

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE SAAD DAHLAB-BLIDA
FACULTE DE LA TECHNOLOGIE

Département d'Aéronautique



D A B

026/2012

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur
D'Etat en Aéronautique

Option : Installation

Spécialité : Navigation Aérienne



Thème

COMPARAISON DES PERFORMANCES DES
FILTRES EKF ET UKF IMPLEMENTES POUR
LA FUSION INS/GPS

Réalisé par :

Mlle BENCHEIKH Manel

Encadré et dirigé par :

Mme. BENCHEIKH Saliha

Promotion : 2012

RESUME

L'objectif de notre travail est de développer un algorithme d'alignement d'une CI aidé par les mesures de vitesse GPS.

La CI utilisée est la CI VG-600, de basse performance, dont les niveaux des erreurs sont très élevés, et donc l'angle de lacet ne peut pas être déterminé avec précision ce qui amène à une navigation imprécise. Alors, le bon choix des procédures d'alignement assure un excellent point de départ pour la phase de navigation

Nous avons suivi deux phases d'alignement : « alignement grossier » dont l'angle de lacet est initialisé à partir des mesures gyroscopiques, puis « alignement fin » qui est basé sur des modèles d'erreurs représentant d'une manière fiable la nature des observations GPS et des erreurs affectant le système INS.

La modélisation est reposée sur les deux filtres numériques non linéaires : le filtre EKF et le filtre UKF. Le couplage faible, en boucle ouverte et en boucle fermée, était choisi. Les filtres EKF et UKF ont donnés des résultats qui ont excédés en performance ceux obtenus par mécanisation. Enfin, nous avons conclu que le filtre UKF est préféré aux moments d'absence ou de dégradation des mesures GPS.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie DIEU tout puissant de m'avoir donné la force pour réaliser ce travail.

Toute ma gratitude va à Mme BENCHEIKH Saliha, ma promotrice, pour m'avoir encadré durant cette période. Elle a guidé efficacement mon travail. Je la remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils scientifiques.

Je tiens à témoigner ma gratitude à M. BESSAID Djamel, Ingénieur en Air Algérie, pour son aide précieuse, ses conseils scientifiques et techniques.

Je tiens à remercier très vivement tous les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je voudrais aussi exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble des enseignants de DAB qui m'ont suivi durant toutes ces années d'études.

Finalement, ce travail de thèse doit beaucoup à mon père et ma mère qui m'ont encouragé et soutenu depuis toujours. Je leur adresse un immense merci.

Ça serait inconcevable de ne pas remercier mes frères, mes oncles et mes tantes surtout ma tante Soraya pour leur soutien.

SOMMAIRE

Liste des figures.....	i
Liste des tableaux.....	ii
Listes des paramètres.....	iii
Abréviations.....	iv
Introduction.....	1
Chapitre I : Les différents systèmes de positionnement	4
I.1 Le positionnement par le système GPS.....	4
I.1.1 Historique et objectif du système.....	4
I.1.2 Description du système.....	4
I.1.2.1 Segment spatial.....	4
I.1.2.2 Segment de contrôle.....	6
I.1.2.3 Segment utilisateur.....	7
I.1.3 Mesures GPS.....	7
I.1.3.1 Mesure de la pseudo-distance.....	8
I.1.3.2 Mesure de la phase.....	9
I.1.4 Solution de la position.....	11
I.1.5 Précision de positionnement.....	12
I.1.6 Les systèmes d'augmentation GNSS.....	14
I.1.6.1 Le GNSS1.....	15
I.1.6.2 Le GNSS2 (Futur Galileo).....	15
I.1.7 Avantages et inconvénients du système GPS.....	16
I.2 Les systèmes de navigation inertiels.....	18
I.2.1 Notions de base de la navigation inertielle.....	18
I.2.1.1 Définition et principe de la navigation inertielle.....	18
I.2.1.2 Constitution et rôle d'une centrale inertielle.....	19
I.2.1.3 Types et implémentation des systèmes inertiels.....	25
I.2.1.4 Erreurs et performances des systèmes inertiels.....	29
I.2.2 Equations de navigation et équations de mécanisation.....	32
I.2.2.1 Equations de navigation.....	33
I.2.2.2 Equations de mécanisation.....	37
I.2.4 Techniques d'initialisation et d'alignement de l'INS.....	41
I.2.5 Avantages et inconvénients des systèmes inertiels.....	43
Chapitre II : Le filtre EKF pour la fusion INS/GPS	45
II.1 Introduction.....	45
II.2 Filtrage de Kalman.....	45
II.2.1 Principe et algorithme du filtre de Kalman.....	45
II.2.2 Le filtre de Kalman linéarisé LKF.....	47
II.2.3 Le filtre de Kalman étendu EKF.....	51
II.2.4 Le filtre sous optimal de Schmidt SKF.....	53
II.2.5 Stabilité du filtre de Kalman.....	54
II.3 Différentes approches d'hybridation.....	55
II.3.1 Mode non couplé.....	55
II.3.2 Mode faiblement couplé.....	56
II.3.3 Mode fortement couplé.....	58
II.4 Implémentation du filtre EKF pour la fusion INS/GPS.....	59
II.4.1 Equations d'erreurs du système INS.....	59

II.4.1.1	Modèle dynamique de l'erreur en position.....	60
II.4.1.2	Modèle dynamique de l'erreur en vitesse.....	60
II.4.1.3	Modèle dynamique de l'erreur sur l'orientation.....	61
II.4.1.4	Modèle dynamique des erreurs des capteurs inertiels.....	61
II.4.2	Modèle dynamique du filtre en temps continu et en temps discret.....	63
II.4.3	Modèle d'observation du GPS.....	64
II.4.4	Modèle d'alignement par GPS.....	65
II.4.5	Effet de Lever arm.....	67
II.4.6	La synchronisation.....	68
II.4.7	Détection des trajets multiples.....	68
II.4.8	Réglage des paramètres du filtre.....	69
II.5	Inconvénients du filtre EKF.....	70
Chapitre III	Description du filtrage UKF	71
III.1	Concept de base du filtre UKF.....	71
III.2	Algorithmes génériques de l'UKF.....	72
III.2.1	UKF pour des systèmes de bruits additifs.....	73
III.2.2	UKF pour des systèmes de bruits non additifs.....	77
III.3	UKF pour la fusion INS/GPS.....	79
III.3.1	Modèle d'erreur et mécanisation du système hybride INS/GPS.....	79
III.3.2	Implémentation du filtre UKF pour la fusion INS/GPS.....	79
III.3.3	Mesure de position GPS.....	83
Chapitre IV	Résultats et interprétations	84
IV.1	Description des données.....	84
IV.1.1	Matériels et fichiers joints.....	84
IV.1.2	Solution GPS.....	85
IV.1.3	Solution de la mécanisation.....	87
IV.2	Estimation des erreurs par EKF et UKF.....	88
IV.2.1	Erreurs en boucle ouverte.....	89
IV.2.1.1	Variation de l'innovation en boucle ouverte.....	89
IV.2.1.2	Erreurs de vitesse en boucle ouverte.....	89
IV.2.1.3	Erreurs d'attitude en boucle ouverte.....	90
IV.2.1.4	Variation du RMS de vitesse en boucle ouverte.....	91
IV.2.2	Erreurs en boucle fermée.....	91
IV.2.2.1	Variation de l'innovation en boucle fermée.....	91
IV.2.2.2	Erreurs de vitesse en boucle fermée.....	91
IV.2.2.3	Erreurs d'attitude en boucle fermée.....	92
IV.2.2.4	Variation du RMS de vitesse en boucle fermée.....	93
IV.3	Conclusion.....	94
Conclusion générale	95	
Bibliographie	97	
Annexes		
Annexe A	Les repères de référence et transformations.....	98
Annexe B	Processus stochastique et modèles de bruit du filtre de Kalman.....	106
Annexe C	Modèles dynamiques d'erreur inertielle et linéarisation par différenciation..	111

LISTE DES FIGURES

Fig.I.1	: Satellite et constellation du système GPS.....	5
Fig.I.2	: Satellites des différents blocs.....	6
Fig.I.3	: La location du segment de contrôle du système GPS.....	7
Fig.I.4	: Comparaison de codes du signal reçu et du signal généré par le récepteur...	8
Fig.I.5	: Comparaison de phase du signal reçu et du signal généré.....	10
Fig.I.6	: Interepretation géométrique de la mesure de phase.....	11
Fig.I.7	: Positionnement GPS.....	12
Fig.I.8	: Principe des systèmes inertiels.....	19
Fig.I.9	: Types de gyroscopes.....	21
Fig.I.10	: Gyroscopes optiques – Effet de Sagnac.....	21
Fig.I.11	: Principe d'un accéléromètre.....	22
Fig.I.12	: Exemples d'accéléromètres.....	24
Fig.I.13	: Accéléromètres MEMS Strain-Sensing.....	24
Fig.I.14	: Types de systèmes inertiels.....	25
Fig.I.15	: Implémentation des systèmes gimbaled.....	27
Fig.I.16	: Implémentation des systèmes strapdown.....	28
Fig.I.17	: Quelques types d'erreurs classiques.....	30
Fig.I.18	: Mécanisation du système INS.....	38
Fig.II.1	: Trajectoires nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman.....	49
Fig.II.2	: Trajectoires estimée et réelle pour un filtre de Kalman étendu.....	51
Fig.II.3	: Le filtre EKF en configuration de « feedback ».....	52
Fig.II.4	: Etapes de EKF pour l'estimation des paramètres du système non-linéaire...	53
Fig.II.5	: Mode non couplé.....	56
Fig.II.6	: Couplage faible en boucle ouverte.....	57
Fig.II.7	: Couplage faible en boucle fermée.....	58
Fig.II.8	: Couplage fort.....	59
Fig.II.9	: Alignement par la vitesse GPS.....	66
Fig.II.10	: Extrapolation des données inertielles.....	68
Fig.III.1	: Concept de propagation de moyenne et de covariance.....	72
Fig.IV.1	: Rue Gay-lussac au 5ème arrondissement de Paris.....	85
Fig.IV.2	: Trajectoire GPS.....	86
Fig.IV.3	: Les différents DOP.....	86
Fig.IV.4	: Erreurs des vitesses dérivées de la position GPS.....	87
Fig.IV.5	: Comparaison des positions par GPS et mécanisation.....	88
Fig.IV.6	: Variations des angles d'Euler.....	88
Fig.IV.7	: L'innovation en boucle ouverte.....	89
Fig.IV.8	: Erreurs de vitesse en boucle ouverte.....	90
Fig.IV.9	: Erreurs d'attitude en boucle ouverte.....	90
Fig.IV.10	: Variation du RMS de la vitesse en boucle ouverte.....	91
Fig.IV.11	: L'innovation en boucle fermée.....	92
Fig.IV.12	: Erreurs de vitesse en boucle fermée.....	92
Fig.IV.13	: Erreurs d'attitude en boucle fermée.....	93
Fig.IV.14	: Variation du RMS de la vitesse en boucle fermée.....	93
Fig.A.1	: Le repère avion.....	98
Fig.A.2	: ECEF, NED et Coordonnées géodésiques.....	99

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1	: Comparaison de certaines erreurs principales des diverses implémentations de gyroscopes.....	22
Tableau I.2	: Performance des différents grades des capteurs inertiels.....	32
Tableau I.3	: Coefficients de la gravité normale.....	38
Tableau II.1	: Equations discrètes du filtre de Kalman.....	47
Tableau II.2	: Equations linéarisées du filtre LKF.....	50
Tableau III.1	: Filtrage UKF dans le cas de bruit additif.....	76
Tableau III.2	: Filtrage UKF dans le cas de bruit non additif.....	77
Tableau A.1	: Propriétés de l'ellipsoïde IAG-GRS80.....	100
Tableau B.1	: Fonctions (filtres) d'Autocorrélations et densités spectrales de puissance typiques.....	107

LISTE DES PARAMETRES

- b : Biais des capteurs
- c : Vitesse de propagation
- C_b^n : Matrice de transformation du repère véhicule b au repère local n
- D : Matrice de transformation du repère local n au repère géographique LLa
- f : Force spécifique
- F : Matrice dynamique
- G : Matrice de commande
- h : Altitude
- H : Matrice d'observation en discret
- g : Vecteur gravité
- K : Gain de Kalman
- L : Dimension du vecteur d'état
- P : Matrice de covariance du vecteur d'état
- Q : Matrice de covariance du bruit d'état
- q : Quaternion
- r : Vecteur position
- R : Matrice de covariance du bruit de mesure
- r_M : Rayon de courbure méridional
- r_N : Rayon de courbure transversal
- s : Vecteur d'innovation
- S : Matrice de covariance de l'innovation
- u : Vecteur d'entrée
- v : Vecteur vitesse
- v_k : Bruit de mesure
- w_k : Bruit d'état
- z : Vecteur de mesure
- $x, \delta x$: Vecteurs d'état
- γ : Vecteur de non-orthogonalité
- ε : Erreur d'orientation
- ω_{ab}^b : Vitesse de rotation du repère b par rapport au repère a exprimée dans le repère b
- ω_{ie}^i : Vecteur rotation terrestre
- Ω : Forme anti-symétrique d'un vecteur
- Φ : Latitude
- ϕ : Matrice de transition
- ϕ : Angle de roulis
- ψ : Angle de lacet
- λ : Longitude
- λ : Longueur d'onde
- ρ : Vecteur d'orientation
- ρ^i : Distance géographique récepteur-satellite i
- θ : Angle de tangage
- χ : Matrice des points sigma
- W : Poids associés aux points sigma

ABBREVIATIONS

AAIM	:	Aircraft Autonomous Integrity Monitoring
ABAS	:	Aircraft Based Augmentation System
CI	:	Centrale Inertielle
DCM	:	Director Cosinus Matrix
DoD	:	Department of Defense
DOP	:	Dilution Of Precision
EKF	:	Extended Kalman Filter
FOG	:	Fiber Optic Gyro
GBAS	:	Ground Based Augmentation System
GDOP	:	Geometric Dilution Of Precision
GLONASS	:	Global Navigation Satellite System
GNSS	:	Global Navigation Satellite System
GPS	:	Global Positioning System
GRV	:	Gaussian Random Variable
HDOP	:	Horizontal Dilution Of Precision
IMU	:	Inertial Measurement Unit
INS	:	Inertial Navigation System
LKF	:	Linearised Kalman Filter
LLa	:	Latitude, longitude et altitude
LORAN-C	:	Long Range Navigation-C
MEMS	:	Micro Electro Mechanical System
NED	:	North-East-Down
PDF	:	Probability Density Function
PDOP	:	Position Dilution Of Precision
PPS	:	Precise Positioning Service
PR	:	Pseudo-Range
PRN	:	Pseudo Random Noise
RAIM	:	Receiver Autonomous Integrity Monitoring
RLG	:	Ring Laser Gyro
RMS	:	Root Mean Square
SBAS	:	Satellite Based Augmentation System
SINS	:	Strapdown Inertial Navigation System
SKF	:	Schmidt Kalman Filter
SPS	:	Standard Positioning Service
SV	:	Satellite Vehicule
TDOP	:	Time Dilution Of Precision
UERE	:	User Equivalent Ranging Error
UKF	:	Unscented Kalman Filter
VDOP	:	Vertical Dilution Of Precision
VSG	:	Vibratory Structure Gyroscopes
WGS-84	:	World Geodetic System 1984
WMQ	:	Weighted Mean Quaternion

Depuis plusieurs années, un grand nombre de procédés de positionnement et de localisation ont été développés à la demande, d'une part, des navigateurs (maritimes et aériens), d'autre part, des spécialistes de diverses disciplines (géodésie, hydrographie, géophysique, prospections pétrolière et minière, ...).

Ces procédés permettent de déterminer un point, fixe ou mobile, se trouvant sur ou près de la surface de la terre. Ils se distinguent par leur fiabilité, la simplicité d'exploitation, de type de traitement de données,

Les systèmes de navigation pour l'aéronautique, qui font partie de ces procédés, reposent traditionnellement sur l'utilisation des moyens radio-électriques, au sol ou satellitaires, et de plateformes inertielles.

Le système de positionnement par satellite, GPS, délivre des informations de position, de vitesse ou encore de temps absolu avec une très grande précision comparée à celle délivrée par les systèmes de navigation radio-électriques conventionnels. Ces informations sont délivrées quelque soit le lieu sur le globe terrestre tant que les signaux satellitaires soient disponibles.

Cependant, le système GPS présente plusieurs insuffisances qui dégradent les performances du système. Ces insuffisances (disponibilité, intégrité, continuité, précision) limitent l'utilisation du système car des problèmes de sécurité se posent pour la navigation.

Afin de répondre aux nouveaux défis de sécurité, plusieurs techniques ont été développées, pour résoudre les inconvénients de GPS, à savoir : ABAS (RAIM et AAIM), GBAS et SBAS. La technique ABAS (AAIM) est la base de notre travail dont le récepteur GPS peut être couplé avec le système inertiel INS.

L'intégration entre un système INS et le système GPS se révèle être un moyen très efficace de navigation. La synergie présente entre ces deux systèmes est due à la très bonne précision à court terme de l'inertie alliée à la bonne précision à long terme du GPS. Le but d'intégration GPS/INS n'est pas seulement pour augmenter la précision du positionnement mais, les solutions de l'INS peuvent être utilisées pour identifier et corriger le saut des cycles GPS. De même, l'INS peut être recalé par le GPS si les mesures GPS sont bien précises.

Le filtrage de Kalman fournit un outil puissant pour créer le synergisme entre les deux systèmes de navigation INS et GPS. Il donne l'estimation optimale par minimisation d'une erreur

quadratique moyenne. Les résultats du filtrage fiables de Kalman sont fondés sur la définition correcte des modèles mathématiques et stochastiques utilisés dans le procédé de filtrage.

Toutefois, l'optimalité du filtre de Kalman dépend fortement de la linéarité et de l'hypothèse gaussienne. Quand il est utilisé pour des systèmes non-linéaires, sa performance est limitée par les linéarisations effectuées sur le système et sa stabilité ne peut être garantie a priori. Dépendant de type de couplage réalisé entre GPS/INS, quelques nouvelles méthodes d'évaluation ont été développées ces dernières années telles que le filtre de Kalman étendu (EKF) et le filtrage particulaire (UKF). Ces deux filtrages s'appliquent pour des systèmes linéaires comme pour des systèmes non-linéaires.

Dans ce document, un filtre étendu de Kalman a été développé pour intégrer un GPS avec une CI de faible précision pour le positionnement d'un véhicule. Une approche de type « couplage faible » (loosely coupled) d'intégration a été développée ; elle utilise des positions et des vitesses GPS comme mises à jour de la CI. Le filtrage UKF (ou sigma point) est aussi détaillé par la suite et, une comparaison des résultats des deux algorithmes est présentée pour montrer les performances des deux filtrages pour le cas du système non-linéaire INS/GPS.

Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le chapitre I, nous avons décrit les différents systèmes de positionnement et leurs concepts de fonctionnement, puis résumé leurs avantages et leurs inconvénients en vue d'une application dans un système hybride. Nous avons également présenté les équations de navigation inertielle sur lesquelles est basé le modèle dynamique du système.

Le chapitre II traite l'hybridation INS/GPS utilisée pour obtenir un positionnement en 3D du véhicule en temps réel. Il présente les différentes approches d'hybridation et explique l'utilisation des équations dynamiques d'erreur dans le filtre de Kalman, basées sur la linéarisation par différenciation pour des erreurs de position, de vitesse et d'orientation. Ensuite, la mise en application du filtre de Kalman étendu pour une approche d'intégration faiblement couplée est présentée. Les modèles mathématiques pour le filtre de Kalman sont établis. La technique de synchronisation en temps réel, entre les données du GPS et celles de la CI, est expliquée. Nous avons poursuivi le chapitre par quelques aspects tels que l'alignement et le réglage des paramètres du filtre considéré.

