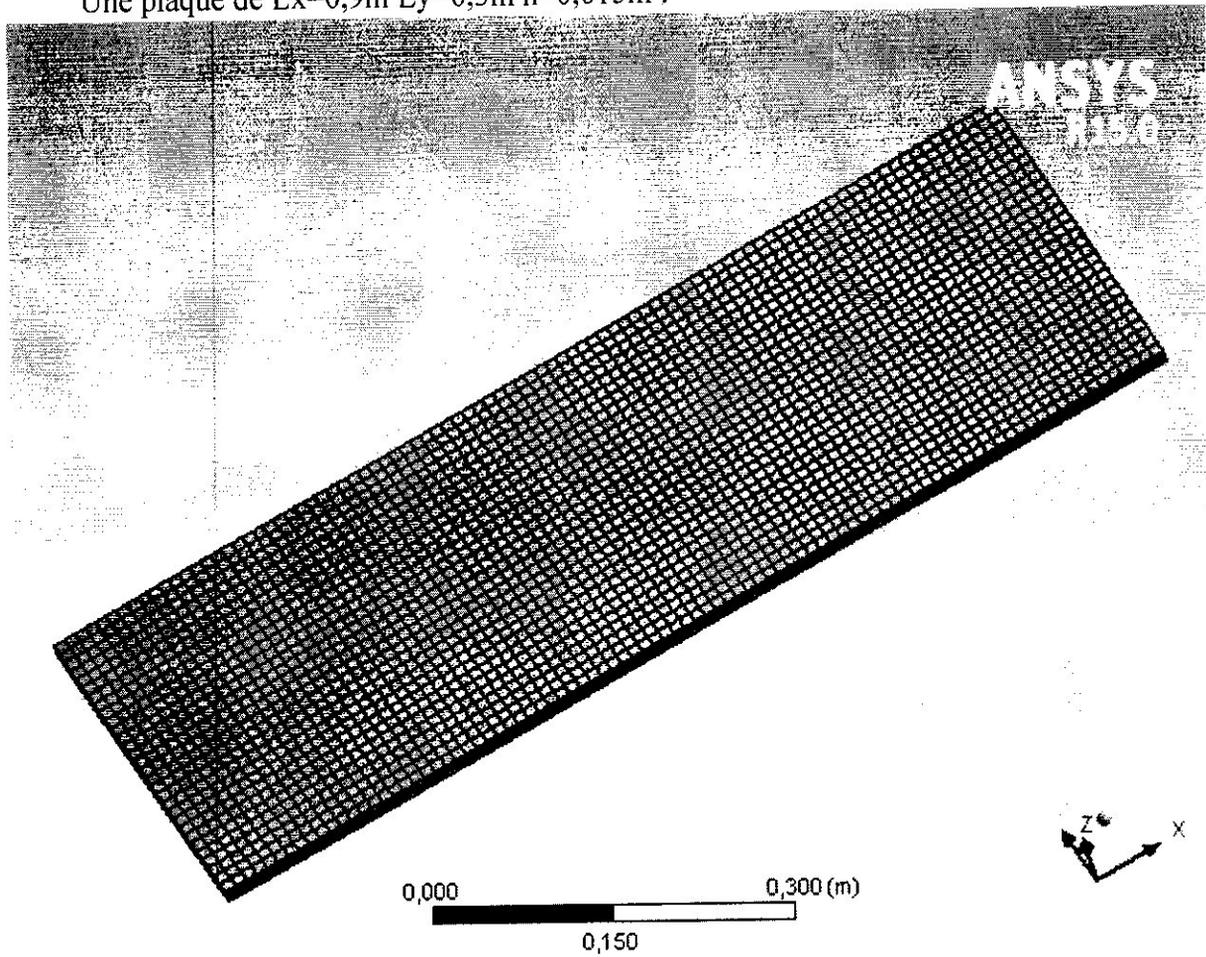


Figure V.04: Plaque obtenue par ANSYS (lambda=3)

Tableau V.03 : Les six premières fréquences propres de la plaque (lambda=3)

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	15.16	15.311	15.32	15.307	0.99	1er mode de flexion
2	93.93	94.782	95.065	95.095	0.90	1er mode de torsion
3	95.28	95.626	95.673	95.850	0.36	2eme mode de flexion
4	269.95	267.85	267.98	269.84	0.77	3eme mode de flexion
5		280.39	280.48	279.26		1er mode latéral
6	295.26	296.89	298.38	298.20	0,55	2eme mode de torsion

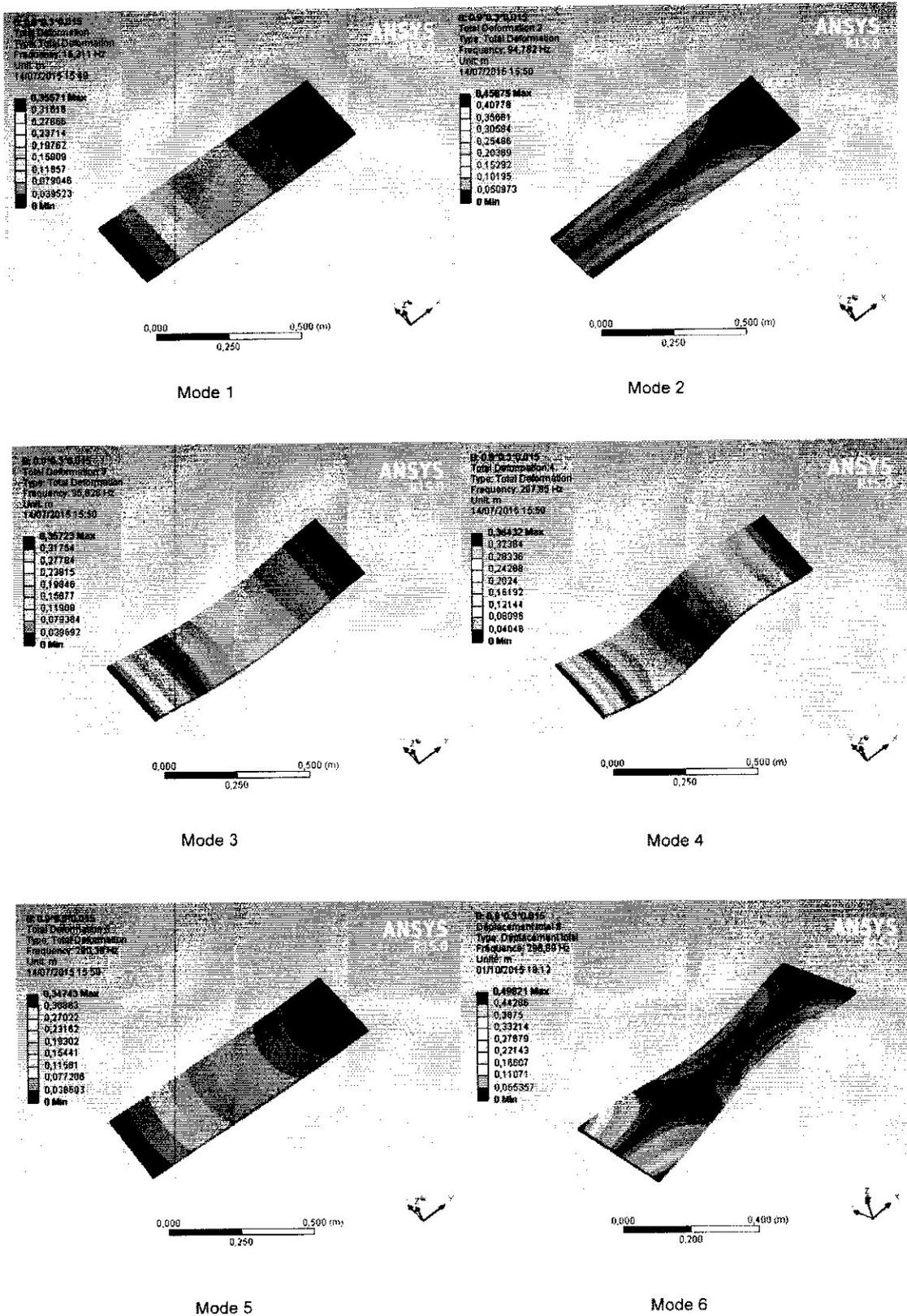


Figure V.05 : Les six premiers modes pour une plaque isotrope moyennement épaisse ($\lambda=3$)

V.3.1.3. Lambda=5

Une plaque de $L_x=1,5\text{m}$ $L_y=0,3\text{m}$ $h=0,015\text{m}$:

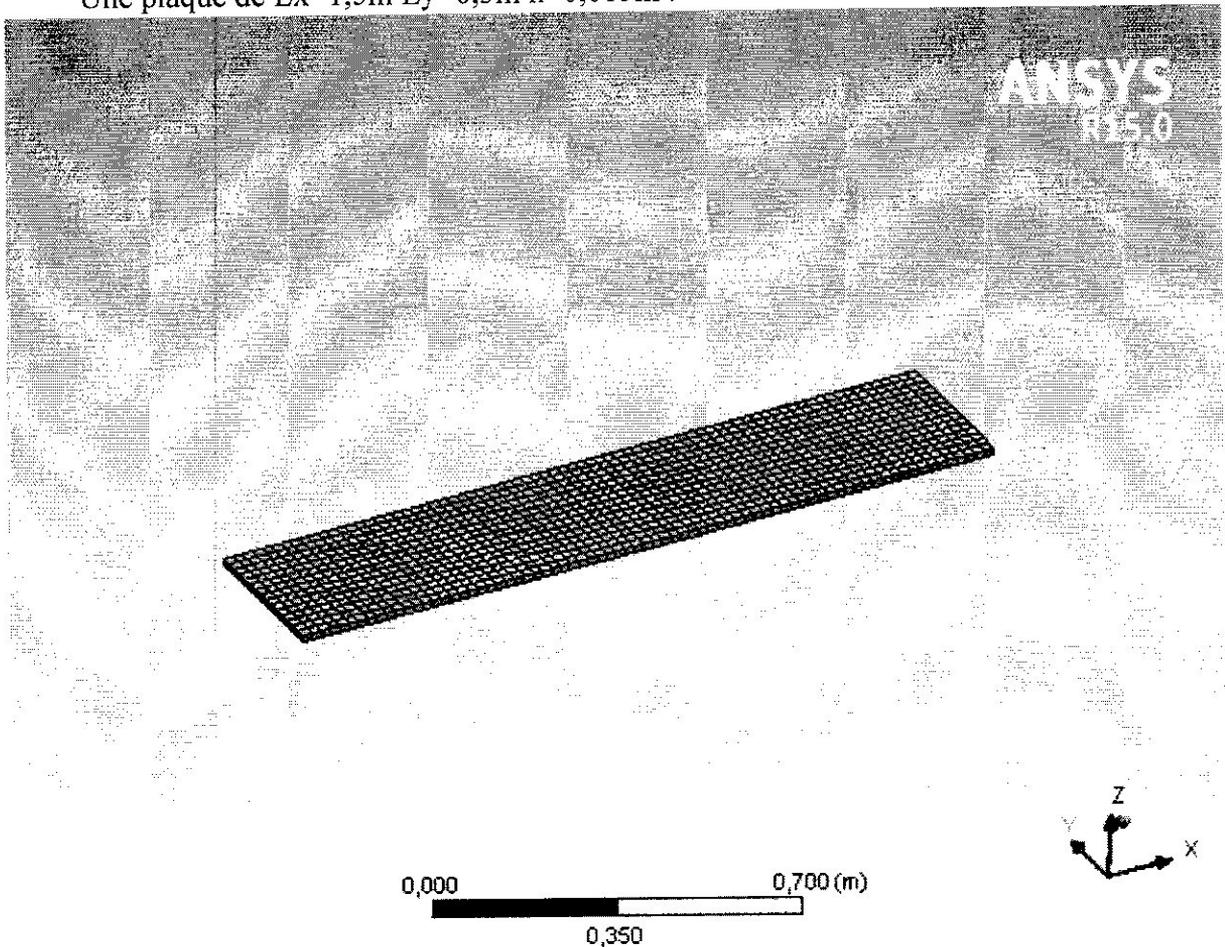


Figure V.06: Plaque obtenue par ANSYS (lambda=5)

Tableau V.04: Les six premières fréquences propres de la plaque (lambda=5)

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	5,438	5.4866	5.4893	5.4851	0.89	1er mode de flexion
2	34.22	34.34	34.355	34.334	0.35	2eme mode de flexion
3	54.33	54.806	55.003	54.825	0.87	1er mode de torsion
4	97.03	96.225	96.271	96.225	0.82	3eme mode de flexion
5		105.75	105.78	105.66		1er mode latéral
6	166,55	167.48	168.45	167.54	0.55	2eme mode de torsion

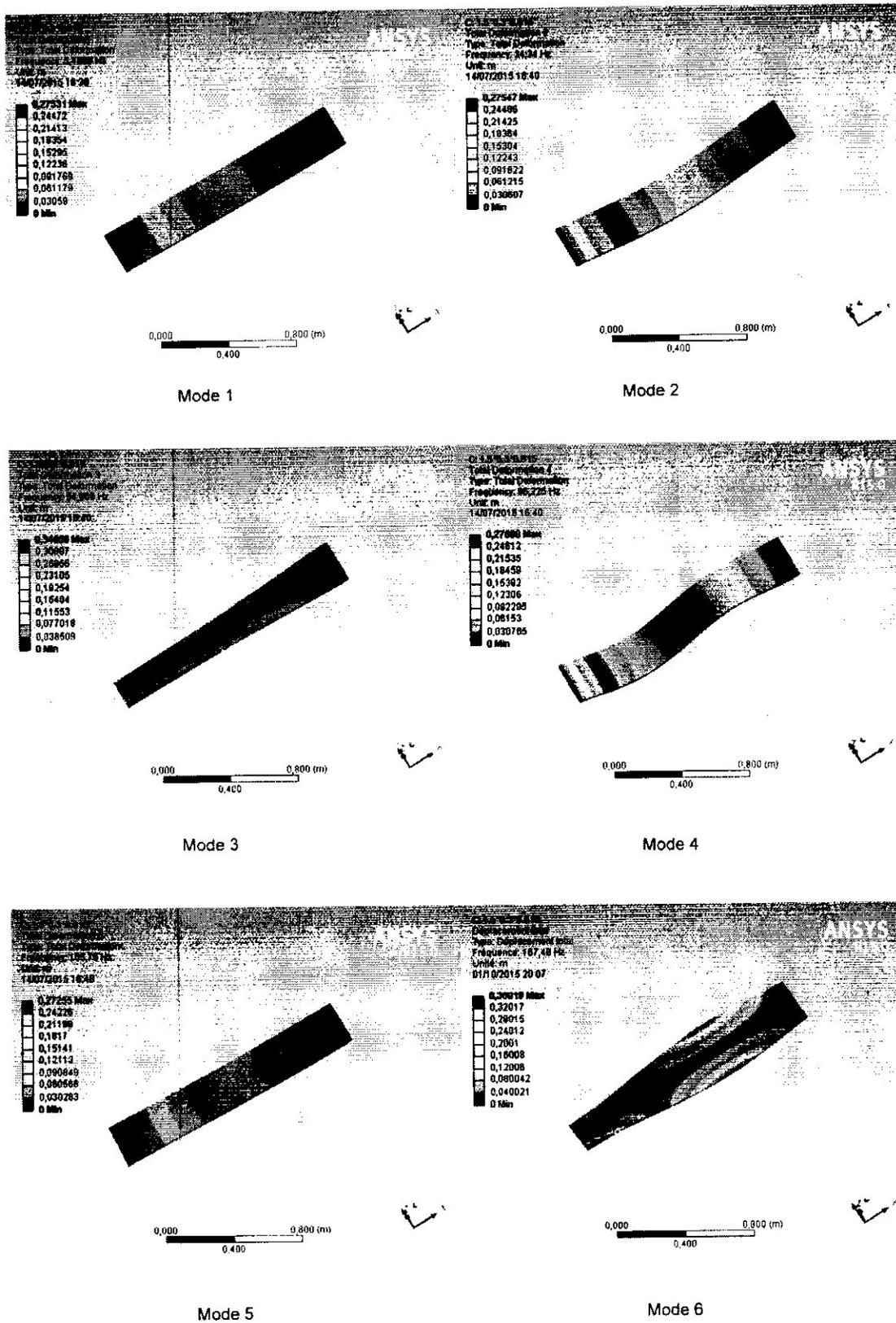


Figure V.07 : Les six premiers modes pour une plaque isotrope moyennement épaisse ($\lambda=5$)

V.3.1.4. Lambda= 10

Une plaque de $L_x=3m$ $L_y=0,3m$ $h=0,015m$:

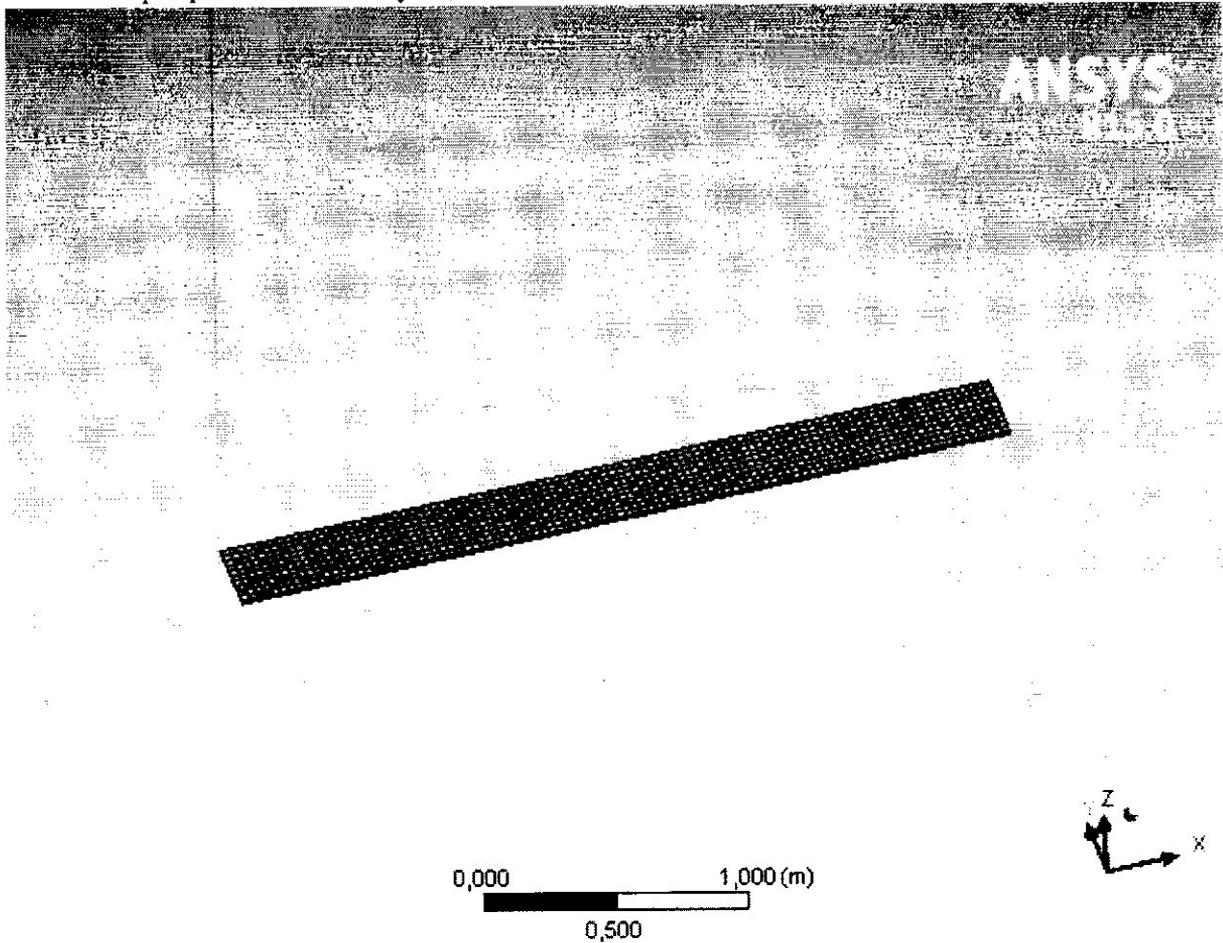


Figure V.08: Plaque obtenue par ANSYS (lambda=10)

Tableau V.05 : Les six premières fréquences propres de la plaque (lambda=10)

Les modes	Matlab	Ansyes	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	1.353	1.3658	1.3663	1.3656	0.94	1er mode de flexion
2	8.5322	8.5566	8.5646	8.5556	0.28	2eme mode de flexion
3	24.179	23.967	23.975	23.965	0.87	3eme mode de flexion
4	26.476	26.693	26.746	26.706	0.81	1er mode de torsion
5		27	27.002	26.981		1er mode latéral
6	47.300	47.004	47.089	47.004	0.62	4eme mode de flexion

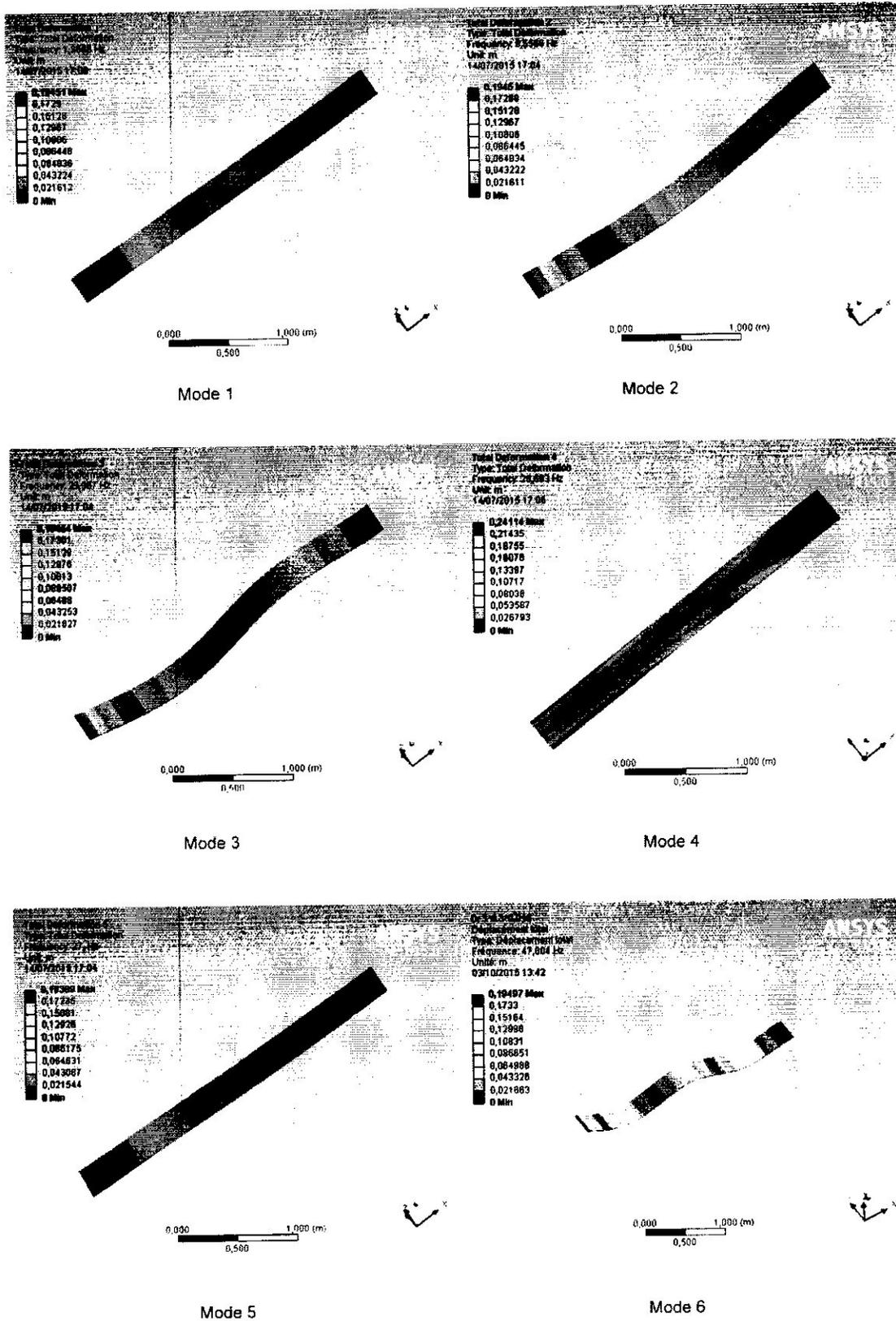


Figure V.09 : Les six premiers modes pour une plaque isotrope moyennement épaisse ($\lambda=10$)

D'après les cinq premiers tableaux (V.02, V.03, V.04 et V.05) pour une plaque moyennement épaisse avec un matériau isotrope, on voit clairement que l'augmentation de l'allongement influe négativement sur la qualité de la plaque, en effet ; les valeurs des fréquences propres ont diminuée lorsqu'on a fait augmenter la valeur de l'allongement de 1 a 3 a 5 jusqu'à 10, donc la rigidité diminue.

V.3.2 Cas d'un matériau orthotrope

Notre matériau orthotrope choisi est Epoxy Carbon (0/90s) dont les propriétés sont les suivantes :

Tableau V.06: Propriété du matériau choisis

Property	Value	Units
Elastic Modulus in X	1.21e-011	N/m ²
Elastic Modulus in Y	8600000000	N/m ²
Elastic Modulus in Z	8600000000	N/m ²
Poisson's Ratio in XY	0.27	N/A
Poisson's Ratio in YZ	0.4	N/A
Poisson's Ratio in XZ	0.27	N/A
Shear Modulus in XY	4700000000	N/m ²
Shear Modulus in YZ	3100000000	N/m ²
Shear Modulus in XZ	4700000000	N/m ²
Mass Density	1490	kg/m ³

Tableau V.07: Composition des couches et leur orientation

Ply	Thickness	Angle	Material
1	0.00375	0	epoxy carbon
2	0.00375	90	epoxy carbon
3	0.00375	90	epoxy carbon
4	0.00375	0	epoxy carbon

V.3.2.1.lambda= 1

Tableau V.08: Les cinq premières fréquences propres de la plaque (lambda=1).

