

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB - BLIDA  
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
DÉPARTEMENT D'AÉRONAUTIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme

D'INGÉNIEUR d'état en Aéronautique

OPTION: Installation

THEME

0361/2009



# *Synthèse des lois de commande robustes appliquées au pilotage d'un avion*

Réalisés par :

- LEGRAA BENOUDA
- HADDOUCHE ABDELKADIR

❖ Dirigé par :

- M<sup>re</sup> DILMI SMAIN

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2008 /2009

## Résumé :

L'intégration et le développement des systèmes de commande aéronautique pour les avions modernes permettent d'estimer les qualités de vol désirées en utilisant les méthodes classiques et modernes. L'objectif de ce travail est de synthétiser des lois de commande pour un autopilote d'un avion commercial rigide. La première étape après la revue bibliographique est de faire une étude théorique sur les lois de commande envisagées tel que les commandes classiques (Bode, Nyquist, etc....) ou les commandes optimales modernes (LQ, LQG,  $H_2$  et  $H_\infty$ ). La deuxième étape est de faire une étude sur la modélisation des équations de la dynamique de vol d'un avion. Nous avons d'abord obtenu un modèle non linéaire, puis après linéarisation et découplage un modèle longitudinal linéarisé en toute condition de vol. Une dernière étape consiste à l'application en simulation des lois de commandes choisies pour commander l'avion B747 et de voir les performances atteintes. Un programme MATLAB/SIMULINK est réalisé à cet effet.

## Abstract:

The integration and the development of the modern flight control let estimate the desired handling qualities by the using classical and modern methods. The main goal of this work is to design control law for rigid commercial airplane autopilot. The first step after a review is theoretical study of law control like classical law (Bode, Nyquist...) and optimal control law like (LQ, LQG,  $H_2$  and  $H_\infty$ ). Secondly is to study the equations of the flight dynamics. First a non linear model is obtained, after linearization and decoupling a linear longitudinal model for all flight condition. The last step consisted in application of the control law to simulated and commanded B747 airplane. A program MATLAB/SIMULINK is did.

## ملخص :

هذا العمل يتلخص أساساً في دراسة وإنشاء طرق التحكم الصلبة لأجل قيادة واستقرار جهاز محاكاة لطائرة تجارية من نوع B747 هذا الأخير هو جهاز متعدد المتغيرات لا خطي وله ربط قوي بين معلمه الأفقي، لهذا الصدد قمنا أولاً بتعيين نموذج عن طريق معادلات رياضية لا خطية، بعد ذلك قمنا بتطبيق خوارزميات من أجل تعيين نموذج خطي، ثم قمنا بدراسة تجاوبية في الحلقة المفتوحة، بعد ذلك قمنا بإنشاء نظام تحكم صلب بطريقة ( $LQ$ ,  $H_2$  et  $H_\infty$ ) على شكل نموذج أفقي، بعد ذلك اقترحنا تمديدا لهذه الطرق وذلك باستعمال نموذج ذا الحلقة حيث إن الحلقة الخارجية تتضمن نظام التحكم ( $LQ$ ,  $H_2$  et  $H_\infty$ ).



# Remerciements



*Nous tenons d'abord à remercier ALLAH le tout puissant pour tout ce dont nous ne le remercierons jamais assez.*

*Nous tenons naturellement à manifester toute notre reconnaissance à nos parents respectifs qui nous ont tellement soutenu et continuent de le faire.*

*Une attention particulière va à l'encontre de Mr dilmi .S*

*Notre promoteur pour l'aide précieuse et perpétuelle qu'il nous à manifester tout au long de ce travail.*

*Nous remercions également les enseignants de département d'Aéronautique et toutes les personnes qui nous ont assistées soutenues de près ou de loin. Sans oublier nos amis qui restent dans l'ombre que nous n'oublierons guère.*

*Enfin, nous présentons tous nos vifs et sincères remerciements à monsieur le président et les membres du Jury qui ont accepté d'honorer par leur présence notre*



# Dédicace



*Je dédie ce modeste travail à mes parents,  
Qui m'ont soutenu tout au long de mes études  
Et auxquels tout revient, ainsi que mes frères  
Pour m'avoir toujours encouragé*



*Bonacuda*

*juin 2009*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail*

*A mes très chers parents*

*A mes frères*

*A tous mes collègues de l'institut d'aéronautique*

*de Blida*

*Et connaissances proches et lointaines.*

*abdelkadir*

## **SOMMAIRE :**

Résumé

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles

### **Chapitre I : Généralités**

I.1 Introduction générale .....	1
I.4 Historique de la commande robuste .....	2
I.2 Etude de robustesse .....	3
I.5 Objectif de la thèse.....	4

### **Chapitre II : Théorie de la loi de commande robuste :**

II-1-Introduction.....	5
II.2. Théorie des systèmes et de la commande.....	5
II.2.1 Notion de système.....	5
II.2.2 Théorie de la commande .....	6
II.2.3 outils d'analyse des asservissements .....	8
II.2.3.1 Diagramme de Bode .....	8
a) Systèmes du premier ordre .....	9
b) Systèmes du second ordre .....	9
II.2.3.2 Diagramme de Nyquist .....	10
II.2.3.3 Diagramme de Black .....	11
II.2.3.5 Critère de Routh .....	12
II.3 Les Commandes Classiques .....	14
II.3.1 Le régulateur PID.....	14
II.4 Les Commandes Moderne .....	15
II.4.1 La commande LQ .....	15
II.4.1.1 Principe .....	15
II.4.2 La commande LQG .....	18
II.4.2.1 Principe général de la commande LQG.....	18
II.4.2.3 Synthèse LQG/LTR (Loop Transfert Recovery).....	20

II.4.3 Synthèse de contrôleurs $H_\infty$ .....	21
II.4.3.1 Présentation du problème $H_\infty$ standard .....	21
II.4.3.2 Résolution du problème $H_\infty$ par l'algorithme DGKF .....	23
II.4.3.3 Mise en forme du problème $H_\infty$ : exemple du problème de la sensibilité mixte.....	26

## Chapitre III : Modélisation longitudinale d'un avion

III.1 Introduction .....	28
III.2.Repérage de l'avion dans l'espace .....	28
III.2.1 Repères de base .....	28
III.2.2 Angles entre les repères .....	30
III.2.2.1 passage du repère ned $R_0$ au repère avion $R_a$ .....	30
III.2.2.2 Équations auxiliaires .....	31
III.2.2.3 Passage du repère $R_a$ au repère de stabilité $R_s$ .....	32
III.2.3 Mouvement de l'avion en translation .....	33
III.2.3.1 Décomposition du vecteur vitesse de l'avion .....	33
III.2.3.2 Mouvement longitudinal de l'avion .....	33
III.2.3.3 Relations dans le repère avion .....	34
III.3-Modèle longitudinal de la dynamique de l'avion .....	35
III.3.1.Hypothèse et données par la modélisation .....	35
III.3.1.1 Hypothèse relatives à l'avion .....	36
III.3.1.2 Hypothèses relatives à l'environnement terrestre .....	37
III.3.2 Modèle mécanique de l'avion .....	38
III.3.2.1 Caractéristiques de l'avion .....	38
III.3.2.2 Choix du repère de travail .....	40
III.3.2.3 Théorème de la résultante dynamique .....	41
III.3.2.4 Théorème du moment cinétique.....	41
III.3.3 Efforts extérieurs appliqués à l'avion .....	43
III.3.3.1 Poids de l'avion et centre de gravité .....	43
III.3.3.2 Forces et moments aérodynamiques .....	43
III.3.3.3 Poussée .....	45
III.3.4 Modèle longitudinal de l'avion .....	45
III.3.4.1 Hypothèses relatives au vol longitudinal .....	45
III.3.4.2 Notations relatives au modèle longitudinal .....	46

III.3.4.3	Modèle longitudinal pour le vol en croisière .....	47
III.3.4.4	Étude de l'équilibre .....	48
III.3.5	Linéarisation du modèle longitudinal .....	49
III.3.5.1	Linéarisation des équations .....	49
III.3.5.2	Linéarisation des efforts extérieurs .....	50
III.3.5.3	Modèle d'état .....	52

## Chapitre IV : Etude en simulation

IV.1	Introduction .....	54
IV.2	Description du Boeing 747.....	54
IV.2.1	Historique .....	54
IV.2.2	Caractéristiques techniques .....	54
IV.2.3	Surfaces de commande.....	55
IV.3	Synthèse du modèle longitudinal .....	56
IV.3.1	Modèle de la poussée .....	57
IV.3.2	Modèle longitudinal du Boeing 747 .....	57
IV.4	Simulation et résultats .....	59
IV.4.1	réponse du modèle sans contrôleur (boucle ouvert) .....	59
IV.4.2	Simulation en boucle fermée .....	60
IV.4.2.1	La commande LQ .....	60
IV.4.2.2	La commande LQG .....	64
IV.4.2.3	La commande LQG/LTR .....	67
IV.4.2.4	La commande $H_{\infty}$ , $H_{2LQG}$ : .....	70
A-	Simulation dans le domaine fréquentielle .....	70
A.1-	Les fonctions de pondération ( $W_1, W_2$ ) .....	70
A.2-	La fonction de sensibilité S et la fonction KS .....	72

Conclusion

Bibliographie

Annexes



## Liste des figure :

### Chapitre II

Fig. II.1- Schéma fonctionnel .....	5
Fig. II.2 – Commandes $e(t)$ et perturbations $d(t)$ .....	5
Fig. II.3 – Commande en boucle ouverte .....	7
Fig. II.4 – Commande en boucle fermée .....	8
Fig. II .5- Diagramme de Bode d'ordre 1 .....	9
Fig. II .6- Second ordre .....	10
Fig. II.7- Contour de Nyquist .....	11
Fig. II.8 - Lieu de Black .....	12
Fig. II.9 - Asservissement par un régulateur PID .....	14
Fig. II.10- Schéma général de la commande linéaire quadratique .....	16
Fig. II.11- Lieu de NYQUIST de la fonction de transfert de boucle LQ .....	18
Fig. II.12: La structure du correcteur LQG (la transmission directe D n'est pas représentée pour des raisons de clarté).....	19
Fig. II.13 - Problème $H_\infty$ standard .....	22
Fig. II.14. Asservissement de référence pour la méthode $H_\infty$ .....	26
Fig. II.15 - Représentation standard pour le problème de sensibilité mixte .....	26
Fig. II.16 - Valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité $S$ et $T$ .....	27

### Chapitre III

Fig. III.1 –placement des repères $R_o$ et $R_a$ par rapport à l'avion .....	29
Fie. III.2 - Les repères avion $R_a$ et de stabilité $R_s$ .....	30
Fig. III. 3 - Les repères et angles caractéristiques du mouvement longitudinal .....	34
Fig. III.4 - Position du centre de gravité G sur la corde aérodynamique moyenne $\bar{c}$ .....	43
Fig. III.5 - Positions du centre de gravité G de l'avion et du foyer F du profil .....	44
Fig. III.6- Grandeurs caractéristiques du mouvement longitudinal : efforts extérieurs, angles, vitesse. ....	46

### Chapitre IV

Fig. IV.1- Le Boeing 747-400 sous différents angles, et ses dimensions .....	55
Fig. IV.2- Les surfaces de commande du Boeing 747 .....	55

Fig. IV .3 lieu des pôles .....	59
Fig. IV .4 l'allure temporelle du système sans contrôleur à une entrée .....	60
Fig IV.5 Réponse impulsionnelle du correcteur LQ .....	61
Fig IV.6 Réponse a un step du correcteur LQ .....	62
Fig. IV.7 Réponse a un step du système en boucle fermée à une échelon de vitesse du correcteur LQ .....	63
Fig IV.8 Réponse impulsionnelle du correcteur LQG .....	64
Fig IV.9 Réponse a un step du correcteur LQG .....	65
Fig. IV.10 Réponse a un step du systèmes en boucle fermée à une échelon de vitesse du correcteur LQG .....	66
Fig IV.11 Réponse impulsionnelle du correcteur LQG/LTR .....	67
Fig IV.12 Réponse a un step du system du correcteur LQG/LTR .....	68
Fig. IV.13 Réponse a un step du système à une échelon de vitesse en boucle fermée de correcteur LQG/LTR .....	69
FIG. IV.14 - Gabarits sur la fonction de sensibilité S .....	70
FIG. IV.15- Gabarits sur la commande $u_k$ .....	70
Fig. IV.16 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé $W_1^{-1}$ de commande $H_\infty$ .....	71
Fig. IV.27 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé $W_1^{-1}$ de commande $H_{2LQG}$ .....	71
Fig. IV.18 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé $W_2^{-1}$ de la commande $H_\infty$ .....	71
Fig. IV.19 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé $W_2^{-1}$ de la commande $H_{2LQG}$ .....	71
Fig. IV.20- Le montage utilisé pour la synthèse $H_\infty$ et $H_{2LQG}$ de contrôleurs .....	72
Fig. IV.21 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de la commande $H_\infty$ . .....	72
Fig. IV.22 Evolution temporelle des actionneurs, en réponses à un échelon de vitesse de la commande $H_\infty$ .....	72
Fig. IV.23 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de tangage q de la commande $H_\infty$ .....	73
Fig. IV. 24 Réponses des actionneur à un échelon de vitesse de tangage q de la commande $H_\infty$ .....	74
Fig. IV.25 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de la commande $H_{2LQG}$ .....	75

Fig. IV.26 Evolution temporelle des actionneurs, en réponses à un échelon de vitesse de la commande $H_{2LQG}$ .....	75
Fig. IV.27 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de tangage $q$ de la commande $H_{2LQG}$ .....	76
Fig. IV. 28 Réponses des actionneur à un échelon de vitesse de tangage $q$ de la commande $H_{2LQG}$ .....	76

**Liste des tableaux :**

**Chapitre II :**

Tab.II.1 – Routh..... 12

**Chapitre III :**

TAB. III.1 - Valeurs limites des angles d'Euler. .... 31

TAB. III.2 - Notations adoptées pour les variables d'état ..... 49

**Chapitre IV :**

TAB. IV.1 - Limites de débattement et de vitesse de variation des élévateurs..... 56

Table IV.2 les principaux comparaison qui peut être faits entre les commandes LQ, LQG et LQG/LTR..... 70

Table IV.3 : les principaux comparaisons qui peuvent être faits entre les commandes  $H_{2LQG}$  et  $H_{\infty}$  ..... 80

$R$  : vitesse de rotation en lacet ( $\text{rad.s}^{-1}$ ).

$R_i$  : Matrice de rotation d'angle  $i$ .

$R_0$  : Repère normal terrestre, ou NED.

$R_a$  : Repère avion.

$R_s$  : Repère de stabilité, ou aérodynamique.

$R_{i/j}$  : Matrice de passage du repère  $i$  au repère  $j$ .

$\rho$  : Masse volumique de l'air à une altitude donnée ( $\text{kg.m}^{-3}$ ).

$\rho_0$  : Masse volumique de l'air au niveau de la mer :  $h = 0$  m ( $\text{kg.m}^{-3}$ )

$T$  : module de la poussée (N).

$V$  : module de la vitesse aérodynamique de l'avion ( $\text{m.s}^{-1}$ ).

$V_E$  : vitesse équivalente de l'avion ( $\text{m.s}^{-1}$ ).

$g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ , accélération de la gravité.

$\rho_0 = 1.225 \text{ kg.m}^{-3}$ , masse volumique de l'air au sol.

$S$  : surface de référence (de l'aile).

$A$  : Matrice d'état du système linéaire

$B$  : Matrice d'entrée du système linéaire

$C$  : Matrice d'état de sortie du système linéaire

$D$  : Matrice de commande de sortie du système linéaire

## **Notion de la partie commande :**

$I$  : Matrice d'identité

$\mathcal{R}$  : Corps des nombre réels

$\mathcal{R}^+$  : Corps des nombre réels positif ou nuls

$\mathcal{C}^m$  : Corps de vecteurs complexes de dimension  $n$

$J$  : nombre complexe tel que  $j^2=-1$

$s$  ou  $p$  : variable de Laplace

$\mathcal{R}_e(.)$  : Partie réelle de  $(.)$

$Im(.)$  : Partie imaginaire de  $(.)$

$\omega$  : Pulsation (rad/s)

$A^T$  : Matrice transposée de  $A$

$F(j\omega)$  : Matrice de transfert pour  $s=j\omega$

LQ : linéaire quadratique

LQG : linéaire quadratique gaussienne

LTR : Loop Transfert Recovery

$R$  et  $Q$  : pondération de la commande LQ

$W_1, W_2, W_3$  : pondération de la commande  $H_\infty$

LFT : transformée linéaire fractionnelle

$K_c$  : gain de commande



# Chapitre I :

# Généralités

## I.1 Introduction :

Les grands constructeurs aéronautiques souhaitent, depuis quelques décennies, construire des avions toujours plus gros, plus performants et plus confortables dans la gamme des long-courriers : le récent programme A380 d'Airbus Industrie en est la preuve. Cette évolution s'est naturellement effectuée en relation avec les progrès de la connaissance scientifique, notamment dans les domaines de la mécanique du vol et des structures, avec l'apparition de nouveaux matériaux souples et résistants, et également dans le domaine de l'automatisme. En effet lorsque l'on parle de tels appareils, il est nécessaire de concevoir des aides au pilotage dans la mesure où un pilote ne peut pas manœuvrer régulièrement pendant de longues durées, et ce pour des questions évidentes de sécurité et de confort des passagers.

La compagnie *Boeing inc.* Est major dans cette catégorie, puisque c'est elle qui a conçu le premier jumbo-jet *B-747*, dont la mise en service a eu lieu en 1970. Depuis, cet appareil n'a cessé de subir des évolutions techniques.

C'est dans ce contexte que nous nous sommes intéressé à l'application de loi de commande robuste pour un autopilote d'avion commercial. Disposant des données et des études afin de valider nos résultats. pour le *B-747*, nous avons naturellement choisi d'étudier cet appareil. En effet, avant de concevoir un quelconque dispositif d'autopilotage pour un avion, il est nécessaire de prendre connaissance de son comportement dynamique par des simulations, et donc de disposer de son modèle mécanique. Cependant, lors des différentes phases de vol : décollage, croisière ou approche, on observe des variations de modèle, dues aux variations de plusieurs paramètres, dont par exemple l'altitude. En effet, le modèle de l'atmosphère n'est pas le même au niveau de la mer qu'à 11 000 mètres d'altitude, et le comportement de l'avion s'en ressent.

Notre travail est divisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre est une généralité sur la loi de commande robuste.

Le chapitre II est consacré à l'étude théorique de la commande robuste qui est l'étude de la commande classique (Bode , nyquist,...)et moderne (LQ,LQG,H<sub>2</sub>, H<sub>∞</sub> ).

Le chapitre III est consacré à la modélisation de la dynamique de vol de l'avion longitudinal.

Le chapitre IV est une étude dans le cadre de simulation, et consacré à l'implantation de la loi de commande, dont l'étude théorique est l'objet du chapitre II. Il contient l'application pratique de la commande quadratique LQ ,LQG et la synthèse H<sub>2</sub>LQG , H<sub>∞</sub>, ainsi que la validation des performances de la structure complète de commande.



## I.2 Historique de la commande $H_2/H_\infty$ : [2]

Dès les années 30, Bode mit en évidence l'intérêt fondamental du principe de la contre-réaction en introduisant dans le cadre d'une représentation fréquentielle d'un processus mono variable, les notions de marges de gain et de marges de phase. Il donna alors une interprétation graphique de la robustesse grâce au tracé fréquentiel des lieux de Bode (ou de Nyquist ou de Black) et énonça les premiers critères de maintien de la stabilité en présence d'incertitude.

Cependant, malgré l'importance considérable de ces travaux. Les études sur la robustesse ont perdu de leur intensité jusqu'aux années 70 pour faire place à un développement considérable dans le domaine des représentations d'état et polynomiales (observabilité, commandabilité, estimation, filtre de Kalman ...).

Ce n'est que récemment que se développent certaines extensions au cas multivariable des travaux de Bode (généralisation du critère de Nyquist). Cependant, ces méthodes se sont rapidement révélées insuffisantes pour l'étude de la robustesse car leur domaine d'application était trop restrictif. Il faudra attendre les années 80 pour qu'apparaissent les premiers résultats importants pour les systèmes linéaires invariants (Zames, Lehtomaki, Doyle, Safonov ...) qui initialisèrent un regain d'intérêt considérable pour la robustesse. Ce regain fût motivé par l'introduction d'un nouvel outil d'analyse fondé essentiellement sur l'utilisation des normes de matrices de transfert. Parmi les méthodes de synthèse les plus importantes, on peut citer êtes extensions robustes du LQG (LQG/LTR Doyle et Stein), la méthode QFT et ses extensions qui analysent les réponses fréquentielles du système pour faire la synthèse de compensateurs robustes vis à vis des variations paramétriques ( Horowitz, Sidi, Oustaloup). D'autres méthodologies se sont progressivement développées dans les années 80, parmi lesquelles les plus importantes sont les  $H_2$  et  $H_\infty$  synthèses qui suscitent toujours un grand intérêt au sein de la communauté scientifique. Le problème est de formuler en terme d'une optimisation de la norme  $H_2$  et  $H_\infty$  d'une matrice de transfert représentant les objectifs de robustesse et/ou de performance pour les systèmes linéaires et invariants.

### I.3 Etude de robustesse :

Le premier problème à résoudre pour pouvoir appliquer la théorie mathématique est la modélisation des processus physiques. La génération de ces modèles qui nécessite de nombreuses simplifications aboutit à une représentation imparfaite de la réalité, on dit alors que ce modèle est soumis à des phénomènes perturbateurs.

Les erreurs de modèle trouvent leurs origines dans les nombreux phénomènes non linéaires qui sont négligés car leur caractérisation est souvent trop complexe pour pouvoir être prise en compte mais aussi dans l'idéalisation de certains phénomènes notamment aux niveaux des organes de commandes (actionneurs) ou ceux de la chaîne de mesure (capteurs). De plus, comme, il est souvent souhaité, le système est linéarisé autour d'un point de fonctionnement du processus physique. Le modèle n'est alors valide que dans le voisinage de ce point et les phénomènes non linéaires sont totalement négligés. Pour de tels modèles, de plus simple simplifications peuvent encore être effectuées pour diminuer sa complexité.

Le processus physique peut aussi être soumis à des perturbations extérieures qui généralement ne sont pas prises en compte par la modélisation. Dans le domaine aéronautique par exemple, elles peuvent provenir de diverses origines telles que le vent, les turbulences atmosphériques...

Finalement, l'ensemble de ces simplifications font que le problème de la validité des lois de commande générées à partir de ces modèles est crucial. C'est ainsi que depuis la naissance de l'aéronautique, les chercheurs se sont intéressés au problème de la robustesse. Cette propriété traduit l'invariance ou la résistance du comportement du système lorsqu'il est soumis à des incertitudes de nature diverse. Généralement c'est la robustesse en stabilité qui intéresse les chercheurs. Celle-ci traduit le maintien de la stabilité du système de présence d'incertitudes. Cependant, on désire également conserver certaines caractéristiques spécifiées initialement (temps de réponse, dépassement...), on parle alors de robustesse en performance.

### I.5 Objective de la thèse:

Notre principal objectif, après la modélisation des équations de mouvement d'un avion et l'étude théorique de commande à été d'étudier l'applicabilité de cet technique dans guidage d'un avion.


L'avion est un système complexe avec de nombreuses non-linéarités (interaction aérodynamique, aéroélasticité...), naturellement instable. De plus les modèles linéaires ne prennent pas en compte les incertitudes de modélisation, c'est la raison pour laquelle nous avons analysé les possibilités de ces commandes.

Les problèmes importants qui se posent pour l'élaboration des lois de commande sont d'une part le choix de filtres introduits généralement au niveau des commande ou/et des sorties du système. Ces filtres sélectionnent de domaines fréquentielle et permettent ainsi de gérer compromis robustesse/performance. Nous avons défini une stratégie de recherche systématique des filtres fréquentiels permettant d'obtenir des correcteurs d'ordre raisonnable vis à vis du problème posé.

Pour les systèmes aéronautiques et en particulier pour les avions, la localisation de dynamique en boucle fermée fait partie intégrante des spécifications imposées aux lois de commande. Un modèle mal amorti peut en effet, s'il est excité engendrer un comportement inacceptable. Par essence, la technique de  $H_\infty$  synthèse adopte un point de vue entrée-sortie pour l'étude des systèmes. Elle ne traite donc pas explicitement la position des modes du système en boucle fermée. Il faut noter que la littérature sur ce sujet est extrêmement réduite et n'apporte pas véritablement de réponse.

L'objet de la commande robuste que nous proposons est de répondre aux exigences suivantes:

- Compromis robustesse/performance
- Robustesse vis à vis de la dynamique négligée
- Modes bien amortis
- Robustesse vis-à-vis des variations paramétrique bien satisfaisante.



# Chapitre II:

## Théorie de la loi de commande robuste

## II-1-Introduction:

Ce chapitre constitue une introduction à la théorie de commande, l'étude, l'analyse, et la synthèse des systèmes de commande. Il a pour objectif d'introduire les principaux concepts de l'Automatique: la notion de modèle d'un système, la structure de commande à contre-réaction et le concept de stabilité des systèmes dynamiques et le problème de stabilité posé par l'introduction de la contre-réaction. Et l'étude de la commande robuste classique «Bode,nyquist,lieu de black,... etc.» et les commande modernes « LQ, LQG,H2,H $\infty$  ».

## II.2. Théorie des systèmes et de la commande:[1]

### II.2.1 Notion de système:

Un **système** est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, **les entrées** du système. Le résultat de l'action des entrées est **la réponse** du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de **sorties**. Le système complet ou un des éléments le composant est généralement représenté schématiquement par un **schéma fonctionnel** de la figure ci-dessous.

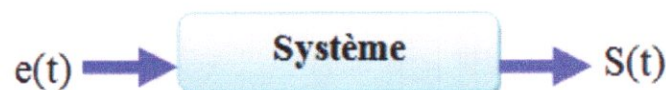


Fig. II.1– Schéma fonctionnel

Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système; ce sont **les commandes**. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme **des perturbations**.

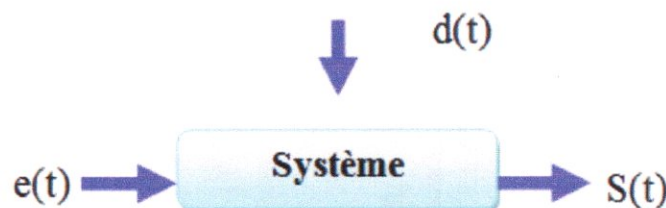


Fig. II.2 – Commandes  $e(t)$  et perturbations  $d(t)$

Chaque élément constitutif de l'ensemble système peut être caractérisé par un nombre fini de variables et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimée sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique associées au système, c'est à dire la combinaison des lois

mathématiques précédentes. L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système. La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité comporte donc les étapes suivantes:

- identification des variables pertinentes pour la caractérisation de chaque élément constituant le système,
- caractérisation des relations entre ces variables,
- représentation mathématique des interactions entre les éléments à travers la représentation mathématique des interactions entre les variables,
- formation d'un système de relations entre les variables caractérisant le système comme un tout,
- formation d'un système de relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie.
- **Les systèmes linéaires :**

Une classe particulière dont l'importance pratique est remarquable est celle des systèmes décrits par des équations différentielles linéaires. On parle alors de **systèmes linéaires**. Si elle n'est strictement que rarement vérifiée en pratique, cette hypothèse de linéarité peut être acceptée pour de nombreux systèmes évoluant autour d'une position d'équilibre sous l'hypothèse des faibles déviations. Un processus de **linéarisation** est alors nécessaire. D'un point de vue purement technique, les systèmes linéaires vérifient le **principe de superposition** et le **principe d'homogénéité**.

➤ **Principe de superposition:**

La réponse  $s(t)$  d'un système linéaire à une entrée  $e(t)$  composée de la combinaison linéaire de plusieurs entrées  $e(t) = \sum_{k=1}^n a_k e_k(t)$  est la somme des réponses élémentaires  $s_k(t)$  à chacune des entrées individuelles  $s(t) = \sum_{k=1}^n a_k s_k(t)$

➤ **Principe d'homogénéité:**

Un système vérifie le **principe d'homogénéité** si pour une entrée  $ae(t)$ , la sortie est donnée par  $as(t)$ .

## II.2.2 Théorie de la commande :

❖ **La commande passive:**

Le principe de la commande passive consiste à modifier structurellement le système à commander afin qu'il réalise au mieux les fonctions souhaitées. Connue également sous la dénomination de **commande structurelle**, cette technique s'applique principalement dans les domaines du contrôle des vibrations (acoustiques, mécaniques) affectant les structures mécaniques

et dans le domaine du contrôle des écoulements laminaires et turbulents.

### ❖ La commande active :

A la différence de la commande passive, la commande active suppose l'emploi d'un dispositif spécifique appelé système de commande afin de modifier le comportement dynamique du système étudié. Le but d'un système de commande est donc d'exercer des actions entraînant une amélioration du comportement du système et de ses performances. L'ensemble des méthodes permettant l'analyse du comportement d'un système donné et la synthèse d'un système de commande satisfaisant des spécifications de performance précises définit la théorie de la commande.

la théorie de la commande permet la conception de systèmes de commande pour des domaines aussi variés que l'aéronautique, le spatial, l'industrie chimique, l'automobile, le génie-électrique... Quelle que soit la nature du système à commander, il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux grandes familles. Les structures de commande en boucle ouverte et les structures de commande à contre-réaction appelées également structures de commande en boucle fermée.

