

Remerciement

Ce projet a été réalisé en vue de l'obtention du diplôme du MASTER en Aéronautique option « avionique », au sein du département Aéronautique de Blida.

Au terme de ce modeste travail, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos vifs remerciements :

Avant tout, on rend grâce à « ALLAH » le tout puissant pour nous avoir donné la force, la puissance et le courage pour mener à terme de ce travail, ainsi de nous avoir attribué la faveur de réussir nos études.

A nos familles qui nous ont toujours étant encouragé et maintenir durant toutes nos études surtout nos parents pour leurs sacrifices, leurs affections et leur compréhension.

A notre promoteur Mr. Dilmi Smain, pour nous avoir guidé sur le bon chemin du travail et en nous faisant bénéficier de son aide, durant la préparation de notre mémoire.

A tous les enseignants du département d'aéronautique de Blida pour leurs constants suivis et leurs précieux conseils.

Dédicace

*Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de
concrétisation de tous mes efforts fournis
ces dernières années d'études :*

*A mon père « Ali » en reconnaissance de tout ce qu'il a fait
Pour moi tout au long de mon existence, pour son soutien
Moral, son encouragement continuuel, et pour sa
compréhension.*

*A ma raison de vivre et ma fleur de vie ma mère « Hourya »,
Symbole d'amour d'affection de bienveillance, pour sa
Patience, ses sacrifices, sa conscience, ses conseils qui ont
éclairé mon chemin.*

*A mes chers frères : Nabil, Fatah et sa femme sans
oublier leurs enfants : Islam et Linda.*

A Mes chères sœurs

*A mon binôme Fatah ,Sofiane,Ibrahim et Hamza qui ont
été les frères de tout les temps.*

*A mes amis et mes collègues de la promotions Avionique
2012-2013 .*

NOUREDDINE.

Dédicace

*Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de
concrétisation de tous mes efforts fournis
ces dernières années d'études :*

*A mon père « Smail » en reconnaissance de tout ce qu'il a fait
Pour moi tout au long de mon existence, pour son soutien
Moral, son encouragement continuel, et pour sa
compréhension.*

*A ma raison de vivre et ma fleur de vie ma mère « Farida »,
Symbole d'amour d'affection de bienveillance, pour sa
Patience, ses sacrifices, sa conscience, ses conseils qui ont
éclairé mon chemin.*

*A mes chers frères et leurs familles : Faouzi, Arezki,
Salim sans oublier Leurs enfants : Idir, Aïmed et Anaïs.*

*A Mes chères sœurs : Adouda , Linda et son époux Farid
sans oublier Leurs enfants : Yanis et Ilias.*

*A mon cher frère Lounes qui n'a pas pu assister à
l'achèvement de ce travail à cause de sa résidence à
l'étranger .*

*A mon binôme Noureddine, Sofiane, Ibrahim et Hamza
qui ont été les frères de tout les temps.*

*A tous mes amis et mes collègues de la promotions
Avionique 2012-2013 .*

FATAH.

ملخص:

في عملنا هذا قمنا بدراسة معمقة لبعض قوانين التحكم الخطية وغير الخطية (التحكم الخطي عن طريق وضع القطب، مراقبة التربيعية الخطية، ونظام التحكم مع هيكل متغير في وضعية إنزلاق).

تم إعداد نموذج طولي للطائرة و تطبيقه على بوينج 747، قوانين الرقابة المقترحة تستخدم من أجل متابعة قيمة مطلوبة وزيادة متانة ناتج عن اضطراب خارجي خاص مضاف الى المداخل، أو تغيير معالم النموذج المقترح.

كلمات البحث: وضع قطب، ومراقبة التربيعية الخطية وبناء متغير.

Résumé:

Dans notre travail, nous nous sommes intéressé à l'étude approfondie de quelques lois de commandes linéaires et non linéaires (commande linéaire par placement de pôles, commande linéaire quadratique, commande de système à structure variable par mode glissant).

Le modèle longitudinal d'avion a été établi puis appliqué sur le Boeing 747, les lois de commandes envisagées sont utilisées pour la poursuite d'une consigne et augmenter la robustesse par rapport aux perturbations externes spécifiques additives aux entrées, ou variation des paramètres du modèle proposé.

Mots clés : placement de pôle, commande linéaire quadratique, structure variable.

Summary:

In our work, we are interested in in-depth study of some laws of linear and nonlinear control (control by pole placement, linear quadratic control, control system with variable structure sliding mode), then we set the model longitudinal plane and then applied to the Boeing 747, the proposed control laws are used for the pursuit of a target and increase the robustness to external disturbance added to inputs, or change the parameters of the proposed model.

Keywords: pole placement, linear quadratic control, variable structure.

Sommaire

-Liste des figures	
-Liste des tableaux	
-Symboles et abréviations	
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Modélisation de l'aéronef	
1 Introduction.....	3
2 Trièdres de références.....	3
2.1 Un trièdre lié a la terre $Ox_0y_0z_0$	3
2.2 Un trièdre lié à l'avion supposé indéformable $Oxyz$	3
2.3 Un trièdre lié à la vitesse, dit trièdre aérodynamique $Ox_a y_a z_a$	4
3 Positions relatives des divers trièdres et matrices de passages associée.....	4
3.1 Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion	4
3.2 Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre	5
3.3 Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre.....	7
4. Equations du mouvement relative à un système d'axe lie a l'avion.....	8
4.1 Expressions des équations cinématiques	8
5. Bases de la mécanique du vol	10
5.1 Forces extérieures et moments résultants	11
5.1.1 Force extérieures	11
5.1.2 Le moment de la force aérodynamique	12
5.2 Développement des équations des forces et des moments suivant un système d'axe fixe.	13
5.2.1 Equations des forces.....	13
5.2.2 Equations des moments	13
6 Linéarisation du modèle longitudinal	16
7 Application sur un avion de transport du type Boeing 747	20

7.1	Caractéristiques	20
7.2	Résultats numériques	22
7.3	Simulation et interprétation des résultats en boucle ouverte	22
8	Conclusion	23
Chapitre2 :Commande linéaire par placement de pôles		
1	Introduction	25
2	Commande linéaire par retour d'état	25
2.1	Hypothèses	25
2.2	Définition de la contrôlabilité	25
2.3	Dynamique en boucle fermée.....	26
2.4	Détermination des matrices k et k_r	26
2.4.1	Calcul de k	26
2.4.2	Calcul de k_r	27
3	Calcul la loi de commande en présence de perturbations.....	28
3.1	Définition de rafale continue.....	28
3.2	Génération de rafale continue.....	29
3.3	Stabilité d'un système linéaire perturbé.....	32
4	Simulation et interprétations des résultats	33
5	Commande linéaire par retour d'état avec action intégrale	38
5.1	Détermination de la loi de commande	38
5.2	Détermination de la matrice k et k_i	39
5.3	Dynamique en boucle fermé en présence des perturbations	39
5.4	Simulation et interprétations des résultats.....	40
6	Test de robustesse	46
7	Conclusion	47

Chapitre 3 : Commande optimale LQR

1 Introduction	48
2 Commande Linéaire Quadratique	48
3 Simulation et interprétation des résultats	50
4 Test de robustesse.....	57
5 Conclusion.....	58

Chapitre 4 : Commande VSS par mode glissant

1 Introduction	59
2 Système a structure variable VSS.....	59
3 Conception de la commande par mode glissant.....	61
3.1 Choix de la surface de glissement.....	61
3.2 Conditions de convergence et d'existence.....	62
3.2.1 La fonction discrète de commutation	62
3.2.2 La fonction de Lyapunov.....	62
4 Calcul de la commande	63
4.1 Définition des grandeurs de la commande	63
4.2 Détermination de la commande	64
4.3 Phénomène réticence ou de chattering	66
5 Exemple d'application	67
5.1 Interprétations des résultats	69
6 Test de robustesse.....	73
7 Conclusion.....	74
-Conclusion général.....	75
-Bibliographie	
-Annexes	

Liste des figures

Chapitre 1 : Modélisation de l'aéronef.

Figure 1.1: Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion.....	4
Figure 1.2 : Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre.....	6
Figure 1.3: Position trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre.....	7
Figure 1.4 : Résultante des forces qui s'appliquent sur un avion	11
Figure 1.5: Vitesse angulaire ω autour de son centre de gravité d'un corps.....	14
Figure 1.6 : Simulation en boucle ouverte du mode phugoid avec une vitesse verticale $w=4.11\text{m/s}(\alpha=1^\circ)$	22
Figure 1.7: Simulation en boucle ouverte du mode short period avec une vitesse verticale $w = 4.11\text{m/s} (\alpha = 1^\circ)$	23

Chapitre 2 : Commande linéaire par placement de pôles.

Figure 2.1 : Schéma bloc de la commande par retour d'état.....	26
Figure 2.2 : Génération de rafale verticale.....	30
Figure 2.3: Turbulence verticale w_g pour $\sigma = 2\text{m/s}$	31
Figure 2.4: Turbulence verticale w_g pour $\sigma = 4\text{m/s}$	31
Figure 2.5 : Densité spectrale de puissance (DSP).....	32
Figure 2.6: Commande à un échelon de $\theta_{\text{ref}} = 2^\circ$, pôle P_1	34
Figure 2.7: Commande à un échelon de vitesse $u_{\text{ref}} = 10\text{m/s}$, pôle P_1	34
Figure 2.8: Commande à un échelon de $\theta_{\text{ref}} = 2^\circ$, pôle P_2	35
Figure 2.9: Commande à un échelon de vitesse $u_{\text{ref}} = 10\text{m/s}$, pôle P_2	35
Figure 2.10: Commande à un échelon de $\theta_{\text{ref}} = 2^\circ$ pour $\sigma = 2\text{m/s}$, pôle P_1	36
Figure 2.11: Commande à un échelon de $u_{\text{ref}} = 10\text{m/s}$ pour $\sigma = 2\text{m/s}$, pôle P_1	37
Figure 2.12: Commande à un échelon de $\theta_{\text{ref}} = 2^\circ$ pour $\sigma = 4\text{m/s}$, pôle P_1	37

Figure 2.13: Commande à un échelon de $u_{ref} = 10m/s$ pour $\sigma = 4m/s$, pôle P_1	38
Figure 2.14 Schéma bloc de la commande par retour d'état avec action intégrale.....	38
Figure 2.15: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_1	41
Figure 2.16: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10m/s$, pôle P_1	42
Figure 2.17: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_2	42
Figure 2.18: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10m/s$, pôle P_2	43
Figure 2.19: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de, pour $\sigma = 2m/s$, pôle P_1	44
Figure 2.20: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10m/s$, pour $\sigma = 2m/s$, pôle P_1	44
Figure 2.21: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pour $\sigma = 4m/s$, pôle P_1	45
Figure 2.22: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10m/s$, pour $\sigma = 4m/s$, pôle P_1	45
Figure 2.23: Robustesse de la commande par rapport à l'assiette longitudinale(θ).....	46
Figure 2.24: Robustesse de la commande par rapport à la vitesse(u)	47

Chapitre 3 : Commande optimale LQR.

Figure 3.1: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , assiette (θ).....	50
Figure 3.2: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , vitesse (u).....	51
Figure 3.3: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , vitesse(u), avec la fonction saturation.....	51

Figure 3.4: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_2 et R_2 , assiette (θ)...	52
Figure 3.5: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_2 et R_2 , vitesse (u)...	52
Figure 3.6: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_1 , R_1 , assiette (θ).....	53
Figure 3.7: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_1 , R_1 , vitesse (u).....	54
Figure 3.8: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_2 , R_2 , assiette (θ).....	54
Figure 3.9: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_2 , R_2 , vitesse (u).....	55
Figure 3.10: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_1 , R_1 , assiette (θ).....	55
Figure 3.11: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_1 , R_1 , vitesse (u).....	56
Figure 3.12: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_2 , R_2 , assiette (θ).....	56
Figure 3.13: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_2 , R_2 , vitesse (u).....	57
Figure 3.14: Robustesse de la commande LQR par rapport à l'assiette longitudinal (θ)	58
Figure 3.15: Robustesse de la commande LQR par rapport à la vitesse (u).....	58

Chapitre 4 : Commande VSS par mode glissant.

Figure 4.1 : Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase	60
Figure 4.2: Trajectoire de l'état envers la surface.....	63
Figure 4.3 : valeur continu u_{eq} prise par la commande lors de la commutation entre u_{max} et u_{min}	64
Figure 4.4 : Définition de la commande signe.....	66
Figure 4.5 : Démonstration du phénomène de réticence.....	66
Figure 4.6 : Fonction « SAT » et « SMOOTH ».....	67
Figure 4.7: Commande par mode glissant appliquée à la vitesse (u).....	70
Figure 4.8: Commande par mode glissant appliquée à l'assiette longitudinale (θ)	70
Figure 4.9: Commande par mode glissant sans phénomène de chattering, vitesse (u).....	71
Figure 4.10: Commande par mode glissant sans phénomène de chattering, assiette (θ)...	71

Figure 4.11: Commande par mode glissant pour $\sigma = 4\text{m/s}$ sans phénomène de chattering, assiette (θ).....	72
Figure 4.12: Commande par mode glissant pour $\sigma = 4\text{m/s}$ sans phénomène de chattering, vitesse (u).....	72
Figures 4.13: Robustesse de la commande VSS par mode glissant de l'assiette longitudinale (θ)	73
Figures 4.14 :Robustesse de la commande VSS par mode glissant de la vitesse (u)	74

Liste des tableaux

Chapitre I : Modélisation de l'aéronef.

Tableau 1.1 : Valeurs limites des angles d'incidence et de dérapage.....	5
Tableau 1.2 : Valeurs limites des angles d'azimute, d'assiette longitudinale et de gite.....	6
Tableau 1.3: Sommaire de la nomenclature.	8
Tableau 1.4: Dérivées de stabilités longitudinales dimensionnelles.	20
Tableau 1.5: Resultats numerique du mode phugoid et courte periode.	22

Symboles et Abréviations

m	[kg]	masse de l'avion
g	[m/s ²]	force de gravité
C_x	[-]	coefficient aérodynamique de traînée
C_y	[-]	coefficient aérodynamique de force latéral
C_z	[-]	coefficient aérodynamique de portance
C_ℓ	[-]	coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de roulis
C_m	[-]	coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de tangage
C_n	[-]	coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de lacet
ℓ	[m]	constante (longueur de référence).
J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}	[kg*m ²]	moment d'inertie de l'avion dans le repère xyz
J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}	[kg*m ²]	produit d'inertie de l'avion dans le repère xyz
v	[m/s]	vitesse vraie
V_{tan}	[m/s]	vitesse tangentielle
r	[m]	rayon
F_a	[N]	somme de la force aérodynamique
T	[N]	résultante des forces de propulsion
α	[rad]	angle d'incidence
β	[rad]	angle de dérapage
ε	[rad]	angle constant
P	[rad/s]	vitesse angulaire de lacet
Q	[rad/s]	vitesse angulaire de tangage
R	[rad/s]	vitesse angulaire de roulis
H_x, H_y, H_z	[N*m]	moments cinétique de l'avion dans le repère xyz
L	[N*m]	moment de roulis total
M	[N*m]	moment de tangage total
N	[N*m]	moment de lacet total
ω	[rad/s]	vitesse de rotation
S	[m ²]	surface alaire de l'aile
ρ	[kg/m ³]	densité de l'air

v_c	[m/s]	vitesse du centre de gravité de l'avion
U_0	[m/s]	vitesse à l'équilibre de l'avion
Θ	[rad]	angle de tangage (assiette longitudinal)
Φ	[rad]	d'angle de gîte
Ψ	[rad]	azimut
χ	[rad]	azimut aérodynamique
γ	[rad]	pente aérodynamique
μ	[rad]	angle de gîte aérodynamique
U	[m/s]	composante de la vitesse suivant l'axe x
V	[m/s]	composante de la vitesse suivant l'axe y
W	[m/s]	composante de la vitesse suivant l'axe z
μ	[-]	nombre de mach
β_T	[*g]	force de poussée
δ_E	[rad]	Déflexion de la gouverne de profondeur.
ξ	[-]	coefficient d'amortissement
w_n	[rad/s]	pulsation propre
t_s	[s]	temps de réponse
M	[-]	nombre de mach
\bar{c}	[m]	la corde aérodynamique moyenne
b	[m/s]	envergure d'aile
P	[N]	poid de l'avion
H	[ft]	altitude
r	[-]	le signal de référence.
λ_x	[-]	constante (+) qui interprète la bande passante du contrôleur désiré.
μ	[-]	un paramètre petit et positif.
σ_w	[m/s]	rms (root mean square) moyenne de la turbulence verticale
L_w	[m]	l'échelle de la turbulence
$N(s)$	[Hz]	bruit blanc
$w_g(s)$	[m/s]	rafale de vent verticale.
$G_w(s)$	[-]	fonction de transfert.
h_{cg}	[m]	altitude à laquelle l'avion vole dans la turbulence

Les vecteurs :

U : Vecteur longitudinal de la commande

w_g : vecteur longitudinal du rafal de vent

x : vecteur d'état du mouvement longitudinal

x_e : vecteur d'état des erreurs

y : vecteur de sortie mouvement longitudinal

u_{eq} : Commande équivalente

Les matrices :

A, B, C, D :matrice des équations d'états

I : matrice identité

k : matrice des gains retour

k_f : matrice des gains d'allée

k_i : matrice des gains intégrales

Q : matrices de pondération

R : matrices de pondération

P :solution de l'équation de Riccati

C :contrôlabilité

Abréviations :

LQR :Linear Quadratic Regulator

RMS :root mean square(moyenne de la turbulence verticale)

DSP:densité spectrale de puissance

Introduction générale

Introduction générale

L'histoire de l'aviation, est marquée par une découverte importante qui a eu lieu le 17 Décembre 1903, car les frères Wright ont réussi à effectuer le premier vol qui était instable, mais contrôlable. Cette invention a donnée naissance à un aéronef plus maniable et contrôlable qui est moins sensible aux turbulences atmosphériques. [5]

Le vol dans la turbulence atmosphérique est un des sujets de recherche importants en aéronautique. En effet, le développement d'une modélisation mathématique traduisant le comportement de l'avion rencontrant une rafale de vent, tout comme l'établissement de lois de commande pour l'absorption de rafale sont des objectifs importants afin d'assurer une meilleure sécurité aux phases critiques de décollage et atterrissage ainsi que d'améliorer le confort des passagers.

La modélisation mathématique générale du vol de l'avion a été développée depuis de nombreuses années à partir des équations de la mécanique du vol. Certains auteurs se sont intéressés en particulier au cas des effets d'aérodynamique instationnaire. Ils ont travaillé sur les transitoires de portance et de moment, montrant ainsi que ceux-ci pouvaient être incorporés dans des modèles paramétriques par le biais de certaines fonctions. Cette incorporation avait pour objet d'améliorer la précision des modèles par rapport à la réalité du vol dans la turbulence atmosphérique.[1]

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse de fin d'étude se divisent en quatre chapitres :

Le premier chapitre définit les repères et notations utiles au repérage de l'avion dans l'espace. Une synthèse d'équations non linéaires de mouvement est établit à partir d'une série d'hypothèses spécifiant la nature du corps à étudier et le milieu où il est placé. Ces équations sont ensuite linéarisées et simplifiées afin de les appliquer dans l'étude des commandes linéaires et non linéaires. Dans ce chapitre nous définissons également les équations d'état des systèmes de commandes et nous présentons un exemple du modèle d'état pour le mouvement longitudinal du Boeing 747.

Introduction générale

Le deuxième chapitre est consacré essentiellement à l'application de la méthode du placement des pôles au modèle présenté dans le premier chapitre. L'objectif de cette application est de simuler le comportement du système, face aux commandes linéaires multi-variables suivantes :

- Commande par retour d'état.
- Commande par retour d'état avec action intégrale.

Cette simulation est réalisée en présence de perturbations atmosphériques dues à la génération des rafales de vent en utilisant la densité spectrale de puissance de Dryden. Ce chapitre établit, en outre, la base théorique de la rafale utilisée dans ce projet.

Le chapitre 3, quant à lui, est dédié à l'algorithme de recherche de gain optimal pour un régulateur à retour d'état dans le but de minimiser l'indice de performance.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présentons la synthèse de la loi de la commande à structure variable basée sur les concepts de Lyapunov, lorsqu'on fait subir au système des perturbations externes, pour tester la robustesse et les performances de la commande.

Chapitre 1 :

Modélisation de l'aéronef

1 Introduction

Dans ce chapitre, les notions fondamentales concernant la mécanique du vol sont rappelées afin d'éclairer le lecteur non familier de ce domaine. Pour cela, quelques points généraux sont développés, en particulier ceux relatifs aux trièdres et coefficients aérodynamiques ainsi que celui relatif aux équations du mouvement. La fin de ce chapitre résume les équations générales de la mécanique du vol nécessaires à la modélisation du vol de l'avion [1].

2 Trièdres de référence

Les forces et les moments qui s'exercent sur un appareil doivent être exprimés dans un repère convenablement défini. L'aérodynamique et la mécanique du vol font parfois appel à des repères différents et il convient d'y accorder une attention particulière. Des conventions en matière d'orientation et de notation ont été établies. Ces trièdres sont définis comme [1] :

2.1 Un trièdre lié à la terre $Ox_0y_0z_0$

- La position dans l'espace d'un objet mobile est a priori définie dans un repère "fixe", c'est à dire lié à la terre.
- L'origine O est fixe par rapport à la terre,
- Oz_0 est orienté suivant la verticale descendante,
- Ox_0 et Oy_0 sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan horizontal.

Ce trièdre qui apparaît sur les figures (1.2) et (1.3) est appelé trièdre normal terrestre. Il est en outre commode de définir un trièdre équivalent au trièdre précédent et dont l'origine est liée à l'avion (généralement, son centre de gravité) : ce trièdre est dit trièdre normal terrestre porté par l'avion.

Le champ de vitesse de la rafale de vent est souvent connu dans le repère terrestre. Ce trièdre se prête également bien à l'expression de l'effet de la pesanteur.

2.2 Un trièdre lié à l'avion supposé indéformable $Oxyz$

- Ce trièdre est rigidement lié à l'appareil.
- L'origine "O" de ce trièdre est un point fixe de l'avion supposé être le centre de gravité.
- Les axes Ox et Oz sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan de symétrie de l'avion.

-L'axe Ox est une direction que l'on doit pouvoir repérer sur l'avion, voisine de l'axe du fuselage et orienté positivement de l'arrière à l'avant de l'avion.

-L'axe Oz normal à Ox et L'axe Oy complète le trièdre.

Ce trièdre est utilisé pour exprimer les forces de propulsions et l'expression des moments.

2.3 Un trièdre lié à la vitesse, dit trièdre aérodynamique $Ox_a y_a z_a$

-Ce trièdre est lié à la vitesse de l'avion (c'est le repère soufflerie).

-L'origine est un point fixe de l'avion (généralement le centre de gravité de l'avion).

-L'axe Ox_a est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de la vitesse.

-L'axe Oz_a est perpendiculaire à Ox_a , situé dans le plan de symétrie de l'avion, et orienté positivement vers le ventre de l'avion.

-l'axe Oy_a complète le trièdre positif.

Notons que ce trièdre (voir figures 1.1 et 1.3) est utilisé pour exploiter comparativement des résultats de mesure en soufflerie. Le repère aérodynamique est souvent utilisé pour exprimer les forces aérodynamiques. Les coefficients aérodynamiques sont pratiquement toujours exprimés dans ce repère. L'orientation des axes de ce trièdre aérodynamique n'est pas liée "rigidement" à l'avion mais à la vitesse.

3 Positions relatives des divers trièdres et matrices de passages associées

On peut citer quelques matrices de passage en les différents repères.

3.1 Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion

Il faut en général trois angles pour définir la position d'un trièdre par rapport à un autre. Dans le cas qui nous intéresse ici, deux angles suffisent puisque l'axe Oz_a est situé par définition dans le plan de symétrie de l'avion Oxz .

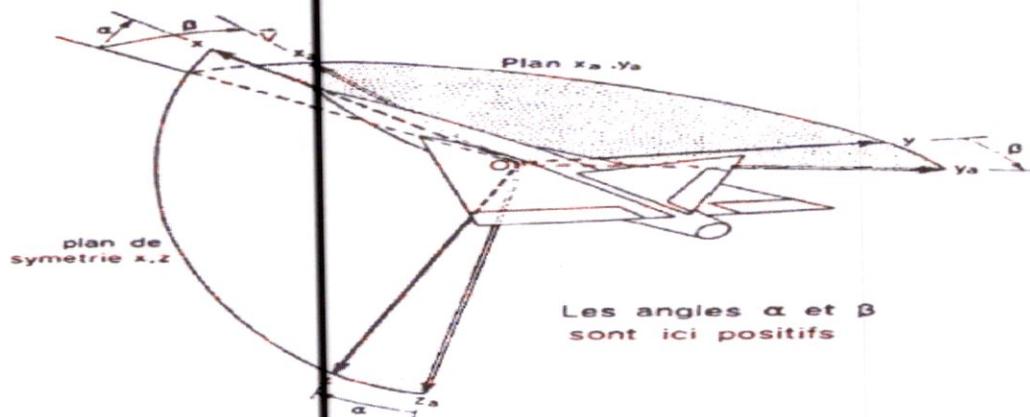


Figure 1.1: Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion.

- L'angle d'incidence α est l'angle de l'axe Ox avec le plan $Ox_a Oy_a$ du trièdre aérodynamique.
- L'angle de dérapage β est l'angle de l'axe Ox_a avec le plan de symétrie Oxz de l'avion[1].

Le tableau 1.1 résume les valeurs extrêmes usuelles pour ces deux angles, évitant plusieurs représentations pour un même point[2]

Angle	Valeur min	Valeur max
α	$-\pi$	π
β	$-\pi/2$	$\pi/2$

Tableau 1.1: Valeurs limites des angles d'incidence et de dérapage.

- Matrice de passage d'un trièdre aérodynamique à un trièdre avion[1] :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

3.2 Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre

La position du trièdre avion $Oxyz$ peut être repérée par rapport au trièdre terrestre par plusieurs systèmes d'angles d'Euler. Le système suivant (voir figure 1.2) est en général le plus utilisé. Soit le trièdre auxiliaire $Ox'y'z'$ confondu avec le trièdre normal terrestre, amené en coïncidence avec le trièdre avion à l'aide de trois rotations successives (voir figure 1.2) :

- Une première rotation (angle Ψ) autour de l'axe Oz_0 amène Ox' en position Ox_h dans le plan vertical passant par Ox (plan Oxz_0). Oy' vient alors en Oy_h .
- Une deuxième rotation (angle Θ) autour de Oy_h amène l'axe Ox' de la position Ox_h à la position Ox .

- Enfin une dernière rotation (angle Φ) autour de Ox amène l'axe Oy' de la position Oy_h à la position Oy .