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	225.34	224,63	225.01	224.64	0.31	1er mode de flexion
2	293.49	290,57	291.39	290.23	0.99	1er mode de torsion
3	775.02	777,96	782.1	778.30	0,37	2eme mode de flexion
4	1279.83	1283,5	1294.5	1283.5	0.28	3eme mode de flexion
5	1329.70	1307,6	1306.5	1307.3	1.66	4eme mode de flexion

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	2,2887	2,2843	2,4333	2,2845	0.19	1er mode de flexion
2	14,546	14,302	15,232	14,303	1.67	2eme mode de flexion
3	15,565	15,751	15,817	15,693	1.19	1er mode de torsion
4		34,438	42,582	34,378		1er mode latéral
5	40,774	39,984	45,817	39,987	1.93	3eme mode de flexion
6	49,132	49,037	49,458	48,852	0.19	2eme mode de torsion

Tableau V.11 : Les six premières fréquences propres de la plaque ($\lambda=10$).

V.3.2.4. $\lambda=10$

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	9,1440	9,1337	9,756	9,1338	0.11	1er mode de flexion
2	33,836	34,176	34,678	34,160	1.00	1er mode de torsion
3	58,083	56,998	60,866	57,017	1.86	2eme mode de flexion
4	113,75	113,45	116,34	113,40	0.26	2eme mode de torsion
5		126,36	159,21	126,16		1er mode latéral
6	160,45	158,54	169,37	158,69	1.19	3eme mode de flexion

Tableau V.10 : Les six premières fréquences propres de la plaque ($\lambda=5$).

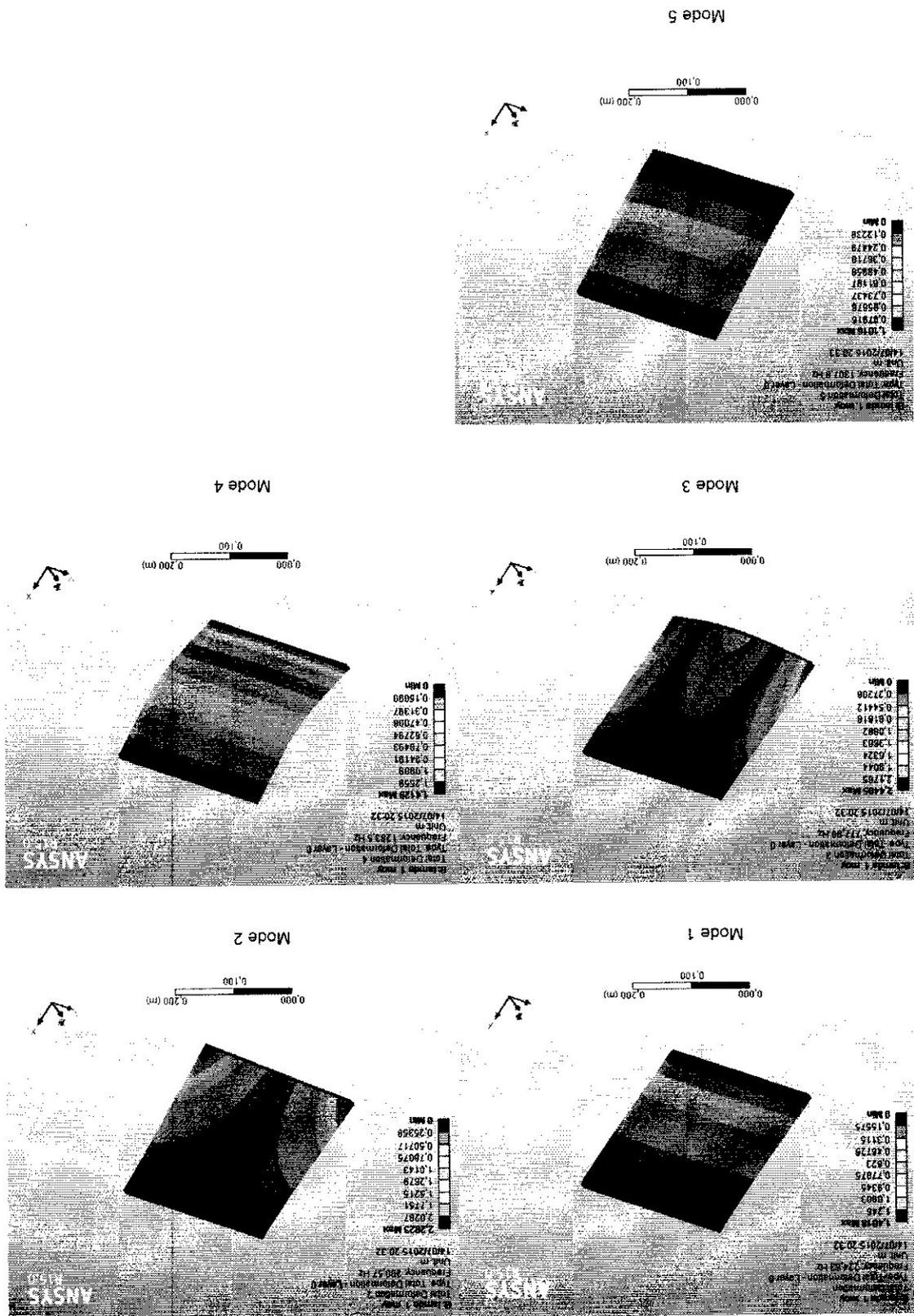
V.3.2.3. $\lambda=5$

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	25,32	25,343	27,162	25,345	0.09	1er mode de flexion
2	62,67	63,472	64,903	63,395	1.27	1er mode de torsion
3	158,16	156,99	168,16	157,00	0.73	2eme mode de flexion
4	227,59	228,92	238,35	228,65	0.58	2eme mode de torsion
5		299,78	352,09	299,72		1er mode latéral
6	437,56	431,76	463,03	431,78	1.32	3eme mode de flexion

Tableau V.09 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque ($\lambda=3$).

V.3.2.2. $\lambda=3$

Figure V.10 : Les cinq premiers modes pour une plaque orthotrope moyennement épaisse ($\lambda=1$)



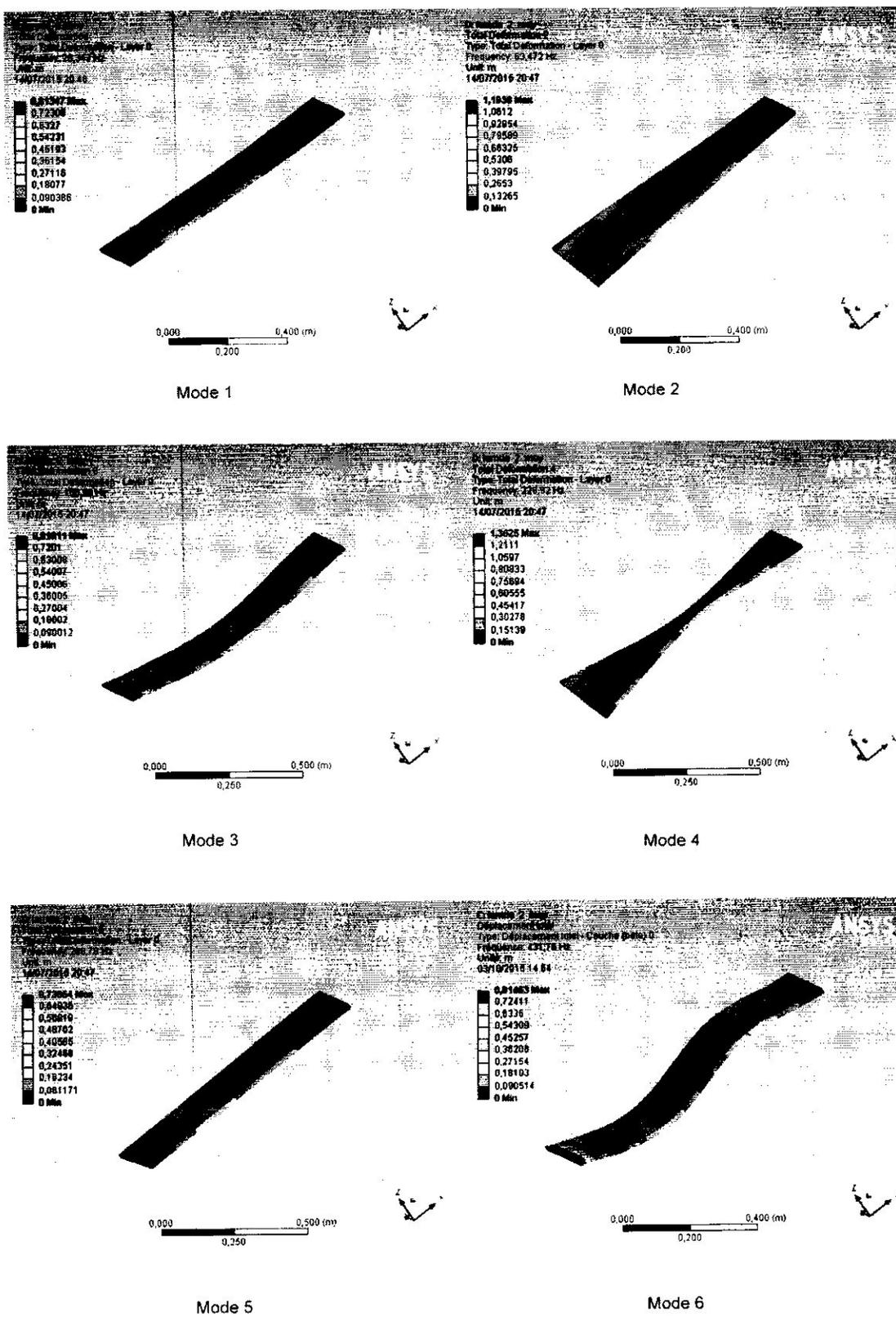


Figure V.11 : Les six premiers modes pour une plaque orthotrope moyennement épaisse ($\lambda=3$)

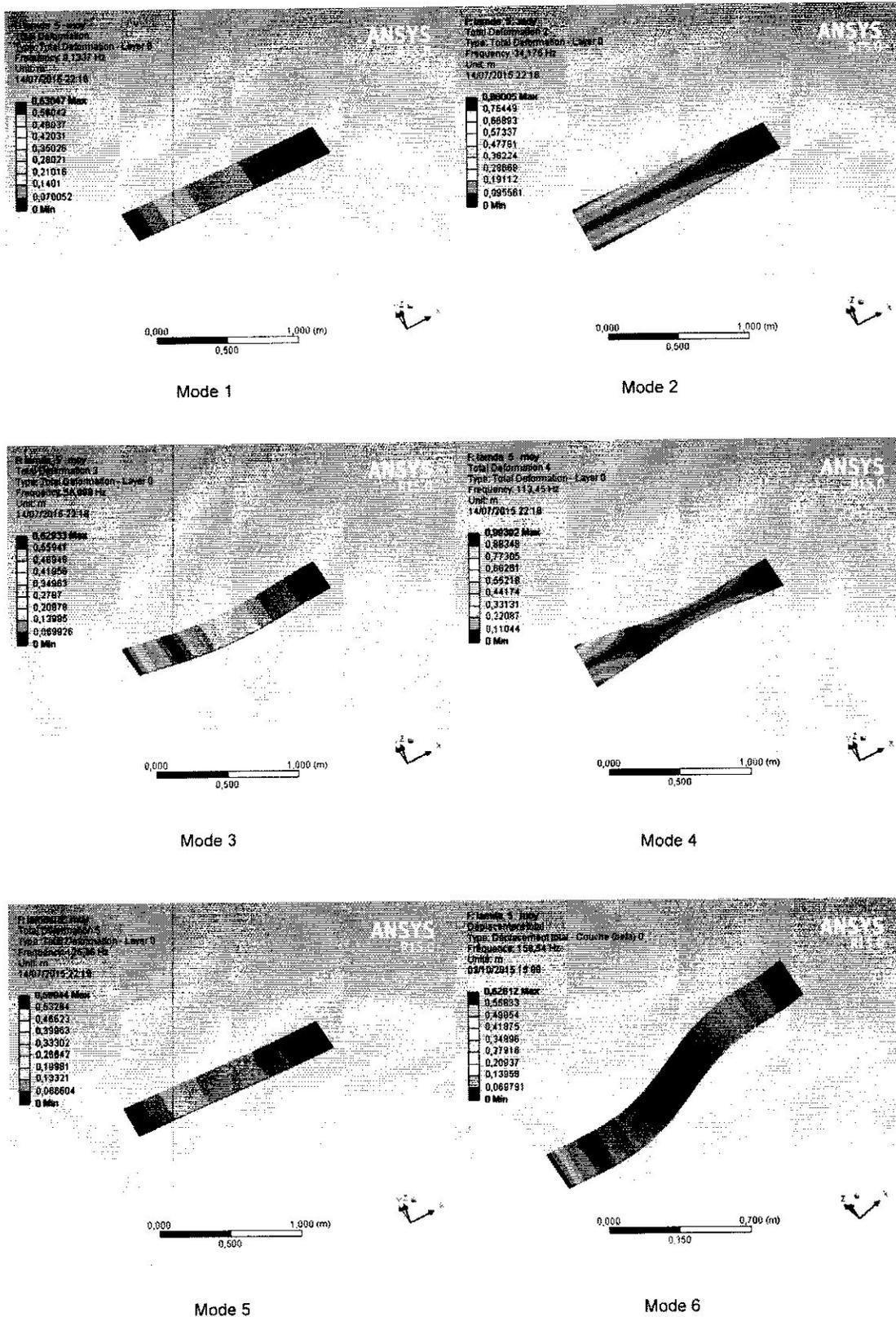


Figure V.12 : Les six premiers modes pour une plaque orthotrope moyennement épaisse ($\lambda=5$)

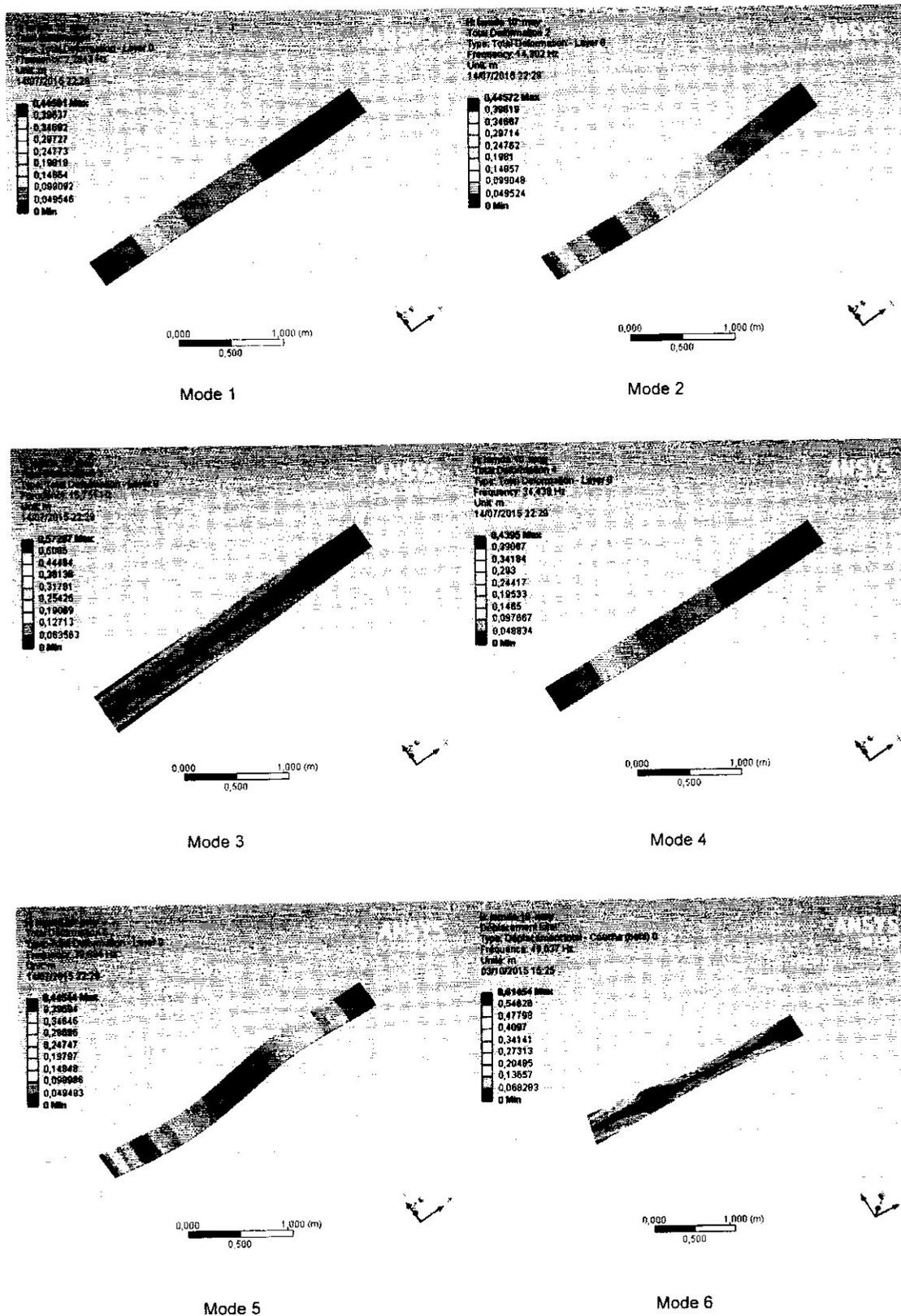


Figure V.13: Les six premiers modes pour une plaque orthotrope moyennement épaisse ($\lambda=10$)

Pour ce qui est des cinq derniers tableaux (V.08, V.09, V.10 et V.11) pour une plaque moyennement épaisse avec un matériau orthotrope, on voit clairement que l'augmentation de l'allongement influe négativement sur la qualité de la plaque, en effet; les valeurs des fréquences propres ont diminuée lorsqu'on a fait augmenter la valeur de l'allongement de 1 a 3 a 5 jusqu'à 10 donc la rigidité diminue.

D'après les deux cas étudiier pour une plaque moyennement épaisse, on voit clairement que l'utilisation des matériaux composite offre une meilleure rigidité que celle apportée par un matériau isotrope de même géométrie et avec les valeurs de l'allongement (1, 3, 5 et 10) respectivement

V.4.COMPARAISONS ENTRE LES DIFFERENTS TYPES DE PLAQUE

Dans cette partie on fixe l'allongement ($\lambda=5$) et on change le type de plaque (mince, moyennement épaisse et épaisse).

On garde le même matériau que ceux du premier cas et on refait le calcul pour les cas suivants :

V.4.1.Plaque mince

Une plaque de $L_x= 2.5m$ $L_y=0,5m$ $h=0,015m$:

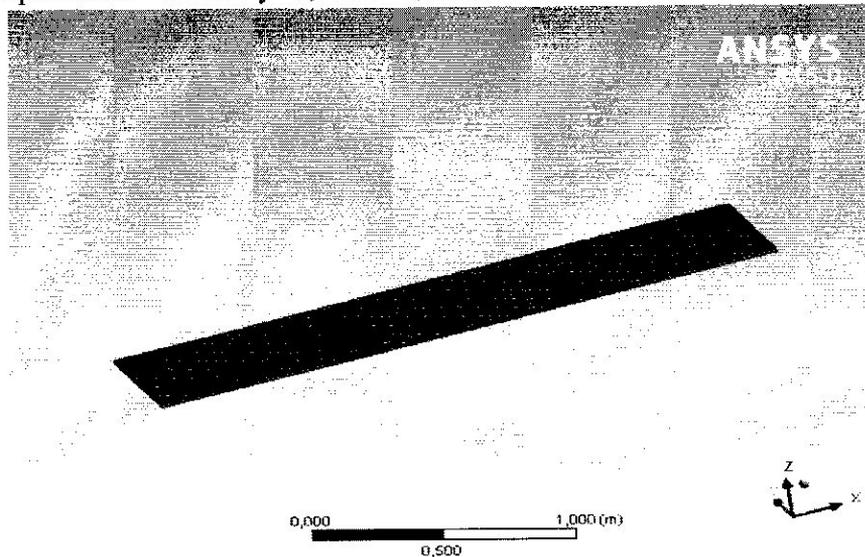


Figure V.14: Plaque obtenue par ANSYS (mince)

Tableau V.12 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (mince).

Les modes	Matlab	Ansyp	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	3.2952	3.291	3.5158	3.2897	0.12	1er mode de flexion
2	12.352	12.502	12.578	12.432	1.21	1er mode de torsion
3	21.063	20.74	21.981	20.586	1.53	2eme mode de flexion
4	41.682	41.765	42.252	41.226	0.19	2eme mode de torsion
5	61.397	58.752	61.388	57.516	4.30	3eme mode de flexion

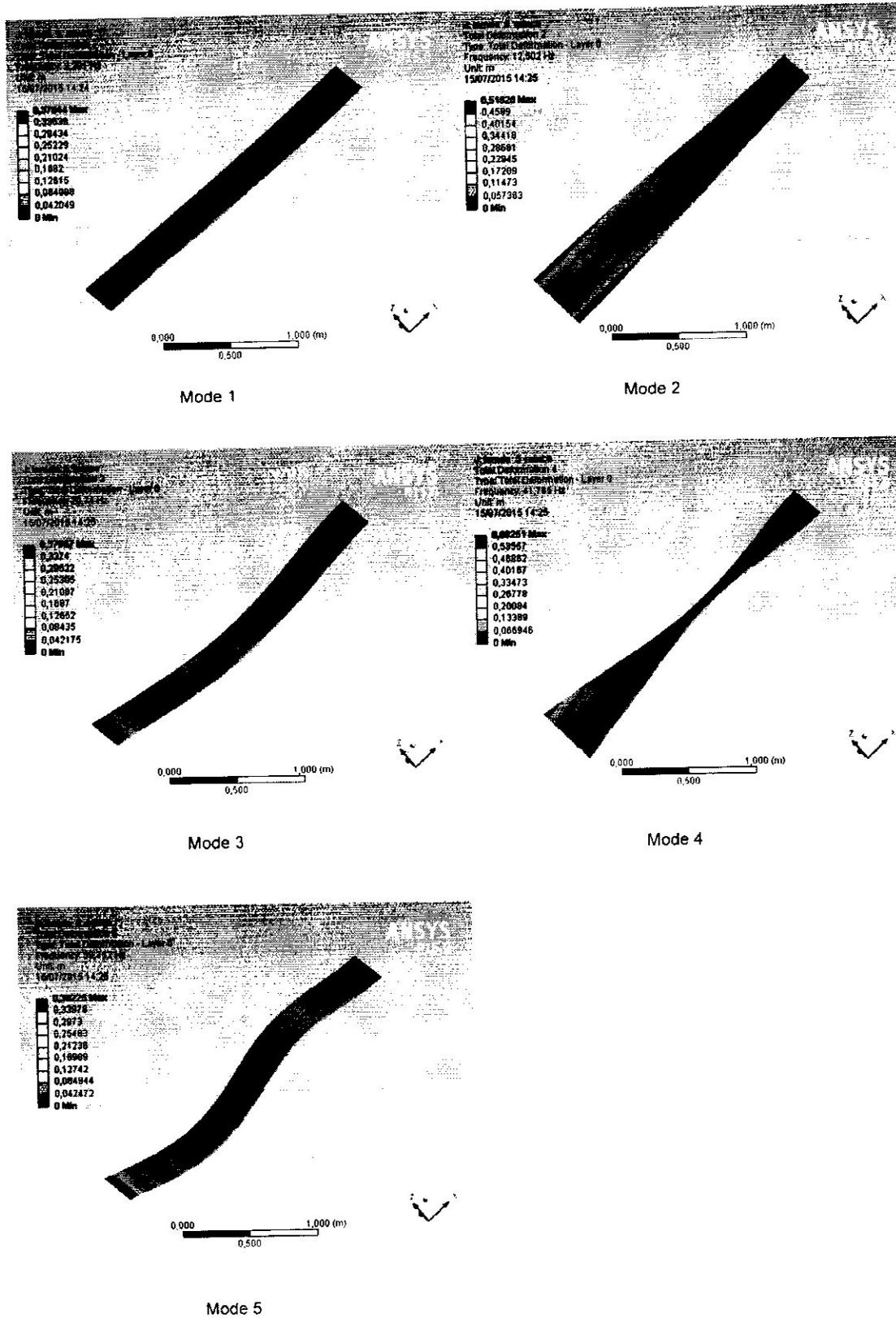


Figure V.15 : Les cinq premiers modes pour une plaque orthotrope mince ($\lambda=5$)

V.4.2. Plaque moyennement épaisse

Une plaque de $L_x=1,5\text{m}$ $L_y=0,3\text{m}$ $h=0,015\text{m}$:

