

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
Département De Mathématiques



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Réalisé par

HASSINI SALIMA & MEDJEBER ASMA

ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES

Devant le jury :

- Mme N. MESSAOUDI MCB/U.Blida 1 Présidente
- Mme N. BENAHMED MAA/U.Blida 1 Examinatrice
- Mme L. BETROUNI MCB/U.Blida 1 Rapporteuse

Promotion : 2020/2021

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	6
Résumé	9
Abstract	10
Résumé en Arabe	11
Introduction	12
1 Notions Préliminaires	14
1.1 Rappels de Topologie	14
1.1.1 Espaces topologiques et espaces métriques	14
1.1.2 Espaces compacts	16
1.1.3 Espaces normés	16
1.1.4 Espaces de Banach et opérateur contractant	17
1.1.5 Théorème d'Ascoli-Arzelà	17
1.2 Rappels sur l'intégration	21

1.2.1	L'intégrale de Riemann	21
1.2.2	L'intégrale de Lebesgue	24
1.2.3	Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue	27
1.2.4	Intégration numérique	27
1.2.5	Polynôme de Legendre et de Lagrange	31
2	Les équations intégrales	33
2.1	Définition d'une équation intégrale	33
2.2	Classification des équations intégrales	33
2.2.1	Équations intégrales linéaires	34
2.2.2	Équations intégrales non linéaires	37
3	Les méthodes de résolution directes des équations intégrales	39
3.1	Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz	39
3.2	Liaison entre les équations différentielles et les équations intégrales	40
3.3	Méthodes directes	42
3.3.1	Le problème de Cauchy de second ordre	42
3.3.2	Réduction d'un Problème aux limites de second type	43
3.3.3	Équation intégrale à noyau dégénéré	43
4	Applications des théorèmes de point fixe aux équations intégrales	49
4.1	Théorème du point fixe	49
4.1.1	Théorème de Banach	49
4.1.2	Théorème de Brouwer	51
4.1.3	Théorème de Schauder	52
4.2	Application du principe des contractions de Banach	54
4.3	Application du théorème de Schauder	57
5	Méthodes de résolution numériques des équations intégrales	60
5.1	Méthode des approximations successives	60
5.1.1	Cas linéaire	61
5.1.2	Cas non linéaire	65

5.2	Méthode de la solution en série	69
5.2.1	Cas linéaire	69
5.2.2	Cas non linéaire	73
5.3	Méthode de la résolvante et noyaux itérés	75
5.3.1	Cas de l'équation de Fredholm	75
5.4	Méthode de Boubnov-Galerkin	77
5.5	Méthode de somme finie	78
	Conclusion et perspectives	82
	Références bibliographiques	83

TABLE DES FIGURES

1.1 Ensemble convexe et ensemble non convexe	17
1.2 Règle de trapèze	28
1.3 Polynôme de Legendre	31

Notations

$C([a, b])$	L'ensemble des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$
$[a, b]$	Intervalle réel
u	Fonction inconnue
\tilde{u}	Fonction approximée
A	Opérateur linéaire
T	Opérateur linéaire compact
λ	Paramètre réel
$\ \cdot\ $	Norme
$v(x)$	Ensemble de voisinage
$d(x, y)$	La distance entre x et y
$\Delta(\lambda)$	Déterminant
$\overline{co}(K)$	L'enveloppe fermé connexe
B_r	Boule fermée
$K(x, t)$	Noyau de l'intégrale
\mathcal{T}_{cu}	La topologie de la convergence uniforme sur $B(X, Y)$
$U^n(x)$	Dérive n^{ime} de U

REMERCIEMENTS

Avant tout, merci pour le grand **Dieu** notre créateur qui nous a donné la volonté, la patience et la santé durant cette période.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et notre vifs remerciements à notre promotrice *M^{me}* **Betrouni Latifa** , qui nous a accueilli, accompagné et conseillé tout ou long de ce parcours.

Nous tenons aussi à remercier les membres des jurys d'avoir accepté à examiner notre travail.

Finalement, nous exprimons nos sincères gratitude à ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

DEDICACE

Ce modeste travail est dédié à :

Mes chers parents Ali et Aïcha, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.

Mes chères soeurs Hafida, Souad, Hakima, pour leurs encouragements et leur soutien moral.

Mes chers frères et à leurs femmes.

Tous les enfants de ma famille.

Ma chère amie Fatima.

Tous les gens qui m'aiment.

★SALIMA★

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Les plus belles créatures que Dieu a créées sur terre.

Ces sources de tendresse, de patience et de générosité ...

Mes parents l'oxygène de ma vie.

Mes frères Nessedine , Hassane , Abderrezak,

Ma soeur chahrazed.

Tous les membres de notre grande famille Medjeber.

Tous mes amis et mes proches sans exception.

Tout ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer ...

★ASMA★

Résumé

Dans ce travail, nous traitons différents types d'équations intégrales telles que les équations intégrales linéaires et non linéaires, les équations intégrales de Volterra et les équations intégrales de Fredholm. Notre recherche se concentre sur les espaces de Banach. En appliquant certains théorèmes du point fixe, nous pouvons prouver certains résultats d'existence et d'unicité de la solution d'équations intégrales. Nous étudions également quelques méthodes numériques pour approximer la solution.

Mots clés : Équations intégrales, équation de Volterra, équation de Fredholm, la théorie du point fixe.

Abstract

In this work we deal with different types of integral equations such as linear and nonlinear integral equations, Volterra integral equations and Fredholm integral equations. Our research is focused in Banach spaces. Applying some fixed point theorems we can prove some results of existence and uniqueness of solution of integral equations. We also study some numerical methods to approximate the solution.

Key words : Integral equation, Volterra equation, Fredholm equation, the theory of fixed point.

ملخص

في هذا البحث نتعامل مع أنواع مختلفة من المعادلات التكاملية مثل المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية، المعادلات التكاملية لفولتيرا و المعادلات التكاملية لفريدهولم. يتركز بحثنا في فضاءات باناخ. بتطبيق بعض نظريات النقطة الثابتة التي يمكننا من إثبات بعض نتائج وجود وتفرد حل هذه المعادلات كما ندرس بعض الطرق العددية لتقريب الحل.

الكلمات المفتاحية : معادلة تكاملية، معادلة فولتيرا، معادلة فريدهولم، نظرية النقطة الصامدة.

INTRODUCTION

L'émergence de la théorie des équations intégrales [20], était la nécessité pour les mathématiciens d'aborder certains problèmes de vibration en mécanique et quelques problèmes en physique. Volterra Vito [15] 1860-1920 fut le premier mathématicien qui a écrit dans ce domaine à la fin du 19 siècle. Il développa les concepts de base de cette théorie, mais il n'avait aucun moyen de la résoudre, cela a ouvert la voie à Fredholm [21] 1866 - 1920 pour donner une solution à ces équations et a ouvert large voie de recherche dans ce domaine, où de nouveaux types d'équations intégrales linéaires et non linéaires sont apparus plus tard. L'étude des équations intégrales nous conduit vers les théorèmes du point fixe [5, 6, 7] qui sont la branche cardinale de l'analyse non linéaire. En réalité, les théorèmes de point fixe ont un grand effet sur l'avancement de l'analyse non linéaire, ils sont utilisés pour démontrer l'existence de solutions des différents genres d'équations, en particulier les équations intégrales. Le mémoire se compose de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, on introduit les notations, définitions, lemmes et les théorèmes qu'on va utiliser à travers ce mémoire. Le deuxième chapitre, est composé de deux parties. Nous définissons dans la première partie la notion d'équation intégrales et dans la seconde partie, nous présentons la classification des équations intégrales, cette partie a pour objectif de familiariser le lecteur avec le concept d'équation intégrale. Le troisième chapitre, comprend les méthodes de résolution directes des équations

intégrales avec des exemples, ces méthodes sont élémentaires et connus (voir [8, 11]). Dans le quatrième chapitre, nous rappelons quelques théorèmes importants tels que le théorème de Banach, Schauder et Brouwer et exposons leurs application aux équations intégrales. Le cinquième chapitre, est consacré essentiellement à présenter divers méthodes de résolution numériques pour les équations intégrales. Ces méthodes d'approximations telles que la méthode d'approximation successive [8], la méthode de la solution en série [8], la méthode de la résolvante et noyaux itérés [11], la méthode de Boubnov-Galerkin [11] et celle de somme finis [13] sont illustrées par des exemples instructifs, sur lesquels nous avons travaillé pour trouver les solutions.

À la fin, notre mémoire s'achève par une conclusion générale.

CHAPITRE

1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on introduit quelques définitions, notations, corollaires et quelques théorèmes qui seront utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Rappels de Topologie

1.1.1 Espaces topologiques et espaces métriques

Pour plus détails sur la terminologie utilisée, on reporte le lecture au livre [1].

Définition 1.1. *Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble \mathcal{T} de parties de X ,*

i.e $\mathcal{T} \subset P(X)$ vérifiant les propriétés suivantes, appelées axiomes des ouverts :

$$(O_1) \emptyset, X \in \mathcal{T},$$

(O₂) Si $U \cdot V \in \mathcal{T}$ alors $U \cap V \in \mathcal{T}$,

(O₃) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à \mathcal{T} , alors $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

L'ensemble X , muni de la topologie \mathcal{T} , est appelé espace topologique. Les ouverts sont les éléments de la topologie \mathcal{T} .

Définition 1.2. Soit X un espace topologique $x \in X$. On appelle voisinage de x toute partie V qui contient un ouvert contenant le point x .

Définition 1.3. On dit qu'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est séparé si pour tout couple de points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$, il existe $V \in v(x)$ et $W \in v(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$. on dit aussi que la topologie \mathcal{T} sépare les points de X .

Définition 1.4. Soit X un espace topologique $x \in X$ et $A \subset X$

On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A .

L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note \bar{A} .

Définition 1.5. Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application.

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y).$$

Possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

$$(d_1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(d_2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(d_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Muni de la distance d , X est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace (X, d) .

Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X .

Définition 1.6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est continue en x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| < \delta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

1.1.2 Espaces compacts

Définition 1.7. Soit X un espace topologique séparé, on dit que X est compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Autrement dit pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de X telle que $X = \cup_{i \in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \cup_{i \in J} U_i$.

Remarque 1.1. Dans un espace de dimension finie, A est une partie compact ssi elle est fermée bornée.

Définition 1.8. Soient X un espace topologique et A une partie de X , on dit que A est relativement compacte si \bar{A} est compact.

1.1.3 Espaces normés

Définition 1.9. Une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E est une application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ x &\longmapsto \|x\|, \end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$. (Séparation)
2. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. (Homogénéité)
3. Pour tout $x, y \in E$. On a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Inégalité de convexité)

l'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$, est dit espace normé ou espace vectoriel normé, (ou \mathbb{K} -espace vectoriel normé, si on veut préciser le corps \mathbb{K}). On note souvent un tel espace $(E, \|\cdot\|)$.

Remarquons qu'on peut déduire de la deuxième propriété que l'on a $\|0\| = 0$.

Définition 1.10. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et A un sous-ensemble de E ,

1. Soient $x, y \in E$ on appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble :
 $[x, y] = \{(1 - t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$,
2. On dit que A est convexe si pour tout $x, y \in A$, le segment de E d'extrémités x et y est contenu dans A .

Autrement dit, A est convexe si pour tout $t \in [0, 1]$, On a $tA + (1 - t)A \subset A$.

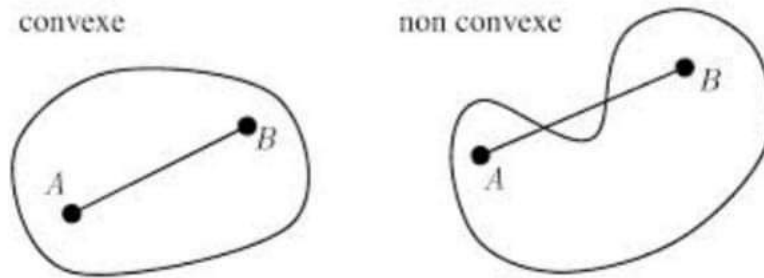


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe et ensemble non convexe

1.1.4 Espaces de Banach et opérateur contractant

Définition 1.11. On appelle espace de Banach tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$ complet pour la distance associée à la norme.

Définition 1.12. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, un opérateur T est une application de E dans F .

Proposition 1.1. Les \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.

Définition 1.13. Soit A un opérateur sur un espace Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ on dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive $0 < k < 1$ telle que :

$$\|A_{u_1} - A_{u_2}\|_E \leq k \|U_1 - U_2\|_E.$$

Pour tout $U_1, U_2 \in E$.

Définition 1.14. Soient E et F deux espaces de Banach, on appelle un opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F .

1.1.5 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 1.1. [1] Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique complet.

Alors les espaces métriques : (Y^X, \mathcal{T}_{cu}) et $(B(x, y), \mathcal{T}_{cu})$ sont complets.

Corollaire 1.1. Soient X un espace topologique, et (Y, d) un espace métrique complet.