### ❖ La commande en boucle ouverte :

En l'absence d'entrées perturbatrices et en supposant que le modèle mathématique du système est parfait, il est imaginable de générer un signal de commande produisant le signal de sortie souhaité. Cela constitue le principe de la commande en **boucle ouverte** qui exploite la connaissance des dynamiques du système afin de générer les entrées adéquates  $e(t)$ . Ces derniers ne sont donc pas influencés par la connaissance des signaux de sortie  $s(t)$ .

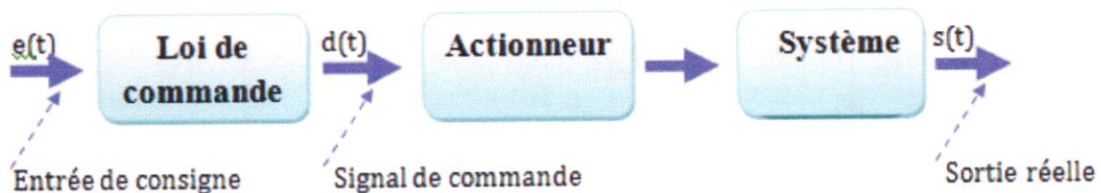


Fig. II.3 – Commande en boucle ouverte

### ❖ La commande en boucle fermée :

Toutefois, si le système à commander n'est pas parfaitement connu ou si des perturbations l'affectent, les signaux de sortie ne seront pas ceux souhaités. L'introduction d'un retour d'information sur les sorties mesurées s'avère alors nécessaire. Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante et définit la structure de **commande à contre-réaction** (**feedback** en anglais). On parle alors de **système bouclé** (figure II.4), par opposition aux **systèmes**

en boucle ouverte (figure II.3).

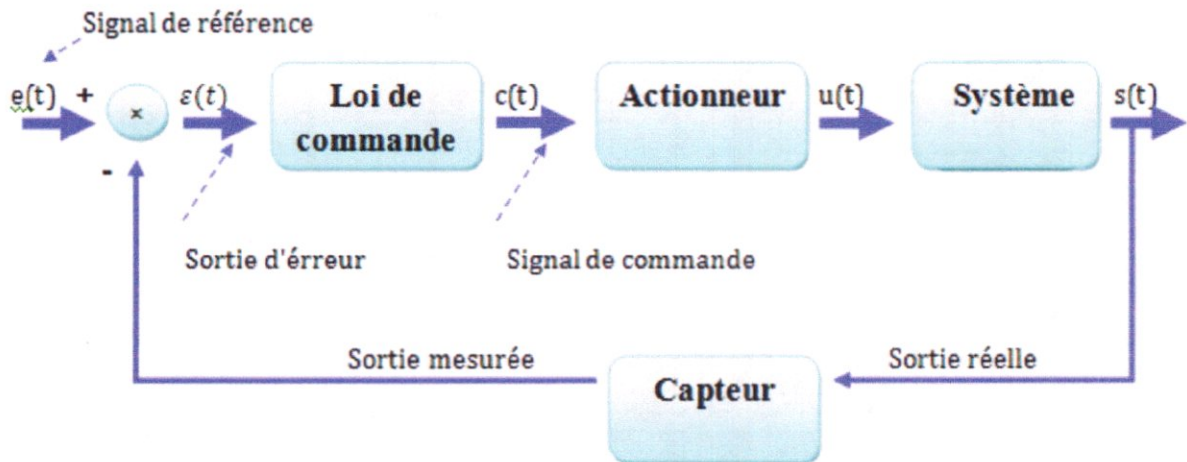


Fig. II.4 – Commande en boucle fermée

Un système bouclé vérifie en quelque sorte que la réponse du système correspond à l'entrée de référence tandis qu'un système en boucle ouverte commande sans contrôler l'effet de son action. Les systèmes de commande en boucle fermée sont ainsi préférables quand des perturbations non modélisables et/ou des variations imprévisibles des paramètres sont présentes. Cette structure de commande permet ainsi d'améliorer les performances dynamiques du système commandé (rapidité, rejet de perturbation, meilleur suivi de consignes, moindre sensibilité aux variations paramétriques du modèle, stabilisation de systèmes instables en boucle ouverte).

## II.2.3 outils d'analyse des asservissements :

### II.2.3.1 Diagramme de Bode:

#### Définition :

Le diagramme de Bode d'un système de réponse fréquentiel  $H(j\omega)$  est composé de deux tracés :

- le gain (ou amplitude) en décibels (dB). Sa valeur est calculée à partir de  $20 \log_{10} (|H(j\omega)|)$
- la phase en degré, donnée par  $\arg (H(j\omega))$  .

L'échelle des pulsations est logarithmique et est exprimée en rad/s (radian par seconde). L'échelle logarithmique permet un tracé très lisible, car composé majoritairement de tronçons linéaires.



a) **Systèmes du premier ordre :**

Soit la fonction de transfert du système du premier ordre:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{w_0}} \quad (\text{II.1})$$

La pulsation  $w_0$  est appelée pulsation de coupure.

Le tracé s'obtient en prenant l'opposé du module en dB et de la phase du système du premier ordre.

Un système sera stable en boucle fermée si le diagramme de Bode de la *FTBO* fait apparaître que pour la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$ , la courbe de gain passe en dessous du niveau  $0 \text{ dB}$ .

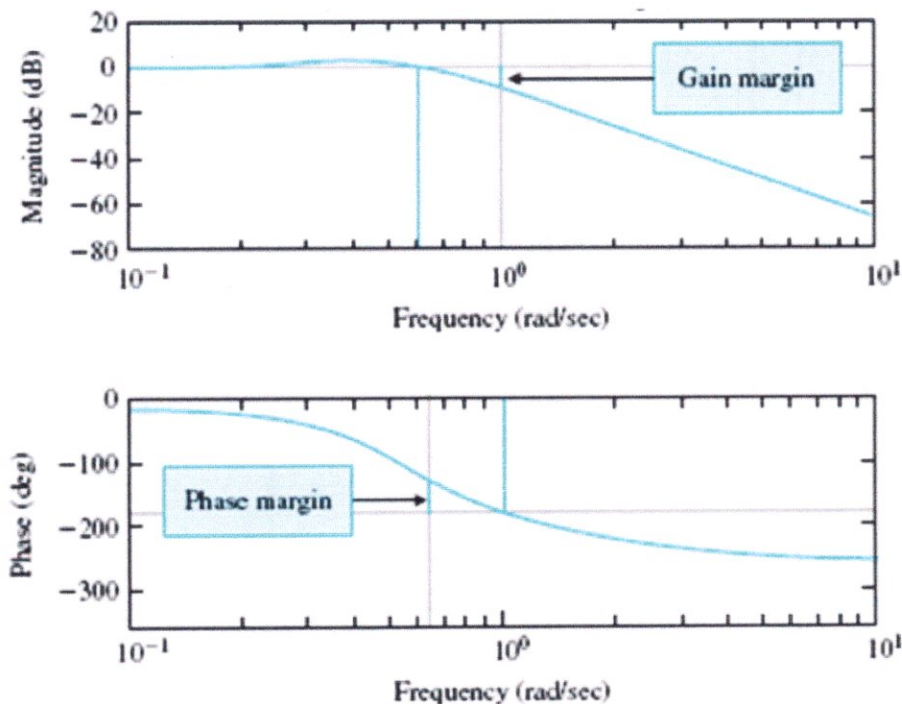


Fig. II .5 - Diagramme de Bode d'ordre 1.

b) **Systèmes du second ordre :**

Soit la fonction de transfert du Systèmes du second ordre :

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\varepsilon \frac{s}{w_0} + \left(\frac{s}{w_0}\right)^2} \quad (\text{II.2})$$

Le tracé s'obtient en prenant l'opposé du module en dB et de la phase du Systèmes du second ordre.

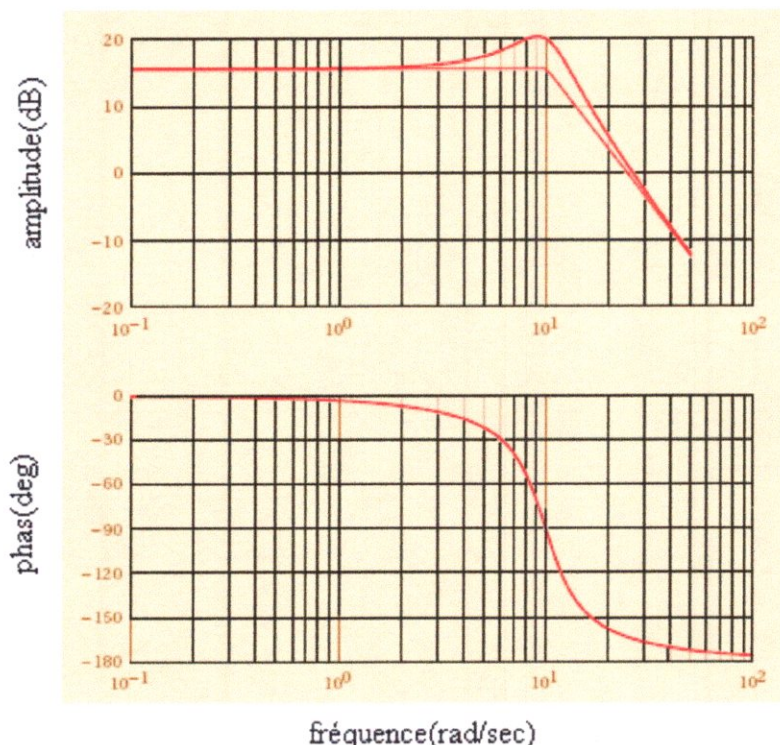


Fig. II .6 - Second ordre

*FTBO*: Fonction de Transfer en Boucle Ouvert

### II.2.3.2 Diagramme de Nyquist :

Le diagramme de Nyquist représente la fonction  $G(j\omega)$  dans le plan complexe.

A chaque fréquence  $\omega$  on associe le point de coordonnées  $\Re(G(j\omega))$  et  $\text{Im}(G(j\omega))$ . Le contour de Nyquist est la courbe formée par ces points. Il est orienté dans le sens des  $\omega$  croissants de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Le contour de Nyquist de la fonction de transfert est représenté à la Figure II.7

Le tracé de Nyquist joue un rôle important dans l'analyse de la stabilité en boucle fermée d'un asservissement. Il s'agit ici de la stabilité BIBO puisqu'on s'intéresse à la stabilité de la fonction de transfert

$$\mathbf{S(s)} = \frac{1}{1+G(s)K(s)} = \mathbf{I - T(s)} \quad (\text{II.3})$$

Le critère de Nyquist fournit un moyen graphique simple pour étudier la stabilité de  $S(s)$  à partir du seul tracé de Nyquist du transfert en boucle ouverte  $F(s) = G(s)K(s)$ . Ce critère s'applique dès que  $F(s)$  n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire et peut s'énoncer comme suit.

Critère de Nyquist:

le système bouclé est BIBO stable si et seulement si le contour de Nyquist de  $F(s)=G(s)K(s)$  parcouru de  $\omega = -\infty$  à  $\omega = +\infty$ , entoure le point critique  $(-1;0)$  un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de  $F(s)$ .

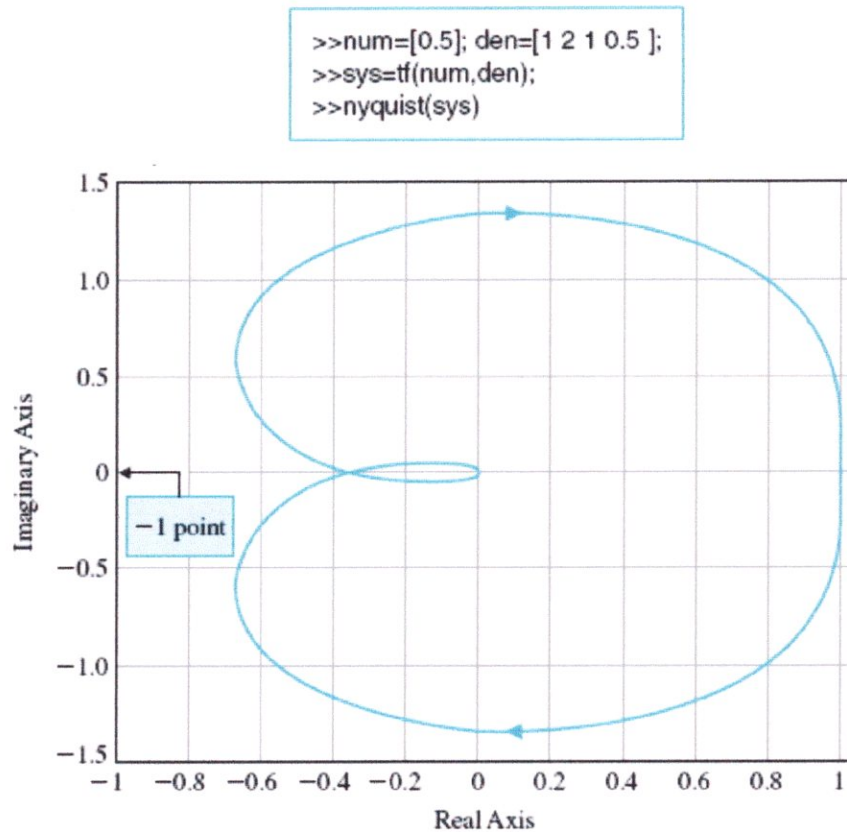


Fig. II.7 - Contour de Nyquist.

### II.2.3.3 Diagramme de Black:

Dernier diagramme souvent utilisé en Automatique: le **lieu de Black** (ou diagramme de **Nichols**). Ici la phase  $Arg(G(j\omega))$  est portée en abscisses (en degrés) et le gain  $|G(j\omega)|$  est porté en ordonnées (en dB). La courbe des points  $G(j\omega)$  ainsi obtenue représente la réponse fréquentielle. Le diagramme de Black s'utilise pour déterminer le gain et la phase du transfert consigne/sortie

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} \quad (\text{II.4})$$

à partir du tracé du transfert en boucle ouverte  $F(s) = G(s)K(s)$ . Les abaques de Black permettent de lire directement cette information en chaque point du tracé de  $F(s)$  sur le lieu de Black.

Le lieu de Black est représenté à la Figure II.8.

Ce lieu tangente le cercle de gain constant 6 dB ( $|G(j\omega)| = 2$ ) à la fréquence  $\omega = 0$ .

Dans le plan de Black, le système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte laisse le point critique ( $-180^\circ, 0$  dB) à droite pour les fréquences croissantes.

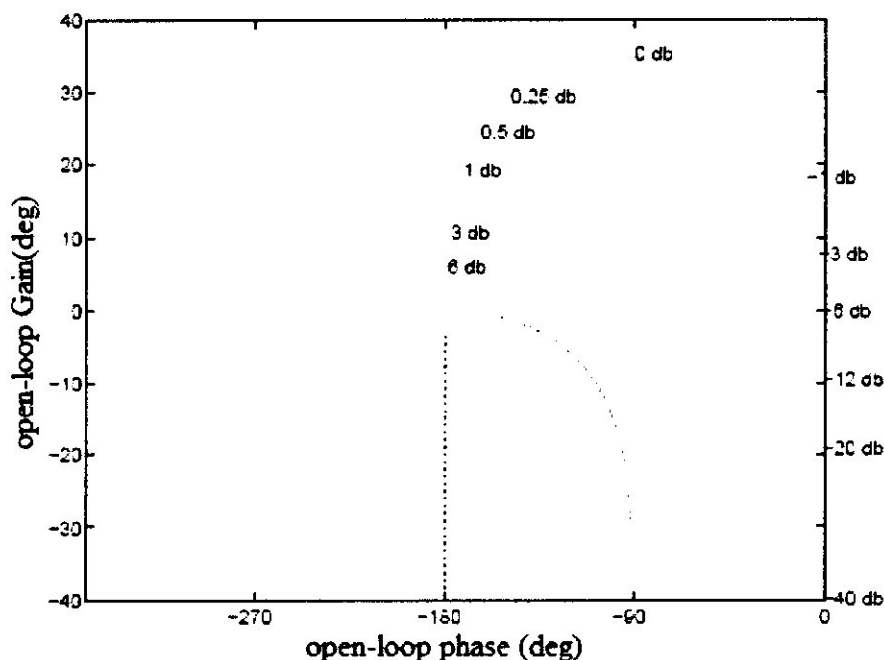


Fig. II.8 – Lieu de Black.

**II.2.3.5 Critère de Routh:**

Le critère de **Routh** est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), le signe des racines de ce polynôme sans résoudre l'équation caractéristique :

$$1+G(p)=0 \tag{II.5}$$

**Remarque :** Dans la suite la FTBO est notée  $G(p)$ .

Soit l'équation caractéristique de l'asservissement :

$$E(p) = 1 + F.T.B.O = 1 + G(p) = 0 \tag{II.6}$$

(Déterminant de la F.T.B.F)

On la met sous forme polynomiale :

$$E(p) = 1 + a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \tag{II.7}$$

On construit la table de Routh (**Tab.II.1**) :

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	...
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...	...
$p^{n-2}$	$b_m$	$b_{m-1}$	$b_{m-2}$	...	....
$p^{n-3}$	$c_m$	$b_{m-1}$	$b_{m-2}$	....	....
				....	....

$$\begin{aligned}
 b_m &= -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
 b_{m-1} &= -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
 c_m &= -\frac{1}{b_m} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_m & b_{m-1} \end{bmatrix} = \frac{b_m a_{n-3} - b_{m-1} a_{n-1}}{b_m} \\
 c_{m-1} &= -\frac{1}{b_m} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_m & b_{m-2} \end{bmatrix} = \frac{b_m a_{n-5} - b_{m-2} a_{n-1}}{b_m} \tag{II.8}
 \end{aligned}$$

La procédure est itérée jusqu'à  $p^0 = 0$

Le système est stable si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Le nombre de pôles instable (partie réelle positive) de la F.T.B.F est égale au nombre de changements de signe sur la première colonne.

**Remarque :**

1 - si au cours de calcul on trouve un zéro dans la première colonne seulement on le remplace par un  $\varepsilon \ll 1$  et on continue le calcul. Pour l'analyse de stabilité on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0.

2 - L'obtention des zéros sur une ligne entière correspond à une paire de pôles imaginaires conjugués.

**Exemple 1 :** soit l'équation caractéristique d'un asservissement

$$E(p) = p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4 = 0$$

La table de Routh correspondante est la suivante :

$p^4$	1	13	4
$p^3$	6	12	0
$p^2$	11	4	0
$p^1$	9.82	0	0
1	4	0	0

Il n'y a pas de changement de signe

D'où La FTBF n'a pas de pôles à partie réelle positive

Le système asservi est stable en boucle fermée

Le critère de Routh est très utile lorsque les coefficients du polynôme sont des paramètres de réglage de l'asservissement.

**Remarque :** le critère mathématique et celui de Routh, sont des critères de stabilité absolue, ils ne permettent pas de préciser les marges de stabilité du système. En d'autres termes, ils n'indiquent pas le degré de stabilité ou d'instabilité.

## II.3 Les Commandes Classiques: [1]

### II.3.1 Le régulateur PID:

Le régulateur PID (Proportionnel Intégral Dérivé) combine les trois modes de correction de Base suivent :

- **P**: le simple gain proportionnel
- **I**: l'effet retard de phase
- **D**: l'effet avance de phase.

Ce régulateur est le plus populaire (et de loin!) dans le milieu industriel est spcialement en aéronautique la on trouve la plupart des avions sont controlés par ces modèles. A ce succès, on peut trouver plusieurs causes:

- sa simplicité (3 paramètres à régler en général)
- sa souplesse: on peut modifier facilement sa structure en fonction de l'application ou des spécifications (on peut faire du PI-D, du I-PD, du PID2, etc...)

Dans son expression la plus simple, la fonction de transfert du PID est donnée par:

$$R(s) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i * p} + T_d * p \right) \quad (\text{II.9})$$

Ou  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  sont respectivement les gains proportionnel, intégral et dérivé.

**Remarque :** le régulateur PID à trouver son limite avec le développement de l'avion vis-à-vis à sa robustesse. Pour cela les constructeurs sont entrain de renouvelés les lois de pilotage en utilisant des lois modernes adaptées aux ces nouvelles générateurs des avions.

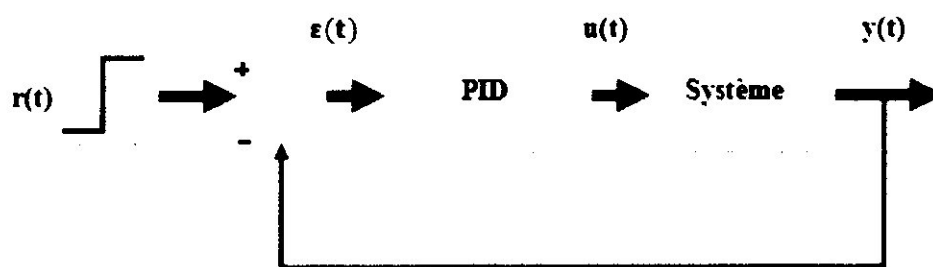


Fig. II.9 - Asservissement par un régulateur PID

## II.4 Les Commandes Moderne : [3]

Dans ce chapitre on a spécifié les commandes optimales suivants :

### II.4.1 La commande LQ : (linéaire quadratique)

#### II.4.1.1 Principe:

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

$x \in \mathcal{R}^n$  : désigne le vecteur d'état

$u \in \mathcal{R}^m$  : désigne le vecteur de commande

$z \in \mathcal{R}^q$  : désigne le vecteur de sortie régulée

La synthèse linéaire quadratique dénommée LQ consiste à la recherche d'une matrice gain  $K_c$ , telle que la commande par retour d'état  $u(t) = -K_c x(t)$  stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$J = \int_0^{\infty} (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (\text{II.11})$$

Où les matrices de pondération  $Q, Q_x, R$  satisfaisant :

$R > 0, Q \geq 0$  et  $Q_x = N^T Q N$ , on peut trouver la matrice de gain  $K_c$  par la relation :

$$K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (\text{II.12})$$

et  $P_c$  solution positive (symétrique) de l'équation de RICCATI :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0 \quad (\text{II.13})$$

**Démonstration :** La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande

$u(t) = -Kx(t)$  obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (\text{II.14})$$

La réponse autonome de  $x(t)$  s'écrit alors :  $x(t) = e^{A_f t} x_0$  avec  $A_f = (A - BK)$  et  $x_0 = x(t=0)$ .

Le critère  $J$  devient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \\ &= \int_0^{\infty} x^T(t)(Q_x + K^T R K)x(t)dt \\ &= x_0^T \left( \int_0^{\infty} e^{A_f t T} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt \right) x_0 \end{aligned}$$

$$J = x_0^T P_c x_0 \quad (\text{II.15})$$

avec :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A_f t} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt . \tag{II.16}$$

La contrainte  $A_f$  stable entraîne que  $P$  vérifie l'équation de LYAPUNOV:

$$A_f^T P + P A_f + Q_x + K^T R K = 0 \tag{II.17}$$

Par ailleurs  $P \geq 0$  car  $J = x_0^T P_c x_0$  et  $J \geq 0 \quad \forall x_0$  (critère quadratique).

Soit  $K_c$  la valeur optimale de  $K$  qui minimise  $J$  et  $P_c$  la solution correspondante de l'équation de LYAPUNOV II.17, soit :

$$(A - BK)^T P_c + P_c (A - BK) + Q_x + K^T R K = 0 \tag{II.18}$$

$$K_c = R^{-1} B^T P_c . \tag{II.19}$$

Si on reporte cette équation dans l'équation II.18, nous obtenons l'équation de RICCATI de commande :

$$P_c A + A^T P_c - B P_c R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0 \tag{II.20}$$

**Remarque :** on peut retrouver directement l'équation de LYAPUNOV en boucle fermée II.18 à partir de l'équation de RICCATI en boucle ouverte II.20 et de II.19. Il suffit de rajouter et de retrancher  $B P_c R^{-1} B^T P_c$  dans II.20.

**c- Schéma de Principe:**

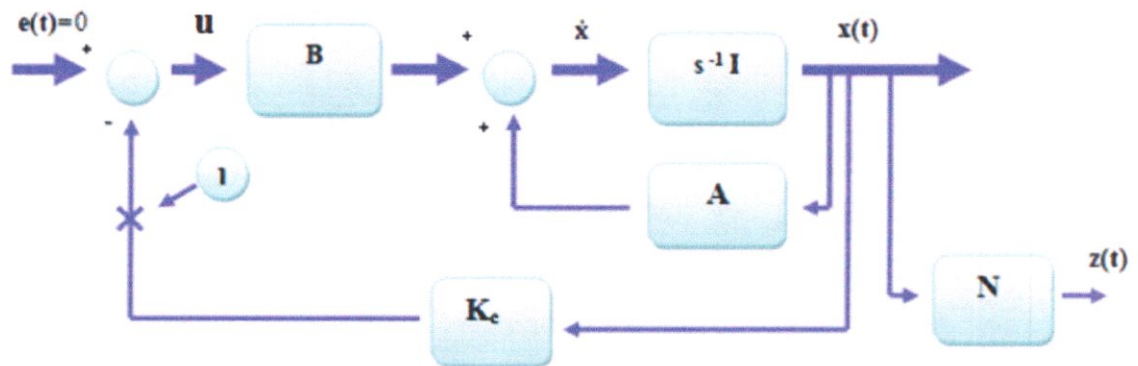


Fig. II.10 - Schéma général de la commande linéaire quadratique.

**Transfert du système :** ( $s$  désigne la variable de LAPLACE).

$$sI \frac{Z(s)}{N} = B u(s) + A \frac{Z(s)}{N}$$

$$\frac{(sI - A)}{N} Z(s) = B u(s)$$

$$G_{zu}(s) = \frac{Z}{U}(s) = N(sI - A)^{-1} B \tag{II.21}$$



Transfert de boucle ouverte corrigée : (on coupe en (1))

$$L_c(s) = K_c(sI - A)^{-1}B \quad (\text{II.22})$$

**d- Robustesse de la commande LQ:**

Le transfert de la boucle ouverte corrigée  $L_c(s)$  vérifie la propriété :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) \quad (\text{II.23})$$

**Démonstration :** en ajoutant et retranchant  $sP_c$  à l'équation de RICCATI (II.20), nous obtenons:

$$N^TQN - P_cBR^{-1}B^TP_c - (-sI - A^T)P_c - P_c(sI - A) = 0 \quad (\text{II.24})$$

En multipliant chaque terme de cette dernière expression, à gauche par  $(sI - A^T)^{-1}B^T$  et à droite par  $(sI - A)^{-1}B$  nous obtenons :

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}N^TQN(sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}P_cBR^{-1}B^TP_c(sI - A)^{-1}B - B^T(sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}BP_c = 0$$

En tenant compte de la définition de  $G_{zu}$  en (II.21) et du fait que  $K_c = R^{-1}B^TP_c$  nous

$$G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) - L_c^T(-s)RL_c(s) - RL_c(s) - L_c^T(-s)R = 0 \quad (\text{II.25})$$

Obtenons : que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s)$$

Dans le cas mono-variable, on obtient :

$$1 + |L_c(jw)| \geq 1 \text{ Ou } |S_u(jw)| \leq 1, \forall w.$$

La figure II.14 illustre cette propriété dans le plan de Nyquist. Il en résulte des marges de stabilité confortables : Marge de gain  $\notin [0.5; +\infty]$  Marge de phase  $\notin [-60; +60^\circ]$

Cette propriété n'est plus vérifiée pour les synthèses LQ dont le critère tient compte de pondérations

$$\text{croisées état/commande : } J = \int_0^\infty (x^T Q_x x + 2x^T S_u + u^T R u) dt \quad (\text{II.26})$$

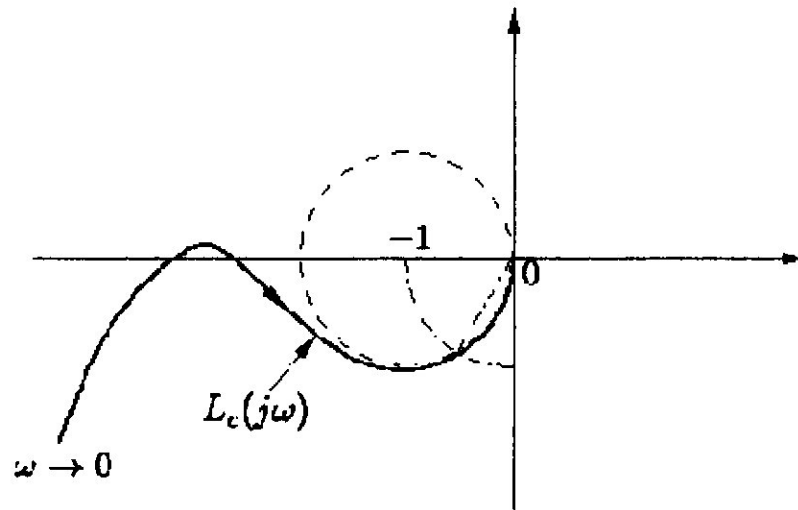


Fig. II.11 - Lieu de NYQUIST de la fonction de transfert de boucle LQ.

### II.4.2 La commande LQG:

#### II.4.2.1 Principe général de la commande LQG:

Considérons le système linéaire d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Mw \\ y = Cx + Du + v \\ z = Nx \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

$x \in \mathcal{R}^n$  : désigne le vecteur d'état

$u \in \mathcal{R}^m$  : désigne le vecteur de commande

$z \in \mathcal{R}^q$  : désigne le vecteur de sortie régulée

$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$

Ou  $w$  et  $v$  représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance  $W$  et  $V$ .

$$E[w(t)w(t + \tau)^T] = W\delta(\tau) \quad E[v(t)v(t + \tau)^T] = v\delta(\tau) \quad E[w(t)v(t + \tau)^T] = 0 \quad (\text{II.28})$$

Avec :  $W \geq 0$  ou  $V > 0$

On note aussi  $W_x = MWM^T$  la matrice de covariance du bruit d'état.