Dans le chapitre III, est présentée une autre méthode d'intégration non fondée sur l'étape de linéarisation exigée par l'EKF. C'est la méthode (*Unscented Kalman Filter*) ou (*Sigma point Kalman Filter*). Les algorithmes de la méthode ainsi que les modèles d'implémentation du filtre pour la fusion INS/GPS sont alors exposés.

Le chapitre IV, présente l'exploitation des données et les résultats de la programmation. En premier lieu, nous avons discretisé les données utilisées dans notre travail. Ensuite, nous avons montré et analysé les résultats de l'intégration GPS/INS basée sur les deux filtrages EKF et UKF.

Nous clôturerons notre travail par une conclusion en exposant quelques perspectives possibles.

**LES DIFFERENTS SYSTEMES
DE POSITIONNEMENT**

I.1- LE POSITIONNEMENT PAR LE SYSTEME GPS

I.1.1- Histoire et objectif du système

Le système GPS (Global Positioning System), est conçu par le ministère de la Défense américain (DoD). Il est né de la fusion de deux programmes expérimentaux, l'un de l'U.S.Navy, l'autre de l'U.S.Air force. Par sa conception, il affiche l'ambition d'offrir à tous les types d'utilisateurs un service homogène et continu en trois dimensions, avec un codage susceptible de donner aux forces armées américaines une précision inaccessible aux usagers civils.

Le développement du système GPS a commencé dans les années 70, la mise en place démarrait en 1979 par le lancement du premier satellite. Le système a été déclaré pleinement opérationnel par le DoD le début février 1994.

L'objectif du système est d'assurer des mesures de navigation (position, vitesse, temps) avec une très grande précision, n'importe où et n'importe quand sur ou au voisinage de la terre, dans un système de référence mondial bien spécifié : le système géodésique mondial WGS-84 (World Geodetic System).

I.1.2- Description du système

Comme tout système spatial, le système GPS est composé de trois segments :

- Segment spatial qui est constitué d'un ensemble de satellites ;
- Segment de contrôle qui permet de piloter le système ;
- Segment utilisateur qui est l'ensemble des utilisateurs civils et militaires du système.

I.1.2.1- SEGMENT SPATIAL

Afin d'assurer une couverture mondiale et avoir au moins quatre satellites visibles, le segment spatial est constitué d'une constellation de 24 satellites répartis en 6 plans orbitaux inclinés de 55° par rapport à l'équateur (Fig.I.1). Chaque orbite contient 4 satellites et espacée de l'autre de 60° . La période des satellites est de 12 heures à une altitude de 20.200 Km.

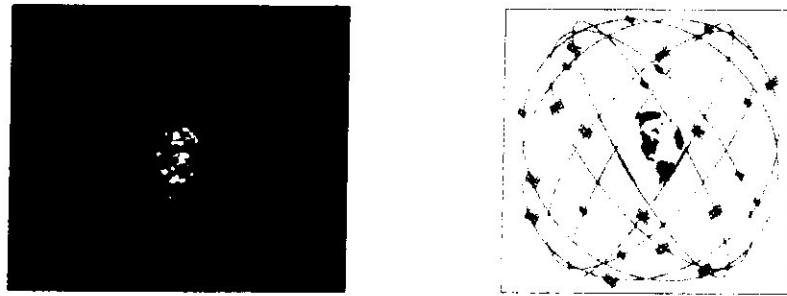


Fig.I.1 : Satellite et constellation du système GPS

Les générations successives des satellites sont désignées sous le nom de « blocs » :

Bloc I : Les satellites du bloc I sont les 11 premiers satellites du système, mis en orbite entre 1978 et 1985, fabriqués par Rockwell international ; ils étaient prévus pour une mission moyenne de 4,5 ans et une durée de vie de cinq ans, mais leur durée de vie moyenne s'éleva jusqu'à 10 ans pour quelqu'un d'entre eux. Leur mission principale était de valider les différents concepts du GPS.

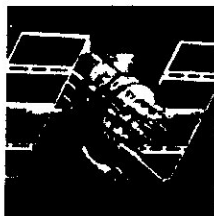
Bloc II : Les satellites du bloc II sont les 28 satellites opérationnels du système lancés à partir de 1989. De nombreuses améliorations ont été apportées à ces satellites par rapport à la version précédente, notamment en ce qui concerne leur autonomie. Ils sont capables de rester 14 jours sans contact avec le segment sol tout en gardant une précision suffisante. Bien qu'on ait estimé leur durée de vie à 7,5 ans, la plupart d'entre eux sont restés en fonction pendant plus de dix ans.

Bloc IIA : Les satellites du bloc IIA, au nombre de 19 et lancés entre 1990 et 1997, correspondent à une version perfectionnée des satellites du bloc II initial. Ils sont équipés de deux horloges atomiques au césium et de deux horloges au rubidium. Ils ont marqué à partir de 1993 le début de la phase opérationnelle du GPS. En 2011, 9 satellites du bloc IIA sont toujours actifs.

Bloc IIR : Les satellites du bloc IIR sont dotés d'une meilleure autonomie, fabriqués par Lockheed martin corporation, et mis en orbite entre 1997 et 2009. Ils peuvent transmettre mutuellement des messages sans aucun contact au sol, permettant ainsi aux opérateurs du système de pouvoir communiquer avec des satellites qui leur sont inaccessibles dans une communication directe. Ils sont équipés de trois horloges atomiques au rubidium. Vingt-et-un satellites du bloc IIR ont été lancés (le dernier le 17 août 2009). Vingt sont actifs. Les huit derniers sont désignés sous le sigle IIR-M parce qu'ils émettent un nouveau code civil (I2c) et un nouveau code militaire (m).

Bloc IIF : Les satellites du bloc IIF (follow-on) construits par Boeing sont au nombre de 12, le premier de la série a été lancé en mai 2010, le second en juillet 2011. Ces satellites émettent un nouveau signal sur la fréquence 15.

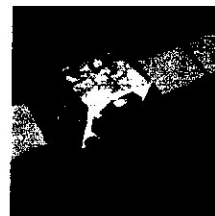
Bloc III : Les satellites de ce bloc sont encore en phase de développement en 2011 et ont pour but de faire durer le GPS jusqu'en 2030 et plus. Les premières études furent lancées en novembre 2000 et, en mai 2008, Lockheed martin corporation fut choisi pour réaliser 32 satellites. Une première série composée de 8 satellites (Bloc IIIA) doit être lancée à partir de 2014.



(a) Bloc IIA



(b) Bloc IIR



(c) Bloc IIF



(d) Bloc III

Fig.I.2 : Satellites des différents blocs

Pour identifier les satellites GPS, il existe deux systèmes de numérotation :

- Numérotation séquentielle dans l'ordre de lancement SV (Satellite Vehicule)
- Numérotation PRN (Pseudo Random Noise) donnée pour les codes qui est la plus utilisée et fournie à l'utilisateur dans les messages de navigation.

I.1.2.2- SEGMENT DE CONTROLE

Le segment de contrôle est constitué de cinq stations au sol (hawai, Colorado Springs, ascension, Diego Garcia, kwajalein) dont la station de contrôle principale est située à Colorado Springs. Les fonctions assurées par ces stations sont :

- La poursuite des satellites ;
- Le calcul des corrections d'horloge ;
- Le calcul de trajectoire des satellites (éphémérides) ;
- L'injection des messages de navigation destinés aux utilisateurs vers les satellites.



Fig.1.3 : La location du segment de contrôle du système GPS

1.1.2.3- SEGMENT UTILISATEUR

Les usagers du GPS sont nombreux (navigation aérienne et maritime, transport terrestre, cartographie ...).

Pour accéder aux fonctions du système GPS, l'utilisateur doit s'équiper d'un récepteur GPS permettant de capter les signaux satellitaires.

Cependant, les récepteurs GPS se différencient selon le nombre de canaux de réception. Il existe des récepteurs multiplexés dont un seul canal poursuit successivement tous les satellites visibles, et des récepteurs à canaux parallèles dont plusieurs canaux, six à au moins 12, indépendants traitent simultanément les signaux satellitaires. Ce dernier type des récepteurs est celui utilisé actuellement et permet une meilleure qualité d'acquisition (meilleur ratio signal /bruit).

1.1.3- Mesures GPS

Les récepteurs GPS peuvent enregistrer sur une ou deux fréquence (L1 : mono fréquence ou L1 + L2 : bi fréquence) deux types de mesures :

- Mesure de pseudo-distance sur les codes C/A et/ou P(Y)
- Mesure de phase sur les porteuse L1 et L2

Les récepteurs effectuant des mesures de pseudo-distance sont appelés récepteurs de navigation. Ils servent à des applications peu précises dont le but est de positionner un mobile. Les codes diffusés par les satellites permettent au récepteur de mesurer le temps de transmission des signaux, et de ce fait déterminer la distance entre les satellites visibles et l'utilisateur. Le message de navigation fournit des

données pour calculer la position de chaque satellite visible. De cette information, la position et le décalage d'horloge utilisateur sont calculés en utilisant des équations simultanées.

Les récepteurs effectuant des mesures de pseudo-distances et de phases sont utilisés pour des applications plus précises telles que la géodésie et la topographie.

1.1.3.1- MESURE DE LA PSEUDO-DISTANCE

La mesure de la pseudo-distance entre le satellite visible et l'utilisateur se fait par la mesure de la durée de propagation du signal émis par le satellite jusqu'à son arrivée au récepteur utilisateur. Le signal émis arrive au récepteur avec un retard Δt correspondant au temps mis par l'onde pour parcourir le chemin satellite récepteur.

Le principe de mesure repose sur l'utilisation de la technique de corrélation qui permet de comparer deux codes identiques. Pour ce faire, le récepteur GPS génère un code pseudo aléatoire (PRN) de la même forme que le code émis par le satellite. Le récepteur retarde ensuite son code jusqu'à ce qu'il soit aligné avec celui provenant du satellite. La comparaison de ces codes permet la mesure du décalage du temps Δt .

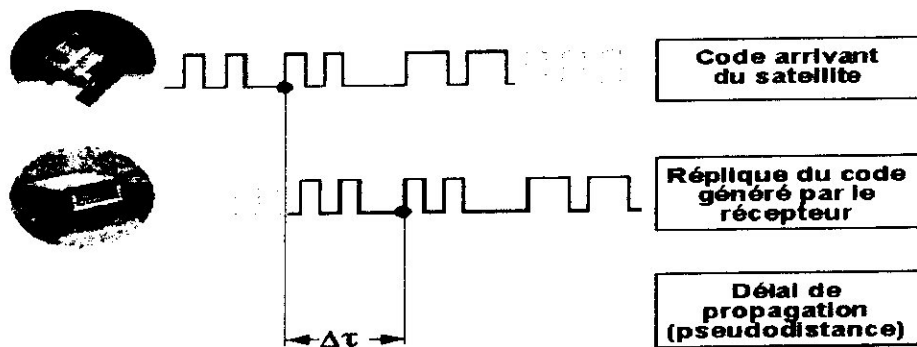


Fig.1.4 : Comparaison de codes du signal reçu et du signal généré par le récepteur

Le retard Δt entre le code reçu du satellite i et le code généré localement peut s'écrire comme suit :

$$\Delta t = T_r - t_i \tag{Eq.1-1}$$

où,

T_r : le temps de réception dans l'échelle du temps du récepteur

t_i : le temps d'émission dans l'échelle du temps du satellite i

Comme les deux horloges récepteur satellite ne sont pas synchronisées, on définit un temps de référence τ (temps GPS) établi par le segment de contrôle, et les horloges utilisateur et satellite sont décalées par rapport à ce temps GPS par la modélisation suivante :

$$T_r = \tau_r + \Delta T \quad \text{Eq.I-2a}$$

$$t_s^i = \tau_s^i + \Delta \tau^i \quad \text{Eq.I-2b}$$

avec,

τ_r : Temps de réception en temps GPS

τ_s^i : Temps d'émission en temps GPS

ΔT : Décalage d'horloge récepteur (inconnu)

$\Delta \tau^i$: Décalage d'horloge satellite (connu)

Si on remplace les équation (Eq.I-2a) et (Eq.I-2b) dans l'équation (Eq.I-1), on obtient :

$$\Delta t^i = (\tau_r - \tau_s^i) + (\Delta T - \Delta \tau^i) \quad \text{Eq.I-3}$$

La pseudo-distance, notée PR^i , entre le récepteur et le satellite i , en multipliant Δt^i par la vitesse de transmission c , sera :

$$PR^i = c \times \Delta t^i = c \times (\tau_r - \tau_s^i) + c \times (\Delta T - \Delta \tau^i) \quad \text{Eq.I-4}$$

Le terme $c \times (\tau_r - \tau_s^i)$ représente la distance géométrique entre le récepteur à l'instant τ_r et le satellite i à l'instant τ_s^i , notée ρ^i .

1.1.3.2- MESURE DE LA PHASE

Le principe de la mesure de phase GPS est de comparer la phase du signal reçu avec la phase du signal généré localement par le récepteur et qui est une réplique du signal du satellite. Cette mesure se fait sur les ondes porteuses L_1 et L_2 de longueurs d'ondes 19,0 cm et 24,4 cm respectivement.

En fait, le déphasage $\Delta \phi$ mesuré ce n'est qu'une partie fractionnelle de la différence entre la phase du signal à l'instant de réception $\phi(T_r)$ et la phase du signal à l'instant d'émission $\phi^i(t_s^i)$ qui est donnée en cycles par :

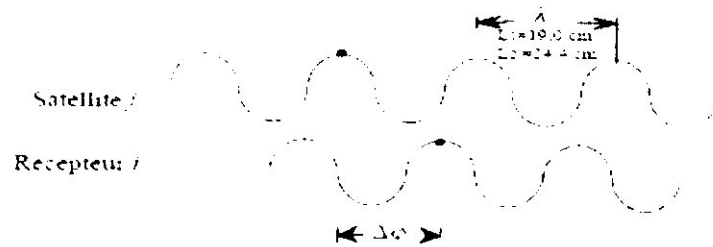


Fig.I.5 : Comparaison de phase du signal reçu et du signal généré

$$\phi(T_r) - \phi^s(t_r^s) = f \times (T_r - t_r^s) \quad \text{Eq.I-5}$$

f : est la fréquence

Puisque les deux horloges récepteur-satellite ne sont pas synchronisées, on remplace les deux équations (Eq.I-2a) et (Eq.I-2b) dans l'équation (Eq.I.5), on aura :

$$\phi(T_r) - \phi^s(t_r^s) = f \times (\tau_r - \tau_r^s) + f \times (\Delta T - \Delta \tau^s) \quad \text{Eq.I-6}$$

avec $(\tau_r - \tau_r^s) = \frac{\rho_r^s}{c}$

On a dit précédemment que le déphasage $\Delta\phi$ représente la partie fractionnelle de la différence $\phi(T_r) - \phi^s(t_r^s)$, alors la différence de la phase totale en fonction de $\Delta\phi$ sera :

$$\phi(T_r) - \phi^s(t_r^s) = \Delta\phi + N^s(T_r) \quad \text{Eq.I-7}$$

ou $N^s(T_r)$ est un nombre entier de cycles que le récepteur ne peut pas mesurer.

D'après l'équation (Eq.I-7), le récepteur mesure non seulement le déphasage $\Delta\phi$ mais il mesure aussi à l'aide d'un compteur le nombre entier de cycles du déphasage reçus depuis la première mesure ; pour les autres mesures on aura le suivant :

$$N^s(T_r) = N^s(t_1) + \eta_{Rr} = N^s + \eta_{Rr} \quad \text{Eq.I-8}$$

où η_R est le nombre de cycles comptés par le récepteur à l'instant de réception et N' est une inconnue qui est la même tant qu'il n'y a pas d'interruption du signal qui provoque un saut de cycles. Cette inconnue est appelée ambiguïté entière.

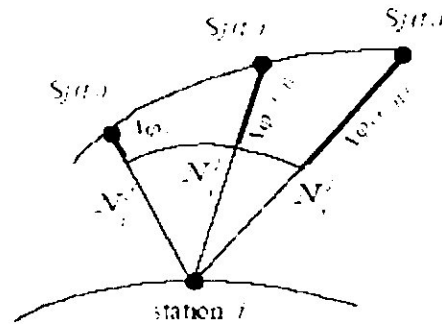


Fig.I.6: Interepretation géométrique de la mesure de phase

En combinant les deux relations (Eq.I.6) et (Eq.I.8), on trouve :

$$\Delta \phi + \eta_R = f \times \rho' / c + f \times (\Delta T - \Delta \tau') - N' \quad \text{Eq.I-9}$$

La mesure de la phase en distance s'obtient en multipliant l'équation (Eq.I-9) par la longueur d'onde λ :

$$\lambda \cdot \phi = \rho' + c \times (\Delta T - \Delta \tau') - \lambda \times N' \quad \text{Eq.I-10}$$

avec : $\phi = \Delta \phi + \eta_R$

1.1.4- Solution de position

Une fois que le récepteur a recueilli les pseudo-distances et les données de navigation de quatre satellites ou plus, il calcule la solution de position en temps réel.

Le récepteur résout un minimum de quatre équations simultanées de pseudo-distances, avec comme variables inconnues la position tridimensionnelle et le décalage d'horloge du récepteur utilisateur.

Chaque équation est une expression du principe que la distance réel ρ est égale à la différence entre la pseudo-distance mesurée PR et les décalages d'horloges récepteur-satellite t . Ce principe s'exprime comme suit :

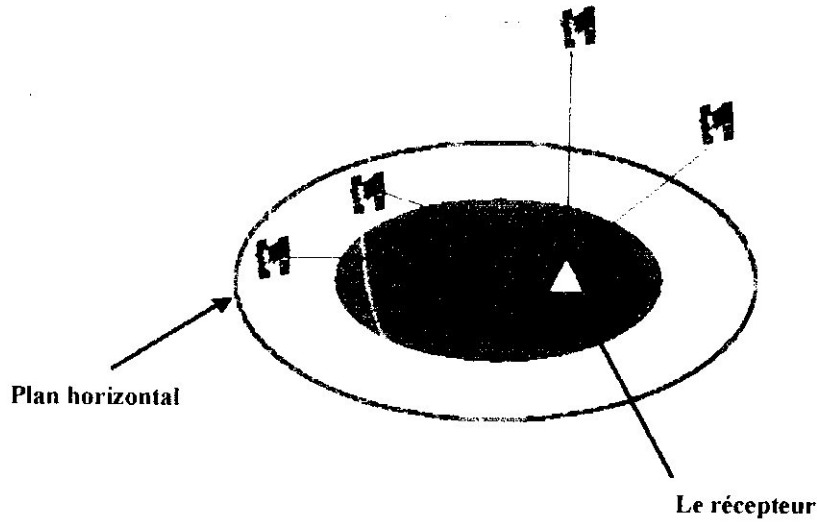


Fig.I.7 : Positionnement GPS

$$PR^i - c \times (\Delta T - \Delta \tau^i) = \rho^i = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} \quad \text{Eq.I-11}$$

où (x,y,z) sont les coordonnées du récepteur (en mètres) et (X, Y, Z) les coordonnées du satellite i (en mètres).

La distance réelle ρ est non seulement biaisée par les décalages d'horloges récepteur satellite, mais aussi elle est biaisée par les effets relativistes I^i et les retards de propagation (ionosphérique et troposphérique) du signal. L'équation (Eq.I-11) peut alors se mettre sous la forme suivante, [1] :

$$PR^i - c \times (\Delta T - \Delta \tau^i) = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} + c \times T_{trop}^i + c \times T_{ion}^i + I^i \quad \text{Eq.I-12}$$

1.1.5-Précision de positionnement

Les exigences concernant la précision de positionnement imposées par le département de défense des U.S.A (DoD) sur le système GPS sont moins de 16mètres (95%) pour le service PPS, et 100mètres (95%) en horizontal pour le service SPS lorsque la dégradation volontaire (SA) était activée. Après la levée de SA, une précision de moins de 30 mètres pour le service SPS est obtenue, précision qui n'est pas assurée par d'autres système de navigation courants.