Alors l'espace métrique $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ est complet.

Si de plus X est compact alors l'espace métrique $(C(X, Y), D_\infty)$ est complet.

Remarque 1.2. $D_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Théorème 1.2 (d'Ascoli-Arzelà). *Soient (K, d) un espace métrique compact et A Une partie de l'espace vectoriel normé $(C(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues sur K . Les 2 propriétés sont équivalentes :*

1. *La partie A équicontinue et bornée.*
2. *La partie A est relativement compacte.*

Démonstration. [2]

Supposons que A soit équicontinue et bornée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et soit $\varepsilon > 0$. comme l'ensemble $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur K compact, il est même équicontinue d'après la forme équicontinue du théorème de Heine[18], ainsi il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$:

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon \\ \forall n \in N. \end{cases}$$

on a :

$$K = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta).$$

Comme A est compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue $x_1, \dots, x_N \in K$ tels que :

$$K = \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta),$$

puisque X est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in N$, $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc pour tout $i \in [1, N]$ On a :

$$\{f_n(x_i), n \in N\} \subset \overline{B(0, M)},$$

et cet ensemble est alors relativement compact, par le procédé d'extraction diagonale, il existe donc une extractrice $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in [1, N]$ la suite $f_{n_k}(x_i)_{k \in \mathbb{N}}$ converge ; elle est donc de Cauchy. par conséquent il existe $n_i \in N$ tel que pour tous $k, k' \in N$ on ait :

$$k, k' \geq n_i \Rightarrow |f_{n_k}(x_i) - f_{n_{k'}}(x_i)| \leq \varepsilon.$$

On pose $n_{\max} \{n_i, i \in [1, N]\}$ tel que $x \in B(x_{i_0}, \delta)$ pour tous $k, k' \in N$ On a :

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{i_0})| + |f_{n_k}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x_{i_0})| \\ &\quad + |f_{n_{k'}}(x_{i_0}) - f_{n_{k'}}(x)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme n_{\max} est indépendant de x on peut passer à la borne supérieure sur x :

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k'}}\|_{\infty} \leq 3\varepsilon.$$

La suite $(f_{n_k})_{k \in N}$ est donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$ qui est complet donc converge vers un élément de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

En conclusion A est relativement compacte.

Supposons que A soit relativement compacte

Puisque \bar{A} est compacte donc bornée et par suite A aussi.

Montrons que A est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$ on a :

$$\bar{A} \subset \bigcup_{f \in \bar{A}} B(f, \varepsilon)$$

par Borel-Lebesgue il existe $f_1, \dots, f_N \in \bar{A}$ telles que :

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^N B(f_i, \varepsilon)$$

pour tout $i \in [1, N]$ les f_i sont uniformément continues d'après le théorème de Heine, par suite il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$:

$$d(x, y) \leq \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon$$

posons alors $\delta = \min_{i \in [1, N]} \delta_i$

soient $x, y \in K$ tels que $d(x, y) \leq \delta$ et $f \in A$ il existe $i_0 \in [1, N]$ tel que $f \in B(f_{i_0}, \varepsilon)$

alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| \\ &\quad + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc A est équicontinue. □

L'utilité du théorème d'Ascoli-Arzéla est illustrée par l'étude de l'exemple suivant :

Exemple 1.1. Soient $k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et B une partie bornée de $E = (C[a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ pour tout $f \in E$ et pour tout $s \in [a, b]$, on pose :

$$k(f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt.$$

On traite cet exemple en deux étapes, d'abord on montre que la partie $H = \{k(f); f \in B\}$ est uniformément équicontinue, ensuite que H est une partie relativement compacte de E .

1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $f \in B$ pour tout $t \in [a, b]$ pour tous $S, S' \in [a, b]$ et pour tout $f \in B$, On a :

$$k(f)(s) - k(f)(s') = \int_a^b (k(s, t) - k(s', t))f(t)dt.$$

D'ou

$$\begin{aligned} |k(f)(s) - k(f)(s')| &\leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)||f(t)| dt, \\ &\leq M \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)| dt. \end{aligned}$$

Comme K est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$ alors K est uniformément continue.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $S, S', t, t' \in [a, b]$ vérifiant :

$$|s - s'| < \eta \quad \text{et} \quad |t - t'| < \eta,$$

on ait $|k(s, t) - k(s', t')| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$,

par conséquent pour tous $S, S' \in [a, b]$ vérifiant $|S - S'| < \eta$

On a : $|K(f)(s) - k(f)(s')| < \varepsilon$, pour tout $f \in B$

Donc H est uniformément équicontinue.

2. Comme K est continue et $[a, b] \times [a, b]$ est compact il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $(s, t) \in [a, b] \times [a, b]$ on ait $|K(s, t)| < \lambda$,

Soit $s \in [a, b]$, alors pour tout $f \in B$, on a :

$$|k(f)(s)| \leq M\lambda(b-a), \text{ donc } \{k(f)(s); f \in B\}.$$

est une partie relativement compacte dans \mathbb{R} . D'après le théorème d'Ascoli, H est une partie relativement compacte de E .

Définition 1.15. (Espace $L^2([a, b])$) On dit qu'une fonction f est carrée intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

On désigne par $L^2([a, b])$ l'ensemble de toutes les fonctions carrée intégrable sur $[a, b]$.

Définition 1.16. (Espace $C([a, b])$) Les éléments de cet espace sont tous les fonctions définies est possédant sur cet intervalle $[a, b]$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre 1, la norme d'un élément $f \in C([a, b])$ est défini par la formule $\|f\| = \sum_{i=0}^1 \sup_{x \in [a, b]} |f^i(x)|$.

1.2 Rappels sur l'intégration

1.2.1 L'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est un moyen assez simple de déterminer l'intégrale sur un intervalle donné d'une fonction. En termes géométriques, cette intégrale est principalement représentée par l'espace du domaine au niveau du graphe de la fonction [3].

1.2.1.1 Subdivisions

Définition 1.17. soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} . On appelle subdivision de $[a, b]$ toute partie de points de $[a, b]$ contenant a et b .

Une telle subdivision peut donc s'écrire de façon unique,

$$d = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \text{ où } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

et détermine n intervalles compact : $[X_{i-1}, X_i], i = 1, \dots, n$ appelées intervalles partiels de la subdivision.

Si d est une subdivision de $[a, b]$ et $C \subset [a, b]$ une partie finie, la réunion $d \cup E$ est encore une subdivision de $[a, b]$.

Définition 1.18. Soit d et d' deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que d' est plus fine que d si $d \subset d'$.

Proposition 1.2. La subdivision $d \cup d'$ est plus fine que d et d' , si E est une partie finie $[a, b]$ la subdivision $d \cup E$ est plus fine que d .

Définition 1.19. Soit $d = \{x_0 \cdots x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, le réel strictement positif

$$\delta(d) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i, x_{i-1}),$$

est appelé pas de la subdivision d .

Proposition 1.3.

$$d \subset d' \Rightarrow \delta(d) \leq \delta(d').$$

1.2.1.2 Sommes de Darboux et ses Propriétés

Dans toute la suite on considérera que des fonctions bornées $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty,$$

soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$ et $d = \{x_0 \cdots x_n\}$

Une suite subdivisions de $[a, b]$,

posons :

$$m_i = m_i(f) = m_i(f, d) = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

$$M_i = M_i(f) = M_i(f, d) = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

les nombres m_i, M_i sont toujours finis puisque $\|f\| < \infty$.

Définition 1.20. *Considérons*

$$s = s(f, d) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$S = S(f, d) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Ces deux sommes sont dites sommes de Darboux respectivement inférieure et supérieure de f relativement à la subdivision d .

Propriétés

1. $\forall d : s(f, d) \leq S(f, d)$,
2. Si $d \subset d'$ alors ,
 - $S(f, d) \geq S(f, d')$,
 - $s(f, d) \leq s(f, d')$,

3. Soit d une subdivision de $[a, b]$ et $E \subset [a, b]$, on note $\text{Card } E =$ nombre d'éléments de E , est une partie finie Alors :

$$\begin{aligned} S(f, d) &\leq S(f, d \cup E) + 2\|f\|\delta(d) \text{ cond } E, \\ s(f, d \cup E) &\leq s(f, d) + 2\|f\|\delta(d) \text{ cond } E. \end{aligned}$$

4. Deux subdivisions quelconques d_1 et d_2 de $[a, b]$ vérifient

$$s(f, d_1) \leq S(f, d_2).$$

1.2.1.3 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 1.21. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si :

$$\int_a^b f dx = \int_a^{*b} f dx.$$

La valeur commune de l'intégrale inférieure et de l'intégrale supérieure est alors appelée intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et notée $\int_a^b f dx$.

Théorème 1.3 (Darboux). Si la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée, alors

$$\int_a^{*b} f dx = \lim_{\delta(d) \rightarrow 0} S(f, d), \quad \int_a^b f dx = \lim_{\delta(d) \rightarrow 0} s(f, d).$$

1.2.1.4 Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $d = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$.

Définition 1.22.

$$\sigma(f, d) = \sigma(f, d\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$

ou

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n,$$

est dite sommes de Riemann de f correspondant à d et au système des points $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Théorème 1.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est est intégrable, alors :

$$\lim_{\delta(d) \rightarrow 0} \sigma(f \cdot d, \xi) = \int_a^b f dx.$$

1.2.1.5 Propriétés de l'intégrale de Riemann

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors f est intégrable sur chaque intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.
2. Soit $C \in]a, b[$ si f est intégrable séparément sur $[a, c]$ et $[c, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.
3. Si f est intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$ alors :

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

4. Soit $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_k = b$ une subdivision de $[a, b]$ si f est intégrable sur $[c_{i-1}, c_i], n = 1, \dots, k$, alors est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b f dx = \int_a^{c_1} f dx + \int_{c_1}^{c_2} f dx + \dots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f dx .$$

5. Quels que soient les points a, b, c , on a

$$\int_a^b f dx + \int_b^c f dx + \int_c^a f dx = 0 \text{ (relation de chasles).}$$

1.2.2 L'intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue est vraiment un outil majeur de l'analyse moderne. Elle a permis de nombreux progrès. Un des problèmes de l'enseignement actuel est d'essayer de l'enseigner le plus tôt possible, afin de mettre ce formidable outil à la disposition de tous les scientifiques, notamment des physiciens [4].

1.2.2.1 Fonctions mesurables

La mesurabilité des fonctions réelles est une propriété faible, au sens où elle constitue une exigence minimale, toujours vérifiée en mathématiques appliquées.

Définition 1.23. (Espace mesurable) Une classe \mathcal{T} des parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ -algèbre si elle vérifie les trois axiomes suivantes,

(i) $E \in \mathcal{T}$,

(ii) pour tout $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{T}$,

(iii) Si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de \mathcal{T} , alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$.

On dit alors que (E, \mathcal{T}) est un espace mesurable et les éléments de \mathcal{T} sont appelés les ensembles mesurables.

Définition 1.24. Soient (E_1, \mathcal{T}_1) et (E_2, \mathcal{T}_2) des espaces mesurables. Une fonction $f : E_1 \rightarrow E_2$ est mesurable si :

$$\forall A \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$$

Définition 1.25. La fonction indicatrice du sous-ensemble mesurable A de l'espace E , notée \mathbf{I}_A , est définie par :

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la plus simple des fonctions mesurables.

1.2.2.2 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives et quelconques

Toutes ces fonctions étant définies sur un espace mesuré (E, \mathcal{T}, μ) , et prenant des valeurs réelles.

Définition 1.26. L'intégrale de la fonction indicatrice $\mathbf{I}_A, A \in \mathcal{T}$, est définie par :

$$\int \mathbf{I}_A d\mu = \mu(A).$$

Définition 1.27. Une fonction mesurable est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre finie de valeurs.

Définition 1.28. Soit f une fonction étagée positive (i.e. $y_i \in \mathbb{R}^+$)

On appelle intégrale de Lebesgue le nombre :

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i)$$

avec les précisions suivantes :

- Si $y_i = 0$ et si la mesure de A_i est infinie, alors $y_i \mu(A_i) = 0$.
- $\int f d\mu \geq 0$.

Théorème 1.5. (*Approximation d'une fonction mesurable positive*) Toute fonction mesurable positive f de (E, \mathcal{T}, μ) dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ est égale à la limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives et mesurables.

Définition 1.29. L'intégrale d'une fonction mesurable positive f est égale à :

$$\sup_{\phi} \left\{ \int \phi d\mu \mid \phi \text{ fonction étagée positive } \leq f \right\} \stackrel{\text{noté}}{=} \int f d\mu.$$

Définition 1.30. On définit les fonctions mesurables :

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = -\inf(f, 0),$$

d'où les expressions de f et de $|f|$:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Définition 1.31. (μ -intégrabilité d'une fonction) Une fonction mesurable f de (E, \mathcal{T}, μ) dans $\overline{\mathbb{R}}$, est μ -intégrable si $\int |f| d\mu$ est finie ; on alors :

$$\int_{\mathbf{E}} f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f^+ d\mu - \int_{\mathbf{E}} f^- d\mu.$$

Théorème 1.6. Si f est μ -intégrable alors f est finie presque partout l'ensemble : $\{x \mid |f(x)| = +\infty\}$ est négligeable.