A partir du vecteur  $y$  de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right] \quad (\text{II.29})$$

ou  $z = Nx$  désigne le vecteur à réguler et  $Q$  et  $R$  deux matrices de pondération avec, comme précédemment,

$$Q = Q^T \geq 0 \quad \text{et} \quad R = R^T > 0$$

La solution de ce problème s'appuie sur le principe de séparation qui établit que la commande optimale est obtenue.

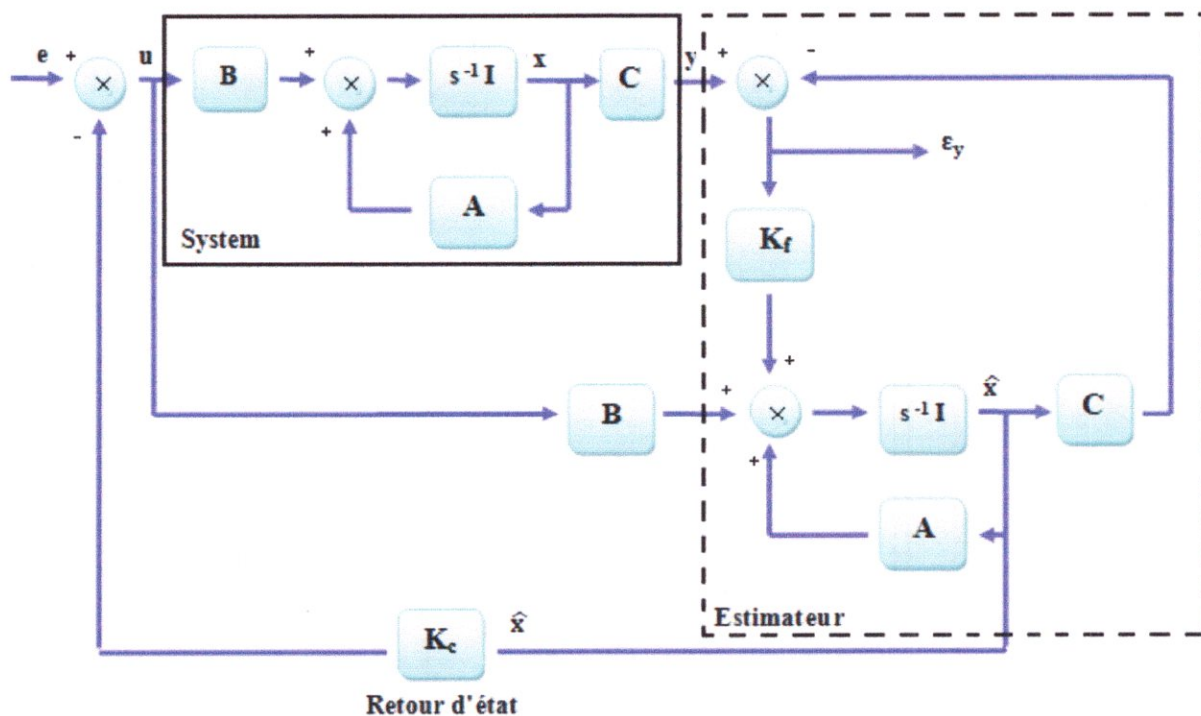


Fig. II.12 - La structure du correcteur LQG (la transmission directe D n'est pas représentée pour des raisons de clarté).

a) en recherchant l'estimé optimal  $\hat{x}$  (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état  $x$  par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état  $x$  par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet  $A, MW^{1/2}$  et  $C$ , soit détectable et stabilisable.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du)$$

Avec:

$K_f = P_f C^T V^{-1}$  ou  $P_f$  obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + M W M^T = 0 \tag{II.30}$$

Avec  $P_f = P_f^T > 0$

— b) en employant cet estime comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit (si  $A, B, Q^{1/2}N$  est détectable et stabilisable) :

$$u = K_c \hat{x}$$

avec :

$$\begin{cases} K_c = R^{-1} B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0 \end{cases} \tag{II.31}$$

La figure II.16 représente la structure du correcteur LQG dans le boucle de régulation.

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f DK_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

### II.5.2.2 Propriétés:

On peut montrer que la représentation d'état du transfert en boucle fermée entre  $e$  et  $\varepsilon_y$  s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{x}} \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c & B \\ 0 & A - K_f C & 0 \\ 0 & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon_x \\ e \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Où  $\varepsilon_x = x - \hat{x}$  désigne l'erreur d'estimation de l'état.

A partir de cette représentation, le principe de séparation apparaît clairement et peut être formulé de la façon suivante :

- les valeurs propres de la boucle fermée peuvent être séparées selon les  $n$  valeurs propres du retour d'état  $\text{spec}(A - BK_c)$  et les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation  $\text{spec}(A - CK_f)$ ,
- les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation sont ingouvernables par  $e$ ,
- les  $n$  valeurs propres du retour d'état sont inobservables par  $\varepsilon_y$

Le transfert de  $e$  vers  $\varepsilon_y$  est donc toujours nul.

### II.4.2.3 Synthèse LQG/LTR:

L'objectif de la procédure de réglage LTR est d'augmenter les marges de stabilité "idéale" du retour d'état de la commande LQ (du filtre de KALMAN).

#### a- Hypothèses d'application:

Le système strictement propre défini par la représentation (A, B, C et D) vérifie :

- $D = 0$  (strictement propre),
- $C(sI - A)^{-1}B$  à minimum de phase (pas de zéros instables),
- nombre égal d'entrées et de sorties.

#### b- Recouvrement en entrée:

La procédure de synthèse LQG/LTR consiste à :

a) Synthétiser, dans une première étape, le correcteur LQ par un choix approprié des pondérations  $Q_x$  et  $R$  obéissant aux exigences du cahier des charges. Les aspects de cette première synthèse concernent le comportement basse fréquence des valeurs singulières du transfert  $-K_c(-sI - A)^{-1}B$ , les fréquences de coupures correspondantes, l'affaiblissement haute fréquence, etc ...

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal  $W_{x0}$  et  $V_0$  du filtre de KALMAN, on augmentera le paramètre  $q$  du nouveau réglage :

$$W_x = W_{x0} + qBB^T, V = V_0 \quad (\text{II.34})$$

Jusqu'à ce que le transfert de boucle  $K(s)G(s)$  du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle de retour d'état LQ :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) = -K_c(-sI - A)^{-1}B \quad (\text{II.35})$$

### c- Recouvrement en sortie:

a) Synthétiser le filtre de KALMAN en manipulant les covariances  $W_x$  et  $V$  afin que le transfert  $-C(sI - A)^{-1}K_f$  soit satisfaisant à la sortie du système.

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal  $Q_{x0}$  et  $R_0$  du retour d'état

LQ, on augmentera le paramètre  $q$  du nouveau réglage :

$$Q_x = Q_{x0} + qC^T C, R = R_0 \quad (\text{II.36})$$

Jusqu'à ce que le transfert de boucle  $G(s)K(s)$  du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle du filtre de KALMAN :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} G(s)K(s) = -C(sI - A)^{-1}K_f \quad (\text{II.37})$$

La figure II.15 visualise l'effet du paramètre  $q$  (noté  $a$  sur la figure) sur le lieu de black du gain de boucle  $K(s)G(s)$  (recouvrement en entrée).

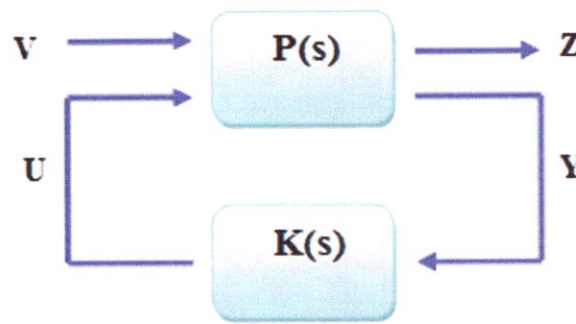
## II.4.3 Synthèse de contrôleurs $H_\infty$ : [4]

Les méthodes  $H_\infty$  ont été étudiées par de nombreux chercheurs, et peuvent être abordées de différentes façons. Nous définirons tout d'abord le problème  $H_\infty$  standard, puis nous étudierons succinctement le choix des fonctions de pondération à travers la mise en forme du problème  $H_\infty$ .

### II.4.3.1 Présentation du problème $H_\infty$ standard :

Il consiste avant tout en un problème de réjection de perturbations, c'est-à-dire en la minimisation de l'influence de signaux d'entrée perturbateurs sur la sortie du système. Cette tâche est accomplie par le correcteur, qui, ayant accès à l'observation de certains signaux de sortie, élabore une loi de commande adéquate pour corriger le système.

Considérons le schéma de la figure (II.13), où  $V$  représente un vecteur de signaux de référence ou de perturbation,  $Z$  un vecteur contenant les signaux à surveiller,  $u$  la commande du système et  $Y$  le vecteur des sorties mesurées ou observées, et  $V(s)$ ,  $Z(s)$ ,  $U(s)$ ,  $Y(s)$  leurs transformées de Laplace respectives.

Fig. II.13 - Problème  $H_\infty$  standard

La matrice de transfert  $P(s)$  reliant  $V(s)$ ,  $U(s)$ ,  $Z(s)$  et  $Y(s)$  s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} V(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

la fonction de transfert de  $V$  à  $Z$  est donnée par :

$$Z(s) = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})V(s) = F_1(P, K)V(s) \quad (\text{II.39})$$

où  $F_1(P, K)$  est la transformée linéaire fractionnelle (LFT) du système. L'indice « 1 »,

pour l'anglais « lower », rappelle que le correcteur  $K(s)$  boucle le système à partir des entrées et sorties inférieures de  $P(s)$ .

Comme nous voulons minimiser l'influence des entrées  $V(t)$  sur certains signaux choisis, regroupés dans le vecteur  $z(t)$ , l'objectif est alors de minimiser la norme :

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} = \|F_1(P, K)\|_\infty \quad (\text{II.40})$$

et la synthèse du correcteur  $K$  peut alors être formulé comme suit :

**Problème  $H_\infty$  standard** : Étant donné un système  $P(s)$  et un réel  $\gamma > 0$ , trouver un compensateur  $K(s)$  qui stabilise intérieurement le système et assure :  $\|F_1(P, K)\|_\infty < \gamma$

Un autre problème  $H_\infty$ , dit optimal, consiste à minimiser  $\|F_1(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs  $K(s)$  qui stabilisent intérieurement le système ; le minimum  $\gamma_{\text{opt}}$  sera alors nommé « gain  $H_\infty$  optimal ». À noter qu'une autre approche est de considérer comme critère  $\gamma \|F_1(P, K)\|_\infty < 1$ , ce qui donne comme valeur maximale de la norme  $1/\gamma$ , et non plus  $\gamma$  : la fonction **MATLAB hinfopt**, que nous utiliserons ultérieurement pour la synthèse des contrôleurs, utilise cette approche.

**II.4.3 .2 Résolution du problème  $H_\infty$ :****a- Hypothèses :**

Soit le schéma de la figure (II.13) et une réalisation minimale  $(A, B, C, D)$  du système  $P(s)$  :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 \ B_2] \quad (\text{II.41})$$

où, si l'on considère le système d'ordre  $n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times n}$ ,  $D_{11} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_1}$ ,  $D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$ ,  $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$ ,  $D_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}$ . Cette réalisation permet d'écrire le modèle associé dans l'espace d'état suivant, avec  $x$  comme vecteur d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 v(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} v(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} v(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

où les dimensions des vecteurs sont :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ , et

$y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ ; on supposera que  $m_1 > p_2$  et  $p_1 > m_2$ .

Avec ces notations, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites avant d'appliquer l'algorithme :

**(H1)**  $(A, B_2, C_2)$  stabilisable et détectable : ceci est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un compensateur stabilisant internement le système,

**(H2)** les matrices  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont de plein rang :

$$\text{rang}(D_{12}) = m_2 \text{ et } \text{rang}(D_{21}) = p_2$$

**(H3)**  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire ; la formulation mathématique de ces hypothèses de régularité est la suivante :

$$\text{Pour tout } \omega \in \mathbb{R}, \text{rang} \left( \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2,$$

$$\text{et: } \text{rang} \left( \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2 \quad (\text{II.43})$$

Deux hypothèses supplémentaires, dites de normalisation, simplifient la résolution mais ne lui sont pas nécessaires ; elles peuvent d'ailleurs toujours être satisfaites par des transformations appropriées, étudiées entre autre par Safonov, Limebeer et Chiang. Les voici :

**(H4)**  $D_{11} = 0$  et  $D_{22} = 0$ ,

$$\text{(H5)} \quad D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I_{m_2}] \text{ et } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix}$$

**b- Solution au problème  $H_\infty$ :**

Avec ces hypothèses vérifiées, les deux théorèmes suivants fournissent une solution au problème standard :

**Théorème 1:**

Le système défini par le modèle d'état (II.42), vérifiant les hypothèses (H1)-(H5) ci-dessus peut être stabilisé par un compensateur  $K(s)$  assurant:

$$\|F_1(P, K)\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) les matrices

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C_1^TC_1 & -A^T \end{bmatrix} \text{ et } L_\gamma = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

n'ont pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire,

(ii) Les équations de Riccati :

$$XA + A^TX + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^TC_1 = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$YA^T + YA + Y(\gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2)Y + B_1B_1^T = 0 \quad (\text{II.46})$$

ont chacune une solution définie positive, respectivement  $X_\gamma$  et  $Y_\gamma$ ,

(iii) la plus grande valeur propre du produit  $X_\gamma Y_\gamma$  est inférieure à  $\gamma^2$  :

$$\lambda_{\max}(X_\gamma Y_\gamma) \leq \gamma^2$$

Le second théorème, énoncé ci-dessous, fournit des formules explicites pour une solution particulière du problème de paramètre  $\gamma$  :

**Théorème 2 :** Sous les conditions du théorème 1, un compensateur  $K(s)$  stabilisant le système  $P(s)$  et satisfaisant :

$$\|F_1(P, K)\|_\infty < \gamma$$

est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

avec :

$$A_c = A + \gamma^{-2}B_1B_1^T X_\gamma - B_2B_2^T X_\gamma - Z_\gamma Y_\gamma C_2^T C_2$$

$$B_c = Z_\gamma Y_\gamma C_2^T$$



$$C_c = -B_2^T X_\gamma \text{ et } Z_\gamma \triangleq (I - \gamma^{-2} Y_\gamma X_\gamma)^{-1} \quad (\text{II.48})$$

Cette solution particulière du problème  $H_\infty$  est appelée **compensateur central**.

### c- Algorithme de $\gamma$ -itération:[7]

Nous pouvons faire deux remarques sur la solution particulière donnée au théorème 2 : d'abord le correcteur obtenu est strictement propre et a le même ordre que le système (II.42), qui représente, comme nous allons le voir, le système à réguler - l'avion dans notre cas - augmenté de différentes fonctions de pondération. Ensuite, la valeur optimale  $\gamma_{opt}$  de  $\gamma$  en dessous de laquelle l'une des conditions du théorème 1 n'est plus satisfaite constitue la valeur minimale de la norme  $\|F_1(P, K)\|_\infty$ .

Cette dernière remarque suggère un algorithme permettant d'approcher par dichotomie la valeur optimale, et d'obtenir ainsi un correcteur proche du correcteur optimal du problème standard : cet algorithme est appelé une  $\gamma$ -itération. En voici les principales étapes :

1. choisir deux valeurs  $\gamma_{inf}$  et  $\gamma_{sup}$  et une tolérance  $\eta$ ; la valeur de  $\gamma_{inf}$  doit être telle que si l'une des conditions du théorème 1 n'est pas vérifiée pour  $\gamma = \gamma_{inf}$  alors elles doivent toutes l'être pour  $\gamma = \gamma_{sup}$ ,

2. tester les conditions (i) à (iii) pour la nouvelle valeur :

$$3. \quad \gamma = \frac{\gamma_{sup} + \gamma_{inf}}{2}$$

choisir  $\gamma = \gamma_{sup}$  et garder  $\gamma_{inf}$  si elles sont vérifiées, sinon prendre  $\gamma_{inf} = \gamma$  et garder  $\gamma_{sup}$ ,

4. si la différence entre les deux dernières valeurs calculées de  $\gamma$  est supérieure à  $\eta$ , retourner à l'étape 2,

5. calculer le compensateur central pour la valeur de  $\gamma$  ainsi obtenue et vérifiant les conditions (i) à (iii).

En général, l'optimum est caractérisé par l'égalité de la plus grande valeur propre du produit  $Y_\gamma X_\gamma$  avec  $\gamma^2$  ; ceci entraîne la singularité des formules de calcul (II.48) du compensateur central  $K_c(s)$ , puisque  $Y_\gamma X_\gamma$  avec  $\gamma^2$  n'est plus inversible.  $K_c$  tend alors du vers un compensateur d'ordre réduit, la chute d'ordre étant égale à la chute de rang de  $-\gamma^{-2} Y_\gamma X_\gamma$ .

Nous allons maintenant voir comment obtenir le système augmenté  $P(s)$  en ajoutant des pondérations sur les signaux à surveiller, et comment choisir ces signaux et pondérations : c'est l'objet du paragraphe suivant, où nous choisissons de traiter le problème de la sensibilité mixte, facilement généralisable.

Le problème standard sans pondération consisterait à trouver un critère  $\gamma$  et un correcteur  $K(s)$  tel que l'on ait :  $\| \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \|_{\infty} < \gamma$  (II.50)

Cependant ce problème manque de souplesse, puisqu'il impose des contraintes beaucoup trop conservatrices sur l'ensemble du spectre fréquentiel des fonctions  $S$  et  $T$ . En effet, la valeur singulière  $\sigma_{max}(S(j\omega))$  doit généralement être faible à basse fréquence, par exemple pour réduire l'erreur statique, et  $\sigma_{max}(T(j\omega))$  faible à haute fréquence pour minimiser l'influence des perturbations sur la sortie. La relation fondamentale  $I = S(s) + T(s)$  est contradictoire avec cet objectif : nous allons donc rechercher un compromis en introduisant des pondérations dans le domaine fréquentiel, qui seront des gabarits pour ces fonctions, comme le montre la figure (II.16).

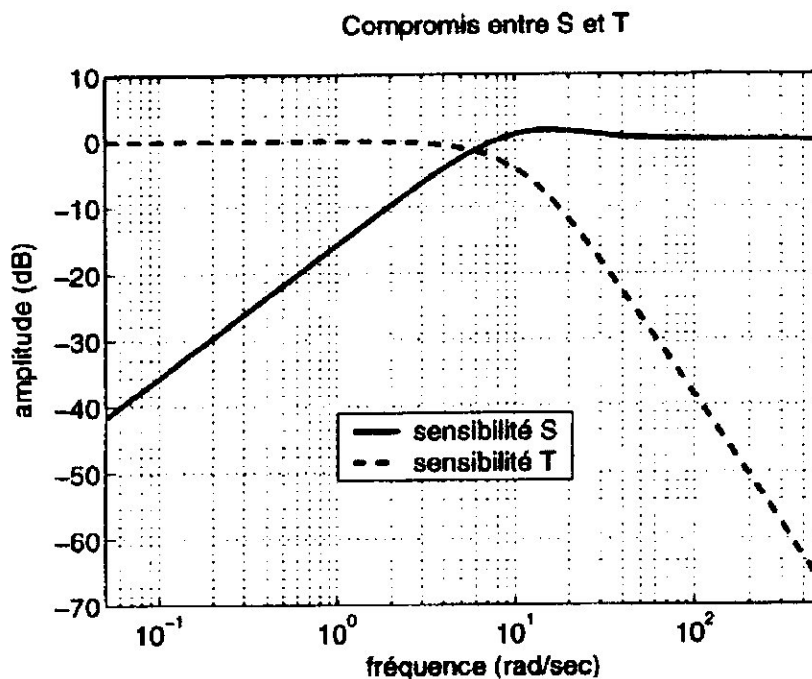


Fig. II.16 - Valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité  $S$  et  $T$

Remarquons que les contraintes s'appliqueront sur les valeurs singulières minimales  $\sigma_{min}(S(j\omega))$  en haute fréquence et  $\sigma_{min}(T(j\omega))$  en basse fréquence :

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \ll 1 \text{ en basses fréquences}$$

$$\sigma_{max}(T(j\omega)) \ll 1 \text{ en hautes fréquences}$$

**b- Ajout des pondérations au niveau de  $H_{\infty}$  :**

Nous appliquons donc cette stratégie, en affectant des gabarits à certains transferts, tels que la sensibilité  $S$  ou la sensibilité complémentaire  $T$ . Ainsi :

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \text{ soit } \|W_1 S\|_{\infty} \leq \gamma \tag{II.51}$$

$$\sigma_{max}(T(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \text{ soit } \|W_2 T\|_{\infty} \leq \gamma \tag{II.52}$$

Chapitre III:  
Modélisation  
longitudinal d'un  
avion

### III.1 Introduction :

Ce chapitre comporte deux parties : la première partie (repérage de l'avion dans l'espace) et la seconde partie (Modèle longitudinal de la dynamique de l'avion).

La première définit les repères et notations utiles au repérage de l'avion dans l'espace, pour que les développements des chapitres suivants soient clairs.

La seconde présente le modèle théorique non linéaire d'un avion, puis le modèle linéarisé du vol longitudinal ; ils seront ensuite appliqués au *Boeing 747*.

### III.2. Repérage de l'avion dans l'espace :

Dans cette première partie nous allons définir les outils nécessaires au repérage d'un avion dans l'espace, non seulement en position, mais aussi en orientation. Pour ce faire, il va falloir définir les repères permettant de situer l'avion par rapport à la terre, et par rapport à un référentiel inertiel, dans lequel nous pourrions appliquer les équations de la mécanique. Puis nous définirons les angles caractéristiques de l'orientation de l'avion avec les relations qui les lient.

#### III.2.1 Repères de base :

Voici les repères utiles que nous allons utiliser pour mettre le système en équation : chacun d'entre eux permet de localiser l'aéronef, sa direction et sa vitesse par rapport à la terre, mais ils correspondent à des objectifs différents :

**le repère NED**  $R_0$  (« North-East-Down »)  $(\vec{x}_{ned}, \vec{y}_{ned}, \vec{z}_{ned})$ , a comme origine l'intersection de la verticale du lieu où se trouve l'avion et de la surface de la terre, et son axe  $\vec{z}_{ned}$  est dirigé et orienté par le vecteur d'accélération de la gravité  $\vec{g}$  vers le centre de la terre. Ses axes  $\vec{x}_{ned}, \vec{y}_{ned}$ , pointent respectivement vers le nord et l'est, vus de l'avion .

**Le repère « avion »**  $R_a (\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  a comme origine le centre de gravité de l'avion, et son axe  $\vec{x}_a$  pointe vers l'avant, dans la direction du fuselage. L'axe  $\vec{z}_a$  est dans le plan de symétrie vertical de l'avion, orienté vers le ventre de l'avion, et l'axe  $\vec{y}_a$ , complète le trièdre direct, c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire au plan de symétrie et orienté vers la droite, point de vue « pilote ». Ce repère sera utilisé pour étudier le mouvement de l'avion.

**Le repère de stabilité, ou aérodynamique**  $R_s (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  a la même origine  $G$  que les deux précédents,  $\vec{x}_s$  est porté et orienté par le vecteur vitesse  $V$  de l'avion,  $\vec{z}_s$  est dans le plan de symétrie  $\vec{x}_a, \vec{z}_a$  et perpendiculaire à  $\vec{x}_s$ , et  $\vec{y}_s$  complète le trièdre direct.

Les figures suivantes illustrent ces trois repères  $R_o$ ,  $R_a$  et  $R_s$ , et serviront à définir les angles caractéristiques à la section suivante. La première (III.1) montre le repère NED et le repère avion, ainsi que les angles d'Euler :  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\Phi$  :

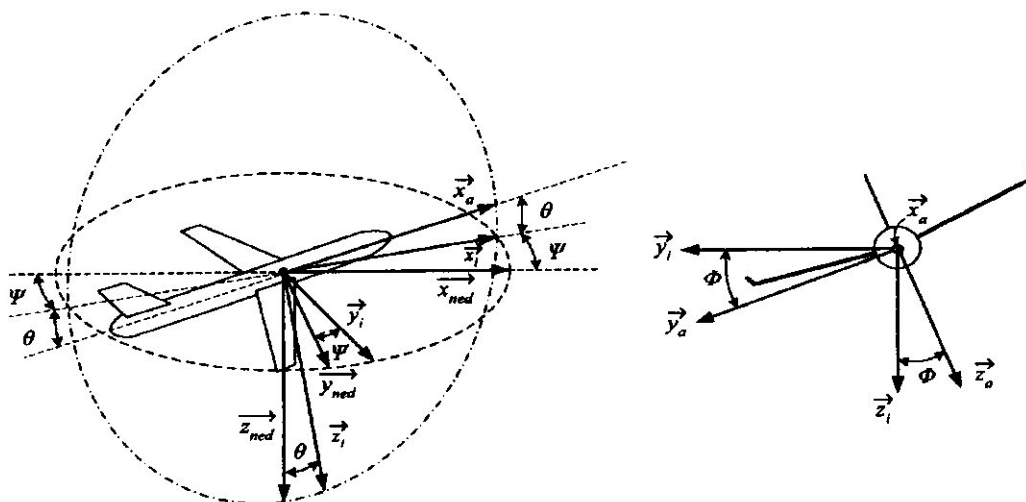


Fig. III.1 –placement des repères  $R_o$  et  $R_a$  par rapport à l'avion.

Où  $\vec{x}_i, \vec{y}_i$  et  $\vec{z}_i$  sont des vecteurs intermédiaires et où les deux cercles représentent le plan horizontal contenant les vecteurs  $\vec{x}_{ned}$ ,  $\vec{x}_i$  et le plan vertical contenant les vecteurs  $\vec{z}_{ned}$  et  $\vec{z}_i$ . La position courante de l'avion est le résultat de trois rotations successives, qui seront étudiées plus en détail au paragraphe suivant:

- une première rotation définie par l'angle d'azimut  $\psi$  et l'axe  $\vec{z}_{ned}$  qui transforme  $\vec{x}_{ned}$  en  $\vec{x}_i$  et  $\vec{y}_{ned}$  en  $\vec{y}_i$ ,
- une deuxième rotation définie par l'angle d'assiette  $\theta$  et d'axe  $\vec{y}_i$  qui transformez  $\vec{x}_i$  en  $\vec{x}_a$  et  $\vec{z}_{ned}$  en  $\vec{z}_i$ .
- une troisième rotation définie par l'angle de gîte qui transforme  $\vec{y}_i$  en  $\vec{y}_a$  et  $\vec{z}_i$  en  $\vec{z}_a$

la seconde figure (III-2) représente le repère de stabilité  $R_s$  par rapport au repère avion  $R_a$ , et définit d'une part l'incidence (ou l'angle d'attaque)  $\alpha$  comme l'angle formé par  $\vec{x}_a$  et  $\vec{x}_s$  et d'autre part le dérapage  $\beta$  comme l'angle formé par  $\vec{x}_s$  et  $\vec{V}$ , si on note  $\vec{x}_s$  la projection du vecteur vitesse  $\vec{V}$  sur le plan  $(\vec{x}_a, \vec{z}_a)$ .

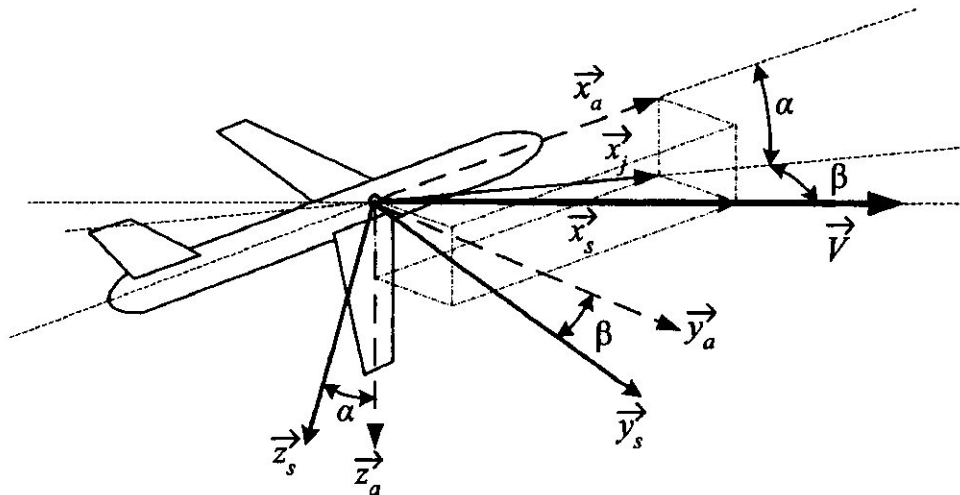


Fig. III.2 - Les repères avion  $R_a$ , et de stabilité  $R_s$ .

Nous verrons au début de deuxième partie que le repère  $R_0$  est considéré être en translation par rapport à la terre, et que nous pouvons donc y écrire le principe fondamental de la dynamique.

Voyons maintenant comment situer  $R_0$ ,  $R_a$  et  $R_s$ , entre eux, en définissant les angles entre les repères.

### III.2.2 Angles entre les repères :

Ayant défini plusieurs repères fondamentaux, on s'intéresse ici à leurs positions relatives, que l'on va définir au moyen d'angles caractéristiques. Les solutions n'étant pas uniques, celles qui sont présentées sont les plus couramment utilisées.