La détermination de la précision de positionnement s'effectue par deux paramètres importants qui sont :

- L'erreur de distance équivalente utilisateur **UERE** (**U**ser **E**quivalent **R**anging **E**rror) qui est la précision de mesure de distance entre l'utilisateur et chaque satellite visible. Elle inclut toutes les erreurs de mesures de distance, y compris l'erreur due aux délais atmosphérique (ionosphère, troposphère), l'erreur sur la position des satellites, l'erreur de synchronisation, l'erreur propre au bruit de mesure du récepteur et l'erreur due aux multitrajets.
- Le facteur de dégradation géométrique **GDOP** (**G**eometric **D**ilution **O**f **P**recision) caractérisant la géométrie des satellites visibles par rapport à l'utilisateur. Le GDOP est un facteur multiplicatif sans dimension représentant une mesure instantanée de l'erreur du positionnement. Ce facteur relie l'erreur de mesure de distance (UERE) à l'erreur de position finale par la relation :

$$\text{erreur de position} = \text{UERE} \times \text{GDOP}$$

Mathématiquement, le GDOP est le rapport de l'erreur de position en somme quadratique \mathcal{E}_{rs} à l'erreur de position en somme quadratique moyenne \mathcal{E}_{rms}

$$\text{GDOP} = \frac{\mathcal{E}_{rs}}{\mathcal{E}_{rms}} \quad \text{Eq.I-13}$$

L'erreur \mathcal{E}_{rs} est donnée par : $\mathcal{E}_{rs} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{tt}^2}$

où les sigma sont les variances de l'erreur des paramètres inconnus (position et décalage du temps) contenues dans la matrice de variance covariance de l'estimé.

L'erreur \mathcal{E}_{rms} dans le cas de quatre satellites est donnée par :

$$\mathcal{E}_{rms} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{4}}$$

Si on considère que tous les satellites admettent une erreur de mesure identique (de matrice de variance $\sigma \times I$ avec I la matrice unité) et indépendante d'un satellite à l'autre, alors, [1] :

$$\text{GDOP} = \sqrt{\frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{tt}^2}{\sigma}} \quad \text{Eq.I-14}$$

D'autres facteurs de dégradation de précision peuvent être définis : le **PDOP** (erreur en position), le **HDOP** (erreur en horizontal), le **VDOP** (erreur en vertical), et le **TDOP** (erreur en temps), avec, [1] :

$$\text{PDOP} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma} \quad \text{Eq.I-15a}$$

$$\text{HDOP} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma} \quad \text{Eq.I-15b}$$

$$\text{VDOP} = \frac{\sqrt{\sigma_z^2}}{\sigma} \quad \text{Eq.I-15c}$$

$$\text{TDOP} = \frac{\sqrt{\sigma_t^2}}{\sigma} \quad \text{Eq.I-15d}$$

La précision de position optimale exige un PDOP ≤ 6 .

1.1.6- Les systèmes d'augmentation GNSS

Des études ont mis en évidence l'impossibilité d'un passage brutal de navigation conventionnelle à la navigation exclusive. Ainsi ces études ont ensuite permis d'exprimer les insuffisances des systèmes GPS/GLONASS au regard des exigences traditionnelles de l'aviation civile en matière de système de navigation, pour les raisons suivantes :

- Manque d'intégrité : Les deux systèmes peuvent émettre des fausses informations pendant plusieurs minutes avant d'être neutralisés ;
- Manque de disponibilité et de continuité du service : Malgré le nombre des satellites pour les deux systèmes, il existe toujours des trous de couverture pour des zones du globe dont l'utilisateur ne peut observer plus de trois satellites ;
- Manque de contrôle international : puisque aucun autre pays n'exerce le moindre contrôle pour ces deux systèmes sauf les américains et les russes.

D'où des nombreux problèmes institutionnels qui freinent la mise en œuvre de la navigation par satellite pour l'aviation civile internationale.

Les projets de systèmes de navigation par satellites **GNSS** (Global Navigation Satellite System) sont considérés comme la solution la plus efficace pour faire face à l'accroissement du trafic et pour apporter plus de sécurité pour les usagers.

Deux projets différents du GNSS sont considérés : le **GNSS1** (Global Navigation Satellite System de première génération), et le **GNSS2** (Global Navigation Satellite System de deuxième génération) appelé aussi GALLEO.

1.1.6.1- Le GNSS 1

Les projets GNSS1 sont basés sur les systèmes GPS et GLONASS. Les programmes de ces projets ont permis de définir les spécifications d'une augmentation de ces systèmes de navigation. Trois techniques d'augmentation peuvent être utilisées pour répondre aux critères de performances opérationnelles. La première technique est la technique **ABAS** (Aircraft Based Augmentation System) qui permet de contrôler l'intégrité des signaux GPS par la fonction RAIM (Receiver Autonomous Integrity Monitoring) ou par la méthode AAIM (Aircraft Autonomous Integrity Monitoring) qui consiste à combiner l'information de position issue des satellites avec l'information de position issue d'un système de navigation de bord tel que le système INS. La deuxième technique est la technique **GBAS** (Ground Based Augmentation System) qui consiste à utiliser un récepteur au sol de position connue ; ce dernier calcule les corrections différentielles locales représentant la majorité des erreurs GPS puis les transmet aux usagers qui évoluent près de cette station afin de corriger en temps réel leurs positions. La troisième technique est la technique **SBAS** (Satellite Based Augmentation System) qui utilise des satellites géostationnaires pour transmettre des corrections différentielles étendues ; actuellement, il existe des programmes basés sur cette dernière technique tels que : **EGNOS** (European Geostationary Navigation Overlay System), **WAAS** (Wide Area Augmentation System), **MSAS** (MTSAT Based Satellite Augmentation System).

1.1.6.2- Le GNSS 2 (futur Galileo)

Le système Galileo est un projet européen qui serait une réplique civile sensiblement améliorée du GPS. Le système complet comprendra 30 satellites ainsi que l'infrastructure associée au sol. Le développement du système a débuté en 1999 et sa mise en service est prévue pour 2008. Il permettra bien entendu d'avoir une précision comparable ou supérieure à celle du système GPS actuel. Galileo présente plusieurs avantages par rapport au GPS :

- Il est conçu et élaboré sur une base civile tout en intégrant les protections nécessaires en matière de sécurité. A la différence du GPS à vocation essentiellement militaire, Galileo offre ainsi, pour certains des services proposés, les garanties juridiques de fonctionnement exigées par les sociétés modernes, en particulier en matière de responsabilité contractuelle.
- Il est basé sur la même technologie que le GPS et offre un degré de précision similaire, voir supérieur en raison de la structure de la constellation de satellites et des systèmes terrestres de contrôle et de gestion prévus.
- Il possède une fiabilité supérieure car il comprend un « message d'intégrité » informant immédiatement l'utilisateur des erreurs qui apparaissent.
- Il constitue un véritable service public et offre à ce titre une garantie de continuité de service pour certaines applications. Au contraire, il existe (au cours des dernières années) plusieurs exemples d'indisponibilité involontaire ou intentionnelle des signaux GPS, parfois sans préavis.
- Le système Galileo est prévu pour être inter-opérable avec GPS, ce qui signifie que les récepteurs de la prochaine génération seront capables de recevoir et de traiter des signaux en provenance des deux constellations. Ainsi, l'utilisateur pourra bénéficier d'une nette amélioration en termes de disponibilité et de précision.

1.1.7- Avantages et inconvénients du système GPS

Les caractéristiques générales des systèmes de navigation par satellites, en vue d'une application dans un système hybride embarqué, se résument comme suit :

Les avantages :

- Précision à long terme : La précision ne se dégrade pas en fonction du temps, il n'y a pas de dérive.
- Position absolue : On obtient toujours une position absolue qui ne dépend pas des conditions initiales.
- Conditions opérationnelles : Le système marche jour et nuit et n'a pas besoin de conditions spéciales telles que support, orientation ou température.
- Prix abordable : Des récepteurs simples coûtent de moins en moins chers. Le prix est abordable pour des véhicules grand public.

Les inconvénients :

- Le GPS est un système américain sur lequel les utilisateurs européens n'ont aucun contrôle ni aucune garantie légale de bon fonctionnement.
- Les trajets multiples : Ceci se produit quand le signal GPS est reflété par des objets tels que des grands bâtiments ou de grandes surfaces de roche avant qu'il atteigne le récepteur. Ceci augmente le temps de parcours du signal, causant par conséquent une surévaluation du temps de vol et générant par conséquent des erreurs.
- Faible disponibilité : La précision dépend du nombre de satellites visibles par le récepteur (plus un récepteur GPS peut « voir » de satellites, meilleure est la précision). Dans les applications dans le domaine automobile, les conditions de visibilité sont souvent dégradées (les bâtiments, les tunnels, l'interférence électronique, ou parfois même le feuillage dense) ; ceci peut bloquer la réception du signal, entraînant des erreurs de position voir causant un arrêt temporaire du système. Typiquement, les unités de GPS ne fonctionneront pas dans des environnements d'intérieur, sous l'eau ou sous terre.
- Géométrie des satellites/ombre : Ceci se rapporte à la position relative des satellites selon l'instant d'observation. La géométrie satellitaire idéale existe quand les satellites sont situés à des angles relativement larges. On dispose d'une géométrie faible quand les satellites sont alignés ou en groupe serré.
- Pas d'information d'orientation : A priori, un GPS ne détermine que la position, mais par le changement de la position on peut en déduire la vitesse et l'angle de lacet. Avec un ensemble d'antennes on pourrait même calculer les angles de roulis et de tangage, mais ces systèmes coûtent assez cher.
- Mauvaise précision en z : La précision sur l'axe vertical est facilement dégradée en cas de visibilité limitée.
- Fréquence d'échantillonnage faible : Pourvu que les conditions de réception soient suffisantes, la période d'échantillonnage est d'environ 100 ms, alors ce qu'un INS peut fournir les données toutes les 10ms.
- Le retard d'ionosphère et de troposphère : Le signal satellite ralentit pendant qu'il traverse l'atmosphère. Le système GPS emploie un modèle intégré qui tient compte d'un retard moyen pour corriger partiellement ce type d'erreur.
- Dégradation intentionnelle du signal satellitaire : La disponibilité sélective (SA) est une dégradation intentionnelle du signal imposée par le département de défense des Etats-Unis

(USDoD). Elle a été prévue pour empêcher les adversaires militaires d'employer les signaux fortement précis du GPS. Le gouvernement américain a arrêté la disponibilité sélective en mai 2000, ce qui a amélioré de manière significative l'exactitude des récepteurs civils du GPS. Bien qu'elle a été supprimée en mai 2000, personne ne peut exclure définitivement la réintroduction de cette dégradation à un moment « jugé critique ».

1.2- LES SYSTÈMES DE NAVIGATION INERTIELS

Ce sous-chapitre a pour but de définir et d'expliquer les principes des systèmes inertiels, puis de présenter les différents types des systèmes inertiels existés et finalement d'apporter les bases mathématiques à la détermination de l'orientation et de la position à partir des vitesses angulaires et des accélérations mesurées par les capteurs de ces systèmes.

1.2.1- Notions de base de la navigation inertielle

1.2.1.1- DEFINITION ET PRINCIPE DE LA NAVIGATION INERTIELLE

La navigation inertielle est un moyen de navigation autonome qui fournit en permanence la position et l'attitude d'un mobile en trois dimensions par référence à sa position et son alignement initiaux.

Le principe de base de positionnement par les moyens de la navigation inertiels est de mesurer à l'aide d'accéléromètres extrêmement précis l'accélération γ_a du mobile et un calculateur effectue un premier calcul intégral pour déterminer le vecteur vitesse V par rapport au sol :

$$\bar{V} = \int \bar{\gamma}_a .dt + \bar{V}_0$$

Une deuxième intégration de la vitesse donne le vecteur position R du mobile :

$$\bar{R} = \int \bar{V} .dt + \bar{R}_0$$

Les termes R_0 et V_0 représentent la position et la vitesse initiales du mobile.

Cependant, les accéléromètres sont contenus dans une plate-forme qui porte le trièdre de mesure des accélérations. Ce trièdre est matérialisé par des gyroscopes qui mesurent des vitesses angulaires ω . Par intégration de ces mesures gyroscopiques, le calculateur fournit l'information d'attitude ρ qui représente l'orientation du repère de mobile par rapport à un repère terrestre (cas des avions).

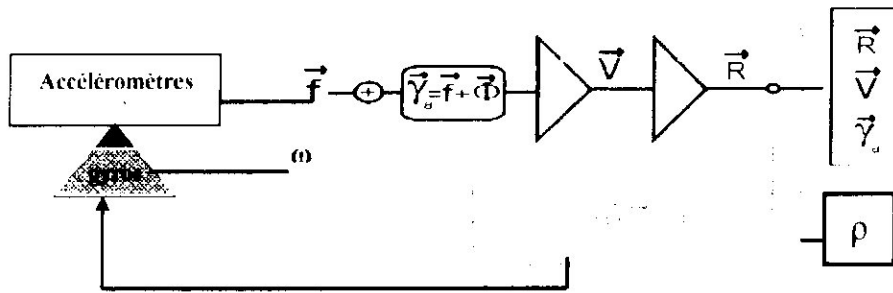


Fig.1.8 : Principe des systèmes inertiels

Les termes f et Φ présentés dans la figure (Fig.1.8) sont la force spécifique et l'accélération de pesanteur respectivement (voir plus loin).

1.2.1.2- CONSTITUTION ET ROLE D'UNE CENTRALE INERTIELLE

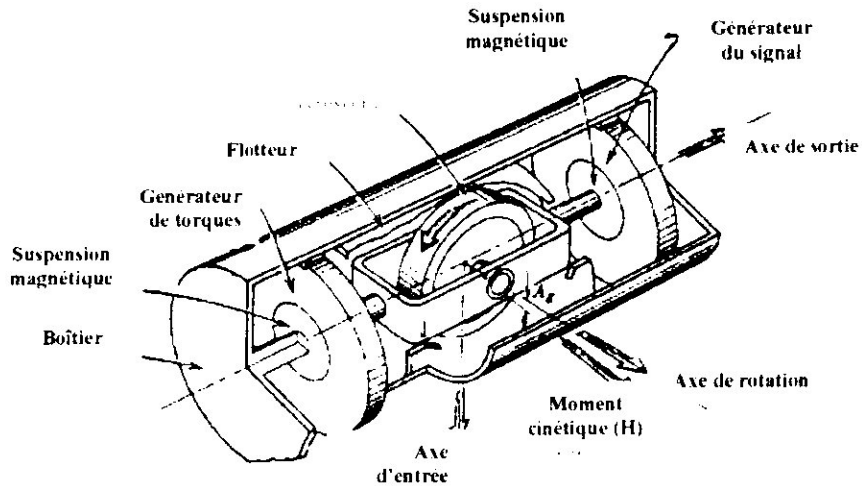
Une centrale inertielle CI (ou IMU) est un dispositif muni de trois gyroscopes et de trois accéléromètres qui fournissent des mesures brutes de vitesses angulaires et d'accélération respectivement pour avoir un positionnement et une orientation tridimensionnels. En ajoutant un calculateur permettant à un véhicule de connaître sa position et sa vitesse dans l'espace, la CI devient appelée « système de navigation inertielle INS ». Tous les avions modernes (civils ou militaires) sont équipés de tel système qui a pour but de déterminer une trajectoire par discrétisation (dead reckoning). Dans ce qui suit, nous allons décrire le rôle et le principe de chaque élément de la centrale ainsi que citer quelques types des gyroscopes et des accéléromètres les plus utilisés actuellement.

Gyroscopes

Le gyroscope est un appareil constitué d'une grosse masse qui tourne sur-elle même avec une très grande vitesse, ce qui permet d'avoir une direction inchangeable dans l'espace. Son but général est de mesurer une vitesse angulaire traduisant une variation dans l'attitude d'un mobile et aussi de stabiliser une grandeur quelconque (azimut par exemple). Foucault est le premier qui utilisait le gyroscope pour démontrer la rotation de la terre en 1852. Ensuite, avec le développement de la technologie des gyroscopes, ces derniers sont appelés aux beaucoup d'applications tels que la navigation par discrétisation de la trajectoire (dead reckoning), l'affichage de l'horizon artificiel pour les avions en 1920 et 1930, ... etc.

Les gyroscopes classiques sont de deux types : des gyroscopes à un degré de liberté dont l'oscillation s'effectue autour d'un seul axe et des gyroscopes à deux degrés de liberté dont

fréquence identique. S'il est sujet à une rotation angulaire autour d'un axe perpendiculaire au plan du capteur, la longueur du chemin d'un des faisceaux augmente tandis que l'autre diminue, ayant pour résultat un décalage de fréquences directement proportionnel à la vitesse angulaire, [6].

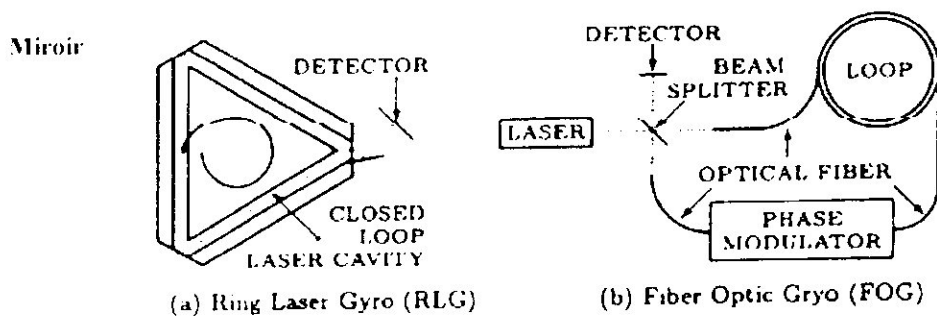


(a) Gyroscope à un degré de liberté



(b) Gyroscope à deux degrés de liberté

Fig.I.9 : Types de gyroscopes



(a) Ring Laser Gyro (RLG)

(b) Fiber Optic Gyro (FOG)

Fig.I.10: Gyroscopes optiques - Effet de Sagnac

Le tableau ci-dessous (Tableau I.1) compare les valeurs d'erreur disponibles pour le RLG, FOG, et le VSGs en céramique et en silicium.

Caractéristique	RLG	FOG	VSG (Céramique)	VSG (Silicium)
g-indépendant biais °/hr	0.001-10	0.5-50	360-1800	> 2000
g-dépendent biais °/hr/g	0	< 1	36-180	36-180
non-linéarité et facteur d'échelle %	0.2 - 0.3	0.05 - 0.5	5 - 100	5 - 100

Tableau I.1 : Comparaison de certaines erreurs principales des diverses implémentations de gyroscopes

Accéléromètres

L'accéléromètre est un capteur qui, fixé à un mobile ou tout autre objet, permet de mesurer l'accélération de ce dernier.

Les accéléromètres sont de plusieurs types. Leur principe est basé sur la loi fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton).

Considérons un accéléromètre composé d'une masse couplée au support par un ressort d'axe orienté verticalement comme l'indique la figure (Fig.I.11).

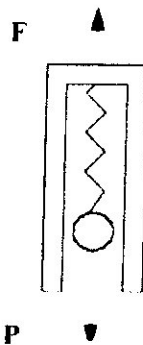


Fig.I.11 : Principe d'un accéléromètre

A l'équilibre, nous avons une égalité entre la force de rappel F appliquée à la masse et la force gravitationnelle P de cette masse :

$$F = P$$

Eq.I-16

Le but de l'accéléromètre est de mesurer la force spécifique, notée f , donnée par l'expression suivante : $f = \frac{F}{m}$, avec m est la masse.