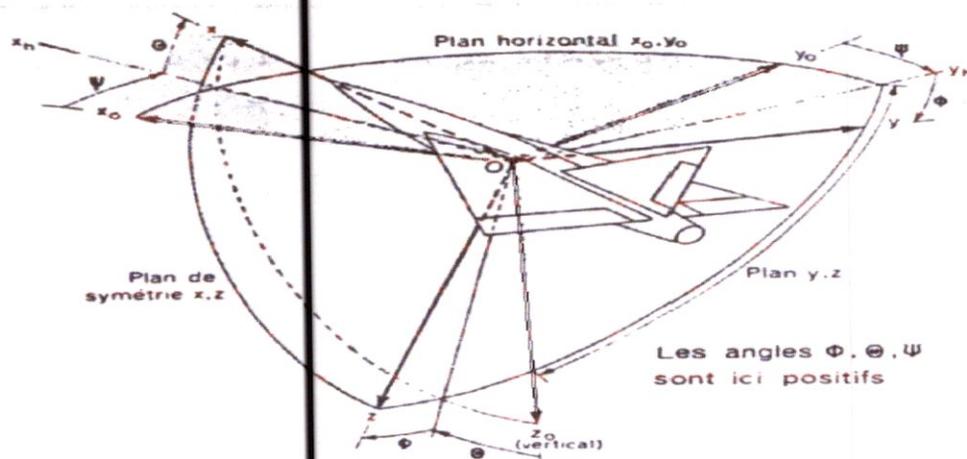


Figure 1.2 : Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre.

Les angles Ψ, Θ, Φ portent respectivement les noms d'azimut, d'assiette longitudinale et d'angle de gite [1]

Le tableau 1.2 résume les valeurs extrêmes usuelles pour ces trois angles, évitant plusieurs représentations pour un même point.[2]

Angle	Valeur min	Valeur max
Ψ	$-\pi$	π
Θ	$-\pi/2$	$\pi/2$
Φ	$-\pi$	π

Tableau 1.2 : Valeurs limites des angles d'azimute, d'assiette longitudinale et de gite.

-Matrice de passage d'un trièdre avion à un trièdre normal terrestre [1] :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi - \sin \Psi \cos \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi & \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi - \cos \Psi \sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

3.3 Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre

La position du trièdre aérodynamique $Ox_a y_a z_a$ par rapport au trièdre normal terrestre $Ox_0 y_0 z_0$ est repérée habituellement par un système de trois angles d'Euler :

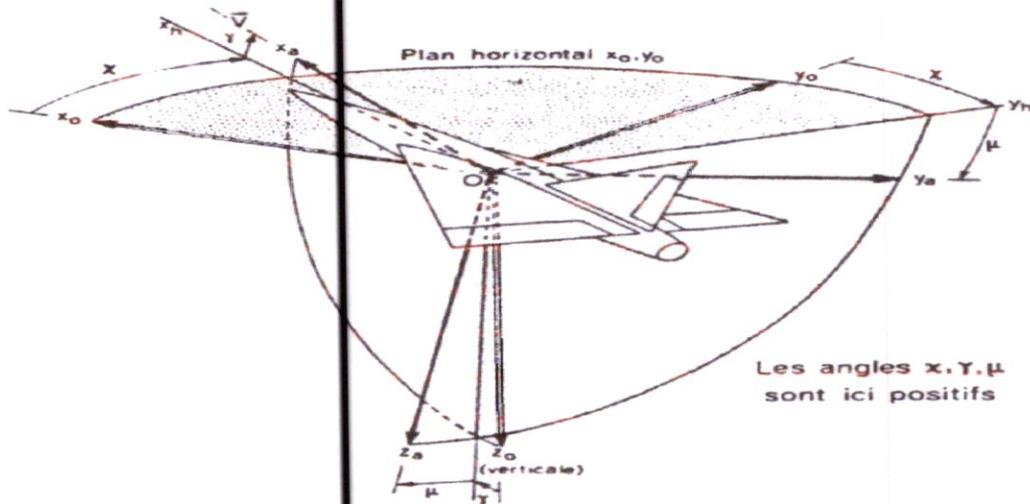


Figure 1.3: Position trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre.

Soit $Ox'y'z'$ un trièdre auxiliaire confondu avec le trièdre normal terrestre $Ox_0 y_0 z_0$. Ce trièdre est amené en coïncidence avec le trièdre aérodynamique à l'aide de trois rotations successives (voir figure 1.3) :

- Une première rotation (angle χ) autour de l'axe Oz_0 amène Ox' en position Ox_h dans le plan vertical contenant Ox_a (plan $Ox_a z_0$), Oy' vient alors en Oy_h .
- Une deuxième rotation (angle γ) autour de Oy_h amène l'axe Ox' de la position Ox_h à la position Ox_a .
- Enfin une dernière rotation (angle μ) autour de Ox_a amène l'axe Oy' de la position Oy_h à la position Oy_a .

Les angles χ , γ et μ portent respectivement les noms d'azimut aérodynamique, de pente aérodynamique et angle de gîte aérodynamique

Matrice de passage d'un trièdre aérodynamique à un trièdre normal terrestre :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = [R'] \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$R' = \begin{bmatrix} \cos \chi_a \cos \gamma_a & \sin \chi_a \cos \gamma_a & -\sin \gamma_a \\ \cos \chi_a \sin \gamma_a \sin \mu_a - \sin \chi_a \cos \gamma_a & \cos \chi_a \cos \mu_a + \sin \chi_a \sin \gamma_a \sin \mu_a & \cos \gamma_a \sin \mu_a \\ \sin \chi_a \sin \gamma_a + \cos \chi_a \sin \gamma_a \cos \mu_a & \sin \chi_a \sin \gamma_a \cos \mu_a - \cos \chi_a \sin \mu_a & \cos \gamma_a \cos \mu_a \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

4. Equations du mouvement relative à un système d'axe lié à l'avion

Nous représentons dans ce tableau les différentes grandeurs utilisées dans les équations du mouvement [4]:

Axes	Direction	Nom	Vitesse linéaire	angle	Vitesse Angulaire
OX	Longitudinal En avant	Roulis	U	Φ	P
OY	Transversal Aile droite	Tangage	V	Θ	Q
OZ	Vertical En bas	Lacet	W	Ψ	R

Axes	Moment D'inertie	Produit D'inertie	Moment
OX	J_{xx}	$J_{xy} = 0$	L
OY	J_{yy}	$J_{yz} = 0$	M
OZ	J_{zz}	$J_{zx} \neq 0$	N

Tableau 1.3: Sommaire de la nomenclature

4.1 Expressions des équations cinématiques

La vitesse de rotation ω peut s'écrire en fonction des dérivées des angles d'Euler (Ψ, Θ, Φ) de la manière suivante [1] [7]:

$$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \tag{1.7}$$

La position relative du trièdre avion Oxyz par rapport au trièdre terrestre $Ox_0y_0z_0$ est définie par les trois angles Ψ, Θ, Φ .

En reprenant la définition des angles Ψ, Θ, Φ une rotation Ψ autour de l'axe Oz_0 une rotation Θ autour de l'axe Oy_h et une rotation Φ autour de l'axe Ox

Par conséquent :

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi} \vec{k}_0 + \dot{\Theta} \vec{j}_h + \dot{\Phi} \vec{i} \quad (1.8)$$

avec :

\vec{k}_0 : est le vecteur unitaire de l'axe Oz_0

\vec{j}_h : est le vecteur unitaire de l'axe Oy_h

\vec{i} : est le vecteur unitaire de l'axe Ox

La matrice de transformation R permet d'écrire :

$$\vec{k} = -\sin \Theta \vec{i} + \cos \Theta \sin \Phi \vec{j} + \cos \Theta \cos \Phi \vec{k} \quad (1.9)$$

Par ailleurs (voir figure(1.2))

$$\vec{j}_h = \cos \Phi \vec{j} - \sin \Phi \vec{k} \quad (1.10)$$

Remplaçant (1.9) et (1.10) dans (1.8) on aura :

$$\vec{\omega} = (-\dot{\Psi} \sin \Theta + \dot{\Phi}) \vec{i} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi) \vec{j} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi) \vec{k} \quad (1.11)$$

Ainsi, les composantes de $\vec{\omega}$ dans le référentiel avion s'écrivent :

$$\omega(t) = \begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \Theta \\ \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \sin \Phi \cos \Theta \\ -\dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Psi} \cos \Phi \cos \Theta \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

ou bien, sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Les relations inverses s'écrivent alors :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\cos \Theta} \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Phi \sin \Theta & \cos \Phi \sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi \sin \Theta & -\sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

-Remarque: lorsque l'angle $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$, cela pose un problème de singularité d'où Θ doit être différente de ces deux valeurs précédentes.

5. Bases de la mécanique du vol

Un avion est un système dynamique complexe, difficile à aborder dans toute sa généralité. L'appareil est un solide déformable, comportant des pièces tournantes (hélices, réacteurs) ou mobiles (gouvernes). Il est soumis à des forces externes très variables, dépendant à la fois de sa trajectoire, de son attitude, de ses déformations et de l'action de la pesanteur terrestre. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte simultanément tous les facteurs régissant le mouvement de l'avion. Des hypothèses simplificatrices appropriées au type de problème que l'on cherche à traiter ici sont donc introduites

Avant d'entamer l'étude dynamique, on doit imposer des hypothèses spécifiant la nature du corps à étudier et le milieu où il est placé.

➤ Hypothèse 1

La terre est supposée plate et fixe dans l'espace, et l'atmosphère terrestre est supposée fixée à la terre.

➤ Hypothèse 2

L'avion est supposé un corps rigide; ainsi, la distance entre deux points quelconques de ce corps est invariante.

➤ Hypothèse 3

La masse totale de l'avion est supposée constante durant notre étude $\frac{dm}{dt} = 0$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un solide rigide, on obtient les équations différentielles suivantes, exprimées dans le trièdre terrestre :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma F_{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{H}}{dt} = \Sigma M_{\text{ext}} \end{cases} \quad (1.15)$$

Où « m » représente la masse du solide, V est la vitesse de son centre de gravité G , H est le moment cinétique du solide agissant en G , F_{ext} est la résultante des forces extérieures agissant sur le Solide, et M_{ext} est le moment résultant de ces forces par rapport à G

5.1 Forces extérieures et moments résultants

Un avion volant dans l'atmosphère est soumis à des forces et moments extérieurs associés principalement à la poussée de moteur, la gravité et les effets aérodynamiques qui peuvent s'exprimer dans le trièdre avion tel que.[3]

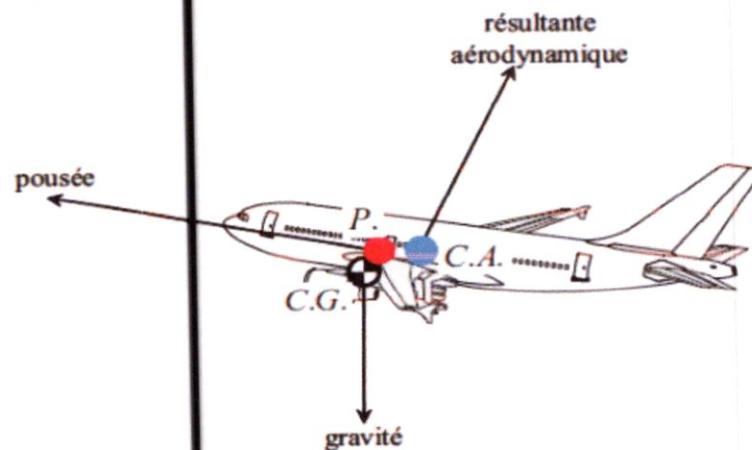


Figure 1.4 : résultante des forces qui s'appliquent sur un avion

5.1.1 Force extérieures

Pour mieux étudier et établir les lois de commande d'un avion il faut commencer par l'étude aérodynamique de l'avion (les différentes forces extérieures agissant sur l'avion).

- Force de pesanteur

Le poids $m \vec{g}$ est portée par l'axe Oz_0 , d'après la matrice R les composantes du poids $m \vec{g}$ dans le trièdre avion $Oxyz$ sont donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur l'axe Ox : } & -mg \sin \Theta \\
 \text{Sur l'axe Oy : } & mg \cos \Theta \sin \Phi \\
 \text{Sur l'axe Oz : } & mg \cos \Theta \cos \Phi
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

On peut constater que l'angle d'azimute Ψ n'existe pas dans cette équation, la raison est la supposition que la terre est plate dans l'hypothèse 1.

-La force aérodynamique

Elle a pour composantes par définition des coefficients aérodynamique C_x, C_y, C_z :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur l'axe Ox : } & -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_x \\
 \text{Sur l'axe Oy : } & \frac{1}{2} \rho S V^2 C_y \\
 \text{Sur l'axe Oz : } & -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_z
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

- La force de propulsion

Dans un souci de précision, la résultante des forces de propulsion exprimée dans le trièdre avion est présentée :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T \cos(\varepsilon) \\ 0 \\ -T \sin(\varepsilon) \end{bmatrix}
 \tag{1.18}$$

ou ε est un angle constant (ε petit)

nous supposons que les forces de propulsion n'ont pas de composantes perpendiculaires au plan de symétrie).

5.1.2 Le moment de la force aérodynamique a pour composantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur l'axe Ox : } & \frac{1}{2} \rho S l V^2 C_l \\
 \text{Sur l'axe Oy : } & \frac{1}{2} \rho S l V^2 C_m \\
 \text{Sur l'axe Oz : } & \frac{1}{2} \rho S l V^2 C_n
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Où : C_l, C_m et C_n coefficients de moments aérodynamiques.

5.2 Développement des équations des forces et des moments suivant un système d'axe fixe

5.2.1 Equations des forces

La somme de la force aérodynamique et de la force de poussé (propulsion) s'exprime selon la relation suivante :

$$\vec{F}_a + \vec{T} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (1.20)$$

L'accélération mesurée dans un système d'axe fixe est donné par :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{x_0y_0z_0} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{xyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad (1.21)$$

Sachant que:

$$\vec{v} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} \quad (1.22)$$

$\vec{\omega}$: voir l'équation (1.7)

Et :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

$$\text{De même : } \vec{\omega} \wedge \vec{v} = (WQ - VR)\vec{i} + (UR - WP)\vec{j} + (VP - UQ)\vec{k} \quad (1.24)$$

En multipliant l'équation (1.21) par la masse « m » on obtient:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m\dot{\vec{v}} + m(\omega \wedge v) \quad (1.25)$$

La somme des équations (1.20) et (1.16) permet de donner l'expression de la résultante de forces extérieures :

$$\begin{aligned} X - mg \sin \Theta &= m(\dot{U} + WQ - VR) \\ Y + mg \cos \Theta \sin \Phi &= m(\dot{V} + UR - WP) \\ Z + mg \cos \Theta \cos \Phi &= m(\dot{W} + VP - UQ) \end{aligned} \quad (1.26)$$

5.2.2 Equations des moments

Pour développer l'expression des moments cinétique, on suppose qu'un élément de masse δm qui tourne avec une vitesse angulaire ω .

La vitesse tangentielle peut être exprimée par le produit en travers de vecteur comme suit voir la figure (1.5) :

$$V_{\text{tan}} = \omega \wedge r \quad (1.27)$$

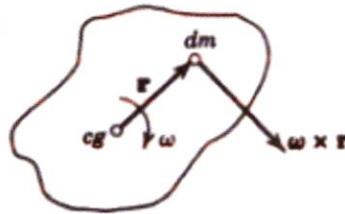


Figure 1.5: Vitesse angulaire ω autour de son centre de gravité d'un corps.

La quantité de mouvement d'un élément de masse δm est la grandeur vectorielle définie par :

$$dM = (\omega \wedge r)dm \quad (1.28)$$

On appelle un moment cinétique d'un système la grandeur vectorielle définie par :

$$dH = r \wedge (\omega \wedge r)dm \quad (1.29)$$

Mais : $H = \int dH$

Ainsi :

$$H = \int r \wedge (\omega \wedge r)dm \quad (1.30)$$

En évaluant le produit de l'équation (1.7) avec

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (1.31)$$

Alors :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (1.32)$$

De même :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{i}(zQ - yR) + \vec{j}(xR - zP) + \vec{k}(yP - xQ) \quad (1.33)$$

Puis :

$$\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zp & yP - xQ \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Alors :

$$\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{i} [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] + \vec{j} [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] + \vec{k} [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] \quad (1.35)$$

Remplaçant (1.35) dans (1.30) :

$$H = \int \vec{i} [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] dm + \int \vec{j} [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] dm + \int \vec{k} [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] dm \quad (1.36)$$

Avec : $\int (y^2 + z^2) dm$: est le moment d'inertie J_{xx}
 $\int (xy) dm$: est le produit d'inertie J_{xy}

Et:

Le plan O_{xz} plan de symétrie donc $J_{xy} = J_{yz} = 0$

Par conséquent les composantes de l'équation (1.36) sont :

$$\begin{aligned} H_x &= PJ_{xx} - RJ_{xz} \\ H_y &= QJ_{yy} \\ H_z &= RJ_{zz} - PJ_{xz} \end{aligned} \quad (1.37)$$

La variation du moment cinétique dans un axe fixe s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{x_0y_0z_0} = \left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{xyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} \quad (1.38)$$

Pour avoir les composantes de $\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{xyz}$ on dérive (1.37) :

$$\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} &= \dot{P}J_{xx} - \dot{R}J_{xz} \\ \frac{dH_y}{dt} &= \dot{Q}J_{yy} \\ \frac{dH_z}{dt} &= \dot{R}J_{zz} - \dot{P}J_{xz} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Par hypothèses : l'avion est un corps rigide de la masse constante, par conséquent les moments et les produits d'inertie sont égaux à zéro. Donc :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (1.40)$$

De même :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{i}(QH_z - RH_y) + \vec{j}(RH_x - PH_z) + \vec{k}(PH_y - QH_x) \quad (1.41)$$

Donc la M_{ext} peut être écrit comme :

$$\vec{M}_{ext} = i\vec{L} + j\vec{M} + k\vec{N} \quad (1.42)$$

D'après les équations (1.39), (1.41), (1.42) L'expression du moment résultant s'écrit comme :

$$\begin{aligned} L &= J_{xx} \dot{P} + J_{xz} (\dot{P} + PQ) + (J_{zz} - J_{yy})QR \\ M &= J_{yy} \dot{Q} + J_{xz} (R^2 - P^2) + (J_{yy} - J_{zz})PR \\ N &= J_{zz} \dot{R} + J_{xz} (\dot{P} - QR) + (J_{yy} - J_{xx})PQ \end{aligned} \quad (1.43)$$

Les équations (1.43) sont des équations différentielles ordinaires non linéaires et couplées qui doivent être résolues avec les équations (1.26) et (1.14), composant neuf équations différentielles avec neuf variables :

Les composantes de la vitesse (U, V, W) et, la vitesse angulaire (P, Q, R) et les angle d'Euler (Ψ, Θ, Φ) , en termes de variables de mouvement $(U, V, W, \Psi, \Theta, \Phi, P, Q, R)$ afin de résoudre l'ensemble d'équations de translation et de rotation de dynamique [5][7].

6 Linéarisation du modèle longitudinal non linéaire :

Le mouvement longitudinal de l'avion dans le plan de symétrie Oxz est représenté seulement par quatre variables, dans ce cas là les équations de la dynamique (1-14), (1-26) et (1.43), peuvent être écrites pour les conditions $\Phi = P = R = V = 0$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta} &= Q \\
 \dot{\Psi} &= 0 \\
 X - mg \sin \Theta &= m(\dot{U} + WQ) \\
 Y &= 0 \\
 Z + mg \cos \Theta &= m(\dot{W} - UQ) \\
 L &= 0 \\
 M &= J_{yy} \dot{Q} \\
 N &= 0
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

L'état d'équilibre de l'avion (mouvement rectiligne uniforme) identifié par l'indice « e » pour laquelle $Q_e = 0$ et l'équation (1.44) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta}_e &= 0 \\
 X_e - mg \sin \Theta_e &= 0 \\
 Z_e + mg \cos \Theta_e &= 0 \\
 M_e &= 0
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

En alignant l'axe x avec le vecteur vitesse (repère avion de stabilité), $W_e = 0$:

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \Theta_e + \theta \\
 U &= U_e + u \\
 W &= w \\
 Q &= q \\
 X &= X_e + \bar{X} \\
 Z &= Z_e + \bar{Z} \\
 M &= \bar{M}
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Avec : w la perturbation de la vitesse verticale (angle d'attaque) donné par :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{U} \tag{1.47}$$

A l'équilibre avec de faibles perturbations on a :

$$\begin{aligned}
 \sin \Theta &\cong \sin \Theta_e + \theta \cos \Theta_e \\
 \cos \Theta &\cong \cos \Theta_e - \theta \sin \Theta_e \\
 u &\ll U_e \quad w \ll U_e
 \end{aligned}$$

Avec : Γ Matrice de perturbations donnée comme suit :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,006868 & -0,01395 & 0 \\ 0,09055 & 0,3151 & -235,91 \\ -0,0003894 & 0,003366 & 0,4285 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans notre étude, on s'intéressera au premier cas, c'est-à-dire, les perturbations sont de types additives aux entrées

3.3 Stabilité d'un système linéaire perturbé :

La stabilité d'un système linéaire en présence de perturbation est réalisé à l'aide du théorème de la superposition et du principe pour la sortie est bornée lorsque l'entrée est bornée.

La perturbation externe est bornée et l'erreur ($e = r-y$) est bornée \Rightarrow le système est stable en présence de cette perturbation.

4 Simulation et interpretation des résultats

Les deux figures (2.6), (2.7) représentent les résultats de simulation d'une commande par retour d'état par placement de poles (P_1) sans aucune perturbation extérieure. On remarque que les signaux de sorties (vitesse(u) et l'assiette longitudinale (θ)), suivent les références $u_{ref} = 10m/s$ et $\theta_{ref} = 2^\circ$ avec un dépassement de $0,8^\circ$ pour l'assiette longitudinale(Figure 2.6) et $1,64ms^{-1}$ pour la vitesse(Figure 2.7) et se stabilisent après 20s. On constate la présence d'erreur statique, mais comme les sorties et les commandes sont bornées, alors le système est stable.

A partir des figures (2.8), (2.9) qui représentent les résultats de simulation d'une commande par retour d'état par placement de poles(P_2) sans aucune perturbation extérieure. on remarque que les signaux de sorties (u, θ), suivent les référence ($u_{ref} = 10m/s/s, \theta_{ref} = 2^\circ$) avec un dépassement de $0,5^\circ$ pour l'assiette longitudinale(Figure 2.8) et $1,39ms^{-1}$ pour la vitesse(Figure 2.9) et se stabilisent après 10s.

On constate la présence d'erreur statique, mais comme les sorties et les commandes sont bornées, alors le système est stable.

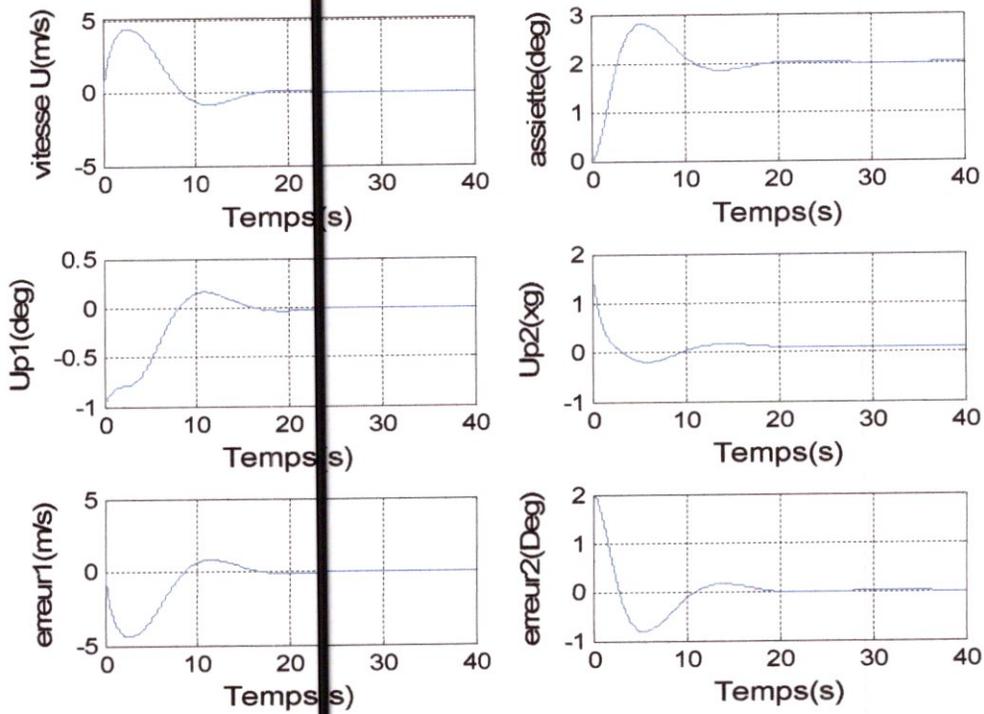


Figure 2.6: Commande à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_1 .

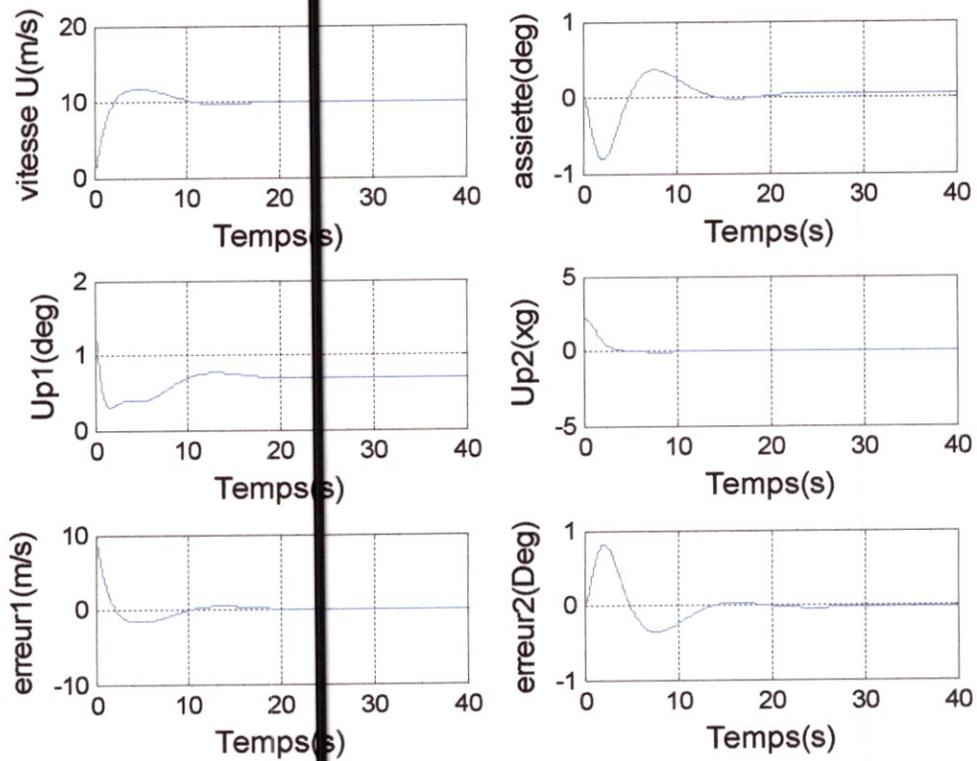


Figure 2.7: Commande à un échelon de vitesse $u_{ref} = 10 \text{ m/s}$, pôle P_1 .