#### III.2.2.1 passage du repère ned $R_0$ au repère avion $R_a$ :

Nous souhaitons positionner  $R_a$ , par rapport à  $R_0$  ; comme ces repères ont la même origine, trois rotations fondamentales suffiront à fournir le positionnement désiré. Les voici avec les trois angles et axes correspondants, dont l'illustration est donnée à la figure (III.1):

- première rotation, dont l'angle est l'azimut  $\psi$  et l'axe  $\vec{z}_{ned}$ .
- deuxième rotation, dont l'angle est l'assiette  $\theta$  et l'axe  $\vec{y}_1$ .
- troisième rotation, dont l'angle est la gîte  $\phi$  et l'axe  $\vec{x}_a$ .

Le tableau III.1 résume les valeurs extrêmes usuelles pour ces trois angles, évitant plusieurs

représentations pour un même point.

Tab. III.1 - Valeurs limites des angles d'Euler.[10]

Angle	Valeur min.	Valeur max.
$\psi$	$-\pi$	$\pi$
$\theta$	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\phi$	$-\pi$	$\pi$

Chacune des rotations précédentes est caractérisée géométriquement par une matrice 3 x 3; on cherche alors à obtenir la matrice globale de rotation, c'est-à-dire la matrice de passage de  $R_0$  à  $R_a$  égal  $R_{0 \rightarrow a}$ . Si  $R_\psi$ ,  $R_\theta$ ,  $R_\phi$  sont les matrices de rotation correspondant aux transformations d'Euler ci-dessus, on obtient l'orientation E de  $R_a$  par rapport à  $R_0$  en effectuant leur produit dans l'ordre des transformations comme indiqué à l'équation (III.1) :

$$E = R_\psi * R_\theta * R_\phi \quad (III.1)$$

où E est appelée la « Matrice d'Euler ». Son expression est la suivante, en fonction des angles d'Euler

$$E = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (III.2)$$

La matrice de passage cherchée s'écrit donc suivant l'équation (I.3) :

$$R_{0 \rightarrow a} = E \quad (III.3)$$

Ainsi, si  $\vec{x}_a$  est un vecteur de l'espace  $\overline{x}_a$ , son expression dans le repère avion  $R_a$  et  $\vec{x}_0$  son expression dans le repère  $R_0$ , la relation les reliant est la suivante :

$$\vec{x}_a = R_{0 \rightarrow a} \vec{x}_0 \quad (III.4)$$

Une matrice de rotation étant orthogonale, son inverse est égale à sa transposée ; on aura donc :

$$R_{a \rightarrow 0} = R_{0 \rightarrow a}^T.$$

### III.2.2.2 Équations auxiliaires :

Dans ce paragraphe, nous allons définir les vitesses de rotation de l'avion

- en roulis P autour de l'axe  $\vec{x}_a$ ,
- en tangage Q autour de l'axe  $\vec{y}_a$ ,

- en lacet  $R$  autour de l'axe  $\overline{za}$

et les exprimer en fonction des vitesses angulaires des angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\Phi$  grâce aux équations auxiliaires.

Les rotations d'angles  $\theta$  et  $\psi$  se font respectivement autour d'axes que l'on exprime dans le repère NED  $R_0$ , tandis que  $\Phi$  s'effectue autour de l'axe  $\overline{xa}$  du repère avion  $R_a$ . On en déduit la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{0 \rightarrow a} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

L'angle  $\psi$  correspond au cap suivi par l'avion, et ne présente donc pas d'intérêt dans notre étude du modèle mécanique, puisque nous ne nous intéressons pas à l'aspect « navigation » : on pose ainsi arbitrairement  $\psi = 0$ . L'expression (III.1) de la matrice d'Euler et l'équation (III.5) se simplifient donc pour obtenir le système de trois équations (III.6) suivant :

$$\begin{cases} P = \dot{\Phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ Q = \dot{\theta} \cos \Phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \Phi \\ R = -\dot{\theta} \sin \Phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \Phi \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Cependant, on aura accès de préférence aux vitesses de rotation dans le repère avion  $P$ ,  $Q$  et  $R$  au moyen de capteurs, d'où l'équation suivante (III.7), inverse de la relation (III.6):

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \theta & \cos \Phi \tan \theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \text{ avec } |\theta| \neq \pi/2 \quad (\text{III.7})$$

Les relations (III.6) et (III.7) permettent ainsi d'exprimer les vitesses de rotation de l'avion  $P$ ,  $Q$  et  $R$  en fonction des vitesses de rotation des angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\Phi$ , et réciproquement.

Étudions maintenant le passage des repères  $R_a$ , à  $R_s$ .

### III.2.2.3 Passage du repère $R_a$ au repère de stabilité $R_s$ :

Nous souhaitons maintenant positionner  $R_s$  par rapport à  $R_a$  ; ces repères ont la même origine, mais contrairement au cas du paragraphe III.2.2.1, deux rotations successives, illustrées à la figure (III.2), suffisent à passer d'un repère à l'autre :

Première rotation, par rapport à l'axe  $\overline{y_a}$  avec un angle d'incidence  $\alpha$ ,

Seconde rotation, par rapport à l'axe  $\overline{z_s}$  avec un angle de dérapage  $\beta$ .



En utilisant la même méthode qu'au paragraphe III.2.2.1, on veut obtenir la matrice de passage  $R_{a \rightarrow s}$ , de  $R_a$  à  $R_s$ . Notons  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  les matrices de rotation correspondant aux transformations ci-dessus ; compte tenu de leur chronologie, l'orientation de  $R_s$  par rapport à  $R_a$  est le produit des transformations comme indiqué à l'équation (III.8):

$$R_{a \rightarrow s} = R_\beta * R_\alpha \quad (\text{III.8})$$

La matrice de passage cherchée s'écrit suivant l'équation (III.9):

$$R_{a \rightarrow s} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

et on a de même que précédemment  $R_{s \rightarrow a} = R_{a \rightarrow s}^T$ .

Si  $\vec{x}$  est un vecteur de l'espace,  $\vec{x}_s$ , son expression dans le repère de stabilité  $R_s$  et  $\vec{x}_a$  son expression dans le repère avion  $R_a$ , la relation les reliant est la suivante :

$$\vec{x}_s = R_{a \rightarrow s} \vec{x}_a \quad (\text{III.10})$$

### III.2.3 Mouvement de l'avion en translation :

#### III.2.3.1 Décomposition du vecteur vitesse de l'avion :

L'avion se déplace dans un espace à trois dimensions ; cet espace est rempli de l'air de l'atmosphère, qui n'est pas immobile à cause de nombreux effets climatiques. L'avion se déplace donc par rapport à ces masses d'air en mouvement, qui elles-mêmes se déplacent par rapport à un repère.

Notons  $\vec{V}_V^T$  le vecteur vitesse vent par rapport à la terre, et  $\vec{V}$  le vecteur vitesse aérodynamique de l'avion par rapport au vent. Le vecteur  $\vec{V}_a^T$  vitesse de l'avion par rapport à la terre est défini par :

$$\vec{V}_a^T = \vec{V} + \vec{V}_V^T \quad (\text{III.11})$$

Nous ne tiendrons pas compte du vent dans la modélisation, de telle manière que  $\vec{V}_a^T = \vec{V}$ .

#### III.2.3.2 Mouvement longitudinal de l'avion :

Nous donnerons les hypothèses du vol longitudinal au deuxième partie ; cependant, nous considérerons dans ce paragraphe que le mouvement est longitudinal de l'avion, soit  $\beta = 0$ , et que le cap suivi par

l'avion est  $\psi = 0$ . Nous référant à la figure (III.3), et connaissant le vecteur vitesse  $\vec{V}$  de l'avion, colinéaire à  $\vec{x}_s$ , nous pouvons observer trois angles, dont deux que nous avons déjà rencontré

- l'angle d'incidence ou d'attaque  $\alpha$ , entre  $\vec{x}_a$  et le vecteur vitesse  $\vec{V}$ .
- l'angle de pente  $\gamma$ , entre  $\vec{V}$  et  $\vec{x}_{ned}$
- l'angle d'assiette  $\theta$ , somme des deux précédents.

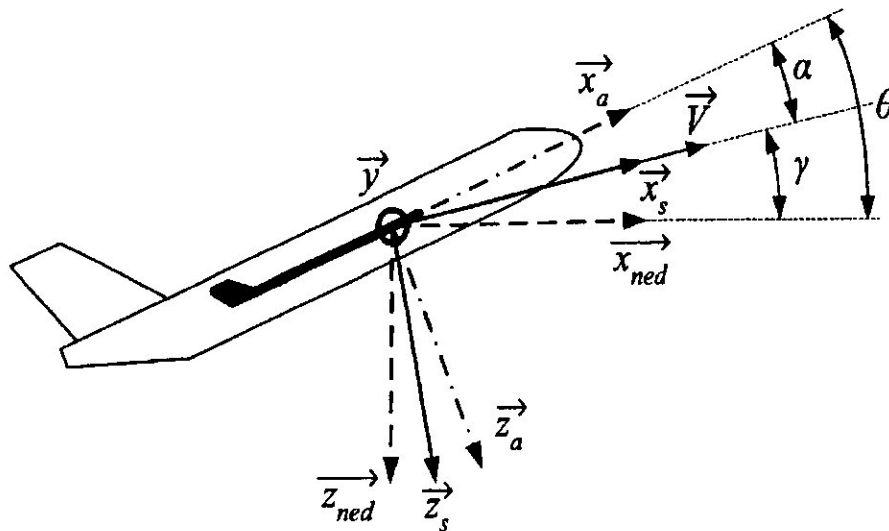


Fig. III. 3 - Les repères et angles caractéristiques du mouvement longitudinal.

### III.2.3.3 Relations dans le repère avion:

Dans ce paragraphe, nous allons donner les relations utiles entre les angles définis précédemment et le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et ses projections sur les axes du repère avion  $\mathbf{R}_a$ . Ces projections sont définies par la relation (III.12) :

$$\vec{V} = U_x \cdot \vec{x}_a + V_y \cdot \vec{y}_a + W_z \cdot \vec{z}_a \quad (\text{III.12})$$

L'expression du module de  $\vec{V}$  en fonction de  $U_x$ ,  $V_y$  et  $W_z$  est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{U_x^2 + V_y^2 + W_z^2} \quad (\text{III.13})$$

Les composantes  $U_x$ ,  $V_y$  et  $W_z$  s'écrivent en fonction du module  $\|\vec{V}\|$  et des angles  $\alpha$  et  $\beta$  selon l'équation (III.14) suivante (selon la figure III.2) il vient:

$$\begin{cases} U_x = \|\vec{V}\| * \cos\beta \cos\alpha \\ V_y = \|\vec{V}\| * \sin\beta \\ W_z = \|\vec{V}\| \sin\alpha \cos\beta \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Enfin, les angles d'incidence  $\alpha$  et de dérapage  $\beta$  s'expriment à partir des composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  dans le repère avion selon les relations (III.15) et (III.16):

$$\alpha = \text{arc tan} \frac{W_z}{U_x} \quad (\text{III.15})$$

$$\alpha = \text{arc sin} \frac{V_y}{\|\vec{V}\|} \quad (\text{III.16})$$

Nous avons défini dans ce premier partie les repères et les grandeurs utiles au repérage de l'avion dans l'espace, qui vont nous permettre d'écrire les équations mécaniques régissant son mouvement : c'est l'objet de la deuxième partie, dans lequel nous allons obtenir le modèle linéarisé de l'avion autour d'une condition de vol, après avoir fait les hypothèses et simplifications pertinentes en vue de notre étude du vol longitudinal.

### III.3-Modèle longitudinal de la dynamique de l'avion :

Après avoir défini dans la première partie les repères et grandeurs utiles au repérage de l'avion dans l'espace, tout est en place pour écrire les différentes équations issues de la mécanique. Préalablement, un certain **nombre d'hypothèses** simplificatrices sont faites et justifiées sur l'avion et son environnement. Puis **l'étude des forces** s'appliquant à l'aéronef nous amènera aux équations non linéaires complètes, avant de linéariser le modèle du vol longitudinal auquel nous nous intéresserons par la suite.

#### III.3.1.Hypothèse et données par la modélisation :

Cette partie présente les hypothèses que l'on fait dans le but d'obtenir un modèle complet, mais néanmoins suffisamment simple pour demeurer exploitable à des fins de commande.

### III.3.1.1 Hypothèse relatives à l'avion : [5]

Nous allons faire trois hypothèses relatives à l'avion avant d'en donner les principales caractéristiques:

- l'avion est un corps rigide et indéformable : les déformations de sa structure, notamment des ailes qui ont une élasticité plus élevée que le fuselage, sont négligées;
- il possède un plan de symétrie géométrique et mécanique, défini par les vecteurs  $\overline{x}_a$  et  $\overline{z}_a$  du repère  $R_a$  ;
- sa masse en vol est constante - considérant que sa variation est suffisamment faible dans l'intervalle d'étude pour être négligée dans les équations.

La première hypothèse de **rigidité** est bien vérifiée en pratique, puisque même l'étude plus fine des effets de la souplesse de l'avion s'effectue en perturbant le modèle rigide : considérer l'avion comme rigide et indéformable est donc une étape nécessaire.

L'hypothèse de symétrie est naturelle pour un avion commercial ; l'appareil que nous étudions dans notre cas , **Boeing 747** est symétrique.

La dernière hypothèse de **constance de la masse** est justifiée par le calcul suivant : considérons le système {S} composé de l'avion et des gaz éjectés. Sa quantité de mouvement à un instant  $t$  s'écrit dans un repère inertiel :  $p(t) = m(t) V(t)$ . De plus, si l'on note  $\Delta m$  et  $\Delta v$  les variations respectives de la masse  $m$  et de la vitesse  $V$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , alors on peut écrire à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$p(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)(V(t) + \Delta v) + (-\Delta m)(V(t) + v_e) \quad (\text{III.17})$$

où  $v_e$  représente la vitesse d'éjection des gaz et  $-\Delta m$  la masse qui a « quitté » l'avion. Un développement limité au 1er ordre de l'équation (III.17) permet d'exprimer la variation de quantité de mouvement du système  $\Delta p$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ :

$$\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = m\Delta v - v_e\Delta m + \Delta m\Delta v = m\Delta v - v_e\Delta m \quad (\text{III.18})$$

En divisant les termes de l'équation (III.18) par  $\Delta t$ , et en prenant la limite  $dt$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} - v_e \frac{dm}{dt} = \sum F\{S\} \quad (\text{III.20})$$

où  $\sum F\{S\}$  est la somme des forces extérieures appliquées au système {S} défini plus haut. L'équation précédente s'écrit ainsi :

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F\{S\} + v_e \frac{dm}{dt} = \sum F\{S\} + T_e \quad (\text{III.21})$$

Dans l'équation (III.21), le terme  $T_e$  ne correspond qu'à la contribution de la poussée due à l'éjection de la composante  $-\Delta m$  de la masse totale, et devient une force extérieure si l'on considère le système {avion}, de masse constante  $m$  et de vitesse  $V$ .

Nous écrirons donc les équations en considérant la masse  $m$  constante sur l'intervalle d'étude, et la force  $T_e$  extérieure est négligeable ; cette dernière hypothèse, vérifiée dans la pratique, signifie que la poussée due à la seule variation de masse est négligeable ( $\frac{a_m}{a_t}$  est de l'ordre de 0,02% à 0,2% de la masse totale).

### III.3.1.2 Hypothèses relatives à l'environnement terrestre :

Les hypothèses couramment faites sur l'environnement terrestre dans le domaine du vol atmosphérique sont les suivantes :

- la terre est plate et fixe par rapport à un repère galiléen de référence, par exemple le repère ECI (« Earth Centered Inertial »),
- le vecteur gravité  $g$  est constant, vertical et dirigé vers le centre de la terre aux altitudes usuelles de vol (0 à 12 000 m).

La première hypothèse de la **terre plate et immobile** a le grand avantage de considérer tout repère fixe par rapport à la terre comme galiléen : c'est une simplification intéressante puisque nous pourrions écrire les équations de la mécanique dans le repère NED  $R_0$ . Pour pouvoir considérer que la terre est immobile, étudions le rapport entre l'accélération de Coriolis - due à sa rotation - et l'accélération de la pesanteur :

$$\frac{a_{\text{coriolis}}}{g} = \frac{2\Omega_{\text{terre}}V}{g}$$

Où  $\Omega_{\text{terre}}$  est la vitesse de rotation de la terre, et  $V$  la vitesse de l'avion ;  $\Omega_{\text{terre}}$  étant égale à  $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  ce rapport est de l'ordre de 0,4% pour Mach 0,9 à une altitude de 10 000 m, ce qui confirme la validité de cette hypothèse.

L'hypothèse de la terre plate peut également se justifier en calculant la vitesse de rotation du repère NED par rapport à la terre :

$$\Omega_{\text{Ned}/\text{terre}} = \frac{V}{R_{\text{terre}}}$$

qui vaut environ  $4 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  pour une vitesse de Mach 0,9 à une altitude de 10 000 m et le rayon de la terre  $R_{\text{terre}} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Cette vitesse est suffisamment faible pour considérer le repère NED  $R_0$  fixe

par rapport à la terre.

La seconde hypothèse de **constance de l'accélération de la gravité**  $\vec{g}$  simplifie également les équations.

Ces hypothèses étant posées, nous allons exprimer les équations de la mécanique dans le repère **NED**  $R_0$  que l'on retient comme étant galiléen.

### III.3.2 Modèle mécanique de l'avion :

Le mouvement de l'avion dans l'atmosphère est caractérisé par la **translation** de son centre de masse par rapport au repère  $R_0$  d'une part, et d'autre part son **orientation** et sa **vitesse de rotation** autour de son centre de masse. Après avoir défini les caractéristiques mécaniques de l'avion, nous allons pouvoir écrire les deux relations fondamentales de la mécanique caractérisant ce mouvement.

#### III.3.2.1 Caractéristiques de l'avion :

Cette section a pour objet de définir les grandeurs et notations que nous allons utiliser par la suite, pour ce qui concerne :

- les vitesses linéaires et de rotation de l'avion, leurs dérivées,
- les efforts qui sont appliqués à l'avion,
- ses caractéristiques techniques et mécaniques.

En effet, nous allons voir au paragraphe suivant que les équations de la mécanique seront écrites dans le repère **NED**, puis transférées dans les repères avion et de stabilité.

##### A) Données mécaniques de l'avion :

Pour appliquer le théorème de la résultante dynamique, on notera  $m$  la masse de l'avion ; pour appliquer le théorème du moment cinétique, nous aurons besoin de ses données inertielles, regroupées dans la matrice d'inertie  $[I]$ , dont l'expression générale est donnée par la relation suivante :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

L'hypothèse de symétrie de l'avion faite au paragraphe III.3.1.1 permet de simplifier certains termes ; en effet, les produits d'inertie  $I_{xy}$  et  $I_{yz}$  sont nuls du fait de cette symétrie. Justifions rapidement ce résultat par un bref raisonnement qualitatif, en considérant par exemple le terme

$I_{xy} = \int_{\text{avion}} xy \, dm$  : à chaque élément de masse infinitésimale  $dm$  de coordonnées  $(x, y)$  correspond un élément de masse identique en  $(x, -y)$ . On arrive ainsi à la relation :

$$\begin{aligned} \int_{\text{avion}} xy \, dm &= \int_{y \geq 0} xy \, dm + \int_{y < 0} xy \, dm \\ &= \int_{y \geq 0} xy \, dm - \int_{y \geq 0} xy \, dm = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

En appliquant le même résultat au produit d'inertie  $I_{yz} = \int_{\text{avion}} yz \, dm$ , il reste donc finalement :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Voyons maintenant les notations de la cinématique et de la dynamique avant d'écrire les équations.

#### B) Notations :

Le vecteur rotation de l'avion, et donc du repère  $R_a$  par rapport au repère  $R_0$  est noté  $\overrightarrow{\Omega}_{a/0}$ , dont on rappelle les composantes dans le repère avion :

$$\overrightarrow{\Omega}_{a/0} = P\overrightarrow{x}_a + Q\overrightarrow{y}_a + R\overrightarrow{z}_a \quad (\text{III.25})$$

et  $Q_{s/0}$  est la rotation du repère de stabilité  $R_s$  par rapport à  $R_0$ , dont les composantes sont dans le repère de stabilité :

$$\overrightarrow{\Omega}_{s/0} = \Omega_{xs}\overrightarrow{x}_s + \Omega_{ys}\overrightarrow{y}_s + \Omega_{zs}\overrightarrow{z}_s \quad (\text{III.26})$$

Puis le vecteur moment cinétique  $\overrightarrow{\sigma G}$  exprimé dans le repère  $R_a$  est défini par la relation (III. 27) :

$$\overrightarrow{\sigma G}_a = [I]\overrightarrow{\Omega}_{a/0} \quad (\text{III.27})$$

Ses dérivées temporelles sont notées :

$$-\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma G}_a}{dt}\right)_0 \quad \text{dans le repère } R_0,$$

$$-\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma G}_a}{dt}\right)_a \quad \text{dans le repère } R_a,$$

et sont reliées entre elles par la relation fondamentale de la cinématique, donnée à l'équation suivante :

$$-\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma G}_a}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma G}_a}{dt}\right)_a + \overrightarrow{\Omega}_{a/0} \wedge \overrightarrow{\sigma G}_a \quad (\text{III.28})$$

D'autre part, nous noterons le **vecteur vitesse**  $\vec{V} = V\vec{x}_s$  et l'**accélération**

$\frac{d\vec{V}}{dt}$  Sera notée :

$$-\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_0 \quad \text{dans le repère } \mathbf{R}_0,$$

$$-\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_s = \dot{V}\vec{x}_s \quad \text{dans le repère } \mathbf{R}_s,$$

ces deux expressions étant reliées par le même type de relation que celle donnée en (III.28)

$$-\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_s + \vec{\Omega}_{s/0} \wedge \vec{V} \quad \text{(III.29)}$$

Les relations (III.28) et (III.29) auront une grande importance pour transférer les équations de la mécanique du repère  $\mathbf{R}_0$  aux repères  $\mathbf{R}_a$  et  $\mathbf{R}_s$ .

### C) Efforts appliqués à l'avion :

Les efforts appliqués à l'avion seront étudiés en détail au paragraphe III.3.3, et sont donc provisoirement

$\sum \vec{F}_{ext}$  pour les forces extérieures et  $\sum \vec{M}_{ext}$  pour les moments extérieurs.

#### III.3.2.2 Choix du repère de travail :

Ce paragraphe a pour objectif de donner et justifier la stratégie suivie dans l'écriture des équations. Nous allons ainsi écrire les relations de la dynamique dans le repère NED  $\mathbf{R}_0$  que l'on a considéré comme galiléen, et donc dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique. Cependant, certaines données de l'avion telles que la matrice d'inertie sont usuellement données dans le repère avion, et s'y simplifient comme le montre le paragraphe III.3.2.1. Nous allons donc transposer l'équation s'y rapportant dans le repère avion  $\mathbf{R}_a$ , grâce à la relation fondamentale de la cinématique, illustrée en (III.28). De plus, l'étude des efforts aérodynamiques nous montrera au paragraphe III.3.3 qu'ils s'expriment de préférence dans le repère de stabilité : c'est pourquoi nous projeterons l'équation concernée dans le repère de stabilité  $\mathbf{R}_s$  en utilisant la relation (III.29).

En résumé, nous allons écrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère  $\mathbf{R}_0$ , le transposer au repère de stabilité  $\mathbf{R}_s$  pour le **théorème de la résultante dynamique**, et au repère avion  $\mathbf{R}_a$  pour le **théorème du moment cinétique**.



### III.3.2.3 Théorème de la résultante dynamique :

Appliquons la première relation fondamentale de la mécanique (III.30) liée à la conservation de la quantité de mouvement, et exprimée dans le repère NED  $R_o$ , supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} )_0 = \sum \vec{F}_{ext} \quad (III.30)$$

Transposons maintenant cette équation dans le repère de stabilité  $R_s$  grâce à la relation (III.29) :

$$- \frac{d\vec{v}}{dt} )_s + \vec{\Omega}_{s/0} \wedge \vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (III.31)$$

Puis en utilisant la relation (III.26), le premier terme de l'équation précédente s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \Omega_{xs} \\ \Omega_{ys} \\ \Omega_{zs} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dot{V} \\ mV\Omega_{zs} \\ -mV\Omega_{ys} \end{pmatrix} \quad (III.32)$$

La relation (III.31) devient ainsi le système suivant de trois équations scalaires, projetées dans le repère de stabilité  $R_s$  :

$$\begin{cases} m\dot{V} = \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{x}_s \\ mV\Omega_{zs} = \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{y}_s \\ -mV\Omega_{ys} = \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{z}_s \end{cases} \quad (III.33)$$

Ce système est le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'avion ; sa première et sa troisième ligne concernent le vol longitudinal, et sa deuxième le vol latéral.

### III.3.2.4 Théorème du moment cinétique

La seconde relation fondamentale de la dynamique s'applique à l'inertie de l'avion ; avec les notations du paragraphe III.3.2.1(A), elle s'exprime dans le repère NED  $R_o$  selon l'équation

$$- \frac{d\vec{\sigma G}_a}{dt} )_0 = \sum \vec{M}_{ext} \quad (III.34)$$

et devient, une fois transposée dans le repère avion  $R_a$  grâce à la relation (III.28) :

$$- \frac{d\vec{\sigma G}_a}{dt} )_a + \vec{\Omega}_{a/0} \wedge \vec{\sigma G}_a = \sum \vec{M}_{ext} \quad (III.35)$$

Comme nous l'avons vu en (III.27), le moment cinétique est le produit de la matrice d'inertie  $[I]$  avec le vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega_{a/0}}$ . Exprimons sa dérivée temporelle dans le repère avion  $R_a$ , puisque la matrice  $[I]$  y est constante et donnée par (III.24) :

$$-\frac{d\overrightarrow{\sigma G_a}}{dt}_a = [I] \frac{d\overrightarrow{\Omega_{a/0}}}{dt}_a, \text{ avec } \frac{d[I]}{dt}_a = 0 \quad (\text{III-36})$$

On arrive donc à l'expression vectorielle du théorème exprimée dans le repère avion  $R_a$  en remplaçant (III.36) dans (III.35) :

$$[I] \frac{d\overrightarrow{\Omega_{a/0}}}{dt}_a + \overrightarrow{\Omega_{a/0}} \wedge ([I]\overrightarrow{\Omega_{a/0}}) = \sum \overrightarrow{M_{ext}} \quad (\text{III-37})$$

En utilisant les notations (III.24) et (III.25), les deux relations suivantes donnent les projections dans le repère  $R_a$  du premier terme de l'équation précédente :

$$[I] \frac{d\overrightarrow{\Omega_{a/0}}}{dt}_a = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{P} - I_{xx}\dot{R} \\ I_{yy}\dot{Q} \\ -I_{xz}\dot{P} + I_{zz}\dot{R} \end{pmatrix} \quad (\text{III-38})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{a/0}} \wedge ([I]\overrightarrow{\Omega_{a/0}}) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_{xx}P - I_{xx}R \\ I_{yy}Q \\ -I_{xz}P + I_{zz}R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QR(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz}PQ \\ PR(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(P^2 - R^2) \\ PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}QR \end{pmatrix} \quad (\text{III-39})$$

On aboutit ainsi au système suivant de trois équations scalaires projetées dans le repère avion  $R_a$  :

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{P} + QR(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz}(\dot{R} + PQ) = \sum \overrightarrow{M_{ext}} \cdot \overrightarrow{x_a} \\ I_{yy}\dot{Q} + PR(I_{xx} - I_{zz}) - I_{xz}(P^2 - R^2) = \sum \overrightarrow{M_{ext}} \cdot \overrightarrow{y_a} \\ I_{zz}\dot{R} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}(RQ - \dot{P}) = \sum \overrightarrow{M_{ext}} \cdot \overrightarrow{z_a} \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

Ce système est le théorème du moment cinétique appliqué à l'avion; sa deuxième ligne concerne le vol longitudinal, sa première et sa troisième ligne le vol latéral.

### III.3.3 Efforts extérieurs appliqués à l'avion

Nous avons obtenu précédemment le modèle mécanique du mouvement de l'avion, aussi bien longitudinal que latéral. Cependant, nous n'avons pas explicité les forces et moments qui s'appliquent à l'avion, notamment aérodynamiques. C'est l'objet de ce paragraphe, au cours duquel nous allons donner une définition générale de chaque effort. Cependant, nous détaillerons ceux du mouvement longitudinal qui nous intéresseront plus particulièrement lors de l'application au **Boeing 747**.

#### III.3.3.1 Poids de l'avion et centre de gravité :[5]

La force la plus évidente à laquelle est soumise l'avion est son **poids**, dont l'expression est donnée dans le repère de stabilité  $R_s$  par :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin \gamma \vec{x}_s + mg \cos \gamma \vec{z}_s \quad (\text{III-41})$$

(Voir la figure III. 3)

et dont le point d'application est le centre de gravité  $G$ . Cependant ce dernier n'est pas fixe : sa position dépend non seulement de la masse de l'appareil, mais aussi de la répartition du carburant dans les réservoirs .Il est repéré en pourcentage de sa position sur la corde aérodynamique moyenne  $\bar{c}^1$  est également noté MAC, comme le montre la figure (III.4) ; sa position oscille entre 10% et 40% de  $\bar{c}$ . Cependant, on ne tient pas compte dans la modélisation de sa variation de position, très lente.

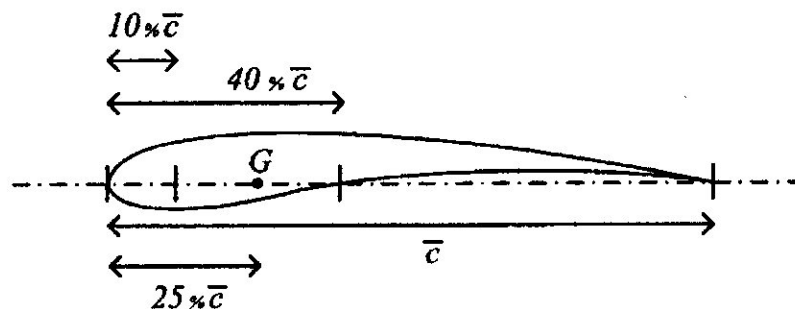


Fig. III.4 - Position du centre de gravité  $G$  sur la corde aérodynamique moyenne  $\bar{c}$ .