1.2.2.3 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Définition 1.32. Une fonction à valeurs réelles f est sommable si et seulement si les deux fonction f^+ et f^- sont sommables, et on pose alors :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

1. L'intégrale de Lebesgue est fonctionnelle linéaire.
2. Si K est sous-espace de mesure nulle, alors l'intégrale d'une fonction f sur k est nulle.
3. Si f est nulle presque par tout sur A , alors l'intégrale de f sur A est nulle.

4. Soit f et g deux fonctions sommables, telles que $f \geq g$ presque partout sur A , alors :

$$\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu.$$

5. Si f est sommable sur A , alors, on a :

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

1.2.3 Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue

- (1) Si l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ existe, alors l'intégrale de Lebesgue $\int f \cdot \mathbf{I}_{[a,b]} dm$ existe et égale à la précédente; c'est le cas des fonctions f continues sur un fermé borné.
- (2) Seules les intégrales généralisées absolument convergentes au sens de Riemann, coïncident avec les intégrales de Lebesgue.
- (3) L'intégrale de Riemann est définie à partir de la notion de fonction en escalier (constant sur des intervalles ouverts), alors que l'intégrale de Lebesgue est construite partir de la notion de fonction mesurable étagées (qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs), et cette dernière notion est plus forte.
- (4) Riemann-intégrable implique Lebesgue-intégrable mais la réciproque est fausse (indicatrice de \mathbb{Q} sur $[0, 1]$ par exemple).

1.2.4 Intégration numérique

Les méthodes numériques servant à l'approximation de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ sont de la forme générale suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{k=0}^n W_k f(x_k),$$

où les coefficients W_k sont appelés coefficients de pondération, les x_k sont les abscisses ou les noeuds situés dans l'intervalle $[a, b]$ de l'intégration et en lesquels l'intégrale f doit être évaluée [9].

1.2.4.1 La méthode du trapèze

La méthode du trapèze (dite aussi la règle de trapèze) est la méthode d'intégration numérique pratique la plus simple. Elle est basée sur le principe de calcul de l'aire d'un trapèze. Le principe de cette méthode, il consiste à remplacer la courbe $y = f(x)$ par une ligne droite (approximation linéaire) comme le démontre la figure suivante :

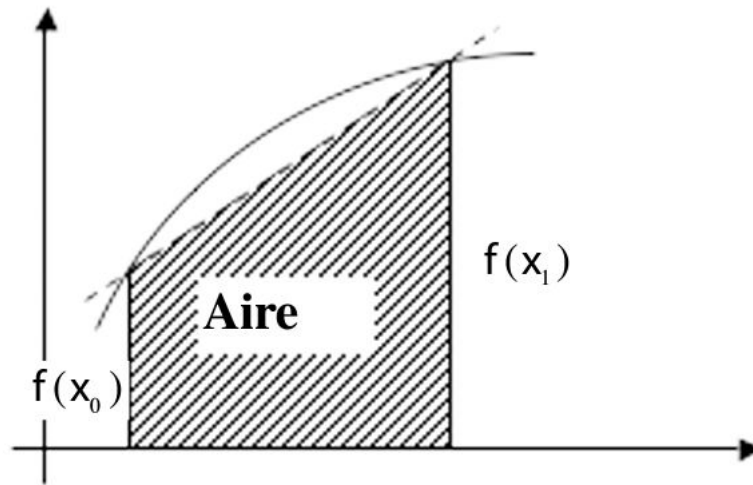


FIGURE 1.2 – Règle de trapèze

Nous approximations l'aire A sous la courbe $y = f(x)$ entre les ordonnées en x_0 et x_1 par $A \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$, où $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$ et h équivalent a la distance entre x_0 et x_1 .

En ce qui concerne l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, la méthode du trapèze peut être appliquée en subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ de longueur égale équivalant ou pas $h = x_k - x_{k-1}$ avec $a = x_0$ et $b = x_n$. puis on applique la règle de trapèze sur chaque sous-intervalle alors :

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \dots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n), \\ &\simeq \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + f_n], \\ &\simeq \frac{h}{2}[(f_0 + f_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_i]. \end{aligned}$$

1.2.4.2 La règle de Simpson

Pour obtenir la règle de Simpson, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalle équivalents en utilisant les points x_0, x_1, x_2 , où $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$ et en remplaçant la courbe de la fonction générale $y = f(x)$ sur l'intervalle $[x_0, x_2]$ par le polynôme d'interpolation quadratique de Lagrange

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2 \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2) \right] f_0 - (x - x_0)(x - x_2) f_1 + \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1) f_2, \end{aligned}$$

l'intégrale définie générale $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$ est alors approximation par l'intégrale $\int_{x_0}^{x_2} y dx$ sans perte de généralité, on peut prendre $x_0 = 0$ et obtenir la formule :

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \int_0^{2h} y dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2],$$

puisque la formule utilise les valeurs en trois points, une règle de Simpson généralisée n'est possible que lorsque le nombre n de sous-intervalle est paire :

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \dots, [x_{n-2}, x_n],$$

on applique la formule à chacun des sous-intervalle et on additionnes les résultats pour obtenir la formule de la règle généralisé de Simpson

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} [[f_0 + 4f_1 + f_2] + [f_2 + 4f_3 + f_4] + \dots + [f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]] \\ &= \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n] \\ &= \frac{h}{3} \left[(f_0 + f_n) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{(n-2)/2} f_{2k} \right]. \end{aligned}$$

On va traité un exemple illustratif de deux méthodes trapèze et Simpson est donnée par la suite.

Exemple 1.2.

On fait l'approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ avec $n = 10$, $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Nous évaluons la fonction au point $x_i = 1 + (i - 1)0.1$ avec $i = 1, \dots, 10$ et obtenons les paires

de valeurs suivantes :

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$f(x)$	1.0	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.625	0.5882	0.5556	0.5263	0.5

table 1 : Résultats des valeurs de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Résolution par la méthode de trapèze :

On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\simeq \frac{0.1}{2} [1.0 + 2(0.9091 + 0.8333 + 0.7692 + 0.7143 + 0.6667 + 0.625 + 0.5882 + 0.5556 + 0.5263) + 0.5] \\ &\simeq \frac{0.1}{2} [1.0 + 2(6.1877) + 0.5], \\ &\simeq 0.69377. \end{aligned}$$

Résolution par la méthode de Simpson :

Considérons la même intégrale résolu plus haut pour la règle de Trapèze.

Nous pouvons certainement appliquer la règle de Simpson, car le nombre de sous-intervalle est encore ($n = 10$) si on utilise les valeurs de $f(x)$ données à la table 1, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\simeq \frac{0.1}{3} [1.0 + 4(0.9091 + 0.7692 + 0.6667 + 0.5882 + 0.5263) \\ &\quad + 2(0.8333 + 0.7143 + 0.625 + 0.5556) + 0.5], \\ &\simeq \frac{0.1}{3} [1.0 + 4(3.4595) + 2(2.7282) + 0.5], \\ &\simeq 0.693147. \end{aligned}$$

$l'intégrale$	$méthode de Simpson$	$méthode de trapèze$	$méthode exacte$
$\int_1^2 \frac{dx}{x}$	0.693147	0.69377	0.69314718

table 2 : Comparaison entre les deux méthodes

Remarque 1.3. D'après l'exemple précédent on voit que la règle de simpson est plus exacte que la règle du trapèze.

1.2.5 Polynôme de Legendre et de Lagrange

Définition 1.33. (*Polynôme de Legendre*) On appelle polynôme de Legendre[16] et on note $p_n(x)$ les polynômes définies par la formule :

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [(x^2 - 1)^n]$$

comme $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, on obtient par la formule de récurrence

$$(n + 1)p_{n+1}(x) = x(2n + 1)p_n(x) - np_{n-1}(x)$$

un polynôme de Legendre de tout degré $n(n = 2, 3, \dots)$

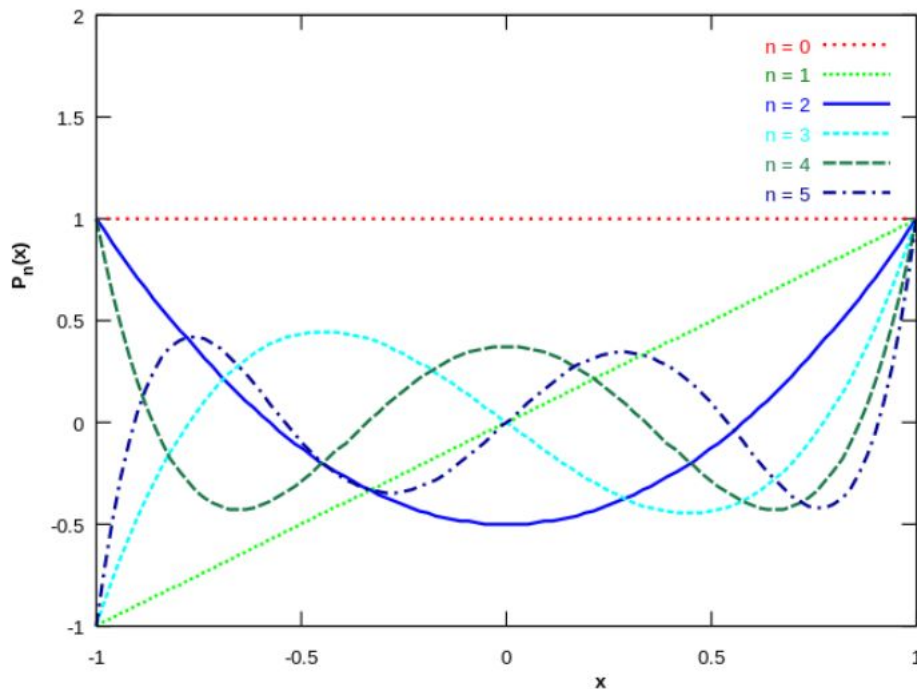


FIGURE 1.3 – Polynôme de Legendre

Définition 1.34. (*polynôme de Lagrange*) Les polynôme de Lagrange[17], du nom de Joseph Louis Lagrange, permettant d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ce points appelée aussi noeuds.

En général, l'interpolation polynômial de Lagrange est de la forme :

$$p_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + \dots + L_n(x)f_n = \sum_{i=0}^n L_i(x)f_i$$

dans laquelle les termes $L_i(x), i = 0, 1, \dots, n$ sont des polynôme unitaire de degré n en x de la forme :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)},$$

et sont appelées les coefficients d'interpolation de Lagrange.

Définition 1.35. (polynôme de quadratique)

On appelle formule de quadrature une expression linéaire dont l'évaluation fournit une valeur approchée de l'intégrale sur un morceau typique. Formule de quadrature de type interpolation Soient $(x_k, y_k) = f(x_k), k = 0, \dots, n, n + 1$ point d'interpolation tel que : $a \leq x_0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x)dx,$$

posons

$$I_n = \int_a^b \sum_{k=0}^n y_k \ell_k(x)dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b y_k \ell_k(x)dx = \sum_{k=0}^n W_k f(x_k),$$

et

$$W_k = \int_a^b \ell_k(x)dx.$$

On approche l'intégrale par :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx I_k(f) = \sum_{k=0}^n W_k f(x_k)$$

avec : $x_k, k = 0, \dots, n$ noeuds au points d'intégrale,

$W_k, k = 0, \dots, n$ point de la formule de quadrature.

CHAPITRE

2

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Dans ce chapitre après avoir introduit la définition d'une equation intégrale, nous allons citer les différentes classes des équations intégrales.

2.1 Définition d'une équation intégrale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue (qui est une fonction d'une variable numérique) se produit sous une intégrale, c'est à dire une équation fonctionnelle impliquant la fonction inconnue sous une ou plusieurs intégrales.

2.2 Classification des équations intégrales

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, les équations intégrales linéaires et les équations intégrales non linéaires[8, 12].

2.2.1 Équations intégrales linéaires

2.2.1.1 Équations intégrales linéaires de Fredholm

On définit une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt,$$

et de première espèce de la forme :

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)U(t)dt,$$

où $U(t)$ est une fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues sur $a \leq x, t \leq b$ et λ paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit :

$$U(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt,$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce homogène. Dans le cas contraire elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène. Voici deux exemples qui illustrent respectivement une équation intégrale linéaire de première espèce et équation intégrale linéaire de deuxième espèce :

Exemple 2.1.