Si le ressort subit une accélération verticale vers le haut, la loi de la dynamique nous permet d'écrire l'expression suivante :

$$ma = F + P \quad \text{Eq.I-17}$$

et la force spécifique f est donnée comme suit :

$$f = a - g \quad \text{Eq.I-18}$$

qui est la différence entre l'accélération vraie a du mobile et l'accélération gravitationnelle g , avec

$$g = \frac{P}{m}$$

Pour fixer les idées, en chute libre ($a = g$), la sortie du capteur sera nulle.

D'après l'équation (Eq.I-18), la connaissance de g est nécessaire pour avoir l'accélération a . Mais malheureusement, g dépend de l'endroit de mesure et donc, pour des applications de long distances (applications aéronautiques par exemple), il est nécessaire de développer un modèle de gravitation approprié (voir plus loin).

Les accéléromètres actuellement disponibles sont de deux familles : accéléromètres à asservissement et accéléromètres non asservis. Pour les accéléromètres à asservissement, l'accélération est mesurée à la sortie d'une boucle à contre réaction comportant un correcteur du type PI (Proportionnel Integral) pour améliorer la précision de mesure. Un capteur à détection de déplacement (accéléromètre non asservis) permet la mesure de l'accélération immédiate qui sera utilisée comme valeur d'entrée de la boucle d'asservissement. En sortie de la boucle, l'accélération est obtenue par la lecture de l'énergie nécessaire à la force de rappel permettant le retour de la masse à sa position initiale.

Les accéléromètres non asservis sont de plusieurs types dont nous pouvons citer les accéléromètres à cordes vibrantes, les accéléromètres à quartz, les accéléromètres à pendule tournant, les accéléromètres électro-mécaniques ou, depuis une dizaine d'années, leurs correspondants miniaturisés MEMS « systèmes micro-électro-mécaniques », ...ect. La force spécifique agissant sur la masse de chaque type est mesurable par différents effets. Prenons par exemple les accéléromètres à

cordes vibrantes (Fig.I.12a), une accélération suivant l'axe sensible modifie la tension de chaque corde. Il en résulte une variation des fréquences de chaque corde qui sont mesurées par des capteurs de fréquence, et on montre que la différence des tensions est proportionnelle à la force spécifique suivant l'axe sensible et aussi à la différence des fréquences. Concernant les accéléromètres à quartz (Fig.I.12b), une accélération suivant l'axe sensible va comprimer un des cristaux et dilater l'autre ce qui modifie leurs propriétés électriques et mécaniques (fréquence, résistivité,...). Ces modifications sont exploitées pour mesurer la force spécifique de manière différentielle.

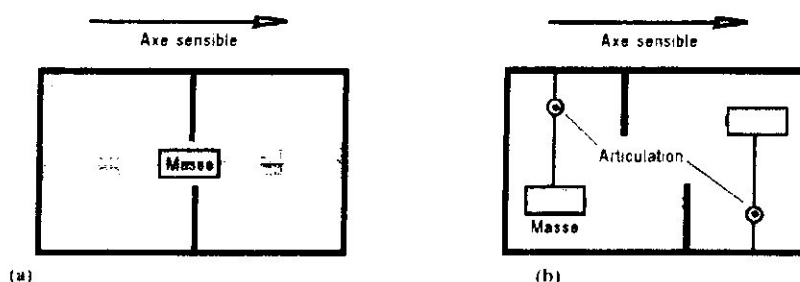


Fig.I.12 : Exemples d'accéléromètres

Pour les accéléromètres « Strain-Sensing accelerometers » réalisés comme MEMS (Fig.I.13), ils sont plus utilisés en navigation terrestre comme en navigation aérienne, leur principe repose sur l'utilisation d'un ensemble de piézorésistances et lorsque une contrainte est appliquée cela provoque une déformation de la plaque par la masse.

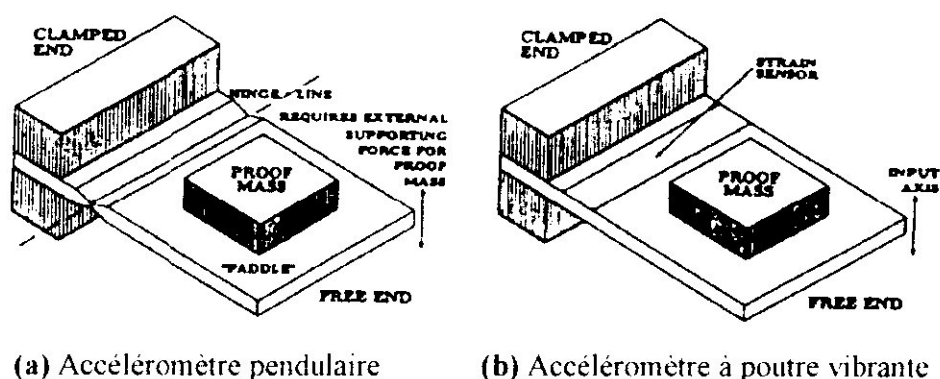


Fig.I.13 : Accéléromètres MEMS Strain-Sensing

Calculateur

Le calculateur est un dispositif utilisé pour l'implémentation des différentes fonctions relatives au traitement des signaux inertiels. Il effectue les calculs trigonométriques qui permettent de convertir

les mesures d'accélération effectuées dans le trièdre lié à l'avion en accélérations dans un trièdre lié à l'horizontale. Par intégration de ces mesures, le calculateur fournit les données inertielles pures telles que la vitesse produit de la première intégration et la position de l'avion produit de la deuxième intégration.

Le calculateur fournit aussi tous les calculs de navigation orthodromique et de guidage telles que la route vraie désirée, l'erreur de route, la distance restante, dérive, ...etc. et aussi les calculs gyroscopiques tel que le cap vrai.

En plus, le calculateur génère les signaux de couplage nécessaire au système PA (Pilote automatique) ou au système DV (Directeur de vol).

1.2.1.3- TYPES ET IMPLEMENTATION DES SYSTEMES INERTIELS

Les systèmes inertiel, comme déjà dit, utilisent les propriétés inertielles de la matière ou de la lumière dont les lois de la mécanique formulées par Newton sont applicables. Ils sont divisés en deux catégories : Les systèmes à la cardan ou plates-formes inertielles et les systèmes « strapdown » SINS. Les deux types diffèrent par leur concept, leurs performances et leurs caractéristiques.

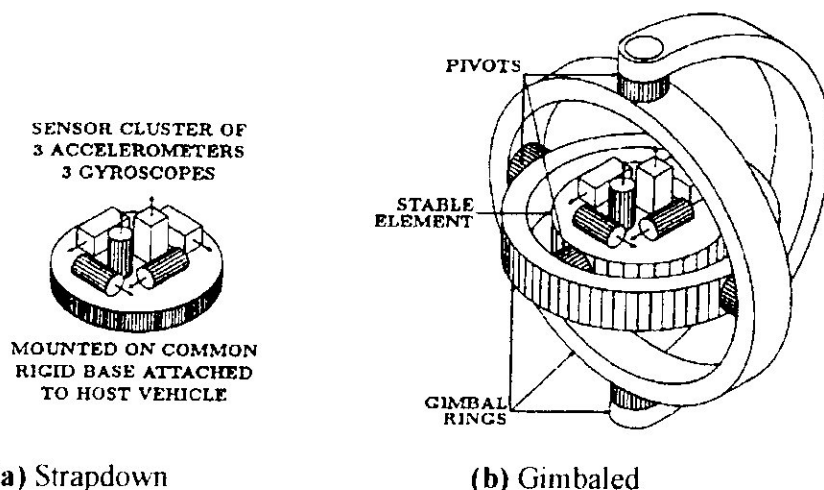


Fig.I.14 : Types de systèmes inertiel

Les **plates-formes inertielles** (Fig.I.14b) sont les premiers systèmes inertiel développés depuis 1950 dans l'IMU. Elles sont constituées d'un ensemble de cadres rigides pour isoler les capteurs inertiel des rotations extérieures du mobile et donc de conserver l'attitude fixe dans le temps en se basant sur l'effet gyroscopique d'une masse en mouvement ou bien de compenser les mouvements de rotation détectés par des gyroscopes par une rotation inverse effectuée par un moteur. Au moins trois

cadres sont exigés pour conserver fixe la plate-forme des rotations autour des trois axes du mobile : roulis, tangage et lacet. Ces cadres sont montés l'un à l'intérieur de l'autre. Le cadre intermédiaire est un anneau avec des pivots intérieurs et extérieurs d'axes orthogonaux, et le cadre le plus intérieur est attaché aux pivots intérieurs pour maintenir l'élément stable (plate-forme) du système Gimbaled tandis que le cadre le plus extérieur (demi anneau) est attaché au mobile. Les pivots des cardans contiennent des capteurs d'angles et des bobines électromagnétiques pour sentir et contrôler tout angle de rotation des cardans. Un quatrième cadre est exigé pour des véhicules en pleine liberté de rotation autour de leurs trois axes comme les missiles et les avions de haute performance.

Un nombre de trois gyroscopes et de trois accéléromètres sont montés rigidement sur l'élément stable du système. Les gyroscopes et les accéléromètres sont représentés par des cylindres carrés ou circulaires dont les axes d'entrée sont parallèles aux axes des cylindres. Les gyroscopes utilisés dans les systèmes Gimbaled sont de type mécanique permettant de sentir toute rotation de la plate-forme, et leurs sorties sont utilisées dans des boucles de contre-réaction (feedback) pour contrôler les cadres de manière que la plate-forme restera stable.

L'implémentation des systèmes Gimbaled est expliquée par le flux des signaux et les blocs des fonctions représentés dans la figure (Fig.I.15). Les mesures sortantes de l'IMU doivent être compensées des erreurs détectées pendant les calibrations des capteurs ou du système en général, et aussi des erreurs de variation des dérives gyros dues aux accélérations.

Les signaux compensés des gyros sont utilisés pour contrôler les cadres mobiles de manière à maintenir la plate-forme dans une orientation désirée (souvent le repère local) indépendante des rotations du véhicule. Cependant, l'orientation désirée n'est pas une orientation inertielle à cause de la rotation terrestre et du déplacement du véhicule d'un point à un autre et donc une compensation de ces effets est inclut dans la compensation d'erreurs du gyros.

Les sorties des accéléromètres, compensées des erreurs typiques de mesure connues dans la théorie, sont aussi compensées des accélérations gravitationnelles. Nous rappelons que les accélérations gravitationnelles ne peuvent pas être captées et donc elles doivent être modélisées à l'aide d'un modèle de gravité qui dépend de la position du véhicule. Le couplage de position et d'accélération crée un fonctionnement dynamique des erreurs de positions suivantes, [4] :

1°)- Oscillation de Schuler des erreurs de position et de vitesse horizontales, auquel l'INS fonctionne comme un pendule de période égale à la période orbitale (environ 84.4min au niveau de la mer).

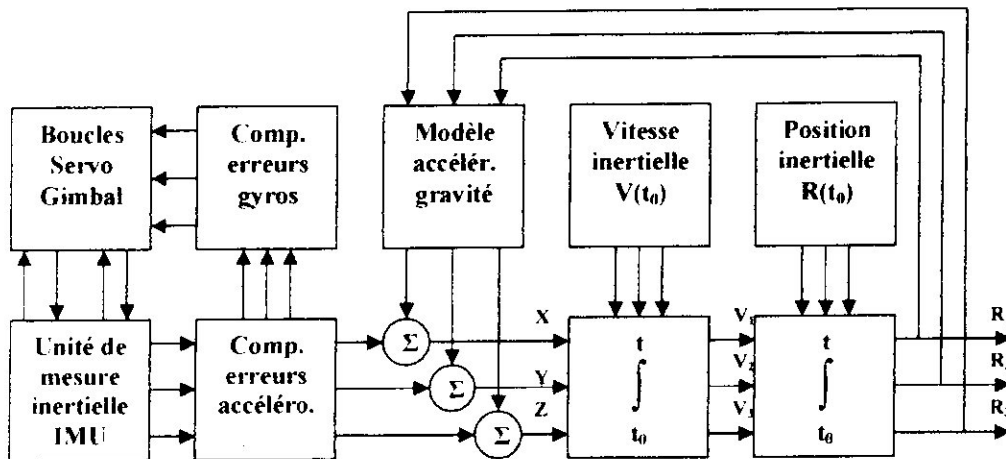


Fig.I.15 : Implémentation des systèmes Gimbaled

2°)- Instabilité de la chaîne verticale, auquel un feedback positif rend les erreurs d'altitude d'INS, dues au modèle de gravité, instables. Pour cela, une altitude barométrique est couramment utilisée pour stabiliser la chaîne verticale dans le cas des applications avions.

Après la compensation des erreurs des capteurs et de gravité, les sorties des accéléromètres sont intégrées une fois pour obtenir la vitesse et une deuxième fois pour obtenir la position.

Les systèmes à la cardan sont très sophistiqués et peuvent atteindre des précisions d'autant meilleures grâce à l'élimination de plusieurs sources d'erreurs des capteurs par isolation de la plateforme inertielle des rotations du véhicule. Cela est spécialement important pour des applications auxquelles l'intégration de l'INS par GPS n'est pas valable, comme le cas de la navigation sous-marine. Mais malheureusement, les cardans sont des rassemblements électromécaniques très complexes, encombrants et très coûteux. A cause de ces inconvénients et grâce aux progrès technologiques et l'avènement de l'informatique, ceux-ci ont donné naissance aux systèmes strapdown.

Dans les systèmes **strapdown** (Fig.I.14a), les accéléromètres et les gyroscopes sont fixés rigidement à la structure véhicule. Les cardans des plates-formes sont remplacés par un calculateur qui effectue la transformation de coordonnées et le calcul des composantes de l'accélération dans un repère local. Des isolateurs de choc sont alors désignés pour limiter les vibrations entre le repère véhicule et la base capteurs.

Les systèmes strapdown sont des structures plus simples et fortement avantageux au niveau des coûts et de la taille de l'appareil et donc ils sont particulièrement appropriés pour les catégories d'application tactique ou de navigation. En contrepartie, ils n'atteignent pas encore la précision des systèmes à la cardan et l'alignement est difficile et nécessite souvent, pour les gyroscopes de mauvaise qualité, un système de navigation additionnel tel que GPS.

1.2.1.4- ERREURS ET PERFORMANCES DES SYSTEMES INERTIELS

Les systèmes inertiels sont affectés par plusieurs erreurs de navigation qui peuvent se présenter en trois sources principales :

- Erreurs liées aux capteurs : Les erreurs des capteurs inertiels sont de deux types. Le premier type concerne les erreurs d'instrumentation dont les variables captées ne peuvent pas égales aux vraies quantités physiques à cause des imperfections dans les capteurs. Le deuxième type d'erreurs concerne l'alignement des capteurs et leur plate-forme avec leurs directions désirées.
- Erreurs de calcul : Les équations de navigation sont typiquement implantées par un computer digital, et donc des erreurs de quantification, de saturation et des erreurs numériques (ex. intégration) peuvent survenir. Les effets des erreurs de calcul sont souvent modélisés comme un bruit additif dans le modèle du système.
- Erreurs de l'environnement : L'environnement ne peut pas être modélisé exactement alors qu'une compensation des mesures est exigée. Un exemple des erreurs types est l'incapacité de prédire exactement l'amplitude et la direction du vecteur effectif de gravité [2]. La formule de gravité et la linéarisation du modèle de gravité en fonction de l'état de navigation sont discutées dans le paragraphe I.2.2.

De ce qui précède, nous pouvons maintenant citer la majorité des erreurs d'instrumentation et d'alignement relatives aux capteurs inertiels accéléromètres/gyroscopes. Les erreurs communes affectant les accéléromètres et les gyroscopes sont : le biais, le facteur d'échelle, les non-linéarités, la non-orthogonalité et le bruit de mesure. En plus, les gyroscopes sont affectés par leur sensibilité aux effets d'accélération. La figure (Fig.I.17) illustre quelques types d'erreurs classiques [4].

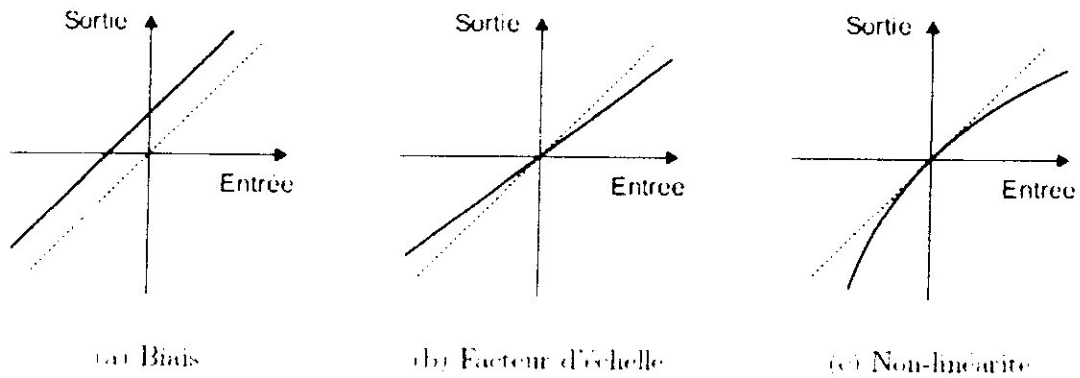


Fig.I.17 : Quelques types d'erreurs classiques

Biais

Le biais est défini comme étant la moyenne, sur un temps spécifié, des sorties mesurées aux conditions d'opérations spécifiées indépendamment de l'entrée. Le biais est l'erreur la plus évidente. Il s'agit tout simplement d'une valeur additionnelle :

$$a_{\text{sortie}} = a_{\text{entree}} + \delta a_{\text{biais}} \tag{Eq.I-19}$$

Comme le biais évolue légèrement avec le temps, nous pouvons le décomposer en deux parties. La première partie est une partie déterministe qui peut être déterminée par calibration, nommée l'offset du biais, qui est l'offset dans les mesures fournies par le capteur à partir d'une vraie entrée. La deuxième partie est une partie stochastique, nommée dérive, qui est la variation du biais dans le temps due aux variations de la température. Par conséquent, la dérive est particulièrement forte pendant les premières minutes après la mise sous-tension de la CI quand les composants électroniques s'échauffent [6]. Le biais s'exprime alors comme suit :

$$\delta a_{\text{biais}}(t) = \delta a_0 + d.t \tag{Eq.I-20}$$

Facteur d'échelle

Le facteur d'échelle est une erreur multiplicative exprimée comme suit :

$$a_{\text{sortie}} = K.a_{\text{entree}} \tag{Eq.I-21}$$

Le facteur d'échelle est dû surtout aux erreurs de fabrication et n'évolue pas considérablement. En conséquence, il est déterministe et peut être quantifié ou déterminé par calibration dans la plupart des cas.

Non-linéarités

Les non-linéarités sont des erreurs qui se présentent dans presque tous les capteurs existants. Elles représentent en fait la déviation de la valeur obtenue à la sortie du capteur par rapport à la vraie valeur de la grandeur d'entrée. Elles sont souvent exprimées sous forme d'une série de type suivant :

$$a_{\text{sortie}} = K_0 + K_1 \cdot a_{\text{entrée}} + K_2 \cdot a_{\text{entrée}}^2 + \dots \quad \text{Eq.I-22}$$

avec K_0 et K_1 sont le biais et le facteur d'échelle respectivement.

Bruit

Le bruit est un signal additionnel résultant du capteur lui-même (bruit dans les composants électroniques, le bruit de quantification, ...) ou des autres équipements électroniques interférant les signaux de sortie. Il s'exprime par :

$$a_{\text{sortie}} = a_{\text{entrée}} + v \quad \text{Eq.I-23}$$

Le bruit en général n'est pas systématique et donc ne peut pas être enlevé de la mesure en utilisant des modèles déterministes. Il peut être seulement modélisé par un processus stochastique.