#### III.3.3.2 Forces et moments aérodynamiques :

Les efforts aérodynamiques sont naturellement les plus importants à étudier, puisque c'est par leur action que l'avion va pouvoir voler.

Les forces aérodynamiques s'appliquent généralement en des points distincts du centre de gravité  $G$ ,

contrairement aux moments aérodynamiques dont il est le point de réduction. La force de portance notamment s'applique en un point appelé foyer  $F$  du profil, illustré par la figure ci-dessous.

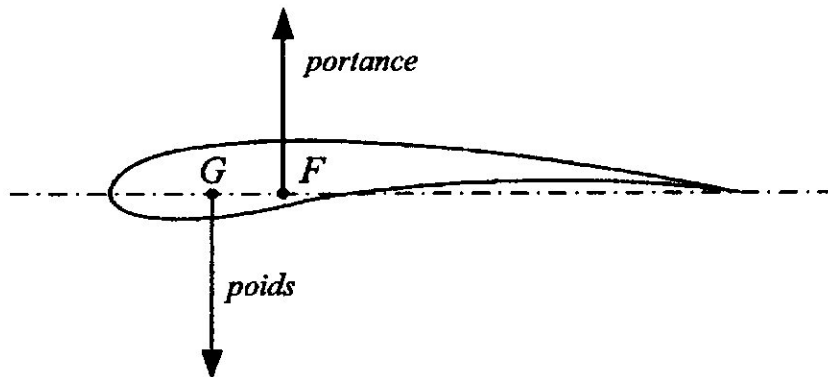


Fig. III.5 - Positions du centre de gravité  $G$  de l'avion et du foyer  $F$  du profil.

Les deux relations ci-dessous donnent respectivement les expressions des **forces** et des **moments** aérodynamiques exprimés dans le repère de stabilité  $R_s$  :

$$\begin{pmatrix} Fx_s \\ Fy_s \\ Fz_s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{pmatrix} -C_D \\ C_Y \\ -C_L \end{pmatrix} \quad (\text{III-42})$$

$$\begin{pmatrix} Mx_s \\ My_s \\ Mz_s \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{pmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{pmatrix} \quad (\text{III-43})$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air à l'altitude d'étude,  $S$  la surface portante de l'avion,  $V$  sa vitesse aérodynamique,  $\bar{c}$  la corde aérodynamique moyenne (« MAC »),  $b$  l'envergure de l'avion et  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_Y$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ , et  $C_n$ , sont les coefficients aérodynamiques du profil, sans dimensions. Ces derniers varient en fonction des paramètres de la condition de vol dans laquelle se trouve l'avion, notamment son incidence, son altitude et sa vitesse.

Voici comment sont nommés ces forces et moments aérodynamiques pour le mouvement longitudinal :

- $F_{x_s}$  est la force de traînée, associée à  $C_D$ ,
- $F_{z_s}$ , est la force de portance, associée à  $C_L$ ,
- $M_{y_s}$  est le moment en tangage, associé à  $C_m$ ,

et pour le mouvement latéral :

- $F_{y_s}$  est la force latérale, associée à  $C_y$ ,
- $M_{x_s}$  est le moment de roulis, associé à  $C_l$ ,
- $M_{z_s}$ , est le moment de lacet, associé à  $C_n$ ,

La figure (III.6) illustre notamment les efforts du vol longitudinal.

### III.3.3.3 Poussée

La poussée représente la force propulsive de l'avion, qui sert notamment à contrer la traînée ; on la note usuellement  $T$ , et elle est généralement contenue dans le plan de symétrie de l'avion, conformément aux hypothèses posées au paragraphe III.3.1.1. Elle s'exprimera ainsi selon l'équation :

$$\vec{T} = T_{x_s} \vec{x}_s + T_{z_s} \vec{z}_s \quad (\text{III-44})$$

Nous supposons cette force colinéaire au vecteur  $\vec{x}_s$ , et en donnerons un modèle simplifié ultérieurement.

### III.3.4 Modèle longitudinal de l'avion :

Comme nous nous intéresserons particulièrement au vol longitudinal de l'avion, nous devons découpler les modes longitudinaux et latéraux en posant les hypothèses nécessaires. Enfin l'étude de l'équilibre sera un préalable à sa linéarisation.

#### III.3.4.1 Hypothèses relatives au vol longitudinal :

Les hypothèses relatives au vol longitudinal sont en fait des hypothèses de découplage des mouvements longitudinaux et latéraux ; elles sont globalement vérifiées lorsque :

- (i) le plan de symétrie de l'avion est vertical - et contient donc le centre de gravité,
- (ii) les forces extérieures lui sont parallèles,
- (iii) les axes des moments extérieurs lui sont perpendiculaires.

La première condition (i) implique que les ailes de l'avion sont horizontales, soit que l'angle de gîte est

nul:  $\phi = 0$ . De plus, comme nous avons fait l'hypothèse (paragraphe III.3.3.1) que le vecteur de l'accélération de la gravité  $\vec{g}$  est vertical et dirigé vers le bas ; le plan de symétrie vertical de l'avion contient alors le poids  $\vec{P}$  conformément à la condition (ii).

Cette même condition (ii) place le vecteur vitesse  $\vec{V}$  de l'avion dans le plan de symétrie, l'angle de dérapage est donc nul :  $\beta = 0$ .

Considérant la dernière condition (iii), les vitesses de roulis et lacet sont nulles :

$$P=R=0.$$

Ainsi le mouvement de l'avion a lieu dans le plan vertical, les variables remarquables que l'on va étudier seront donc la vitesse  $\vec{V}$  et la vitesse de tangage  $Q$ .

### III.3.4.2 Notations relatives au modèle longitudinal

Ce paragraphe a pour but de préciser les grandeurs caractéristiques du mouvement de l'avion dans le cadre du modèle longitudinal.

La figure (III.6) rappelle les efforts, les angles caractéristiques ainsi que la position du vecteur vitesse  $\vec{V}$  pour le vol longitudinal.

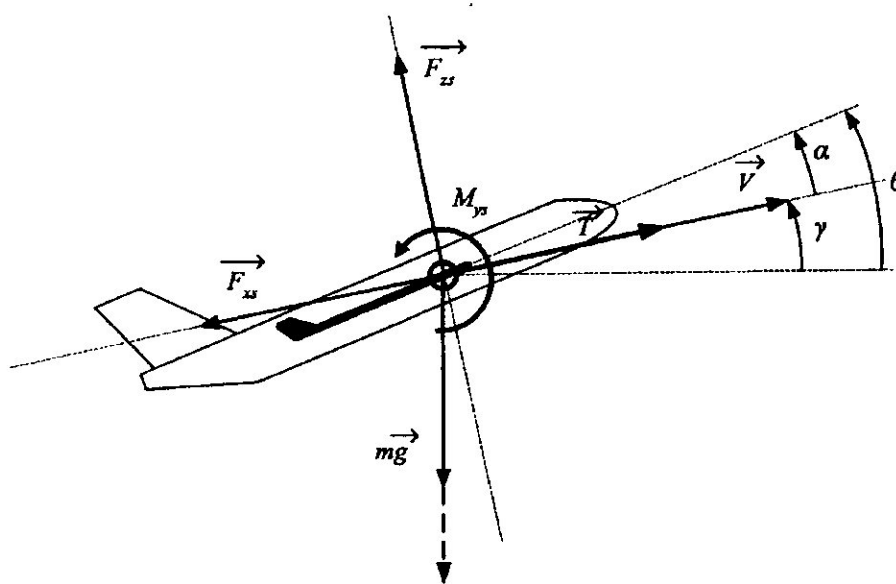


Fig. III.6- Grandeurs caractéristiques du mouvement longitudinal : efforts extérieurs, angles, vitesse.

La relation ci-dessous rappelle également l'expression des efforts aérodynamiques relatifs au mouvement longitudinal :

$$\begin{cases} \text{force de traînée: } F_{x_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \\ \text{force de portance: } F_{z_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \\ \text{moment en tangage: } M_{y_s} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m \end{cases} \quad (\text{III-45})$$

Par ailleurs, la vitesse de rotation du repère de stabilité  $R_s$  par rapport au repère  $R_0$  est donnée par :

$$\overrightarrow{\Omega_{s/0}} = \dot{\gamma} \overrightarrow{y_s} \quad (\text{III-46})$$

### III.3.4.3 Modèle longitudinal pour le vol en croisière

D'après les hypothèses du paragraphe précédent, nous allons obtenir deux relations mécaniques scalaires pour le mouvement de translation, projetées dans le repère de stabilité  $R_s$ , et une relation scalaire pour le mouvement de rotation, projetée dans le repère avion  $R_a$ . A ces trois équations va s'ajouter une relation entre les trois vitesses angulaires de pente  $\gamma$ , d'incidence  $\alpha$  et d'assiette  $\theta$ .

Le système d'équations obtenu à partir des relations (III.33), (III.40) et (III.41) est :

$$\begin{cases} m\dot{V} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D + T - mg \sin \gamma \\ -mV\dot{\gamma} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L + mg \cos \gamma \\ I_{yy}\dot{Q} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma} = \dot{\theta} = Q \end{cases} \quad (\text{III-47})$$

où les deux premières sont nommées **équation de propulsion**, ou de traînée et **équation de sustentation**, ou de portance : elles confirment que la force de poussée  $\vec{T}$  est supposée portée par l'axe  $\overrightarrow{x_s}$ . La troisième **équation de moment en tangage** suppose que l'axe de cette même force de poussée  $\vec{T}$  passe par le centre de gravité  $G$ , et donc qu'elle ne provoque pas de moment. L'**équation cinématique de vitesse de tangage** exprime la relation donnée plus haut entre les vitesses angulaires  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\theta}$ . Enfin, une relation exprime la vitesse verticale  $\dot{h}$  de l'avion (selon  $-\overrightarrow{z_{ned}}$ ) en fonction de la vitesse linéaire  $V$  et de l'angle de pente  $\gamma$ .

$$\dot{h} = V \sin(\gamma) \quad (\text{III-48})$$

Nous avons considéré que l'angle de pente  $\gamma$  était suffisamment faible pour que l'on puisse faire, au premier ordre, l'approximation suivante :  $\sin(\gamma) \approx \gamma$  et  $\cos(\gamma) \approx 1$ , que nous utiliserons lors de la

linéarisation.

### III.3.4.4 Étude de l'équilibre

#### A) Variables de l'équilibre

L'objectif de pilotage du vol longitudinal est de maîtriser l'**altitude h** de l'appareil, sa **vitesse V** et la **pente  $\gamma$**  de sa trajectoire. La valeur de ces variables et la configuration de l'appareil vont suffire à définir la condition d'équilibre ; d'après les équations (III.47), nous devons également évaluer les valeurs des variables suivantes à l'équilibre : l'**incidence  $\alpha$**  et la **vitesse de tangage Q**, qui sera nulle par définition.

De plus, la valeur des efforts aérodynamiques va dépendre de la position  $\delta_e$  des **élévateurs**, ou gouvernes de profondeur ; nous séparerons donc les composantes des coefficients  $C_L$  et  $C_m$ , à vitesse donnée, comme suit :

$$C_L = C_{L\alpha}(\alpha) + C_{L\delta}\delta_e \quad (\text{III-49})$$

$$C_m = C_{m\alpha}(\alpha) + C_{m\delta}\delta_e \quad (\text{III-50})$$

Le coefficient  $C_D$  est essentiellement lié au coefficient  $C_L$ , tandis que la force de propulsion  $T$  dépendra de la position  $\delta_t$  de la **manette des gaz**.

#### B) Calcul de l'équilibre

À l'équilibre, toutes les dérivées temporelles des variables d'état sont nulles ; les trois premières équations du système (III.47) modifiées avec les relations (III.49) et (III.50) deviennent alors :

$$0 = -\frac{1}{2}\rho SV^2 C_D(\alpha + \delta_e) + T(\delta_e) - mg \sin \gamma \quad (\text{III-51})$$

$$0 = -\frac{1}{2}\rho SV^2 (C_{L\alpha}(\alpha) + C_{L\delta}\delta_e) + mg \cos \gamma \quad (\text{III-52})$$

$$0 = \frac{1}{2}\rho SV^2 \bar{c} C_m(C_{m\alpha}(\alpha) + C_{m\delta}\delta_e) \quad (\text{III-53})$$

Ces trois équations permettent de connaître au point d'équilibre l'incidence  $\alpha$ , la position de l'élévateur  $\delta_e$  et celle de la manette des gaz  $\delta_t$  à partir de la connaissance de la vitesse  $V$  et de la pente  $\gamma$  de l'avion.

En effet, réécrivons dans un premier temps les équations (III.52) et (III.53) :

$$C_{L\alpha}(\alpha) + C_{L\delta}\delta_e = \frac{mg \cos \gamma}{\frac{1}{2}\rho SV^2} \quad (\text{III-54})$$

$$C_{m\alpha}(\alpha) + C_{m\delta}\delta_e = 0 \quad (\text{III-55})$$

Nous avons ici un système de deux équations à deux inconnues qui permet de déterminer les valeurs de  $\alpha$



et  $\delta_e$ . Puis l'équation (III.51) réécrite sous la forme suivante :

$$T(\delta_t) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D(\alpha, \delta_e) + mg \sin \gamma \quad (\text{III-56})$$

nous fournit la valeur de  $\delta_t$ .

Ce raisonnement suppose que les coefficients aérodynamiques soient connus pour toute condition de vol, et surtout que l'on puisse accéder aux fonctions réciproques de  $C_{L\alpha}(\alpha)$  ou  $C_{m\alpha}(\alpha)$ , et de  $T(\delta_t)$ .

### III.3.5 Linéarisation du modèle longitudinal

#### III.3.5.1 Linéarisation des équations

La condition de vol, ou point d'équilibre, étant définie, nous sommes en mesure d'obtenir le modèle des petites variations autour de celle-ci. Voici les notations que nous allons utiliser dans cette partie pour étudier les variables d'état, leurs valeurs à l'équilibre et les petites variations autour de ces dernières.

Tab. III.2 - Notations adoptées pour les variables d'état: [10]

Variable d'état	Valeur à l'équilibre	Petite variation
$V$	$V_e$	$u = \frac{V - V_e}{V_e}$
$\alpha$	$\alpha_e$	$\bar{\alpha}$
$\gamma$	$\gamma_e$	$\bar{\gamma}$
$Q$	$Q_e = 0$	$q$
$X$	$X_e$	$\bar{X}$
$\delta$	$\delta_{eq}$	$\bar{\delta}$

avec pour vecteur d'état  $X = [V \ \gamma \ \alpha \ Q]^T$  et pour vecteur des commandes :  $\delta = [\delta_e \ \delta_t]^T$ .

Dans ces conditions, nous pouvons écrire les équations linéarisées du système (III.47) en notant d'un indice « lin » les efforts (en incorporant le signe « - » dans  $F_{x_{sltn}}$  et  $F_{z_{sltn}}$ ), ainsi que la force de poussée : en effet, leur traitement est l'objet du paragraphe suivant et ne sera pas développé ici. De plus, nous retiendrons l'approximation du paragraphe III.3.4.3:

$\sin \gamma \approx \gamma$  et  $\cos \gamma \approx 1$ . Les équations, linéarisées en se limitant aux termes du premier ordre du développement en série de Taylor, sont les suivantes :

**Équation de propulsion :**

$$\dot{u} = \frac{1}{mV_e} (F_{x_{sltn}} + T_{ltn}) - \frac{g}{V_e} \bar{\gamma} \quad (\text{III-57})$$

**Équation de portance :**

$$\dot{\bar{\gamma}} = -\frac{1}{mV_e} F_{z_{sltn}} \quad (\text{III-58})$$

**Équation de moment :**

$$\dot{q} = -\frac{1}{I_{yy}} M_{y_{sltn}} \quad (\text{III-59})$$

**Équation cinématique angulaire :**

$$\dot{\bar{\alpha}} = q - \dot{\bar{\gamma}} \quad (\text{III-60})$$

Nous allons étudier maintenant la linéarisation des efforts extérieurs autour du point d'équilibre.

### III.3.5.2 Linéarisation des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs que nous allons étudier et linéariser dans ce paragraphe sont les forces et moments aérodynamiques  $F_{x_s}$ ,  $F_{z_s}$ ,  $M_{y_s}$  et T.

- la force de poussée :

$$\bar{T} = 4 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.6} T_0 \delta_t \bar{x}_s \quad (\text{III-61})$$

-Les efforts aérodynamiques ayant tous la même forme, la procédure de linéarisation sera donc la même : nous allons la détailler pour la force de portance  $F_{z_s}$ , puis donner les principaux résultats pour  $F_{z_s}$  et  $M_{y_s}$ .

Rappelons tout d'abord son expression, vue en (III.45) :

$$F_{z_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (\text{III-62})$$

où le coefficient aérodynamique  $C_L$  dépend de variables d'état. Linéarisons cette expression autour de la condition de vol, en écrivant :

$$F_{z_{sttn}} = \left. \frac{\partial F_{z_s}}{\partial X} \right|_{X_e, \delta_{eq}} \bar{x} + \left. \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta} \right|_{X_e, \delta_{eq}} \bar{\delta} \quad (\text{III-63})$$

soit :

$$F_{z_{sttn}} = \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u} u + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \gamma} \bar{\gamma} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \alpha} \bar{\alpha} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial Q} q + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial h} \bar{h} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_e} \bar{\delta}_e + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_t} \bar{\delta}_t \quad (\text{III-64})$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point d'équilibre. Prenons par exemple le premier terme, et développons le comme suit :

$$\left. \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u} \right|_0 = V_e \left. \frac{\partial F_{z_s}}{\partial (V-V_e)} \right|_{V_e} = V_e \left. \frac{\partial F_{z_s}}{\partial V} \right|_{V_e} = -V_e \rho S V_e (C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V}) \quad (\text{III-65})$$

L'expression  $\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u}$  est appelée **dérivée de stabilité**, notée  $Z_u$ , et son utilisation simplifie grandement les écritures ; chacune des dérivées partielles peut s'écrire sous cette forme. Nous verrons dans la suite que certaines d'entre elles peuvent être négligées en fonction des variables auxquelles elles se rapportent.

On va obtenir de cette manière la forme suivante pour la relation (III.64) :

$$\frac{1}{m} F_{z_{sttn}} = Z_u u + Z_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + Z_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + Z_q q + Z_{\bar{h}} \bar{h} + Z_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + Z_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (\text{III-66})$$

et des expressions équivalentes pour la force de traînée  $F_{x_{sttn}}$ , et le moment en tangage  $M_{y_{sttn}}$  :

$$\frac{1}{m} F_{x_{sttn}} = X_u u + X_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + X_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + X_q q + X_{\bar{h}} \bar{h} + X_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + X_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (\text{III-67})$$

$$\frac{1}{m} M_{y_{sttn}} = M_u u + M_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + M_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + M_q q + M_{\bar{h}} \bar{h} + M_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + M_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (\text{III-68})$$

## III.3.5.3 Modèle d'état

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires à l'écriture du modèle d'état sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{\delta} \\ y = C\bar{x} + D\bar{\delta} \end{cases} \quad (\text{III-69})$$

Où  $x = [u \lambda \gamma q]$ : vecteur d'état ;  $\gamma = [\gamma_e \gamma_t]$  : vecteur de commande; A est une matrice 4 x 4, B une matrice 4 x 2 et y le vecteur des sorties.

Nous donnerons dans ce paragraphe l'expression des matrices A et B, les matrices C et D dépendant des sorties que l'on souhaite observer.

Dans ces conditions, avec les relations (III.57) à (III.60) et les expressions des dérivées de stabilité, la matrice s'écrit : ( la démonstration dans l'annexe I ) :

$$A = \begin{pmatrix} A_u & A_{\bar{\gamma}} & A_{\bar{\alpha}} & A_q \\ B_u & B_{\bar{\gamma}} & B_{\bar{\alpha}} & B_q \\ -B_u & -B_{\bar{\gamma}} & -B_{\bar{\alpha}} & 1 - B_q \\ D_u & D_{\bar{\gamma}} & D_{\bar{\alpha}} & D_q \end{pmatrix} \quad (\text{III-70})$$

où la première ligne est :

$$A_u = \frac{1}{mV_e} (X_u + T_u)$$

$$A_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{mV_e} (X_{\bar{\gamma}} + T_{\bar{\gamma}}) - \frac{g}{V_e}$$

$$A_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{mV_e} (X_{\bar{\alpha}} + T_{\bar{\alpha}})$$

$$A_q = \frac{1}{mV_e} (X_q + T_q)$$

la deuxième ligne est :

$$B_u = -\frac{1}{mV_e} Z_u$$

$$B_{\bar{\gamma}} = -\frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\gamma}}$$

$$B_{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\alpha}}$$

$$B_q = -\frac{1}{mV_e} Z_q$$

et la quatrième ligne est :

$$D_u = \frac{1}{I_{yy}} M_u$$

$$D_{\bar{y}} = \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{y}}$$

$$D_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{\alpha}}$$

$$D_q = \frac{1}{I_{yy}} M_q$$

Puis la matrice B s'écrit : ( la démonstration dans l'annexe I ):

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{mV_e} (X_{\bar{\delta}_e} + T_{\bar{\delta}_e}) & \frac{1}{mV_e} (X_{\bar{\delta}_t} + T_{\bar{\delta}_t}) \\ -\frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\delta}_e} & -\frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\delta}_t} \\ \frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\delta}_e} & \frac{1}{mV_e} Z_{\bar{\delta}_t} \\ \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{\delta}_e} & \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{\delta}_t} \end{pmatrix} \quad (\text{III-71})$$

Nous avons ainsi obtenu le modèle longitudinal théorique et linéarisé d'un avion en toute condition de vol, que nous allons appliquer maintenant à un appareil : le **Boeing 747**.

Chapitre IV:  
Etude en Simulation

### IV.1- Introduction:

Dans le chapitre précédent, nous avons établi le modèle longitudinal d'un avion. Nous allons maintenant le mettre en application pratique à un appareil : le Boeing 747. La méthode utilisée est dans un premier temps de réunir les données disponibles : caractéristiques techniques, données d'inertie, coefficients aérodynamiques, puis dans un deuxième temps de les introduire dans le modèle théorique, synthétisé dans le chapitre II. C'est l'objet de ce chapitre, dans lequel nous allons élaborer un programme MATLAB qui va nous donner le modèle d'état de l'avion en toute condition de vol, ainsi l'application de différentes lois de commande envisage à cette effet.

### IV.2- Description du Boeing 747:

#### IV.2.1- Historique:

Porté par le succès des avions à réaction, le transport aérien a connu dans les années 1960 un essor qui laissait prévoir un doublement du trafic tous les six ans. Cette demande a favorisé le développement d'appareils à fuselage de grand diamètre : les gros-porteurs, ou jumbo-jets. Le Boeing 747 sera le premier gros-porteur à réaction. Son premier vol a eu lieu le 9 février 1969 et il est entré en service en 1970, bientôt suivi de diverses évolutions et modèles de conception analogue.

#### IV.2.2- Caractéristiques techniques:

Le document technique [5]. Nous fournit toutes les données techniques nécessaires à l'élaboration du modèle longitudinal de l'avion B 747:

- les dimensions de l'appareil,
- ses données d'inertie : masse, positionnement du centre de gravité et matrice d'inertie en fonction de sa masse,
- ses coefficients aérodynamiques  $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_m$ , donnés sous forme de composantes élémentaires comme nous le verrons plus loin
- le choix de cette appareil est justifié par le fait qu'il est un avion de transport gros porteur ,qui peut parcourir des grandes distance avec des altitude considérable .pour cela ,il nécessite des lois de commandes modernes tiennent en considération des variations paramétrique consistante que se soit à l'intérieur du modèle comme la variation de la masse ,soit au niveau externe par le fait qu'il parcoure plusieurs phase de vol ou il peut rencontrée des perturbation atmosphérique comme la turbulence

La figure (IV.1) montre l'appareil sous différents points de vue, avec ses dimensions.

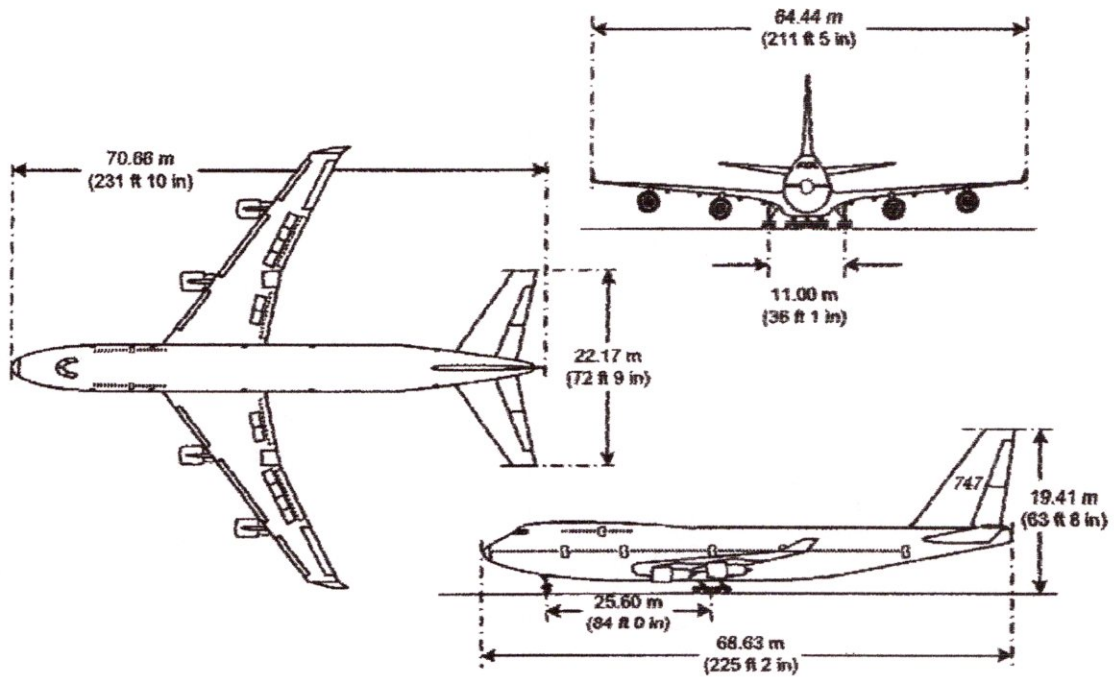


Fig. IV.1- Le Boeing 747-400 sous différents angles, et ses dimensions

**IV.2.3- Surfaces de commande:**

Le Boeing 747 possède un grand nombre de surfaces de commande, illustrées à la figure (IV.2). Cependant, nous n'utiliserons qu'un petit nombre parmi celles-ci, utiles pour le mouvement longitudinal, que nous donnerons après la description générale de ces surfaces.

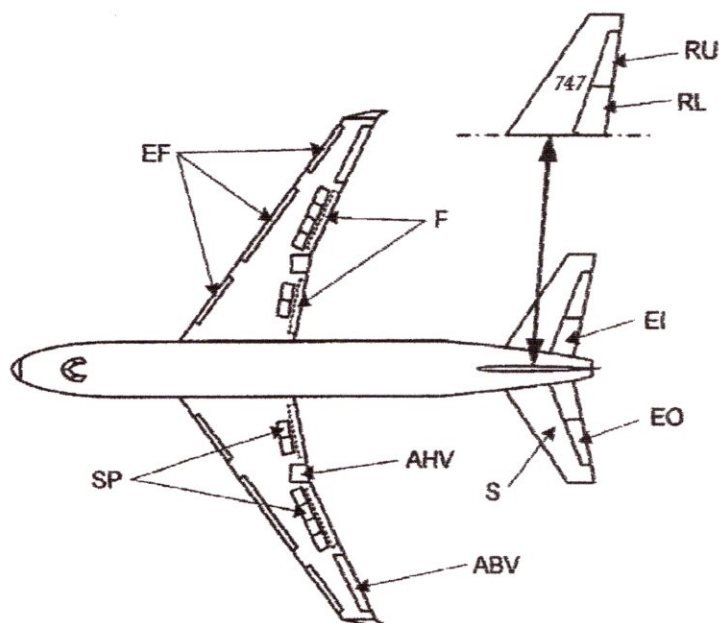


Fig. IV.2- Les surfaces de commande du Boeing 747.



**Pour le vol latéral :**

- les ailerons basse vitesse ABV et haute vitesse AHV provoquent le mouvement de roulis de l'avion autour de son axe longitudinal,
- les aérofreins SP ont un double rôle : d'une part assister les ailerons à faible vitesse lorsque leur seule action ne suffit plus et d'autre part freiner l'avion en phase d'approche ou à l'atterrissage,
- les gouvernes de direction hautes RU et basses RL provoquent le mouvement de lacet de l'appareil.

**Pour le vol longitudinal :**

- les gouvernes de profondeur intérieures EI et extérieures EO, ou élévateurs, provoquent le mouvement en tangage de l'avion,
- les volets F augmentent la portance de l'appareil aux vitesses faibles, en phase de décollage, d'approche ou d'atterrissage, et sont jumelés aux becs EF qui diminuent le risque de décrochage,
- le stabilisateur S, sur lequel sont fixées les gouvernes de profondeur, est réglé de manière à compenser l'angle de ces dernières : ainsi le stabilisateur correctement réglé et une position neutre du manche à balai maintiendront l'incidence de l'appareil.