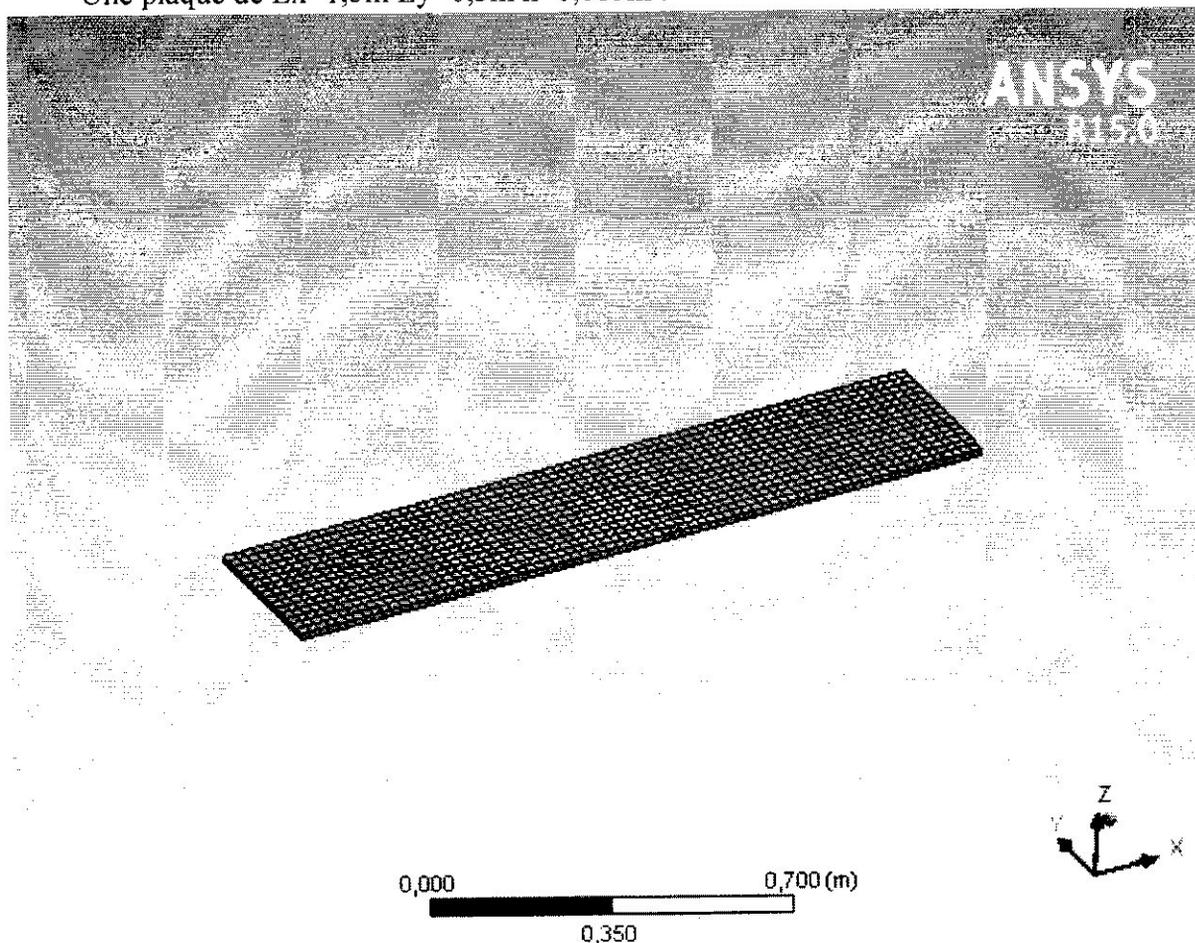
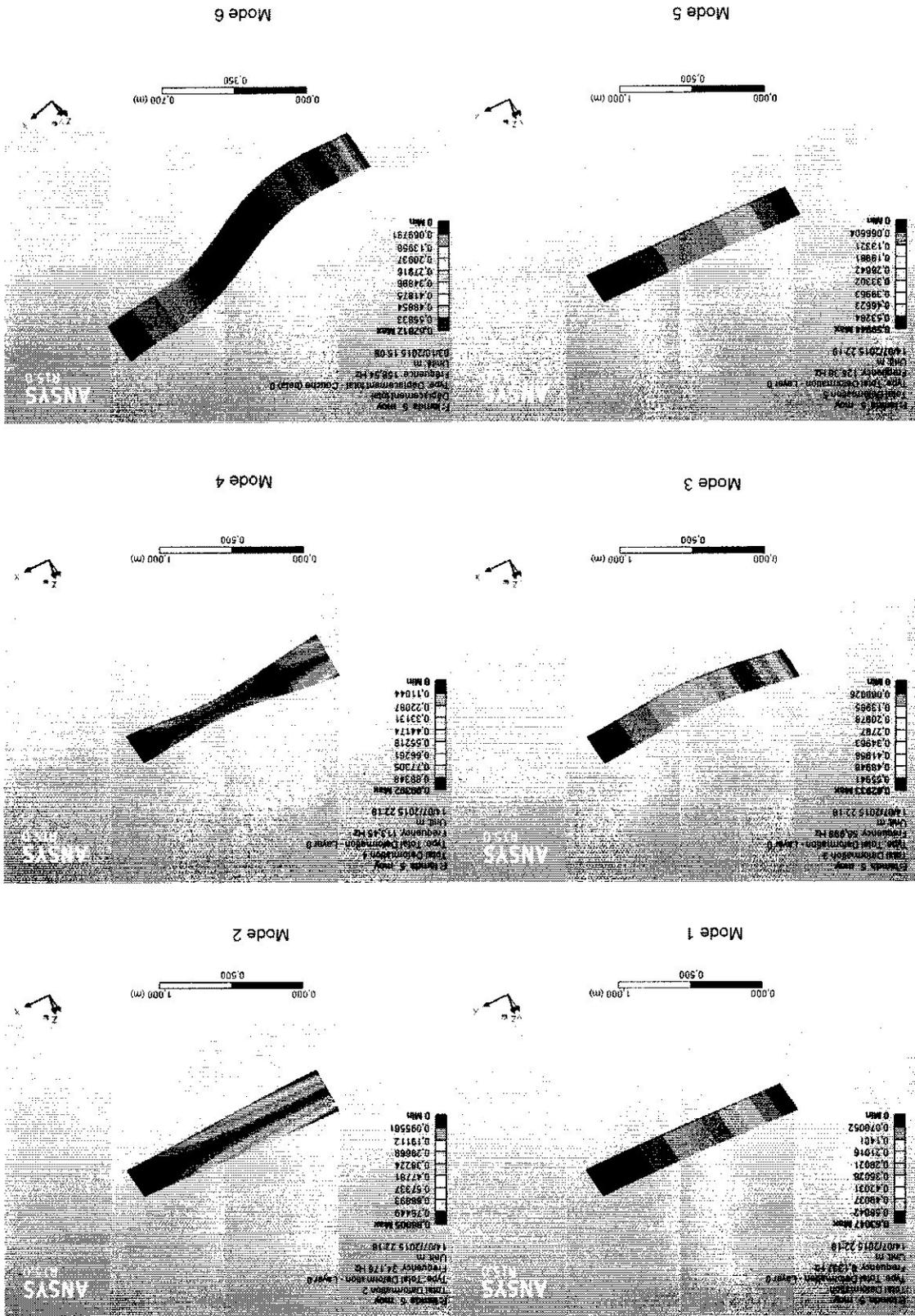


Figure V.16: Plaque obtenue par ANSYS (plaque moyennement)

Tableau V.13 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (plaque moyennement).

Les modes	Matlab	Ansyes	SolidWorks	Abaqus	Err (%)	type du mode
1	9.1440	9.1337	9.756	9.1338	0.11	1er mode de flexion
2	33.836	34.176	34.678	34.160	1.00	1er mode de torsion
3	58.083	56.998	60.866	57.017	1.86	2eme mode de flexion
4	113.75	113.45	116.34	113.40	0.26	2eme mode de torsion
5		126.36	159.21	126.16		1er mode latéral
6	160.45	158.54	169.37	158.69	1.19	3eme mode de flexion

Figure V.17 : Les six premiers modes pour une plaque orthotrope moyennement épaisse ($\lambda=5$)



V.4.3. Plaque épaisse

Une plaque de $L_x=0,3\text{m}$ $L_y=0,06\text{m}$ $h=0,015\text{m}$:

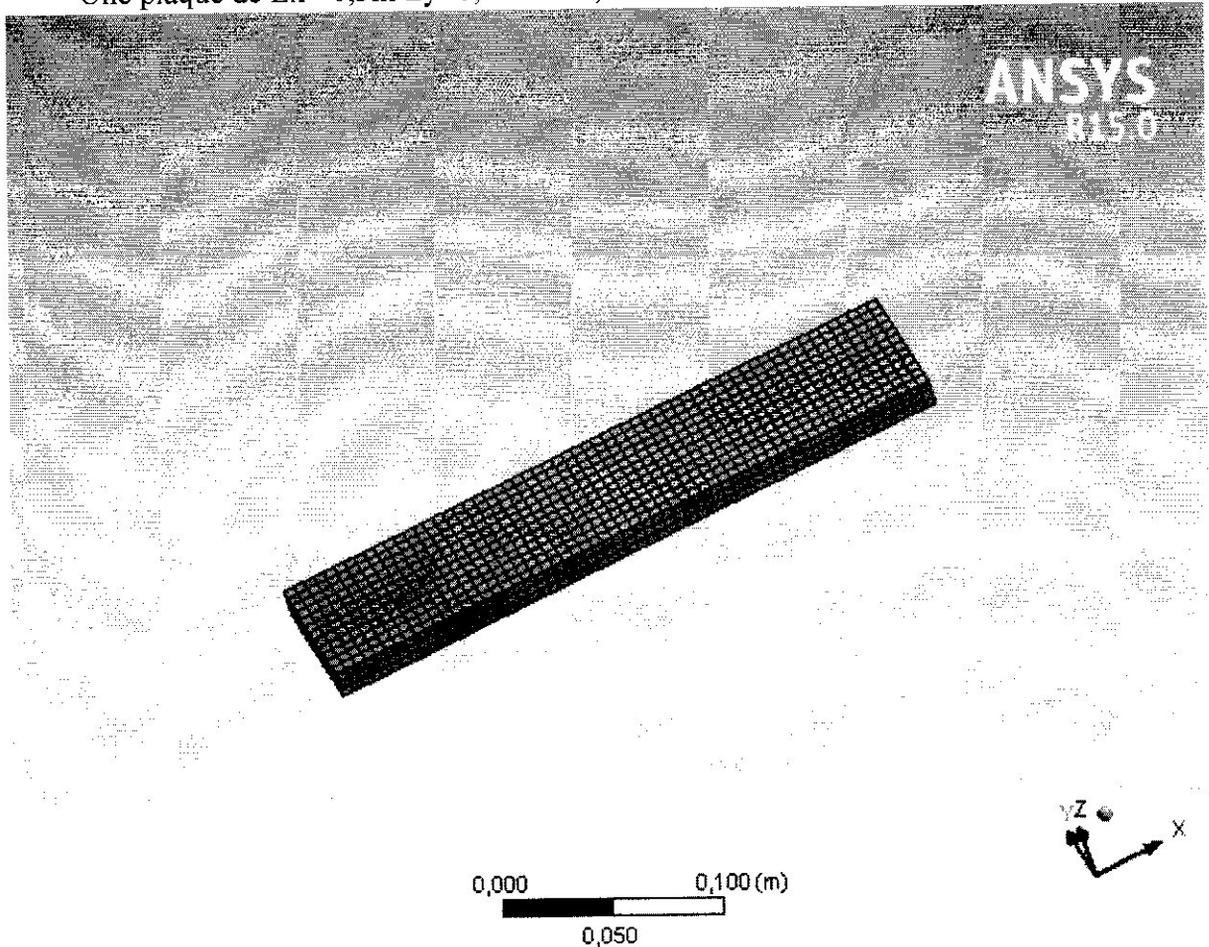


Figure V.18: Plaque obtenue par ANSYS (épaisse)

Tableau V.14 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (épaisse).

Les modes	Matlab	Ansys	SolidWorks	abaqus	Err (%)	type du mode
1	220.02	224,55	239.66	224.49	2.05	1er mode de flexion
2		635,15	731.72	625.80		1er mode latéral
3	679.34	746,41	819.97	732.24	9.87	1er mode de torsion
4	1155.15	1288,1	1369.6	1282.7	11.50	2eme mode de flexion
5	2097.44	2372,8	2475.4	2323.3	13.12	2eme mode de torsion

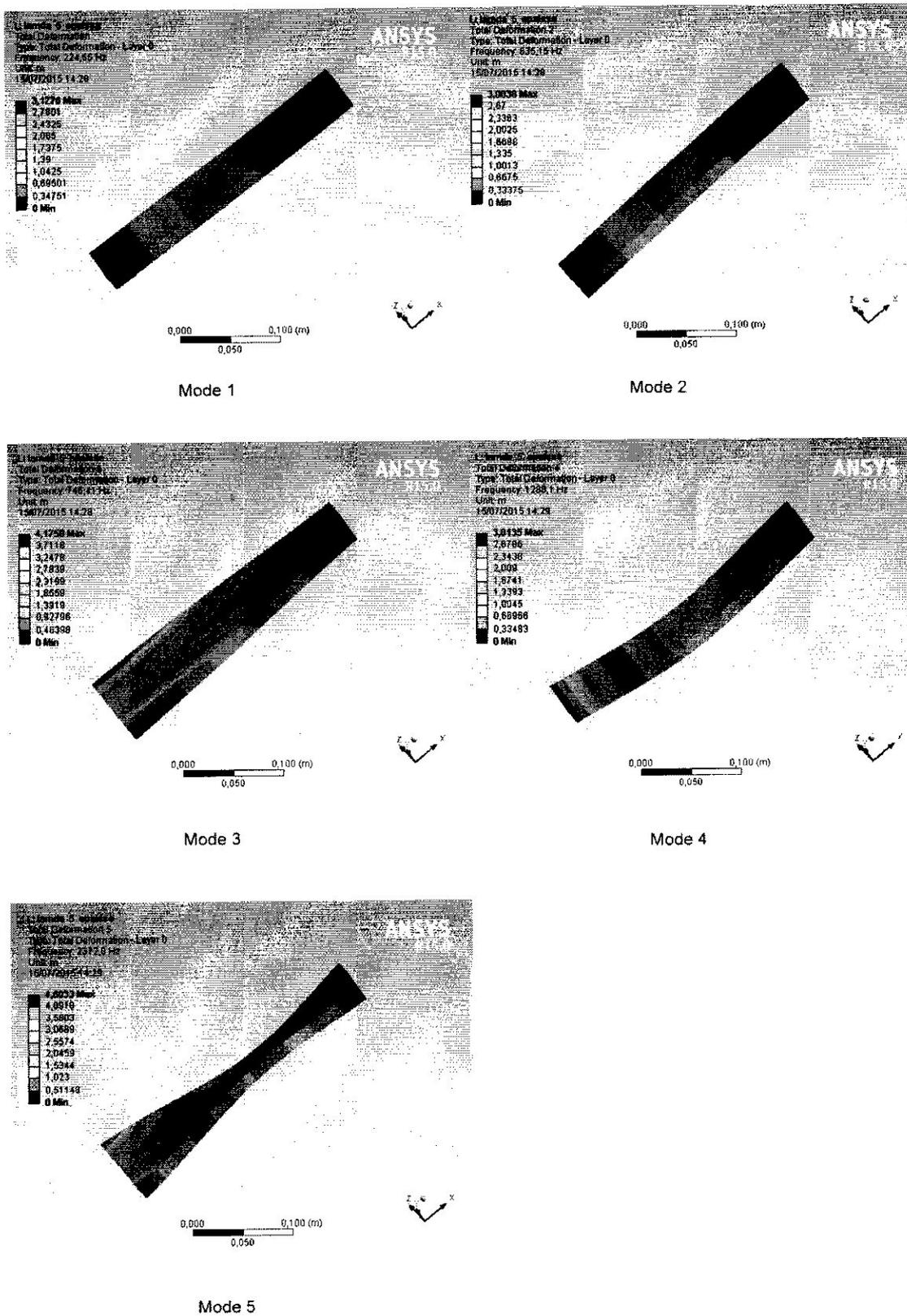


Figure V.19 : Les cinq premiers modes pour une plaque orthotrope épaisse ($\lambda=5$)

V.6.LES PLAQUES RENFORCEES

On prend une plaque moyennement épaisse en composite avec un allongement fixe ($\lambda = 5$) qu'on renforce à l'aide de deux poutres isotrope de différentes sections (carrée pleine, carrée creuse, en U, en I et en Z)

V.6.1.Assemblage 1

Les poutres sont carrées et pleines avec $b=h=0.0375\text{m}$ et $L_x=1.5\text{m}$

Les poutres sont fixées aux extrémités de la plaque :

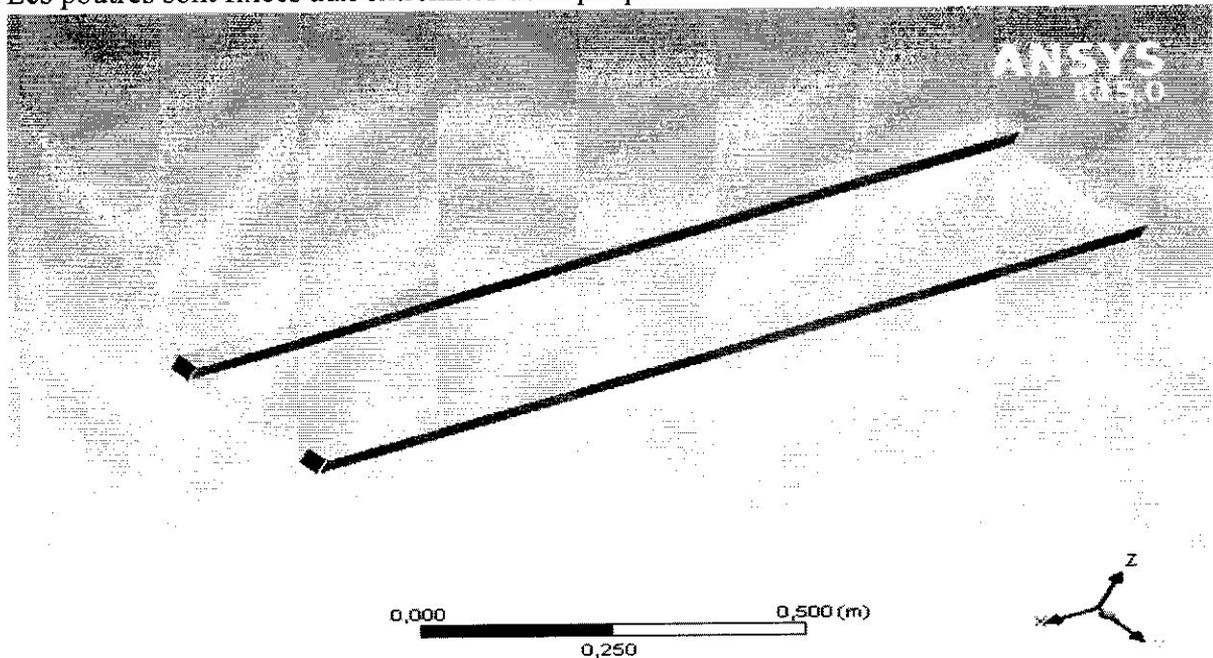


Figure V.20: Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage 1)

Tableau V.17: Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage 1).

Les mode	Ansys	SolidWorks	type du mode
1	15.577	16.458	1er mode de flexion
2	60.104	63.1	1er mode de torsion
3	94.844	99.268	2eme mode de flexion
4	108.22	112.18	1er mode latérale
5	147.11	185.82	2eme mode de torsion

On remarque que le fait de renforcer la plaque par des poutres augmente la rigidité de la structure, donc une plaque renforcée est meilleure qu'une plaque simple.

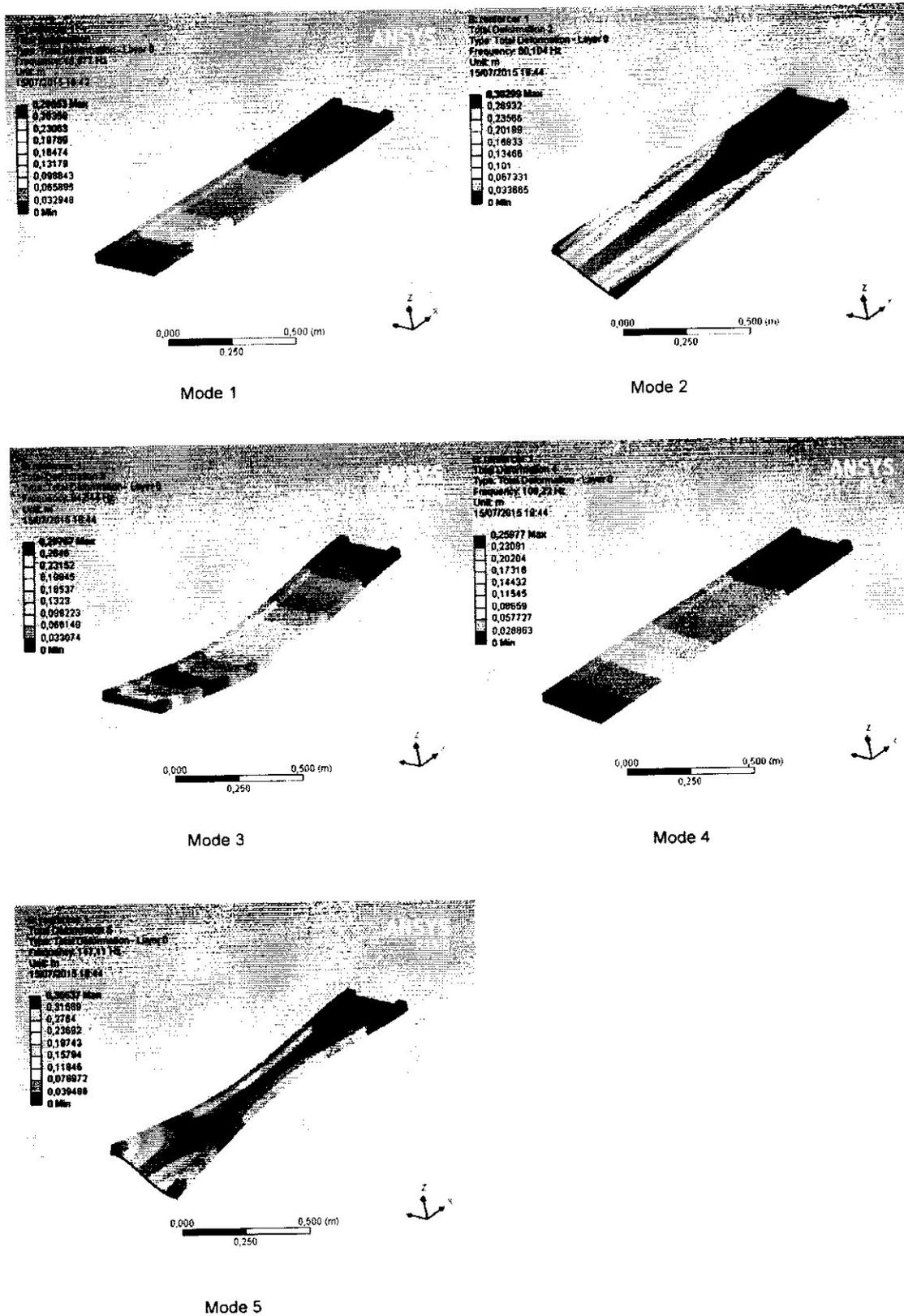


Figure V.21 : Les cinq premiers modes pour l'assemblage 1

V.6.2.Assemblage 2

Les poutres sont carrées et pleines avec $b=h=0.0375\text{m}$ et $L_x=1.5\text{m}$
 Les poutres sont à 0.0375m des extrémités de la plaque :

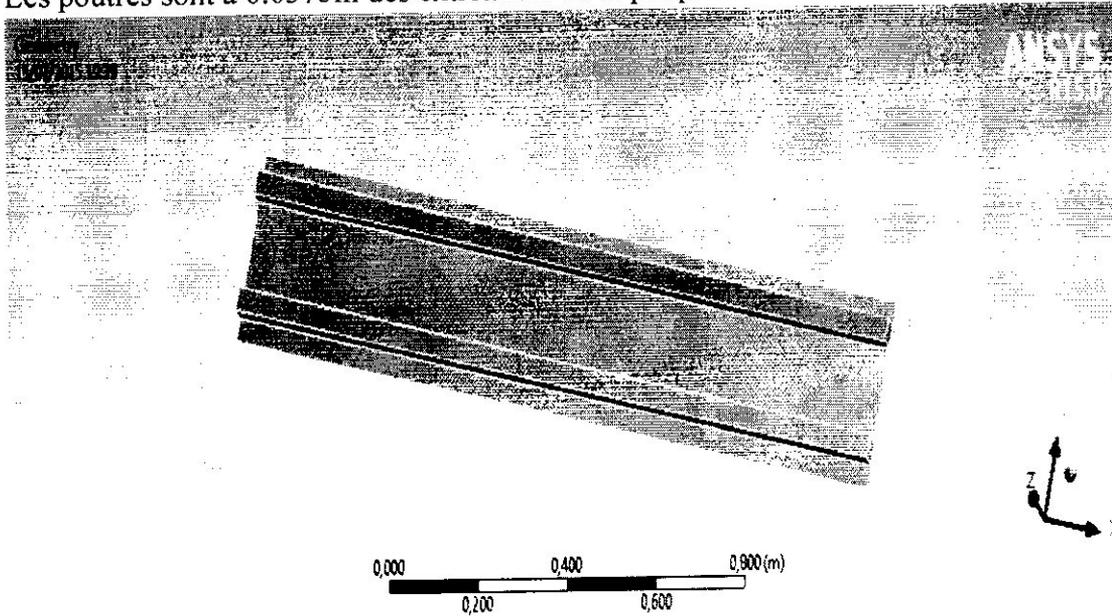


Figure V.22 : Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage 2)

Tableau V.18 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage 2).

Les mode	Ansys	SolidWorks	type du mode
1	15.669	16.547	1er mode de flexion
2	78.925	80.15	1er mode de torsion
3	97.02	100.52	2eme mode de flexion
4	99.442	101.1	2eme mode de torsion
5	202.24	237.24	3eme mode de torsion

On remarque une certaine amélioration de la rigidité de la structure après avoir rapproché les renforts vers le centre de la plaque.