Non-orthogonalités

Les non-orthogonalités sont des erreurs spécifiques aux CI. Elles sont dues à une imprécision éventuelle d'emplacement des capteurs individuels. Mis à part des cas spéciaux, le repère nominal dans lequel les vecteurs d'accélération et de rotation sont donnés est un système orthogonal et direct et ses axes sont normalement parallèles aux bords du boîtier de la CI. Quand maintenant les axes sensoriels des capteurs ne sont pas parfaitement alignés avec le repère nominal, ou quand ils ne sont pas exactement orthogonaux l'un par rapport à l'autre, des erreurs vont évidemment apparaître. Cependant, grâce aux méthodes de fabrication modernes, ces effets sont plutôt mineurs et ne sont pas détectables avec nos moyens. Les non-orthogonalités peuvent être en général compensées ou modélisées dans les équations d'erreur de l'INS.

Performances :

Les performances des systèmes inertiels dépendent de la qualité des CIs. Alors, il est nécessaire de minimiser le maximum d'erreurs entachant les mesures des capteurs pour améliorer leur qualité. Le tableau I.2 liste les principaux paramètres de performance pour les différents grades des capteurs, [11].

Grade	Navigation		Tactical		Automotive		Consumer	
	Gyro	Accel.	Gyro	Accel.	Gyro	Accel.	Gyro	Accel.
Bias	100-1000 deg/hr	1-10 g	1-10 deg/hr	100-1000 g	100-1000 deg/hr	1000 g	360 deg/hr	2400 g
Scale Factor	1-10 ppm	10-100 ppm	100-1000 ppm	1000-10000 ppm
Noise	100-1000 deg/hr Hz	1-10 g/hr Hz	10-100 deg/hr Hz	100-1000 g/hr Hz
Positioning Error	~ 2-4 km/hr		20-40 km/hr		~ 2-4 km/min		~ 2 km/min	

Tableau I.2 Performance des différents grades des capteurs inertiels

1.2.2-Équations de navigation et équations de mécanisation

Les mesures brutes des accéléromètres et des gyroscopes sont la force spécifique f_{ib}^b et les vitesses angulaires ω_{ib}^b respectivement exprimées dans le repère véhicule b . Cette partie est consacrée au développement des équations de navigation inertielle et de l'algorithme d'évolution et d'intégration des données inertielles en forme discret. Le repère utilisé comme système de référence pour la navigation locale est le repère n , pour des raisons suivantes :

- La définition du repère local est basée sur la normale à l'ellipsoïde de référence ; comme résultat, les différences de coordonnées géodésiques $\{\Delta\phi, \Delta\lambda, \Delta h\}$ peuvent être appliquées comme sorties du système
- Les axes du repère local (NED) sont alignés avec les directions locales Nord, Est et Down. Alors, les angles d'attitude (roulis, tangage, lacet) peuvent être obtenus directement à la sortie des équations de mécanisation
- Due à l'effet de Schuller, les erreurs de calcul dans les paramètres de navigation sur le plan horizontal sont limitées

- Efficacité de calcul

1.2.2.1- ÉQUATIONS DE NAVIGATION

Les équations de navigation décrivent mathématiquement le mouvement du véhicule à être positionné en se basant sur les lois fondamentales de Newton. La transformation de ces équations, écrites dans le repère inertiel i , au repère local décrit un système d'équations différentielles du premier ordre.

1°)- Équation de l'orientation

L'algorithme de développement des équations de mécanisation nécessite le calcul de la matrice d'orientation C_b^n qui transforme le repère véhicule b dans le plan local n . Cette matrice est une fonction des trois angles d'Euler (roulis ϕ , tangage θ , lacet ψ) qui sont groupés dans un vecteur noté ρ , avec :

$$\rho = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad \text{Eq.I-24}$$

La vitesse angulaire ω_{ib}^b , mesurée par les gyroscopes entre le repère b et le repère i exprimée dans le repère b , peut être écrite comme suit, [6] :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{in}^b + \omega_{nb}^b \quad \text{Eq.I-25}$$

où ω_{in}^b est la vitesse de rotation du repère n par rapport au repère i exprimée dans le repère b et ω_{nb}^b est la vitesse de rotation du repère b par rapport au repère n exprimée dans le repère b (voir annexe A).

L'équation (Eq.I-25) nous permet d'écrire :

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b \quad \text{Eq.I-26}$$

En utilisant la matrice de rotation C_b^n , le vecteur ω_{in}^b peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \omega_{in}^b &= \omega_{ic}^b + \omega_{cn}^b \\ &= C_n^b \cdot \omega_{in}^n \end{aligned} \quad \text{Eq.I-27}$$

où

$$C_n^b = (C_b^n)^T \text{ et } \omega_{in}^n = \omega_{ic}^n + \omega_{cn}^n$$

L'équation (Eq.I-26) devient :

$$\omega_{bh}^h = \omega_{bh}^h - C_n^h (\omega_{ic}^n + \omega_{cn}^n) \quad \text{Eq.I-28}$$

Pour obtenir le vecteur d'orientation ρ , il est nécessaire de calculer la rotation entre $\omega_{nb}^b = [p \ q \ r]^T$ et le vecteur dérivée de l'orientation $\dot{\rho} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$:

$$\begin{aligned} \omega_{nb}^b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C(\phi, x) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + C(\phi, x)C(\theta, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= C_{\text{rot } \phi \theta \psi} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{Eq.I-29}$$

où p, q, r sont les vitesses angulaires autour des axes x, y, z de la centrale CI (exprimées en rad/sec) et fournies directement par les gyroscopes après l'enlèvement de ω_m^h .

De l'équation (Eq.I-29), nous pouvons déduire le vecteur dérivé $\dot{\rho}$, [6] :

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = C_{\text{rot } \phi \theta \psi}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{Eq.I-30}$$

Le vecteur d'orientation ρ est facilement obtenu maintenant par simple intégration :

$$\rho = \int_0^t C_{\text{rot } \phi \theta \psi}^{-1} (\omega_{nb}^b - C_n^b (\omega_{ic}^n + \omega_{cn}^n)) dt$$

D'après l'équation (Eq.I-30), il est évident que la mise à jour des angles de roulis et de lacet présente des singularités quand l'angle de tangage du véhicule est égal à $\pi/2$. Mais dans le cas de la localisation d'un avion de transport (avion subsonique), cela ne pose pas de problème puisque les angles roulis et tangage de 90° sont impossibles. Cependant pour la mécanisation, les angles d'Euler peuvent être déduits directement à partir de la matrice C_n^b obtenue par la résolution de l'équation suivante, [2] :

$$C_n^b = C_b^n \Omega_{nb}^b \quad \text{Eq.I-31}$$

En appliquant le théorème de Coriolis, la vitesse absolue du véhicule, présentée par la dérivée première de la position dans le repère inertiel i , est donnée par, [2] :

$$\frac{dr^i}{dt} = v_c^i + \Omega_{ic}^i . r^i \quad \text{Eq.I-35}$$

Ω_{ic}^i est la matrice anti-symétrique du vecteur rotation terrestre ω_{ic}^i .

La dérivation de l'équation (Eq.I-35) donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^i}{dt^2} &= \frac{dv_c^i}{dt} + \frac{d}{dt}(\Omega_{ic}^i . r^i) \\ &= \frac{dv_c^i}{dt} + \Omega_{ic}^i (v_c^i + \Omega_{ic}^i . r^i) \end{aligned} \quad \text{Eq.I-36}$$

Le vecteur dérivé du vecteur vitesse relative est :

$$\frac{dv_c^i}{dt} = \frac{d^2 r^i}{dt^2} - \Omega_{ic}^i . \Omega_{ic}^i . r^i - \Omega_{ic}^i . v_c^i \quad \text{Eq.I-37}$$

En intégrant l'équation (Eq.I-18), après avoir appliqué le théorème de Coriolis, nous obtenons, [2] :

$$\dot{v}^i = f^i + g^i - \Omega_{ic}^i . v_c^i \quad \text{Eq.I-38}$$

Le deuxième terme de l'équation (Eq.I-38) représente la force spécifique f compensée de la gravité locale g et de l'accélération de Coriolis.

Le vecteur vitesse relative v_c^i est projeté dans le repère local n par : $v_c^n = C_1^n v_c^i$

Cette dernière relation, l'application du théorème de Coriolis, et l'équation (Eq.I-38) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{v}^n &= C_1^n (\Omega_m^i v_c^i + \dot{v}_c^i) \\ &= C_1^n (\Omega_m^i v_c^i + f^i + g^i - \Omega_{ic}^i v_c^i) \\ &= (\Omega_m^n + \Omega_{ic}^n) v_c^n + f^n + g^n \\ &= (\Omega_{ic}^n - 2\Omega_{ic}^n) v_c^n + f^n + g^n \end{aligned} \quad \text{Eq.I-39}$$

Donc l'équation dynamique de la vitesse s'exprime par, [2] :

$$\dot{v}^n = a_{cn}^n = f^n - (2\Omega_{ic}^n + \Omega_{cn}^n) v_c^n + g^n \quad \text{Eq.I-40}$$

La force spécifique f^n , exprimée dans le repère local n est déterminée par : $f^n = C_b^n f_b^h$

L'équation (Eq.I-40) affirme simplement que l'accélération sur la surface de la terre du véhicule est égale à l'accélération mesurée par les accéléromètres après avoir soustrait l'accélération de Coriolis par la vitesse de véhicule et la rotation de la terre, et aussi la compensation de l'accélération de gravité locale.

4°)- Modélisation de la gravité

Le vecteur de la gravité locale g^n se réécrit comme suit :

$$g^n = [0 \ 0 \ g_D]^T = G - \omega_{ie}^n \times \omega_{ie}^n \times R$$

qui est la somme de la gravité de la terre G et l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre. g_D , note γ^n par la suite, est la composante basse (down) du vecteur g^n qui se dirige légèrement vers l'équateur.

En fait, la gravité peut être modélisée comme suit :

$$g^n = [0 \ 0 \ \gamma^n]^T, \quad \gamma^n = \gamma(\varphi, h) = a_1(1 + a_2 \sin^2 \varphi + a_3 \sin^4 \varphi) + (a_4 + a_5 \sin^2 \varphi)h + a_6 h^2$$

ou a_1 à a_6 sont des valeurs constantes listées dans le tableau I.3.

a_1	9.7803267715	a_4	0.0000030876910891
a_2	0.0052790414	a_5	0.0000000043977311
a_3	0.0000232718	a_6	0.00000000000007211

Tableau I.3 : Coefficients de la gravité normale

1.2.2.2- ÉQUATIONS DE MECANISATION

Les équations de mécanisation sont des équations utilisées pour résoudre informatiquement le système d'équations (Eq.I-31), (Eq.I-34) et (Eq.I-40) afin d'obtenir les incréments de la position, de la vitesse et de l'attitude. Le système est réécrit comme suit :

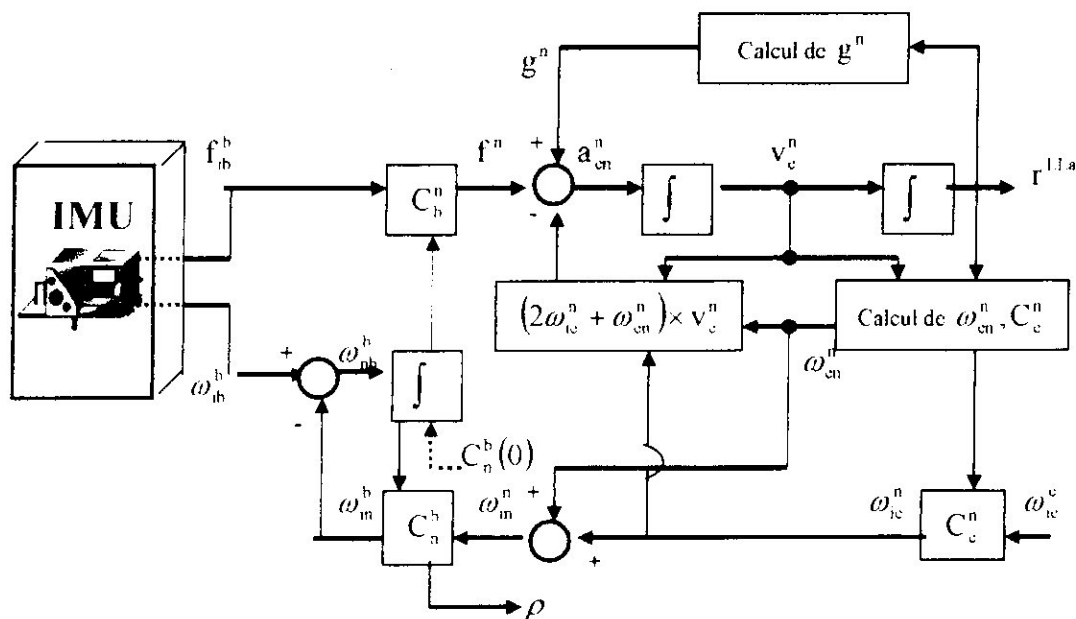
$$\begin{cases} \dot{\hat{p}}^n = Dv^n \\ \dot{\hat{v}}^n = a_{cn}^n = f^n - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{cn}^n)v_c^n + g^n \\ \dot{\hat{C}}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \end{cases} \quad \text{Eq.I-41}$$

Par combinaison des conditions initiales au système, les équations de mécanisation se composent de trois étapes principales :

- Correction des mesures brutes, f_b^h et ω_b^h de la CI des erreurs connues ou estimées
- Mise à jour de l'attitude
- Intégration de la vitesse et de la position

Le schéma fonctionnel ci-dessous récapitule la mécanisation globale de l'INS dans le repère n .

D'après la figure (Fig.I.18), les données gyroscopiques sont utilisées pour mettre à jour la matrice de rotation C_b^n . En conséquence, n'importe quelle dérive dans les données d'orientation provoquée par l'intégration des sorties gyroscopiques perturbera la matrice C_b^n , causant des calculs d'accélération incorrects. Les mesures accélérométriques contiennent en fait toutes les accélérations captées : l'accélération de Coriolis, qui est fonction de la vitesse du véhicule, et la gravité, qui est la somme des accélérations gravitationnelle et centrifuge et qui peut être approximée par la gravité normale g^n . Ces accélérations doivent être soustraites des mesures dans l'ordre d'extraire la vitesse et la position corrigées du véhicule. Avant l'intégration, les mesures de la force spécifique corrigées des erreurs inertielles doivent être transformées du repère véhicule b au repère local n en obtenant ainsi le terme f^n , puis intégrées pour avoir les incréments de vitesse.



C_c^n est la matrice de rotation du repère terrestre c au repère local n

Fig.I.18 : Mécanisation du système INS

1.2.3- Technique d'initialisation et d'alignement d'INS

D'après les équations de mécanisation détaillées dans le paragraphe 1.2.2.2, nous constatons que le principe de la navigation inertielle est généralement basé sur la connaissance de l'information initiale du système. Pour cela, nous avons besoin de neuf paramètres initiaux (position, vitesse, attitude). L'initialisation imprécise de ces paramètres affecte la compensation de la gravité et de la vitesse de rotation de la terre ce qui mènerait à une navigation imprécise. Alors le bon choix des procédures d'initialisation et d'alignement assure un excellent point de départ pour la phase de navigation.

La position et la vitesse initiales sont souvent obtenues en utilisant les données d'un capteur externe comme GPS. Après avoir effectué la correction de l'effet de lever arm (Chapitre II), nous avons :

$$\vec{r}_{INS}(0) = \vec{r}_{GPS} \quad \text{Eq.1-50}$$

$$\vec{v}_{INS}(0) = \vec{v}_{GPS} \quad \text{Eq.1-51}$$

Concernant l'attitude initiale, différentes procédures d'alignement sont appelées pour déterminer l'orientation relative du repère b de la CI avec le repère local n . La matrice de transformation C_n^b est donc exigée dans le cas de la structure strapdown. En mode stationnaire, les algorithmes d'alignement passent par deux étapes : Alignement grossier (coarse alignment) suivi d'un alignement fin (fine alignment). L'alignement grossier est une procédure qui peut être faite en utilisant les mesures des accéléromètres (alignement horizontal) et les mesures des gyroscopes (alignement d'azimut), ou alternativement, une méthode analytique résolvant le problème des deux vecteurs de mesures avec l'utilisation des mesures de gravité g et de vitesse de rotation de la terre ω_e , [8], comme suit :

$$C_n^b = \begin{bmatrix} -\tan \varphi & \frac{1}{\omega_e \cos \varphi} & 0 \\ g & 0 & \frac{-1}{g \omega_e \cos \varphi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f_{ib}^b)^l \\ (\omega_{ib}^b)^l \\ (f_{ib}^b \times \omega_{ib}^b)^l \end{bmatrix} \quad \text{Eq.1-52}$$

A partir des mesures des accéléromètres, l'accéléromètre vertical mesure la gravité apparente et les accéléromètres horizontaux sont de sorties nulles dans le repère n , c-à-d : $f_{ib}^b = C_n^b [0 \quad 0 \quad g]^l$; et les angles roulis et tangage sont donnés par, [8] :

$$\phi(0) = \text{sign}(f_{ib,z}^b) \sin^{-1} \left(\frac{f_{ib,y}^b}{g} \right) \quad \text{Eq.I-53}$$

$$\theta(0) = -\text{sign}(f_{ib,z}^b) \sin^{-1} \left(\frac{f_{ib,x}^b}{g} \right) \quad \text{Eq.I-54}$$

ou sign désigne le signe de la composante $f_{ib,z}^b$ de la force spécifique f_{ib}^b . Ici, seul le signe de $f_{ib,z}^b$ est utilisé parce que l'erreur de gravité est trop faible comparée au biais de l'IMU de basse qualité.

ϕ et θ , donnés ci-dessus, doivent être corrigés des biais accélérométriques en utilisant les formules suivantes, [8] :

$$\delta\phi = \frac{b_{a,y}}{g} ; \delta\theta = -\frac{b_{a,x}}{g}$$

A partir des mesures des gyroscopes, basées sur la connaissance de la vitesse de rotation de la terre captée par chaque gyroscope aux conditions statiques, l'angle de lacet $\psi(0)$ est donné par l'expression suivante :

$$\psi(0) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega_{ib,x}^b}{\omega_{ib,y}^b} \right) \quad \text{Eq.I-55}$$

De même, l'azimut ψ doit être corrigé des dérives gyroscopiques par l'expression suivante :

$$\delta\psi = \frac{d_{g,x}}{\omega_c \cos \psi}$$

Cependant, et dus aux larges erreurs et de bas rapport signal/bruit des gyroscopes de mauvaise qualité, la méthode d'alignement grossier ne peut pas être appliquée en mode stationnaire. Seuls les angles roulis et tangage qui peuvent être déterminés par les équations (Eq.I-53) et (Eq.I-54). Tandis que l'information du lacet est fixée à partir des sources externes tel que le compas électronique ou un magnétomètre.

En mode dynamique, une technique d'alignement grossier est considérée lorsque l'IMU est installée sur un véhicule en mouvement. La technique repose sur l'utilisation des vitesses dérivées de GPS si l'axe avant du véhicule est parallèle au vecteur vitesse, ce qui est le cas pour la plupart des applications de navigation terrestre. Dans ce cas, le roulis est initialisé à zéro. Le tangage et le cap peuvent être initialisés comme suit, [8] :

$$\theta(0) = \tan^{-1} \left(-\frac{v_D}{\sqrt{v_N^2 + v_E^2}} \right) \quad \text{Eq.I-56}$$

$$\psi(0) = \tan^{-1} \left(\frac{v_E}{v_N} \right) \quad \text{Eq.I-57}$$

Pour les avions, les équations (Eq.I-56) et (Eq.I-57) ne seront plus valables parce que les composantes latérale et verticale du vecteur vitesse peuvent exister dues au vent ou aux manoeuvres. Pour cette raison, le filtre EKF doit être utilisé.

Une fois l'alignement grossier est exécuté, l'alignement fin est d'habitude appliqué par utilisation du filtre EKF.