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)U(t)dt, \quad x \neq 0 \quad a \leq x, t \leq b$$

$$U(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x - t)U(t)dt, \quad a \leq x, t \leq b$$

2.2.1.2 Équations intégrales linéaires de Volterra

On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme :

$$f(x) = U(x) - \lambda \int_0^x k(x, t)U(t)dt,$$

et linéaire de première espèce représenter sous la forme :

$$f(x) = \int_0^x k(x, t)U(t)dt, \quad a = 0, b = x$$

où $U(x)$ est une fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ et λ paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit :

$$U(x) = \lambda \int_0^x k(x, t)U(t)dt,$$

elle est dite équation intégrale linéaire homogène de Volterra de second espèce.

Elle dite non homogène dans le cas contraire.

Voici deux exemples qui illustrent respectivement une équation linéaire de Volterra de première espèce et une équation linéaire de deuxième espèce.

Exemple 2.2.

$$xe^{-x} = \int_0^x e^{t-x}U(t)dt, \quad x \in [0, a].$$

$$U(x) = 1 - \int_0^x U(t)dt, \quad x \in [0, a].$$

2.2.1.3 Équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$U(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)U(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)U(t)dt,$$

et

$$U(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \mu, \tau, u(\mu, \tau))d\mu \, d\tau,$$

où $f(x, t)$ et $F(x, t, \mu, \tau, U(\mu, \tau))$ sont des fonctions sur $D = \Omega \times [0, T]$, et Ω est un sous ensemble fermé de \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$. Nous pouvons citer à titre d'exemple les equations suivantes.

Exemple 2.3.

$$U(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xU(t)dt - \int_0^1 tU(t)dt,$$

où encore,

$$U(x, t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^1 \int_0^1 (\tau - \mu)d\mu \, d\tau,$$

2.2.1.4 Équations intégrales Singulières

les équations intégrales de Volterra du premier type :

$$f(x) = \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)U(t)dt,$$

où du second type :

$$U(x) = f(x) + \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)U(t)dt,$$

sont dite singulière si l'une des bornes de l'intégration $g(x), h(x)$ où bien les deux sont infini. Elle est dite singulière aussi dans le cas où le noyau $k(x, t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} U(t)dt \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

où du second type :

$$U(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} U(t)dt \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

Exemple 2.4. *Cet exemple représente une équation intégrale singulière d'Abel où l'on a $\alpha = \frac{1}{2}$:*

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} U(t)dt.$$

2.2.1.5 Équations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-diff de Fredholm s'écrit sous la forme :

$$U^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt,$$

où $U^{(n)}$ indique la nième dérivée de $U(x)$. Nous pouvons citer à titre d'exemple les équations suivantes.

Exemple 2.5.

$$U'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xU(t)dt,$$

et aussi

$$U''(x) + U'(x) = x - \sin x - \int_0^{\pi/2} (xt)U(t)dt,$$

2.2.1.6 Équations intégro-différentielles de Volterra

L'équation intégro-différentielles de Volterra apparait sous la forme :

$$U^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)U(t)dt,$$

où $U^{(n)}$ indique la nième dérivée de $U(x)$.

Exemple 2.6. Voici deux exemples des équations intégro-différentielles de Volterra :

$$U'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tU(t)dt,$$

$$U''(x) + U'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tU(t)dt,$$

2.2.1.7 Équations intégro-différentielles de Volterra- Fredholm

les équations intégro-différentielles de Volterra- Fredholm apparaissent sous deux formes

$$U^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)U(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)U(t)dt,$$

et

$$U^{(n)}(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_a^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \pi].$$

Où $f(x, t)$ et $F(x, t, \xi, \tau, U(\xi, \tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \Omega \times [0, T]$ et Ω est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$.

Exemple 2.7. Citons un exemple d'une équation intégro-différentielles de Volterra- Fredholm :

$$U'(x) = 24x + x^4 + 3 - \int_0^x (x - t)U(t)dt - \int_0^1 tU(t)dt,$$

et aussi

$$U'(x, t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi)d\xi d\tau.$$

2.2.2 Équations integrales non linéaires

2.2.2.1 Équations intégrales non linéaires de Fredholm

on appelle une équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, U(t))dt, \quad U \in C([a, b])$$

où $U(x)$ est une fonction inconnue, $k(x, t, U(t))$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ paramètre réel.

Exemple 2.8. *À titre d'exemple l'équation suivante est une équation intégrale non linéaire de Fredholm :*

$$U(x) = x + \lambda \int_0^1 xtU^2(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

2.2.2.2 Équations intégrales non linéaire de Volterra

On appelle une équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme :

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, U(t))dt,$$

où $U(x)$ est une fonction inconnue, $k(x, t, u(t))$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ paramètre réel.

Exemple 2.9. *L'équation suivante est un exemple d'une équation intégrale non linéaire de Volterra :*

$$U(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x - t + 1)U^2(t)dt, \quad x \in [0, T]$$

Remarque 2.1. *Le cadre fonctionnel où sont traités les équations citées dans ce chapitre n'est pas précisé dans cette première partie, il sera présenter dans le troisième chapitre.*

CHAPITRE

3

LES MÉTHODES DE RÉOLUTION DIRECTES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale. [10]

3.1 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Ici on suppose en plus que f est Localement lipschitzienne en y . Ceci signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k -lipschitzienne en y sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|. \quad (3.1.1)$$

Notons que si f est de classe C alors par l'inégalité des accroissements finis, f est localement lipschitzienne.

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ un cylindre sur lequel f est k -lipschitzienne en y soit $M = \sup_{c_0} \|f\|$.

Théorème 3.1. (Cauchy-Lipschitz)[19]

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne en y , alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec donnée initial (t_0, y_0) admet une solution unique exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solutions ϵ_p -approchées avec ϵ_p tendant vers 0, converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Précisons un peu les choses. Si

$$C = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad (3.1.2)$$

et

$$\forall (t, x) \in C, |f(t, x)| \leq M, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y| \quad (3.1.3)$$

alors le problème de Cauchy admet une solution :

(i₁) définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min(a, b/M)$,

(i₂) $y(t_0) = y_0$,

(i₃) $(t, y(t)) \in C$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

3.2 Liaison entre les équations différentielles et les équations intégrales

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x),$$

à coefficients continus $a_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. Dans la suite nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. Pour toute fonction $U(x)$

$$\int_a^x \int_a^s U(t) dt ds = \int_a^x (x-t)U(t) dt, \quad (3.2.1)$$

En générale on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} U(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} U(x) dx_1. \quad (3.2.2)$$

Démonstration. Soit $g(s) = \int_a^s U(t) dt$ on a :

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s U(t) dt ds &= \int_a^x g(s) ds = \int_a^x 1 \cdot g(s) ds \\ &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x sg'(s) ds, \quad (\text{intégration par partie}) \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x sU(s) ds, \\ &= x \int_a^x U(t) dt - 0 - \int_a^x tU(t) dt, \\ &= \int_a^x (x-t)U(t) dt. \end{aligned}$$

□

Démonstration. Montrons pour $n=2$, Soit l'équation de second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x), \quad y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \quad (3.2.3)$$

posons :

$$U(x) = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (3.2.4)$$

D'où, d'après les conditions initiales, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x U(t) dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t)U(t) dt + c_1x + c_0. \quad (3.2.5)$$

Nous avons utilisés la formule(3.2.2) et remplacé (3.2.4) , (3.2.5) dans (3.2.3)

$$U(x) + \int_0^x a_1(x)U(t) dt + c_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)U(t) dt + c_1xa_2(x) + c_0xa_2(x) = F(x),$$

où

$$U(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]U(t)dt = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x). \quad (3.2.6)$$

Posant

$$\begin{aligned} K(x, t) &= -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)], \\ f(x) &= F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x). \end{aligned}$$

Nous ramenons l'équation (3.2.6) a la forme suivante

$$U(x) = \int_0^x k(x, t)U(t)dt + f(x).$$

Ainsi, nous obtenons une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3.3 Méthodes directes

3.3.1 Le problème de Cauchy de second ordre

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant[10] :

$$(PVI) \begin{cases} U''(x) = f(x, U(x)) & 0 < x < 1 \\ U(0) = U_0, \quad U'(0) = U'_0 \end{cases}$$

l'intégration des deux cotés de l'équation différentielle de zéro a x , donne :

$$U'(x) = U'_0 + \int_0^x f(t, U(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

En intégrant une seconde fois,

$$U(x) = U_0 + U'_0x + \int_0^x \int_0^x f(t, U(t))dtdS.$$

En utilisant la relation (3.1), on obtient

$$U(x) = U_0 + U'_0x + \int_0^x (x-t)f(t, U(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

c'est l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce. □

3.3.2 Réduction d'un Problème aux limites de second type

On considère le problème de Dirichlet suivant J :

$$(PVB) \begin{cases} U''(x) = f(x, U(x)) & 0 < x < 1 \\ U(0) = U_0, \quad U(1) = U_1 \end{cases}$$

de la même manière, on intègre les deux cotés de zéro à x , on obtient

$$U'(x) = c + \int_0^x f(t, U(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

On effectue une intégration de zéro à x , on aura :

$$U(x) = U_0 + cx + \int_0^x (x-t)f(t, U(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.3.1)$$

Pour déterminer la constante c , on prend $x = 1$ et on utilise la condition $U(1) = U_1$, ce qui donne :

$$c = U_1 - U_0 - \int_0^1 (1-t)f(t, U(t))dt.$$

Ainsi, l'équation (3.3.1) devient :

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 + (U_1 - U_0)x + \int_0^x (x-t)f(t, U(t))dt - x \int_0^1 (1-t)f(t, U(t))dt, \\ &= U_0 + (U_1 - U_0)x - \int_0^x t(1-x)f(t, U(t))dt - \int_0^1 x(1-t)f(t, U(t))dt, \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme,

$$U(x) = U_0 + (U_1 - U_0)x - \int_0^1 k(x, t)f(t, U(t))dt,$$

avec

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases}$$

3.3.3 Équation intégrale à noyau dégénéré

Le noyau $k(x, t)$ d'une équation intégrale de Fredholm de second espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produit de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, i.e. il est de la forme suivante [11]

$$k(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t). \quad (3.3.2)$$

Les fonctions $a_k(x)$, $b_k(t)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x$, $t \leq b$ et linéairement indépendantes.

3.3.3.1 Méthode de noyau dégénéré

Soit l'équation de Fredholm à noyau dégénéré suivante :

$$U(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \right] U(t)dt = f(x), \quad (3.3.3)$$

se résoud comme suit :

récrivons (3.3.3)

$$U(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t)U(t)dt, \quad (3.3.4)$$

et introduisant les notations

$$\int_a^b b_k(t)U(t)dt = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.5)$$

L'intégrale (3.3.4) devient

$$U(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x), \quad (3.3.6)$$

avec C_k des constantes inconnues.

Donc, la résolution se ramène à la recherche des constantes C_k ($k = 1, \dots, n$), après avoir porté (3.3.6) dans (3.3.3) et effectué des calculs simples nous obtenons

$$\sum_{m=1}^n \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0,$$

avec $a_m(x)$, ($m = 1, 2, \dots, n$) des fonctions linéairement indépendantes, il en résulte que

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt = 0.$$

Où

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt = \int_a^b b_m(t)f(t)dt \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

on note

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t)f(t)dt,$$

donc

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} = f_m \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

où sous forme développée,

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1 - \lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n = f_2, \\ \dots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn})C_n = f_n, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

pour trouver les C_k , nous avons donc un système de n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.8)$$

si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système (3.3.7) admet une solution unique C_1, C_2, \dots, C_n obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1}f_1 - \lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1}f_2 - \lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1}f_n - \lambda a_{nk+1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.9)$$

avec $k = 1, \dots, n$

L'équation intégrale (3.3.3) a pour solution une fonction $U(x)$ définie par l'égalité :

$$U(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x),$$

avec les coefficients C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) donnés par les formules (3.3.9).

À titre d'exemple nous allons résoudre l'équation intégrale suivante

Exemple 3.1.

$$U(x) - \lambda \int_0^1 \cos(q \log t)U(t)dt = 1, \quad (3.3.10)$$

mettons cette équation sous la forme

$$U(x) = \lambda \int_0^1 \cos(q \log t) U(t) dt + 1,$$

et introduisant les notations

$$C_1 = \int_0^1 \cos(q \log t) U(t) dt, \tag{3.3.11}$$

où C_1 est le constante inconnue , l'équation (3.3.10) a alors la forme

$$U(x) = C_1 \lambda + 1, \tag{3.3.12}$$

portons (3.3.12) dans l'égalité (3.3.11) , il vient

$$C_1 = \int_0^1 \cos(q \log t) (\lambda C_1 + 1) dt, \tag{3.3.13}$$

où

$$C_1 \left(1 - \lambda \int_0^1 \cos(q \log t) dt \right) = \int_0^1 \cos(q \log t) dt. \tag{3.3.14}$$

En calculant les intégrales, donc

$$C_1 \left(1 - \frac{\lambda}{q^2 + 1} \right) = \frac{1}{q^2 + 1}, \tag{3.3.15}$$

nous obtenons le système d'équation algébrique en C_1

$$C_1 \left(\frac{q^2 + 1 - \lambda}{q^2 + 1} \right) = \frac{1}{q^2 + 1}, \tag{3.3.16}$$

$$\frac{q^2 + 1 - \lambda}{q^2 + 1} \neq 0.$$

Le système (3.3.16) admet solution unique $C_1 = \frac{1}{q^2 + 1 - \lambda}$, en portant dans (3.3.12) la valeur obtenue de C_1 nous obtenons la solution

$$U(x) = \frac{q^2 + 1}{q^2 + 1 - \lambda}.$$

Nous allons aussi résoudre l'équation intégrale suivante pour illustrer la méthode.