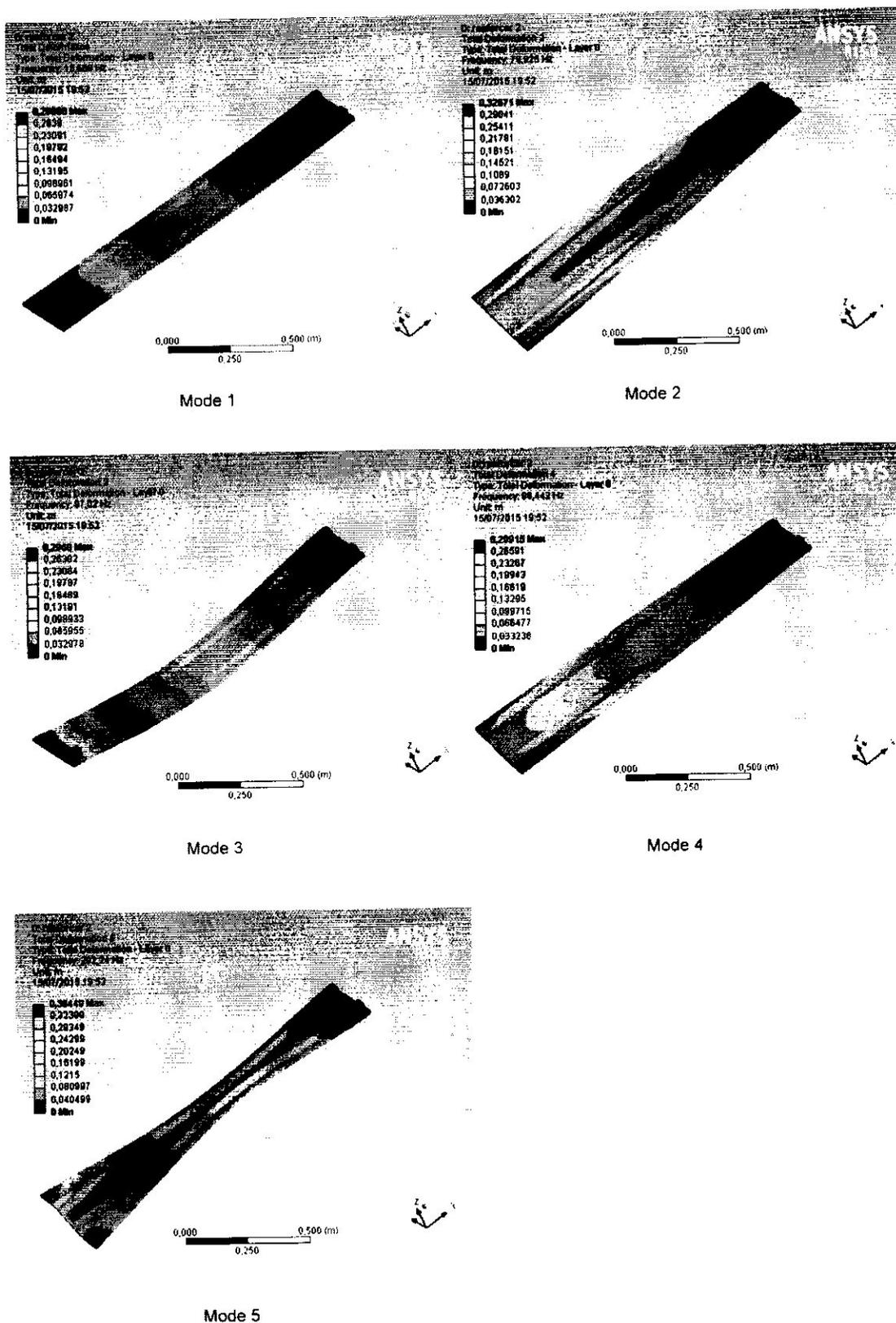


Figure V. 23: Les cinq premiers modes pour l'assemblage 2

V.6.3.Assemblage 3

Les poutres sont carrées et pleines avec $b=h=0.0375\text{m}$ et $L_x=1.5\text{m}$

Les poutres sont à 0.06m de l'extrémité de la plaque :

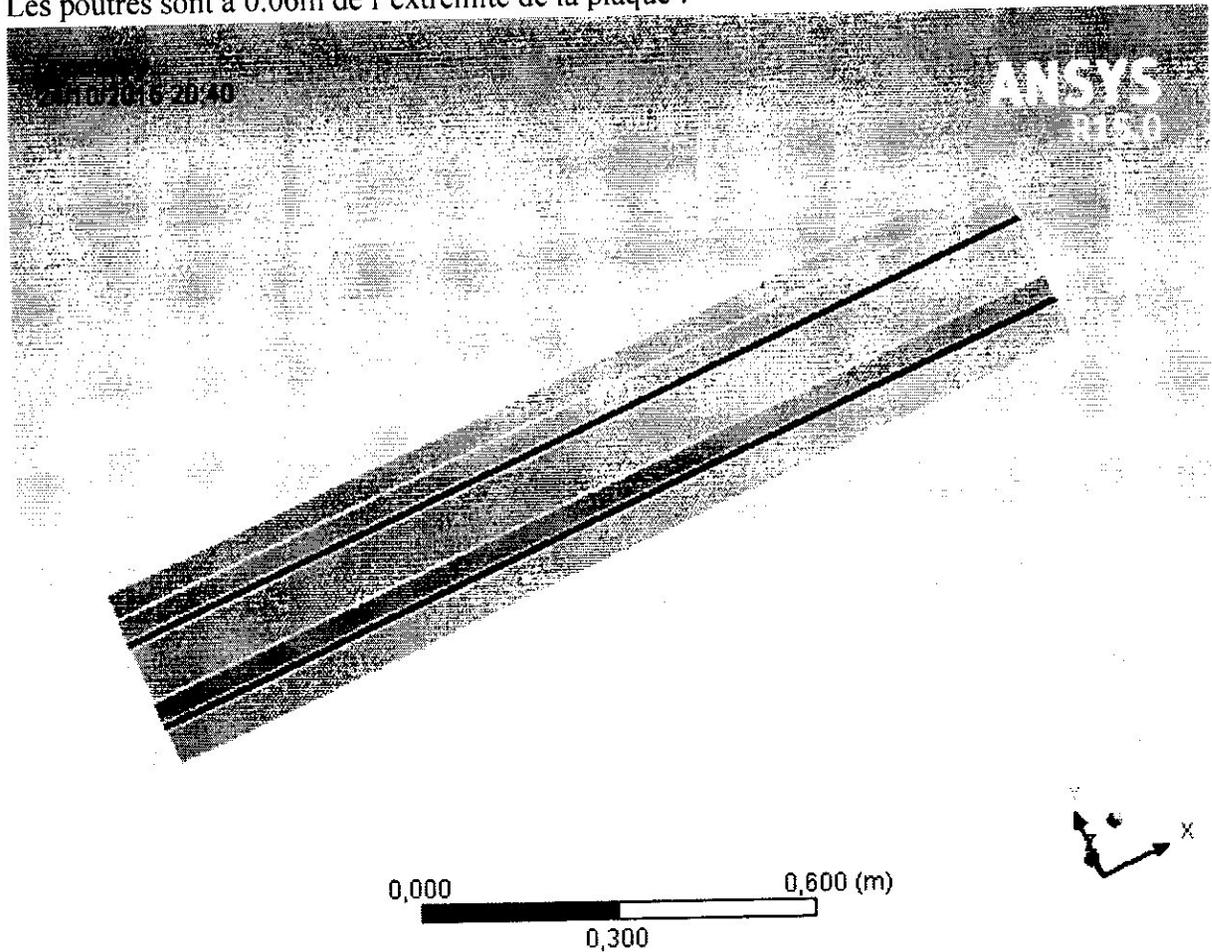


Figure V.24 : Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage 3)

Tableau V.19: Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage 3).

Les modes	Anslys	SolidWorks	type du mode
1	21.938	22.77	1er mode de flexion
2	77.691	80.15	1er mode de torsion
3	113.18	120.24	2eme mode de torsion
4	132.64	137.31	2eme mode de flexion
5	265.47	293.29	3eme mode de torsion

On voit clairement que cet assemblage a une meilleur rigidité que les deux premiers, dans ce qui suit on va continuer sur ce type de renfort pour plusieurs formes de sections (en U, en carrée creuse, en I et en Z)

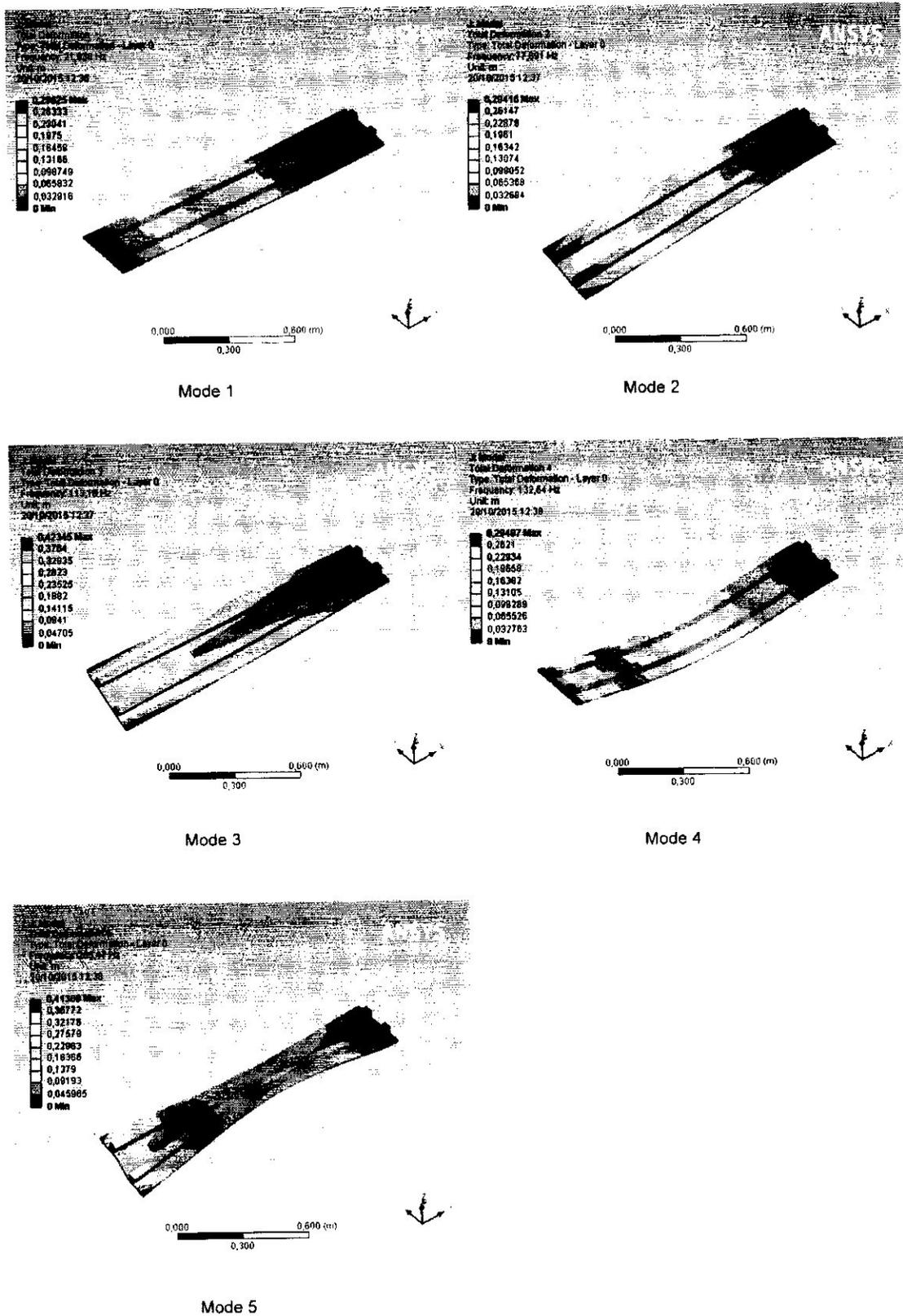


Figure V.25 : Les cinq premiers modes pour l' Assemblage 3

V.6.4. Assemblage avec poutre de section carrée creuse

Les poutres sont à 0.06m de l'extrémité de la plaque :

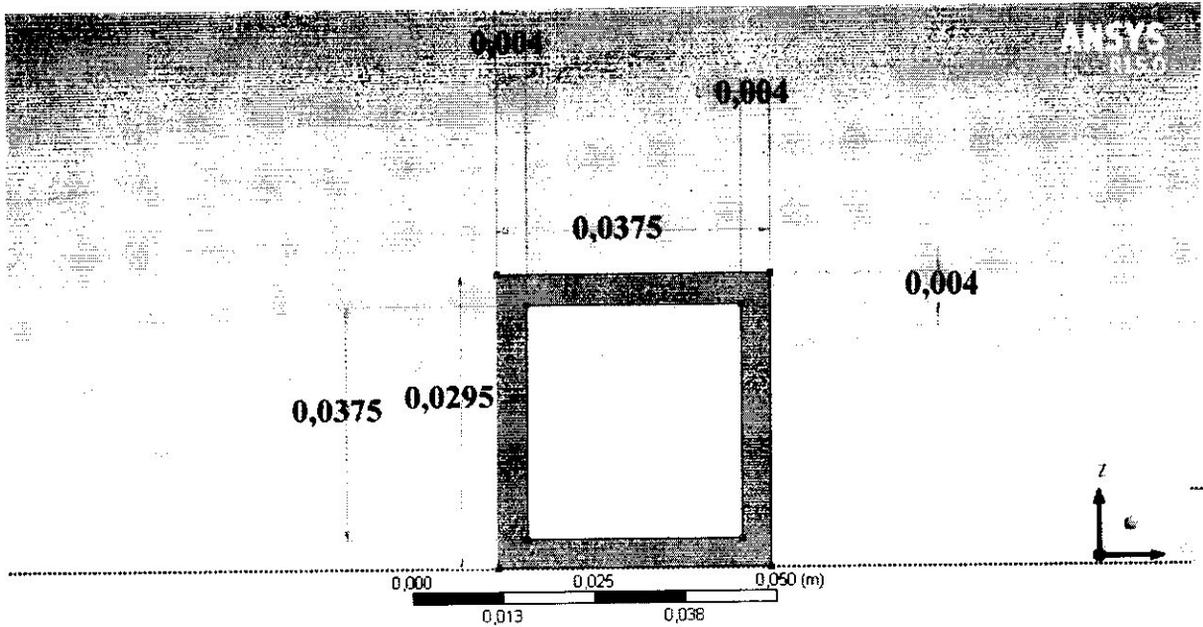


Figure V.26: section de la poutre (Assemblage de section carrée creuse)

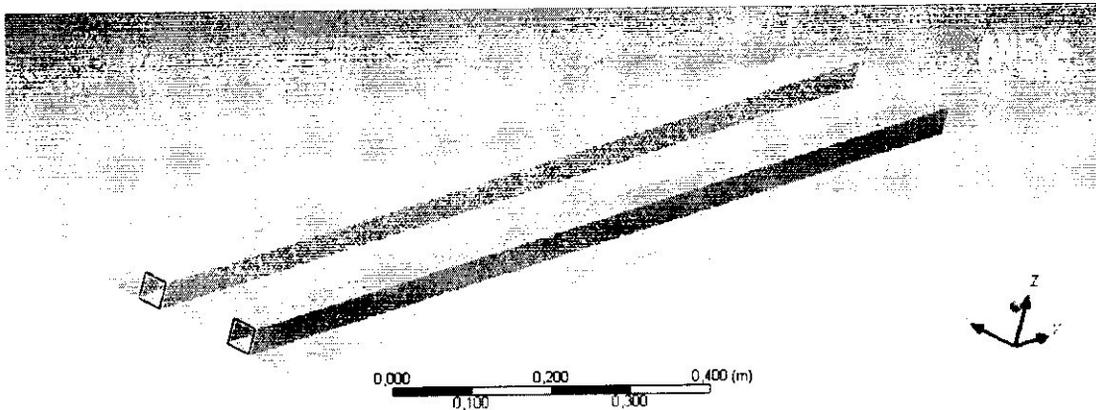


Figure V.27: Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage de section carrée creuse)

Tableau V.20 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage de section carrée creuse).

Les mode	Ansys	SolidWorks	type du mode
1	24.585	21.97	1er mode de flexion
2	93.72	101.76	1er mode de torsion
3	117.85	122.2	2eme mode de torsion
4	148.4	133.93	2eme mode de flexion
5	305.85	314.39	3eme mode de torsion

D'après l'augmentation des fréquences relativement, à celles obtenues par l'assemblage3, on voit que la forme creuse du renfort est mieux que celle de la section pleine à cause de la diminution du poids qui influe positivement sur la rigidité de la structure.

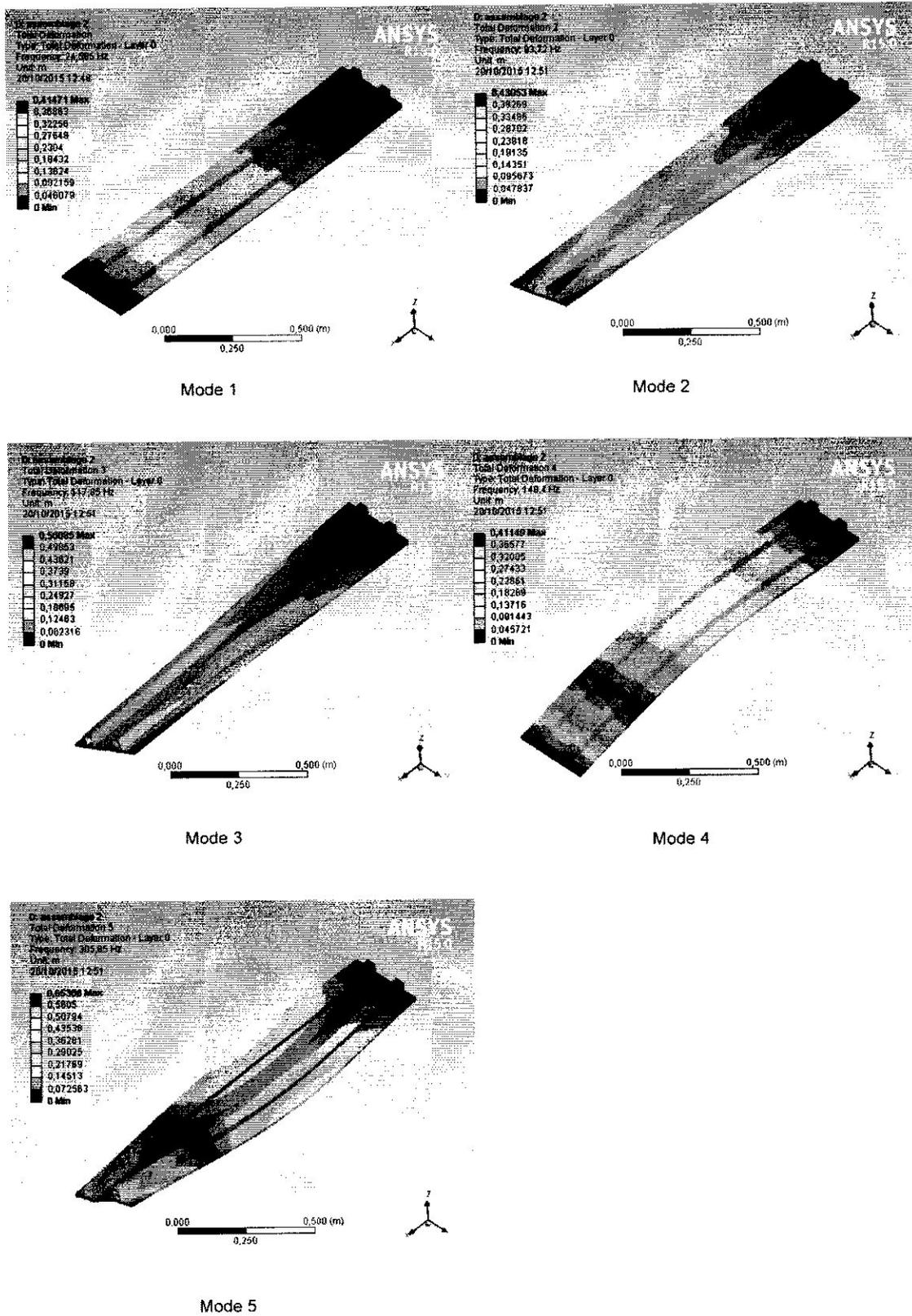


Figure V.28 : Les cinq premiers modes pour l'assemblage avec poutre de section carrée creuse

V.6.5. Assemblage avec poutre en U

Les poutres sont à 0.06m de l'extrémité de la plaque :

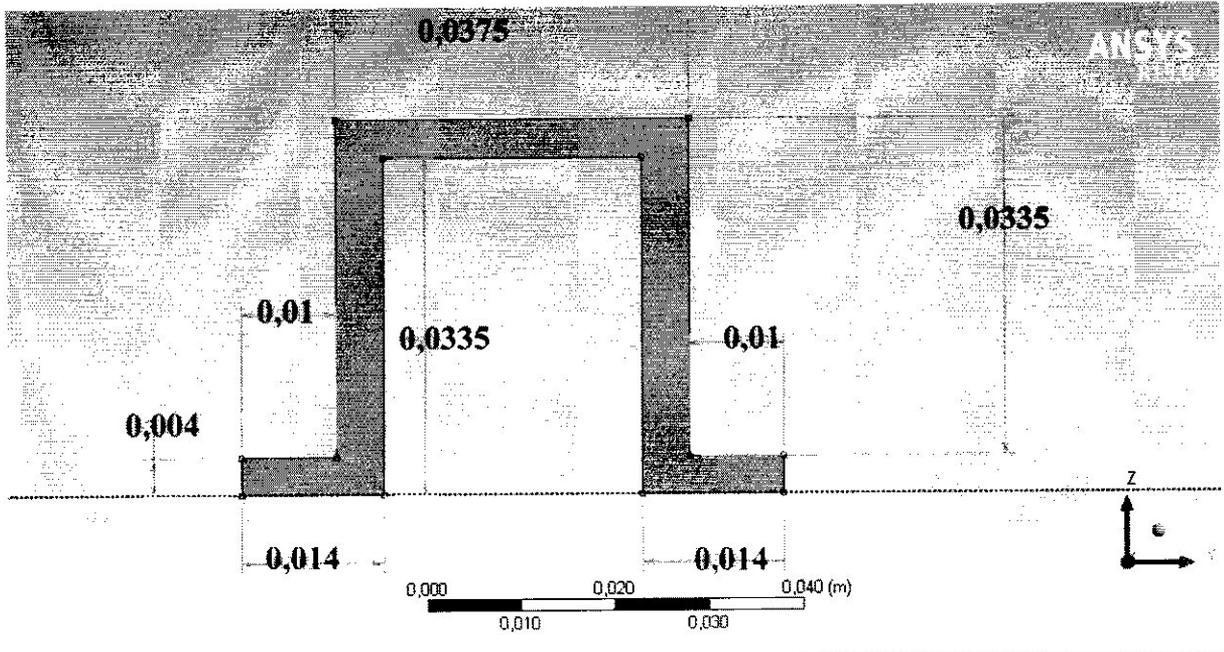


Figure V.29: section de la poutre (Assemblage en U)

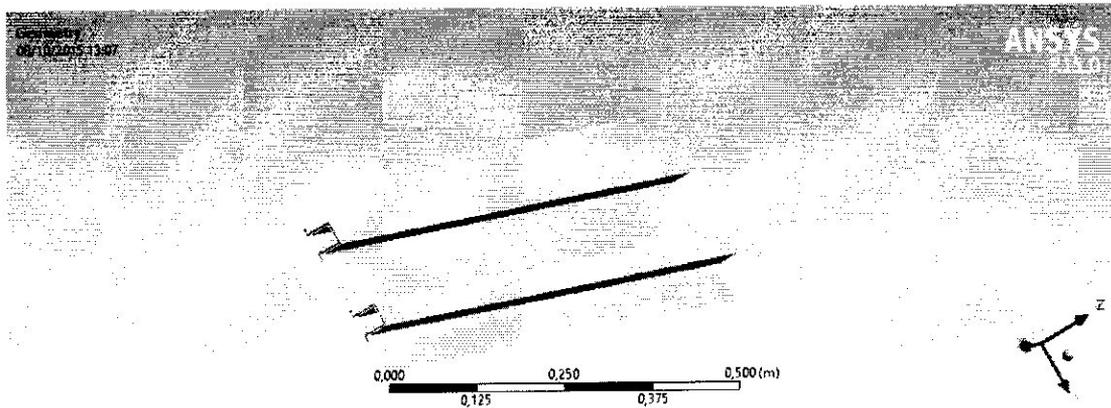


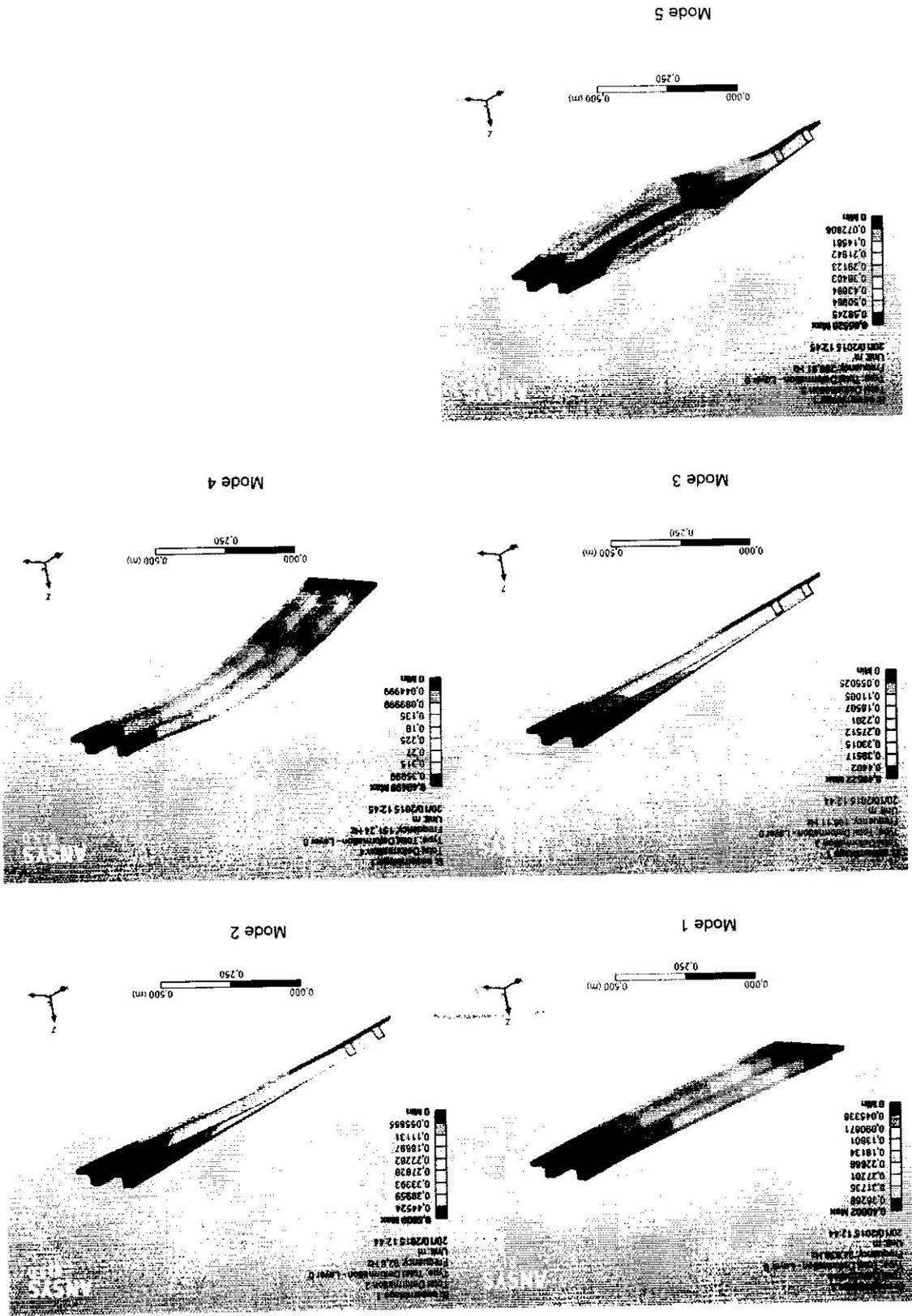
Figure V.30 : Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage en U)

Tableau V.21: Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage en U).