1.2.4- Avantages et inconvénients des systèmes inertiels

Le système inertiel INS est parmi les systèmes primaires pour la navigation aérienne. Il est caractérisé par les avantages principaux suivants :

- Disponibilité : Le système est entièrement autonome, indépendant des dispositifs extérieurs. Il peut être fonctionné dans n'importe quel endroit de la terre (tunnels, sous mer, ...).
- Solution globale de navigation : Le système fournit la position, la vitesse et l'orientation en trois dimension ainsi que les accélérations et les vitesses de rotation mesurées par son unité IMU.
- Haute précision de positionnement à court terme : La précision est d'autant meilleure si le système est supposé bien initialisé et avant que les effets de dérive ne deviennent trop forts.
- Haut débit de données : La fréquence d'échantillonnage des CI peut varier de 100 à 150Hz ce qui est particulièrement intéressant pour les systèmes de conduite automatisée.

Le système inertiel présente aussi quelques inconvénients :

- Dégradation de la précision avec le temps : Cela est due à la forte dérive résultée après la double intégration.
- Sensibilité à la gravité : Bien que les effets de la gravité peuvent être compensés, mais il en résulte toutefois encore des erreurs dues aux erreurs d'orientation.
- Pas d'information absolue : La position et la vitesse sont toujours calculées à partir des conditions initiales qui doivent être fournies par un dispositif extérieur.

**LE FILTRE EKF POUR LA FUSION
INS/GPS**

II.1- INTRODUCTION

Les insuffisances des deux systèmes INS et GPS citées dans le chapitre I précédent rendent possible leur hybridation. Le système hybride est piloté par le filtre numérique de Kalman qui permet d'estimer les erreurs issues des capteurs avec minimum de variance.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler le principe du filtrage de Kalman, en particulier le filtre EKF, et détailler les équations mathématiques linéaires construisant le filtre.

Le chapitre expose également les différentes architectures d'hybridation. Plusieurs considérations de mise en application du filtre de Kalman (synchronisation, détection des trajets multiples, réglage des paramètres du filtre, ...) sont discutées après avoir développées les équations du modèle dynamique d'erreur du système inertiel, en se basant sur une linéarisation par différentiation, et les équations du modèle des observations fournies par le GPS.

II.2- FILTRAGE DE KALMAN

II.2.1- Principe et algorithme du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur linéaire optimal et récursif qui fournit l'estimation minimum de variance en présence d'une source de bruit.

Pour les systèmes de navigation, le filtre de Kalman estime généralement les erreurs de l'état de navigation avec leurs précisions obtenues par la matrice de covariance.

Le problème de l'estimation du vecteur d'état peut être divisé en trois classes distinctes selon l'intervalle d'observation $[t_0 - t]$:

- La prédiction si $t < t_0$
- Le filtrage si $t = t_0$
- Le lissage si $t > t_0$

où t est l'instant à laquelle les mesures sont effectuées

Le système d'équations utilisé dans le filtre de Kalman repose sur deux modèles fondamentaux qui sont le modèle de processus, ou le modèle dynamique, et le modèle d'observation, ou de mesure.

Le modèle dynamique permet de décrire la variation du vecteur d'état avec le temps. Il est défini par l'équation linéaire suivante :

$$\dot{X} = FX + Gu \tag{Eq.II-1}$$

ou la forme discrète suivante :

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + G_k u_k + w_k \quad \text{Eq.II-2}$$

avec

x_k, x_{k-1} représentent le vecteur d'état aux instants k et $k-1$

F et ϕ_k la matrice dynamique et la matrice de transition de k à $k-1$

G la matrice de commande

u le vecteur d'entrée

w_k le bruit de l'état

Le modèle d'observation est le modèle stochastique qui décrit l'information fournie par le ou les capteurs en une équation liant les paramètres de l'état de la mesure et du bruit. L'équation de mesure est donnée par :

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad \text{Eq.II-3}$$

avec

z_k la mesure à l'instant k

H_k la matrice d'observation, qui fait le lien entre les paramètres de l'état et les mesures

v_k le bruit de mesure

Pour simplifier le formalisme des équations du filtre, une hypothèse est faite que les bruits d'état w_k et de mesure v_k sont considérés comme des variables aléatoires de distributions gaussiennes connues a priori, indépendantes, blanches et indépendantes de l'état initial du système.

Donc :

$$P(w_k) \sim (0, Q_k)$$

$$P(v_k) \sim (0, R_k)$$

$$E[w_i v_i^T] = 0, \quad \forall i, i$$

où Q_k et R_k sont les matrices de covariances de processus et des mesures respectivement.

Deux étapes principales d'estimation des paramètres sont considérées : l'estimation a priori (la prédiction) et l'estimation a posteriori (la correction). Les paramètres du système sont estimés premièrement à partir des valeurs de l'étape précédente et ensuite corrigés par des mesures dans l'étape de correction. Le tableau II.1 ci-dessous montre les différentes étapes d'estimation des paramètres du système

Initialisation	$\hat{x}_{k+1/k}(0) = E(x(0))$ $P_{k+1/k}(0) = \text{var}[x_{k+1/k}(0)]$
Calcul du gain	$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$
Mise à jour des mesures (Correction)	$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} [\tilde{z}_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}]$
Mise à jour de covariance	$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k}$
Prediction temporelle	$\hat{x}_{k+1/k} = \phi_k \hat{x}_{k/k} + G_k u_k$ $P_{k+1/k} = \phi_k P_{k/k} \phi_k^T + Q_k$

Tableau II.1 : Equations discrètes du filtre de Kalman

L'état initial est une variable gaussienne, indépendante des bruits du système. L'étape de prédiction permet la prédiction de l'état et de sa précision à l'instant $k+1$ à partir de l'état à l'instant k et du modèle d'évolution du système. On obtient donc l'état $\hat{x}_{k+1/k}$ avec sa matrice de covariances associée $P_{k+1/k}$. Une fois la mesure \tilde{z}_{k+1} est disponible, l'état prédit peut alors être corrigé par l'innovation $[\tilde{z}_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}]$ (ou résidus) pondérée par le gain du filtre K_{k+1} . On en déduit alors l'estimation de l'état $\hat{x}_{k+1/k+1}$ avec sa matrice de covariances associée $P_{k+1/k+1}$.

En fait, le gain de Kalman a été calculé de façon à minimiser la covariance d'erreur a posteriori $P_{k+1/k+1}$, il est égal à la covariance de prédiction d'état $P_{k+1/k} H_{k+1}^T$ divisée par la covariance d'innovation $[H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]$. Si notre mesure est plus précise que notre erreur de système, alors $R_{k+1} < P_{k+1/k}$ et $K_{k+1} \approx 1$. Cela donnerait plus de poids à la mesure dans l'estimation de l'état. Si en revanche nous connaissons notre erreur de système plus précisément que notre mesure, nous devrions alors rendre la correction due à la mesure très petite. Dans ce cas, $R_{k+1} > P_{k+1/k}$ ainsi la correction sera très faible.

II.2.2- Le filtre de Kalman linéarisé LKF

La formulation du filtre présentée ci-dessus est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux est/sont non-linéaire(s). Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Le filtre de Kalman linéarisé LKF (Linearised Kalman Filter) est une des méthodes développées dans cette direction.

Dans le filtre LKF, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu.

Considérons un système non-linéaire représenté par les deux modèles de processus et de mesure suivants :

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-4}$$

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad \text{Eq.II-5}$$

là où, f et h sont des fonctions non-linéaires connues, u_k est le vecteur de commande, et w_k et v_k sont des processus de type bruit blanc non corrélés.

La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.

Supposons qu'une trajectoire approximative x_k^{nom} (Fig.II.1) puisse être déterminée par un moyen quelconque : celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) x_k , peut être écrite en termes de x_k^{nom} et d'erreur δx_k comme suit :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k \quad \text{Eq.II-6}$$

Les équations (Eq.II-4) et (Eq.II-5) deviennent :

$$x_k^{nom} + \delta x_k = f(x_{k-1}^{nom} + \delta x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-7}$$

$$z_k = h(x_k^{nom} + \delta x_k) + v_k \quad \text{Eq.II-8}$$

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation (Eq.II-7) et en supposant que δx_k est petit, nous allons réaliser une expansion de f autour de x_k^{nom} en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$x_k = x_k^{nom} + \delta x_k = \left(f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) + \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} \bigg|_{x=x_k^{nom}} \delta x_{k-1} + \text{termes d'ordres élevés} \right) + w_{k-1} \quad \text{Eq.II-9}$$

avec $f(x_{k-1}^{nom}, u_{k-1}) = x_k^{nom}$

Le modèle dynamique linéarisé s'écrit donc comme suit :

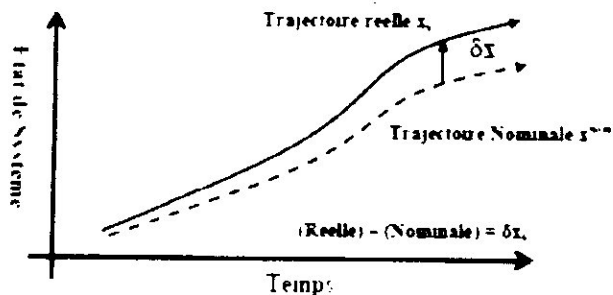


Fig.II.1 : Trajectoires nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman

$$\hat{\Delta x}_k = \phi_{k-1} \hat{\Delta x}_{k-1} + w_{k-1} \tag{Eq.II-10}$$

ou

$$\phi_{k-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_k^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=x_k^{nom}} \tag{Eq.II-11}$$

et $w_k \sim N(0, Q)$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Le modèle de mesure peut être également linéarisé en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant h à x_k^{nom} et négligeant les termes d'ordres supérieurs :

$$z_k = \left(h(x_k^{nom}) + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_k^{nom}} \Delta x_k + \text{termes d'ordres élevés} \right) + v_k \tag{Eq.II-12}$$

$$\hat{z}_k = z_k - h(x_k^{nom})$$

Alors, le modèle de mesure linéarisé s'écrit comme suit :

$$\hat{z}_k = H_k \Delta x_k + v_k \tag{Eq.II-13}$$

ou

II.2.3- Le filtre de Kalman étendu EKF

Le filtre de Kalman étendu EKF (Extended Kalman Filter) est une autre approche d'estimation des problèmes non-linéaires. Il a été développé par Stanley F. Schmidt. Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire. Son fonctionnement consiste simplement à linéariser tous les modèles non-linéaires de sorte que le filtre linéaire traditionnel de Kalman puisse être appliqué. L'EKF est devenu une approche standard pour un certain nombre d'applications d'estimation nonlinéaire.

EKF est similaire à un filtre linéarisé de Kalman sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée (Fig.II.2). Ceci signifie que les dérivés partiels sont évalués le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus [5].

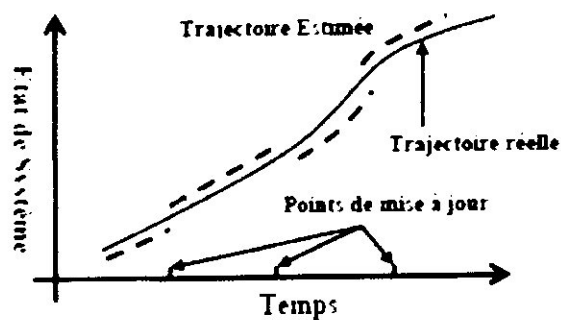


Fig.II.2 : Trajectoires estimée et réelle pour un filtre de Kalman étendu

Des équations (Eq.II-4) et (Eq.II-5), l'approximation de Taylor de f est faite autour de l'estimation de l'instant précédent \hat{x}_{k-1} et l'approximation de Taylor de h est faite à l'état prédite correspondante, c-à-d :

$$f(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \tag{Eq.II-15}$$

$$h(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k}} \tag{Eq.II-16}$$

Le développement limité donne cette fois-ci le modèle suivant :

$$\hat{x}_{k|k} \approx \hat{x}_{k|k-1} + \phi_{k-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \tag{Eq.II-17}$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + H_k(x_k - \hat{x}_k) + v_k \quad \text{Eq.II-18}$$

Les équations (Eq.II-17) et (Eq.II-18) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. L'avantage de l'EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes.

Le filtre étendu peut être visualisé dans une configuration de « feedback » comme l'indique la figure (Fig.II.3). Dans un système de navigation inertielle assisté par le GPS, les erreurs du système inertiel sont retournées et les corrections sont faites intérieurement dans le système inertiel, ainsi nous n'avons pas les données inertielles brutes à la sortie du système inertiel.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(x_{k-1,k})$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de *la trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de *la trajectoire nominale* (filtre linéarisé). Lorsque $h(x_{k-1,k})$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(x_{k-1,k})$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables. La figure (Fig.II-4) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire.

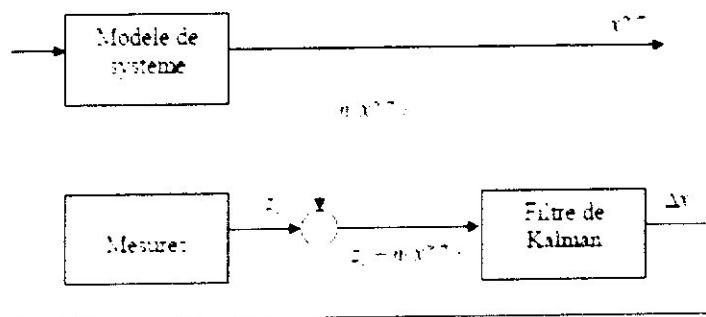


Fig.II.3 : Le filtre EKF en configuration de « feedback »

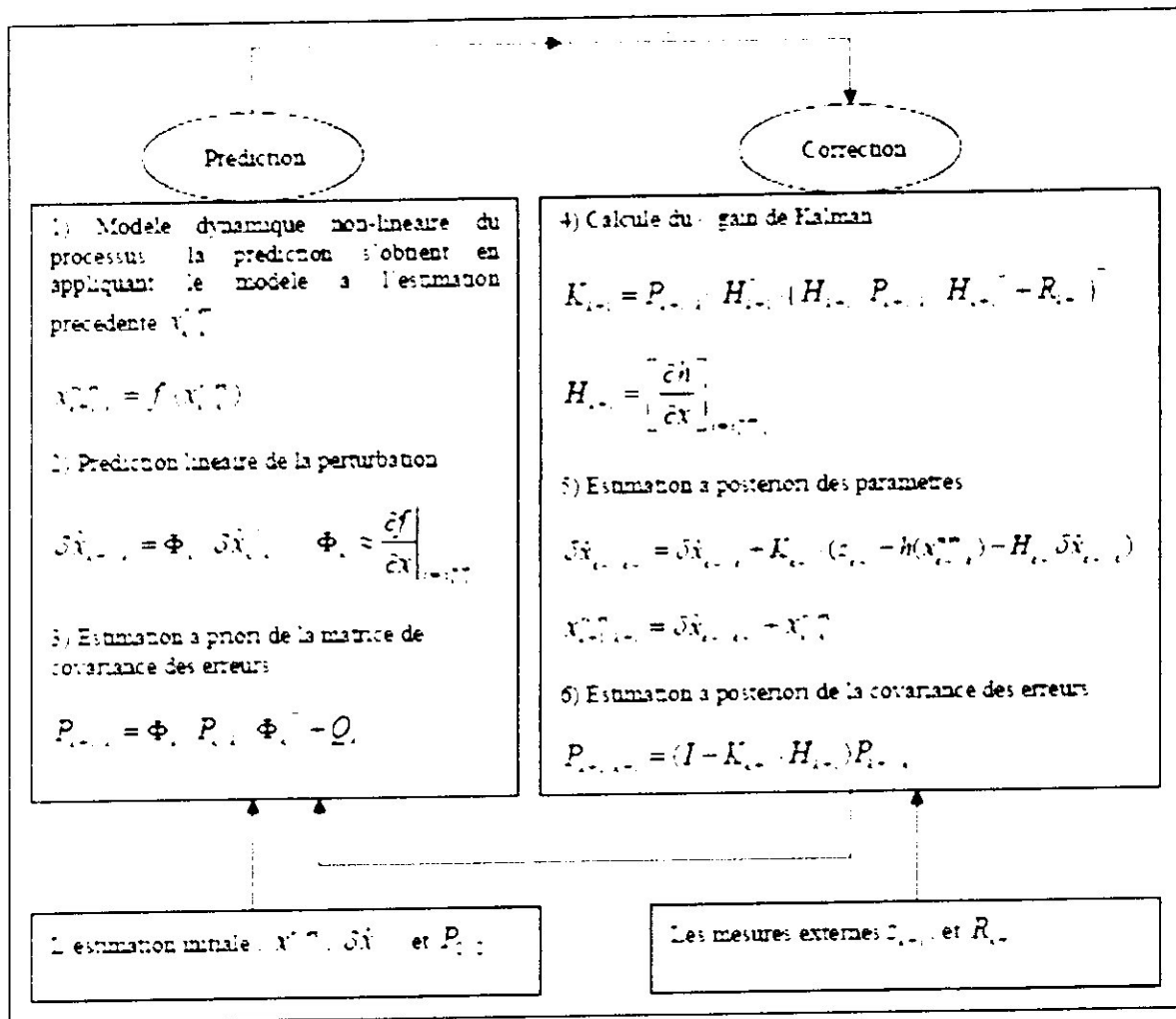


Fig.II.4 : Etapes de EKF pour l'estimation des paramètres du système non-linéaire

II.2.4- Le filtre sous optimal de Schmidt SKF

Plusieurs cas nous permettent d'utiliser le filtre SKF (Schmidt Kalman Filter). Par exemple, si le vecteur d'état x contient des paramètres dont ne nécessitent pas d'être implémentés dans le système, les équations du filtre de Kalman sont modifiées comme suit, [2] :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_k \tag{Eq.II-19}$$

$$z_k = (H_1 \ H_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + v_k \tag{Eq.II-20}$$

où v , w_1 et w_2 sont des bruits blancs gaussiens non corrélés.

Le vecteur x regroupe deux vecteurs x_1 , contenant les paramètres à implémenter, et x_2 , contenant les paramètres à éliminer.

L'équation de la mise à jour des mesures se réécrit :

$$\hat{x}_{k+1|k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1|k} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}_{k+1} (\tilde{z} - \hat{z}) \quad \text{Eq.II-21}$$

Par les équations standards de Kalman, les gains du filtre optimal sont écrits comme suit :

$$K_{k+1} = \begin{pmatrix} P_{11k+1|k} H_1^T + P_{12k+1|k} H_2^T \\ P_{21k+1|k} H_1^T + P_{22k+1|k} H_2^T \end{pmatrix} (H_1 P_{11k+1|k} H_1^T + H_2 P_{21k+1|k} H_1^T + H_1 P_{12k+1|k} H_2^T + H_2 P_{22k+1|k} H_2^T + R)^{-1} \quad \text{Eq.II-22}$$

La non implémentation de x_2 est équivalent d'assumer que $x_2(0) = 0$ et de mettre $K_{2k} = 0$. Le filtre implémenté fait propager les matrices de covariances pour un gain sous optimal K égal :

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{k+1}$$

Puisque x_1 et x_2 ne sont pas couplés dans les équations, les matrices de covariances à priori s'écrivent :

$$P_{11k+1|k} = \phi_{11} P_{11k|k} \phi_{11}^T + Q_1 \quad \text{Eq.II-23}$$

$$P_{12k+1|k} = \phi_{11} P_{12k|k} \phi_{22}^T \quad \text{Eq.II-24}$$

$$P_{22k+1|k} = \phi_{22} P_{22k|k} \phi_{22}^T + Q_2 \quad \text{Eq.II-25}$$

Et les équations des matrices de covariances à posteriori sont données comme suit :

$$P_{11k+1|k+1} = (I - K_1 H_1) P_{11k+1|k} (I - K_1 H_1)^T - K_1 H_2 P_{21k+1|k} (I - K_1 H_1)^T - (I - K_1 H_1) P_{12k+1|k} H_2^T K_1^T + K_1 H_2 P_{22k+1|k} H_2^T K_1^T + K_1 R K_1^T \quad \text{Eq.II-26}$$

$$P_{12k+1|k+1} = (I - K_1 H_1) P_{12k+1|k} - K_1 H_2 P_{22k+1|k} \quad \text{Eq.II-27}$$

$$P_{22k+1|k+1} = P_{22k+1|k} \quad \text{Eq.II-28}$$

Le filtre SKF élimine les calculs exigés dans l'implémentation optimale pour la propagation de P_{22} ; cependant, il calcule correctement les incertitudes du vecteur x_2 dans le gain K_L .