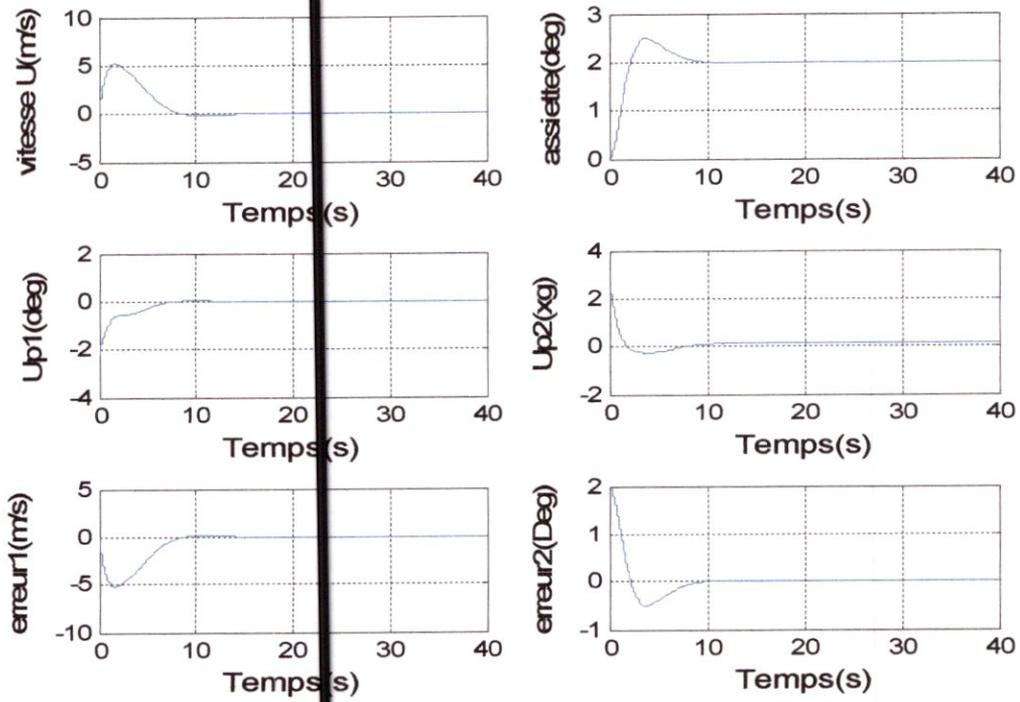


Figure 2.8: Commande à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_2 .

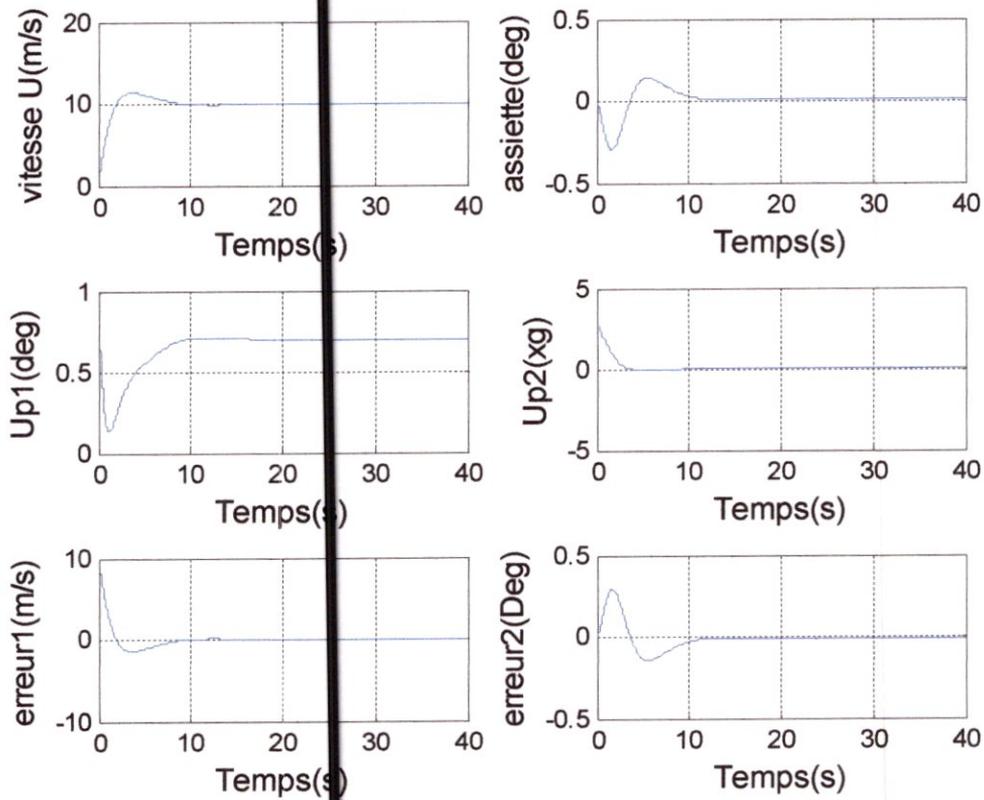


Figure 2.9: Commande à un échelon de vitesse $u_{ref} = 10 \text{ m/s}$, pôle P_2 .

-Avec perturbation

Les figures (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) représentent les résultats d'une simulation lorsque l'avion subit une perturbation externe, due à une perturbation atmosphérique (rafale de vent), pour deux valeurs différentes de σ ($\sigma = 2\text{ m/s}$, $\sigma = 4\text{ m/s}$). On constate que l'influence de la perturbation se caractérise par une augmentation des signaux de sortie. On remarque aussi que la perturbation est absorbée par les commandes, qui deviennent de plus en plus excitées avec l'augmentation de la perturbation. Par contre elles restent bornées, donc le système est stable.

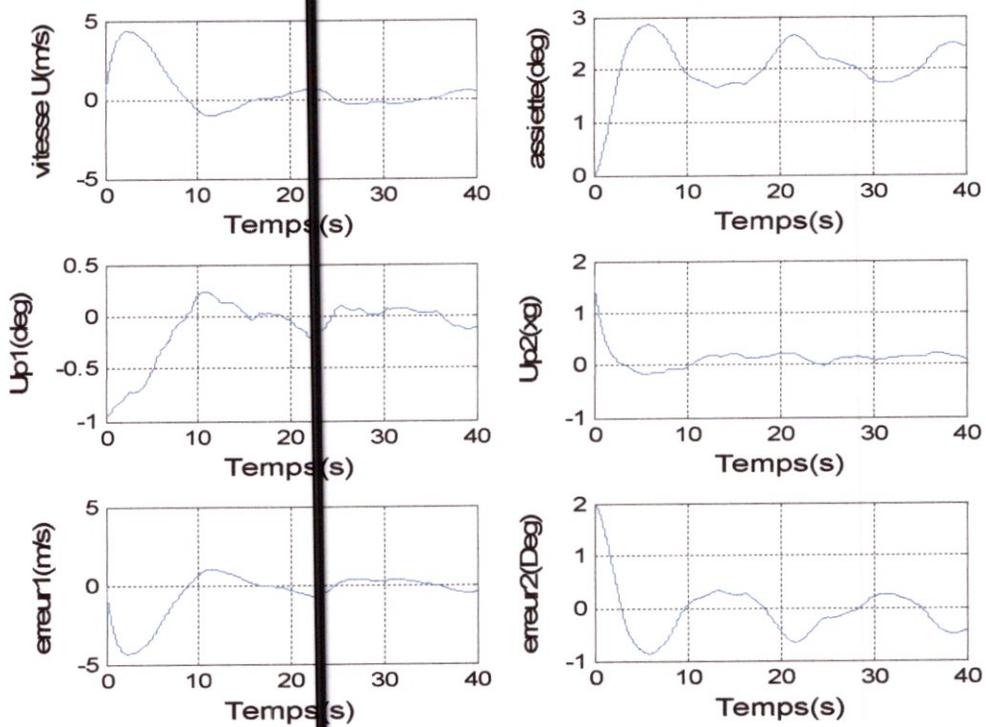


Figure 2.10: Commande à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$ pour $\sigma = 2\text{ m/s}$, pôle P_1 .

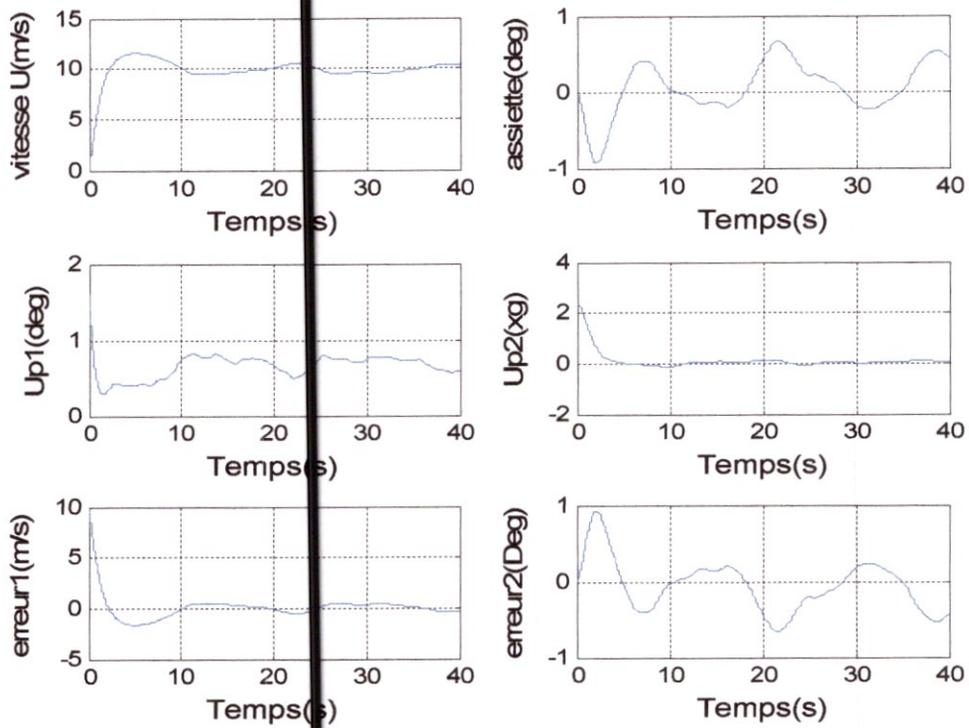


Figure 2.11: Commande à un échelon de $u_{ref} = 10 \text{ m/s}$ pour $\sigma = 2 \text{ m/s}$, pôle P_1 .

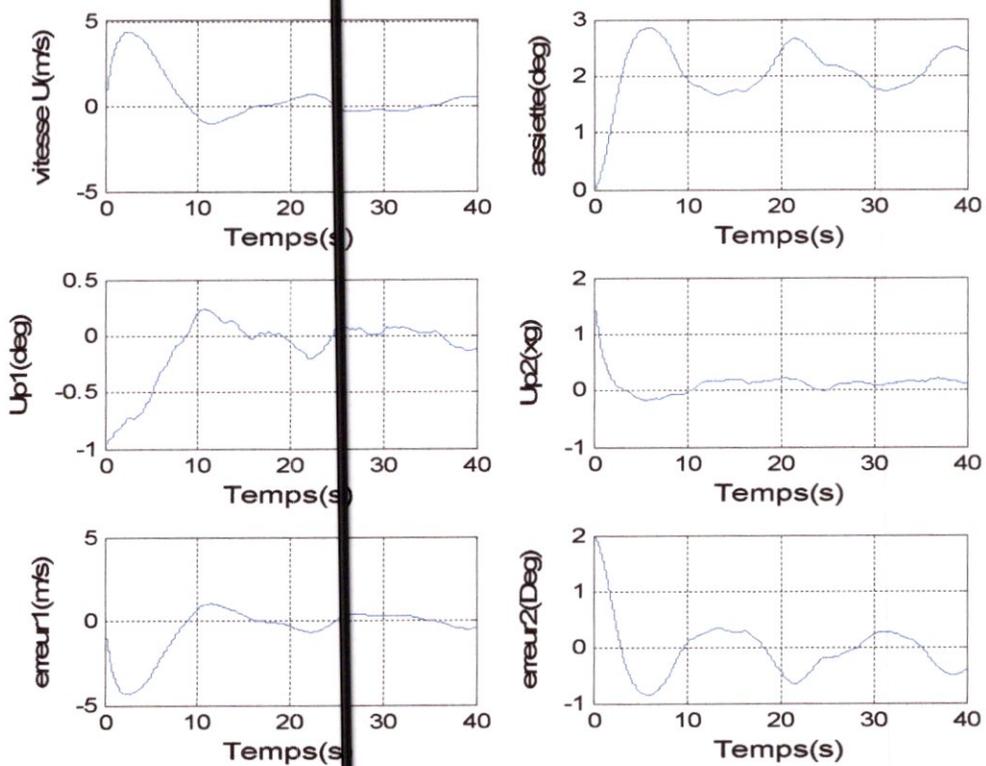


Figure 2.12: Commande à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$ pour $\sigma = 4 \text{ m/s}$, pôle P_1 .

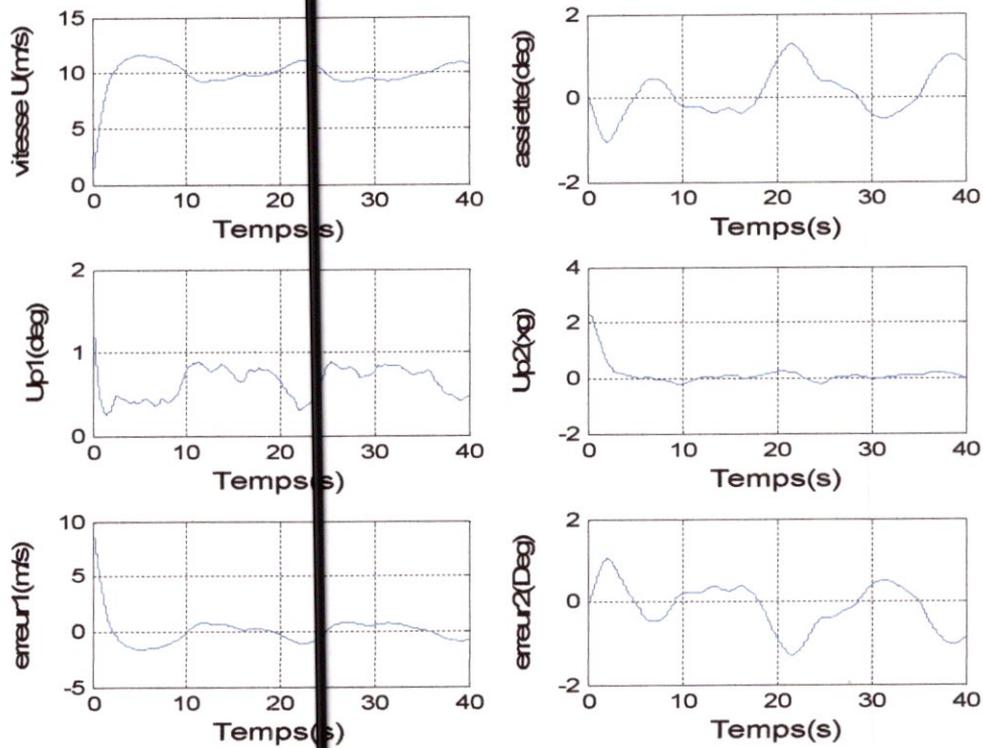


Figure 2.13: Commande à un échelon de $u_{ref} = 10\text{m/s}$ pour $\sigma = 4\text{m/s}$, pôle P_1 .

5 Commande linéaire par retour d'état avec action intégrale

5.1 Détermination de la loi de commande

D'après les résultats obtenus dans la première partie on a constaté que la commande à retour d'état ne permet pas d'éliminer les erreurs statiques causées par les variations des paramètres du système A et B. Pour résoudre ce problème, une action intégrale est conçue, cette dernière n'est autre que l'intégrale de l'erreur [8] :

$$e(t) = r - y(t) = r - Cx(t) \tag{2.10}$$

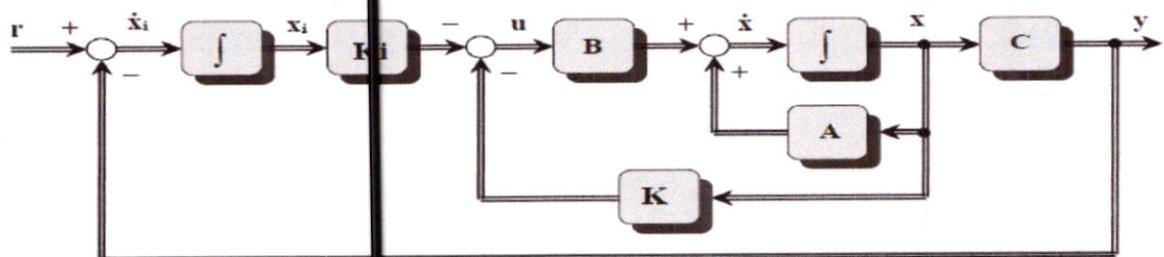


Figure 2.14-Schéma bloc de la commande par retour d'état avec action intégrale

On définit :

$$\dot{x}_i = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t r - Cx(t) \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow k_i = r - Cx$$

La commande par retour d'état avec action intégrale est donnée par :

$$U = -kx + k_i x_i \quad (2.17)$$

k_i : matrice des gains intégrales

On remplace (2.17) dans (2.1) on obtient :

$$\dot{x} = Ax - Bkx + Bk_i x_i = (A - Bk)x + Bk_i x_i \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_i = r - Cx \quad (2.19)$$

5.2 Détermination de la matrice k et k_i

On définit un vecteur augmenté $(x \ x_i)^T$ de tel sorte que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \quad (2.20)$$

Soit encore :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{4 \times 2} \\ -C & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

C'est de la forme : $\dot{x}^* = A^* x^* + B^* U$ (2.22)

Avec : $U = -k^* x^*$ (2.23)

Où : $k^* = [k \ -k_i]$

Utilisant la fonction PLACE sur MATLAB et par placement de pôle, on calcule cette fois-ci le vecteur k^* et on déduit les matrices de gains k et k_i .

Pour :

$$P_1 = [-1; -0.3; -0.8 + 0.8875i; -0.8 - 0.8875i; -0.2 + 0.372i; -0.2 - 0.372i]$$

$$k = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.0022 & -1.0045 & -0.9631 \\ 0.4756 & -0.0131 & 15.1418 & -6.9060 \end{bmatrix}$$

$$k_i = \begin{bmatrix} -0.0032 & 0.2752 \\ -0.1933 & -6.7896 \end{bmatrix}$$

Pour :

$$P_2 = [-1.2; -0.4; -0.88 + 0.8875i; -0.88 - 0.8875i; -0.4 + 0.372i; -0.4 - 0.372i]$$

$$k = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0012 & 1.5750 & -1.6400 \\ 0.5415 & 0.0499 & 15.3626 & -7.6841 \end{bmatrix}$$

$$k_i = \begin{bmatrix} -0.0015 & 0.8397 \\ -0.2284 & -18.3246 \end{bmatrix}$$

5.3 Dynamique en boucle fermé en présence des perturbations La dynamique est toujours présentée par l'équation (2.1) avec la présence du terme $w_g(t)$ qui représente la perturbation atmosphérique verticale externe.

Sachant que la commande est : $U = -kx + k_i x_i$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[U(t) + w_g(t)] \tag{2.24}$$

$$\dot{x}_i(t) = r - Cx \tag{2.25}$$

- La stabilité d'un système linéaire en présence de perturbation est réalisé à l'aide du théorème de la superposition et du principe pour la sortie est bornée lorsque l'entrée est bornée.

La perturbation externe est bornée et l'erreur ($e = r - y$) est bornée => le système est stable en présence de cette perturbation.

5.4 Simulation et interprétation des résultats

Les figures (2.15), (2.16) représentent le résultat de simulation d'une commande par retour d'état avec action intégrale sans aucune perturbation extérieure. On remarque que les signaux de sorties (u, θ) suivent les références (r_1, r_2) sans erreurs statiques avec un dépassement de $0,41^\circ$ pour l'assiette longitudinale (Figure 2.15) et $0,8ms^{-1}$ pour la vitesse (Figure 2.16) et se stabilisent après 20s.

Les signaux de sorties et les commandes restent bornées, donc la stabilité du système est maintenue.

A partir des résultats obtenus des figures (2.17), (2.18), on remarque que les signaux de sorties (u, θ) suivent bien les références (r_1, r_2) respectivement, sans erreur statique sous l'effet de l'action intégrale. On remarque aussi que le signal est bien amorti, avec un dépassement de $0,27^\circ$ pour l'assiette longitudinale (Figure 2.17) et $0,2\text{ms}^{-1}$ pour la vitesse (Figure 2.18) et se stabilisent après 10s.

Les signaux de sorties et les commandes restent toujours bornées, donc la stabilité du système est maintenue.

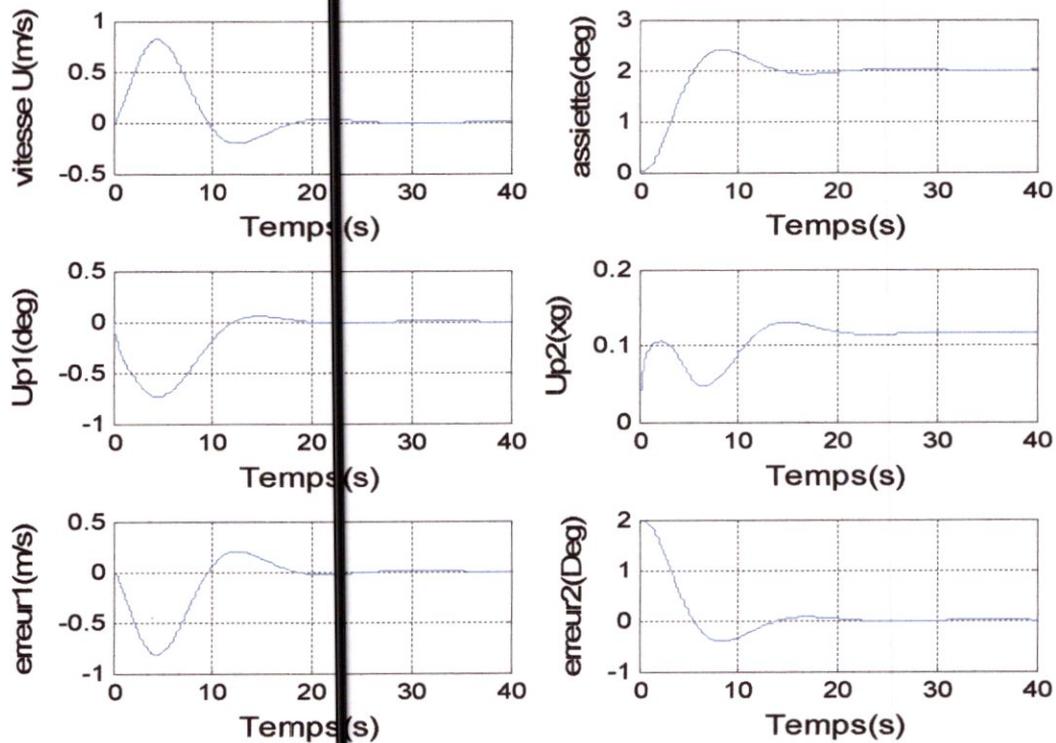


Figure 2.15: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_1 .

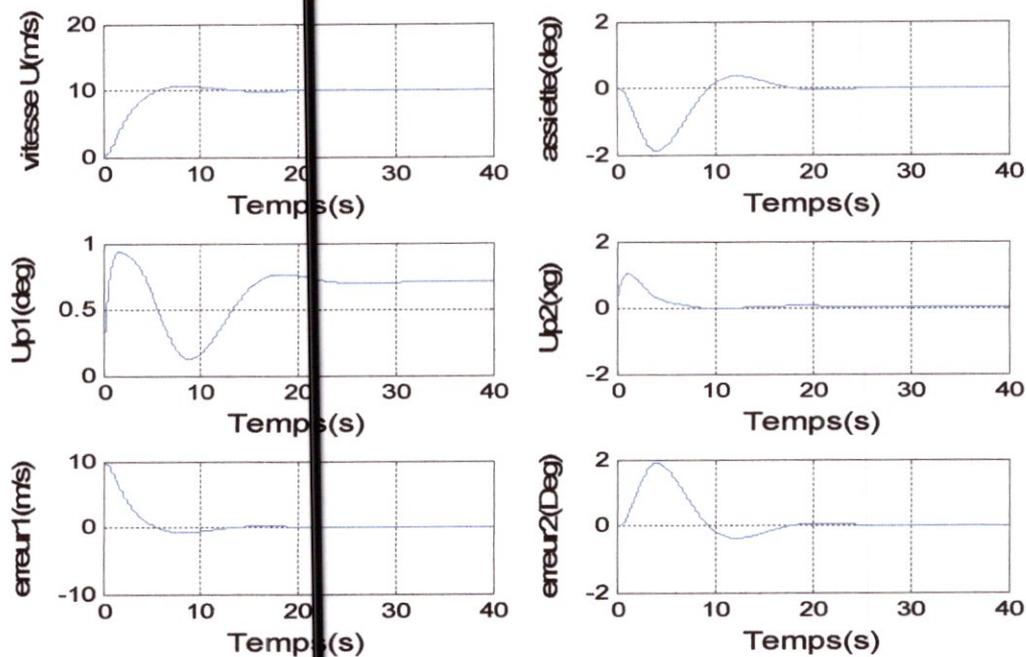


Figure 2.16: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10 \text{ m/s}$, pôle P_1 .

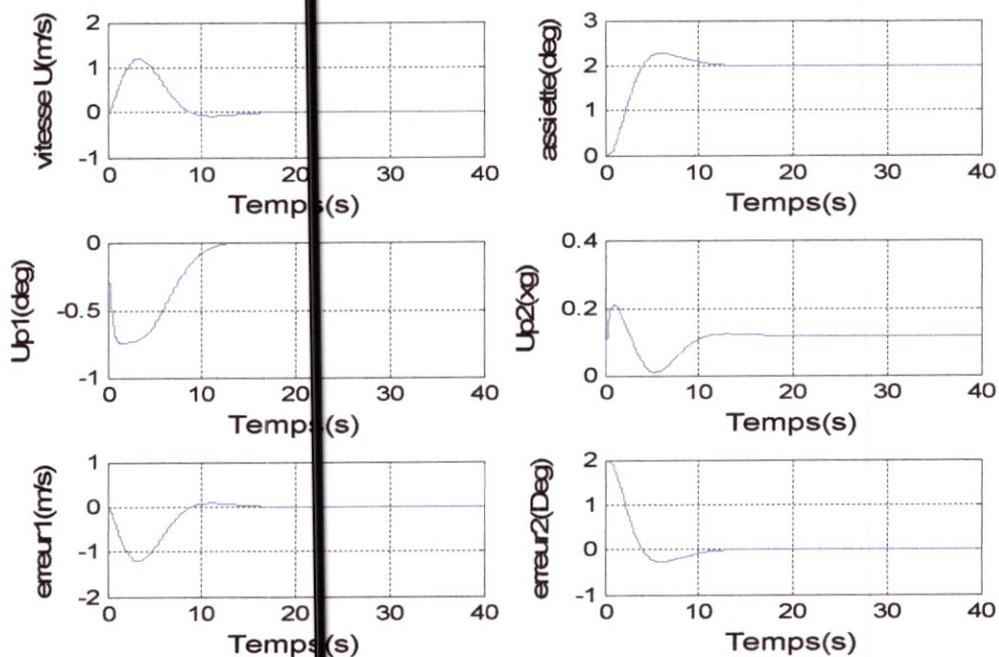


Figure 2.17: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pôle P_2 .