Dans le cadre de notre étude du mouvement longitudinal, et dans un but de simplification, nous utiliserons comme surfaces de commande :

- les élévateurs que nous supposons liés :  $\delta_{EI} = \delta_{EO} = \delta_e$  et représentant la résultante, en vol longitudinal, des actions de EI et EO,

Les mouvements de ces surfaces sont soumis à des restrictions, résumées pour les élévateurs dans le tableau IV.1 en termes de débattement et de vitesse de variation [6].

- la commande de poussée à travers la position de la manette de gaz  $\delta_T$ .

**Tab. IV.1** - Limites de débattement et de vitesse de variation des élévateurs.

direction	débattement $\delta_e$	vitesse $\frac{d\delta_e}{dt}$
vers le haut	-23°	37°/s
vers le bas	+17°	37°/s

**IV.3 Synthèse du modèle longitudinal :**

Le modèle longitudinal du *Boeing 747* sera celui vu au chapitre 2, dans lequel nous allons implanter les données qui lui sont propres : ses données d'inertie puis ses coefficients aérodynamiques, qui vont aboutir aux expressions des forces et moments.

## IV.3.1- Modèle de poussée:[6]

Nous avons fait précédemment l'hypothèse que la poussée  $\vec{T}$  est dirigée par l'axe  $\vec{x}_s$  et ne provoque aucun moment en tangage. Nous allons adopter un modèle simplifié de cet effort pour les avions à réaction, donné par la relation suivante :

$$\vec{T} = 4 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.6} T_0 \delta_t \vec{x}_s \quad (\text{IV.1})$$

où  $T_0$  est la poussée maximale engendrée par un réacteur au sol,  $\delta_t$  est la position de la manette des gaz, comprise entre 0 (poussée nulle) et 1 (poussée maximale), et le facteur 4 correspond au nombre de réacteurs de l'appareil.

**Remarque :** en pratique sur le Boeing 747, l'axe de la poussée  $\vec{T}$  ne passe pas par le centre de gravité et provoque donc un moment en tangage ; cependant, il est compensé par le réglage approprié du stabilisateur horizontal.

## IV.3.2- Modèle longitudinal du Boeing 747:

Les données précédentes nous permettent maintenant d'écrire le modèle longitudinal linéarisé du Boeing 747

En reprenant les notations définies en fin de chapitre 2, soit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{\delta} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{\delta} \end{cases}$$

(IV.3)

où le vecteur d'état correspondant est  $\bar{x} = [u \ \bar{y} \ \bar{\alpha} \ q]^T$  et le vecteur des commandes correspondant est  $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_e \ \bar{\delta}_t]^T$ , les matrices d'état A et B s'expriment de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_u & A_{\bar{y}} & A_{\bar{\alpha}} & A_q \\ B_u & B_{\bar{y}} & B_{\bar{\alpha}} & B_q \\ -B_u & -B_{\bar{y}} & -B_{\bar{\alpha}} & 1 - B_q \\ D_u & D_{\bar{y}} & D_{\bar{\alpha}} & D_q \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mV_e} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0.6} T_0 \\ \frac{1}{2mV_e} \rho S V_e^2 \frac{\partial c_L}{\partial \delta_e} & 0 \\ -\frac{1}{2mV_e} \rho S V_e^2 \frac{\partial c_L}{\partial \delta_e} & 0 \\ \frac{1}{2I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial c_m}{\partial \delta_e} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

où :

$$A_u = \frac{1}{mV_e} (-V_e \rho S V_e C_D)$$

$$A_{\bar{y}} = -\frac{g}{V_e}$$

$$A_{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{m} V_e \left( \frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right)$$

la deuxième ligne est :

$$B_u = -\frac{1}{mV_e} \left( -V_e \rho S V_e \left( C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V} \right) \right)$$

$$B_{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{mV_e} \left( -\frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)$$

et la quatrième ligne est :

$$D_u = \frac{1}{I_{yy}} (V_e \rho \bar{c} S V_e C_m)$$

$$D_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{I_{yy}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)$$

$$D_q = \frac{1}{I_{yy}} \left( \frac{1}{2} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial q} \right)$$

Le matrice C est choisi suivant les états qu'en doit contrôler et on admet que D=0.

On à les matrices C et D :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

- nous considérerons le modèle 4 x 4 dont le vecteur d'état correspondant est:

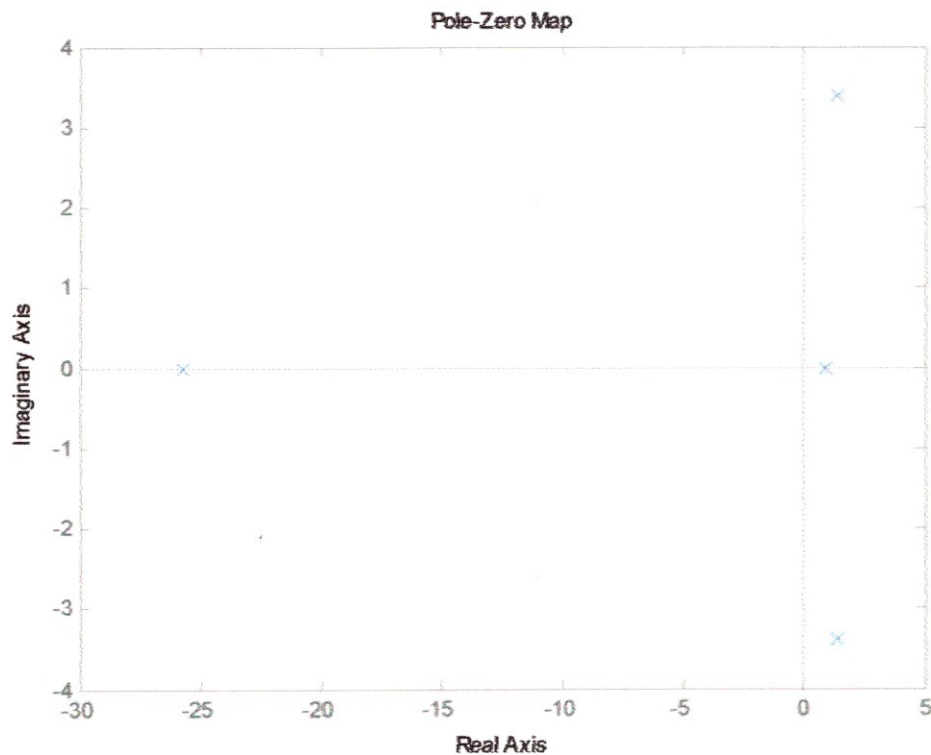
$$\bar{x} = [u \ \bar{y} \ \bar{\alpha} \ q]^T.$$

- nous utiliserons les matrices  $C_{\text{com}}$  et  $D_{\text{com}}$  donnant comme sorties  $u$ ,  $\bar{y}$  et  $q$ , regroupées dans le vecteur  $y_{\text{com}}$ .

Le modèle obtenu est donc MIMO (« Multiple Input Multiple Output »). Étudions maintenant le simulateur du mouvement longitudinal du Boeing 747.

**IV.4 Simulation et résultats :****IV.4.1 Etude du modèle sans contrôleur (boucle ouvert):**

La figure IV.3 montre la localisation des pôles du modèle de l'avion en B.O, Ces pôles sont donnés comme suit :



**Figure IV .3 lieu des pôles**

**1 les pôles du système :**

$$P1 = 1.42 + 3.38 i$$

$$P2 = 1.42 - 3.38 i$$

$$P3 = 0.877$$

$$P4 = -25.7$$

L'amortissement du pôle complexe est égal à  $3.48 \cdot 10^{-2}$ .

Étudions maintenant l'allure temporelle du modèle de l'avion en B.O :

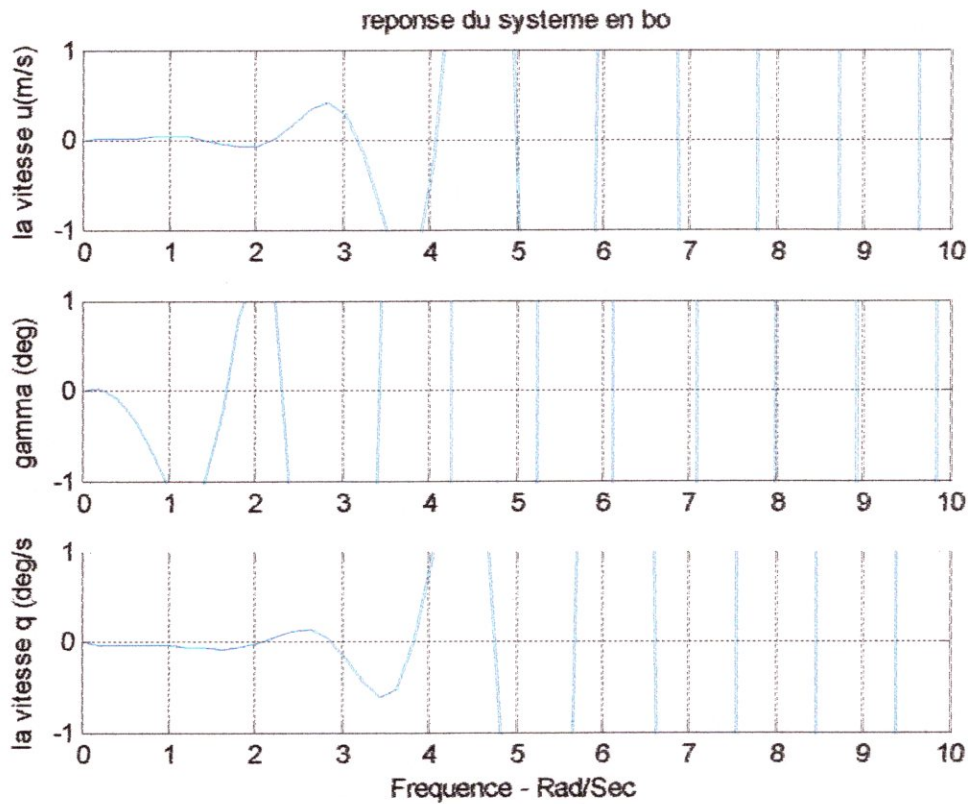


Fig. IV .4 l'allure temporelle du modèle de l'avion en B.O (boucle ouvert)

On peut distinguer :

Un mode rapide stable et bien amorti

Le mode phugoïde est lent, instable et mal amorti (montre un amortissement  $\xi = 3.48 \cdot 10^{-2}$ )

Un mode instable donné par  $p=0.877$

**IV.4.2 Simulation en boucle fermée :**

**IV.4.2.1 commande par LQ :**

Le critère choisi pour cette commande est:

$$J = \int_0^{\infty} (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

Les paramètres de pondération sont choisis comme suit:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le gain de commande obtenu est:

$$k_c = \begin{bmatrix} -193.2649 & -15.3887 & -55.0465 & -3.37411 \\ 2.5305 & 0.1180 & 0.1502 & 0.0046 \end{bmatrix}$$

Les pôles du système en B.F:

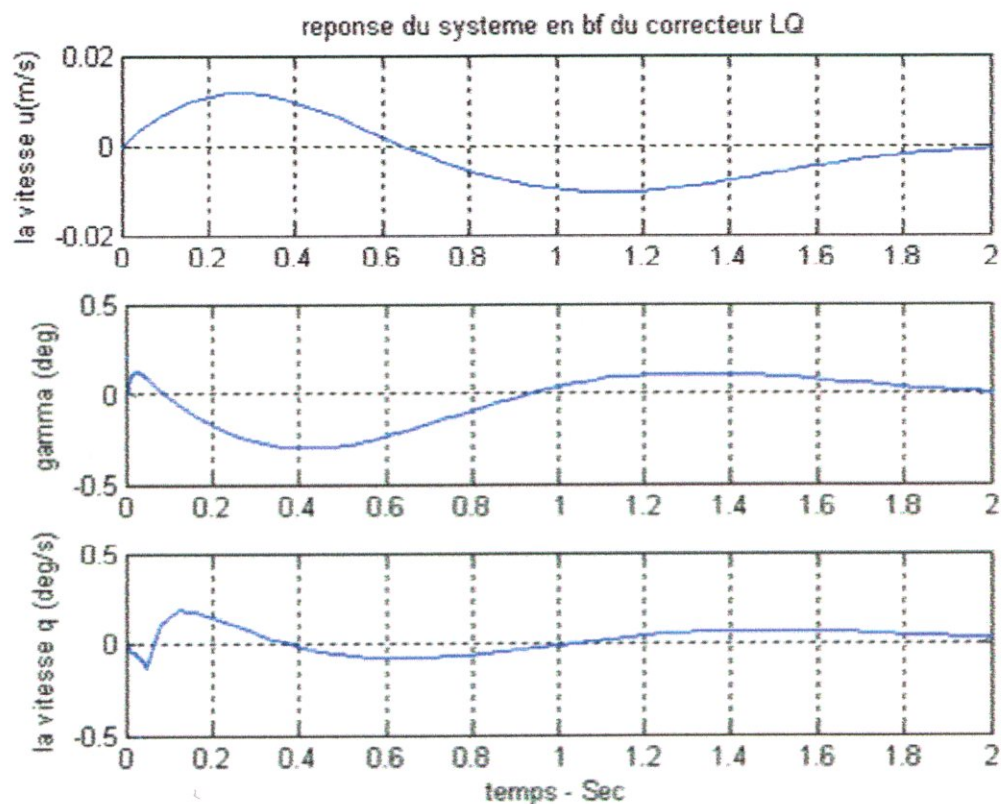
$$P1 = 1.01 + 2.65 i \quad P2 = 1.01 - 2.65 i \quad P3 = -25.8 \quad P4 = -0.866$$

On remarque que la commande LQ stabilise le système d'une manière satisfaisante.

#### a -Simulation dans le domaine temporelle :

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus avec la stratégie de commande quadratique LQ pour un modèle longitudinal :

#### Réponse impulsionnelle:



#### IV.5 Réponse impulsionnelle du correcteur LQ

##### Commentaire:

Après une excitation du système en B.F par une impulsion de référence, on remarque que le système revient à son état initial, ce qui justifie que le système en B.F est stable et bien amorti.

## Réponse a un échlon de vitesse :

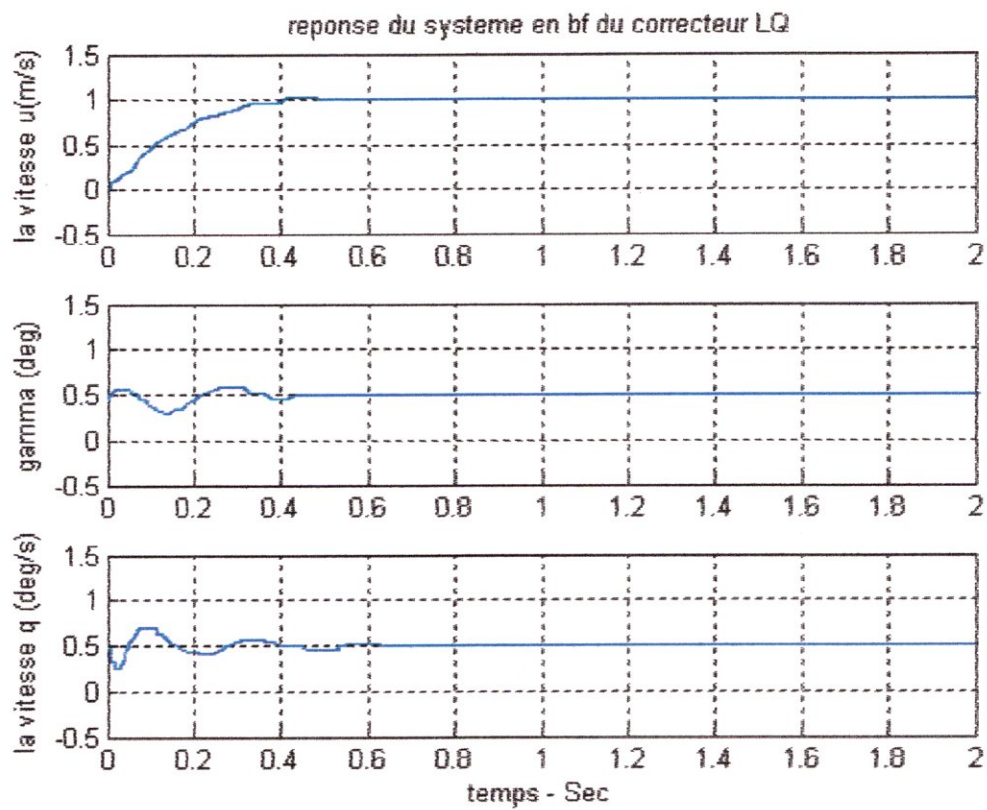


Fig IV.6 Réponse a un echlon du correcteur LQ

On remarque Un bon suivi des signaux de référence (performance) ainsi un découplage entre les états est satisfaisant.

**Etude de la robustesse:**

$$m = m(1 \pm 0.3)$$

Pour étudier la robustesse de la commande LQ, on a choisi une variation de la masse de l'avion de  $\pm 30\%$  de la masse totale, Dans ce cas on a :

$$m_1 = m(1 - 0.3)$$

$$m_2 = m$$

$$m_3 = m(1 + 0.3)$$

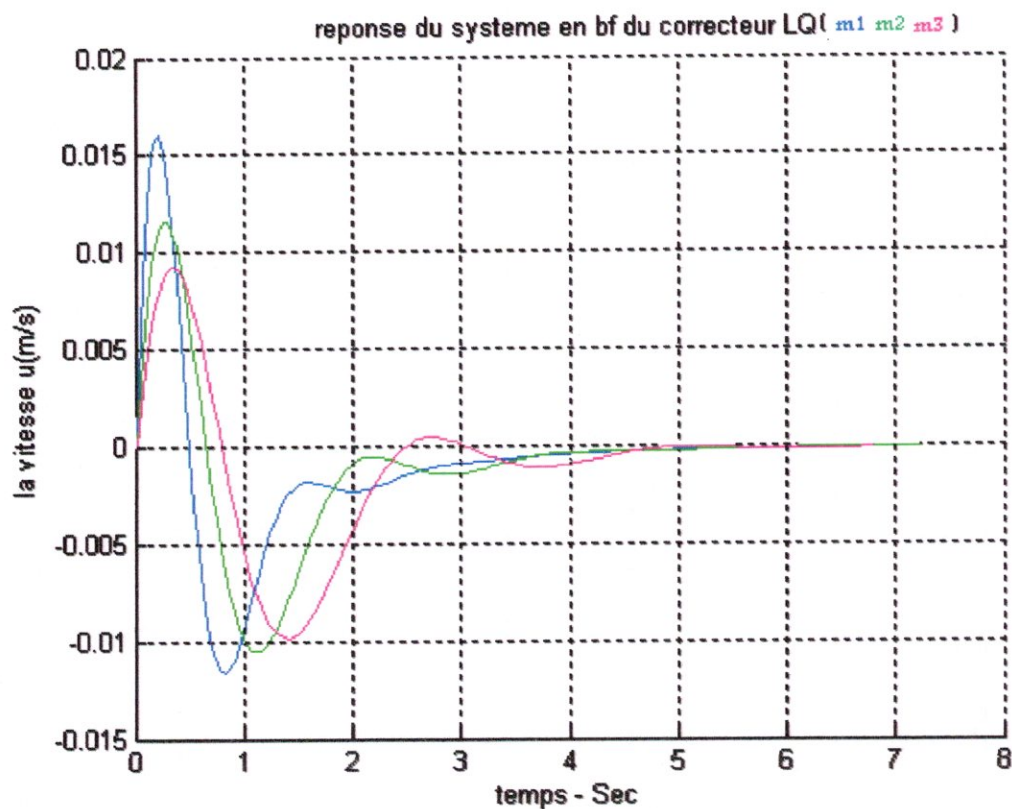


Figure IV.7 Réponse a un Echelon de vitesse du correcteur LQ

**Réponse à un échelon de vitesse :**

La figure IV.7: représente les évolutions temporelles des états des modèles longitudinaux de l'avion lorsqu'une commande en échelon de vitesse est appliquée, le système est stable et plus performant avec une bonne robustesse.



IV.4.2.2 La commande LQG :

C'est la commande LQ avec un observateur de Kalman, dont les paramètres de réglage ont été choisis de la façon suivante:

Le critère choisi pour cette commande est:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right]$$

Les paramètres de pondération sont choisies comme suit:

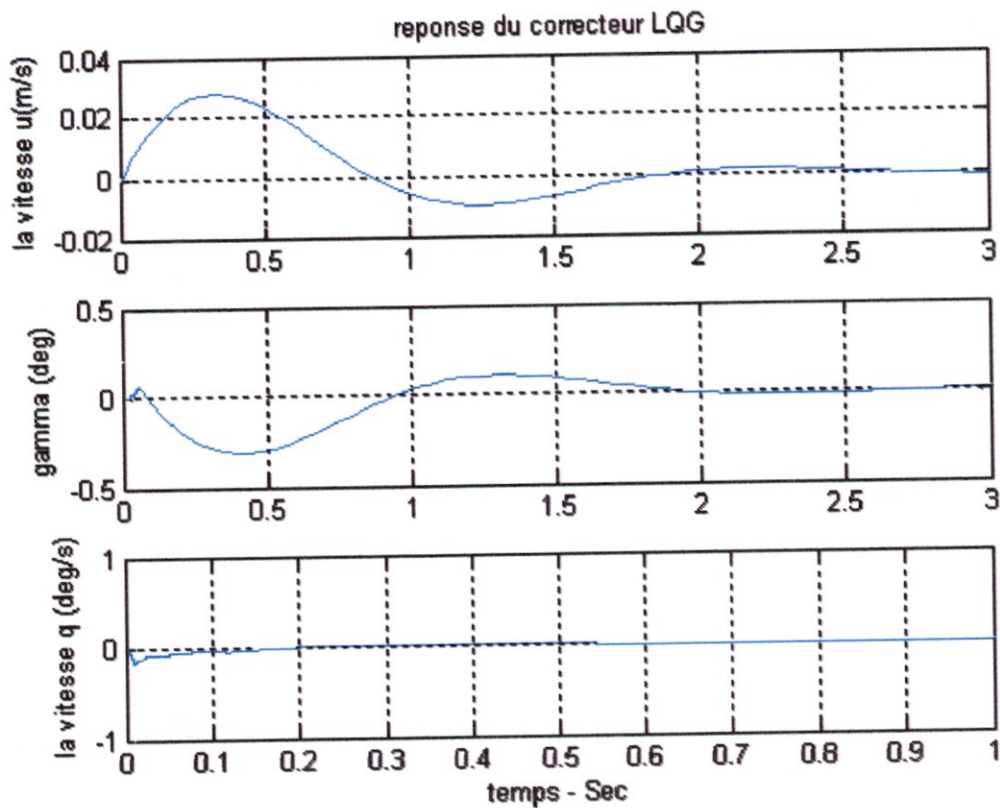
$$R = 1$$

$$Q = B * B' = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0260 & -0.0260 & -0.1956 \\ 0 & -0.0260 & 0.0260 & 0.1956 \\ 0 & -0.1956 & 0.1956 & 1.4741 \end{bmatrix}$$

Le gain de commande obtenu est:

$$k_c = \begin{bmatrix} 0.0209 & -0.2928 & -0.2048 & 0.0127 \\ -0.2928 & 5.7071 & 2.3323 & -0.1560 \\ 0.0127 & -0.1560 & -0.1840 & 0.0396 \end{bmatrix}$$

Réponse impulsionnelle:

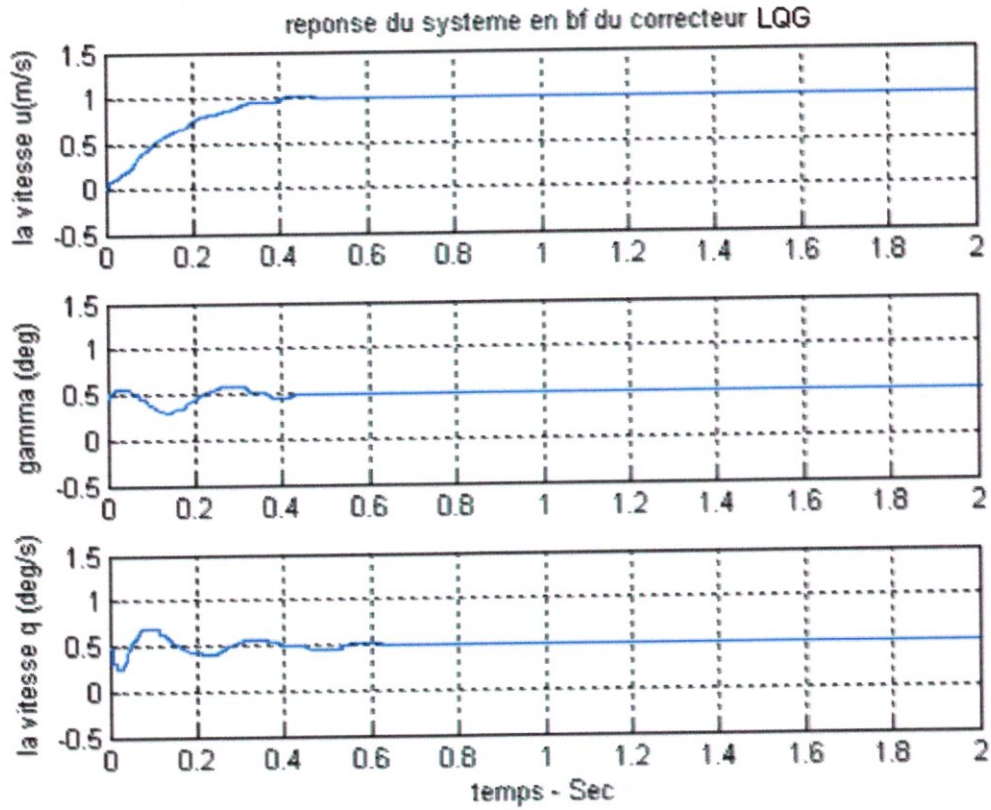


IV.8 Réponse impulsionnelle du correcteur LQG

**Commentaire:**

Après une excitation du système en B.F par une impulsion de référence ,on remarque que le système revient à sont état initial ,ce qui justifie que le système en B.F est stable et bien amortie.

**Réponse à un echlon de vitesse:**



**IV.9 Réponse a un echelon de vitesse du correcteur LQG**

**Commentaire:**

on constat Un bon suivi des signaux de référence (performance) avec un découplage entre les états satisfaisant pour une réponse à échelon de vitesse .