II.2.5- Stabilité du filtre de Kalman

L'étude de stabilité de la solution du filtre de Kalman est fonction de la matrice de covariance de l'état du système qui doit être symétrique et semi positive définie. Ces caractères sont assurés

par factorisation de P_k . Exemple de factorisation, la technique U-D permet de décomposer la matrice P sous la forme :

$$P = U.D.U^T \quad \text{Eq.II-29}$$

où U est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité et D est une matrice diagonale.

Si la matrice P_k converge vers une valeur limite P_l quand $t \rightarrow \infty$, c-à-d :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_l$$

alors la solution P_l doit satisfaire l'équation de la matrice de covariance de la mise à jour (Tableau II.1)

La combinaison des équations de prédiction et de correction permet d'écrire $\hat{x}_{k,k}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k,k} &= [\phi_k - K_k H_k] \hat{x}_{k-1,k-1} + K_k z_k \\ &= \bar{\phi}_k \hat{x}_{k-1,k-1} + K_k z_k \end{aligned} \quad \text{Eq.II-30}$$

D'où une nouvelle matrice de transition correspondante $\bar{\phi}_k$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\phi}_k = P_l$$

Et la solution réelle symétrique semi positive définie de P est dite stable si la matrice de transition correspondante $\bar{\phi}_k$ a des valeurs propres tous inférieures à l'unité.

II.3- DIFFERENTES APPROCHES D'HYBRIDATION

Trois principes d'intégration peuvent être mentionnés :

- La configuration dite « non couplée »
- La configuration dite « faiblement couplée » qui prend en compte les solutions du positionnement de chacun des systèmes ;
- La configuration dite « fortement couplée » qui prend en compte les mesures brutes du GPS et de l'INS, puis modélise dans un seul filtre de Kalman les différentes erreurs propres à chacun des systèmes.

II.3.1- Mode non couplé

Dans le mode non couplé, les systèmes GPS et l'INS produisent indépendamment les solutions de navigation sans l'influence de l'une sur l'autre comme l'indique la figure (Fig.II.5).

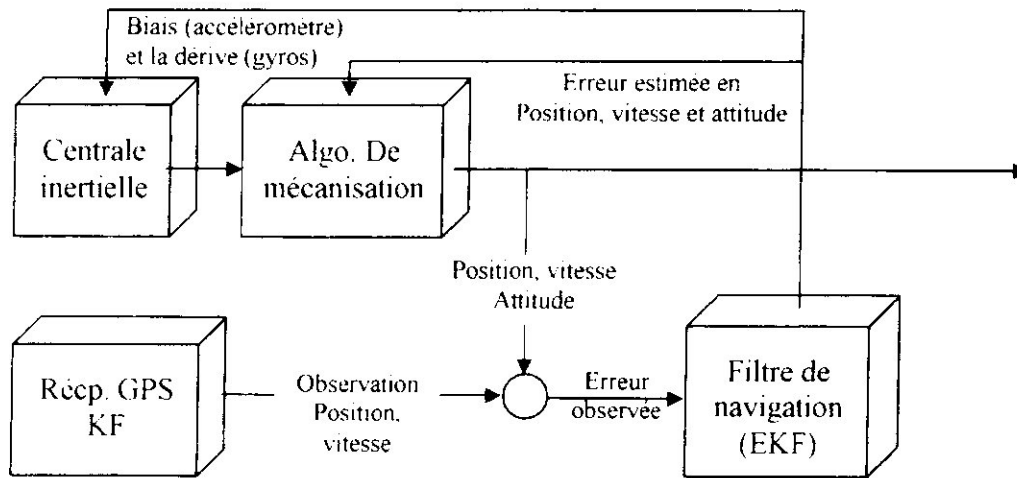


Fig.II.7 : Couplage faible en boucle fermée

II.3.3- Mode fortement couplé

Dans ce système, les mesures « pseudo-range » et « pseudo-rate » des satellites ont été utilisées pour aider le filtre de navigation, ainsi que l'accélération et la vitesse angulaire de l'INS. La fusion se fait directement au niveau des données brutes.

Dans une telle architecture, les filtres de Kalman séparés pour le récepteur GPS et le processus de navigation sont combinés dans un seul filtre d'intégration. Comme représenté dans la figure ci-dessous, ce filtre accepte des résiduels de (pseudo-range) de GPS et de mesures Doppler directement (Delta-range). L'état d'erreurs du filtre incluse maintenant l'état d'erreurs INS (position, vitesse, attitude, erreurs gyroscopiques, erreurs d'accéléromètres) aussi bien que de nouveaux états représentant le biais et la dérive d'horloge du récepteur GPS. Les composants du vecteur d'état du filtre qui représentent les erreurs d'INS sont utilisés pour calibrer l'INS et pour corriger ses estimations de la position, de la vitesse et de l'attitude. Les estimations du biais et de la dérive d'horloge par le filtre sont utilisées pour corriger les mesures GPS.

Cette approche peut apporter ainsi une meilleure performance et une plus grande robustesse que le système faiblement couplé. Elle fournit des estimations de navigation précises pendant des périodes où la dynamique de l'aéronef est élevée et pendant les périodes de blocage des signaux (*jamming*), et assure une meilleure élasticité face à une géométrie défavorable des satellites, aux pertes de données, et aux erreurs de l'INS. Mais elle est plus chère à mettre en application et plus difficile à développer.

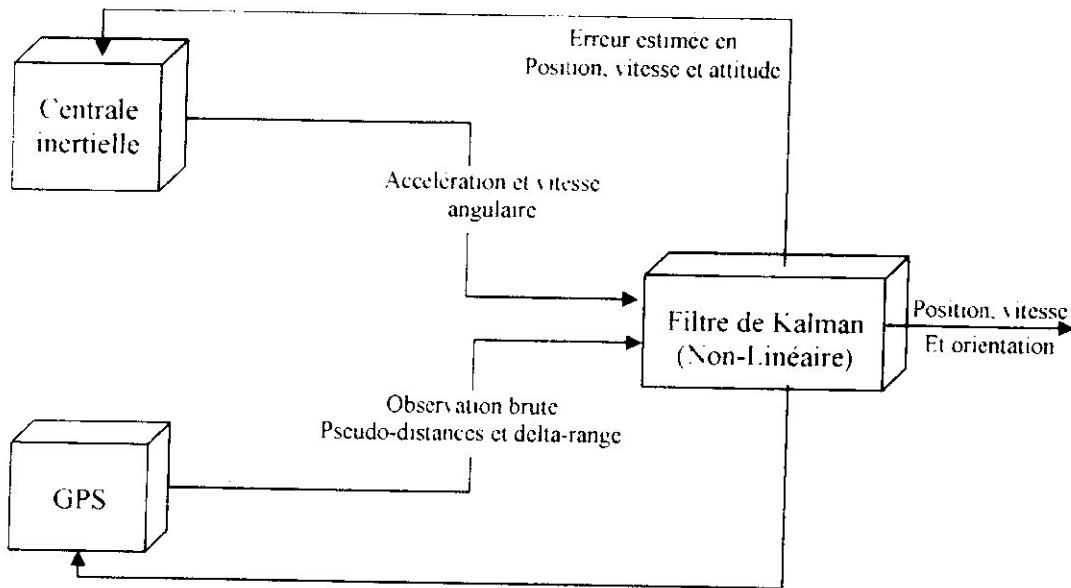


Fig.II.8 : Couplage fort

II.4- IMPLIMENTATION DU FILTRE EKF POUR LA FUSION INS/GPS

II.4.1- Équations d'erreurs du système INS

Les équations de mécanisation, décrites dans le chapitre précédent, ne fournissent aucune information sur les erreurs du système. Les données reçues de l'IMU se traitent pour obtenir la mise à jour des paramètres de navigation sans savoir la véracité de ces paramètres.

En pratique, il est souvent exigé d'estimer les erreurs du système dans l'ordre d'améliorer les performances à un niveau satisfaisant. Les erreurs que nous avons besoin de les estimer incluent les erreurs de la position, de la vitesse, de l'attitude, et des capteurs inertiels. Leur fonctionnement peut être modélisé en appliquant les techniques de perturbation au système d'équations (Eq.I-41). Autrement dit, nous supposons que les paramètres de navigation vont être déviés de leurs vraies valeurs par des petites quantités, et par dérivation de ces déviations nous obtenons un ensemble d'équations différentielles du premier ordre.

Par exemple, les perturbations de la position, de la vitesse, et de l'attitude s'expriment comme suit :

$$\tilde{r}^{ll_a} = r^{ll_a} + \delta r^{ll_a} \tag{Eq.II-31}$$

$$\tilde{v}^n = v^n + \delta v^n \tag{Eq.II-32}$$

$$\tilde{\chi}^n = (I_3 - E^n) \chi^n \tag{Eq.II-33}$$

Les signes $\hat{\cdot}$ et δ indiquent les valeurs estimées et les erreurs respectivement. δr et δv regroupent les composantes d'erreur en position et en vitesse respectivement. Ils sont définis par :

$$\delta r^{IIa} = [\delta\varphi, \delta\lambda, \delta h]^T \text{ et } \delta v^n = [\delta v_N, \delta v_E, \delta v_D]^T$$

Le terme E^n est la matrice anti-symétrique regroupant les erreurs d'orientation $\delta\rho^n = [\varepsilon_N, \varepsilon_E, \varepsilon_D]^T$,

avec :

$$E^n = (\delta\rho^n \times) = (\varepsilon^n \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_D & \varepsilon_E \\ \varepsilon_D & 0 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce qui suit, nous allons donner que les résultats du système perturbé. La linéarisation par différentiation du système (Eq.I-41) est bien détaillée dans l'annexe C.

II.4.1.1- MODELE DYNAMIQUE DE L'ERREUR EN POSITION

L'équation dynamique (Eq.I-34) de la position est fonction de la position et de la vitesse. Par différentiation, l'équation dynamique d'erreur en position peut être obtenue en utilisant les dérivées partielles :

$$\delta\dot{r}^{IIa} = F_r \delta r^{IIa} + F_v \delta v^n \tag{Eq.II-34}$$

où

$$F_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial h} \\ \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial\dot{h}}{\partial\varphi} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial\lambda} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial h} \end{bmatrix}; F_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{\lambda}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_E} & \frac{\partial\dot{h}}{\partial v_D} \end{bmatrix}$$

II.4.1.2- MODELE DYNAMIQUE DE L'ERREUR EN VITESSE

En référence à l'équation dynamique (Eq.I-40) de la vitesse, le résultat de perturbation nous donne :

$$\delta\dot{v}^n = F_v \delta r^{IIa} + F_v \delta v^n + (f^n \times) \delta\rho^n + C_b^n \delta f^b \tag{Eq.II-35}$$

ou $(f^n \times)$ est la forme anti-symétrique de la force spécifique f^n , δf^b sont les erreurs résiduelles des accéléromètres et qui sont transformées dans le repère de navigation n en utilisant la matrice de transformation C_b^n , et

Pour ce but, les erreurs inertielles citées dans le paragraphe I.2.1.4 ont besoin d'être modélisées dans le vecteur d'état du filtre de navigation en addition aux erreurs de position, vitesse et d'attitude.

Pour le cas du biais b , du facteur d'échelle s , et de la non-orthogonalité γ , les équations d'erreurs des accéléromètres δf_{ib}^h et des gyroscopes $\delta \omega_{ib}^h$ s'écrivent respectivement comme suit, [12] :

$$\delta f_{ib}^h = b_a + \text{diag}(f_{ib}^h) s_a + \Gamma_a \cdot \gamma_a \quad \text{Eq.II-39}$$

$$\delta \omega_{ib}^h = b_g + \text{diag}(\omega_{ib}^h) s_g + \Gamma_g \cdot \gamma_g \quad \text{Eq.II-40}$$

Les indices a et g désignent les erreurs correspondant aux accéléromètres et aux gyroscopes respectivement, et : $f_{ib}^h = [f_x \ f_y \ f_z]^T$, $\omega_{ib}^h = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$

Les vecteurs de non-orthogonalité γ_a et γ_g sont donnés comme suit :

$$\gamma_a = [\gamma_{a,xy}, \gamma_{a,yx}, \gamma_{a,xz}, \gamma_{a,zx}, \gamma_{a,yz}, \gamma_{a,zy}]^T ; \gamma_g = [\gamma_{g,xy}, \gamma_{g,yx}, \gamma_{g,xz}, \gamma_{g,zx}, \gamma_{g,yz}, \gamma_{g,zy}]^T$$

Γ_a et Γ_g sont deux matrices définies par :

$$\Gamma_a = \begin{bmatrix} f_y & f_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x & f_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x & f_y \end{bmatrix} ; \Gamma_g = \begin{bmatrix} \omega_y & \omega_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x & \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_x & \omega_y \end{bmatrix}$$

L'évolution des erreurs des capteurs peut être exprimée par les équations dynamiques ci-dessous. Pour plus de détail, nous pouvons faire référence à [2] et [12].

$$\dot{b}_a = \text{diag}(c_{ab}) b_a + w_{ab} \quad \text{Eq.II-41a}$$

$$\dot{b}_g = \text{diag}(c_{gb}) b_g + w_{gb} \quad \text{Eq.II-41b}$$

$$\dot{s}_a = \text{diag}(c_{as}) s_a + w_{as} \quad \text{Eq.II-41c}$$

$$\dot{s}_g = \text{diag}(c_{gs}) s_g + w_{gs} \quad \text{Eq.II-41d}$$

$$\dot{\gamma}_a = \text{diag}(c_{a\gamma}) \gamma_a + w_{a\gamma} \quad \text{Eq.II-41e}$$

$$\dot{\gamma}_g = \text{diag}(c_{g\gamma}) \gamma_g + w_{g\gamma} \quad \text{Eq.II-41f}$$

$c_{ah}, c_{gh}, c_{as}, c_{gs}, c_{ax}$ et c_{gy} sont les paramètres des processus stochastiques en temps continu (random walk, random constant, processus de Gauss-Markov du premier ordre, ...) et qui sont définis dans l'annexe B.

Le bruit de mesure est un bruit de haute fréquence et qui peut être modélisé comme un bruit blanc. Les biais et les erreurs dues à la dérive sont parfois modélisés comme un processus de Gauss-Markov du premier ordre [3]. Le modèle est décrit par l'équation ci-dessous où $1/\beta$ est le temps de corrélation de la variable aléatoire δa et w est un bruit blanc gaussien :

$$\delta \dot{x} = -\beta \delta x + w \quad \text{Eq.II-42}$$

II.4.2- Modèle dynamique du filtre en temps continu et en temps discret

En tenant compte du bruit dynamique du système, le modèle d'erreur peut s'écrire en temps continu sous la forme matricielle suivante :

$$\delta \dot{x} = F \delta x + G w \quad \text{Eq.II-43}$$

où δx est le vecteur d'état qui regroupe les erreurs de position, de vitesse, d'attitude, des accéléromètres et des gyroscopes : $\delta x = [\delta r \ \delta v \ \delta \rho \ \delta f_{ib}^b \ \delta w_{ib}^b]^T$

F est la matrice dynamique du système, G est la matrice de commande, et w le vecteur de bruit du système formé par les bruits de vitesse, d'attitude, des accéléromètres, et des gyroscopes :

$$w = [w_v \ w_p \ w_a \ w_g]^T$$

Le cas où les biais des accéléromètres et des gyroscopes sont seuls considérés, et en tenant compte des équations (Eq.II-34, Eq.II-35, Eq.II-36, Eq.II-41a, Eq.II-41b), les matrices (F , G) et le vecteur w s'expriment comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_{rr} & F_{rv} & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ F_{vr} & F_{vv} & (f^n \times) & C_b^n & 0_3 \\ F_{pv} & F_{pv} & (-\omega_m^n \times) & 0_3 & -C_b^n \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & \text{diag}(c_{ab}) & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & \text{diag}(c_{gb}) \end{bmatrix} ; G = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ C_b^n & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & C_b^n & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \end{bmatrix} ;$$

$$w = [w_v \ w_p \ w_{ab} \ w_{gb}]^T$$

La considération des autres erreurs ainsi que l'expression de F sont données dans l'annexe C.

$$\hat{z}_k = (z_k)_{GPS} - h(x_{k+1|k}^{nom}) = \begin{pmatrix} r_{INS}^{LLa} - r_{GPS}^{LLa} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \varphi_{INS} - \varphi_{GPS} \\ \lambda_{INS} - \lambda_{GPS} \\ h_{INS} - h_{GPS} \\ v_{INS}^n - v_{GPS}^n \end{pmatrix}_k \quad \text{Eq.II-50}$$

Nous pouvons donc déduire la matrice d'observation H_k :

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & I_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} & 0_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.II-51}$$

Le vecteur v_k de l'équation (Eq.II-49) est le bruit de mesure de matrice de covariances R_k donnée comme suit :

$$R_k = \text{diag}(\sigma_\varphi^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_m^2 \quad \sigma_{v_e}^2 \quad \sigma_{v_d}^2) \quad \text{Eq.II-52}$$

II.4.4- Modèle d'alignement par GPS

Pour une CI de mauvaise performance dont les niveaux de biais et de bruit sont très élevés, les angles de roulis et tangage peuvent être obtenus à partir des mesures accélérométriques en stationnaire par les équations (Eq.I-53) et (Eq.I-54) ; cependant l'angle de lacet ne peut pas être déterminé avec précision.

Lorsque l'information de vitesse GPS est disponible, la CI peut être alignée en mouvement. Sur une surface horizontale pour un véhicule terrestre, les angles de roulis et tangage sont presque nuls et l'angle de lacet initial est approximativement calculé en utilisant l'équation (Eq.I-57).

Le cas où la position GPS est connue, la vitesse GPS peut être dérivée à partir de la position comme suit, [12] :

$$\dot{\varphi}_m = \Delta\varphi_m / (r_{NI} - h_{m-1,2}) \Delta t_m \quad \text{Eq.II-53a}$$

$$\dot{\lambda}_m = \Delta\lambda_m / (r_{NS} - h_{m-1,2}) \cdot \cos\varphi_{m-1,2} \Delta t_m \quad \text{Eq.II-53b}$$

$$\dot{h}_m = -\Delta h_m \Delta t_m \quad \text{Eq.II-53c}$$

avec l'indice m dénote l'époque de mesure GPS, $\Delta t_m = t_m - t_{m-1}$, $\Delta\varphi_m = \varphi_m - \varphi_{m-1}$, $\Delta\lambda_m = \lambda_m - \lambda_{m-1}$, $\Delta h_m = h_m - h_{m-1}$.

Une fois calculé le lacet initial, nous devons appliquer la méthode de (fine alignement) pour raffiner le lacet en utilisant le filtre de Kalman (Fig.II.9).