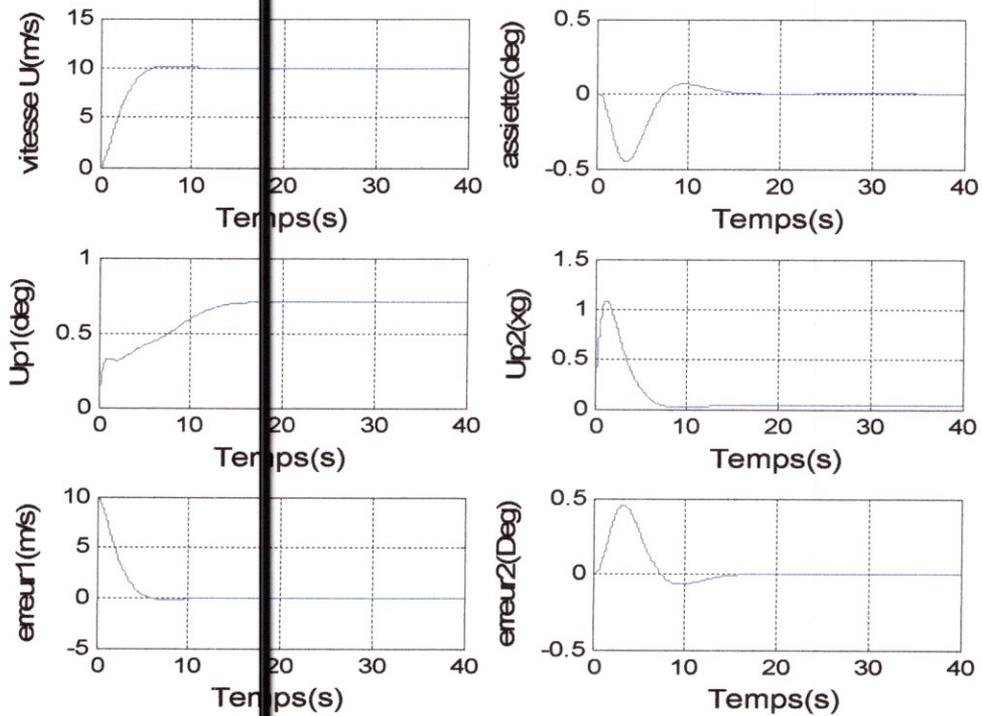


Figure 2.18: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10\text{m/s}$, pôle P_2 .

-Avec perturbation

Les figures (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) représentent les résultats d'une simulation lorsque l'avion subit une perturbation externe, due à une perturbation atmosphérique pour les deux valeurs différentes de σ ($\sigma = 2\text{m/s}$, $\sigma = 4\text{m/s}$).

On constate une bonne poursuite des signaux de sortie aux signaux de référence par rapport au cas précédent, on déduit que les commandes sont sensiblement robuste face à ces perturbations et vu qu'elles sont bornées elles maintiennent la stabilité du système.

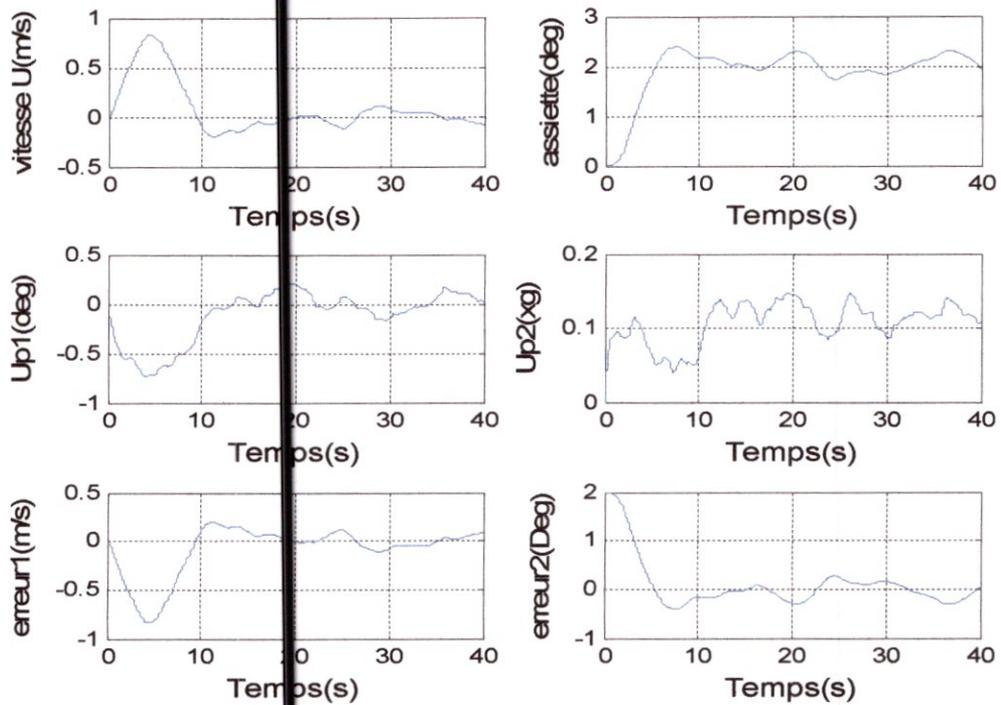


Figure 2.19: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pour $\sigma = 2 \text{ m / s}$, pôle P_1 .

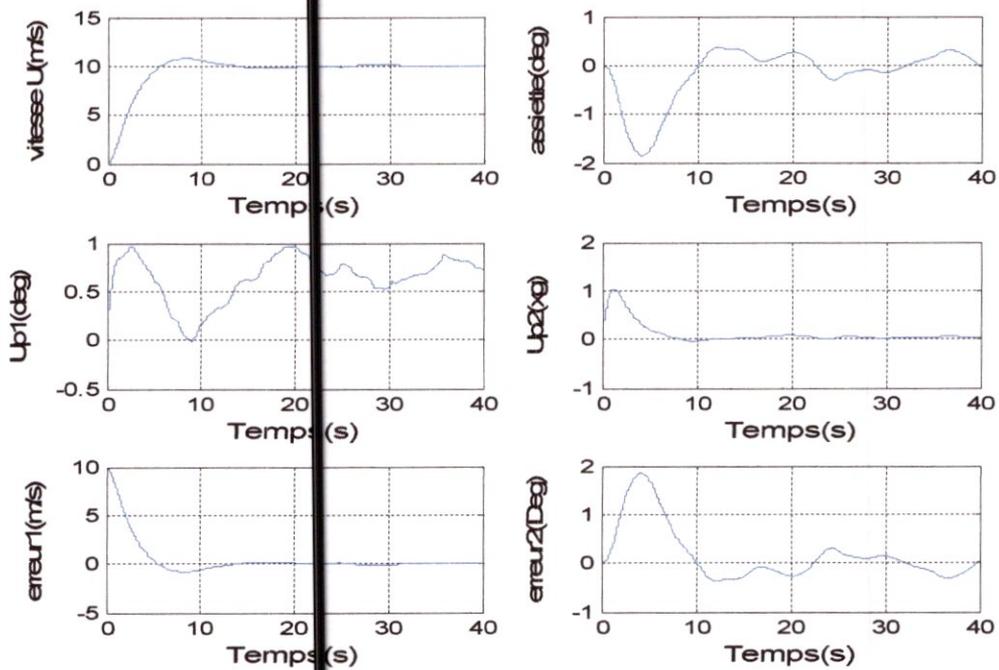


Figure 2.20: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10 \text{ m/s}$, pour $\sigma = 2 \text{ m / s}$, pôle P_1 .

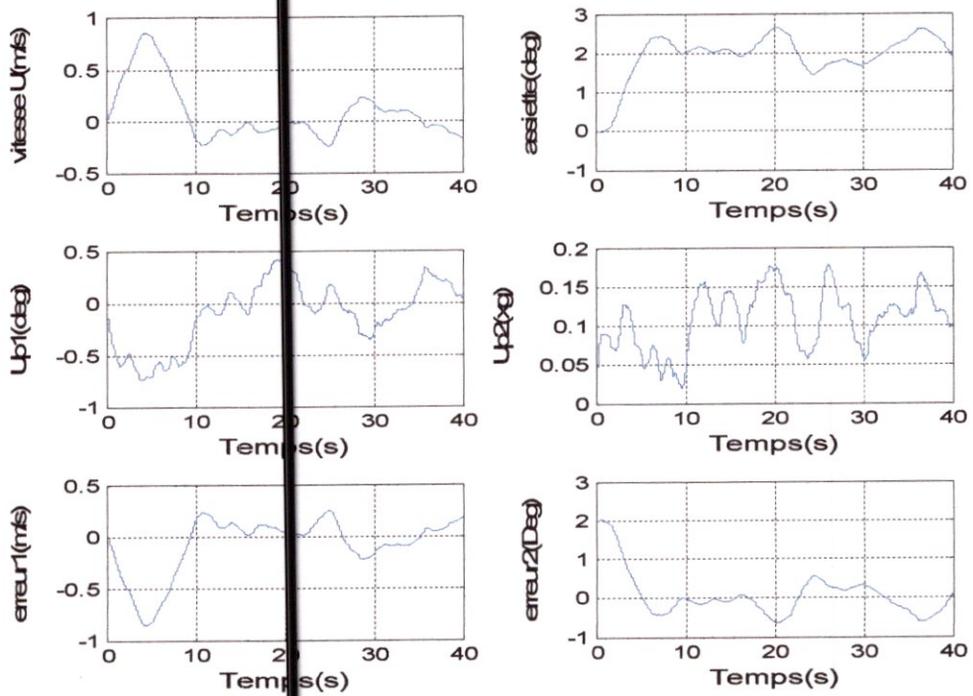


Figure 2.21: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $\theta_{ref} = 2^\circ$, pour $\sigma = 4\text{ m/s}$, pôle P_1 .

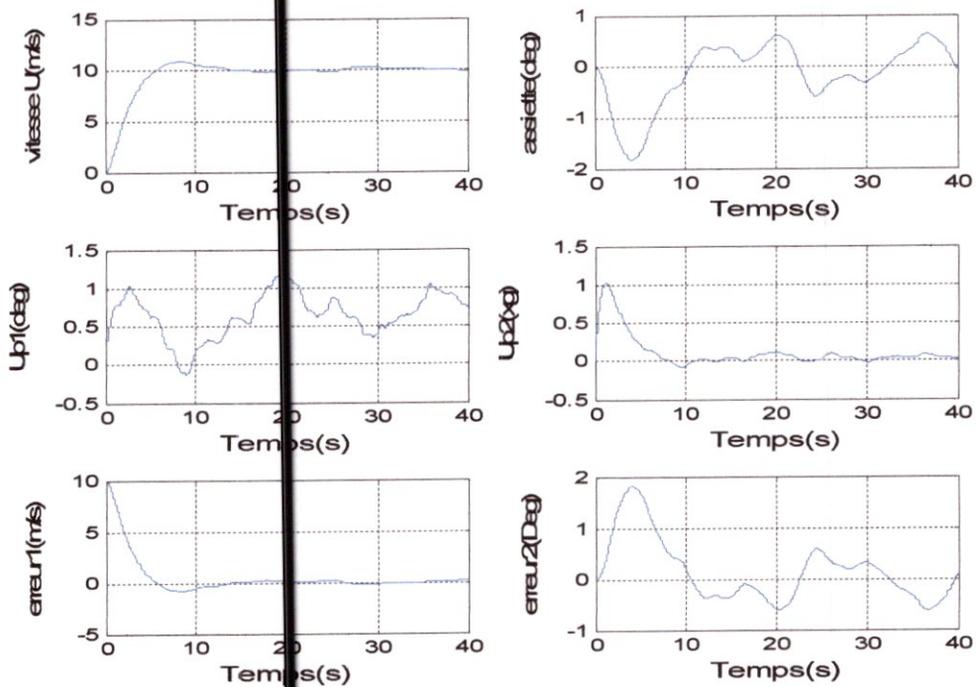


Figure 2.22: Commande par retour d'état avec action intégrale à un échelon de $u_{ref} = 10\text{ m/s}$, pour $\sigma = 4\text{ m/s}$, pôle P_1 .

6 Test de robustesse

Les figures (2.26), (2.27) représentent une simulation par retour d'état ainsi que par retour d'état avec action integrale de l'assiette longitudinale et de la vitesse en changeant les paramètres de vol (nombre de Mach(M), l'altitude). Voir annexe D

D'après les résultats obtenus, on remarque une dégradation des performances dans la réponse du système, et cela due à la qualité de robustesse de la commande. Donc il faut procéder à d'autres lois de commandes plus robuste.

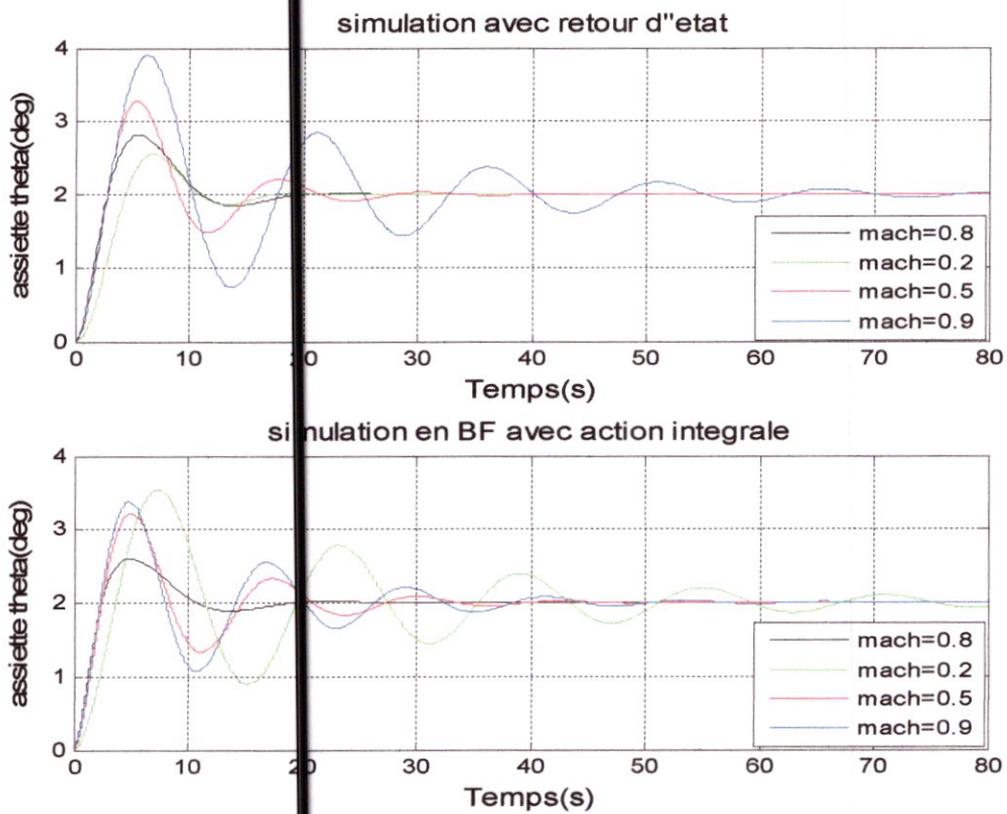


Figure 2.23 : Robustesse de la commande par rapport à l'assiette longitudinale (θ)

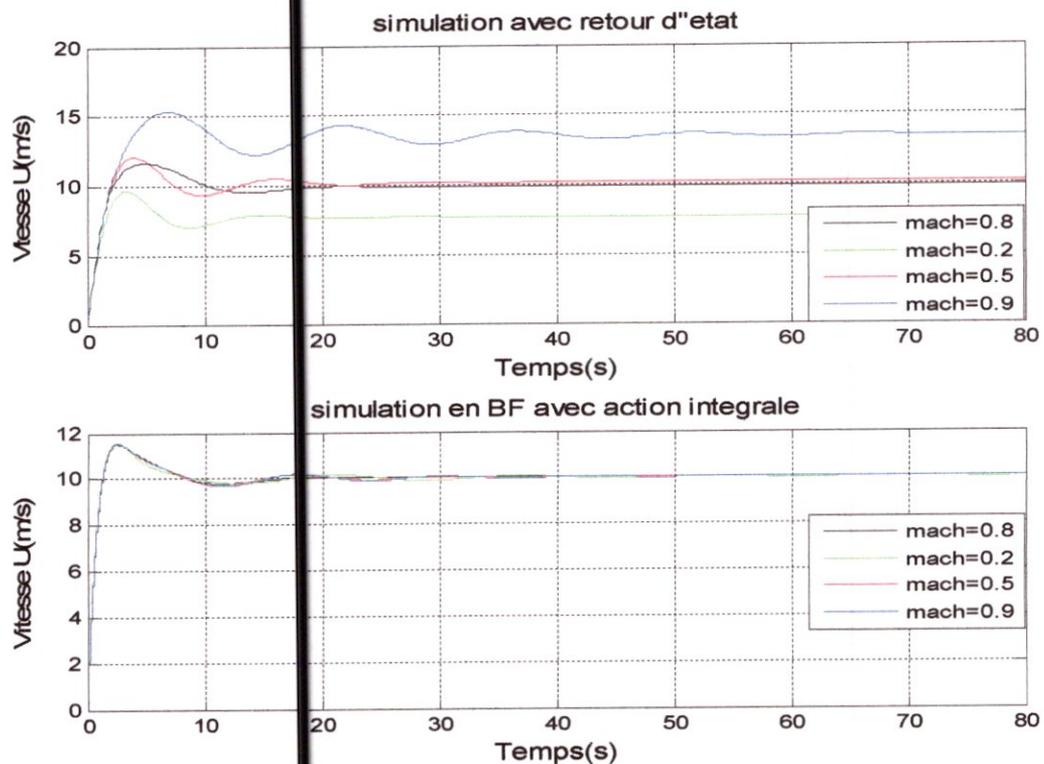


Figure 2.24: Robustesse de la commande par rapport à la vitesse (u)

8 Conclusion

Dans cette partie, on a étudié la synthèse de deux commandes classiques lorsqu'elles sont appliquées à un système multi-variable soumis à une perturbation externe.

À partir des résultats obtenus, on constate que la commande par retour d'état avec action intégral est plus efficace que celle par retour d'état, et ceci, par l'annulation de l'erreur statique.

Cependant, une variation des paramètres du système influe sur sa robustesse lorsqu'on utilise ces deux commandes linéaires. Cela nous mène à d'autres lois de commandes plus robustes qui permettront une meilleure adaptation de la commande et une meilleure poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence choisi, ce qui va être élaborer dans le chapitre suivant.

Chapitre 3 :
Commande optimale LQR

1 Introduction

La commande optimale a été étudiée dès le XIX^{ème} siècle, une des grandes applications de cette commande a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité.

Dans cette partie, on va se concentrer sur les problèmes de régulateur, dont le but est de maintenir l'état du système $x(t)$ à une valeur désirée. Ce problème va être résolu en utilisant la théorie de commande linéaire comme le Régulateur Quadratique Linéaire LQR. [10]

2 Commande Linéaire Quadratique

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR pour linear quadratic regulator. Le système est linéaire et la commande est quadratique. Cette commande est définie comme étant une commande optimale par retour d'état .

Le problème de cette commande en boucle fermée est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal qui permet de minimiser le critère rapidité-énergie de commande défini dans l'équation suivante :

$$J(x_0, t_0, U) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (x^T(t)Qx(t) + U^T(t)RU(t))dt \tag{3.1}$$

Sachant que :

$x^T(t)Qx(t)$: Vitesse de rejet de perturbation(la rapidité).

$U^T(t)RU(t)$: Energie de commande.

La solution est donc de trouver la matrice de gain du retour d'état optimale k :

$$U = -kx \tag{3.2}$$

Avec :

$$k = -R^{-1} B^T P \tag{3.3}$$

Où : P est une matrice constante, symétrique, semi-définie positive de la solution de l'équation de Riccati algébrique suivant :

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3.4)$$

Et : Q est une matrice symétrique semi-définie positive $x^T(t)Qx(t) \geq 0$ (C'est une matrice de pondération : elle donne un poids différent à chaque composante du vecteur d'état dans le critère).

R est une matrice symétrique définie positive. $U^T(t)RU(t) > 0$, si $U(t) \neq 0$. [11]

On constate que la loi de commande, résultant de la réduction au minimum du critère J , dépend du choix des matrices de pondération Q et R . En utilisant le logiciel Matlab on peut calculer les valeurs de gain k , la solution de l'équation de Riccati P et les valeurs propres de la boucle fermée E [10]. L'instruction utilisée est : $[k, P, E] = LQR(A, B, Q, R)$

$$\text{Pour : } Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_1 = \text{eye}(2)$$

On obtient les gains de commandes :

$$k = \begin{bmatrix} 0.129 & 0.0028 & -1.8325 & -3.4524 \\ 0.989 & 0.0043 & -0.3479 & -2.8731 \end{bmatrix}; \quad kr = \begin{bmatrix} 0.1295 & -3.4524 \\ 0.9916 & 0.4636 \end{bmatrix}$$

-Pour améliorer les performances du système, On choisit une autre matrice de pondération comme suit :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \text{eye}(2)$$

On obtient les gains de commandes :

$$k = \begin{bmatrix} 0.0622 & 0.0028 & -2.2559 & -4.5962 \\ 3.1593 & 0.0046 & -0.1793 & -3.2418 \end{bmatrix}; \quad kr = \begin{bmatrix} 0.0626 & -4.5962 \\ 3.1617 & 0.0950 \end{bmatrix}$$

3 Simulation et interprétation des résultats

Les figures(3.1), (3.2) (3. 3), (3.4),(3.5) représentent les résultats de simulation d'une commande LQR par retour d'état sans aucune perturbation extérieure pour deux valeurs de pondération .On observe une bonne poursuite des signaux de références par les sorties(vitesse(u) et l'assiette longitudinale (θ)),avec un dépassement de l'ordre de $0,17^\circ$ pour (θ) ce qui va être diminuer en choisissant des nouvelles pondérations, et une bonne poursuite pour le cas de vitesse.

D'après les résultats obtenus de la figure(3.2), on remarque que la commande LQR nécessite une déflexion de 70° de la gouverne de profondeur, et une poussée de 0.7g, alors que la conception de l'avion boein747 ne permet pas des déflexions de plus de 23° vers le haut et de 17° vers le bas, et une poussée maximale de 0.3g. Pour remédier à ce problème on utilise la fonction saturation du logiciel Matlab, par conséquence on obtient une augmentation de temps de réponse.L'étude de la stabilité de cette commande sera proposée dans le cadre des travaux futures.

Le choix des matrice de pondération permet d'économiser l'énergie des commandes permettant de diminuer la réponse du système.les commandes restent bornées donc le, système est stable.

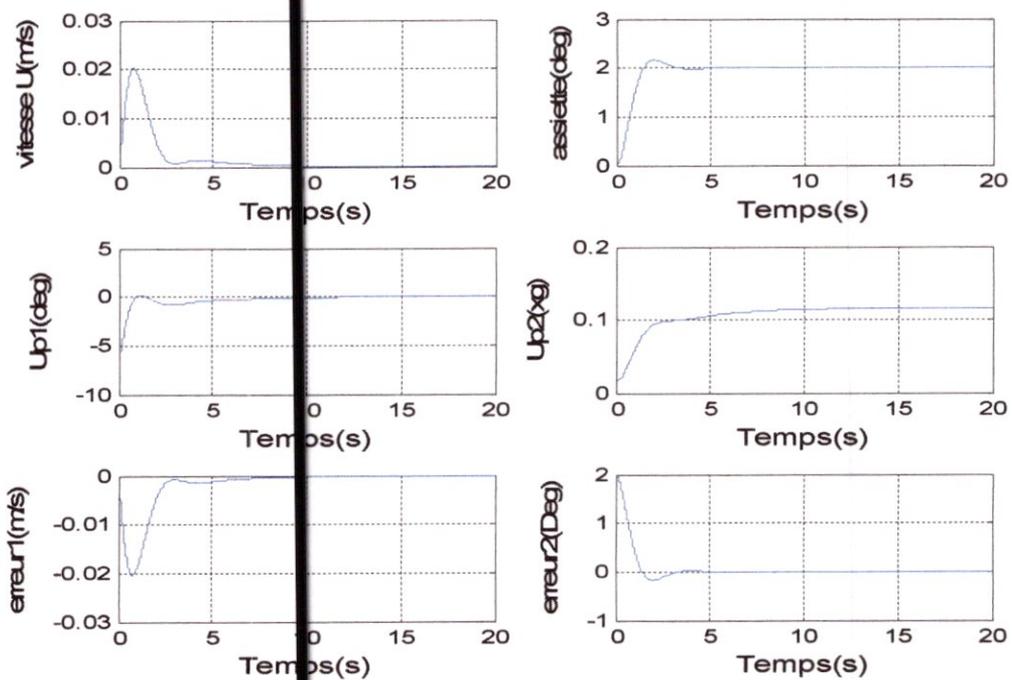


Figure 3.1: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , assiette θ .

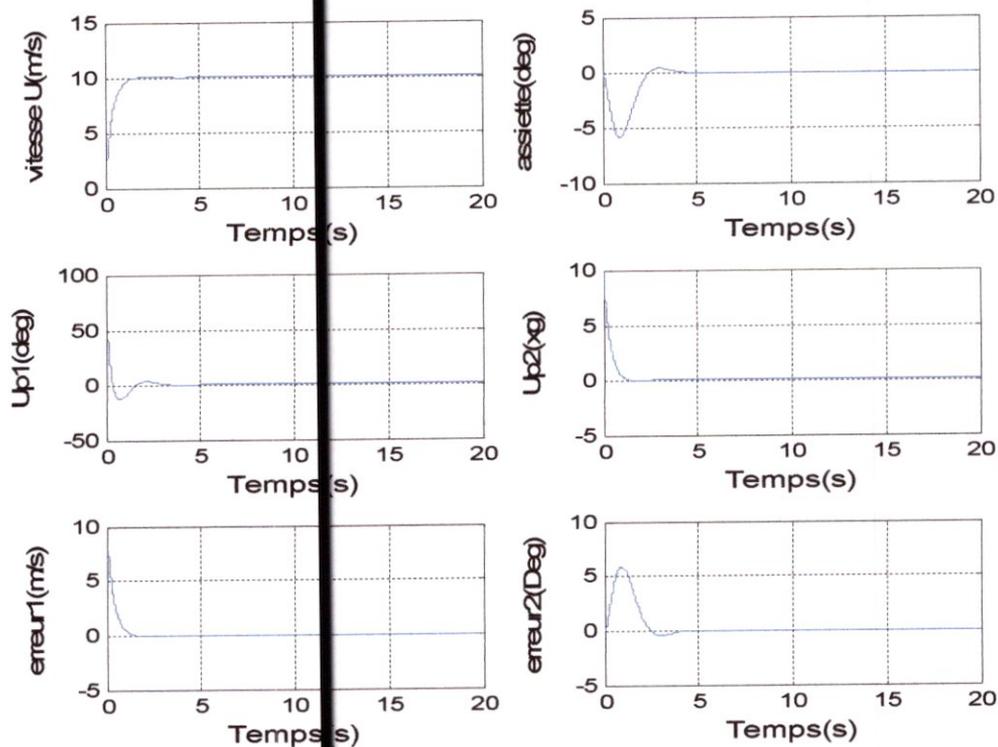


Figure 3.2: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , vitesse (u).