Exemple 3.2. *À titre d'exemple nous allons résoudre l'équation intégrale suivante*

$$U(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt^2 + x^2t)U(t)dt, \quad (3.3.17)$$

$$U(x) - \lambda \int_0^1 (xt^2 + x^2t)U(t)dt = x, \quad (3.3.18)$$

$$U(x) - \lambda x \int_0^1 t^2U(t)dt - \lambda x^2 \int_0^1 tU(t)dt = x, \quad (3.3.19)$$

$$U(x) = \lambda x \int_0^1 t^2U(t)dt + \lambda x^2 \int_0^1 tU(t)dt + x, \quad (3.3.20)$$

et introduisant les notations

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 t^2U(t)dt \\ C_2 = \int_0^1 tU(t)dt \end{cases} \quad (3.3.21)$$

$$U(x) = \lambda x C_1 + \lambda x^2 C_2 + x. \quad (3.3.22)$$

En remplaçant (3.3.22), (3.3.21) :

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 t^2(\lambda t C_1 + \lambda t^2 C_2 + t)dt \\ C_2 = \int_0^1 t(\lambda t C_1 + \lambda t^2 C_2 + t)dt \end{cases} \quad (3.3.23)$$

où

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \int_0^1 t^3 dt + \lambda C_2 \int_0^1 t^4 dt + \int_0^1 t^3 dt \\ C_2 = \lambda C_1 \int_0^1 t^2 dt + \lambda C_2 \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t^2 dt \end{cases} \quad (3.3.24)$$

alors

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^1 t^3 dt \right) - C_2 \lambda \int_0^1 t^4 dt = \int_0^1 t^3 dt \\ -C_1 \lambda \int_0^1 t^2 dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_0^1 t^3 dt \right) = \int_0^1 t^2 dt \end{cases} \quad (3.3.25)$$

En calculant les intégrales, nous obtenons le système d'équations algébriques en C_1, C_2

$$\begin{cases} \frac{4-\lambda}{4}C_1 - \frac{\lambda}{5}C_2 = \frac{1}{4} \\ -\frac{\lambda}{3}C_1 + \frac{4-\lambda}{4}C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.3.26)$$

le déterminant de système est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{4-\lambda}{4} & -\frac{\lambda}{5} \\ -\frac{\lambda}{3} & \frac{4-\lambda}{4} \end{vmatrix} = \frac{240 - 120\lambda - \lambda^2}{240} \neq 0.$$

En utilisant la formule de Cramer pour calculer C_1 et C_2 :

$$C_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\lambda}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4-\lambda}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{4-\lambda}{16} + \frac{\lambda}{15} \right) = \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2},$$

$$C_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} \frac{4-\lambda}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\lambda}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \left(\frac{4-\lambda}{12} + \frac{\lambda}{12} \right) = \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2},$$

le système admet une solution unique

En remplace dans (3.3.22)

$$U(x) = \lambda x \left(\frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2} \right) + \lambda x^2 \left(\frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2} \right) + x,$$

$$U(X) = \frac{80\lambda x^2 + (-60\lambda + 240)x}{240 - 120\lambda - \lambda^2},$$

donc

$$U(x) = \frac{(240 - 60\lambda)x + 80\lambda x^2}{240 - 120\lambda - \lambda^2}.$$

CHAPITRE

4

APPLICATIONS DES THÉORÈMES DE POINT FIXE AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES

Le but de cette partie est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commence par le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. Ensuite, on donne le théorème du point fixe de Brouwer et le théorème du point fixe de Schauder.

4.1 Théorème du point fixe

4.1.1 Théorème de Banach

Le théorème du point fixe de Banach[5], connu aussi sous le nom du principe contraction de Banach, est apparu pour la première fois en 1922, dans le cadre de la résolution d'une

équation intégrale.

Théorème 4.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet non vide, et soit $f : E \rightarrow E$ une application α -contraction.*

i.e. il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$.

alors f possède un unique point fixe.

Démonstration.

On démontre ce Théorème en deux étapes, d'abord l'unicité ensuite l'existence du point fixe.

L'unicité :

On pose que $x, y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$;

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

L'existence :

On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}), \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0, x_1), \\ &\leq \alpha^n \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1), \\ &\leq \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

et donc $d(x_n, x_{n+p})$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ceci exprime le fait que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E , et comme E est un espace complet, il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightarrow x$. Par continuité $x_{n+1} = f(x_n) \rightarrow f(x)$, d'où $f(x) = x$. □

4.1.2 Théorème de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer (1910)[6] est un résultat de topologie. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe.

Théorème 4.2. *Soit C un compact convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C tel que $f(x) = x$.*

Remarque 4.1. *Il existe de nombreuses preuves du théorème du point fixe de Brouwer, à la fois analytiques et topologiques. Nous en esquissons une seule preuve.*

Démonstration.

Il suffit de prouver le théorème du point fixe de Brouwer dans le cas $C = \overline{B(0,1)}$.

Supposons que $C = \overline{B(0,1)}$ et que f n'a pas de point fixe.

Définir le plans S :

$\overline{B(0,1)} \rightarrow \overline{B(0,1)}$ comme suit : Pour chaque point intérieur φ dans $\overline{B(0,1)}$ laissez $\tilde{\varphi}$ désigner le point sur la frontière $\partial B(0,1)$ c'est l'intersection du rayon de $f(\varphi)$ à travers φ et la la frontière $\partial B(0,1)$.

Le rayon est toujours bien définie puisque f n'a pas de point fixe. Maintenant, on a :

$$S(\varphi) = \begin{cases} \tilde{\varphi} & \text{si } \varphi \in B(0,1) \\ \varphi & \text{si } \varphi \in \partial B(0,1). \end{cases}$$

Alors f est une application continue de $\overline{B(0,1)}$ dans $\partial B(0,1)$ tel que $S|_{\partial B(0,1)} = I|_{\partial B(0,1)}$. Le problème pour montrer que f n'a pas de point fixe est maintenant reformulé pour montrer qu'il n'y a pas de correspondance continu $S : B(0,1) \rightarrow \partial B(0,1)$ tel que $S|_{\partial B(0,1)} = I|_{\partial B(0,1)}$. L'affirmation selon laquelle il n'existe pas de telle application est profonde mais n'en est pas moins intuitivement évidente.

Considérons ,pour $n = 2$ le cas d'une membrane élastique fixée sur un cadre circulaire .

L'existence d'une correspondance s'implique qu'il devait être possible de déformer la membrane de manière continue de telle sorte qu'elle coïncide avec le cadre sans être fracturée pour fixer $\varphi \in B(0,1)$,l'application : $t \mapsto (1-t)\varphi + ts(\varphi), t \in [0,1]$ décrit comment ce point de la membrane est déplacé de φ à $t = 0$ à $f(x) \in \partial B(0,1)$ à $t = 1$, sous l'effet de la déformation. □

4.1.3 Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge les résultats du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un sous ensemble convexe compact dans un espace de Banach [7].

Théorème 4.3. Soit E un espace de Banach et C un sous ensemble fermé et convexe de E . Soit $f : C \rightarrow C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe, alors $\exists \bar{x} \in C$ donc $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

On utilise le lemme suivant pour démontrer ce théorème.

Lemme 4.1. Soit E un espace de Banach et K une partie relativement compacte de E , alors $\overline{co}(K)$ est compact .

Démonstration. Par complétude, il suffit de montrer que $\overline{co}(K)$ est précompact.

Soit $\varepsilon > 0$, prouvons que $\overline{co}(K)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε , comme K est relativement compacte, il existe p et x_1, \dots, x_p dans K tel que

$$K \subset \cup_{i=1}^p B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$$

Soit $C := co\{x_1, \dots, x_p\}$, par compacité de C , il existe l et y_1, \dots, y_l dans C tel que

$$C \subset \cup_{j=1}^l B(y_j, \varepsilon/3).$$

Soit $z \in co(K)$

$$z = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k,$$

Pour des a_k dans K et des λ_k positif de somme 1 , on écrit a_k sous la forme $a_k = x_{i_k} + \frac{\varepsilon}{3} v_k$, pour un $i_k \in \{1, \dots, p\}$, et $v_k \in B(0, 1)$.

On a alors :

$$z = \sum_{k=1}^m \lambda_k x_{i_k} + \frac{\varepsilon}{3} v, \quad v := \sum \lambda_k v_k \in B(0, 1).$$

On remarque :

$$x = \sum_{k=1}^m \lambda_k x_{i_k} \in C$$

de sorte qu'il existe j tel que $x \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{3})$ et donc $z \in B(y_j, \frac{2\varepsilon}{3})$,
ceci montre que : $co(k) \subset \cup_{j=1}^l B(y_j, \frac{2\varepsilon}{3})$,
et donc : $\overline{co}(K) \subset \cup_{j=1}^l B(y_j, \varepsilon)$. □

Démonstration. Comme $f(C)$ est relativement compacte , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε et des points $x_1^\varepsilon, \dots, x_{N_\varepsilon}^\varepsilon$ de C tel que $f(C) \subset \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(f(x_i^\varepsilon), \varepsilon)$.

Soit E_ε le sous espace vectoriel engendré par $\{f(x_1^\varepsilon) \dots f(x_{N_\varepsilon}^\varepsilon)\}$.

Notons $B^c(f(x_i^\varepsilon), \varepsilon)$ le complémentaire de $B(f(x_i^\varepsilon), \varepsilon)$ et posons pour tout $x \in C$ et i :

$$\alpha_i^\varepsilon := \frac{d(f(x), B^c(f(x_i^\varepsilon), \varepsilon))}{\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} d(f(x), B^c(f(x_j^\varepsilon), \varepsilon))},$$

de sorte que $\alpha_i^\varepsilon(x) > 0$ ssi $\|f(x) - f(x_i^\varepsilon)\| < \varepsilon$, soit $C_\varepsilon := C \cap E_\varepsilon$ et pour $x \in C_\varepsilon$ posons :

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x) f(x_i^\varepsilon).$$

Par convexité de C , $f_\varepsilon(C_\varepsilon) \subset C_\varepsilon$ et f_ε . Comme E_ε est de dimension finie et C_ε est convexe compact dans E_ε , on déduit du théorème de Brouwer qu'il existe $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $x_\varepsilon = f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Par construction , pour chaque ε , x_ε appartient à l'enveloppe convexe fermée de $f(C)$, $\overline{co}(f(C))$. Du lemme (4.1) $\overline{co}(f(C))$ est compact , On prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $x_n = x_{\varepsilon_n}$, on peut donc , quitte à passer à une suite extraite ,supposer que x_n converge vers $\bar{x} \in \overline{co}(f(C)) \subset C$.

Montrons que \bar{x} est un point fixe de f , pour tout n , on a :

$$f(\bar{x}) - f_{\varepsilon_n}(x_n) = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon_n}} \alpha_i^{\varepsilon_n}(x_n) (f(\bar{x}) - f(x_n) + f(x_n) - f(x_i^{\varepsilon_n})),$$

Dans la somme précédente il n y-a que des termes tel que

$$\|f(x_n) - f(x_i^{\varepsilon_n})\| < \varepsilon_n,$$

et donc

$$\|f(\bar{x}) - f_{\varepsilon_n}(x_n)\| \leq \|f(\bar{x}) - f(x_n)\| + \varepsilon_n ,$$

ceci implique que $f_{\varepsilon_n}(x_n)$ converge vers $f(\bar{x})$ on en déduit donc que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ en passant à la limite dans $f_{\varepsilon_n}(x_n) = x_n$. □

4.2 Application du principe des contractions de Banach

Théorème 4.4. Soit $k(x, t)$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré $0 \leq x, t \leq 1$. Alors l'équation intégrale

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)U(t)dt \quad (4.2.1)$$

admet une solution unique pour tout λ et $f(x)$ dans $L^2[0, 1]$

Démonstration. on considère l'opérateur

$$Au = f + \lambda Tu$$

où

$$Tu(x) = \int_0^x k(x, t)u(t)dt$$

pour montrer l'existence d'un point fixe A , il suffit de montrer que A^n est contractant.