Les mode	Ansys	SolidWorks	type du mode
1	24.828	24.8	1er mode de flexion
2	94.612	96.556	1er mode de torsion
3	104.06	151.99	2eme mode de torsion
4	151.35	158.75	2eme mode de flexion
5	306.52	306.24	3eme mode de torsion

Les résultats de l'assemblage en U sont relativement les mêmes que ceux obtenus pour l'assemblage en carrée creuse. Donc les rigidités des structures sont compatibles.

Figure V.31: Les cinq premiers modes pour l'assemblage avec poutre en U



V.6.6.Assemblage avec poutre en I

Les poutres sont à 0.06m de l'extrémité de la plaque :

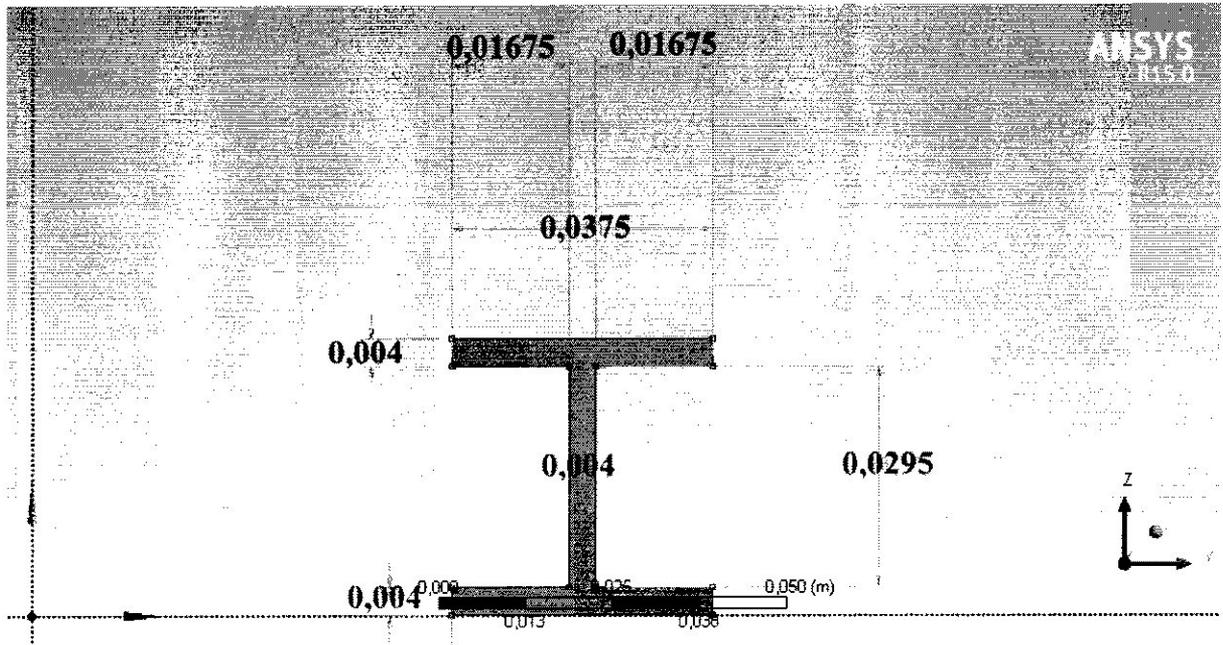


Figure V.32: section de la poutre (Assemblage en I)

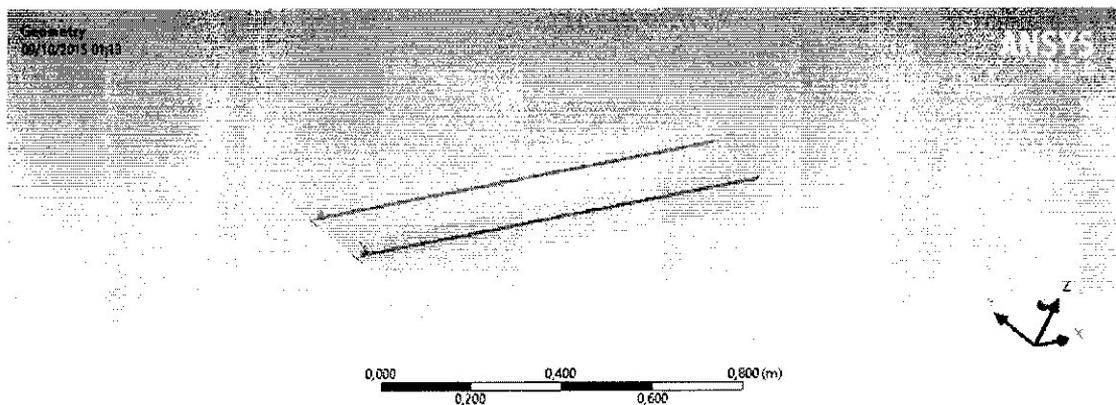


Figure V.33: Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage en I)

Tableau V.22 : Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage en I).

Les mode	Ansyes	SolidWorks	type du mode
1	24.714	22.571	1er mode de flexion
2	45.533	39.797	1er mode de torsion
3	106.11	120.05	1er mode latéral
4	148.88	135.9	2eme mode de flexion
5	175.56	156.49	3eme mode de torsion

D'après les résultats obtenus nous remarquons que cet assemblage tient bien en flexion, mais n'as pas une bonne rigidité en torsion comparée à celui de la structure précédente

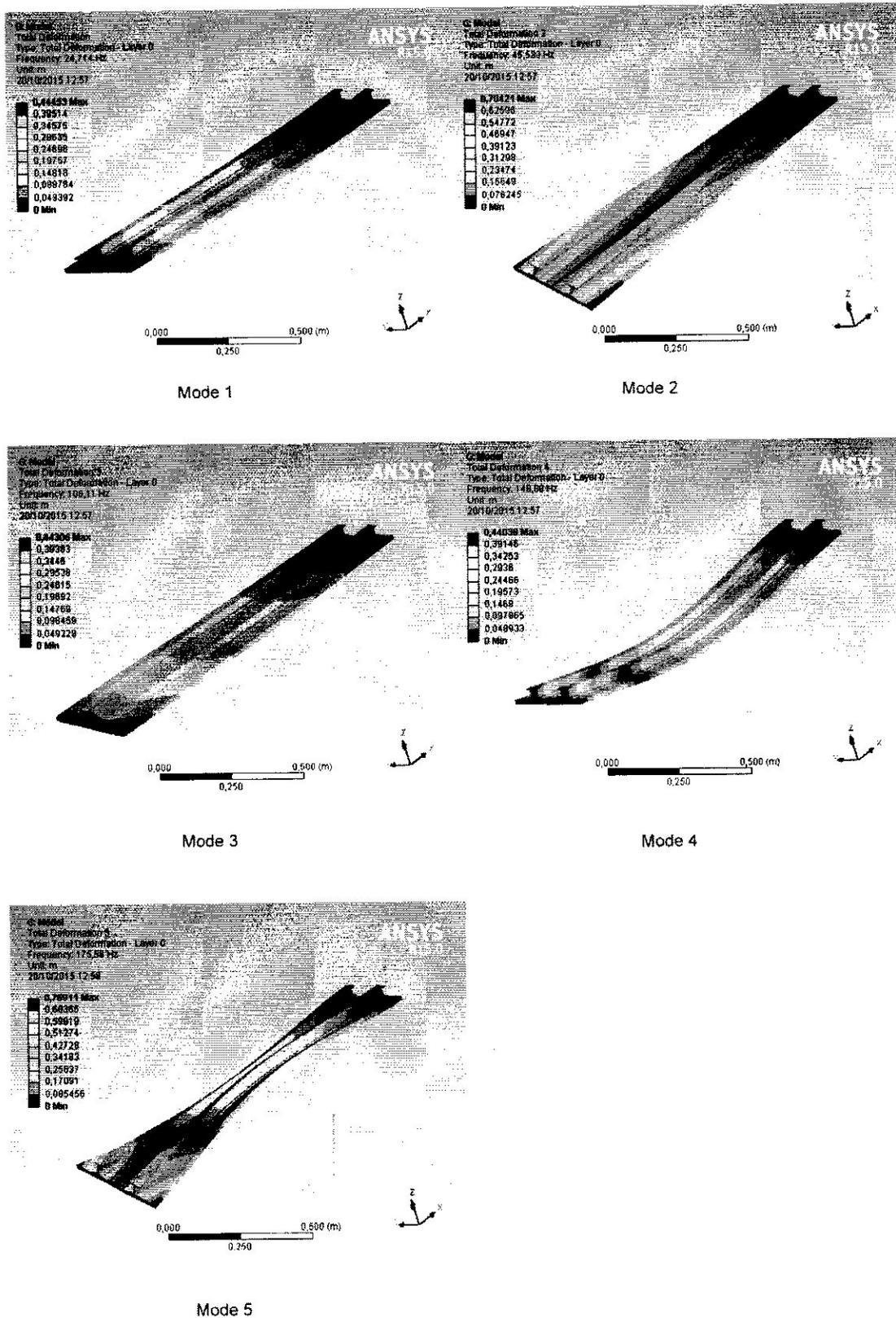


Figure V.34: Les cinq premiers modes pour l'assemblage avec poutre en I

V.6.7. Assemblage avec poutre en Z

Les poutres sont à 0.06m de l'extrémité de la plaque :

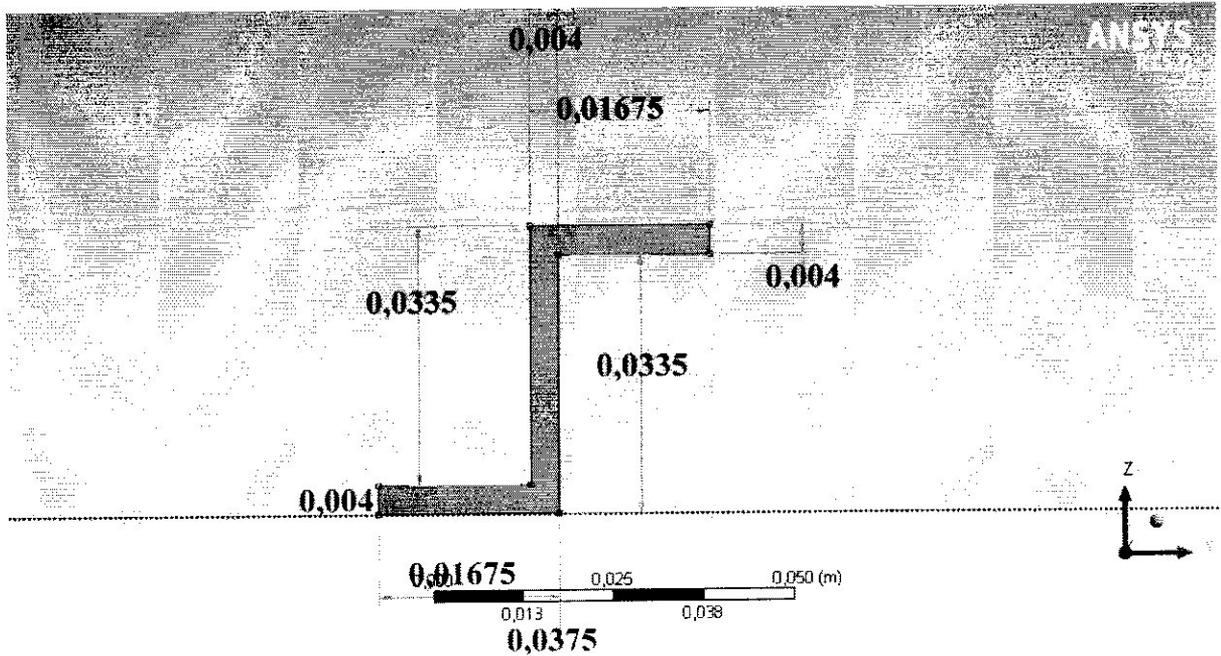


Figure V.35: section de la poutre (Assemblage en Z)

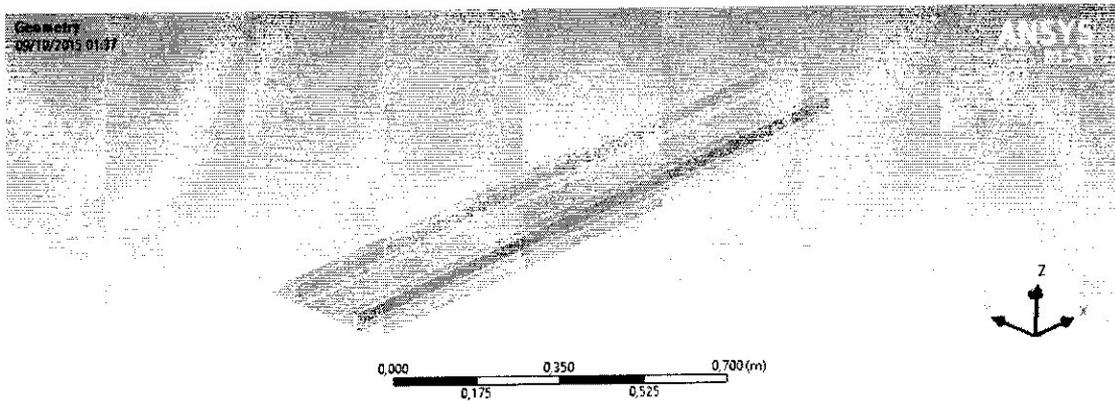


Figure V.36: Plaque renforcée obtenue par ANSYS (Assemblage en Z)

Tableau V.23: Les cinq premières fréquences propres de la plaque (Assemblage en Z).

Les mode	Ansys	SolidWorks	type du mode
1	23.501	20.656	1er mode de flexion
2	42.816	36.477	1er mode de torsion
3	112.99	123.89	1er mode latéral
4	139.82	132.44	2eme mode de flexion
5	172.85	150.72	3eme mode de torsion

D'après les résultats obtenus nous remarquons que cet assemblage a relativement les mêmes résultats que l'assemblage précédent, donc les mêmes caractéristiques de flexion et de torsion.

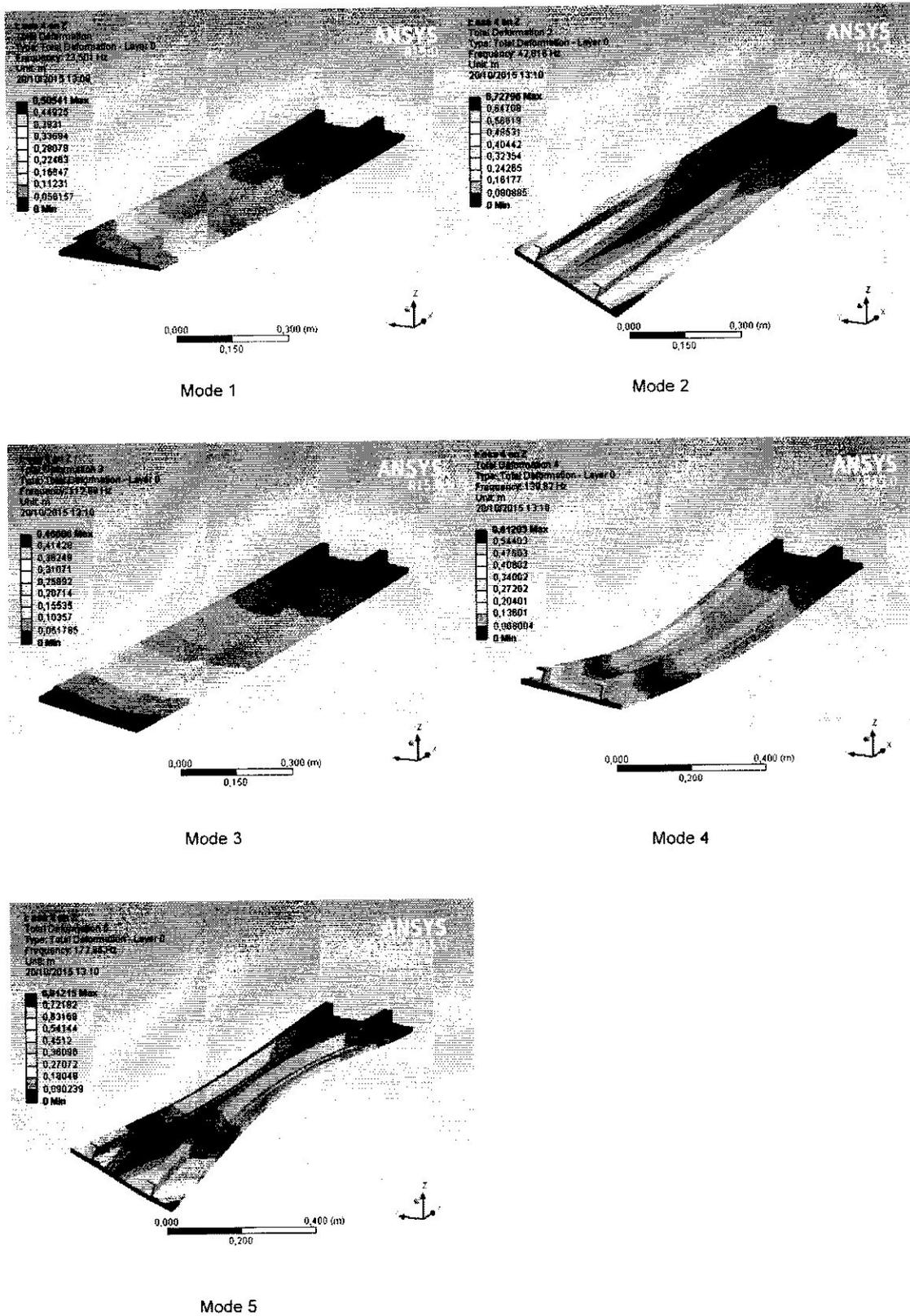
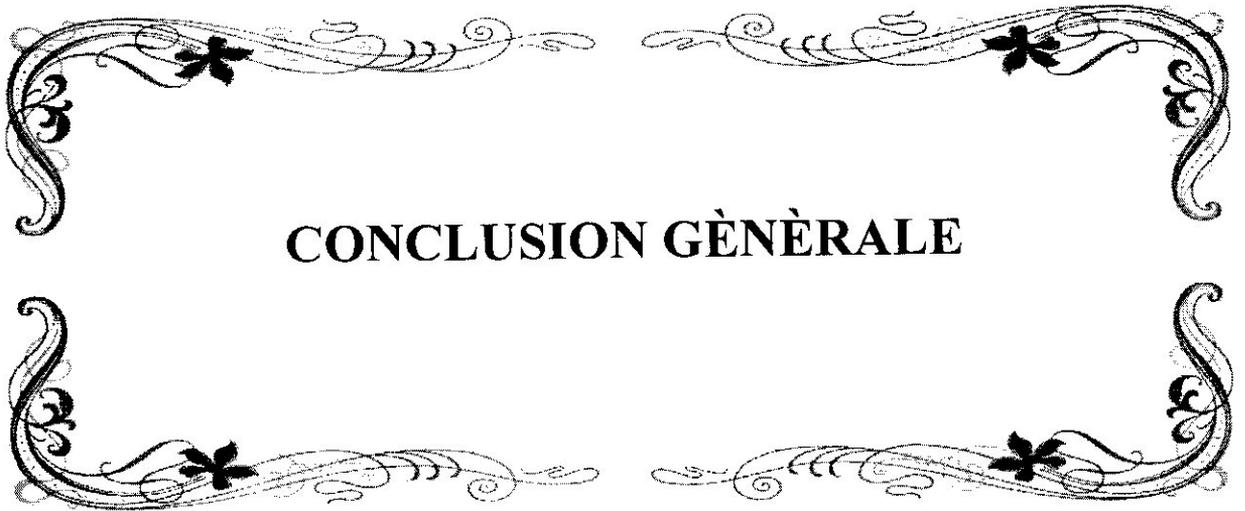


Figure V.37 : Les cinq premiers modes pour l'assemblage avec poutre en Z

V.7.CONCLUSION

On peut dire donc que notre programme de calcul donne de bons résultats pour la flexion et la torsion des plaques minces et moyennement épaisses, d'une part, et des résultats relativement bons pour les plaques épaisses, d'autre part. Cependant, en ce qui concerne les modes membranes le modèle théorique nécessite la prise en compte des effets des forces résultantes (N_x , N_y et N_{xy}) en considérant les déplacements dans le plan (x,y) .



CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GENERALE

La modélisation joue un rôle très important pour analyser le phénomène qui entoure l'avion (aéroélasticité, optimisation, calcul vibratoire ... etc.).

Durant ce projet, nous avons eu l'occasion d'apprendre la modélisation théorique, la simulation numérique et la programmation en MATLAB dans le domaine des structures composites. De plus, l'utilisation de l'outil CAO (ANSYS, SOLIDWORKS et ABAQUS) a été bénéfique aussi bien pour notre projet que pour notre complément de formation.

Les résultats de toute l'étude ci-dessus montrent clairement la validité de notre programme de calcul (Matlab) car les erreurs relatives sur les fréquences et les modes sont très petites comparées avec les autres logiciels de calcul (ANSYS - SOLIDWORKS - ABAQUS).

Quelques conclusions peuvent être tirées de notre travail, d'abord de l'étude théorique présentée et des résultats numériques obtenus :

- ✓ D'après le calcul numérique, la méthode des éléments finis a donné de très bons résultats comparés aux autres logiciels de calculs.
- ✓ La notion d'une plaque épaisse, moyennement épaisse ou mince est basée sur les dimensions relatives de cette plaque, c'est-à-dire les rapports épaisseur-longueur et épaisseur-largeur.
- ✓ Les matériaux composites nous offrent une grande rigidité comparée aux matériaux isotropes ce qui démontre sa grande importance et ses vastes domaines d'utilisation.
- ✓ Le fait de faire un arrangement entre les dimensions de la plaque et le matériau utilisé et les renforts offre une meilleure rigidité à un poids minimal.
- ✓ La structure qui se compose d'une plaque et d'une poutre, ayant un meilleur comportement statique et dynamique avec le minimum de poids, elle est utilisée dans la majorité des domaines que ce soit dans le domaine aéronautique, spatiale, naval...etc.

Par ailleurs le fait d'utiliser trois logiciels en plus que celui de programmation nous a pris énormément de temps. De plus la complexité d'utilisation de ces logiciels a rendu difficile la réalisation de ce projet.

Enfin, on souhaite que notre modeste travail satisfasse tout lecteur et participe dans le développement de cet axe de recherche et aussi servira les étudiants, particulièrement de l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales, pour leurs travaux de recherche.

REFERENCES

- [1] :A. Poujade. 'Cellule et systèmes. 'Institut aéronautique jaen memroz édition 1985
- [2] : J.c.Ripoll. Cellule circuits. 3^{ème}Edition 1990
- [3] :Cours sur sites internet : « matériaux composites », [htt://w.w.w. Nadia Bahlouli.fr](http://w.w.w.NadiaBahlouli.fr).
- [4] :C.W. Bert, Recentresearch in composite, and sandwich plate dynamics(1982)
- [5] :Daniel Gay Matériaux composites 4^{ème}Edition 1997. Paris.
- [6] :REMOND Y. & LAMON J. 'Matériaux composites, Elaboration- conception – Structure - Comportement mécanique'. Volume 1, Strasbourg 12,13 et 14 mars 2003.
- [7] :CHeridi Houda Magister en Genie Mecanique :Analyse dynamique des plaques minces et épaisses: Application aux matériaux homogènes et non homogènes.Uni. Constantine.
- [8] :JucJaouen:"Vibration de flexion des plaques" , Rapport de recherché/ Université de Sherbrooke , 2002
- [9]:Philippe Mestat "Etude critique des modelisations de plaques encastées en vibration" ,Travail de fin d'etudes (Memoire de DEA) , 2juin 1981
- [10] : Mehmet Cem Ece et Metin Aydogdu et Vedat Taskin: vibration of variable cross-section beam.2006
- [11] :J.M. Berthelot –Matériaux composites .Comportement mécanique et analyse des structures. Masson, Paris 1992.
- [12] : ROBERT M. JONES. 'Mechanics of composite materials'.Blacksburg.1999.
- [13] :George H. Staab. 'Laminar composites'. 1999
- [14] :KHODJET-KESBA Mohamed Magister en Genie Aéronautique:Effet et analyse des fissurations dans les materiaux composites vieillis .UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA Faculté des Sciences de l'Ingénieur Département d'Aéronautique
- [15]:Michel cazenave.'Méthodes des éléments finis approche pratique en mécanique des structures'. dunod paris 2010
- [16]:Kwon, W.Y and Bang, H "The Finite Element Method using Matlab", CRC Presse (1997).
- [17]:Zienkiewicz and R.L. Taylor.The Finite ElementMethod Volume 2: Solid Mechanics Fifth edition 2000.
- [18] : Amar Khennane introduction to finite element analysis using MATLAB and abaqus.CRC Press Taylor & Francis group 2013.