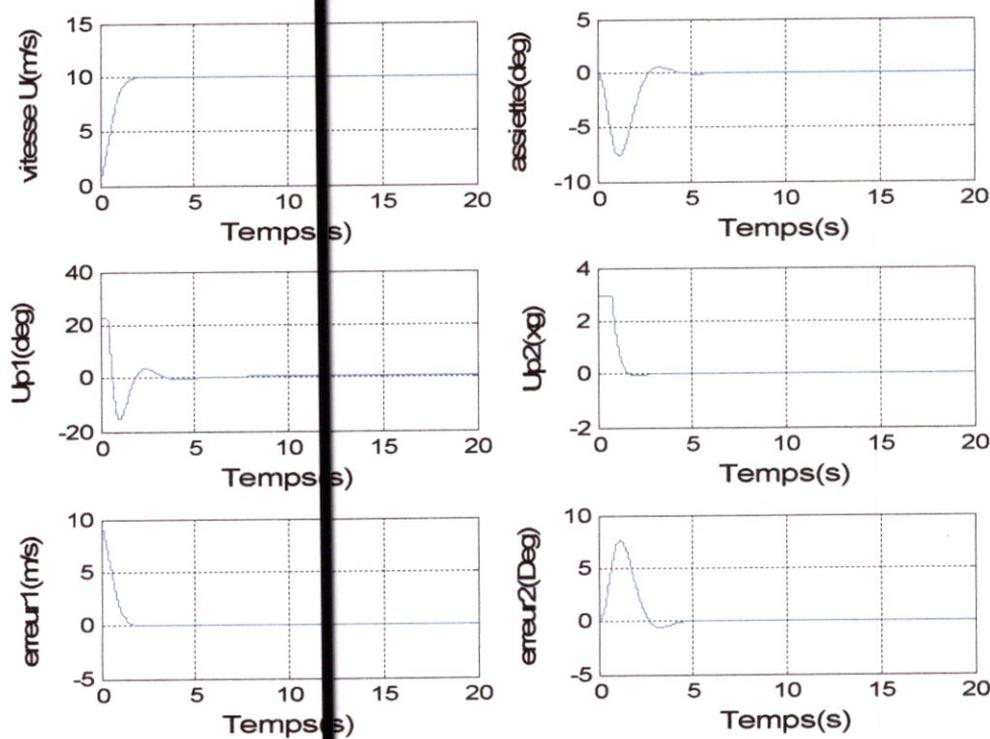


Figure 3.3: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_1 et R_1 , vitesse (u), avec la fonction saturation.

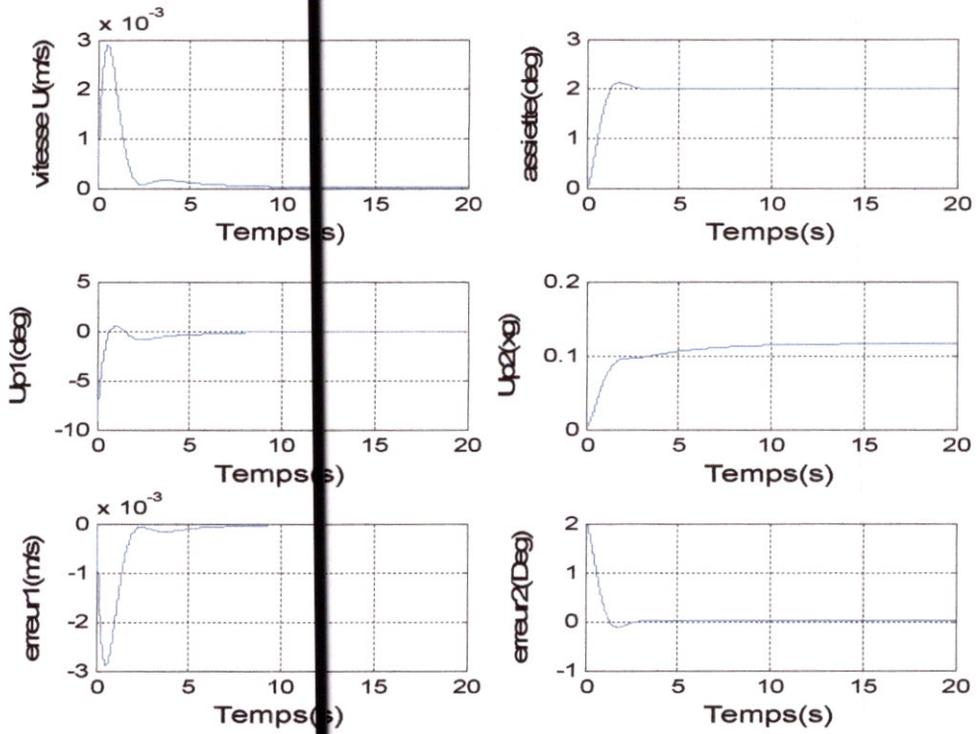


Figure 3.4: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_2 et R_2 , assiette θ .

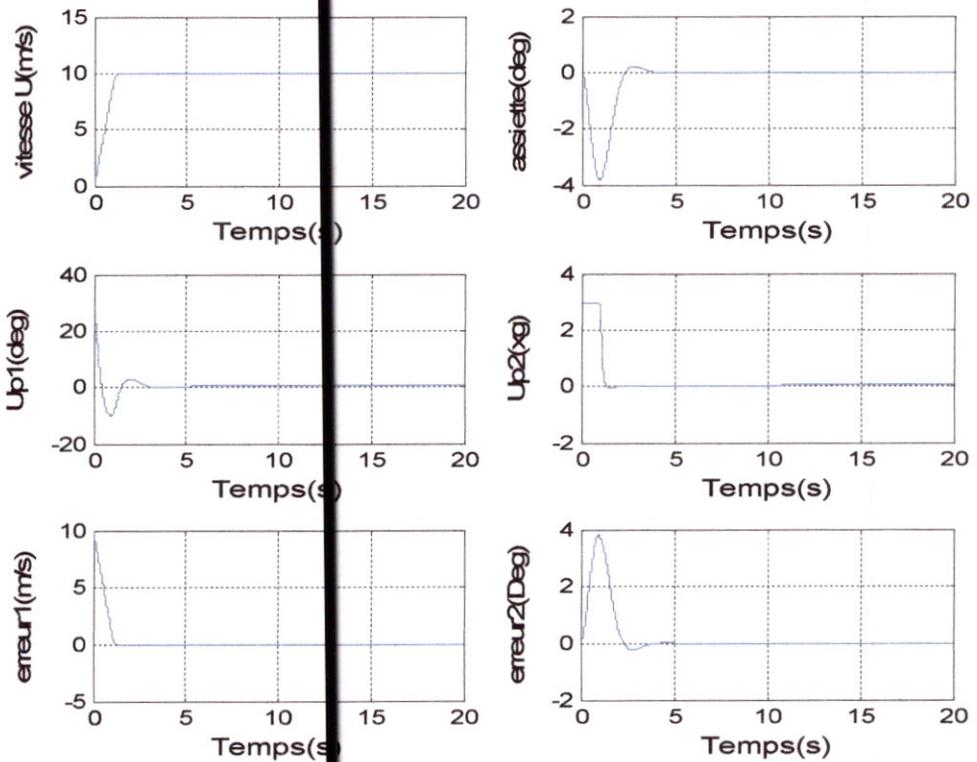


Figure 3.5: Commande LQR sans perturbation avec pondération Q_2 et R_2 , vitesse (u).

-Avec perturbation

Les figures (3.6), (3.7), (3.8), (3.9),(3.10),(3.11), (3.12),(3.13), représentent les résultats de simulation d'une commande LQR par retour d'état pour deux valeurs de pondération en présence de deux sources différentes de perturbation, l'orage grave $\sigma = 4\text{m/s}$, nuage accumulé $\sigma = 2\text{m/s}$.

- La stabilité d'un système linéaire en presence de perturbation est réalisé à l'aide du théorème de la superposition et du principe pour la sortie est bornée lorsque l'entrée est bornée.

La perturbation externe est bornée et l'erreur ($e = r-y$) est bornée => le système est stable en présence de cette perturbation.

On distingue les influences des perturbations qui se caractérisent par une augmentation des signaux de commandes par rapport aux cas précédents, selon les résultats on constate une bonne poursuite des signaux de sortie aux signaux de référence, on déduit que les commandes sont robustes face à ces perturbations et maintiennent le système stable avec des commandes bornées.

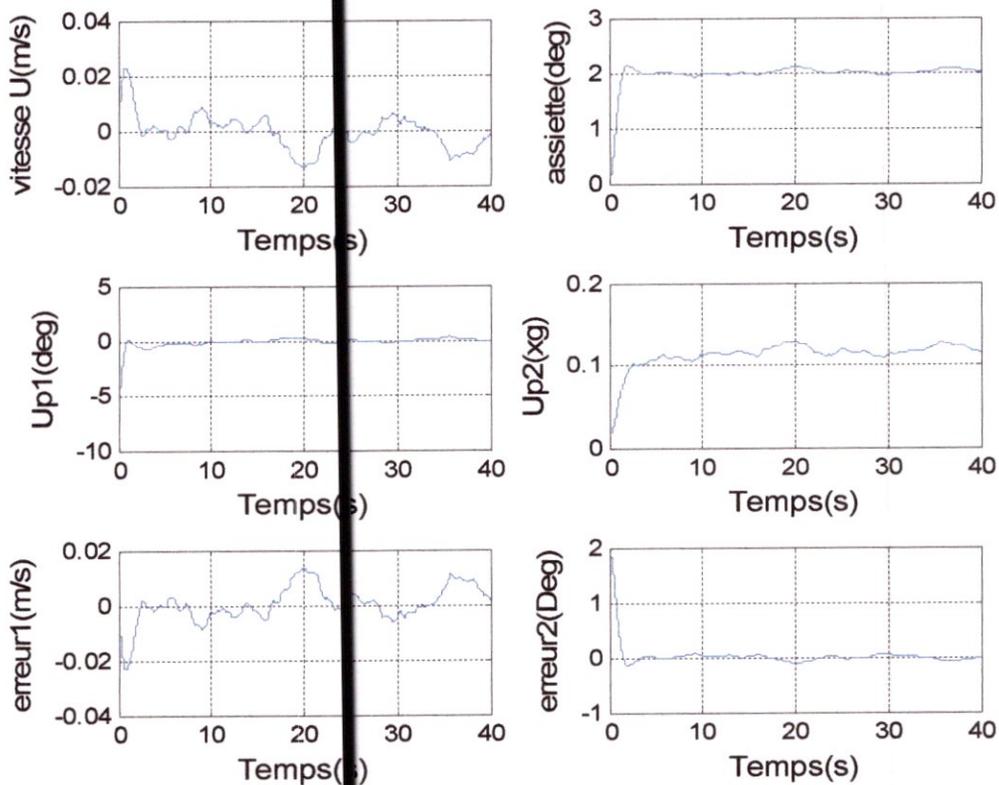


Figure 3.6: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_1, R_1 , assiette θ .

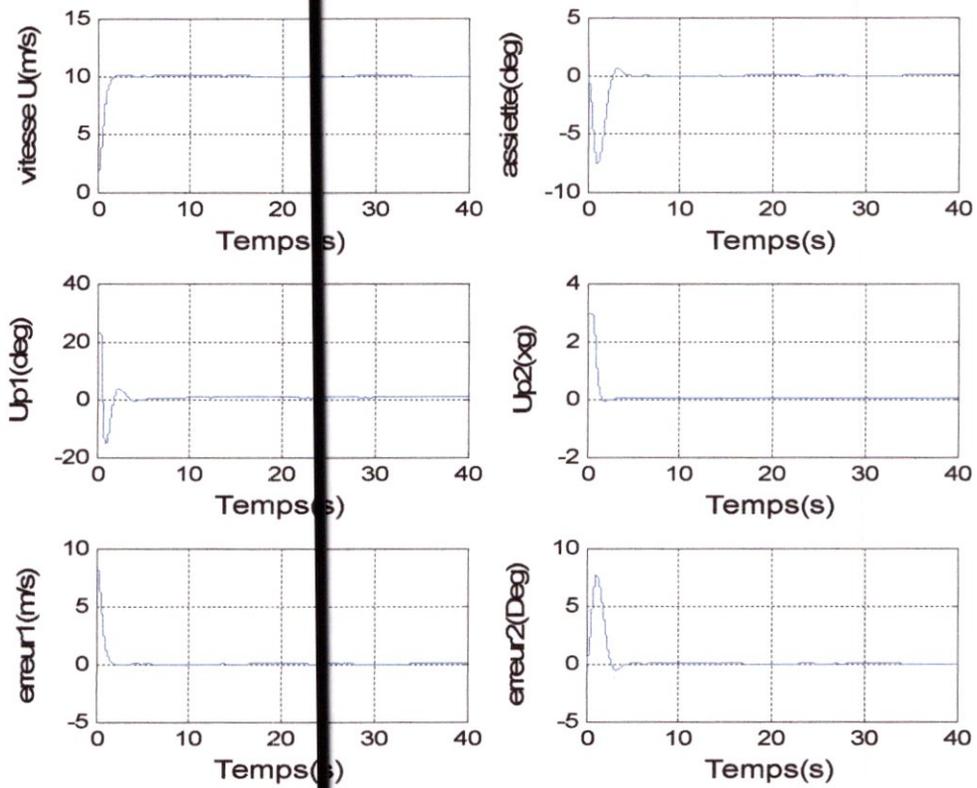


Figure 3.7: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_1, R_1 , vitesse(u).

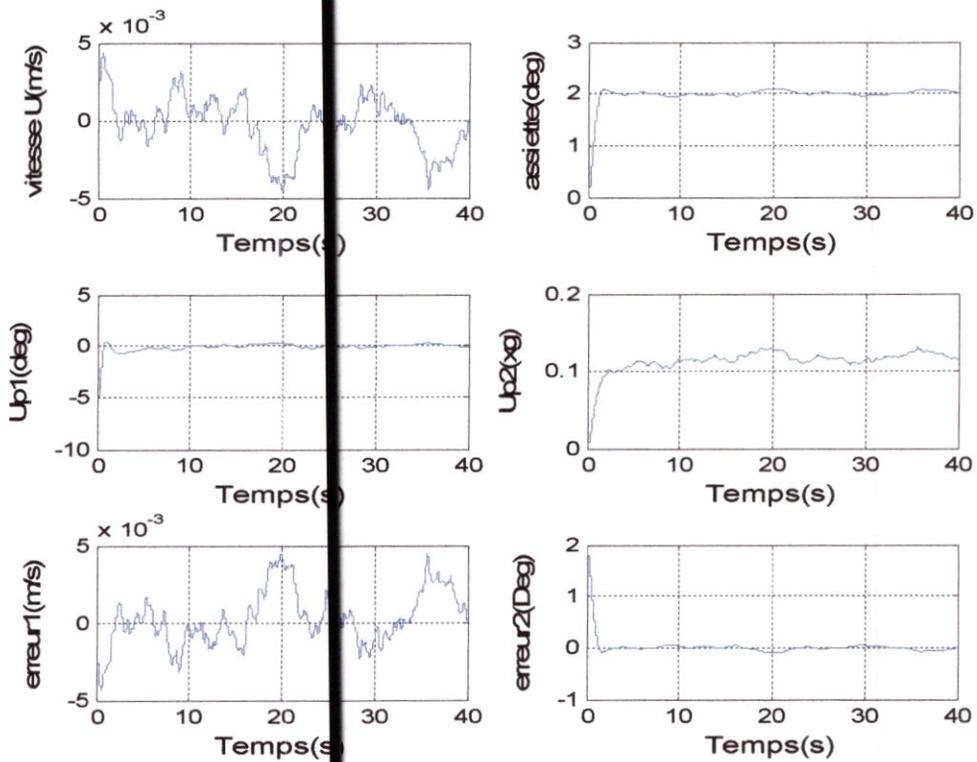


Figure 3.8: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération Q_2, R_2 , assiette θ .

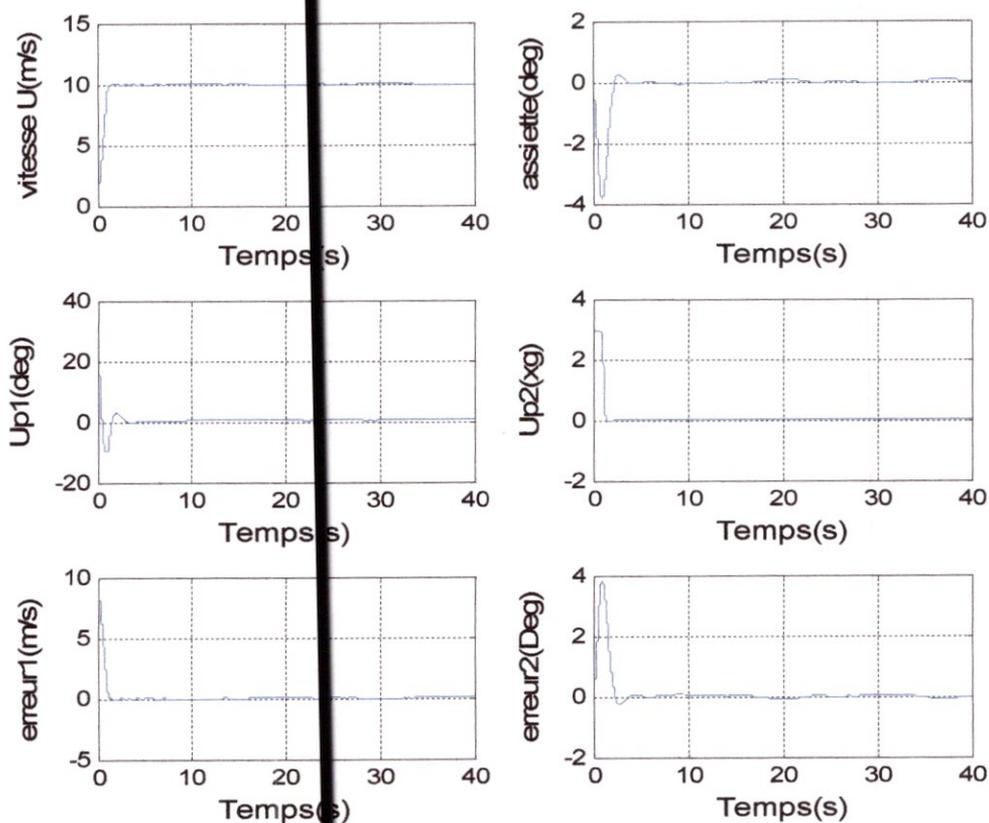


Figure 3.9: Commande LQR pour $\sigma = 2\text{m/s}$ avec pondération $\mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_2$, vitesse(u).

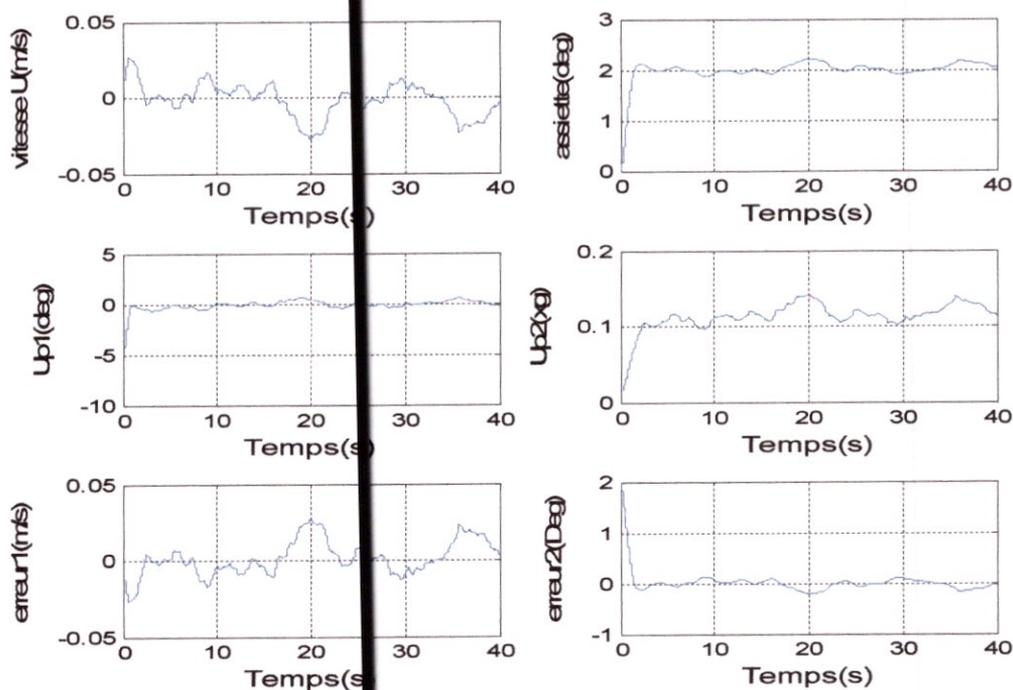


Figure 3.10: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération $\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1$ assiette θ .

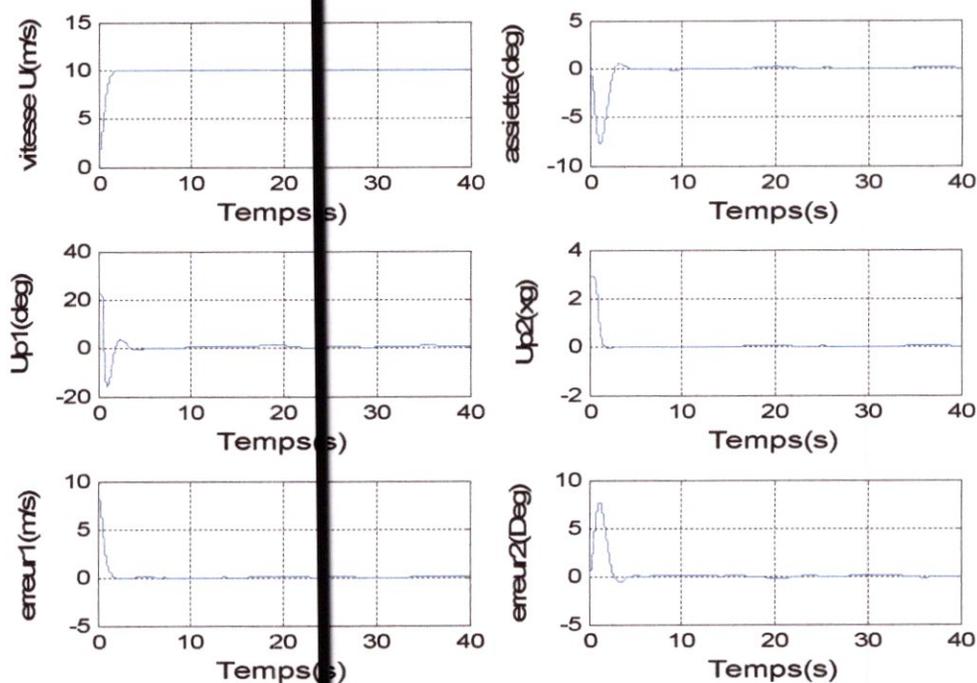


Figure 3.11: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_1, R_1 , vitesse(u).

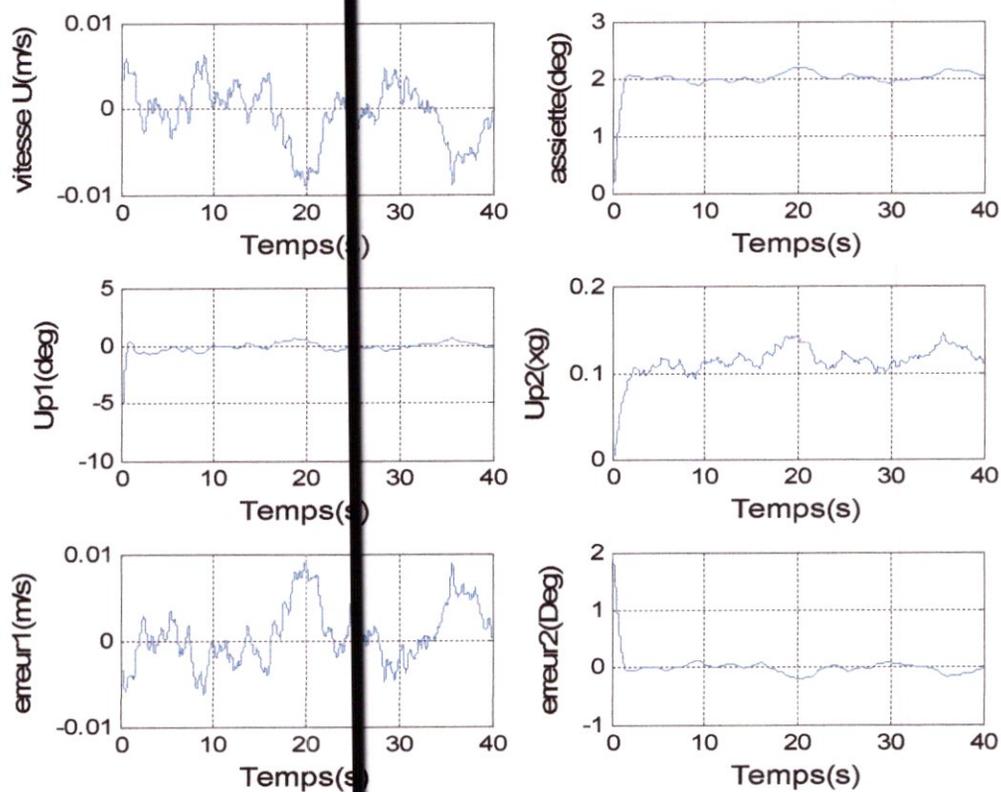


Figure 3.12: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération Q_1, R_1 , assiette θ .