Pour un certain n . Nous avons :

$$A^n u = f + \lambda Tu + \dots + \lambda^{n-1} T^{n-1} u + \lambda^n T^n u$$

avec

$$T^n u(x) = \int_0^x k_n(x, t)u(t)dt$$

alors

$$\|A^n u_1 - A^n u_2\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^x k_n(x, t)(u_1(t) - u_2(t))dt \right\|$$

□

Pour déterminer $k_n(x, t)$, on utilise la proposition suivante

Proposition 4.1. Le n -ième noyau itéré de l'équation intégrale de Volterra est donné par

$$k_n(x, t) = \int_t^x k(x, z)k_{n-1}(z, t)dz, \quad \text{si } t < x \quad (4.2.2)$$

et $k_n(x, t) = 0$ si $t \geq x$

Démonstration. (de la proposition)

Par définition du noyau de Volterra, on sait que $k_1(x, t) = k(x, t)$ est égale à zéro si $t > x$, donc pour $n = 2$

$$k_2(x, t) = \int_a^b k(x, z)k(z, t)dz,$$

le premier terme de l'intégrant est égal à zéro quand $z > x$ et le seconde est égale a zéro quand $z < t$, par conséquent,

$$k_2(x, t) = \int_t^x k(x, z)k_1(z, t)dz,$$

la preuve peut maintenant être complète par induction
alors

$$\begin{aligned} k_1(x, t) &= k(x, t) \\ k_n(x, t) &= \int_t^x k(x, z)k_{n-1}(z, t)dz, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

D'autre part, comme $k(x, t)$ est continu sur le carrée $0 \leq x, t \leq 1$ alors il est uniformément borné, i.e .il existe M tel que $|k(x, t)| < M$ pour tout $x, t \in [0, 1]$, par induction, on obtient la majoration

$$|k_n(x, t)| \leq \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0 \leq t \leq x$$

En effet, pour $n = 1$ la propriété est évidente, supposons qu'elle est à l'ordre n

$$\begin{aligned} |k_{n+1}(x, t)| &\leq \int_t^x |k(x, z)||k_n(z, t)|dt \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{(n-1)!} \int_t^x (z-t)^{n-1}dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}(x-t)^n}{(n)!} \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \|A^n u_1 - A^n u_2\| &\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \left\| \int_0^x (u_1(t) - u_2(t))dt \right\| \\ &\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

pour n assez grand

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

de sorte que A^n un opérateur contractant et (4.2.1) admet une solution unique □

Théorème 4.5. Soit $k(x, t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur le carré $a \leq x, t \leq b$ telle que

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt < +\infty$$

Alors l'équation intégrale

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (4.2.3)$$

admet une solution unique $U(x) \in L^2([a, b])$, pour tout paramètre λ suffisamment petit et tout $f(x)$ dans $L^2([a, b])$.

Démonstration. on considère l'opérateur

$$Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt$$

Soit $u(x) \in L^2([a, b])$, nous allons montrer d'abord que $Au \in L^2([a, b])$

$$\int_a^b (Au)^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x) \left(\int_a^b k(x, t)U(t)dt \right) dx + \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b k(x, t)U(t)dt \right)^2 dx$$

En utilisant la relation de Fubini et l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \left(\int_a^b k(x, t)U(t)dt \right) dx &= \int_a^b \int_a^b k(x, t)U(t)f(x)dt \\ &\leq \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt \right)^{1/2} \|U\| \cdot \|f\| < \infty \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\int_a^b \left(\int_a^b k(x, t)U(t)dt \right)^2 dx < \infty$$

Ainsi $Au \in L^2([a, b])$. par conséquent, $A : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$. il reste à montrer que A est contractant,

Soient $u(x), v(x) \in L^2([a, b])$,

$$\begin{aligned} \|Au - Av\| &= \left(\int_a^b |Au - Av|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b k(x, t)[u(t) - v(t)]dt \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |u(t) - v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| B \|u - v\| \end{aligned}$$

ceci montre que si $|\lambda|B < 1$, i.e

$$|\lambda| < \frac{1}{B} = \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t) dx dt \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Alors l'opérateur est contractant. Par conséquent, l'équation intégrale $Au = u$ admet une solution unique pour tout $f(x)$ dans $L^2([a, b])$ □

4.3 Application du théorème de Schauder

L'équation intégrale de Fredholm

Théorème 4.6. *on considère l'équation non linéaire de Fredholm*

$$U(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t,U(t))dt, \quad a \leq x \leq b \tag{4.3.1}$$

supposons que $f(\cdot)$ est une fonction bornée et $k(t,x,y)$ satisfait les conditions suivantes

$$|k(x,t,y)| \leq g_1(t)g_2(t)\phi(|y|), \quad \left| \frac{\partial k}{\partial y} U(x,t,y) \right| \leq g_1(x)g_2(x)\psi(|y|),$$

où $g_1(\cdot)$ est une fonction positive, bornée et mesurable, et $\phi(\cdot)$ est une fonction positive et mesurable qui vérifie la condition

$$\sup_{y \geq 0} \frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty$$

et $\psi(\cdot)$ est une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, on suppose qu'il existe une fonction strictement positive et continue $\mu(\cdot)$ qui vérifie la condition suivante

$$\|g_1, \mu\|_\infty \left\| \frac{g_2}{\mu} \right\|_1 < \frac{1}{L}$$

sous ces conditions, l'équation intégrale non linéaire ((4.3.1)) admet une solution dans $\mathcal{C}([a, b])$.

Démonstration. Voir [14]

On note par $\|\cdot\|_\mu$ la norme définie sur $X = \mathcal{C}([a, b])$ par

$$\|U\|_\mu = \sup_{x \in [a,b]} |\mu(x)U(x)|,$$

l'espace X muni de la norme $\|\cdot\|_\mu$ est un espace de Banach.

Soit $r \geq 0$ est un nombre réel positif, et soit B_r une boule fermé de X définie par :

$$B_r = \{U \in \mathcal{C}([a, b]); \|U\|_\mu \leq r\}$$

c'est clair que B_r est un sous ensemble fermé et convexe de X . Alors démontrer que l'opérateur T associé avec l'équation (4.3.1) est continue sur X

La conclusion est :

$$T(B_r) \subset B_r, \forall r \geq \frac{\|f\|_\mu}{1 - L\|g_1\|_\mu \left\| \frac{g_2}{\mu} \right\|_1} = r_0.$$

D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'équation intégrale non linéaire ((4.3.1)) admet une solution dans B_{r_0} et par suite admet une solution dans $\mathcal{C}([a, b])$. \square

L'équation intégrale de Volterra Soit l'équation intégrale suivante :

$$U(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t, U(t))dt, \quad a \leq x \leq b \quad (4.3.2)$$

telle que $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifie les conditions suivantes

1. $k(x, t, 0) = 0$ pour tout $x, t \in [a, b]$

2. $\frac{\partial k(x, t, z)}{\partial z} < \left| \frac{1 - \|f\|}{b - a} \right|$

alors pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $\|f\| \leq 1$ l'équation ((4.3.2)) admet une solution $U \in \mathcal{C}([a, b])$.

Démonstration. On va montrer que $T(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ i.e. pour si $\|U\| \leq 1$, alors $\|Tu\| \leq 1$

en effet :

$$\begin{aligned}
 \|Tu\| &= \left\| f(x) + \int_a^x k(x, t, u(t)) dt \right\|, \\
 &\leq \|f(x)\| + \left\| \int_a^x k(x, t, u(t)) dt \right\|, \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |k(x, t, u(t))| dt, \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |k(x, t, u(t)) - k(x, t, 0)| dt, \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x \left| (u - 0) \frac{\partial k(x, t, u(t))}{\partial u} \right| dt, \\
 &\leq \|f(x)\| + \|U\| \frac{1 - \|f\|}{b - a} (b - a), \\
 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Schauder T admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution. □

CHAPITRE

5

MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Dans ce chapitre, nous exposons en détail quelques méthodes très usuelles pour la résolution numérique des équations intégrales (linéaire et non linéaire), tout en éclairant les étapes de la discrétisation de l'équation et pour chaque méthode, on donne un exemple d'intégration numérique[8, 13, 11].

5.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives, également appelés méthode de l'itération de picard[12], fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes de valeur initiale ou des équations intégrales.

La plus part des méthodes itératives sont fondées sur le même principe, qui la recherche d'un point fixe. Cependant, elle se différent dans la complexité des algorithmes proposés qui devraient être réalisés de sorte qu'ils soient consistant avec la difficulté rencontré souvent lors de calcul des itérés, la méthode des approximations successives consiste à calculer explicitement à chaque étape k , l'itéré U_k à l'aide de la suite itérative définie par

$$U_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int k(x, t)U_n(t)dt,$$

et de l'utiliser dans l'étape $k + 1$ pour le calcul de l'itéré U_{k+1} .

5.1.1 Cas linéaire

5.1.1.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)U(t)dt. \quad (5.1.1)$$

Supposons que $f(x)$ est continue sur $[0, a]$ et que le noyau $k(x, t)$ l'est pour $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$, prenons une fonction $U_0(x)$ continue dans $[0, a]$ et substituons-la à $U(x)$ du second membre de (5.1.1) :

$$U_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)U_0(t)dt,$$

la fonction $U_1(x)$ aussi définie est continue elle est aussi sur le segment $[0, a]$, En continuant le processus nous aboutissons à la suite

$$U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x), \dots$$

où

$$U_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)U_{n-1}(t)dt,$$

sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $k(x, t)$, la suite $\{U_n(x)\}$ converge pour $n \rightarrow +\infty$ vers la solution $U(x)$ de l'équation intégrale (5.1.1)

Exemple 5.1. On applique la méthode des approximations successives pour l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$U(x) = \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U(t)dt, \quad (5.1.2)$$

pour obtenir l'approximation $U_0(x)$ on choisit

$$U_0(x) = 0. \tag{5.1.3}$$

La méthode des approximations successives implique l'utilisation de la formule d'itération

$$U_{n+1}(x) = \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U_n(t)dt, \quad n \geq 0 \tag{5.1.4}$$

En remplaçant (5.1.3) par (5.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U_0(t)dt = \frac{1}{3!}x^3, \\ U_2(x) &= \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U_1(t)dt = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5, \\ U_3(x) &= \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U_2(t)dt = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7, \\ U_4(x) &= \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)U_3(t)dt = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= x - x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9 + \dots \\ &= x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots\right), \\ &= x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

La solution $U(x)$ de (5.1.2)

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x) = x - \sin x.$$

5.1.1.2 Équation intégrale de Fredholm de première espèce

Soit l'équation de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b k(x,t)U(t)dt = f(x), \tag{5.1.7}$$

à $k(x, t)$ symétrique de carrée sommable, définie positif et $f(x) \in L^2([a, b])$ supposons que (5.1.7) admet une solution unique

La suite $(U_n(x))$ définie par la relation

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b k(x, t)U_n(t)dt \right], \quad n \geq 0 \quad (5.1.8)$$

où $U_n(x) \in L^2([a, b])$ et $0 < \lambda < 2\lambda_1$ (λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique du noyau $k(x, t)$), converge alors en moyenne vers la solution de l'équation proposée.

Exemple 5.2. Considérons l'équation intégrale

$$\int_0^1 k(x, t)U(t)dt = \sin \pi x,$$

avec

$$k(x, t) = \begin{cases} (t-x)t, & 0 \leq t \leq x \\ (1-t)x, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier qu'elle admet la solution $U(x) = \pi^2 \sin \pi x$ et cette solution seulement. Le noyau a pour le plus petit nombre caractéristique de valeur $\lambda_1 = \pi^2$

formons les approximations selon la formule (5.1.1) en partant de $U_0(x) = 0$ et $\lambda = 1 < 2\lambda_1$, nous obtenons de proche en proche

$$U_1(x) = \sin \pi x,$$

$$U_2(x) = \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x,$$

$$U_3(x) = \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 \sin \pi x,$$

.

.

.

$$U_{n+1}(x) = \sin \pi x \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^n \right].$$

Il résulte par passage à la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = \pi^2 \sin \pi x.$$

5.1.1.3 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(t, x)U(t)dt, \quad (5.1.9)$$

La méthode d'approximations successive introduit la relation de récurrence :

$U_0(x)$ = toute fonction sélective à valeur réelle.

$$U_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(t, x)U_n(t)dt, \quad n \geq 0 \quad (5.1.10)$$

à la limite, la solution est déterminée en utilisant la limite

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x) \quad (5.1.11)$$

$U_0(x)$ = tous les termes non inclus dans le signe intégral

$$U_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(t, x)U_0(t)dt,$$

$$U_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(t, x)U_1(t)dt,$$

.

.