**Etude de la robustesse:**

$$m = m(1 \pm 0.3)$$

Pour étudier la robustesse de la commande LQ, on a choisi une variation de la masse de l'avion de  $\pm 30\%$  de la masse totale, Dans ce cas on a :

$$m_1 = m(1 - 0.3)$$

$$m_2 = m$$

$$m_3 = m(1 + 0.3)$$

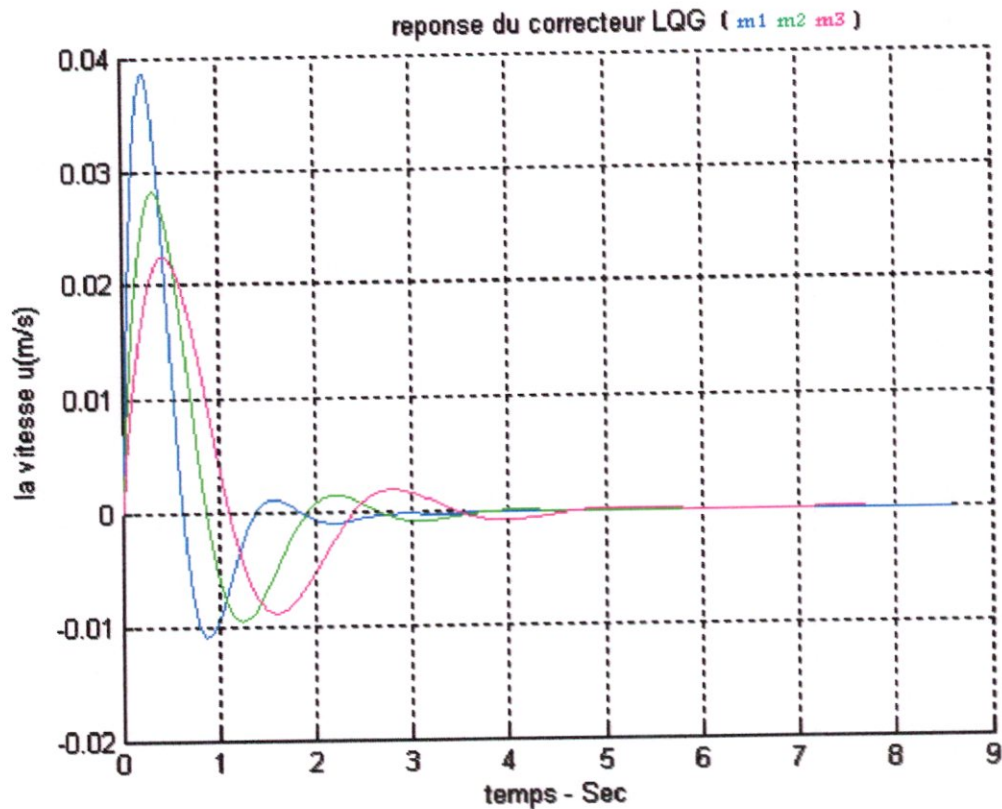


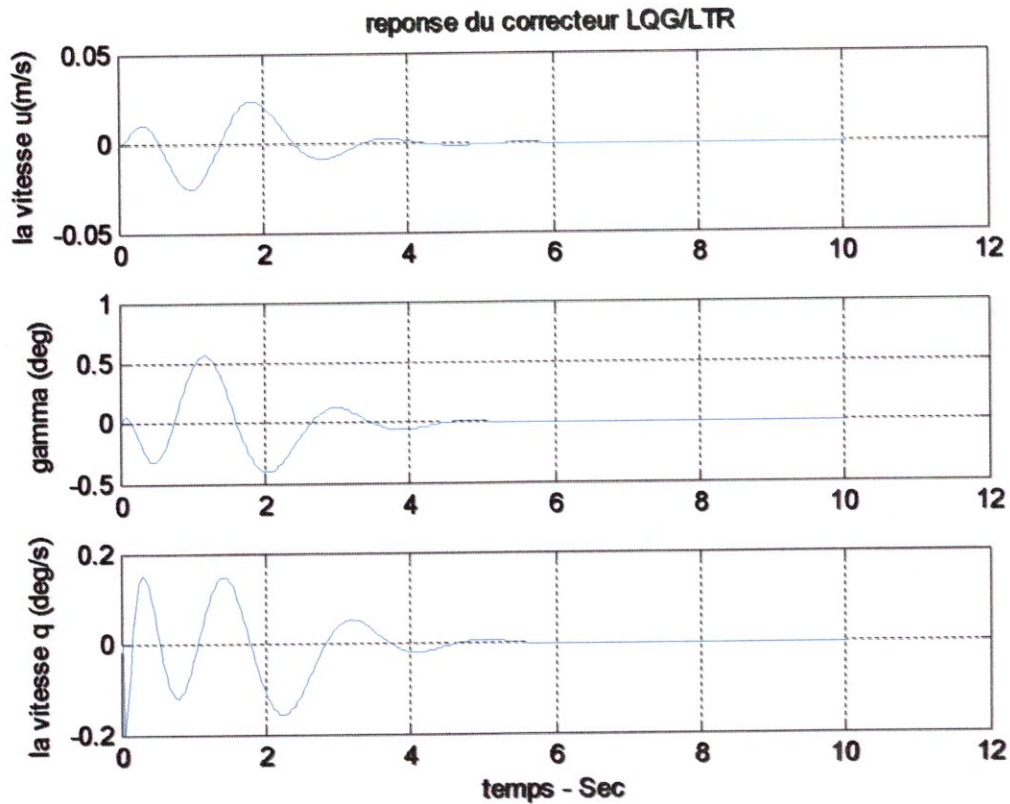
Figure IV.10 Réponse a un Echelon de vitesse du correcteur LQG

**Réponse à un échelon de vitesse :**

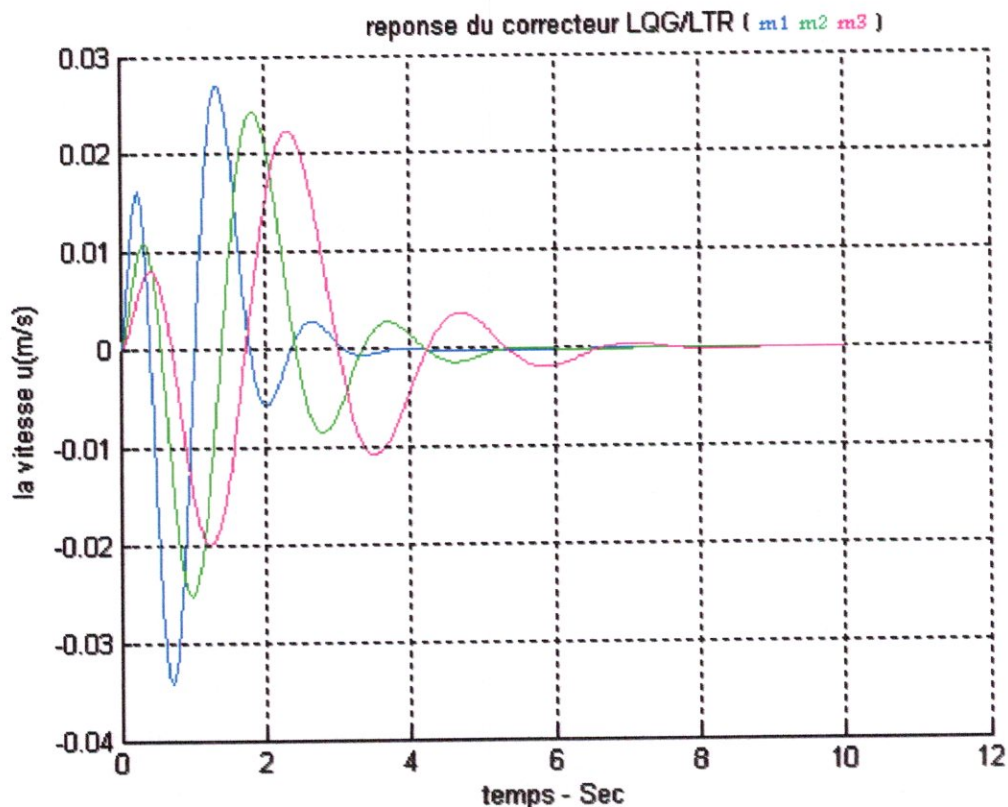
La figure IV.10: représente les évolutions temporelles des états des modèles longitudinaux de l'avion lorsqu'une commande en échelon de vitesse est appliquée, le système est stable et plus performant avec une bonne robustesse.

**IV.4.2.3 La commande LQG/LTR :**

Le correcteur LQG/LTR est simplement obtenu en diminuant le bruit de mesure dans la synthèse de l'observateur de Kalman du correcteur LQG

**Réponse impulsionnelle:****IV.11 Réponse impulsionnelle du système commandé par correcteur LQG/LTR****Commentaire:**

D'après la figure IV.11 on remarque que ce système est stable mais mal amorti



#### IV.13 Réponse a un echelon de vitesse, commande LQG/LTR

**Réponse à un échelon de vitesse :**

**La figure IV.13:** représente les évolutions temporelles des états des modèles longitudinaux de l'avion lorsqu'une commande en échelon de vitesse est appliquée, le système est stable et plus performant ainsi un bon suivi des signaux de référence avec une bonne robustesse.

- erreur due a rééducation/simplification d'un modèle
- description d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire
- les spécifications de performance et de robustesse d'un cahier de charge peuvent être souvent prises en compte par les caractéristiques des pondérations fréquentielles suivantes:

- gain en 0
- gain en infini
- fréquence de coupure à 0 dB.

**choix de pondération  $W_2$ :**

- minimiser l'influence des dynamiques négligées en haute fréquence ;
- leur valeur devra ainsi y être faible, et ajustée afin que la courbe de la sensibilité S suive au plus près celle du gabarit  $W_1$ .
- Ils devront également être réglés pour vérifier les contraintes d'amplitude et de vitesse de variation des élévateurs  $\delta_e$  et une amplitude de commande raisonnable pour les gaz  $\delta_t$ .
- La fréquence de coupure de cette pondération est la plus importante, plus que le gain maximum imposés en haute fréquence, puisqu'elle fixe la bande passante pour l'asservissement.
- cette bande passante a été choisie à environ  $\omega \approx 10^3$  à  $10^4$  rad.s<sup>-1</sup>

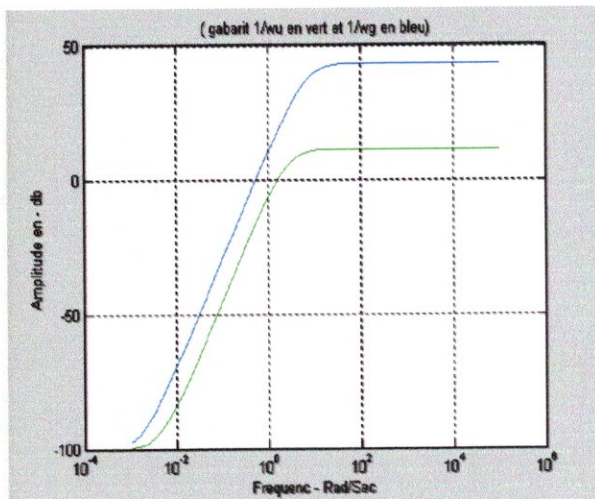


FIG. IV.14 -Gabarits des fonctions de Pondération sur l'erreur de poursuite  $\epsilon$

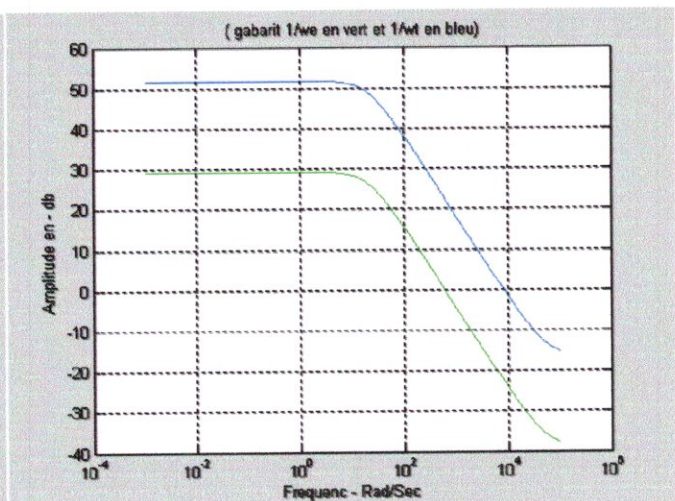


FIG. IV.15 -Gabarits des fonctions de Pondération sur la commande u.

A.2-La fonction de sensibilité S et la fonction KS :

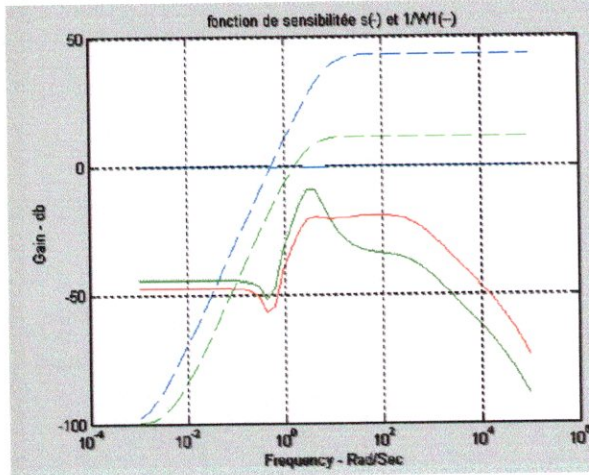


Fig IV.16 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé  $W_1^{-1}$  de commande  $H_{\infty}$   $H_{2LQG}$

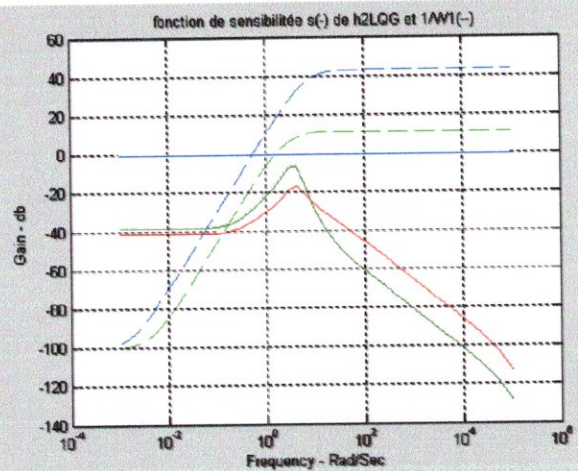


Fig IV.17 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé  $W_1^{-1}$  de commande

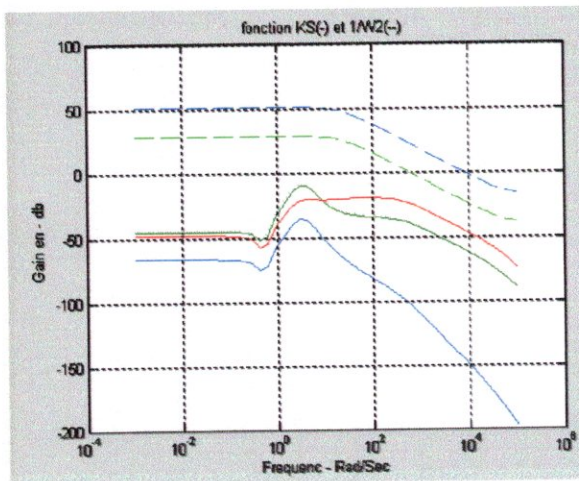


Fig IV.18 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé  $W_2^{-1}$  de la commande  $H_{\infty}$

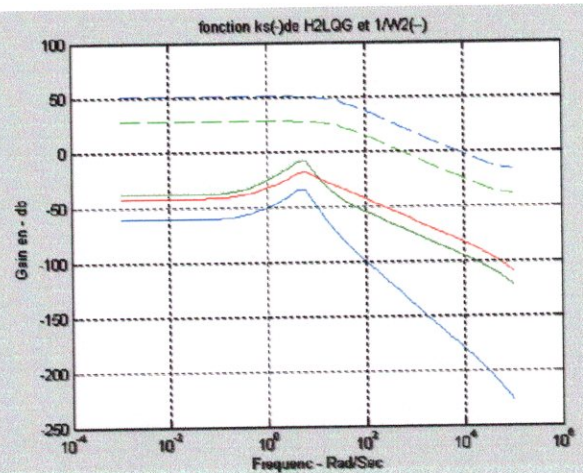


Fig IV.19 Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé  $W_2^{-1}$  de la commande  $H_{2LQG}$

**commentaire :**

Après l'étude théorique de la synthèse de contrôleurs puis de sa mise en application, voyons maintenant quelles sont les performances atteintes. Nous étudierons dans un premier temps les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, puis les réponses temporelles du système bouclé à différentes entrées caractéristiques. Les courbes de la sensibilité  $S$  et de la fonction  $KS$  respectent donc avec une bonne précision les gabarits fréquentiels choisis, comme nous allons le voir.

Les valeurs singulières des fonctions de sensibilité  $S$  et de robustesse  $KS$  associée à ce choix de filtre sont données sur les figures IV.16, IV.17, IV.18, IV.19.

Les figures IV.16, IV.17 montrent la représentation fréquentielle en amplitude des valeurs singulières de la fonction de sensibilité  $S$  de la commande  $H_\infty$  et la commande  $H_{2LQG}$ . On remarque que le critère de performance a été atteint, on peut donc s'attendre à un bon suivi en régime permanent.

Les figures IV.18, IV.19 montrent la représentation fréquentielle en amplitude des valeurs singulières de la fonction  $KS$  de la commande  $H_\infty$  et la commande  $H_{2LQG}$ . Le tracé des valeurs singulières de  $KS$  montre une amélioration évidente de la robustesse de la commande  $H_\infty$  par rapport à la commande  $H_{2LQG}$  dans le domaine des hautes fréquences.

**B- Simulation dans le domaine temporel :**

La première étape est de synthétiser les contrôleurs  $H_\infty$  et  $H_2$  en définissant d'abord la structure de synthèse que nous allons utiliser voir figure IV.20.

Nous allons expliquer dans ce paragraphe le choix des signaux de consigne, des signaux de commande et des sorties.

**1) Choix des consignes :**

Notre but est de synthétiser un autopilote pour le vol longitudinal du Boeing 747, c'est-à-dire que parmi les sorties du modèle d'état (matrice  $A$  et  $B$ ), nous nous intéresserons à la vitesse  $u$  et à la pente  $\bar{\gamma}$  de l'avion, variables qui suffisent en effet à définir sa trajectoire. Le modèle longitudinal de l'avion peut se décomposer en deux modes principaux : le mode phugoïde et le mode rapide, qui ne requièrent pas la même performance. Or les deux variables  $u$  et  $\bar{\gamma}$  sont caractéristiques du mode phugoïde, il faudra donc prendre en compte une variable du mode rapide pour contrôler celui-ci, c'est-à-dire soit l'incidence  $\bar{\alpha}$ , soit la vitesse de rotation en tangage  $q$  : cette dernière est couramment utilisée comme variable du mode rapide pour le retour.



## 2) Signaux de commande :

Les deux signaux de commande que nous utiliserons sont l'angle  $\bar{\delta}_\alpha$  des élévateurs et la position  $\bar{\delta}_\xi$  de la manette des gaz.

**Remarque :** ce problème de synthèse est MIMO (« Multiple Input Multiple Out-put »), contrairement aux cas généralement traités dans la littérature qui ne considèrent que rarement la propulsion  $\delta_\xi$  comme une commande.

## 3) Choix des sorties :

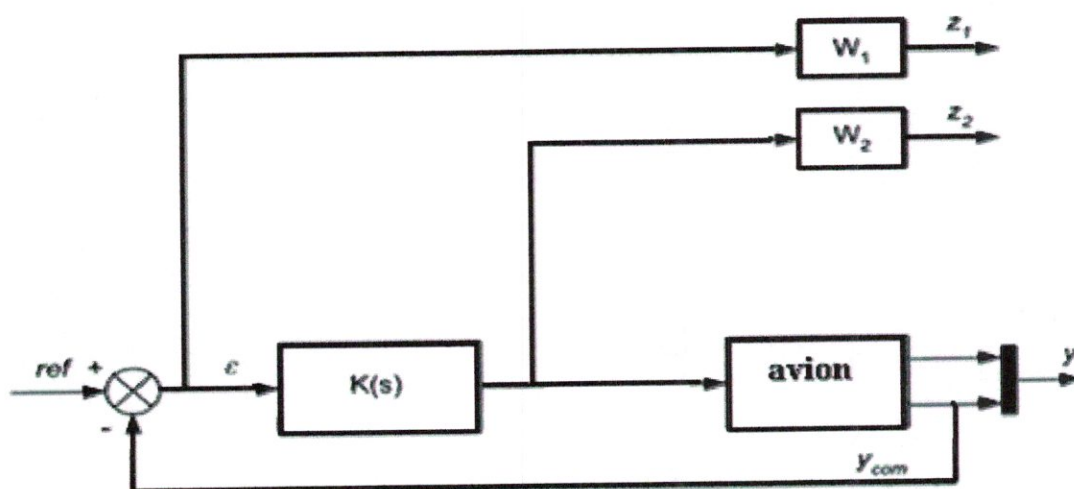
Le choix effectué plus haut nous impose de choisir comme **sorties** du système la vitesse  $u$ , la pente  $\bar{\gamma}$  et la vitesse de rotation en tangage  $q$ , regroupées dans le vecteur  $y_{com}$ .

Ce choix fixe les matrices  $C_{com}$  et  $D_{com}$  du modèle d'état qui sera utilisé pour la synthèse de contrôleurs (3 sorties) ; cependant lorsque nous simulerons ce système sous l'environnement **SIMULINK** de **MATLAB**, nous considérerons la matrice  $C$  complète afin de pouvoir observer toutes les sorties, mais nous n'effectuerons le retour que des trois signaux  $u, \bar{\gamma}$  et  $q$ .

### Structure utilisée :

Nous pouvons déduire un schéma de synthèse, illustré à la figure (VI.20). Il est issu de la théorie du chapitre II, et nous choisissons de surveiller le signal d'erreur  $\epsilon$  pondéré par une fonction  $W_1$ , soit  $z_1$ , et le signal de commande  $u_k$  pondéré par une fonction  $W_2$ , soit  $z_2$ , en réponse à une consigne  $ref$  et à une perturbation  $pert$ ,

**Remarque :** dans cette étude on prend la pondération  $W_3$  nul.



**Fig. IV.20-** Le montage utilisé pour la synthèse  $H_\infty$  et  $H_{2LQG}$  de contrôleurs.

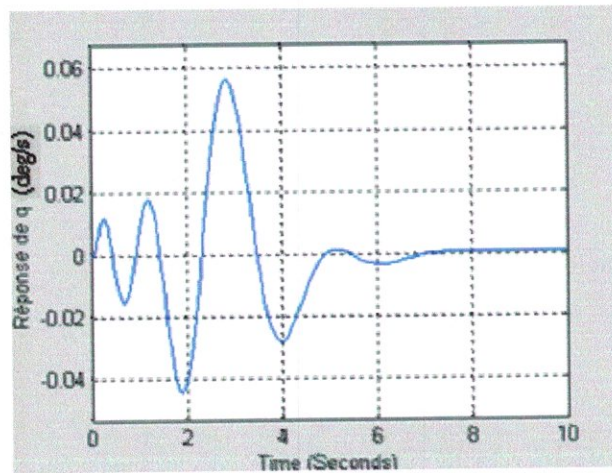
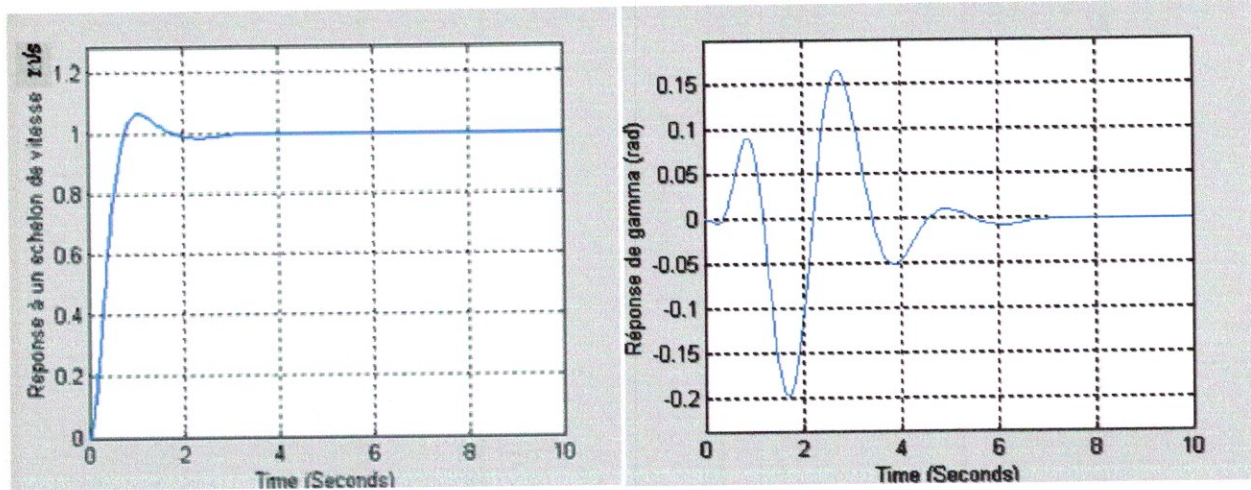


Fig. IV.21 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de la commande  $H_{\infty}$ .

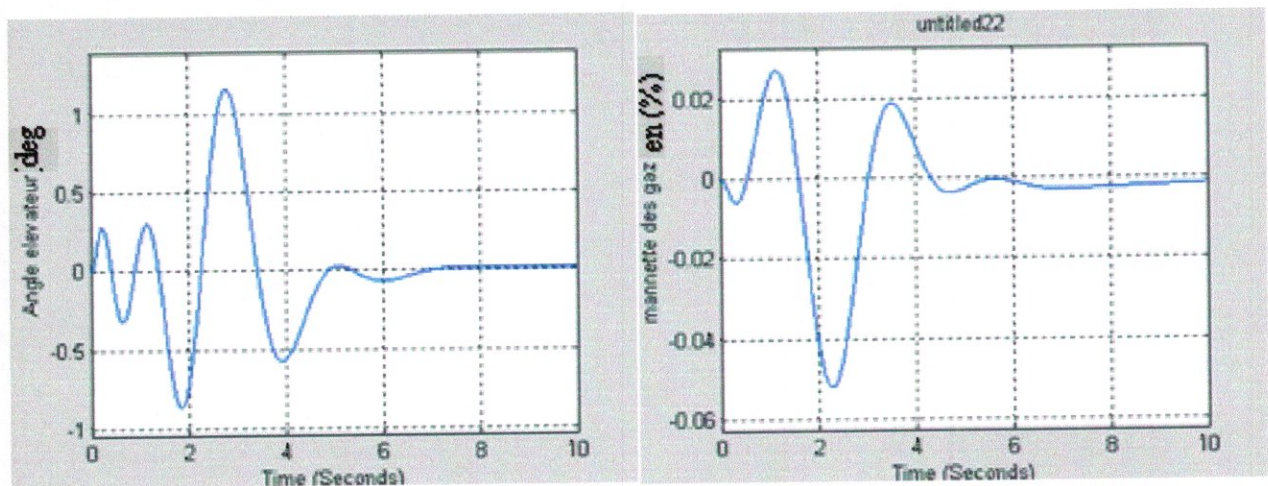


Fig. IV.22 Evolution temporelle des actionneurs, en réponses à un échelon de vitesse de la commande  $H_{\infty}$ .

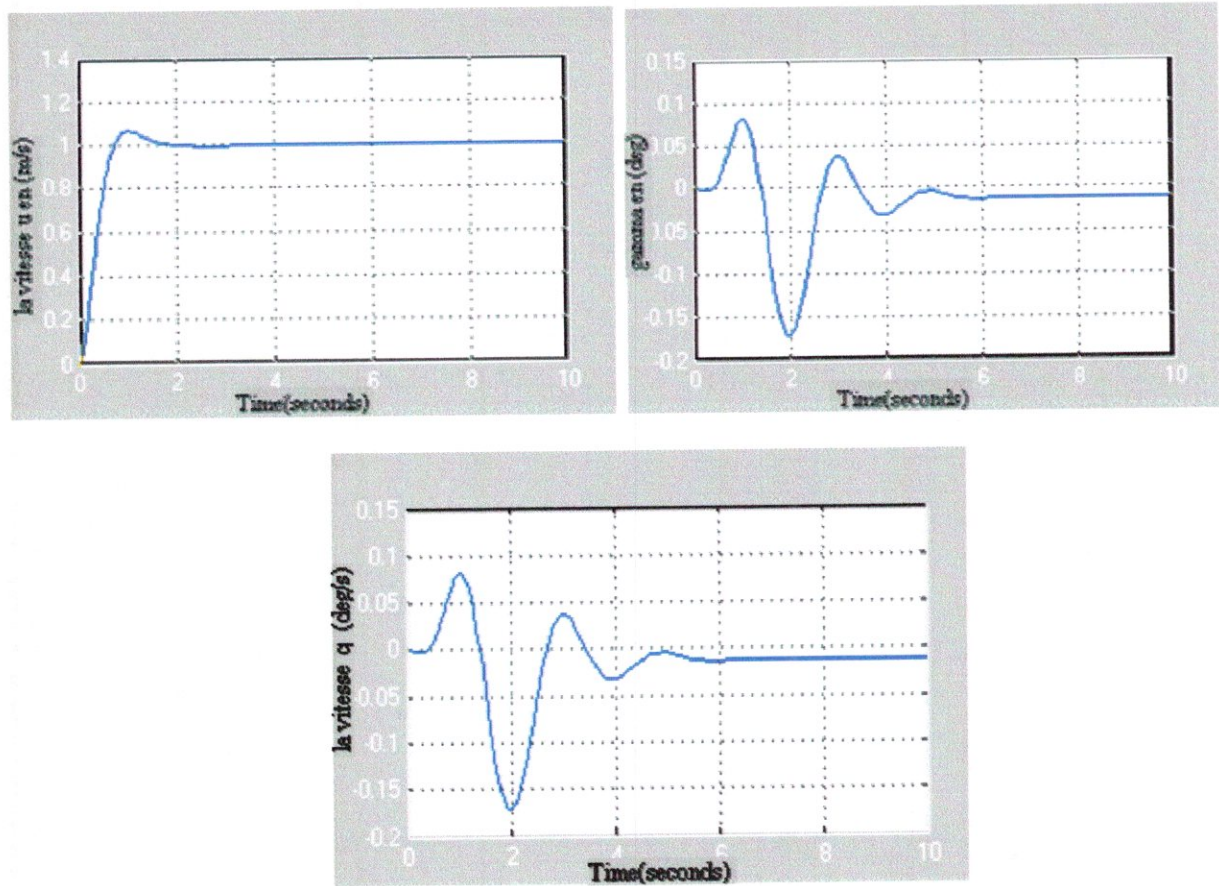


Fig. IV.25 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de la commande  $H_{2LQG}$

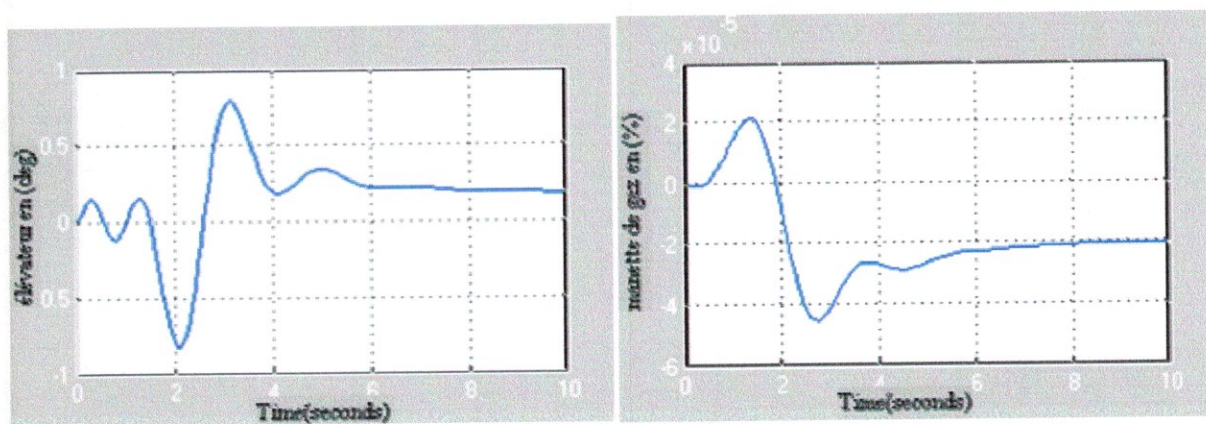


Fig. IV.26 Evolution temporelle des actionneurs, en réponses à un échelon de vitesse de la commande  $H_{2LQG}$