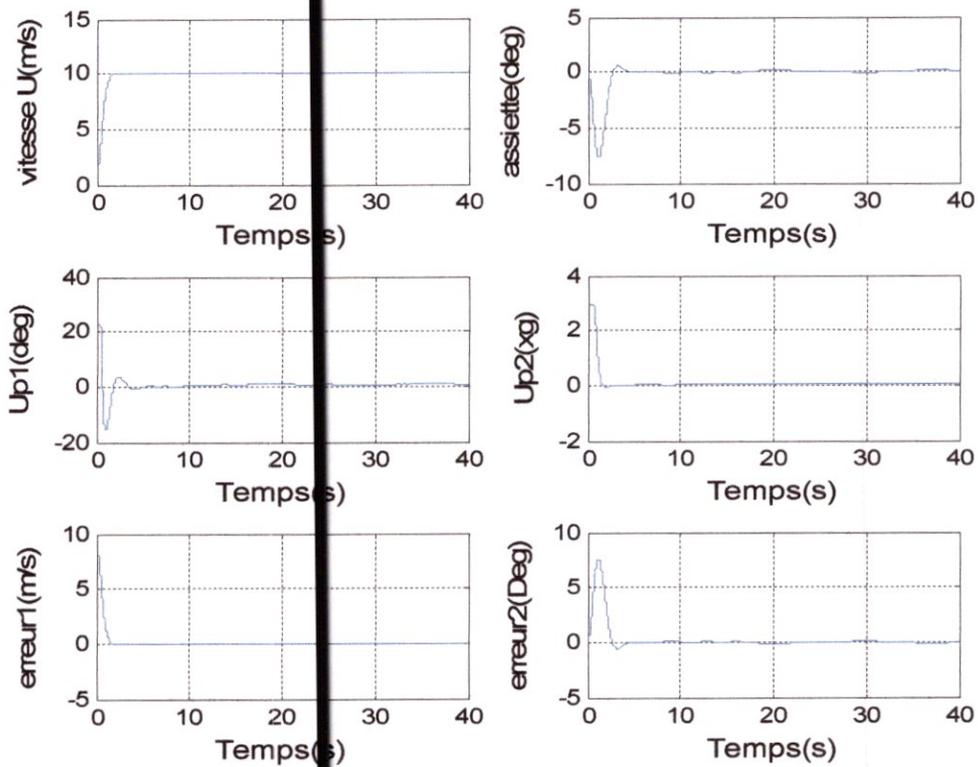


Figure 3.13: Commande LQR pour $\sigma = 4\text{m/s}$ avec pondération $\mathbf{Q}_2, \mathbf{R}_2$, vitesse(u).

4 Test de robustesse

Les figures (3.14), (3.15) représentent une simulation de la commande LQR pour l'assiette longitudinale et de la vitesse en changeant les paramètres de vol (nombre de Mach(M), l'altitude). Voir annexe D

D'après les résultats obtenus, on constate que la commande LQR est plus robuste que les commandes linéaires classiques (voir figures (2.26) (2.27)), malgré une légère dégradation des performances dans la réponse du système, et cela due à la qualité de robustesse de la commande. Donc il faut procéder à d'autres lois de commandes plus robuste.

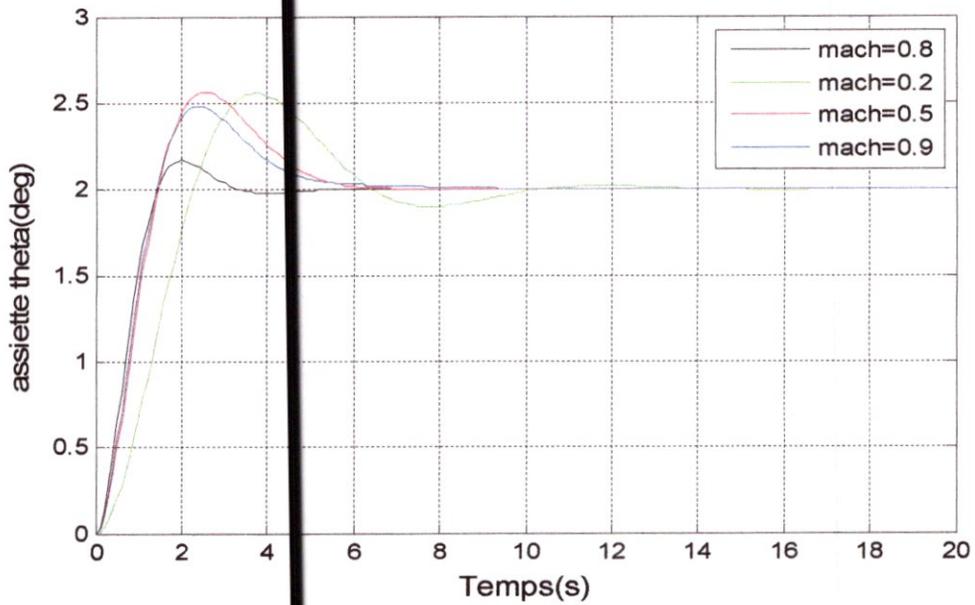


Figure 3.14: Robustesse de la commande LQR par rapport à l'assiette longitudinale (θ)

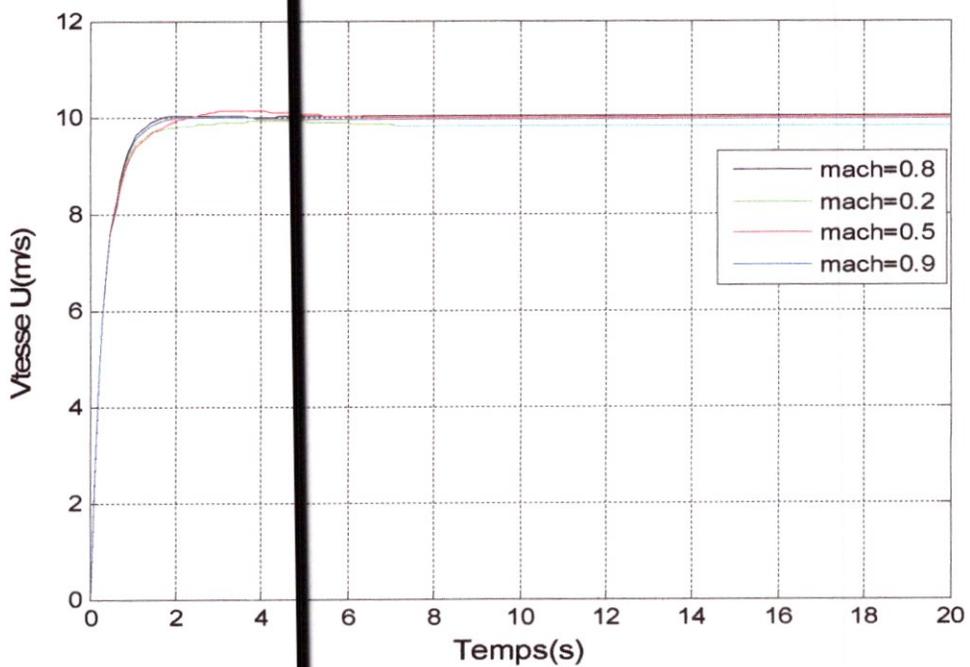


Figure 3.15: Robustesse de la commande LQR par rapport à la vitesse (u)

5 Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons appliqué au modèle longitudinal du Boeing 747 la commande linéaire à retour d'état basée sur un critère quadratique LQR. Les résultats obtenus durant cette simulation suggèrent que la commande LQR est plus robuste et efficace en terme de stabilité et peu sensible aux perturbations extérieurs par rapport aux commandes linéaires classiques utilisées dans le chapitre précédent.

Chapitre 4 :

Commande VSS par mode
glissant

1 Introduction

La commande par mode glissant est la commande à structure variable VSS (variable structure system dans la littérature anglo-saxonne). Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés dans l'ancienne U.R.S.S à partir des années soixante [12] par EMELIYANOV, puis repris par d'autres chercheurs dont UTKIN [13]. Elle est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu initiée par le mathématicien soviétique A.F. Filipov [12].

Par la suite, ces travaux ont été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications. Aux Etats-Unis, cette théorie est introduite par Slotine et au Japon par Young, Harashima et Hashimoto. Il a fallu attendre les années 80, pour que le concept de cette théorie trouve ses applications dans plusieurs domaines notamment dans les systèmes de commande et serait parmi les techniques de contrôle non linéaire les plus efficaces et les plus robustes [14].

La technique des modes glissants consiste à emmener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement [15], et d'y rester par la suite sur cette surface malgré d'éventuelle perturbations [12].

La commande par mode glissant a été largement appliquée dans le cas des systèmes linéaires, non linéaires, continus et discrets, etc.... [13]

Dans ce chapitre, nous allons présenter le concept général de la commande des systèmes à structure variable.

2 Système à structure variable

Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permet aux systèmes de commuter d'une structure à une autre à tout instant. De plus, un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure [15]. Le mathématicien A.F. Filipov a étudié les propriétés de la solution des équations qui décrivent le comportement de tels systèmes.

La caractéristique essentielle du mouvement en régime glissant réside dans son indépendance par rapport aux perturbations des paramètres de la partie commandée, dans la condition où la condition du régime glissant n'est pas mise en défaut [12].

Dans la commande des systèmes à structure variable par mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface. Cette dernière est appelée surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit est appelé mouvement de glissement [15].

La trajectoire des états dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes représentées dans la figure suivante :

-Le mode de convergence (MC) : durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point du plan de phase et tend vers la surface de commutation $S(x) = 0$, et l'atteint dans un temps fini. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.

-Le mode de glissement (MG) : durant lequel la variable d'état atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique en ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement $S(x) = x + cx$.

-Le mode régime permanent (MRP) : il est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (l'origine du plan de phase). Il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

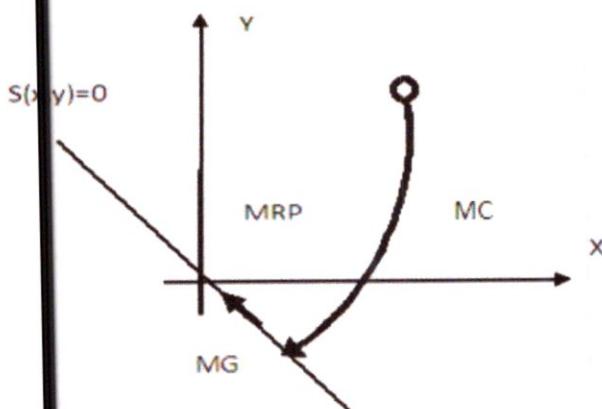


Figure 4.1 : Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase

3 Conception de la commande par mode glissant

Les avantages de la commande par mode glissant sont importants et multiples: la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse... etc.. Ceci lui permet d'être particulièrement adapté pour les systèmes ayant un modèle imprécis [15].

Ce type de commande peut être utilisé d'une manière tout à fait analogue, non seulement en régulation, mais dans les problèmes de poursuite de trajectoire ou de poursuite de modèle [12].

La conception de la commande par mode de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique dans son approche. En général, pour réaliser ce type de commande trois étapes doivent être effectuées [14]:

- Le choix des surfaces.
- Détermination des conditions d'existence et de convergence.
- Synthèse des lois de commande du régime glissant.

3.1 Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement concerne non seulement le nombre nécessaire de ces surfaces, mais également leurs formes en fonction de l'application et de l'objectif visé [14]. Généralement, pour un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax(t) + BU(t) \quad (4.1)$$

Le nombre des surfaces de glissement est choisi égal à la dimension du vecteur de commande U .

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'origine du plan de phase, chacune présente des meilleures performances pour une application donnée.

La surface la plus utilisée pour obtenir le régime de glissement est donnée par J.J.Slotine qui permet de garantir la convergence de l'état vers sa référence, est défini par :

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x) \quad (4.2)$$

x : Variable à réguler.

$e(x)$: l'écart de poursuite de la variable à réguler $e(x) = x^* - x$.

λ_x : Une constante positive qui interprétera la bande passante du contrôleur désire.

r : degré relative égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

3.2 Conditions de convergence et d'existence

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence :

3.2.1 La fonction discrète de commutation

C'est la première condition de convergence, elle est proposée et étudiée par EMILYANOV et UTKIN. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. [15]

$$\begin{aligned} \dot{S}(x) &> 0 \text{ si } S(x) < 0 \\ \dot{S}(x) &< 0 \text{ si } S(x) > 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Cette condition peut être formulée comme suit:

$$\dot{S}(x)S(x) < 0 \tag{4.4}$$

3.2.2 La fonction de Lyapunov

La fonction de LYAPUNOV est une fonction scalaire positive ($V(x) > 0$) pour les variables d'état du système. La loi de commande doit faire décroître cette fonction [15]. Cette fonction est utilisée pour, estimer les performances de la commande, l'étude de la robustesse, et pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires.

En définissant la fonction de LYAPUNOV par : $V(x) = \frac{1}{2}S^2(x)$ (4.5)

La dérivée de cette fonction est:

$$\dot{V}(x) = \dot{S}(x)S(x) \tag{4.6}$$

Pour que la fonction $V(x)$ puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifié que si la condition (4.4) est vérifiée. L'équation (4.5) montre que le carré de la distance vers la surface, mesurée par $S^2(x)$, diminue tout le temps, contraignant ainsi la trajectoire du système à se diriger vers la surface des deux cotés [14].

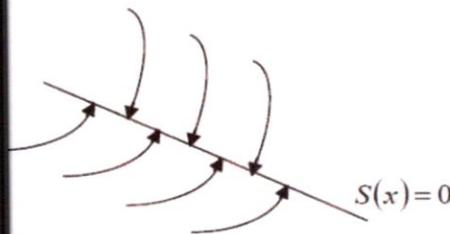


Figure 4.2: Trajectoire de l'état envers la surface.

4 Calcul de la commande

4.1 Définition des grandeurs de la commande

Lorsque le régime glissant est atteint, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui n'a pour but de maintenir les conditions de glissement, c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande. Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant les conditions d'existence du mode de glissement.

L'obtention d'un régime de glissement suppose une commande discontinue. La surface de glissement devrait être attractive des deux côtés. De ce fait, si cette commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

La partie continue en effet amener à réduire autant que nous voulons l'amplitude de la partie discontinue. En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité.

Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation exacte u_{eq} et l'autre stabilisante u_n .

$$U(t) = u_{eq}(t) + u_n \tag{4.7}$$

u_{eq} Correspond donc à la commande proposée par FILIPOV, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x)=0$. La commande équivalente est déduite en considérant que la surface est nulle $\dot{S}(x) = 0$. Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commander. Ainsi, la commande est discontinue et est commutée à fréquence élevée entre u_{max} et u_{min} et que u_{eq} est la valeur moyenne de ce signal continu modulé en largeur comme le montre la figure (4.3) :

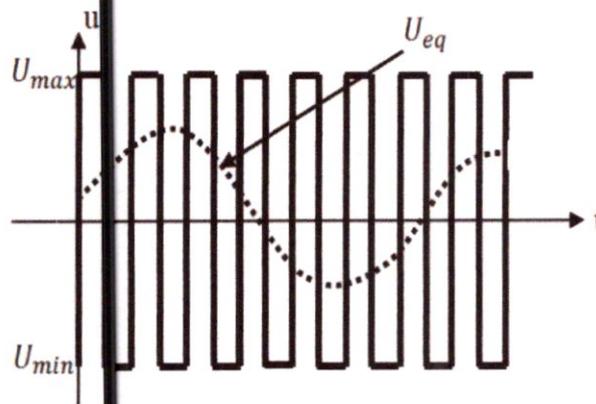


Figure 4.3 : valeur continu u_{eq} prise par la commande lors de la commutation entre u_{max} et u_{min} .

La commande u_n est déterminée pour garantir l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface et pour satisfaire la condition :

$$\dot{S}(x)S(x) < 0$$

4.2 Détermination de la commande

Pour mettre en évidence le développement précédent, nous considérons un système défini dans l'espace d'état par l'équation (4.1) Il s'agit de trouver l'expression analogique de la commande U .

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (4.8)$$

En remplaçant (4.1) et (4.4) dans (4.8), nous trouvons:

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} [A(x,t) + B(x,t)u_{eq}(t)] + \frac{\partial S}{\partial x} [B(x,t)u_n] \quad (4.9)$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où nous déduisons l'expression de la commande équivalente:

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial S}{\partial x} B(x,t) \right]^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial x} A(x,t) \right] \quad (4.10)$$

$$u_n = 0$$

-Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que :

$$\frac{\partial S}{\partial x} B(x,t) \neq 0$$

Durant le mode de convergence, et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (4.9), nous trouvons la nouvelle expression de la dérivée de la surface:

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} B(x,t)u_n \quad (4.11)$$

et la condition d'attractivité exprimée par (4.4) devient :

$$\dot{S}(x)S(x) = S(x) \frac{\partial S}{\partial x} B(x,t)u_n < 0 \quad (4.12)$$

Afin de satisfaire cette condition, le signe de u_n doit être opposé à celui de $S(x) \frac{\partial S}{\partial x} B(x,t)$ dans ce cas la commande u_n s'écrit comme suit :

$$u_n = - \left[\frac{\partial S}{\partial x} B(x,t) \right]^{-1} k * \text{signe}(S(x)) \quad (4.13)$$

En remplaçant l'expression de u_n dans (4.12), on obtient :

$$\dot{S}(x)S(x) = -k \text{signe}(S(x)) \tag{4.14}$$

Le gain k est choisi positif pour satisfaire la condition (4.14). Si k est choisi très petit, le temps de réponse sera très long, et s'il est choisi très grand nous aurons de fortes sollicitations de l'organe de commande qui peuvent exciter les dynamiques négligées.

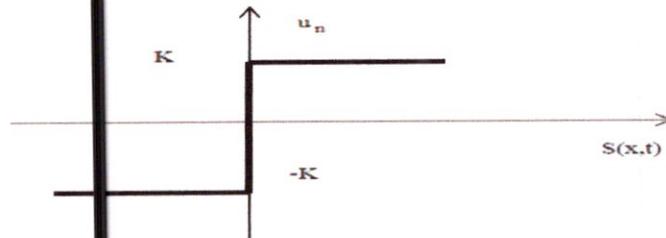


Figure 4.4 : Définition de la commande signe.

4.3 Phénomène réticence ou de chattering

Le problème des régimes glissants est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement et ceci à chaque traversé de cette surface, ceci à une fréquence théoriquement infinie. La figure 4.5 montre l'effet de la réticence dans la convergence du système.

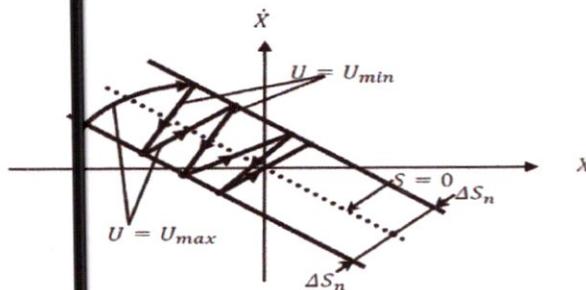


Figure 4.5 : Démonstration du phénomène de réticence.

-Pour remédier à ce problème la fonction « «signe» est remplacée par une fonction saturation adéquate qui filtre les hautes fréquences.

On donne ci-dessous un exemple de fonction de saturation figure 4.6 [16]

-Fonction SAT

$$\begin{cases} \text{Sat}(S) = 1 & \text{si } S > \mu \\ \text{Sat}(S) = -1 & \text{si } S < -\mu \\ \text{Sat}(S) = \frac{S}{\mu} & \text{si } |S| < \mu \end{cases} \quad (4.15)$$

Avec μ : un paramètre petit et positif.

-Fonction SMOOTH

$$\text{Smooth}(S) = \frac{S}{|S| + \mu} \quad (4.16)$$

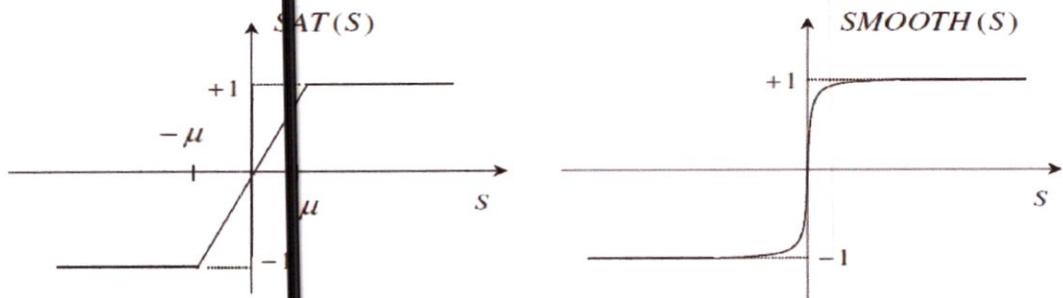


Figure 4.6 : Fonction « SAT » et « SMOOTH ».

5 Exemple d'application

Soit le système physique donné par l'équation d'état suivante

$$\dot{x}_e = Ax_e + BU \quad (4.17)$$

Avec :

x_e : vecteur d'état des erreurs où $x_e = [x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}]^T = [u - u_d, w - w_d, q - q_d, \theta - \theta_d]^T$.

U : vecteur de commande où $U = (u_{eq} + u_n)$.

Sachant que u_d, w_d, q_d, θ_d sont la vitesse désirée, vitesse verticale désirée, vitesse de tangage désirée et l'assiette longitudinale désirée successivement

On choisit la surface de glissement telle que [17] :

$$s = B^T P x_e \quad (4.18)$$

Sa dérivée est donc :

$$\dot{S} = B^T P \dot{x}_e = B^T P (Ax_e + BU) = 0 \quad (4.19)$$

Avec : P matrice de solution de l'équation de Riccati.

Afin d'assurer une bonne poursuite des signaux de sortie, (vitesse u et assiette longitudinale) par rapport aux signaux de références, on choisit les deux surfaces de glissement suivantes :

$$\begin{cases} S_1 = B^T P (u - u_d) \\ S_2 = B^T P (\theta - \theta_d) \end{cases} \quad (4.20)$$

La condition nécessaire pour que les états du système suivent la trajectoire définie par les surfaces de glissement est : $S_{(i=1,2)} = 0$.

Donc :

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = B^T P \frac{d}{dt} (u - u_d) = 0 \\ \dot{S}_2 = B^T P \frac{d}{dt} (\theta - \theta_d) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Les commandes que nous avons injectées dans notre système sont alors représentées comme suit :

$$\begin{cases} u_{eq1} = -(B^T P B)^{-1} (B^T P A) (u - u_d) \\ u_{eq2} = -(B^T P B)^{-1} (B^T P A) (\theta - \theta_d) \end{cases} \quad (4.22)$$

Et :

$$\begin{cases} u_{c1} = -(B^T P B)^{-1} (|B^T P B| \delta_t + \epsilon_0) \text{signe}(S_1) \\ u_{c2} = -(B^T P B)^{-1} (|B^T P B| \delta_t + \epsilon_0) \text{signe}(S_2) \end{cases} \quad (4.23)$$

Avec : δ_t, ϵ_0 petites constantes positives et arbitraires.

Pour estimer les performances ainsi que la robustesse de la commande pour garantir la stabilité des systèmes non linéaires, on choisit la fonction de Lyapunov (4.5).

En appliquant une perturbation spécifique due à une rafale de vent, l'équation (4.19) devient :

$$\dot{S} = B^T P \dot{x}_e = B^T P (Ax_e + B(U + w_g)) = 0 \quad (4.24)$$

Pour que la fonction $V(x)$ puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée (4.6) soit négative.

$$\dot{S} = B^T P Ax_e + B^T P U + B^T P B w_g \quad (4.25)$$

A l'aide de l'équation (4.7) (4.22) et (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= B^T P Ax_e + B^T P B \left(-(B^T P B)^{-1} B^T P Ax_e - (B^T P B)^{-1} (|B^T P B| \delta_t + \varepsilon_0) \text{signe}(S) \right) + B^T P B w_g \\ &= (|B^T P B| \delta_t + \varepsilon_0) \text{signe}(S) + B^T P B w_g \end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{V} = S \dot{S} = -(|B^T P B| \delta_t + \varepsilon_0) |S| + B^T P B w_g S \leq -\varepsilon_0 |S| \quad (4.26)$$

Sachant que $|w_g| \leq \delta_t$ telle que δ_t est la borne supérieure de w_g ceci restreint l'amplitude de $|w_g|$ puisque δ_t est choisie comme petite constante positive.

5.1 Interprétations des résultats

Durant notre étude on va prendre $\delta_t = 0.5$ et $\varepsilon_0 = 0.01$

Les figures (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) représentent une simulation de la commande par mode glissant sans aucune perturbation externe. On constate une bonne poursuite de signaux de références ($u = 10 \text{ m/s}, \theta = 2^\circ$). L'analyse de la trajectoire de la surface de commutation montre l'existence de mode de glissement. Comme on s'y pouvait attendre le phénomène de « chattering » est observé en mode de glissement, ceci est dû à la présence du terme discontinu de la loi de commande globale donnée en (3.7). Pour réduire ce phénomène la fonction « signe » est remplacée par une fonction « Sat » qui filtre les hautes fréquences, comme il est mentionné dans les figures (4.6).

Les figures (4.11), (4.12) représentent les résultats d'une simulation de la commande par mode glissant lorsque l'avion subit une perturbation externe, due à une perturbation atmosphérique (rafale de vent), pour $\sigma = 4 \text{ m/s}$. On constate une bonne poursuite des signaux de sortie aux signaux de référence. On déduit que les commandes sont robustes face à ces perturbations et maintiennent le système stable avec des valeurs bornées.

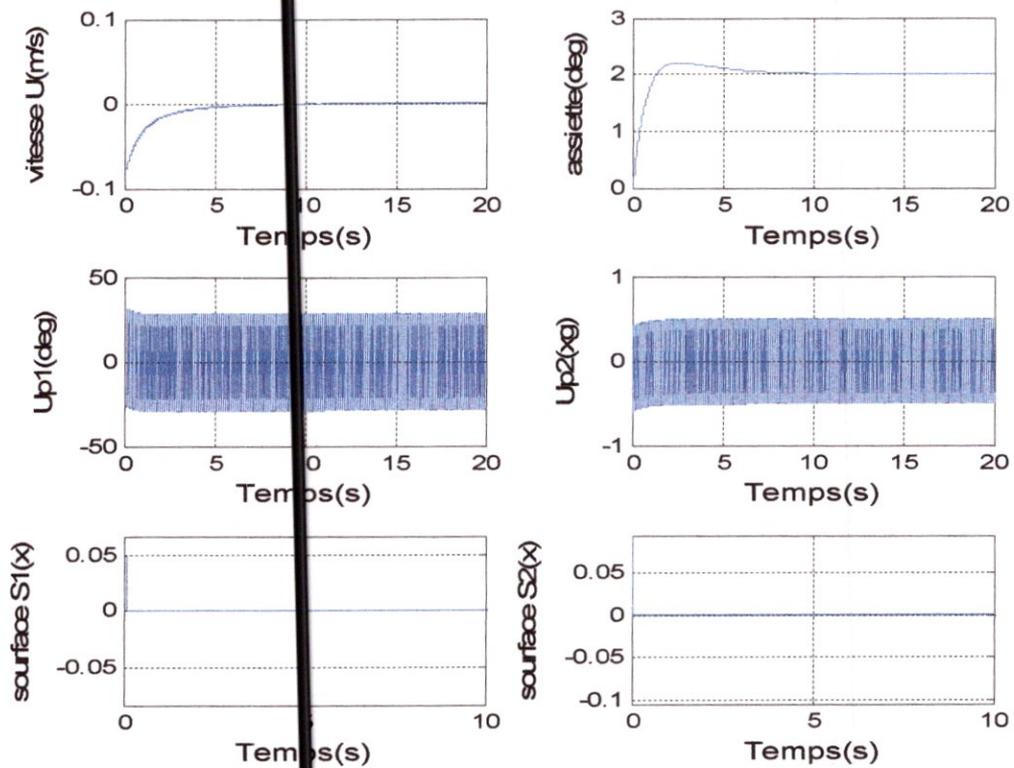


Figure 4.7: Commande VSS par mode glissant appliquée à l'assiette longitudinale (θ).