.

$$U_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U_n(t)dt.$$

La méthode des approximations successives, ou la méthode des itérations sera illustrée par l'étude d'exemple suivant

Exemple 5.3.

$$U(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 U(t)dt, \quad (5.1.12)$$

pour l'approximation zéro $U_0(x)$, nous pouvons sélectionner

$$U_0(x) = 0. \quad (5.1.13)$$

La méthode des approximations successives est donnée par le schéma itératif suivant :

$$U_{n+1}(x) = e^x - e^{-1} \int_0^1 U_n(t)dt, n \geq 0 \quad (5.1.14)$$

En substituant (5.1.13) dans (5.1.14) on obtient

$$\begin{aligned}U_1(x) &= e^x + e^{-1} \int_0^1 U_0(t)dt = e^x, \\U_2(x) &= e^x + e^{-1} \int_0^1 U_1(t)dt = e^x - e^{-1} + 1, \\U_3(x) &= e^x + e^{-1} \int_0^1 U_2(t)dt = e^x - e^{-2} + 1, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\U_{n+1}(x) &= e^x + 1 - e^{-(n-1)}.\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

La solution de (5.1.12) est donnée par

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x) = e^x + 1.\tag{5.1.16}$$

5.1.2 Cas non linéaire

5.1.2.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$U(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U(t))dt,\tag{5.1.17}$$

où $U(x)$ est la fonction inconnue à déterminer et $k(x,t)$ est le noyau.

la méthode des approximations successives introduit la relation de récurrence

$$U_{n+1}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U_n(t))dt,\tag{5.1.18}$$

où l'approximation zéro $U_0(x)$ peut être n'importe qu'elle fonction sélective à valeur réelle, Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $U_0(x)$, la plupart du temps nous sélectionnons 0,1 où x pour $U_0(x)$. En utilisant dans (5.1.18), plusieurs approximations suc-

cessives $U_k, k \geq 1$ seront déterminées comme

$$\begin{aligned}
 U_1(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U_0(t))dt, \\
 U_2(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U_1(t))dt, \\
 U_3(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U_2(t))dt, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 U_{n+1}(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U_n(t))dt.
 \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Par conséquent, la solution $U(x)$ est obtenue en utilisant

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x). \tag{5.1.20}$$

La méthode des approximations successives sera illustrée par l'étude d' exemple suivant

Exemple 5.4.

$$U(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)U^2(t)dt, \tag{5.1.21}$$

pour l'approximation $U_0(x)$, nous pouvons sélectionner

$$U_0(x) = 0. \tag{5.1.22}$$

La méthode d'approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$U_{n+1}(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)U_n^2(t)dt, \quad n \geq 0 \tag{5.1.23}$$

On utilise (5.1.22) dans (5.1.23) on obtient :

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &= 0, \\
 U_1(x) &= 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)U_0^2(t)dt \\
 &= 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4, \\
 U_2(x) &= 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)U_1^2(t)dt \\
 &= 4x + \left(\frac{16}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^3\right) + \left(\frac{4}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^4\right) - \frac{128}{15}x^5 + \dots \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution $U(x)$ de (5.1.21) est donnée par

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = 4x. \tag{5.1.24}$$

5.1.2.2 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(U(t))dt, \tag{5.1.25}$$

où $U(x)$ est la fonction inconnue à déterminer, $k(x,t)$ est le noyau, $F(U(t))$ est une fonction non linéaire de $U(t)$, et λ est un paramètre. Les conditions spécifiques sous lesquelles une solution existe pour l'équation intégrale de Fredholm non linéaire sont :

1. (i) la fonction $f(x)$ est bornée, $|f(x)| < R$, $a \leq x \leq b$.
2. (ii) la fonction $K(x,t)$ est intégrable et bornée tel que $|K(x,t)| < G$, $a \leq x, t \leq b$.
3. (iii) la fonction $K(x,t,u(t))$ satisfait la condition de Lipschitz $|K(x,t,y) - K(x,t,y')| < M|y - y'|$.

La méthode des approximation successives introduit la relation de récurrence $U_0(x) =$ toute fonction à valeur réelle sélective.

$$U_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U_n(t)dt, \quad n \geq 0 \quad (5.1.26)$$

Cette méthode est convergente pour la condition suivante

$$\lambda < \frac{1}{G(b-a)}, \quad (5.1.27)$$

où G est le plus grand des deux nombres $G\left(1 + \frac{R}{|\lambda|G(b-a)}\right)$ et M comme indiqué ci-dessus. À la limite, la solution est déterminée en utilisant la limite

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x) \quad (5.1.28)$$

Exemple 5.5. Considérons l'équation intégrale

$$U(x) = \sin x + 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi^2}{4} + \frac{1}{36} \int_0^1 t(U(t) + U^2(t))dt, \quad (5.1.29)$$

pour l'approximation zéro $U_0(x)$, nous pouvons sélectionner

$$U_0(x) = 1. \quad (5.1.30)$$

La méthode d'approximations successives admet l'utilisation de la formule de l'itération

$$U_{n+1}(x) = \sin x + 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi^2}{4} + \frac{1}{36} \int_0^1 t(U_n(t) + U_n^2(t))dt, \quad n \geq 0 \quad (5.1.31)$$

(5.1.30) dans (5.1.31) D'où :

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \sin x + 0.6696616927, \\ U_2(x) &= \sin x + 0.8214573046, \\ U_3(x) &= \sin x + 0.8997853785, \\ U_4(x) &= \sin x + 0.9426743063, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Par conséquent, la solution $U(x)$ de (5.1.29) est donnée par

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(x) = 1 + \sin x. \quad (5.1.33)$$

5.2 Méthode de la solution en série

5.2.1 Cas linéaire

Une fonction réelle $U(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tout ordres telles que la série de Taylor en tout point b de son domaine

$$U(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x - b)^k. \quad (5.2.1)$$

qui Converge vers $f(x)$ dans U_n voisinage de b pour simplifier, la forme générique de la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme suit

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5.2.2)$$

où les coefficients a_n seront déterminées de manière récurrente.

5.2.1.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Dans cette section nous présenterons une méthode utile, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrales de Volterra, Nous supposons que la solution $U(x)$ de l'équation intégrale de Volterra

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)U(t)dt, \quad (5.2.3)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor en(5.2.2). La substitution de(5.2.2) dans les deux cotés de(5.2.3) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (5.2.4)$$

ou pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt, \quad (5.2.5)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$, L'équation intégrale (5.2.3) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (5.2.4) ou (5.2.5) où au lieu d'intégrer la fonction inconnue $U(x)$, les termes de la forme $t^n, n \geq 0$ seront intégrer. Nous intégrant d'abord le membre de

droite de l'intégrale dans (5.2.4) ou (5.2.5), et collections les coefficients de puissances similaire de x , Nous assimilons ensuite les coefficients de puissances similaire de x des deux cotés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence dans $a_j, j \geq 0$. la résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients $a_j, j \geq 0$. Après avoir déterminé les coefficients $a_j, j \geq 0$, la solution en série suit immédiatement la substitutions des coefficients dérivés dans (5.2.2). La solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe.

On résoud l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de la solution en série,

Exemple 5.6. Volterra de seconde espèce :

$$U(x) = 1 + 2 \sin x - \int_0^x U(t) dt, \quad (5.2.6)$$

substituer $U(x)$ par la série

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.2.7)$$

dans les deux cotés de l'équation (5.2.6) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n) dt, \quad (5.2.8)$$

L'évaluation du coté droit conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x,$$

qui peut être comme

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots &= 1 + 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) - \left[a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \dots \right]_0^x, \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots &= 1 + 2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) - \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right), \end{aligned}$$

ou équivalent

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = 1 + (2 - a_0)x - \frac{a_1}{2} x^2 - \left(-\frac{2}{3!} - \frac{a_2}{3} \right) x^3 - \frac{a_3}{4} x^4 + \dots \quad (5.2.9)$$

Égaliser les coefficients de puissances similaires de x (5.2.9) donne

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = \frac{1}{4!}, \dots \quad (5.2.10)$$

la solution en série est donnée par :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\
 U(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{5.2.11}$$

qui converge vers la solution exacte

$$U(x) = \sin x + \cos x. \tag{5.2.12}$$

Exemple 5.7. Volterra de première espèce

$$1 + \frac{1}{3}x^3 + xe^x - e^x = \int_0^x tU(t)dt, \tag{5.2.13}$$

on utilise la série de Taylor pour $1 + \frac{1}{3}x^3 + xe^x - e^x$ et on trouve

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{3}x^3 + xe^x - e^x &= 1 + \frac{1}{3}x^3 + x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right), \\
 &= \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 + \dots &= \int_0^x (ta_0 + a_1t^2 + a_2t^3 + a_3t^4 + \dots)dt \\
 &= \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_1}{3}x^3 + \frac{a_2}{4}x^4 + \frac{a_3}{5}x^5 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.2.15}$$

donc

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2} \dots \tag{5.2.16}$$

la solution en série est donnée par

$$U(x) = x + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right), \tag{5.2.17}$$

donc l'équation converge vers la solution exacte

$$U(x) = x + e^x. \tag{5.2.18}$$

5.2.1.2 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Nous supposons que la solution $U(x)$ des équations intégrales de Fredholm

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)U(t)dt, \quad (5.2.19)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (5.2.2), où les coefficients a_n seront déterminés de manière récurrente. substituer (5.2.2) dans les deux coté de (5.2.19)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (5.2.20)$$

pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)dt, \quad (5.2.21)$$

puis nous suivons les mêmes étapes que pour la méthode de Volterra de seconde espèce.

Cette méthode sera illustrée en discutant l'exemple suivant

Exemple 5.8.

$$U(x) = -1 + \log(1 + x) + \int_0^{e-1} U(t)dt, \quad (5.2.22)$$

substituer $U(x)$ par la série

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.2.23)$$

dans les deux cotés de l'équation (5.2.22) conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -1 + \log(1 + x) + \int_0^{e-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad (5.2.24)$$

En évaluant l'intégrale du coté droit, et on égalant les coefficients de puissance de x similaires de deux cotés de l'équation résultante, nous trouvons

$$a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, \dots \quad (5.2.25)$$

Par conséquent la solution exacte est donnée par

$$U(x) = \log(1 + x). \quad (5.2.26)$$

5.2.2 Cas non linéaire

5.2.2.1 Équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Nous supposons que la solution $U(x)$ de l'équation non linéaire de Volterra

$$U(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)F(U(t))dt \quad (5.2.27)$$

est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans (5.2.2), où les coefficients sont déterminés de manière récurrente.

La substitution de (5.2.2) des deux cotés de (5.2.27) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x k(x,t)(F(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots))dt, \quad (5.2.28)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$. L'équation intégrale (5.2.27) sera convertie en une intégrale traditionnelle dans (5.2.28) où en intégrant le terme non linéaire $F(U(x))$, les terme de la forme $t^n, n \geq 0$ seront intégrés.

Nous intégrons d'abord le membre de droite de l'intégrale dans (5.2.27) ou (5.2.28) et collectons les coefficients de x . Nous assimilons ensuite les coefficients des mêmes puissances de x des deux cotés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence dans $a_j, j \geq 0$. la résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination complète des coefficients $a_j, j \geq 0$, Après avoir déterminer les coefficients $a_j, j \geq 0$ la solution en série suit immédiatement la substitution des coefficients dérivés dans (5.2.2). la solution exacte peut être obtenue si une telle solution exacte existe.

Exemple 5.9. Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

$$U(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)U^2(t)dt, \quad (5.2.29)$$

L'utilisation de la forme série (??) des deux membres de (5.2.29) donne

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)^2dt, \quad (5.2.30)$$

dont en intégrant l'intégrale a droite, et en collectant comme puissances de x , on obtient

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = (4 + a_0^2)x + (a_0^2 - \frac{a_2^2}{2} + a_0a_1)x^2 + (-a_0a_1 + \frac{a_1^2}{3} + \frac{2}{3}a_0a_2 - \frac{16}{3})x^3 + \dots \quad (5.2.31)$$

L'équation des coefficients de puissances similaires de x des deux cotés donné

$$a_0 = 0, a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots \quad (5.2.32)$$

la solution exacte est donnée par

$$U(x) = 4x, \quad (5.2.33)$$

5.2.2.2 Équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

Nous supposons que la solution $U(x)$ de l'équation de Fredholm non linéaire

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t)F(U(t))dt, \quad (5.2.34)$$

existe et est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme donnée dans 5.2.2, où les coefficients seront déterminés de façon récurrente, la substitution 5.2.2 des deux cotés de 5.2.34 donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \int_0^1 k(x, t)F\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt \quad (5.2.35)$$

pour simplifier

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^1 k(x, t)F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)dt, \quad (5.2.36)$$

puis nous suivons les mêmes étapes que pour la méthode de Volterra de seconde espèce dans le cas non linéaire

Exemple 5.10. À titre d'exemple nous allons résoudre l'équation suivante

$$U(x) = e^x + \frac{1}{16}(3 - e)^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)U^2(t)dt, \quad (5.2.37)$$

la substitution de la série 5.2.2 des deux cotés de de 5.2.37 donne

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = e^x + \frac{1}{16}(3 - e)^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^2 dt, \quad (5.2.38)$$