- [19] : G.R. Liu and S.S. Quek. 'The Finite Element Method A practical course'. 2003
- [20] : A.J.M. Ferreira. ' MATLAB Codes for Finite Element Analysis Solids and Structures. 2008
- [21] : Achraf TAFLA Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne .Mécanique: éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs dus à l'aillement pour les plaques et les coques composites multicouches.
- [22] : Barbero E. J., 1998: Introduction to composite materials design. Taylor & Francis.
- [23] : Jean COURBON Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées : plaques minces élastiques
- [24] : S.G. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Gordon & Breach, Science Publisher, Ltd, 8 Bloomsbury Way London, W, C, I (1968).
- [25] : E. Hinton and D.R.J. Owen. 'Finite element programming'. ACADEMIC PRESS 1977.
- [26] : Adrian Biran et Moshe Breiner, MATLAB pour l'ingénieur : Versions 6 et 7, Pearson Education, 2004
- [27] : Jean-Thierry Lapresté, Introduction à MATLAB, Ellipses, 2005
- [28] : MESSAOUDI.Y, FETTANE.Mimoun, "ETUDE DYNAMIQUE DES PLAQUES COMPOSITES MOYENNEMENT EPAISSES PAR LA METHODE DES ÉLEMENTS FINIS " Mémoire Master, Département d'Aéronautique, Université de Blida, (2013/2014).
- [29] : J.R. Banerjee, H.Su, C. Jayatunya "A dynamic stiffness element for free vibration analysis of composite beams and its application to aircraft wings " computers and structures 86 (2008) 573-579

Liste des annexes

- ANNEXE A
- ANNEXE B
- ANNEXE C
- ANNEXE D

ANNEXE A

A.1. DEFINITION

A.1.1. Définition de repère locale (L.T)

C'est un repère qui est lié à la couche dans le direction L est parallèle à la fibre et la direction T et perpendiculaire à la fibre.

L : direction longitudinale.

T : direction transversale.

A.1.2. Définition de repère globale (x,y,z)

Le repère globale est un repère lié au stratifié dont la direction L de la fibre fait un angle θ avec l'axe (x).

A.2.CHANGEMENT DE BASE

Considérons deux systèmes de références orthonormés (x, y, z) et $(1,2,3)$ dont leurs bases sont respectivement $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (Figure A2.1).

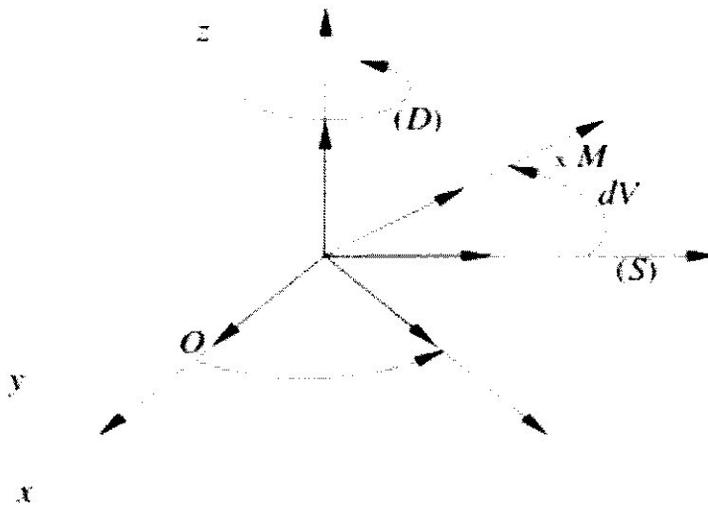


Figure A2.1.Schéma d'un changement de base.

Dans le cas d'une rotation θ autour de la direction \vec{e}_z , la relation entre les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \\ \vec{e}_2 &= -\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z\end{aligned}\tag{A2.1}$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

Avec:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.3})$$

La matrice $[A]$ s'appelle la matrice de changement de base.

Le passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'effectue par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = [A^T] \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.5})$$

Avec:

$$[A^T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.6})$$

La matrice $[A^T]$ est la matrice transposée de la matrice $[A]$, elle est égale à son inverse.

A.3. LA MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE DES CONTRAINTES

En tout point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $[\sigma(M)]_{xyz}$. Ce tenseur est symétrique, il est représenté par la matrice :

$$[\sigma(M)]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A2.7})$$

Le tenseur $[\sigma(M)]_{xyz}$ défini dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ peut être défini dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la relation matricielle suivante [4] :

$$[\sigma]_{123} = [A][\sigma]_{xyz}[A^T] \quad (\text{A2.8})$$

La relation inverse s'écrit :

$$[\sigma]_{xyz} = [A^T][\sigma]_{123}[A] \quad (A2.9)$$

Où :

$$[\sigma(M)]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (A2.10)$$

La relation (A2.8) conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \cos^2 \theta \\ \sigma_3 &= \sigma_z \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma_y \cos \theta \sin \theta \\ \tau_{23} &= -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta \\ \tau_{13} &= \tau_{xy} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta \end{aligned} \quad (A2.11)$$

La relation (A2.14) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (A2.12)$$

Ou sous forme contractée :

$$[\sigma]_{123} = [T][\sigma]_{xyz} \quad (A2.13)$$

[T] : est la matrice de changement de base des contraintes.

A.4. LA MATRICE DE CHANGEMENT DE BASE DES DEFORMATIONS

Le tenseur des déformations ayant un tableau des composantes semblable à celui des contraintes :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (A2.14)$$

Les relations de changement de base s'expriment sous la même forme que celles du tenseur des contraintes.

Tenons compte de la relation

$$\varepsilon_{ij} = 2\gamma_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad \text{Et } i \neq j \quad (A2.15)$$

L'expression (A2.11) rapportée au champ des déformations conduit à écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.16})$$

Ou sous forme contractée :

$$[\varepsilon]_{123} = [T'][\varepsilon]_{xyz} \quad (\text{A2.17})$$

ANNEXE B

B.1. DEFINITON

ANSYS, Inc. est un éditeur de logiciels spécialisé en simulation numérique. L'entreprise a son siège à Canonsburg en Pennsylvanie aux États-Unis. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles préalablement discrétisés. La société possède de nombreuses filiales à travers le monde, notamment en Europe et en Asie.

Ce produit permet d'effectuer des simulations mécaniques en calcul de structures

B.2. LES ETAPE UTILISEES

Après avoir ouvert le logiciel on clique sur modal, puis on la fait glissés sur notre plan de travaille

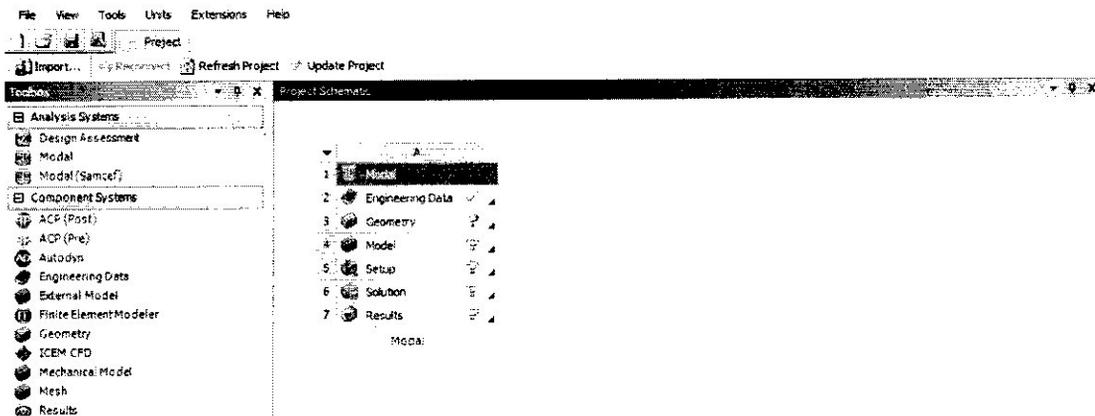


Figure B.01 : Etape 01 de programmations pour ansys

Puis on clique sur « engineering data » pour choisir notre matériel

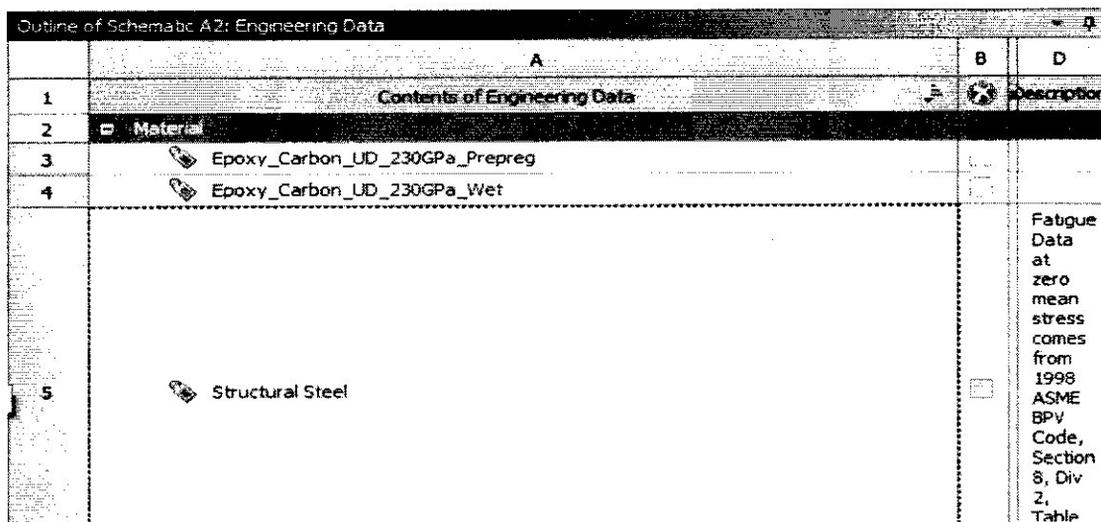


Figure B.02: Etape 02 de programmations ansys

Ensuite on clique sur « geometry » pour dessiner notre pièce

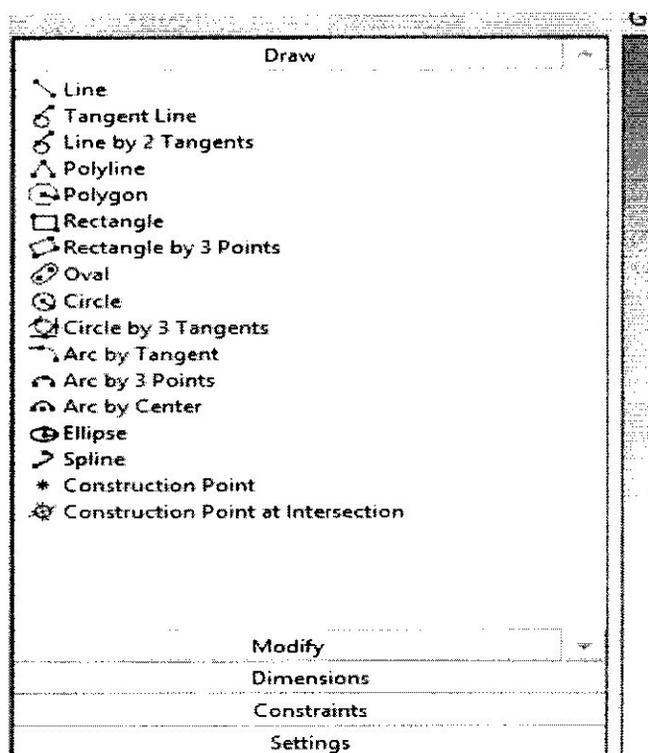


Figure B.03 : Etape 03 de programmations pour ansys

Après avoir dessiné notre pièce on clique sur « concept » puis sur « surface from sketches »

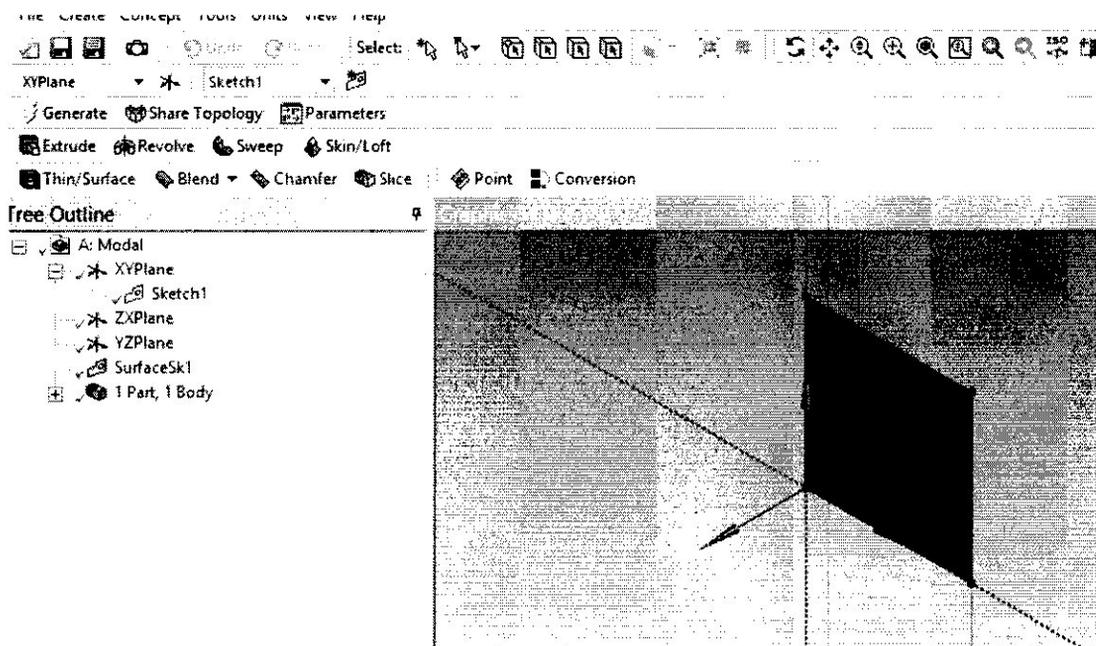


Figure B.04 : Etape 04 de programmations pour ansys

Puis on ferme la fenêtre et on ouvre « model », puis on entre la valeur de l'épaisseur dans la barre latérale

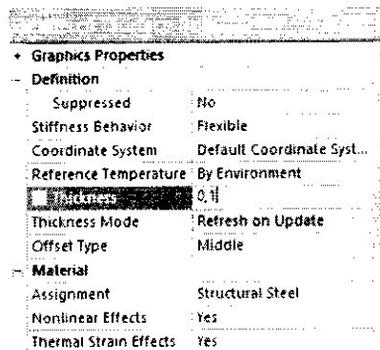
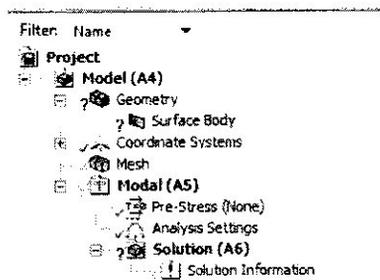


Figure B.05 : Etape 05 de programmations pour ansys

Après dans cette même barre on clique sur « mesh » et modal pour avoir un maillage et la fixer dans une extrémité

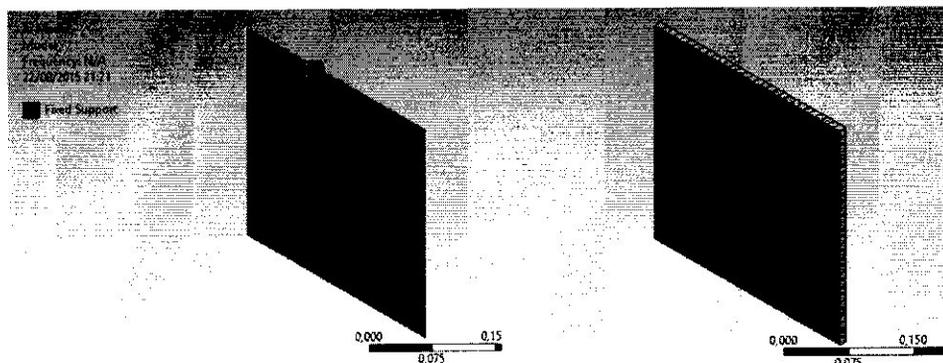


Figure B.06 : Etape 06 de programmations pour ansys

Pour un matériau isotrope on clique sur « solve » pour avoir le résultat

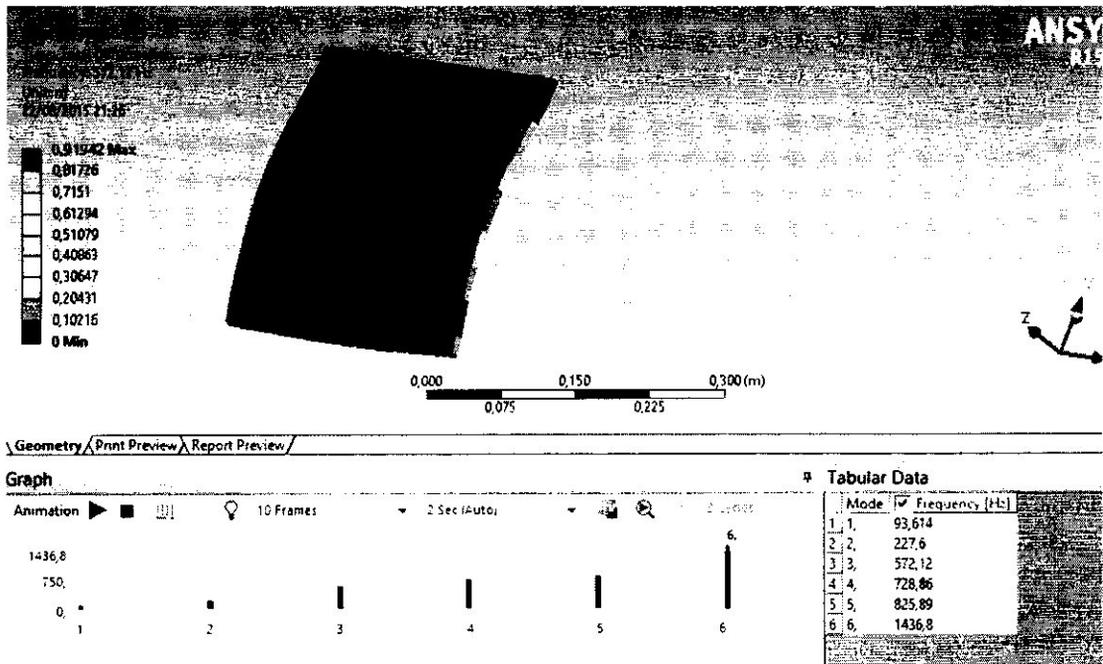


Figure B.07 : Etape 07 de programmations pour ansys

Mais pour un matériau orthotrope on ferme la fenêtre puis on clique avec le bouton droit de la souris sur setup puis « transfer data from new » puis sur « ACP (pre) »

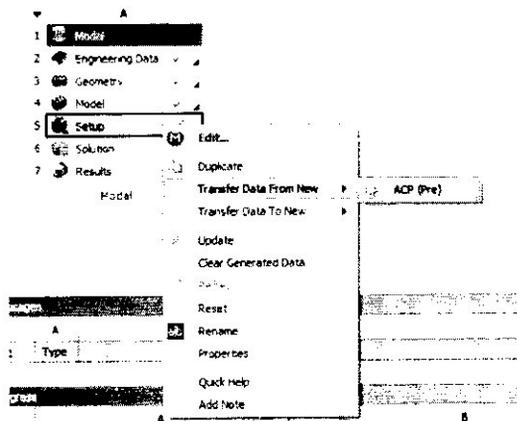


Figure B.08 : Etape 08 de programmations pour ansys

Ensuite on clique sur « setup du acp (pre) », puis on entre les valeurs des couche dans « fabric »

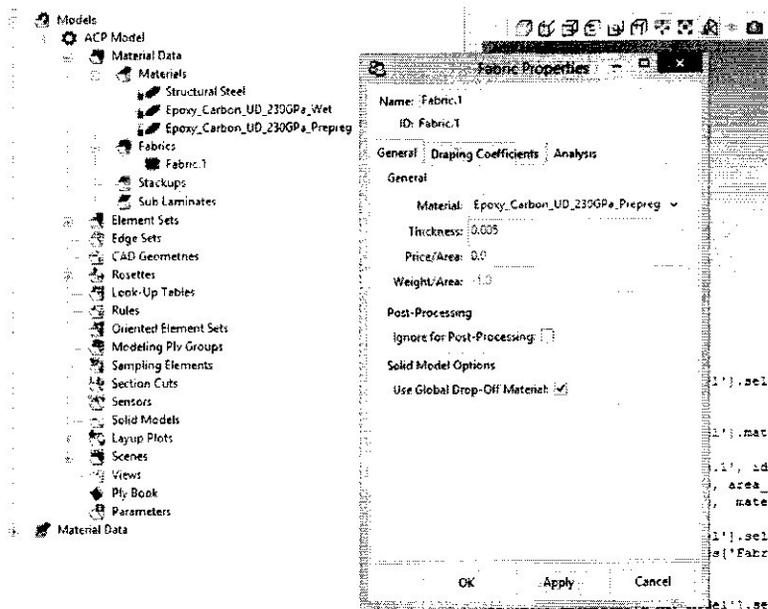


Figure B.09 : Etape 09 de programmations pour ansys

Puis la composition de notre matériau composite sur « stackup »

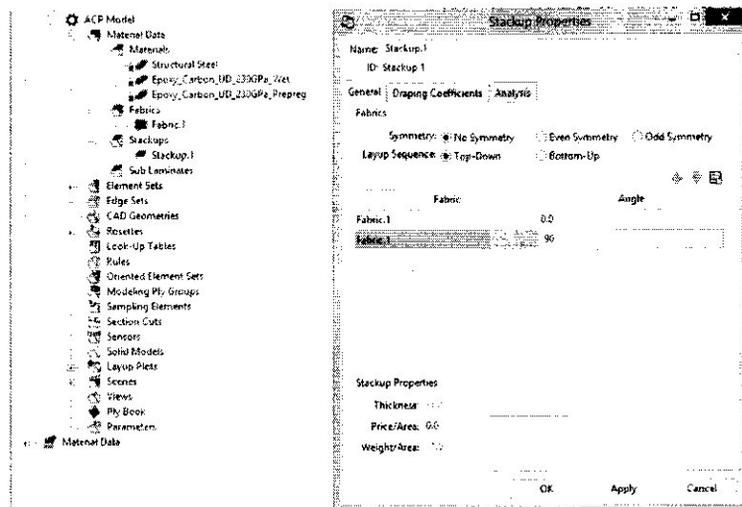


Figure B.10 : Etape 10 de programmations pour ansys

Après on crée les plis dans « Modeling ply groups »

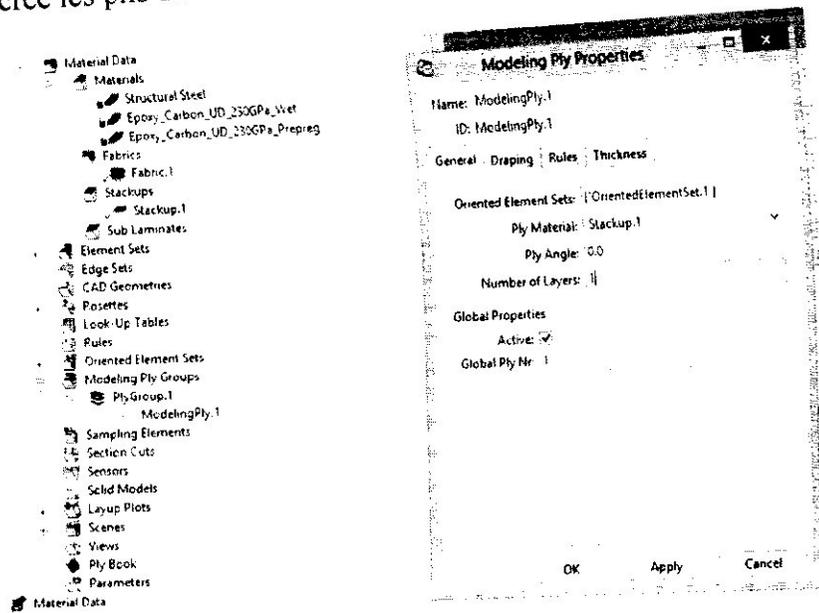


Figure B.11 : Etape 11 de programmations pour ansys

Enfin on ferme la fenêtre et on clique sur résultat du modal pour avoir notre résultat

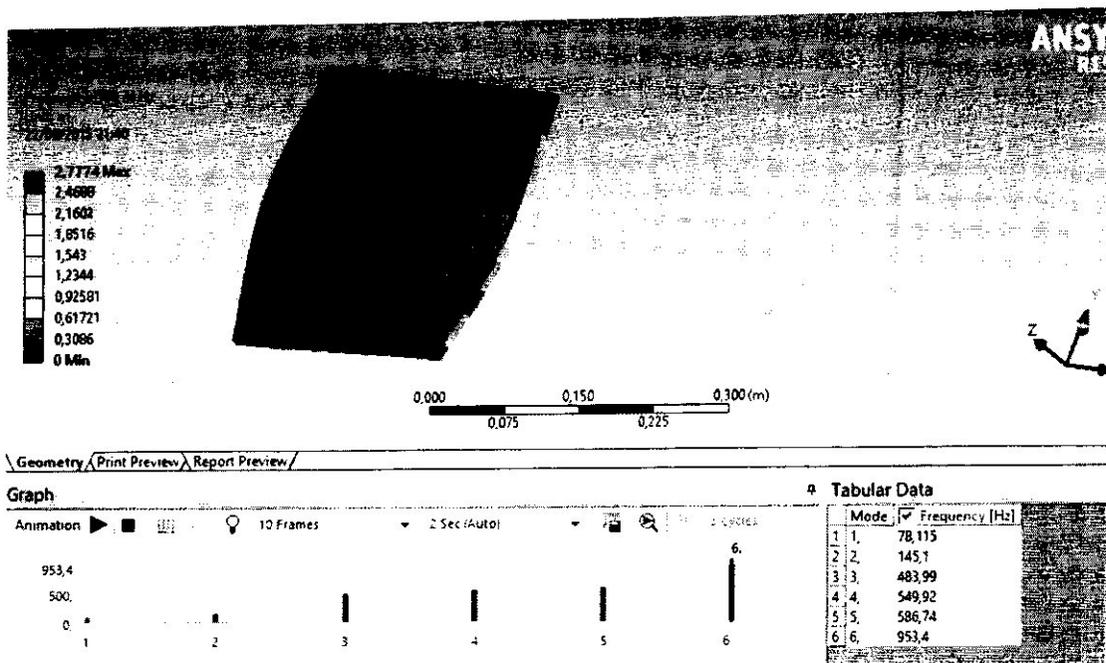


Figure B.12 : Etape 12 de programmations pour ansys

ANNEXE C

C.1. DEFINITON

Créé en 1993 par l'éditeur américain éponyme, SolidWorks a été acheté le 24 juin 1997 par la société Dassault Systèmes

SolidWorks est un modéleur 3D utilisant la conception paramétrique. Il génère 3 types de fichiers relatifs à trois concepts de base : la pièce, l'assemblage et la mise en plan. Ces fichiers sont en relation. Toute modification à quelque niveau que ce soit est répercutée vers tous les fichiers concernés.