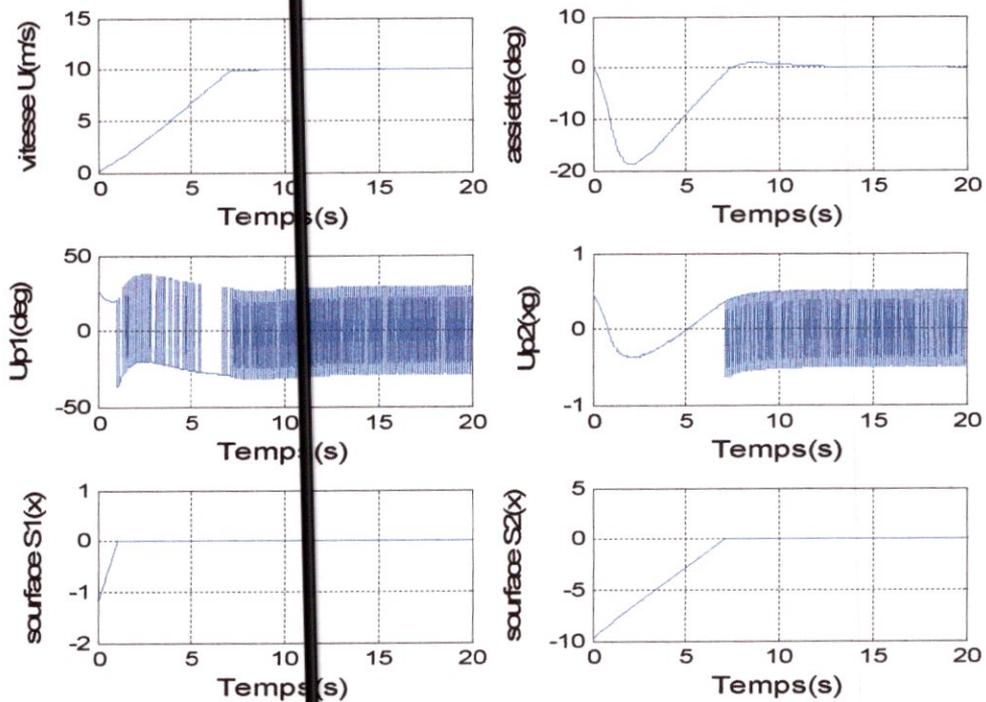


Figure 4.8: Commande VSS par mode glissant appliquée à la vitesse (u).

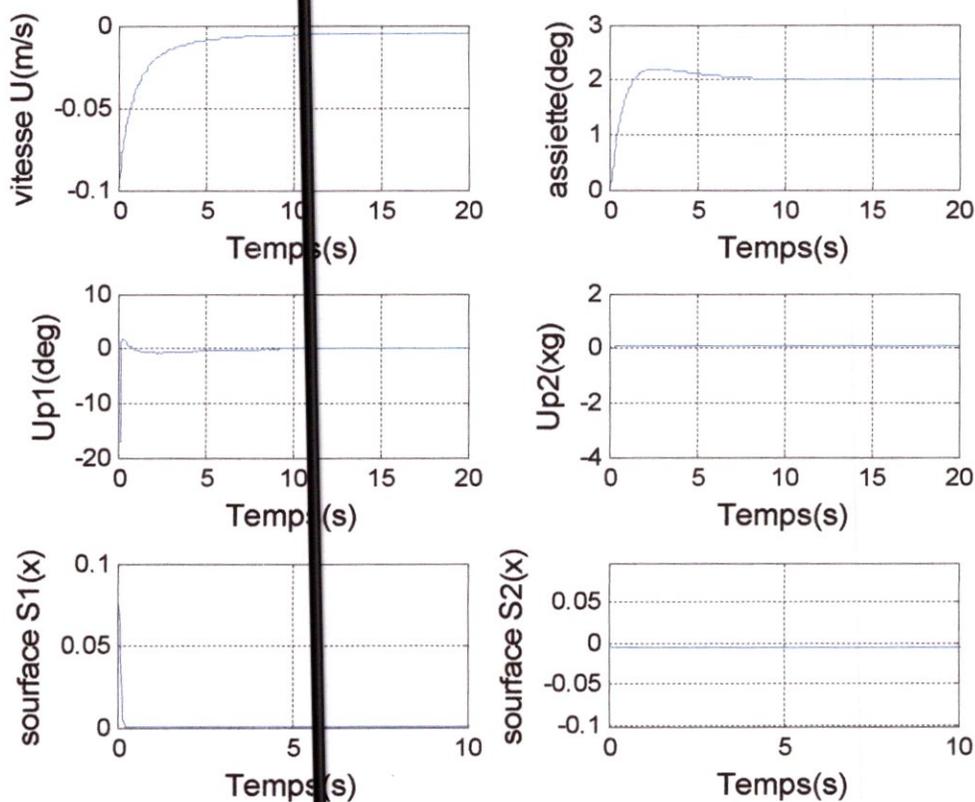


Figure 4.9 Commande VSS par mode glissant sans phénomène de chattering, assiette (θ).

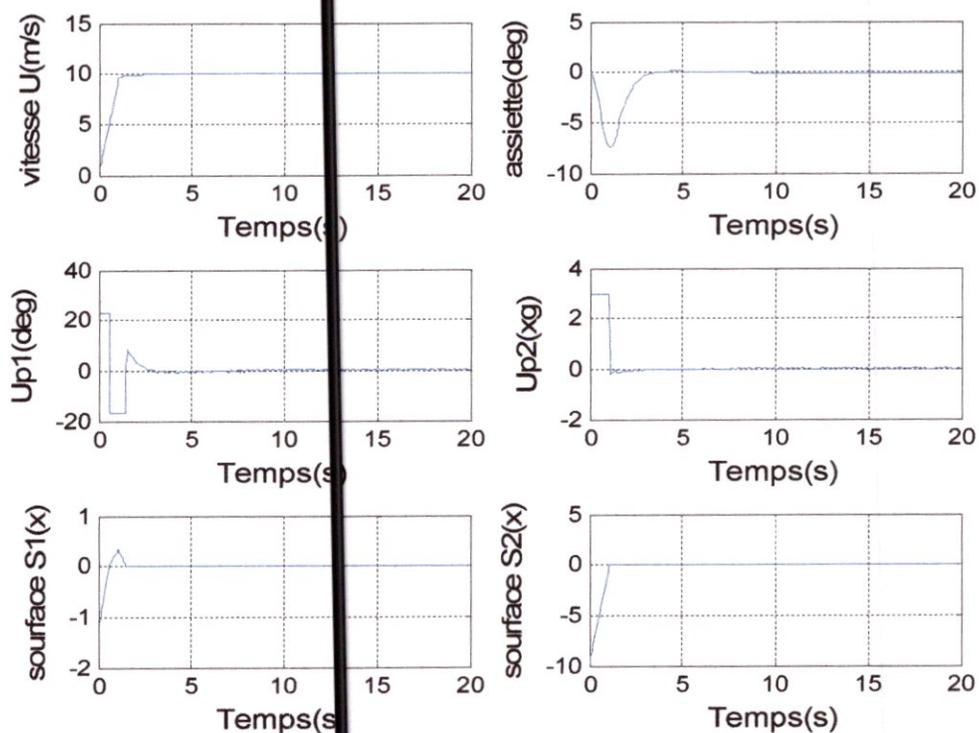


Figure 4.10 Commande VSS par mode glissant sans phénomène de chattering, vitesse(u).

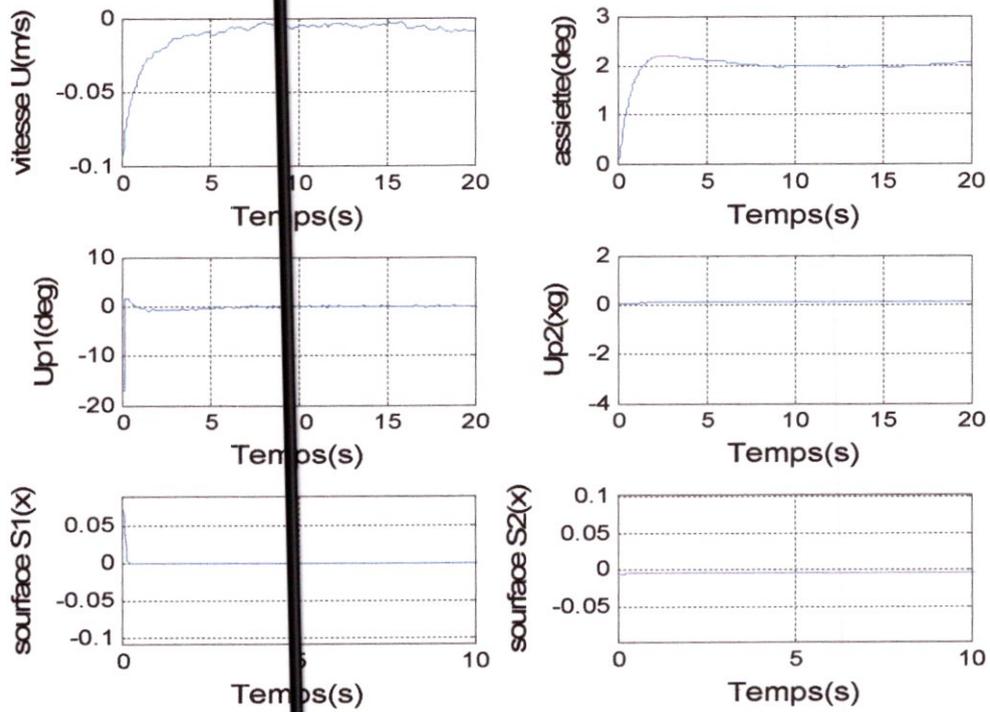


Figure 4.11: Commande VSS par mode glissant pour $\sigma = 4\text{ m/s}$ sans phénomène de chattering, assiette(θ)

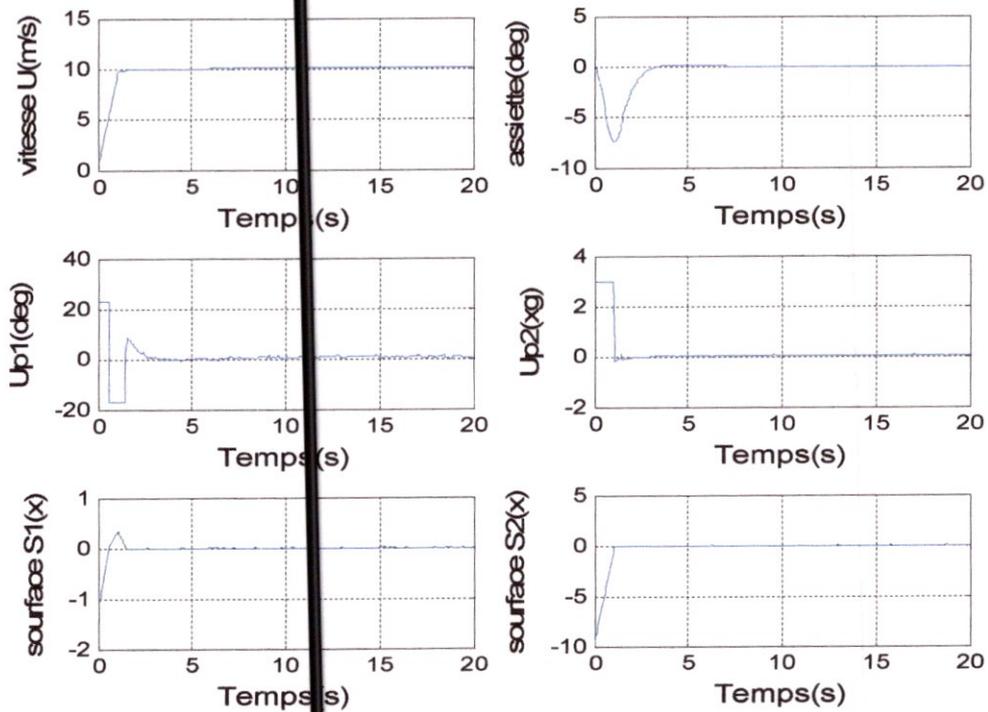
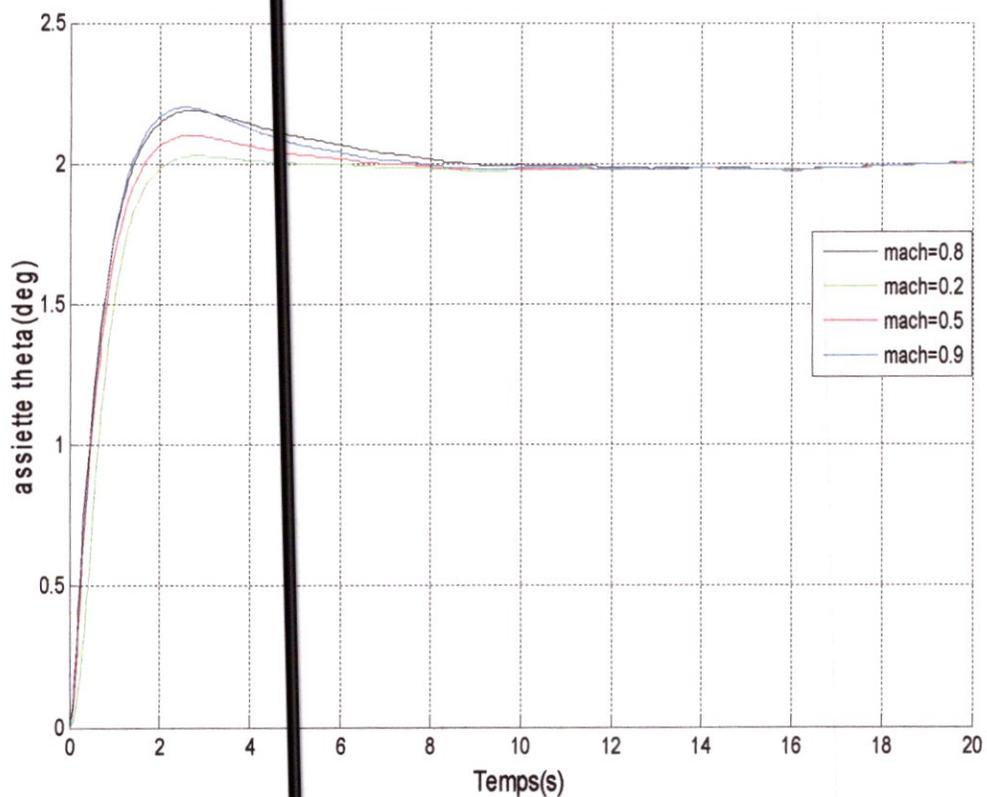


Figure 4.12: Commande VSS par mode glissant pour $\sigma = 4\text{ m/s}$ sans phénomène de chattering, vitesse (u)

6 Test de robustesse

Les figures (4.13), (4.14) représentent une simulation de la commande VSS par mode glissant pour l'assiette longitudinale et de la vitesse en changeant les paramètres de vol (nombre de Mach(M), l'altitude). Voir annexe D

On remarque une bonne poursuite des signaux de référence due à la performance de la commande VSS par mode glissant, on déduit alors que cette commande est plus robuste que les commandes linéaires classiques et optimale



Figures 4.13 : Robustesse de la commande VSS par mode glissant de l'assiette longitudinale (θ)

Conclusion générale

Conclusion générale

Les travaux de recherches présentés dans ce mémoire de fin d'étude ont eu pour but de palier aux inconvénients des commandes linéaire et non linéaire envers les perturbations atmosphériques appliquées au modèle longitudinal de l'avion Boeing 747.

Ce rapport est scindé en quatre parties : dans la première partie nous avons obtenu le modèle non linéaire du vol de l'avion, dont le mode longitudinal a été linéarisé pour arriver au modèle linéaire d'ordre quatre. Ce travail théorique, basé sur les principes de la mécanique et de l'aérodynamique, est appliqué au modèle longitudinal de l'avion. En effet, une modélisation complète est établie dans l'espace d'état pour faciliter l'application de la théorie de la méthode de placement de pôles dans le deuxième chapitre.

Dans la second partie, nous avons étudié et simulé les deux commandes linéaires classiques : la commande par retour d'état et la commande par retour d'état avec action intégrale. Les résultats obtenus ont révélé que la commande par retour d'état avec action intégrale est plus efficace que la commande par retour d'état, grâce à l'annulation de l'erreur statique.

En effet, la troisième partie est consacrée à l'étude de commande linéaire à retour d'état conçus de façon optimale, dans le sens d'un critère quadratique LQR. Les résultats de simulations obtenus déduisent une bonne poursuite des signaux de sortie par rapport aux signaux de références.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons étudié la commande non linéaire par mode de glissement. Les résultats obtenus par l'application de cette commande non linéaire, enregistrent une bonne performance en terme de robustesse par rapport à ceux obtenus des commandes linéaires.

Perspectives

L'étude réalisée dans ce travail permet d'enrichir nos connaissances sur le domaine des commandes de vol, ainsi que leurs influences sur la qualité de vol d'un aéronef. Nous recommandons une extension de ce travail concernant la modélisation, ou on pourra prendre le modèle non-linéaire dynamique complet de l'avion (mouvement longitudinal et latéral), de démontrer sa stabilité en présence de perturbation atmosphérique, ainsi lors de l'utilisation de la fonction de saturation et d'autre lois de commande non linéaires telles que : commande adaptative, les réseaux de Neurones, commande H_{∞} .

Bibliographie

Bibliographies

- [1] **F.Veysset**, “Modélisation et identification de comportement de l’avion en vol turbulent par modèle à retard“, Thèse de Doctorat, Université Lille, 2006.
- [2] **A.Darbois**, “Mise en œuvre du modèle et synthèse d’une loi de commande par commutation de compensateur pour un avion commercial“, Diplôme de maîtrise en sciences appliqués, Université de Montréal, 2002.
- [3] **A.Geanina**, “Contribution à la commande tolérante aux pannes dans la conduite de vol“, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2010.
- [4] **D.Alliche**, “Commande par placement de structure propre appliquée à la dynamique latérale de l’avion“, Diplôme de maîtrise en génie éclectique, Université de Québec, 2003.
- [5] **J.H.Blakelock**, “Automatic control of aircraft and missiles“, John Wiley & Sons Inc, Second edition, Air Force Institute of Technology, USA, 1991.
- [6] **B.ETKIN et L.D.Reid**, “Dynamics of flight, stability and control“, John Wiley & Sons Inc, third editions“, Toronto, 1996.
- [7] **A.Tewari**, “Automatic control of atmospheric and space flight vehicles, Control Engineering“, DOI 10.1007/978-0-8176-4864-0 4, Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- [8] **H.Benchoubane**, “Cours PGRS. Partie sur les commandes linéaires“, Université de Blida, 1995.
- [9] **I.Boustani**, “analyse d’un système de commande d’allègement à une rafale sur un avion à commande électrique“, “Diplôme de maîtrise en technologie des systèmes, Bell & Howell information and learning 300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA 800-5210-600 Université de Québec, 1999.
- [10] **B. Bergeon**, “Commande linéaire des systèmes multivariables“, cours 2011-2012.
- [11] **E. Laroche**, “Commande Optimale“, Cours troisième année, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2009-2010.

[12] **A.Si Ammour**, "Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire", Thèse de Doctorat, Faculté de génie électrique et d'informatique, Département d'automatique, Université de Tizi Ouzou, 2011.

[13] **M.R Kafi**, "commande robuste et non linéaire appliquée à un simulateur d'hélicoptère", Thèse de Magister, Ecole Militaire Polytechnique, 1999.

[14] **S.A.Ardjoun**, "Commande en vitesse par mode glissant d'une machine asynchrone à double alimentation", Thèse de Magister, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Département d'Electrotechnique, université de Sidi Bel-Abbès, 2010.

[15] **K.Mebarka**, "Commande par mode de glissement d'un moteur pas à pas à aimant permanent", Thèse de Magister, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Département d'électrotechnique, Université Batna, 2005.

[16] **Z.Yamina**, " Commande par mode glissant des courants statoriques de la machine asynchrone", Thèse de Magister, Faculté des sciences de l'ingénieur, Département d'électrotechnique, Université de Setif, 2010.

[17] **J.Liu et X.Wang**, " Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems" ISBN 9783-642-20906-2 Springer Heidelberg Dordrecht London New York, Tsinghua University Press, Beijing, 2012.

Annexes

Annexe A

1 Définition

La stabilité d'un avion en mouvement dépend des grandeurs et des signes des coefficients de dérivées de stabilité. Ces derniers sont en fonction de la géométrie, taille, vitesse, et le régime de l'avion, ainsi que des propriétés de l'atmosphère.

Une méthode utile d'analyse des dérivés de stabilité en les rendant non dimensionnels concernant la taille, masse, densité atmosphérique et la vitesse, pour cela on définit

- la surface alaire de l'aile :

$$S = \int_{-b/2}^{b/2} c(y) dy \quad (\text{A.1})$$

- la corde aérodynamique moyenne :

$$\bar{c} = \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{b/2} c^2(y) dy \quad (\text{A.2})$$

Avec :

b : L'envergure d'aile, $c(y)$: distribution de la corde. Voir figure(1)

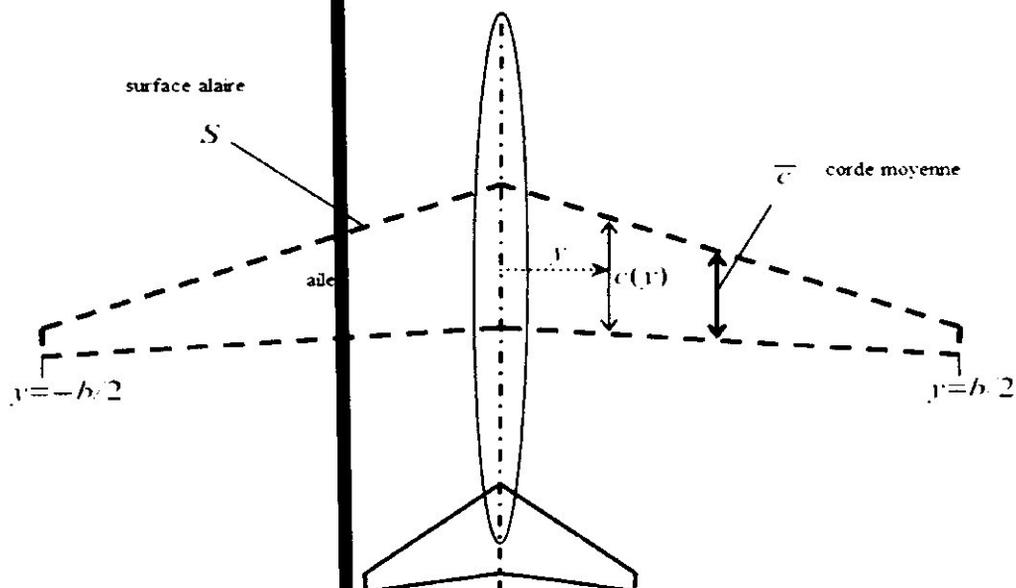


Figure 1 -vue supérieure d'un avion montrant la surface alaire et la corde moyenne.

Annexe A

2 Stabilité longitudinale

Les dérivés de stabilité longitudinale sont rendus adimensionnels par la division, des forces par $\bar{q}S$, les moments par $\bar{q}S\bar{c}$, et la vitesse par U . Avec pression dynamique $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho U^2$

2.1 Les coefficients adimensionnels des forces verticales sont donnés par

$$\begin{aligned}C_x &= \frac{\bar{X}}{\bar{q}S} = \frac{\bar{X}_e + \bar{X}}{\bar{q}S} \\C_z &= \frac{\bar{Z}}{\bar{q}S} = \frac{\bar{Z}_e + \bar{Z}}{\bar{q}S}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Avec : $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho v^2$

Pour une petite perturbation d'angle d'attaque α :

$$\begin{aligned}C_x &\cong C_T - C_D + C_L\alpha \\C_z &\cong -C_L + C_D\alpha\end{aligned}\tag{A.4}$$

Avec : $C_L = \frac{l}{\bar{q}S}$ coefficient de portance (l force de portance)

$$C_T = \frac{T}{\bar{q}S} \text{ coefficient de poussée (T force de poussée)}$$

$$C_D = \frac{D}{\bar{q}S} \text{ coefficient de trainée (D force de trainée)}$$

-Le coefficient de portance a une relation linéaire avec l'angle d'attaque pour cela :

$$C_L = C_{L_e} + C_{L_\alpha}\alpha\tag{A.5}$$

C_{L_e} : coefficient de portance à l'équilibre

C_{L_α} pente de la courbe de portance

Annexe A

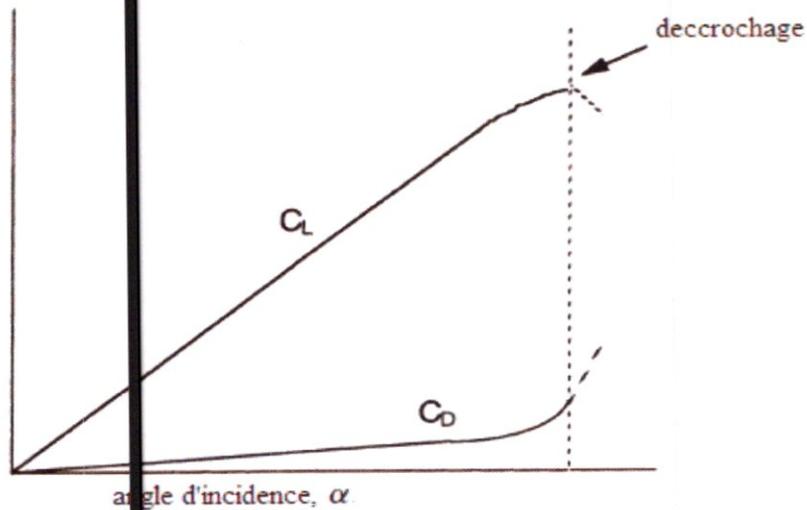


fig-1- relation de C_L et C_D avec α

-Pour un mouvement rectiligne à l'état d'équilibre :

$$C_{Le} = \frac{mg \cos \Theta_e}{\bar{q}S} \quad (A.6)$$
$$C_{Te} = C_{De} = \frac{mg \sin \Theta_e}{\bar{q}S}$$

-Pour une polaire parabolique le coefficient de trainée est écrit :

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \quad (A.7)$$

C_{D0} : Coefficient de trainée parasite, K facteur de portance lié à la trainée.

3 Dérivées longitudinales

3.1 Dérivées par rapport à la vitesse u

Les changements de premier ordre des forces aérodynamiques et des moments dus à un changement de vitesse, u , quand aux autres perturbations sont nulles ($\alpha = \dot{\alpha} = q = 0$) sont appelés dérivées de vitesse, ce changement de vitesse permet de varier le nombre de mach ce qui influe sur les forces aérodynamiques et les moments par l'effet de compressibilité, ainsi que sur la poussée.