De ce qui précède, nous obtenons

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = \frac{1}{4!}, \dots, a_n = \frac{1}{n!} \quad (5.2.39)$$

cela donne la solution :

$$U(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (5.2.40)$$

par conséquent la solution exacte est donnée par

$$U(x) = e^x. \quad (5.2.41)$$

5.3 Méthode de la résolvante et noyaux itérés

5.3.1 Cas de l'équation de Fredholm

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$U(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)U(t)dt = f(x), \quad (5.3.1)$$

on pose

$$U(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x)\lambda^n, \quad (5.3.2)$$

avec $\Psi_n(x)$ définie par les formules

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \int_a^b k(x,t)f(t)dt, \\ \Psi_2(x) &= \int_a^b k(x,t)\Psi_1(x)dt = \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt, \\ \Psi_3(x) &= \int_a^b k(x,t)\Psi_2(x)dt = \int_a^b k_3(x,t)f(t)dt, \end{aligned}$$

et en générale

$$k_n(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.3.3)$$

avec $k_1(x,t) \equiv k(x,t)$, aussi on a

$$k_n(x,t) = \int_a^b k_m(x,s)k_{n-m}(s,t)ds, \quad m < n \quad (5.3.4)$$

La résolvante de l'équation intégrale (5.3.1) est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} \quad (5.3.5)$$

Le second membre est la série de Neumann du noyau $k(x, t)$. cette série converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (5.3.6)$$

avec

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt},$$

donc la solution de l'équation de Fredholm de second espèce s'exprime par

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad (5.3.7)$$

Remarque 5.1. la borne (5.3.6) est essentielle pour la convergence de la série (5.3.5) mais l'équation (5.3.1) peut être également admettre une solution pour $|\lambda| > \frac{1}{B}$

Exemple 5.11. On cherche les itérés du noyau $k(x, t) = x + \sin t$ si $a = -\pi, b = \pi$ par l'utilisation des formules (5.3.3) on obtient de proche en proche

$$\begin{aligned} k_1(x, t) &= k(x, t) = x + \sin t, \\ k_2(x, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} k(x, z) k_1(z, t) dt, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin z)(z + \sin t) dz, \\ &= 2\pi(1 + x \sin t), \\ k_3(x, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} k(x, z) k_2(z, t) dt, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin z)(2\pi + 2\pi z \sin t) dz, \\ &= (2\pi)^2(x + \sin t). \end{aligned}$$

il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme

1. Pour $n = 2k - 1$

$$k_{2k-1}(x, t) = (2\pi)^{2k-2}(x + \sin t),$$

2. Pour $n = 2k$

$$k_{2k}(x, t) = (2\pi)^{2k-1}(1 + x * \sin t),$$

où $k = 1, 2, 3, \dots$

5.4 Méthode de Boubnov-Galerkin

Soit à chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)U(t)dt, \quad (5.4.1)$$

On choisit un système de fonction $\{V_n(x)\}$ complet dans $L^2(a,b)$ et tel que, quelque soit n les fonctions $V_1(x), V_2(x), \dots, V_n(x)$ soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approchée $U_n(x)$ de la forme

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k V_k(x), \quad (5.4.2)$$

les coefficients $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ se définissent à partir de système linéaire

$$(U_n(x), V_k(x)) = (f(x), V_k(x)) + \lambda \left(\int_a^b k(x,t)U_n(t)V_k(x) \right), \quad (5.4.3)$$

où (f, g) désigne $\int_a^b f(x)g(x)dx$ et où en remplace $U_n(x)$ par $\sum_{k=1}^n a_k V_k(x)$. Si la valeur de λ dans (5.4.1) n'est pas un nombre caractéristique, alors pour n suffisamment grande, le système (5.4.3) admet une solution unique et lorsque $n \rightarrow \infty$, la solution approchée $U_n(x)$ de (5.4.2) tend, dans la métrique de $L^2(a,b)$ vers la solution exacte $U(x)$ de l'équation (5.4.1).

Exemple 5.12.

$$U(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2)U(t)dt, \quad (5.4.4)$$

Choisissons pour système complet sur $[-1, 1]$ le système de polynôme de Legendre (voir chapitre 1, section 2) $p_n(x) (n = 0, 1, \dots)$ et cherchons une solution approchée $U_n(x)$ de (5.4.4) de la forme :

$$U_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2},$$

portons dans (5.4.4) $U_3(x)$ à la place de $U(x)$, il vient :

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2) \left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2} \right) dt,$$

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = 1 + \frac{2}{3} a_2 x + 2a_1 x^2, \quad (5.4.5)$$

En multipliant successivement les nombres de la dernière équation par $1, x, \frac{3x^2 - 1}{2}$ et en intégrant par rapport à x de -1 à 1 , nous obtenant

$$\begin{cases} 2a_1 = 2 + \frac{4}{3}a_1 \\ \frac{2}{3}a_2 = 0 \\ \frac{2}{5}a_3 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

et donc $U_3(x) = 6x^2 + 1$, on vérifie par la suite que c'est la solution exacte de (5.4.4)

5.5 Méthode de somme finie

Soit l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$U(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)U(t)dt = f(x), \quad (5.5.1)$$

où $k(x,t)$ et $f(x)$ admettent des dérivées continue d'ordre requis et λ est un nombre donnée.

Prenons une formule de quadrature (voir chapitre 1,section 2)

$$\int_a^b \Phi(x)dx \simeq \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k), \quad (5.5.2)$$

avec x_1, x_2, \dots, x_n les abscisses des points de $[a, b]$ et A_1, A_2, \dots, A_n les coefficients indépendants de la forme de la fonction $\Phi(x)$.

Posons $x = x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ dans l'équation (5.5.1) on obtient :

$$U(x_k) - \lambda \int_a^b k(x_k,t)U(t)dt = f(x_k), k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.3)$$

de la formule (5.5.2) remplaçant l'intégrale de la dernière équation par une somme :

$$U(x_k) - \sum_{m=1}^n A_m k(x_k, x_m)U(x_m) = f(x_k), k = 1, 2, \dots, n \quad (5.5.4)$$

Nous avons obtenu un système linéaire de n équations algébriques à n inconnues $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$, valeurs approchées de la solution $U(x)$ aux points de base x_1, x_2, \dots, x_n , on peut prendre pour solution approché de l'équation (5.5.1) sur le segment $[a, b]$ de la fonction suivante :

$$\tilde{U}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^n A_m k(x, x_m) U(x_m)$$

dont les valeur au points x_1, x_2, \dots, x_n sont respectivement $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ voici les valeurs des coefficients A_k et les abscisse x_k de (5.5.2) obtenant par :

1. formule de trapéze

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n - 1)h = b$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h \quad \text{où } h = \frac{b - a}{n - 1}$$

2. formule de simpson ($n = 2n + 1$) :

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_{2m+1} = a + 2mh = b,$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}$$

$$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad \text{où } h = \frac{b - a}{2m}$$

Exemple 5.13. Dans cet exemple, on va trouver une valeur approchée de la solution de l'équation intégrale

$$U(x) + \int_0^1 x e^{xt} U(t) dt = e^x. \tag{5.5.5}$$

Fixons sur le segment $[0, 1]$ les points $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$ et posons $x = 0, x = 0.5, x = 1$ dans l'équation (5.5.5) nous obtenons

$$\begin{cases} U(0) = 1 \\ U(0.5) + 0.5 \int_0^1 e^{0.5t} U(t) dt = e^{0.5} \\ U(1) + \int_0^1 e^t U(t) dt = e \end{cases} \tag{5.5.6}$$

Puis nous remplaçons, a l'aide de la formule de Simpson

$$\int_0^1 \Phi(t) dt \simeq \frac{\Phi(0) + 4\Phi(0.5) + \Phi(1)}{6},$$

chacune des intégrales par une somme finie. On a pour l'intégrale de la deuxième équation du système (5.5.6)

$$\Phi(t) = \frac{e^{0.5t}}{2}U(t),$$

de sorte que

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}U(0), \Phi(0.5) = \frac{e^{0.25}}{2}U(0.5), \Phi(1) = \frac{e^{0.5}}{2}U(1).$$

Ainsi

$$0.5 \int_0^1 e^{0.5t}U(t)dt = \frac{1}{12}U(0) + \frac{1}{3}e^{0.25}U(0.5) + \frac{1}{12}e^{0.5}U(1). \quad (5.5.7)$$

La fonction à intégrer de la troisième équation est du système (5.5.6)

$$\Phi(t) = e^tU(t)$$

donc

$$\Phi(0) = U(0), \Phi(0.5) = e^{0.5}U(0.5), \Phi(1) = eU(1),$$

et par conséquent,

$$\int_0^1 e^tU(t)dt = \frac{1}{6}U(0) + \frac{2}{3}e^{0.5}U(0.5) + \frac{1}{6}eU(1) \quad (5.5.8)$$

portons (5.5.7) et (5.5.8) dans (5.5.6), le système linéaire de vient :

$$\begin{cases} U(0) = 1 \\ U(0.5) + \frac{1}{12}U(0) + \frac{1}{3}e^{0.25}U(0.5) + \frac{1}{12}e^{0.5}U(1) = e^{0.5} \\ U(1) + \frac{1}{6}U(0) + \frac{2}{3}e^{0.5}U(0.5) + \frac{1}{6}eU(1) = e \end{cases} \quad (5.5.9)$$

où

$$\begin{cases} U(0) = 1 \\ 1.4280U(0.5) + 0.1373U(1) = 1.5653 \\ 1.0991U(0.5) + 1.4530U(1) = 2.5516 \end{cases} \quad (5.5.10)$$

Résolvons le système (5.5.10)

$$U(0) = 1, U(0.5) = 1, U(1) = 0.9996.$$

Prenons pour la solution approchée de l'équation (5.5.1) la fonction

$$\tilde{U}(x) = e^x - \sum_{m=1}^3 A_m x e^{x x_m} U(x_m),$$

où

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1, A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{2}{3}, A_3 = \frac{1}{6},$$

D'où :

$$\tilde{U}(x) = e^x - x(0.6666x e^{0.5x} + 0.1666e^x) - 0.1666x$$

la solution exacte de l'équation intégrale (5.5.5) est $U(x) \equiv 1$.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons d'abord présenté différents types d'équations intégrales avec des méthodes élémentaires de résolution directes. Ensuite, nous avons appliqué quelques théorèmes du point fixe comme Banach, Schauder et Brouwer, ces derniers assurent l'existence de la solution. Le théorème de Banach permet en plus d'avoir l'unicité de la solution. Enfin, nous avons aussi présenté des méthodes numériques comme la méthode de la solution en série, la méthode d'approximation successive, la méthode de Boubnov-Galerkin, la méthode de somme finie et la méthode à noyau itérés qui permettent d'approcher la solution lorsqu'elle existe.

Nous envisageons comme perspective :

- D'appliquer d'autres méthodes numériques à la résolution des équations intégrales, comme la méthode de décomposition d'Adomian, méthode de collocation, ...etc.*
- D'étudier des équations intégro-différentielles et chercher leurs solutions.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *N.El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés. Dunod, Paris,2011.*
- [2] *L. Bernis et Julen, Analyse pour l'agrégation. Ellipses, 2018.*
- [3] *K.Allab, Éléments d'analyse, Fonctions d'une variable réelle. Ellipses, 2012.*
- [4] *Y.Caumel, cours d'analyse Fonctionnelle et complexe. Cépadues, 2003.*
- [5] *K.Atkinson et W.Han, Theoretical Numerical analysis. Springer, 2009.*
- [6] *R.P.Agarwal, M.Meehan et D.O'regan, Fixed point theory and application ,Cambridge tracts in mathematics, 2001.*
- [7] *G.Carlier, Analyse Fonctionnelle, Notes de cours, ENS, 2009.*
- [8] *A-M.Wazwaz, linear and nonlinear integral equations, Methods and applications, Saint xavier university, 2011.*
- [9] *W.P.Maseng, Ralph, méthodes numériques, Université virtuelle Africaine, 2011.*
- [10] *A.Rahmoune, Équations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution , 2018.*
- [11] *M.Krasnov, A.Kisselev, G.Makarenko,Équations intégrales, Problèmes et exercices, Éditions Mir-Mosccou, 1977.*

- [12] M.Rahman, *Intégral Equations and their Application*, Dalhousie University , Canada, 2007.
- [13] G.Micula, P.Pavel, *Differential and integral Equations through practical problems and exercises*, University of Cluj-Napoca, Romania.
- [14] M.Khirani, *Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra*, Mémoire de magister, Université de M'sila, 2011.
- [15] F.Sudo, *Vito Volterra and theoretical ecology*, Théorie, population Bilo, 1971.
- [16] P.Leroux, *Note on Legendre transform and line-irreducible graphs*, séminaire Lotharingien de combinatoire, Bertinoro, 2003.
- [17] J-C. Culioli, *Introduction à l'optimisation*, Ellipses, Références sciences, 2012.
- [18] G.Skandalis, *Analyse-Résumés et exercices*, Université Paris Diderot, 2015.
- [19] D.Sondaz, J-M. Morvan, *Autour du théorème de Cauchy-Lipschitz*, Équations différentielles, Cépaduès, 2017.
- [20] [https ://www.alfred-library.com/](https://www.alfred-library.com/)
- [21] [https ://www.universalis.fr](https://www.universalis.fr)