Un dossier complet contenant l'ensemble des relatifs à un même système constitue une maquette numérique. De nombreux logiciels viennent compléter l'éditeur SolidWorks. Des utilitaires orientés métiers (tôlerie, bois, BTP...), mais aussi des applications de simulation mécanique ou d'image de synthèse travaillent à partir des éléments de la maquette virtuelle

C.2. LES ETAPE UTULISEES

Après avoir ouvert le logiciel et ouvert un nouveau fichier, on utilise la fonction sketch dans la barre des commandes puis on dessine notre pièce sur un plan et on définit ses dimensions.

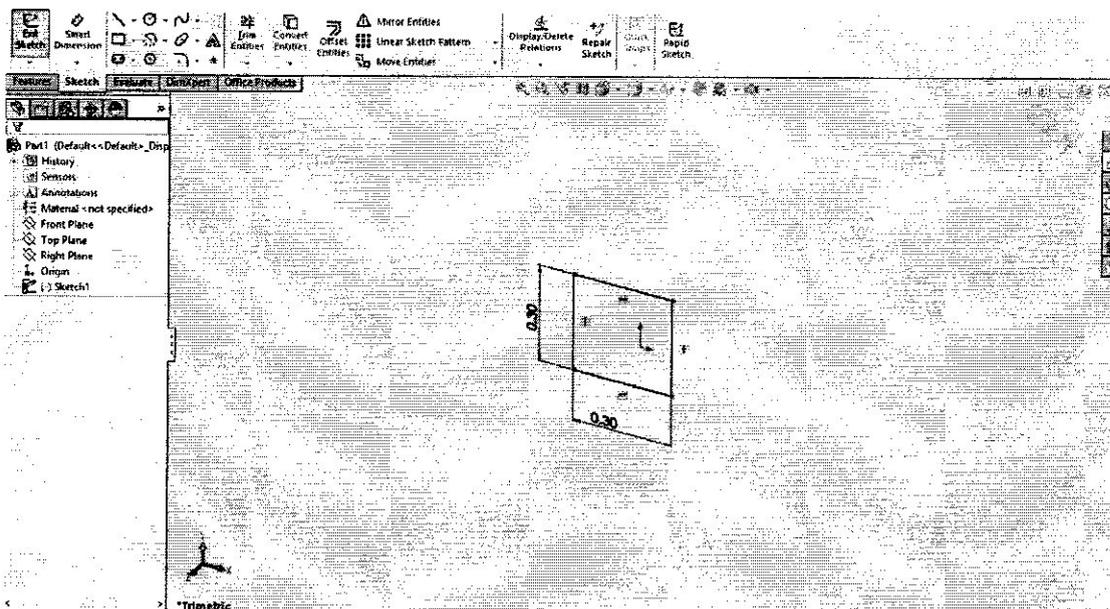


Figure C.01: Etape 01 de programmations pour solidworks

Puis on fait le bossage de la pièce pour la rendre 3d en utilisant la fonction « extruded dans la commande features » et on choisit l'épaisseur de la pièce et sa direction

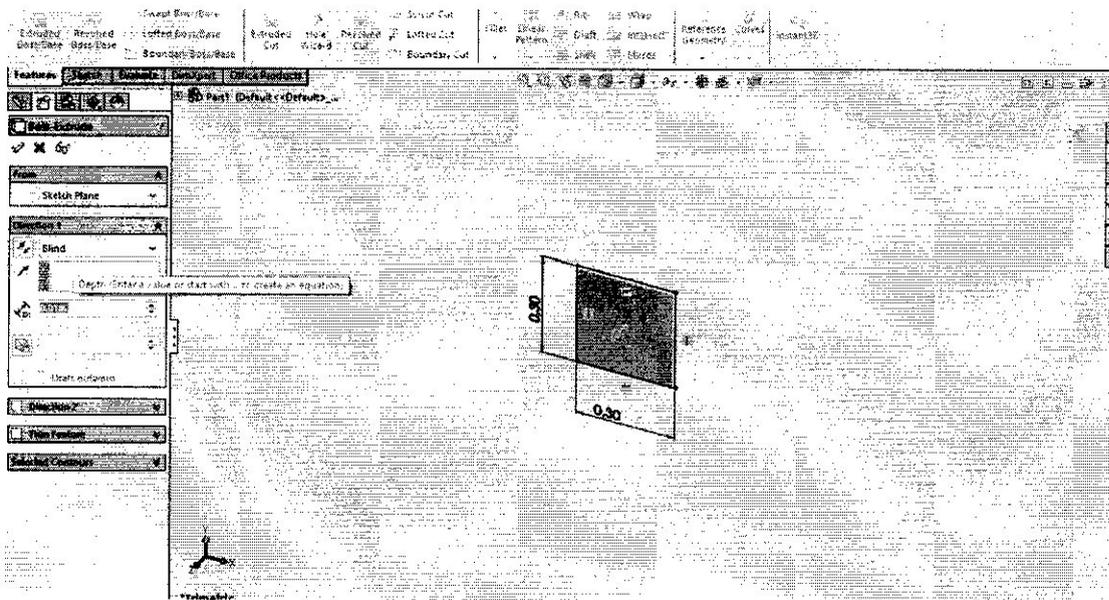


Figure C.02 : Etape 02 de programmations pour solidworks

Ensuite on choisit le type de matériaux dans la barre latérale à gauche

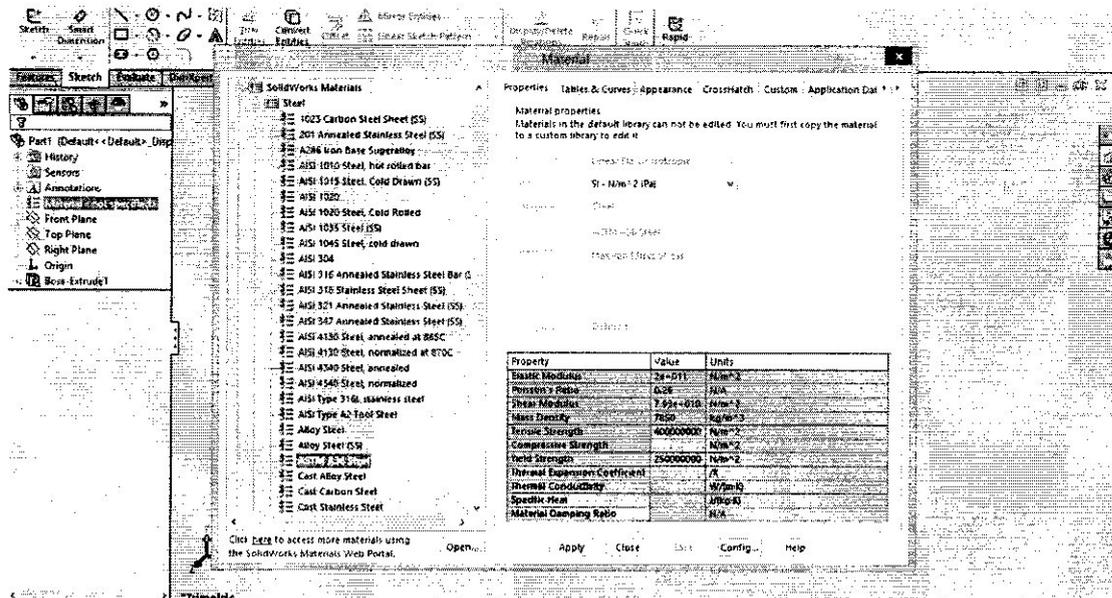


Figure C.03 : Etape 03 de programmations pour solidworks

Après on utilise la fonction « study advisor » puis « new study » dans la commande simulation puis le type d'étude choisi

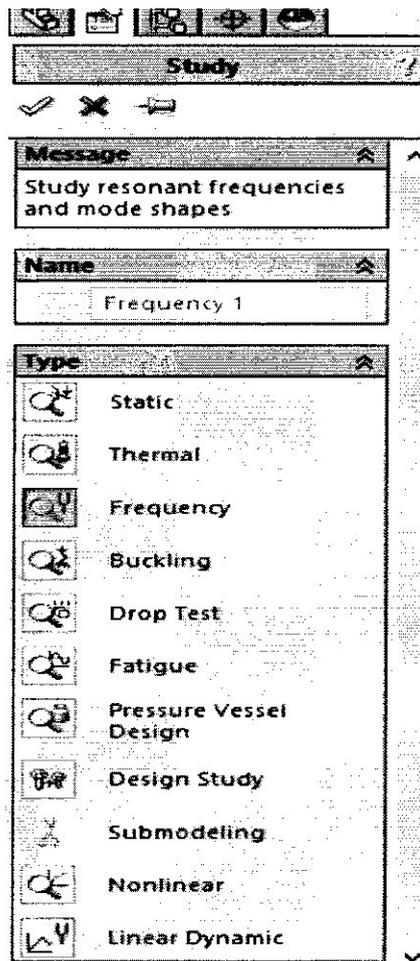


Figure C.04 : Etape 04 de programmations pour solidworks

Dans la barre latérale va apparaitre plusieurs fonctions qu'on utilise

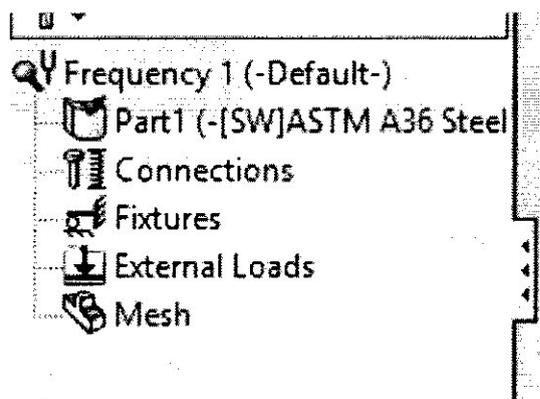


Figure C.05 : Etape 05 de programmations pour solidworks

On click d'abord sur « Mesh » pour crée le maillage puis sur « Fixtures » pour la fixer sur une extrémité et on aura

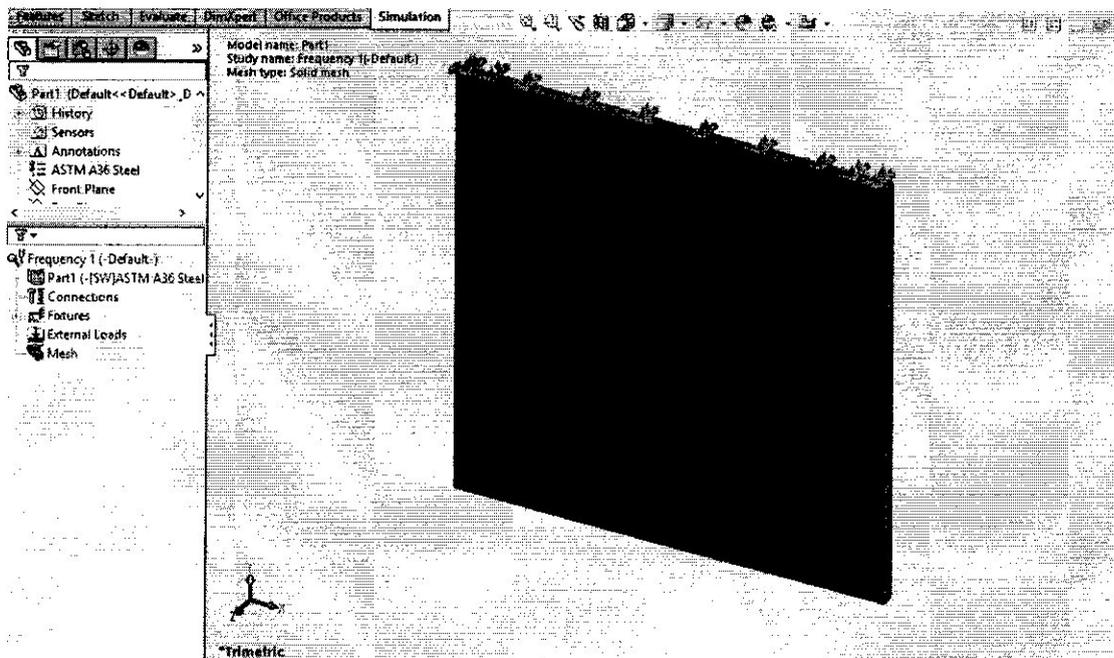


Figure C.06 : Etape 06 de programmations pour solidworks

Pour un matériau isotrope on clique sur « run » dans la commande simulation et on aura le résultat

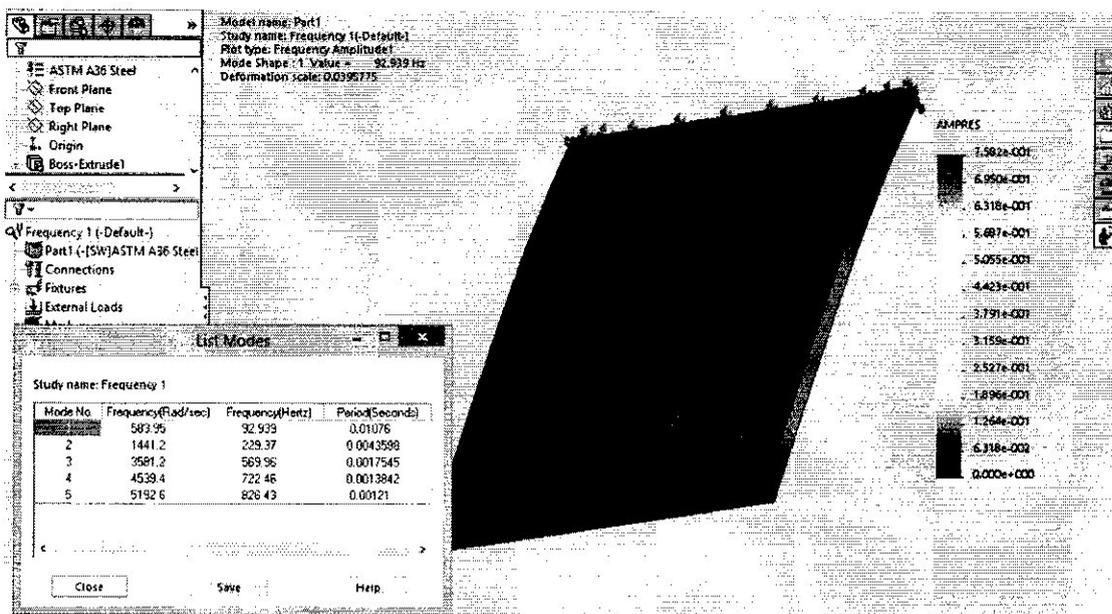


Figure C.07 : étape 07 de programmations pour solidworks

Pour un matériau orthotrope on entre dans la barre latérale dans la fonction part1 puis en entre les valeurs nécessaires.

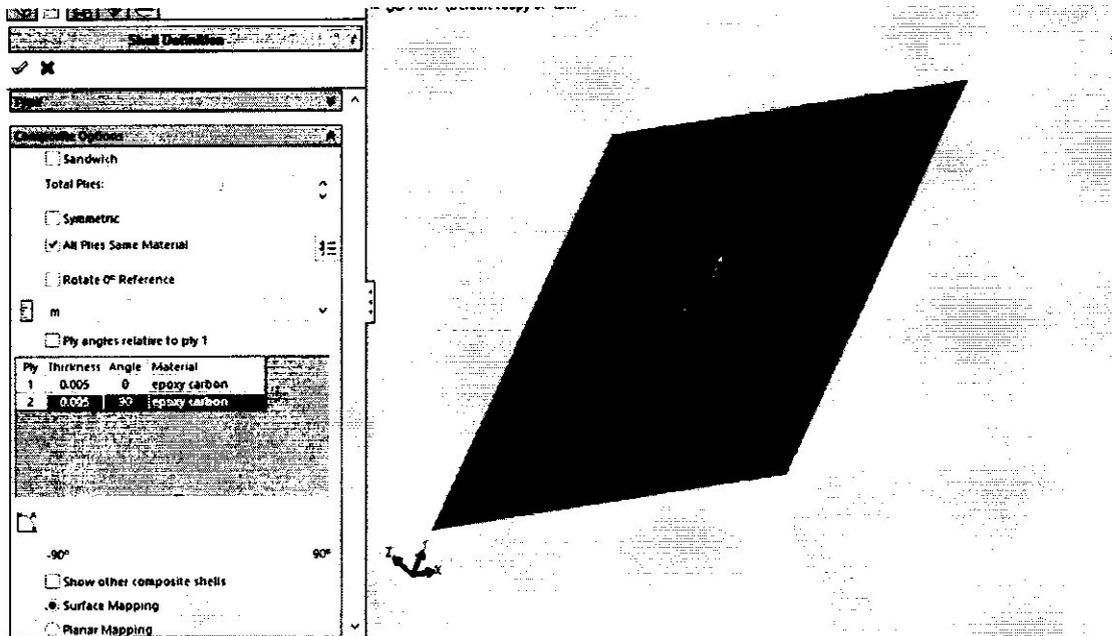


Figure C.08 : Etape 08 de programmations pour solidworks

Enfin onclique sur « run » pour avoir le résultat

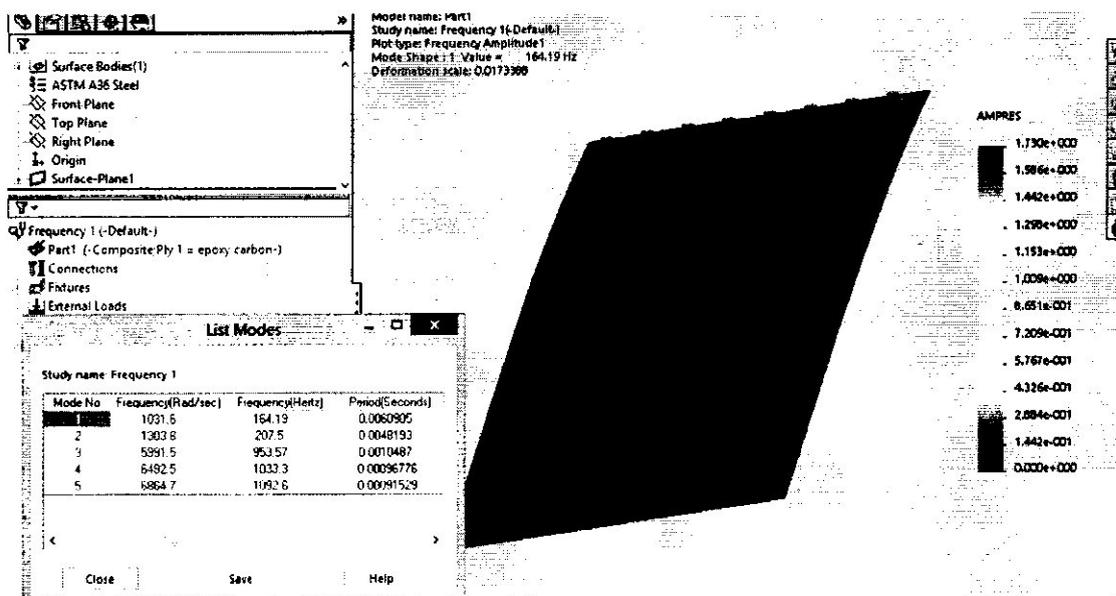


Figure C.09 : Etape 09 de programmations pour solidworks

ANNEXE D

D.1. DEFINITION

ABAQUS est un progiciel de calcul éléments finis développé par ABAQUS, Inc (Dassault Systèmes). Il se compose de trois produits : ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE.

ABAQUS/Standard est un solveur généraliste qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.

Le solveur ABAQUS/Explicit emploie un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi statiques non linéaires.

ABAQUS/CAE constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour lesdits solveurs. Chacun de ces produits est complété par des modules additionnels et/ou optionnels, spécifiques à certaines applications.

Les produits ABAQUS, ABAQUS/CAE notamment, sont écrits intégralement avec les langages C++, Fortran pour les parties calcul et Python pour les scripts et les paramétrisations. La gestion de l'interface graphique est assurée par FOX Toolkit.

ABAQUS est très largement utilisé dans les industries automobiles et aéronautiques. En raison du large spectre de ses capacités d'analyse et de sa bonne ergonomie, il est également très populaire dans les milieux universitaires, pour la recherche et l'éducation.

ABAQUS fut d'abord conçu pour analyser les comportements non-linéaires. Il possède en conséquence une vaste gamme de modèles de matériau. Ses modélisations d'élastomères, en particulier, méritent d'être reconnues.

En 2005, ABAQUS, Inc a été acquis par Dassault Systèmes et est devenue SIMULIA.

D.2. LES ETAPES UTILISEES

Après avoir ouvert notre logiciel de calcul on clique sur « With Standard / Explicite Model » pour commencer notre travail

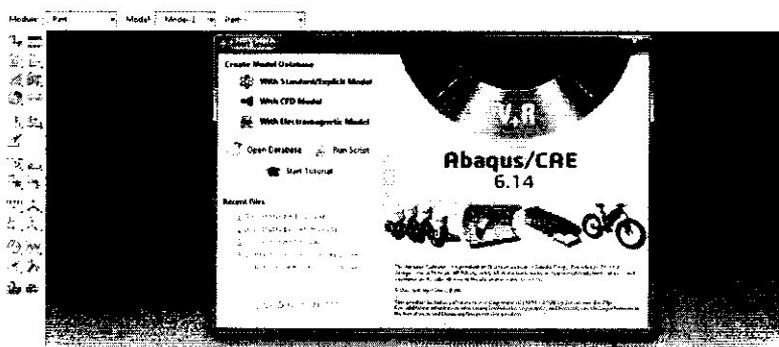


Figure D.01: Etape 01 de programmations pour Abaqus

Puis on clique sur «create part» pour entrer les caractéristiques de la plaque

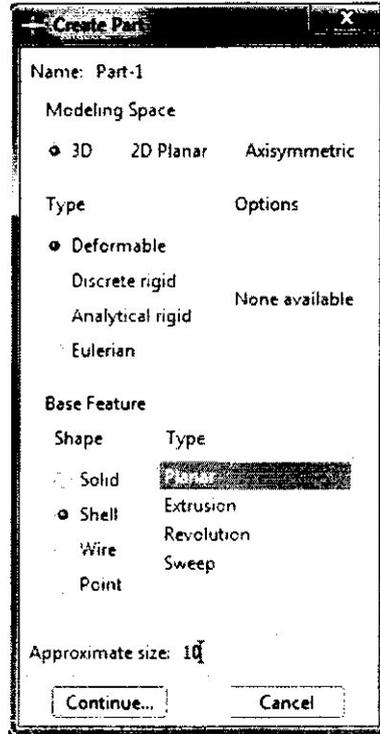


Figure D.02: Etape 02 de programmations pour Abaqus

Ensuite on dessine notre pièce et on entre ces dimensions

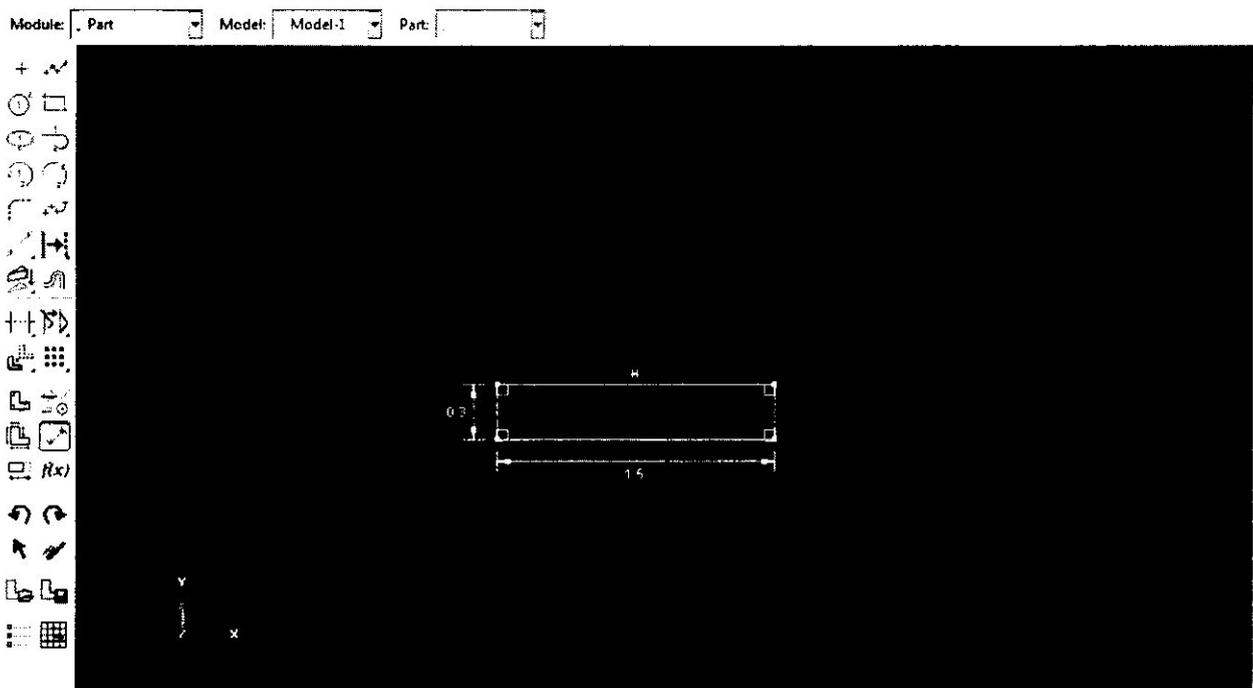


Figure D.03: Etape 03 de programmations pour Abaqus

Pour avoir ça :