La dérivée de vitesse de la force axiale peut être obtenue comme suit :

Annexe A

$$\begin{aligned}
 C_{xu} &= \frac{\partial \hat{C}_x}{\partial u} = \frac{\partial C_T}{\partial u} - \frac{\partial C_D}{\partial u} & (A.8) \\
 &= \frac{U}{\bar{q}S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_e - \left(\frac{2T}{\bar{q}S} \frac{\partial U}{\partial u} \right)_e - U \frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} \\
 &= \frac{U}{\bar{q}S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_e - 2C_{Te} - M \frac{\partial C_D}{\partial M} \\
 \bar{q} &= \frac{1}{2} \rho U^2
 \end{aligned}$$

Avec: $M = \frac{U}{a}$ nombre de Mach

-La dérivée de vitesse de la force normale peut être obtenue comme suit :

$$C_{zu} = \frac{\partial \hat{C}_z}{\partial u} = - \frac{\partial C_L}{\partial u} = -U \left(\frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_e = -M \frac{\partial C_L}{\partial M} \quad (A.9)$$

3.2 Dérivées qui ne dépendent pas de la vitesse

$$\begin{aligned}
 C_{x\alpha} &= \frac{\partial \bar{X}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \\
 C_{x\dot{\alpha}} &= \frac{2U}{\bar{q}S} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial C_x}{\partial \dot{\alpha}} \\
 C_{xq} &= \frac{2U}{\bar{q}S} \frac{\partial \bar{X}}{\partial q} = \frac{\partial C_x}{\partial q} \\
 C_{z\alpha} &= \frac{1}{\bar{q}S} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \\
 C_{z\dot{\alpha}} &= \frac{1}{\bar{q}S} \frac{2U}{c} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial C_z}{\partial \dot{\alpha}} & (A.10) \\
 C_{zq} &= \frac{1}{\bar{q}S} \frac{2U}{c} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial q} = \frac{\partial C_z}{\partial q}
 \end{aligned}$$

Annexe A

Avec: $\hat{\alpha} = \dot{\alpha} \left(\frac{c}{2U} \right)$ et $\hat{q} = \dot{q} \left(\frac{c}{2U} \right)$

3.3 Dérivées de moment

De la même façon, les coefficients adimensionnels de moment de tangage peuvent être obtenus à partir de l'équation (1.49) :

$$C_m = \frac{M}{qSc} = C_{m_u} \hat{u} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\dot{\alpha}}} \hat{\alpha} + C_{m_{\dot{q}}} \hat{q} \quad (\text{A.11})$$

Avec:

$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{u}} = \frac{U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial u} - 2C_{m_e} = \frac{U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial u}$$

$$C_{m_\alpha} = \frac{U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$$

$$C_{m_{\dot{\alpha}}} = \frac{2U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}$$

$$C_{m_{\dot{q}}} = \frac{1}{qSc} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial C_m}{\partial \dot{q}}$$

La figure suivante montre les variations du moment de tangage en fonction de α :

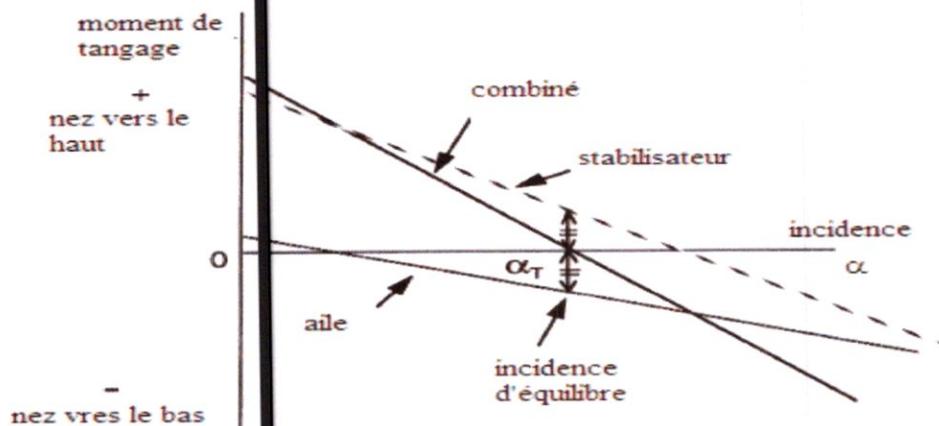


fig-2- Moment de tangage en fonction de α

La dérivée de vitesse du moment est donnée par :

$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{u}} = \frac{U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial u} - 2C_{m_e} = \frac{U}{qSc} \frac{\partial M}{\partial u} \quad (\text{A.12})$$

Annexe A

D'après l'équation précédente on remarque que le nombre de mach (M), et pression dynamique $\bar{q} = \frac{1}{2} \rho U^2$ influent sur la dérivée de vitesse du moment.

En ajoutant des dérivées de commandes pour les les équations de dérives verticales et des moment de tangage on peut obtenir le control longitudinal de l'avion .les dérivées de commandes sont :

$$X_T = \left(\frac{\partial X}{\partial \beta_T} \right)_e, Z_T = \left(\frac{\partial Z}{\partial \delta_E} \right)_e$$

Ou bien sous forme adimensionnels:

$$C_{X_T} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial \beta_T} \right)_e, C_{Z_T} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial \delta_E} \right)_e$$

Le changement du coefficient de poussée peut être exprimer par une fonction de transfert du deuxième ordre, tenant compte du changement de poussée β_T , comme suit :

$$\frac{C_T(s)}{\beta_T(s)} = \frac{a_T / j_T}{s^2 + 2\zeta_T \omega_T s + \omega_T^2} \quad (\text{A.13})$$

Avec :

ω_T : la fréquence

ζ_T : Taux d'amortissement

$a_T = \frac{C_T(s)}{n(s)}$ Est une constante adimensionnelle donnant le coefficient de poussée au

point d'équilibre par une vitesse sans dimensions de l'axe du moteur, n .

j_T : Moment d'inertie adimensionnel de l'axe du moteur.

Les dérivés adimensionnels de commande statique dus à l'entrée de commande de poussée, β_T , sont dérivés de la fonction de transfert équilibrée du moteur en employant le théorème de valeur final des transformées de Laplace et de l'équation (A.13) :

Annexe A

$$C_{xT} = \left(\frac{\partial C_T}{\partial \beta_T} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = G(0) = \frac{a_T}{j_T \omega_T^2} \quad (\text{A.14})$$

Le moment de tangage de la poussée est donnée par :

$$C_{mT} = \left(\frac{\partial C_m}{\partial \beta_T} \right)_e = \frac{2z_T}{c} C_{xT} \quad (\text{A.15})$$

Les dérivés adimensionnels de commande des gouvernes de profondeur sont exprimées comme suit :

$$C_{\delta} = - \left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta_E} \right)_e = \frac{S_t}{S} C_{L\delta}$$

$$C_{\delta} = \eta V_t C_{L\delta}$$

Annexe B

1 Calcul des fréquences naturelles ω_n et des amortissements ζ

Dans cette annexe, nous considérons l'équation différentielle classique d'un système de deuxième ordre en fonction du rapport d'amortissement ζ et de la fréquence naturelle ω_n comme suite:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 = f(t) \quad (\text{B.1})$$

L'équation caractéristique correspondante s'écrit :

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

Les racines λ de l'équation (B.2) sont:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{B.3})$$

Nous notons la partie réelle des valeurs propres par η et les parties imaginaires des valeurs propres par ω alors l'équation (B.3) s'écrit comme suite:

$$\lambda_{1,2} = \eta \pm i\omega \quad (\text{B.4})$$

L'amortissement ζ est représenté en fonction de la fréquence naturelle ω_n sur la Figure 1. Le mouvement de l'avion est stable lorsque les parties imaginaires des racines λ notées par ω sont négatives, et le mouvement de l'avion est instable lorsque ω sont positifs.

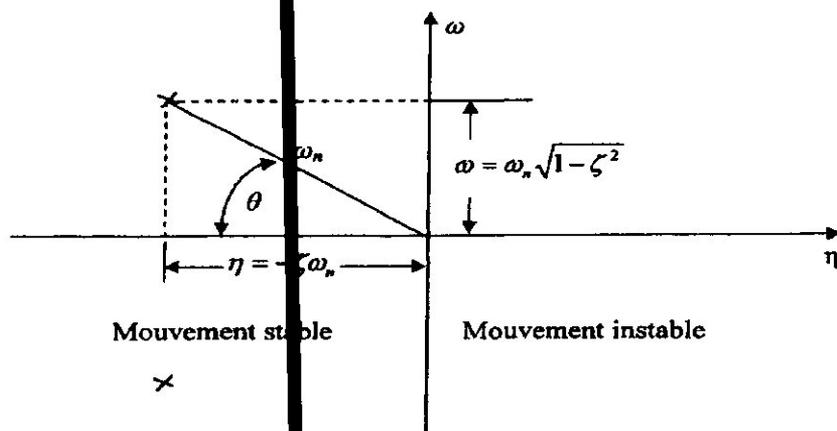


Figure 1: Le lien des racines de l'équation caractéristique (B.2)

Annexe B

Par identification des termes des équations (A.3) et (A.4), nous obtenons

$$\eta = -\zeta\omega_n \quad (\text{B.5})$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{B.6})$$

nous calculons en fonction des parties réelles η et imaginaires ω des valeurs propres λ les fréquences naturelles ω_n et les amortissements ζ :

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \eta^2} \quad (\text{B.7})$$

$$\zeta = -\frac{\eta}{\sqrt{\omega^2 - \eta^2}} \quad (\text{B.8})$$

2 Méthode approximative pour le mouvement longitudinal de l'avion

2.1 L'approximation du mode longitudinal de période longue

Le mode de période longue (phugoid p) est caractérisé par des variations dans l'angle de tangage B , dans l'altitude H et dans la vitesse u , lorsque l'angle d'attaque α est considéré constant. L'équation du moment est négligée, alors la variation de l'angle d'attaque α est calculée :

$$\alpha = \frac{w}{U} \quad \alpha = 0 \rightarrow w = 0 \quad (\text{B.9})$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, nous obtenons $w = 0$. Alors l'équation de mouvement longitudinal de l'avion (1.49) devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & -g \\ -\frac{Z_u}{mU_e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Les valeurs propres λ de l'approximation du mode de période longue sont obtenues par la résolution de l'équation suivante :

$$|I - A| = 0 \quad (\text{B.11})$$

Annexe B

Nous remplaçons la matrice A donnée par l'équation (B.10) dans l'équation (B.11) et nous obtenons l'équation matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{X_u}{m} & g \\ \frac{Z_u}{mU_e} & \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.12})$$

qui se développe ensuite sous la forme d'une équation d'ordre 2 en λ :

$$\lambda^2 - \lambda \frac{X_u}{m} - \frac{Z_u g}{mU_e} = 0 \quad (\text{B.13})$$

d'où les valeurs propres du mode de période longue λ sont calculées :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{X_u}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{X_u}{m} \right)^2 + 4 \frac{Z_u g}{mU_e}} \right) \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas d'un mouvement longitudinal de l'avion, nous obtenons deux paires des valeurs propres complexes et conjuguées que nous écrivons sous la forme de l'équation (B.4).

Par l'identification des termes de l'équation (B.14) avec ceux identifiés dans les équations (B.4), (B.7) et (B.8), on obtient :

$$\omega_n^2 = - \frac{Z_u g}{mU_e} \quad (\text{B.15})$$

$$\zeta = - \frac{X_u}{2m\omega_n} \quad (\text{B.16})$$

2.2 L'approximation du mouvement longitudinal de période courte

L'oscillation d'incidence est un mode à deux degrés de liberté, la vitesse reste constante alors que l'avion subit un mouvement de tangage assez rapide. On obtient dès lors une approximation du mouvement en annulant u et en éliminant l'équation selon x . En faisant en outre les approximations que Z_w et Z_q sont faibles par rapport à m et mU respectivement, on obtient finalement (pour $\theta_e = 0$) le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_w}{m} & U \\ \frac{M_w}{J_{yy}} + \frac{M_w \dot{w}}{J_{yy}(m)} & \frac{M_q + M_w U}{J_{yy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

L'équation (B.11) est appliquée au système d'équations (B.17) et nous obtenons:

Annexe B

$$\begin{bmatrix} \lambda - \frac{Z_w}{m} & U \\ \frac{M_w}{J_{yy}} + \frac{M_q \dot{Z}_w}{J_{yy} m} & \lambda - \frac{M_q + M_q \dot{U}}{J_{yy}} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Les valeurs propres λ de l'approximation de la période courte sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda \left(\frac{M_q + M_q \dot{U}}{J_{yy}} + \frac{Z_w}{m} \right) + \frac{Z_w}{m} \frac{M_q}{J_{yy}} - \frac{M_w U}{J_{yy}} = 0 \quad (\text{B.19})$$

ce qui donne:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{M_q + M_q \dot{U}}{J_{yy}} + \frac{Z_w}{m} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{M_q + M_q \dot{U}}{J_{yy}} + \frac{Z_w}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{Z_w}{m} \frac{M_q}{J_{yy}} - \frac{M_w U}{J_{yy}} \right)} \right] \quad (\text{B.20})$$

Nous obtenons, à partir de l'équation (B.20), en utilisant les équations (B.4), (B.7) et (B.8) la fréquence naturelle ω_n et le rapport d'amortissement ζ du mode de période courte:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Z_w}{m} \frac{M_q}{J_{yy}} - \frac{M_w U}{J_{yy}}} \quad (\text{B.21})$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega_n} \left(\frac{M_q + M_q \dot{U}}{J_{yy}} + \frac{Z_w}{m} \right) \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

1 Introduction

L'air à travers lequel un avion vole n'est jamais immobile. En conséquence, chaque fois qu'un avion vole, son mouvement est irrégulier. La nature de ces perturbations de l'air est influencée par de nombreux facteurs, mais il est d'usage de considérer la turbulence, qui se produit au-dessus de cette région où l'atmosphère se comporte comme une couche limite, comme appartenant à l'une de ces catégories:

- L'orage la source la plus commune de turbulence grave.
- Le nuage accumulé qui a le même mécanisme que l'orage, mais il est moins grave.
- La turbulence claire d'air CAT (Clear Air Turbulence), habituellement beaucoup moins grave que les deux premières sources, qui par définition n'est pas visible, peut être produite par des vents qui coulent au dessus et entre les montagnes, et par convection due au chauffage de l'air près de la terre le matin, particulièrement au dessus du désert.

Lorsqu'une approche a été conçue pour considérer le couplage des rafales, il devient nécessaire d'utiliser des méthodes statistiques, particulièrement la méthode qui nécessite le calcul de la densité spectrale de puissance DSP. Cette dernière demande un modèle mathématique pour la représentation de la turbulence atmosphérique comme un phénomène stationnaire et aléatoire.

2 Théorie de la Densité Spectrale de Puissance (DSP)

L'amplitude d'un phénomène aléatoire gaussien stationnaire est définie statistiquement par sa valeur RMS (Root Mean Square) et par sa distribution gaussienne de probabilité. Un phénomène aléatoire stationnaire gaussien est généré par la superposition d'un nombre infini de composantes sinusoïdales. Ces composantes diffèrent en fréquence d'une à l'autre. Chaque composante a une amplitude infinitésimale et est déphasée par rapport aux autres. Cette superposition des sinusoïdes est exprimée par :

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\phi(\omega_m)\Delta\omega} \cos(\omega_m t + \psi_m) \quad (C.1)$$

Annexe C

Où : $\sqrt{\phi(\omega_m) \Delta\omega}$ Amplitude infinitésimale.

ψ_m Phase aléatoire (rad).

ω_m Pulsation de chaque composant (rad/s).

$\phi(\omega_m)$ Densité spectral de puissance DSP.

La variation dans le temps d'une vitesse verticale aléatoire de rafale ne peut pas être exprimée par une formule déterministe. La vitesse d'une rafale peut seulement être mesurée en fonction d'un certain nombre de paramètres statistiques. Les principaux paramètres sont la densité spectrale de puissance DSP $\phi(\omega)$, la fonction d'autocorrélation $R(\tau)$, la moyenne σ , etc. Ces paramètres sont définis plus loin dans cette section.

Dans l'analyse des perturbations atmosphériques arbitraires, l'analyse en fréquence par des techniques Fourier ou classiques harmoniques est très utilisée.

La densité spectrale de puissance DSP de n'importe quelle fonction, $y(t)$, est une fonction réelle, qui montre comment la valeur moyenne du carré $y(t)$, donc $\overline{y(t)^2}$ est distribuée avec la fréquence ω .

Dans le but de définir la densité spectrale de puissance DSP $\phi(\omega)$, d'une fonction aléatoire dans le temps $y(t)$ on a

$$y_T(t) = y(t) \rightarrow -T \leq t \leq T$$

$$y_T(t) = 0 \rightarrow \text{Ailleurs}$$

La transformée de Fourier de $y_T(t)$ existe toujours et est donnée par :

Annexe C

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (C.2)$$

La densité spectrale de puissance DSP d'une fonction aléatoire dans le domaine temporel $y(t)$ est définie comme suit:

$$\phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |F(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} F(\omega)F(-\omega) \quad (C.3)$$

$\phi(\omega)$ est une fonction réelle et positive. À partir des 2 dernières équations :

$$\phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(\varepsilon) e^{j\omega t} e^{-j\omega \varepsilon} d\varepsilon dt \quad (C.4)$$

On pose $\varepsilon = t + \tau$ et en échangeant l'ordre de l'intégration, on obtient

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} y_T(t)y_T(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (C.5)$$

Où $R(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation, qui est définie par:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_T(t)y_T(t+\tau) dt = \overline{y_T(t)y_T(t+\tau)} \quad (C.6)$$

La fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ a les propriétés suivantes:

- 1) $R(\tau) = R(-\tau)$
- 2) $R(0) \geq R(t)$
- 3) $R(0) = \overline{y^2(t)} = \sigma^2$

$\phi(\omega)$ est toujours positive et symétrique autour de l'origine. En utilisant le théorème de Fourier, les relations réciproques entre $\phi(\omega)$ et $R(\tau)$ sont obtenues comme suit :

Annexe C

$$\phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (\text{C.7})$$

Reciproquement :

$$R(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (\text{C.8})$$

D'où

$$R(0) = \overline{y^2(t)} = \sigma^2 = \int_0^{\infty} \phi(\omega) d\omega \quad (\text{C.9})$$

Donc

$$\sigma = \sqrt{\int_0^{\infty} \phi(\omega) d\omega} \quad (\text{C.10})$$

σ est le RMS ou l'écart type des fonctions aléatoires. L'intensité ou l'amplitude de la turbulence $y(t)$ est exprimée en m/s. La quantité $\overline{y^2(t)}$ ou σ^2 fournit la mesure de la puissance totale de la perturbation.

Dans le but d'enlever l'influence de la vitesse de l'air, en comparant une analyse avec une autre, selon McLean, les fonctions DSP d'une rafale sont calculées en fonction de la fréquence spatiale $\Omega = \omega / U_0$, où U_0 est la vitesse à l'équilibre de l'avion (m/s), ω est la fréquence angulaire observée (rad/s) et Ω est la fréquence spatiale (rad/m). Ainsi, la relation entre $\phi(\omega)$ et $\phi(\Omega)$ est: $\phi(\omega) = U_0 \phi(\Omega)$

Annexe C

Annexe D

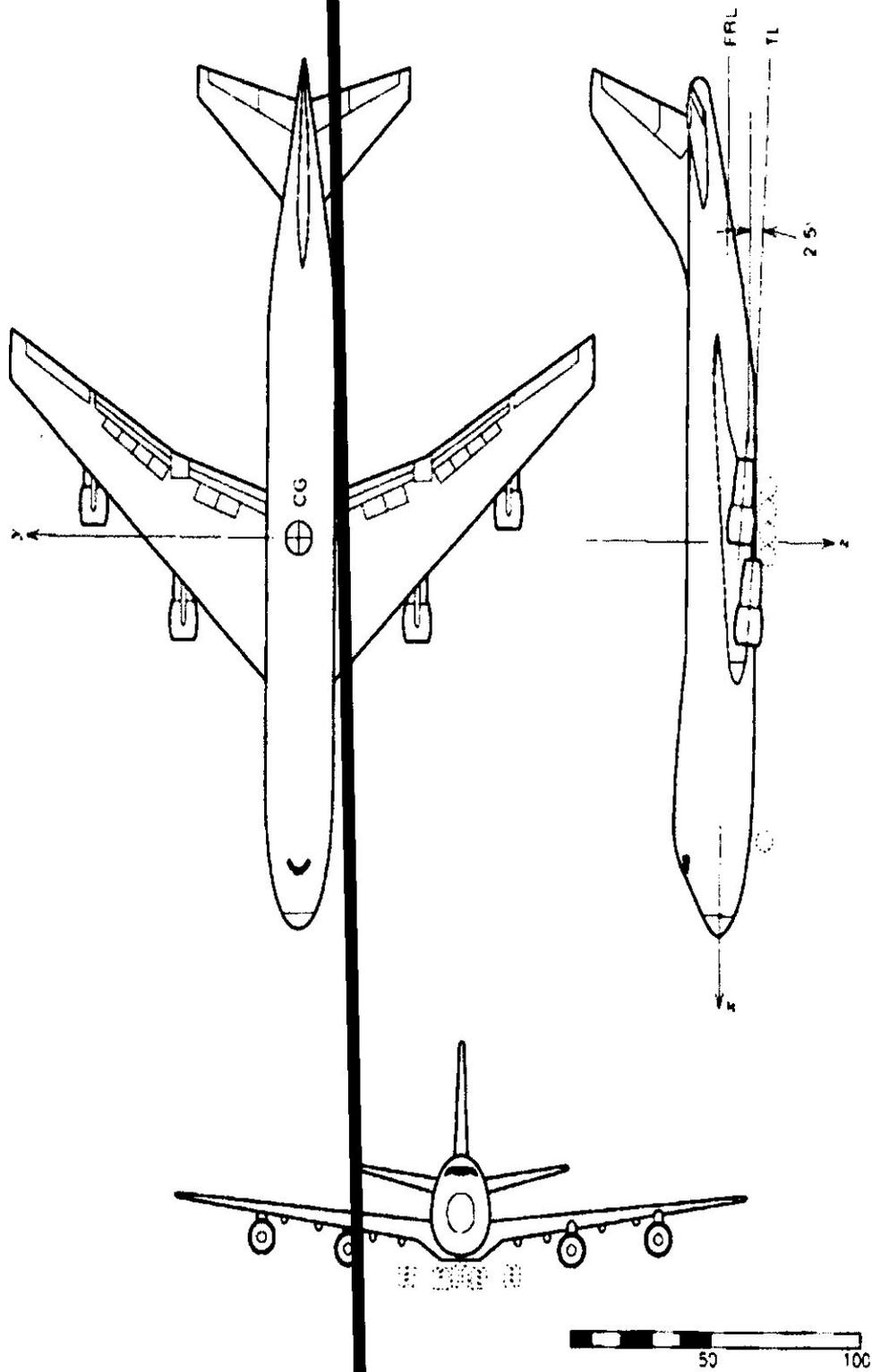


Figure1 : Boeing 747-100

Annexe D

1 Boeing 747-100 Data

	Case I	Case II	Case III
Altitude(ft)	0	20,000	40,000
M	0,2	0,5	0,9
V(ft/s)	221	518	871
W(lb)	$5,640 * 10^5$	$6,366 * 10^5$	$6,366 * 10^5$
J_{xx} (slug * ft ²)	$1,42 * 10^7$	$1,82 * 10^7$	$1,82 * 10^7$
J_{yy} (slug * ft ²)	$3,23 * 10^7$	$3,31 * 10^7$	$3,31 * 10^7$
J_{zz} (slug * ft ²)	$4,54 * 10^7$	$4,97 * 10^7$	$4,97 * 10^7$
J_{zx} (slug * ft ²)	$8,70 * 10^5$	$9,70 * 10^5$	$9,70 * 10^5$
ξ (deg)	-8,5	-6,8	-2,4
C_D	0,263	0,040	0,043

2 Boeing 747-100 Derivées dimensionnelles pour le mouvement longitudinal.

Case I(M=0.2)

	X(lb)	Z(lb)	M(ft * lb)
u(ft/s)	$-3,601 * 10^2$	$-3,538 * 10^3$	$3,779 * 10^3$
w(ft/s)	$2,137 * 10^3$	$-8,969 * 10^3$	$-5,717 * 10^4$
q(rad/s)	0	$-1,090 * 10^5$	$-1,153 * 10^7$
\dot{w} (ft/s ²)	0	$5,851 * 10^2$	$-7,946 * 10^3$
δ_e (rad)	$1,680 * 10^4$	$-1,125 * 10^5$	$-1,221 * 10^7$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0210 & 0.1223 & 0 & -9.8100 \\ -0.2093 & -0.5313 & 67.7200 & 0 \\ 0.0006 & -0.0001 & -0.3561 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0658 & 2.9400 \\ -0.5464 & 0 \\ -0.2748 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Case I(M=0.5)

	X(lb)	Z(lb)	M(ft * lb)
u(ft/s)	$-4,88 * 10^1$	$-1,342 * 10^3$	$8,176 * 10^3$
w(ft/s)	$1,546 * 10^3$	$-8,561 * 10^3$	$-5,627 * 10^4$
q(rad/s)	0	$-1,263 * 10^5$	$-1,394 * 10^7$
\dot{w} (ft/s ²)	0	$3,104 * 10^2$	$-4,138 * 10^3$
δ_e (rad)	$3,994 * 10^4$	$-3,341 * 10^5$	$-3,608 * 10^7$

Annexe D

$$A = \begin{bmatrix} -0.0024 & 0.0780 & 0 & -9.8100 \\ -0.0690 & -0.4409 & 158.4200 & 0 \\ 0.0008 & -0.0004 & -0.4218 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1386 & 2.9400 \\ -1.1786 & 0 \\ -0.8048 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Case I(M=0.9)

	X(lb)	Z(lb)	M(ft * lb)
u(ft / s)	$-3,934 * 10^2$	$-8,383 * 10^2$	$-2,062 * 10^3$
w(ft / s)	$3,144 * 10^2$	$-7,928 * 10^3$	$-6,289 * 10^4$
q(rad / s)	0	$-1,327 * 10^5$	$-1,327 * 10^7$
\dot{w} (ft / s ²)	0	$1,214 * 10^2$	$-5,296 * 10^3$
δ_e (rad)	$1,544 * 10^4$	$-3,677 * 10^5$	$-4,038 * 10^7$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0200 & 0.0159 & 0 & -9.8100 \\ -0.0426 & -0.4052 & 265.0800 & 0 \\ 0.0002 & -0.0004 & -0.4017 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0536 & 2.9400 \\ -1.2846 & 0 \\ -0.9000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Conversion des unités

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ lb} = 0.454 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 2.2026 \text{ lb}$$

$$14.62 \text{ kg} = 1 \text{ slug}$$

$$1 \text{ m} = 3.2508 \text{ ft}$$

$$1 \text{ m}^2 = 35.3147 \text{ ft}^2$$

$$1 \text{ kg/m}^3 = 0.002377 \text{ slug/ft}^3$$