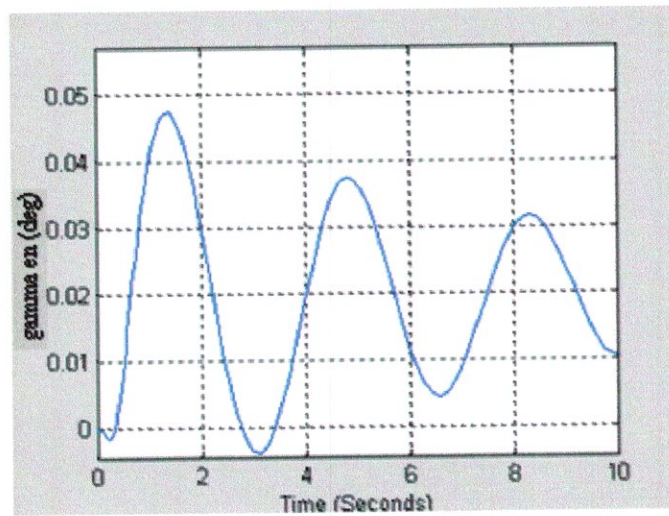
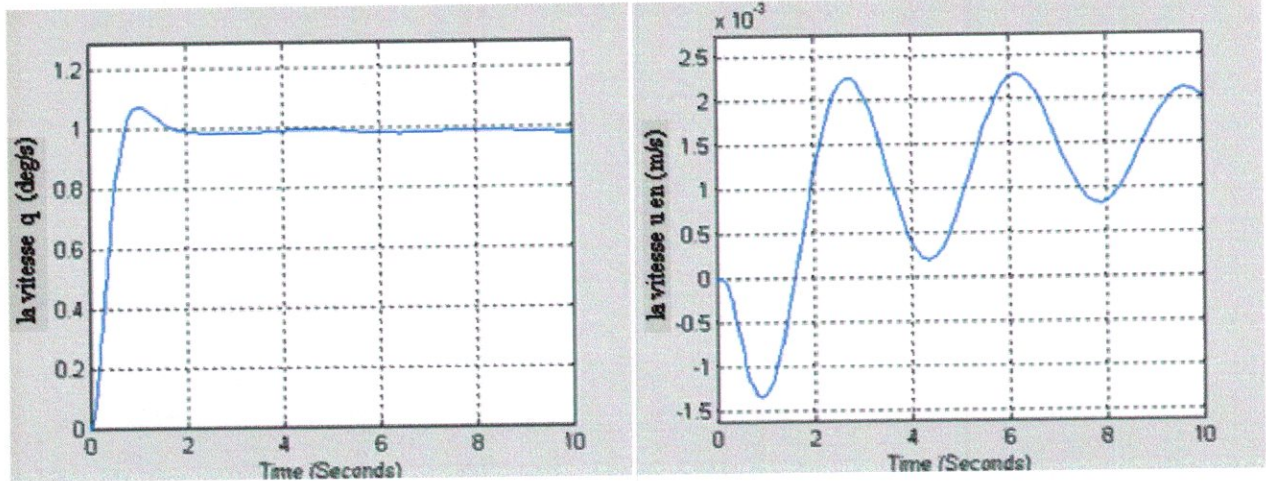


Fig. IV.23 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de tangage  $q$  de la commande  $H_\infty$

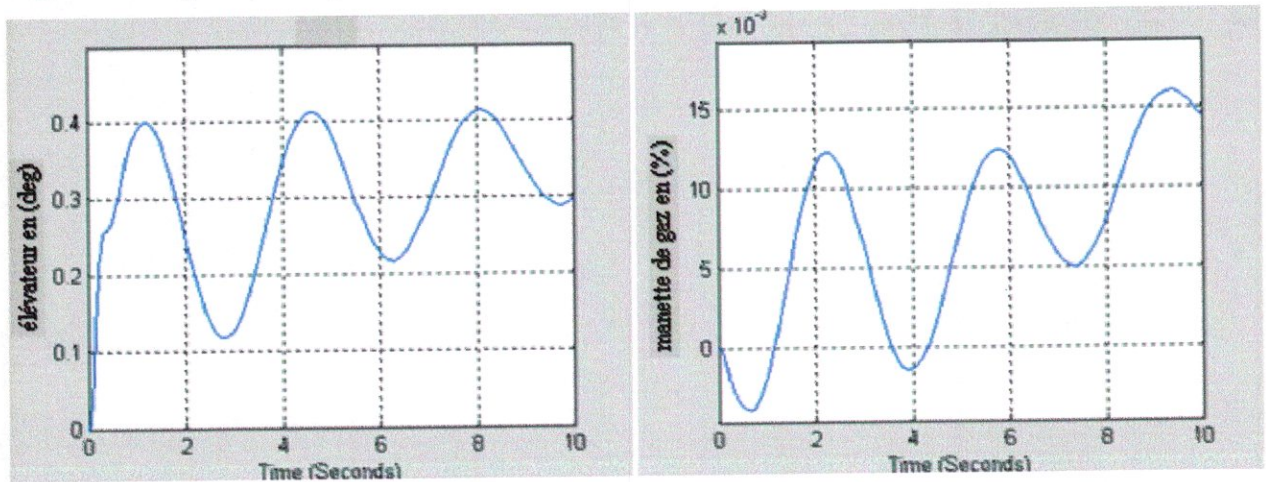


Fig IV. 24 Réponses des actionneur à un échelon de vitesse de tangage  $q$  de la commande  $H_\infty$

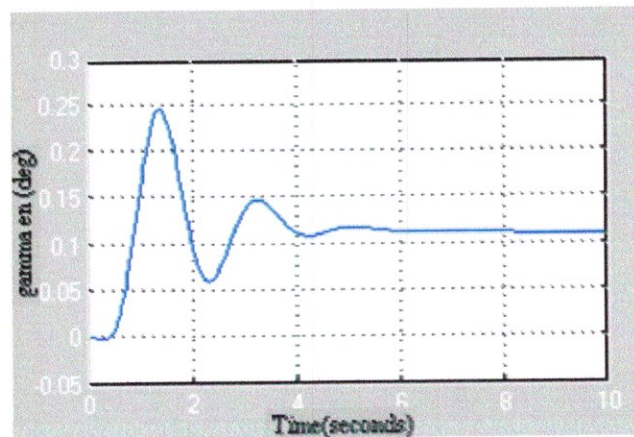
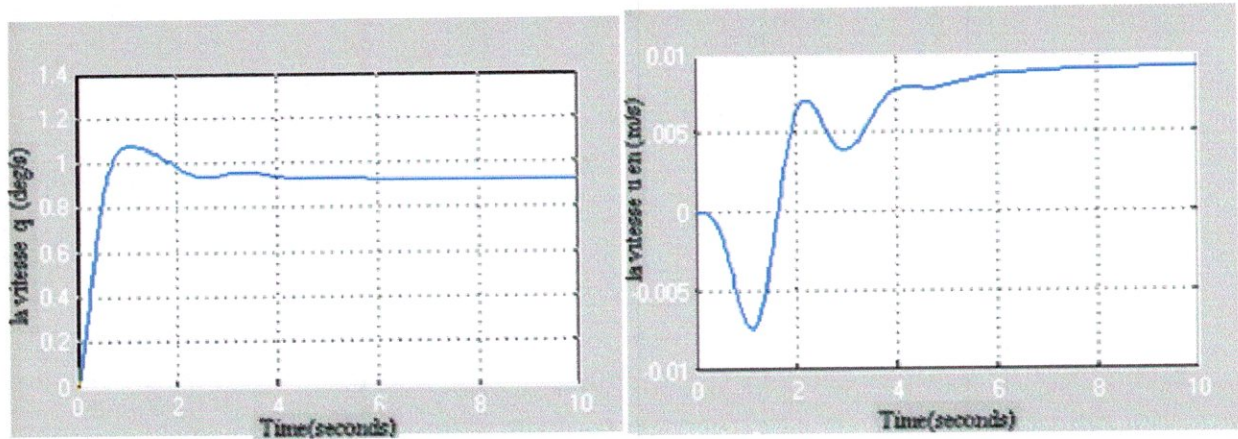


Fig. IV.27 Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse de tangage  $q$  de la commande  $H_{2LQG}$

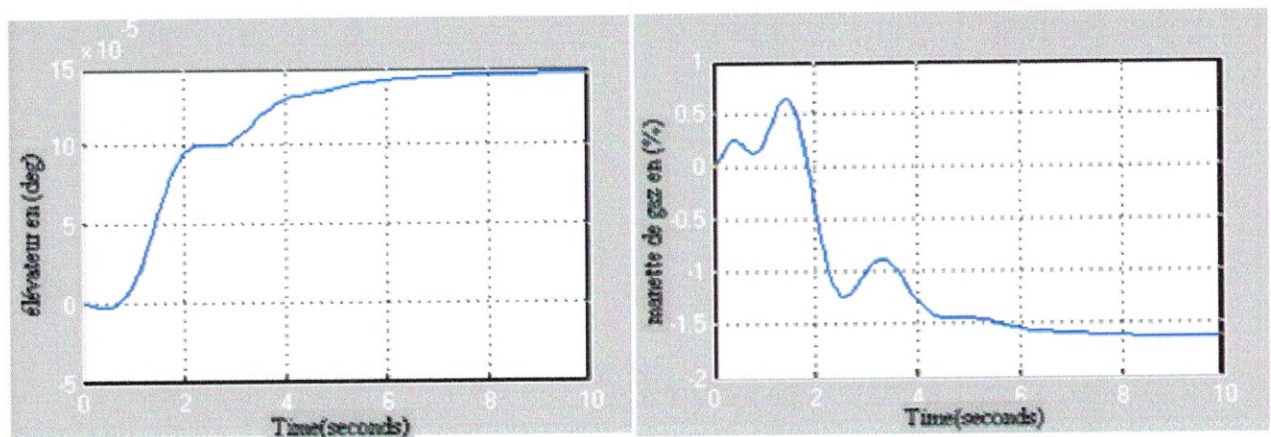


Fig IV. 28 Réponses des actionneurs à un échelon de vitesse de tangage  $q$  de la commande  $H_{2LQG}$

**Commentaire :**

Les figures IV.21,IV.25 représente les évolutions temporelles des états du model longitudinal de l'avion lorsqu' une commande en échelon de vitesse est appliquée. En régime permanent la variable suit exactement sa consigne les variables de sortie sont découplées les gains de commande du coté poussé est acceptable mais du coté gouvernes est inacceptable.

Les figures IV.22, IV.26 présente la réponse des actionneurs  $\delta_e$  et  $\delta_t$  : montre qu'une variation de l'angle des élévateurs  $\delta_e$  a pour effet final de modifier l'incidence  $\alpha$  et la vitesse V de l'appareil, alors que la manette des gaz  $\delta_t$  revient à son état initial après un court régime transitoire. Nous verrons que l'inverse se produit lors d'une augmentation de pente à vitesse constante.

Les figures IV.23, IV.24 et IV.27 ,IV. 28 présente les réponses temporelles du système bouclé à une telle perturbation, d'amplitude  $10 \text{ deg. s}^{-1}$ , et de fréquence  $f = 0.02 \text{ Hz}$ . Nous remarquons sur la première courbe (1) que le contrôleur annule l'effet de la perturbation en stabilisant la vitesse de tangage q, après un régime transitoire, à  $0 \text{ deg. s}^{-1}$ . Le suivi de la trajectoire de vol est également respecté puisque la pente  $\gamma$ , dont l'évolution temporelle est donnée par la courbe (2), retrouve sa valeur initiale, après un régime transitoire comme précédemment.

**Table IV.3 :** les principaux comparaisons qui peuvent être faits entre les commandes  $H_{2LQG}$  et  $H_\infty$

Synthèse $H_\infty$	Synthèse $H_{2LQG}$
$H_\infty$ identique à $H_{2LQG}$	$H_{2LQG}$ identique à $H_\infty$
Compensateur sous-optimal plus amélioré	Compensateur optimal
	Il ya une dégradation de la commande $H_{2LQG}$ par rapport à la commande $H_\infty$
Couplage dans la formulation des équations de Riccati	Obtenu directement à partir de résolution d'équation de Riccati
Erreur statique $\epsilon_s \approx 1/1000$	Erreur statique $\epsilon_s \approx 1/100$
Dépassement identique	Dépassement identique
Temps de repense plus petit	Temps de repense petit

A vertical dashed line consisting of 20 short, thick black horizontal bars spaced evenly along the left edge of the page.

# Conclusion générale

## Conclusion

Dans ce projet nous avons présenté une étude sur l'élaboration des lois de commandes pour l'autopilotage de l'avion B747. Après l'étude théorique consacrée aux lois de commandes et à la modélisation des équations de la dynamique de vol de l'avion, on a entamé l'étude en simulation pour le contrôle longitudinal de l'avion. La synthèse des lois de commandes est envisagée non seulement à cause de la robustesse qu'elle fournit aux contrôleurs, mais également pour sa souplesse d'utilisation sous MATLAB. Les lois de commandes choisies se sont avérées valables pour obtenir des performances acceptables et une robustesse vis-à-vis des variations paramétriques. A cet effet, un simple choix des pondérations pour la commande LQ/LQG conduit à des résultats acceptables mais moins robustes, dans l'autre côté on a rencontré quelques problèmes concernant le réglage des fonctions de pondération pour la commande  $H_2/H_\infty$  afin d'aboutir aux résultats désirés.

Plusieurs prolongations de ce travail peuvent être proposées. Dans le côté modélisation de l'avion, on peut élargir le modèle de l'avion à d'autres états où le couplage entre le modèle longitudinal et latéral n'est pas négligé et plus loin de prendre en considération l'effet d'élasticité de la structure avion puisque il s'agit d'un avion gros porteur. On ce qui concerne les lois de commande on propose d'étaler les lois de commandes vers des commandes plus robustes comme PRLQR et  $\mu$ -synthèse.



## BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Arzelier « **Représentation et analyse des systèmes linéaires** »

Notes de cours Version 5.1 LAAS-CNRS 07 Avenue du colonel Roche 31077 Toulouse  
cedex 04 France arzelier@laas.fr/http://www.laas.fr/~arzelier

[2] Mémoire présenté en vue de l'obtention du titre de MAGISTER par DILMI Smain  
"ELABORATION D'UN CONTROLEUR  $H_2/H_\infty$  DEDIE AU GUIDAGE D'UN  
AVION LEGER "

[3] Alazard, D « **Régulation LQ/LQG** », *Notes de cours*

[4] et [6] Ce mémoire intitulé : mise en œuvre du modèle et synthèse d'une loi de  
commande par commutation de compensateurs pour un avion commercial

Présenté par : DARBOIS Alexandre

En vue de l'obtention du diplôme de : maîtrise sciences appliquées.

[5] Airplane flight dynamics and automatic flight controls by: jan Roscam,ackers ditinguched  
professor of aero space engineering, the university of kansas.

# Annexe

## Annexe 1

### Expressions des dérivées de stabilité

En suivant la méthode vue au paragraphe III.3.5.2 du chapitre 3, on obtient les expressions suivantes des dérivées de stabilité, dans le repère de stabilité  $R_s$ .

On remarque que comme les coefficients aérodynamiques dépendent de l'incidence  $\alpha$  et non de la pente  $\gamma$ , les composantes dérivées par rapport à  $\gamma$  sont nulles.

### Force de portance $F_{z_s}$

Tab. I.1 - Dérivées de stabilité pour la force de portance  $F_{z_s}$

En utilisons l'équation (III-63) pour calculer les éléments de la matrice A et B :

$$F_{z_{sttn}} = \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u} \mathbf{u} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \gamma} \bar{\gamma} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \alpha} \bar{\alpha} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial Q} \mathbf{q} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial h} \bar{h} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_e} \bar{\delta}_e + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_t} \bar{\delta}_t$$

$$Z_u = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} V_e \frac{\partial F_{z_s}}{\partial (V-V_e)} \right|_{V_e} = \left. \frac{1}{m} V_e \frac{\partial F_{z_s}}{\partial V} \right|_{V_e} = \left. \frac{1}{m} V_e \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial V} \right|_{V_e} = -\frac{1}{m} V_e \rho S V_e (C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V})$$

$$Z_{\bar{\alpha}} = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \bar{\alpha}} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial \bar{\alpha}} \right|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\alpha}}$$

$$Z_q = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \mathbf{q}}$$

$$Z_{\bar{h}} = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \bar{h}} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial \bar{h}} \right|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{h}}$$

$$Z_{\bar{\delta}_e} = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \bar{\delta}_e} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial \bar{\delta}_e} \right|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\delta}_e}$$

$$Z_{\bar{\delta}_t} = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \bar{\delta}_t} \right|_0 = \left. \frac{1}{m} \frac{\partial (-\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L)}{\partial \bar{\delta}_t} \right|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\delta}_t}$$

$$X_{\bar{h}} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_{XS}}{\partial \bar{h}} \Big|_0 = \frac{1}{m} \frac{\partial \left( -\frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_D \right)}{\partial \bar{h}} \Big|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{h}}$$

$$X_{\bar{\delta}_e} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_{XS}}{\partial \bar{\delta}_e} \Big|_0 = \frac{1}{m} \frac{\partial \left( -\frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_D \right)}{\partial \bar{\delta}_e} \Big|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\delta}_e}$$

$$X_{\bar{\delta}_t} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_{XS}}{\partial \bar{\delta}_t} \Big|_0 = \frac{1}{m} \frac{\partial \left( -\frac{1}{2} \rho S V_e^2 C_D \right)}{\partial \bar{\delta}_t} \Big|_{V_e} = -\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\delta}_t}$$

$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial u}$	$X_u$	$-\frac{1}{m} V_e * \rho S V_e (C_D + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_D}{\partial V})$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial \bar{\alpha}}$	$X_{\bar{\alpha}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\alpha}}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial q}$	$X_q$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial q}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial \bar{h}}$	$X_{\bar{h}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{h}}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial \bar{\delta}_e}$	$X_{\bar{\delta}_e}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\delta}_e}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{X_s}}{\partial \bar{\delta}_t}$	$X_{\bar{\delta}_t}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\delta}_t}$

### Moment en tangage $M_{y_s}$

$$M_u = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial u} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} V_e \frac{\partial M_{y_s}}{\partial (V-V_e)} \Big|_{V_e} = \frac{1}{I_{yy}} V_e \frac{\partial M_{y_s}}{\partial V} \Big|_{V_e} = \frac{1}{I_{yy}} V_e \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial V} \Big|_{V_e} = \frac{1}{I_{yy}} V_e \rho \bar{c} S V_e (C_m + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_m}{\partial V})$$

$$M_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \bar{\alpha}} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial \bar{\alpha}} \Big|_{V_e} = \frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\alpha}}$$

$$M_q = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial q} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial q} \Big|_{V_e} = \frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial q}$$

$$M_{\bar{h}} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \bar{h}} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial \bar{h}} \Big|_{V_e} = \frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{h}}$$

$$M_{\bar{\delta}_e} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \bar{\delta}_e} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial \bar{\delta}_e} \Big|_{V_e} = \frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\delta}_e}$$

$$M_{\bar{\delta}_t} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \bar{\delta}_t} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial (\frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m)}{\partial \bar{\delta}_t} \Big|_{V_e} = \frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\delta}_t}$$

Tab. 1.3 - Dérivées de stabilité pour le moment en tangage  $M_{y_s}$

$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial u}$	$M_u$	$\frac{1}{I_{yy}} V_e * \rho \bar{c} S V_e (C_m + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_m}{\partial V})$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{z_s}}{\partial \bar{\alpha}}$	$M_{\bar{\alpha}}$	$\frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\alpha}}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{z_s}}{\partial q}$	$M_q$	$\frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial q}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{z_s}}{\partial \bar{h}}$	$M_{\bar{h}}$	$\frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{h}}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{z_s}}{\partial \bar{\delta}_e}$	$M_{\bar{\delta}_e}$	$\frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\delta}_e}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{z_s}}{\partial \bar{\delta}_t}$	$M_{\bar{\delta}_t}$	$\frac{1}{2 I_{yy}} \rho \bar{c} S V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\delta}_t}$

## Annexe2

Le programme :

```
clc % pour effacée les résultats précédants
rho=0.008580684/0.3048^3; % la masse volumique de l'air à 40000 ft en
(kg/m^3)
rho0=1.225; % la masse volumique de l'air à 0 ft en (kg/m^3)
v=871*0.3048; % la vitesse de l'avion en (m/s)
t0=288; % la temperature au niveau de la mère en (c°)
ve=v; % vitesse en (m/s)
s=5500*0.3048^2; % la surface de l'avion en (m^2)
c=27.3*0.3048; % la corde moyenne
Iyy=483028300*0.3048^2; % moment cynétique solant l'axe yy'
cl=0.52; % coefficient de la force de portance
cd=0.045; % coefficient de la force de traînée
cdalpha=0.5;
clv=-0.23;
g=9.81;
p=636636*0.453592;
m=p/g;
clq=7.8;
clalpha=5.5;
clalphadot=8;
clelev=0.3;
cmq=-25.5;
cm=0;
cmalpha=-1.6;
cmalphadot=-9;
cmelev=-1.2;

% la matrice A
A=[(-rho*s*ve*cd)/m,g/ve,(-rho*s*ve*cdalpha)/2/m,0; % la matrice A
(rho*s*ve*(cl+ve*clv/2))/m,0,(rho*s*ve*clalpha)/2/m,0;
(-rho*s*ve*(cl+ve*clv/2))/m,0,(rho*s*ve*clalpha)/2/m,1;
(rho*s*c*ve^2*cm)/Iyy,0,(rho*s*c*ve^2*cmalpha)/2/Iyy,(rho*s*ve^2*c*cmq)/2/Iyy]

% la matrice B
B=[0,(4*(rho/rho0)^0.6*t0)/m/ve;
(rho*s*ve*clelev)/2/m,0;
-(rho*s*ve*clelev)/2/m,0;
(rho*s*c*ve^2*cmelev)/2/Iyy,0]

% la matrice C
C=[1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,0,1];

% la matrice D
D=zeros(3,2);

damp(A); % Calcul l'atténuation des facteurs et des
fréquences normales
sysbo=ss(A,B,C,D); % Indiquer les modèles de l'état-espace
[y,t1]=step(sysbo);
figure(2);
plot(t1,y(:,1),'g',t1,y(:,2),'b',t1,y(:,3),'r'); % désignée le chémat
title(' : planeur en système en bo'); % le nom de figure
xlabel('Temps (sec)'); % le nom de l'axe x
```

```

ylabel('Amplitude - dB') % le nom de l'axe y
grid % Lignes de grille
% la commande quadratique LQ
kLQ=lqr(A,B,1*C',1*eye(2,2)); % Concevoir le régulateur
linéaire % Valeurs propres
eig(A-B*kLQ);

% reponse a un step
abf=A-B*kLQ;
sys22=ss(abf,B,C,D);
figure(2);
pzmap(sys22); % désignée le chémat (les poles
et les zéros)
[ybf,t2]=step(sys22);
figure(3);
plot(t2,ybf(:,1),'g',t2,ybf(:,2),t2,ybf(:,3));
title('Reponse du systeme et kf au step de la LQ');
grid;

%synthese LQG
kf=lqr(A',C',B*B',eye(3,3));
kf=kf';
eig(A-kf*C)
% calcul correcteur LQG
aklqg=A-B*kLQ-kf*C;
bklqg=kf;
cklqg=-kLQ;
dklqg=0;
sys33=ss(A-kf*C,B,C,D);
figure(4);
pzmap(sys33);
[y33,t3]=step(sys33);
figure(5);
plot(t3,y33(:,1),'g',t3,y33(:,2),'r',t3,y33(:,3));
title('Reponse du correcteur LQ');
grid;

% synthese LQG/LTR
%calcul gain d'estimation
kf=lqr(A',C',B*B',eye(3,3)*10^(-8));
kf=kf';
eig(A-kf*C);
% calcul correcteur LQG
aklqgltr=A-B*kLQ-kf*C;
bklqgltr=kf;
cklqgltr=-kLQ;
dklqgltr=0;
sys34=ss(A-B*kLQ,B,C,D);
dklqg=zeros(2,3);
[ac10,bc10,cc10,dc10]=series(aklqg,bklqg,cklqg,dklqg,A,B,C,D);
[ac10,bc10,cc10,dc10]=cloop(ac10,bc10,cc10,dc10,+1);
SBFLQG0=ss(ac10,bc10,cc10,dc10);
tfinal=10;
[y0,time0]=step(-SBFLQG0,tfinal);
figure(6);
plot(time0,y0(:,1),'r',time0,y0(:,2),'k',time0,y0(:,3),'g')

```



```

title('réponse du système au LOG/LTR');
grid;

% commande robuste H2/H00
figure(7);
hold on;
k=1e-5;
numu=k*[250^2 2*250 1];
denu=[1/2.5^2 2/2.5 1];
numg=k*[625^2 2*625 1];
deng=[1/6.25^2 2/6.25 1];
numq=[0 0 1];
denq=[0 0 1];
wu=[numu;denu];
bode(numu,denu)
wg=[numg;deng];
bode(numg,deng)
wq=[numq;denq];
ss_g = ss(A,B,C,D);
w1=[wu;wg;wq];
figure(8);
nume=30*[1/50000 1];
dene=[1/20 1];
we=[nume;dene];
bode(nume,dene)
numt=400*[1/50000 1];
dent=[1/20 1];
wt=[numt;dent];
bode(numt,dent)
grid
w2=[we;wt];
w3=[];
[TSS_] = augtf(ss_g,w3,w2,w1)

% Hinfini
[ss_cp,ss_cl,hinfo] = hinfopt(TSS_)
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl]=branch(ss_cl)
w = logspace(-3,5,50);
sv = sigma(A,B,C,D,1,w); sv = 20*log10(sv)
figure(9);
semilogx(w,sv)
title('systeme MIMO ')
xlabel('Fréquence - Rad/s')
ylabel('SV - dB')
grid
[al,bl,cl,dl] = series(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,A,B,C,D)
[als,bls,cls,dls] = feedback(al,bl,cl,dl,1);
[at,bt,ct,dt] = feedback(al,bl,cl,dl,2);
svs = bode(als,bls,cls,dls,1,w); svs = 20*log10(svs);
svt = bode(at,bt,ct,dt,1,w); svt = 20*log10(svt);
svwu = bode(numu,denu,w);svwu = 20*log10(svwu);
svwg = bode(numg,deng,w); svwg = 20*log10(svwg);
svwe = bode(nume,dene,w);svwe = 20*log10(svwe);

```

```

svwt = bode(numt,dent,w); svwt = 20*log10(svwt);
frapper une clé pour voir les tracages de la sensibilité et de la sensibilité
complémentaire
figure(10);
semilogx(w,svwu,'g--',w,svwg,'b--',w,svs)
title(' : sensibilité et sensibilité complémentaire');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('Gain - db')
grid

figure(11);
semilogx(w,svwe,'g--',w,svwt,'b--',w,svt)
title(' : sensibilité et sensibilité complémentaire');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('Gain en - db')
grid

figure(12)
semilogx(w,svwu,'g',w,svwg,'b')
title(' : gain en 1/w en vert et 1/wq en bleu');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid
figure(13)
semilogx(w,svwe,w,svwt)
semilogx(w,svwe,'g',w,svwt,'b')
title(' : gain en 1/w en vert et 1/wq en bleu');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid

%comparison
figure(14)
semilogx(w,svwu,'g--',w,svwg,'b--',w,svwe,'r',w,svwt,'k')
title(' : comparaison entre deux et trois données');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid

%h2
[ss_cp,ss_cl] = h2lqg(TSS_)
[Acp,Bcp,Ccp,Dcp] = ssdata(ss_cp);
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = ssdata(ss_cl);
[ac10,bcl0,cc10,dcl0]=series(Acp,Bcp,Ccp,Dcp,A,B,C,D);
svtt = sigma(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,1,w); svtt = 20*log10(svtt);
w = logspace(-3,5,50);

figure(15);
semilogx(w,svtt)
title(' : gain en 1/w en vert');
xlabel('Frequency - Rad/sec')
ylabel('SV - db')
grid
[as,bs,cs,ds] = feedbk(ac10,bcl0,cc10,dcl0,1);
[at,bt,ct,dt] = feedbk(ac10,bcl0,cc10,dcl0,2);
svs = bode(as,bs,cs,ds,1,w); svs = 20*log10(svs);

```

```

svt = bode(at,bt,ct,dt,1,w); svt = 20*log10(svt);
svwu = bode(numu,denu,w);svwu = 20*log10(svwu);
svwg = bode(numg,deng,w); svwg = 20*log10(svwg);
svwe = bode(ume,dene,w);svwe = 20*log10(svwe);
svwt = bode(numt,dent,w); svwt = 20*log10(svwt);

```

```

figure(16)
semilogx(w,svwu,'a',w,svwg,'r')
title('Caractérisation 1/wu en vert et 1/wg en bleu');
xlabel('Fréquence - Rad/Sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid

```

```

figure(17)
semilogx(w,svwe,w,svwt)
semilogx(w,svwe,'g',w,svwt,'r')
title('Caractérisation 1/we en vert et 1/wt en bleu');
xlabel('Fréquence - Rad/Sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid

```

```

figure(18);
semilogx(w,svwu,'a--',w,svwg,'b--',w,svs)
title('Caractérisation de sensibilité en - db (1/wl(---))');
xlabel('Fréquence - Rad/Sec')
ylabel('Gain - db')
grid

```

```

figure(19);
semilogx(w,svwe,'g--',w,svwt,'b--',w,svt)
title('Caractérisation de sensibilité en - db (1/we(---))');
xlabel('Fréquence - Rad/Sec')
ylabel('Gain en - db')
grid

```

```

figure(20);
semilogx(w,svwu,'a--',w,svwg,'b--',w,svwe,'g',w,svwt,'r')
title('Compromis entre S(1--), T(1--), H(1--), H(1--))');
xlabel('Fréquence - Rad/Sec')
ylabel('Amplitude en - db')
grid

```