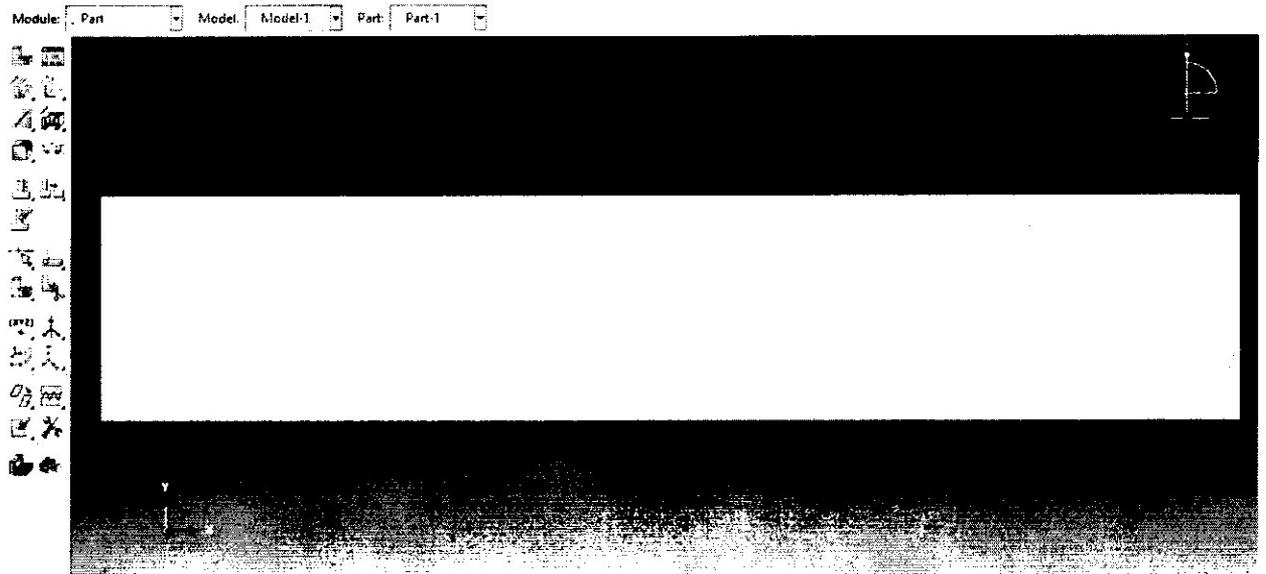


Figure D.04: Etape 04 de programmations pour Abaqus

Après on entre les propriétés de la pièce en entrant les propriétés des matériaux utilisés dans soit isotrope ou orthotrope

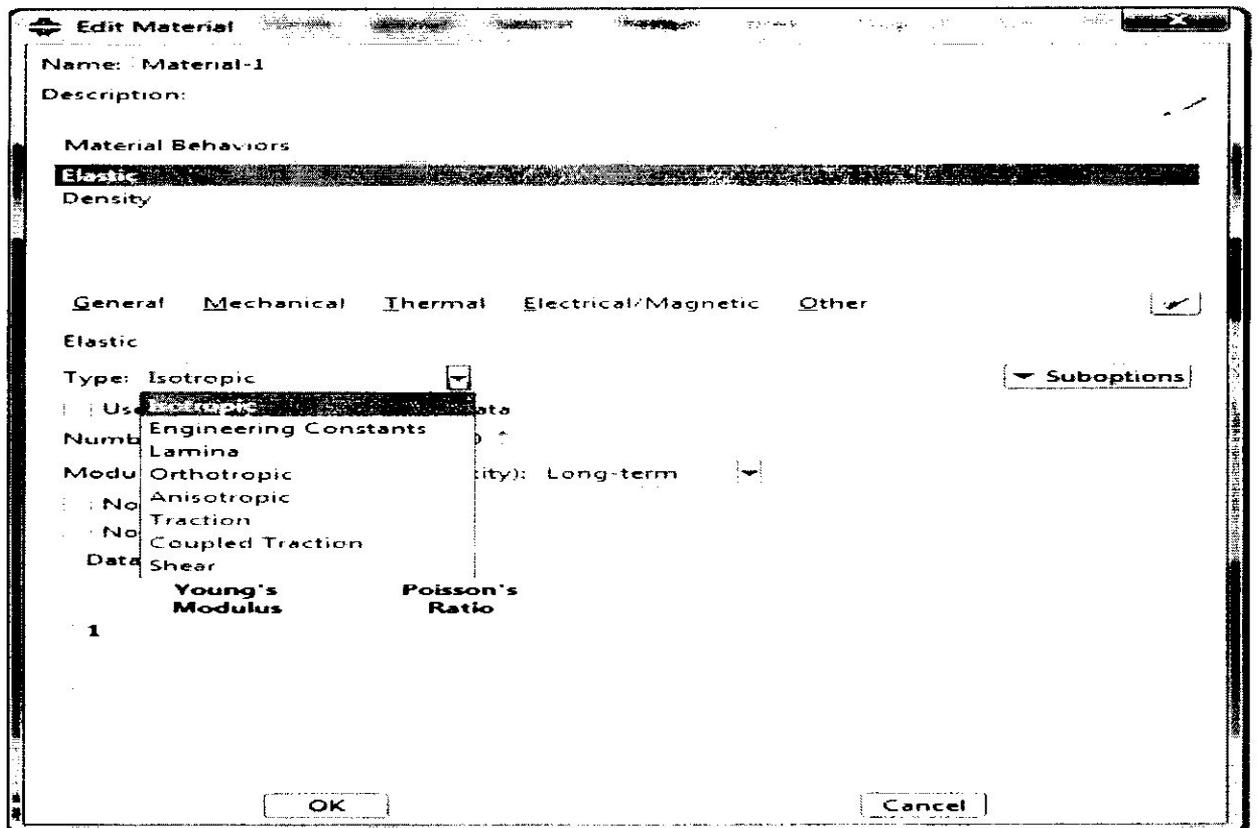


Figure D.05: Etape 05 de programmations pour Abaqus

Puis en cliquant sur «create section» en entre la section de la pièce

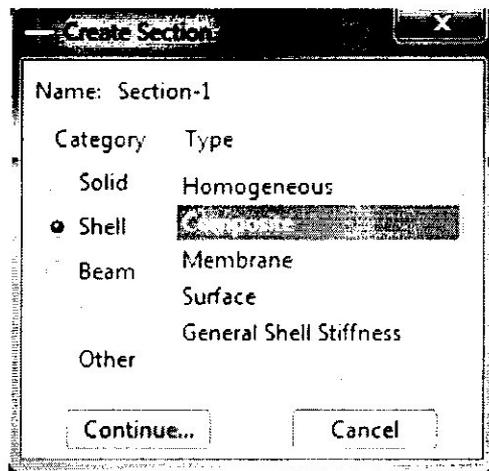


Figure D.06: Etape 06 de programmations pour Abaqus

Et pour un matériau composite on clique sur «Edit Section» pour éditer la section et entrer les valeurs (l'épaisseur des couches, l'angle d'orientation, le type de matériau utilisé ...etc.)

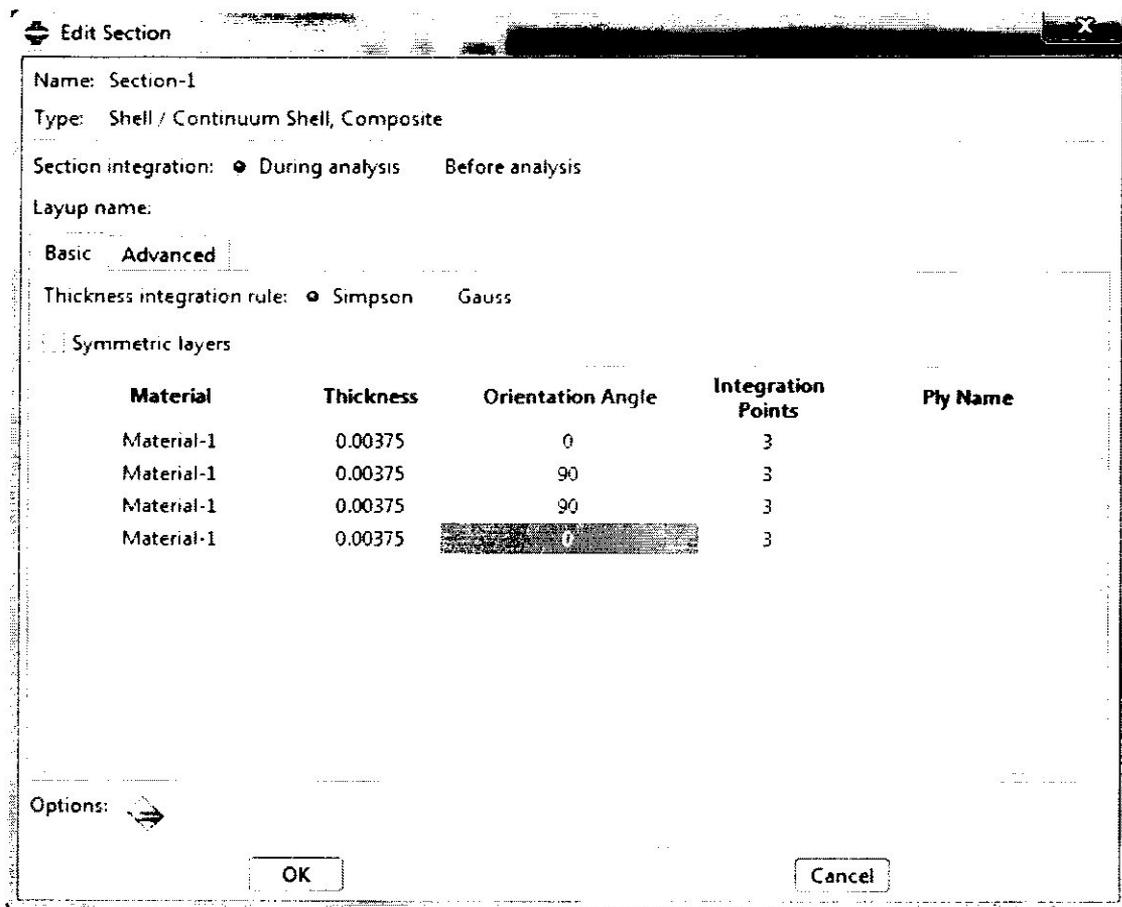


Figure D.07: Etape 07 de programmations pour Abaqus

Ensuite sur «global seeds» pour entrer les propriétés du maillage

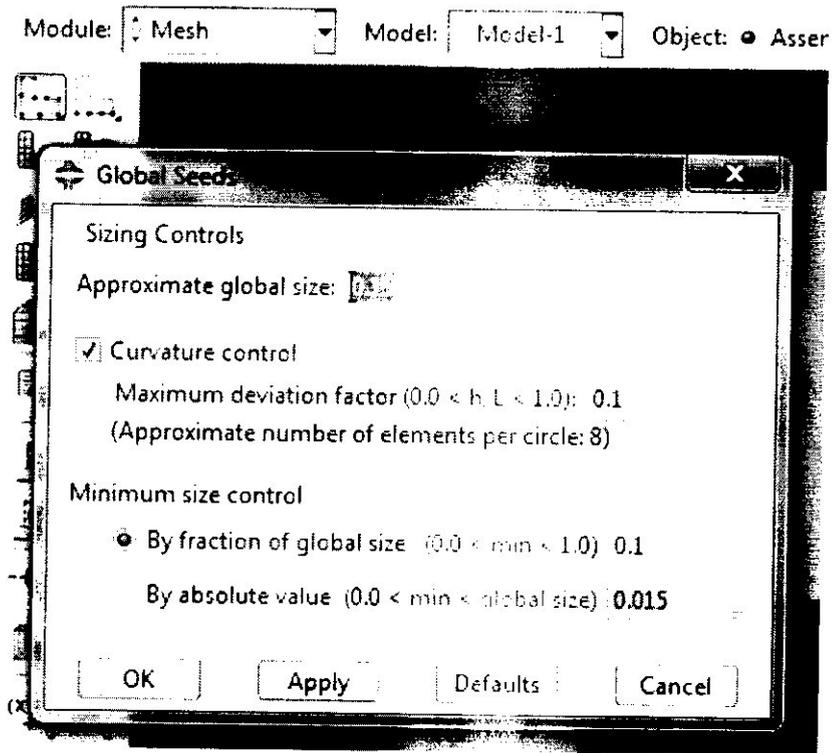


Figure D.08: Etape 08 de programmations pour Abaqus

Après sur «Mesh part instance» pour le créer

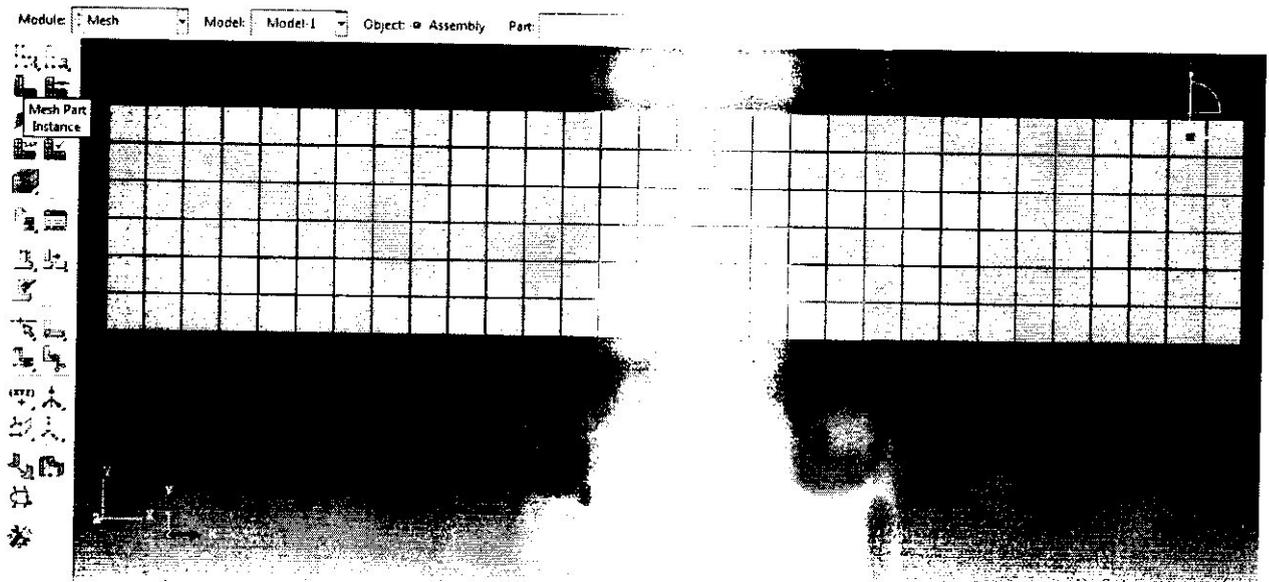


Figure D.09: Etape 09 de programmations pour Abaqus

Après ça on fixe la plaque sur une extrémité à l'aide de la fonction «createboundary condition»

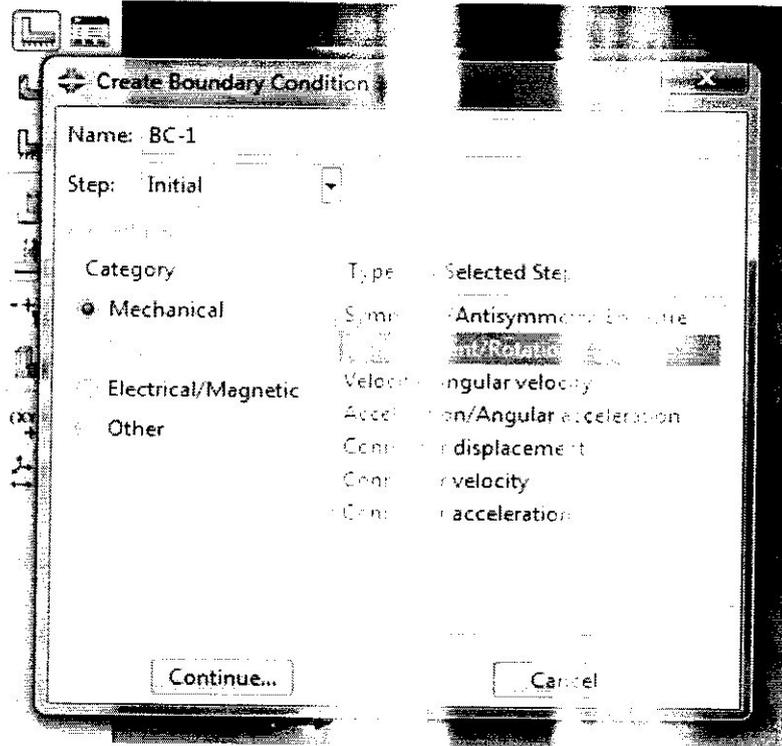


Figure D.10: Etape 10 de programmation pour Abaqus

Puis on sélectionne les directions et rotations à éliminer dans cet appui

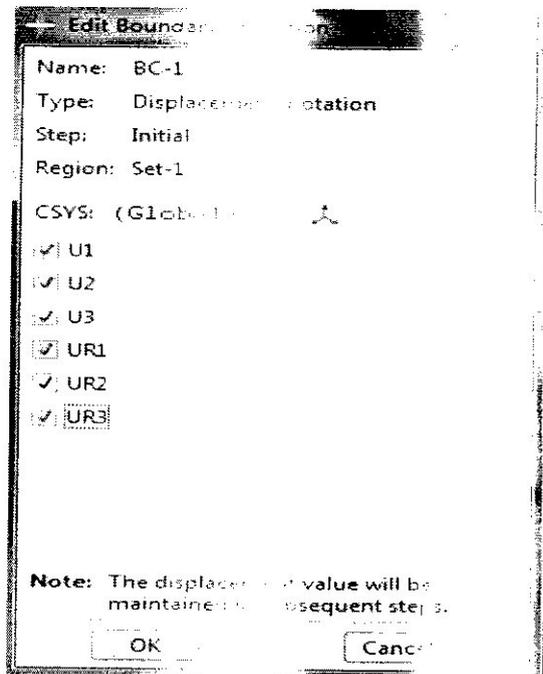


Figure D.11: Etape 11 de programmation pour Abaqus

Pour commencer notre étude on clique sur «CreateStep» puis on sélectionne le type d'étude

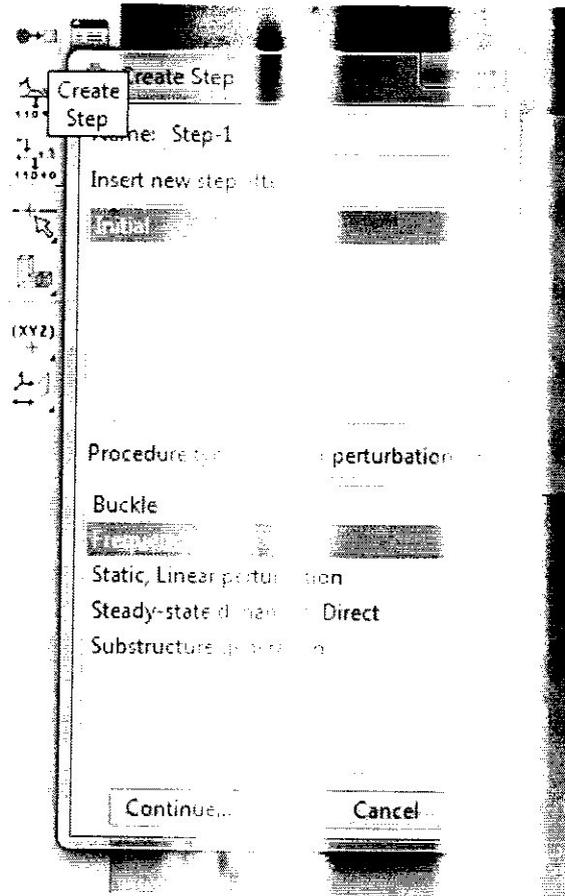


Figure D.12: Etape 12 de programmation pour Abaqus

Ensuite sur «Job Manager» pour commencer le calcul

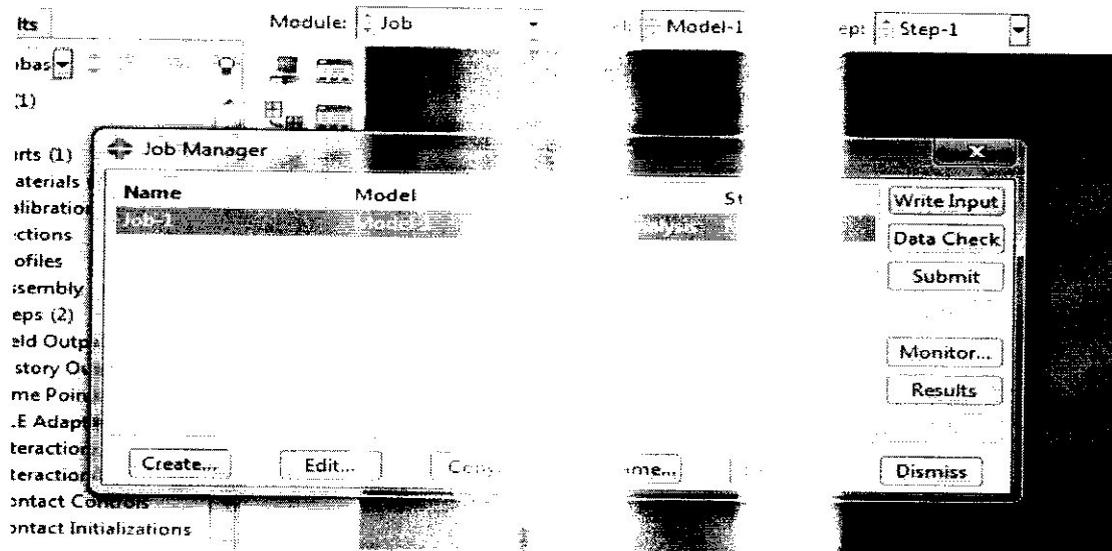


Figure D.13: Etape 13 - Paramétrage pour Abaqus
 Après que le logiciel ait terminé son exécution, on clique sur «Results» pour afficher les résultats

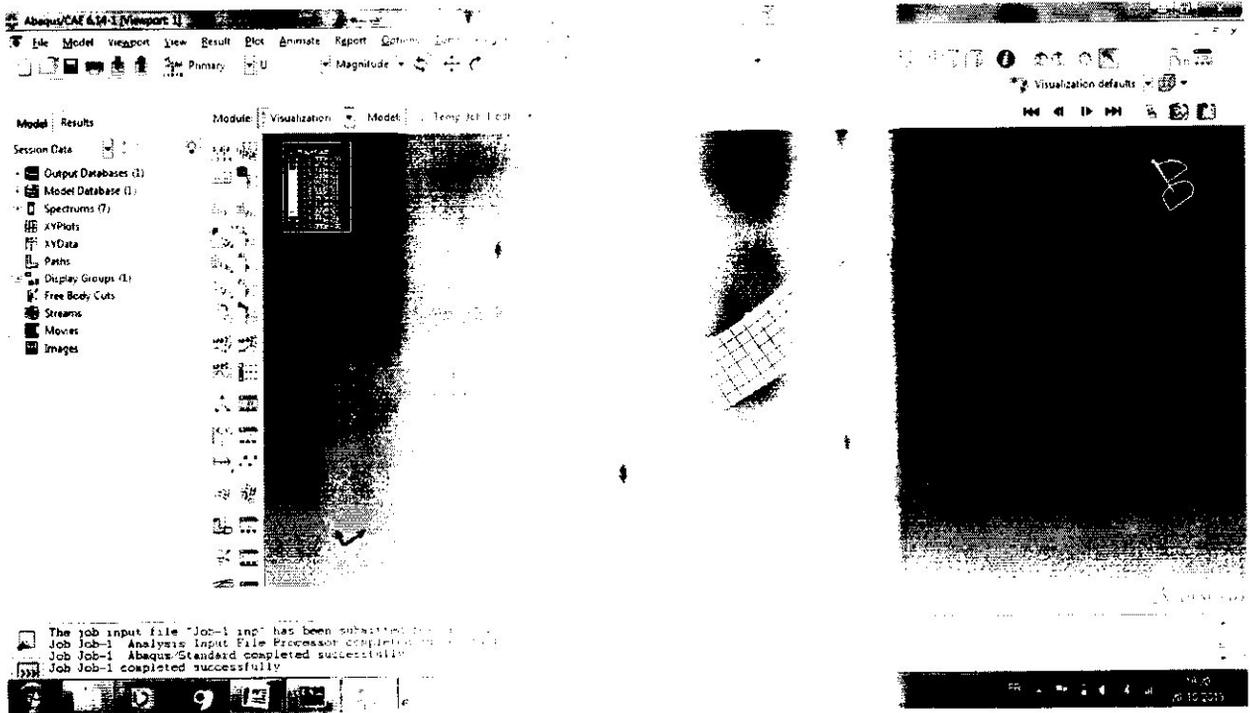


Figure D.14: Etape 14 - Visualisation des résultats pour Abaqus