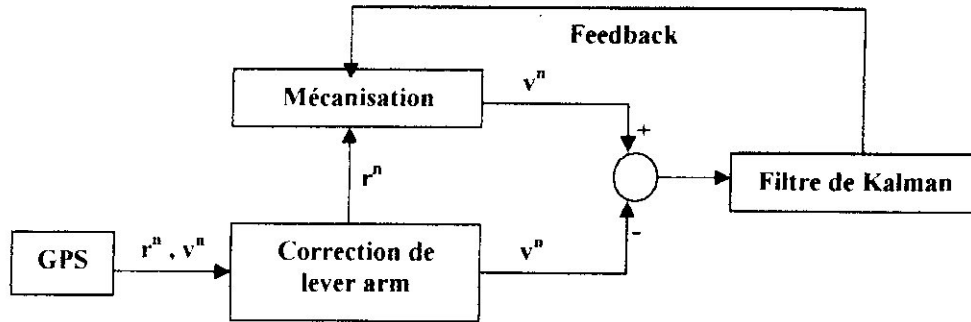


Fig.II.9 : Alignement par la vitesse GPS

Assumant que la position est précisément connue durant le processus d'initialisation, le vecteur d'erreurs du modèle (Eq.II-43) se réduit à, [2] :

$$\delta x = [\delta v_N, \delta v_E, \varepsilon_N, \varepsilon_E, \varepsilon_D, b_{aN}, b_{aE}, b_{gN}, b_{gE}, b_{gD}]^T.$$

La matrice dynamique F (Eq.II-43) se réduit donc à dix variables en éliminant les lignes et les colonnes reliées à la position, à la composante v_D de la vitesse et au biais b_D de l'accéléromètre.

Le modèle d'observation de l'équation (Eq.II-49) est redéfini par le vecteur de mesure :

$$z = [\delta v_N, \delta v_E]^T$$

et la matrice d'observation :
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le cas d'un véhicule se déplaçant avec une vitesse proche de zéro, une simplification se fait en posant $\omega_E = 0$ et $f^n = [0 \ 0 \ g]^T$.

Malheureusement, le système réduit ci-dessus n'est pas complètement observable. Le rang de la matrice d'observabilité est égal à 7 au lieu de 10, [2]. Trois paramètres du vecteur d'état donc ne sont pas observables.

Le problème peut être résolu par l'application du filtre sous-optimal SKF du paragraphe II.2.4 après avoir transformé le vecteur x . Une transformée similaire T est définie tel que :

$$y = T.x \tag{Eq.II-54}$$

où y sera composé de deux vecteurs : y_1 de dimension 7 contenant les paramètres observés, et y_2 de dimension 3 contenant les paramètres non observables. D'après la référence [2], T est donnée comme suit :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_D & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_D & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_D & 0 & \omega_N & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou ω_N et ω_D les composantes de ω_m'' .

Les modèles du système s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.II-55}$$

$$dz = (C_1 \quad 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.II-56}$$

La combinaison des équations (Eq.II-43), (Eq.II-49) et (Eq.II-54) donne :

$$L_p = F^{-1} F T, \text{ et}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.4.5- Effet de lever arm

Généralement, les deux capteurs GPS et INS ne peuvent pas être installés sur le même point. La position et la vitesse de la CI sont alors différentes de celles du GPS. Des corrections d'emplacement, appelées l'effet de lever arm, peuvent s'écrire par les équations suivantes :

$$r_{INS}^{IIa} = r_{GPS}^{IIa} - D C_b^n \Delta r^b \quad \text{Eq.II-57}$$

$$v_{INS}^n = v_{GPS}^n - C_b^n \Omega_{nb}^b \Delta r^b \quad \text{Eq.II-58}$$

D est la matrice de transformation définie dans l'équation (Eq.I-34).

II.4.6- La synchronisation

Pour effectuer une intégration correcte, il est nécessaire de déterminer à quel moment ont été effectuées les mesures. L'information temporelle des différents capteurs doit être relative à une même échelle de temps. La solution pour synchroniser les mesures GPS et INS est d'acquérir les mesures selon une même échelle de temps. L'échelle choisie est celle du GPS.

Supposons que les mesures de la CI sont faites à l'instant t_{k-1} et à l'instant t_k et que la mesure GPS est faite à l'instant t_{GPS} , nous pouvons appliquer une extrapolation linéaire pour obtenir la position et la vitesse de la CI au temps exact de la mesure GPS :

$$\begin{aligned} r^{II,a}(t_{GPS}) &= r^{II,a}(t_{k-1}) + \frac{r^{II,a}(t_k) - r^{II,a}(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} (t_{GPS} - t_{k-1}) \\ &= \frac{(t_k - t_{GPS})}{(t_k - t_{k-1})} r^{II,a}(t_{k-1}) + \frac{(t_{GPS} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} r^{II,a}(t_k) \end{aligned} \quad \text{Eq.II-59}$$

$$v^n(t_{GPS}) = \frac{(t_k - t_{GPS})}{(t_k - t_{k-1})} v^n(t_{k-1}) + \frac{(t_{GPS} - t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})} v^n(t_k) \quad \text{Eq.II-60}$$

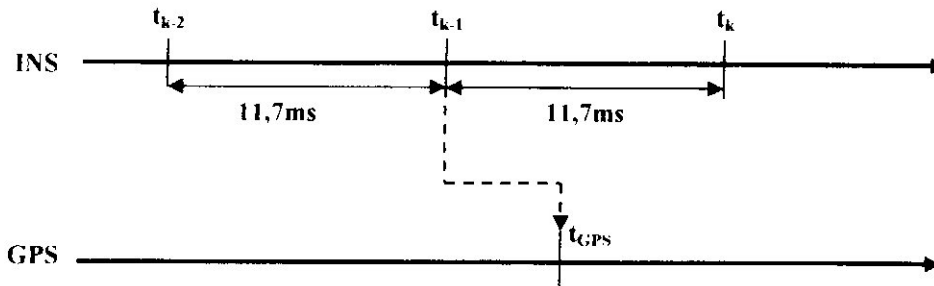


Fig.II.10 : Extrapolation des données inertielles

II.4.7- Détection des trajets multiples

La seule information fournie par le monde extérieur est l'observation, et par conséquent la seule forme de mesure pour déterminer le comportement du filtre est la différence entre l'observation et l'observation prédite, c'est-à-dire, l'innovation s :

$$s_k = z_k - H_k x_k(-) \quad \text{Eq.II-61}$$

de matrice de covariance :

$$S_k = H_k P_k(-) H_k^T + R_k \quad \text{Eq.II-62}$$

L'innovation est blanche et a une distribution gaussienne centrée, de covariance S_k , si le filtre fonctionne correctement. Pour déterminer si c'est le cas, l'innovation est normalisée, par la fonction :

$$z = s_k^T S_k^{-1} s_k \quad \text{Eq.II-63}$$

La fonction de l'équation (Eq.II-63) peut être utilisée comme fonction de déclenchement (gating function) pour déterminer si les erreurs de trajets multiples se sont produites ou non. Quand une observation est obtenue, l'équation est appliquée, et si la valeur de cette équation est inférieure à un seuil prédéfini, alors l'observation est acceptée. Ceci offre le moyen de détecter tous les défauts dans l'observation, tels que les trajets multiples et le changement de configuration des satellites en vue. La valeur du seuil de la fonction est obtenue à partir des tables standards et son choix est basé sur un niveau de confiance exigé.

II.4.8- Réglage des paramètres du filtre

L'utilisation du filtre de Kalman suppose que les matrices de covariances des bruits de modèle Q_k et de mesure R_k sont connues. Cette dernière hypothèse impose d'évaluer correctement la variance des différents bruits affectant le système.

Le réglage des paramètres du filtre de Kalman consiste principalement à choisir des valeurs pour les matrices Q_k et R_k . Par exemple, un grand Q_k impliquera un système inertiel imprécis. Pendant l'étape de prédiction, l'incertitude dans les données inertielles augmentera selon l'importance de Q_k . Quand une mesure du GPS se produit, il y a une plus grande possibilité que l'unité inertielle soit corrigée en utilisant la première mesure disponible, indépendamment de la précision de cette mesure. De même, les petites valeurs dans R_k impliqueront des mesures précises du GPS qui peuvent poser un problème quand la mesure est erronée et puis fusionnée avec des capteurs inertiels de basse précision. De ce fait, le réglage devient un ajustement sensible et délicat des matrices Q_k et R_k avec l'emploi de la fonction de déclenchement (Eq.II-63), afin de rejeter les défauts du GPS à haute fréquence.

Les erreurs de positionnement du GPS sont relativement connues du fabricant ou par l'expérimentation. Les variances le long de la diagonale de R_k sont déterminées simplement en obtenant les valeurs de $PDOP$ ou $GDOP$ à partir du récepteur GPS et en supposant qu'il n'y a aucune corrélation entre les observations sur les axes de navigation. C'est à dire que la variance finale est fonction de $PDOP$, [2, p.253] :

$$R_k = \frac{PDOP^2 * UERE^2}{3} I$$

où, *UERE* désigne une variance fixée par défaut. Le carré donne plus de poids au *PDOP*. Le facteur 3 a été la plus appropriée expérimentalement.

La détermination des valeurs pour Q_k est plus difficile parce qu'elle a besoin de beaucoup de tests et d'apprentissages. Mais, elle dépend principalement des niveaux de bruit des capteurs inertiels utilisés qui peuvent être obtenus à partir du fabricant ou par l'expérimentation. Les méthodes de calcul adaptatives peuvent être appliquées pour aider au réglage de Q_k .

II.5- INCONVENIENTS DU FILTRE EKF

Le filtre de Kalman EKF est probablement le filtre le plus largement répandu pour un système non linéaire. Cependant, il présente certains inconvénients et défauts :

- Une opération centrale et essentielle effectuée dans l'EKF est la propagation d'une variable aléatoire gaussienne (GRV) par la dynamique du système. Dans l'EKF, la distribution d'état est approximée par un GRV, qui est alors propagé analytiquement par une linéarisation du premier ordre du système non linéaire. Les termes négligés dans la linéarisation peuvent être relativement grands ce qui peut présenter de grandes erreurs dans l'estimation de la moyenne et de la covariance a posteriori du GRV transformé. Ceci peut mener à une performance sub-optimale et parfois à la divergence du filtre.
- Le coût calculatoire de l'EKF est intensif par rapport au filtrage linéarisé de Kalman. Puisque la linéarisation est faite autour des estimations obtenues à partir du filtre, nous ne pouvons pas calculer le paramètre de filtre à l'avance, ce qui augmente la charge de calcul en temps réel.
- La dérivation des matrices Jacobéennes n'est pas triviale dans la plupart des applications et introduisent souvent ensuite des difficultés d'implémentation significatives.

Simon Julier a proposé un nouvel algorithme [JUL 96,97] appelé UKF (Unscented Kalman Filter) pour traiter les systèmes non linéaires et qui résout la plupart des problèmes d'EKF. Le chapitre III consiste à détailler le principe et l'algorithmique du filtre UKF ainsi que son application dans le système hybride INS/GPS.

DESCRIPTION DU FILTRAGE

UKF

III.1- CONCEPT DE BASE DU FILTRE UKF

Le filtre UKF (ou sigma point) est un nouvel estimateur linéaire qui a vu le jour récemment. Il est basé sur le principe qu'un ensemble de points échantillons peut être utilisé pour paramétrer la moyenne et la covariance.

L'estimateur assure une performance équivalente au KF pour les systèmes linéaires et s'applique d'une manière élégante aux systèmes non-linéaires sans passer par les étapes de linéarisation exigées par l'EKF.

L'UKF résout le problème d'EKF en utilisant une approche d'échantillonnage déterministe. La distribution de l'état est approximée par un GRV, mais est maintenant représentée en utilisant un ensemble minimal de points échantillons soigneusement et attentivement choisis. Ces points échantillons représentent complètement les vraies moyenne et covariance du GRV et, une fois propagés par le système non linéaire, représenteraient parfaitement la moyenne et la covariance a posteriori. Ces entités sont représentées précisément jusqu'au troisième ordre d'un développement de Taylor pour n'importe quelle non-linéarité. En comparaison, l'EKF représente une précision d'un premier ordre seulement.

La prémisse de base derrière l'UKF est qu'il est plus facile d'approximer une distribution gaussienne que d'approximer une fonction non-linéaire quelconque. En effet, au lieu de linéariser la fonction en utilisant les Jacobéennes, l'UKF utilise une approche d'échantillonnage déterministe pour représenter fidèlement les moyenne et covariance avec un ensemble minimal de points-échantillons. L'UKF est une technique d'estimation non-linéaire puissante et s'est avérée une alternative supérieure à l'EKF dans une variété d'applications comprenant l'estimation d'état pour la navigation de véhicule.

Bien que cette méthode dévoile une ressemblance superficielle aux méthodes de type Monte Carlo (telles que les filtres particulaires), il y a une différence extrêmement importante et fondamentale. Les échantillons ne sont pas dessinés au hasard mais plutôt selon des algorithmes spécifiques et déterministes.

Le concept de l'UKF est illustré dans la figure (Fig.III.1). On résume, l'EKF transforme simplement une moyenne à travers une fonction non-linéaire donnée et la considère comme la moyenne transformée, ce qui est valide si la transformation donnée est linéaire. L'UKF, cependant, échantillonne plusieurs points de la moyenne et de la covariance données de PDF

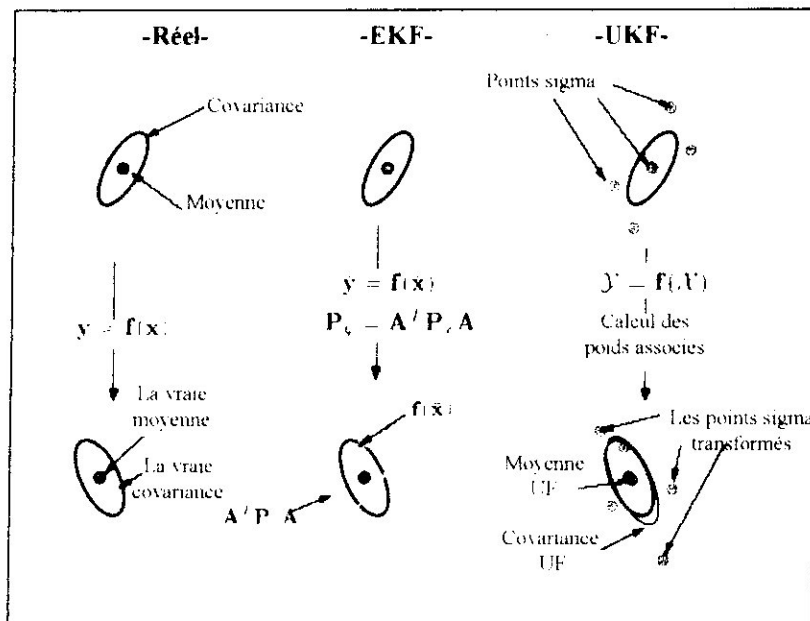


Fig.III.1 : Concept de propagation de moyenne et de covariance

et transforme tous les points à travers la transformation non-linéaire donnée. La moyenne et la covariance sont construites des points transformés.

III.2- ALGORITHMES GENERIQUES DE L'UKF

L'UKF est une extension des méthodes de filtrage particulière pour les problèmes d'estimation récursive. Si le modèle du système est une fonction non-linéaire du vecteur d'état et du vecteur bruit du système (c-à-d, $f(x, w)$, une fonction arbitraire non-linéaire), alors le bruit du système est généré et devient parti du modèle de processus du système. Le vecteur d'état du système devient augmenté comme suit :

$$x^a = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad \text{Eq.III-1}$$

où x^a dénote l'état augmenté. Par cette augmentation, l'effet du bruit sur la propagation de covariance peut être naturellement décrit. Comme résultat, l'intégration de l'équation (Eq.II-47), exigée pour l'EKF, n'est pas nécessaire.

Dans ce paragraphe, l'implémentation de l'UKF pour les modèles de systèmes de bruit additif (c-a-d, $f(x) = w$ et donc il n'est pas nécessaire d'augmenter le vecteur d'état) sera discutée précisément. Ensuite, le cas des modèles de systèmes de bruit non additif est aussi discuté. Nous assumons que les bruits du système et de mesure ne sont pas corrélés, et le modèle non-linéaire de mesure est donné comme suit :

$$z_k = h(x_k) + e_k, \tag{Eq.III-2}$$

de matrice de covariance $R_k = E[e_k e_k^T]$

III.2.1- UKF pour des systèmes de bruits additifs

Nous assumons que le modèle du processus du système non-linéaire est donné comme suit :

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k \tag{Eq.III-3}$$

$w_k \in M$ de matrice de covariance $Q_k = E[w_k w_k^T]$

Etant donné le vecteur d'état à l'étape $k-1$, un ensemble de points appelés « *points sigma* » sont calculés et stockés dans les colonnes de la matrice des points sigma χ_{k-1} (de taille $L \times (2L+1)$, où L est la dimension du vecteur d'état). Ces points échantillons représentent fidèlement les vraies moyenne et covariance de la variable. Ces points sont calculés en utilisant un algorithme déterministe, [6] :

$$\begin{aligned} (\chi_{k-1})_0 &= \bar{x}_{k-1} \\ (\chi_{k-1})_i &= \bar{x}_{k-1} + \left(\sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}} \right)_i, i = 1 \dots L \\ (\chi_{k-1})_{i+L} &= \bar{x}_{k-1} - \left(\sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}} \right)_{i-L}, i = L+1 \dots 2L \end{aligned} \tag{Eq.III-4}$$

où P est la matrice de covariance, et $\left(\sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}} \right)_i$ est la colonne i de la racine carrée de la matrice $(L+\lambda)P_{k-1}$ et λ est défini par :

$$\lambda = \alpha^2 (L + \kappa) - L \tag{Eq.III-5}$$

la où α est un paramètre qui détermine la diffusion du point sigma autour de \bar{x}_k (*scaling factor*) et habituellement réglé à $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$. κ est un paramètre secondaire habituellement réglé à zéro pour l'estimation d'état et à $(3-L)$ pour l'estimation des paramètres.

Lorsque $\left(\sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}} \right)$ est symétrique et positive, cela nous permet de trouver la racine carrée en utilisant une décomposition de Cholesky ($P = SS^T$).

Une fois χ_{k-1} est calculé, nous exécutons l'étape de **prédiction** en propageant d'abord chaque colonne de χ_{k-1} à travers le temps Δt en utilisant le modèle du système (chaque point sigma est instancié par le modèle du processus pour rapporter un ensemble d'échantillons transformés) :

$$(Z_k)_i = f((\chi_{k-1})_i), i = 0...2L \quad \text{Eq.III-6}$$

où f est l'équation différentielle définie par l'équation (Eq.III.3).

Ayant calculé $(\chi_k)_i$, l'estimation à priori de l'état est :

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)}(\chi_k)_i \quad \text{Eq.III-7}$$

où $W_i^{(m)}$ est l'ensemble des poids associés au point i et défini par :

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \lambda / (L + \lambda) \\ W_i^{(m)} &= 1 / \{2(L + \lambda)\}, i = 1...2L \end{aligned} \quad \text{Eq.III-8}$$

De même, nous calculons la covariance d'erreur à priori comme suit :

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(\chi_k)_i - \hat{x}_{k|k-1}] [(\chi_k)_i - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q_{k-1} \quad \text{Eq.III-9}$$

Les poids $W_i^{(c)}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{(L + \lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(c)} &= \frac{1}{2(L + \lambda)}, i = 1...2L \end{aligned} \quad \text{Eq.III-10}$$

β est un paramètre utilisé pour incorporer n'importe quelle connaissance antérieure au sujet de la distribution de x (pour la distribution gaussienne, $\beta = 2$ est optimal [6]).

A l'étape de correction, nous devons d'abord transformer la colonne de (χ_k) par la fonction de mesure, par conséquent :

$$\begin{aligned} (Z_k)_i &= h((\chi_k)_i), i = 0...2L \\ \hat{z}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)}(Z_k)_i \end{aligned} \quad \text{Eq.III-11}$$

<p>Initialisation</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Initialiser le vecteur d'état $\hat{x}_{0,0}$ et sa covariance $P_{0,0} = E[(x_{0,0} - \hat{x}_{0,0})(x_{0,0} - \hat{x}_{0,0})^T]$ - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(L \cdot \lambda)P_{0,0}$ - Générer les points sigma $(\chi_{0,0})_0 = \bar{x}_{0,0}$ $(\chi_{0,0})_i = \bar{x}_{0,0} + \left(\sqrt{(L + \lambda)P_{0,0}}\right)_i, i = 1 \dots L$ $(\chi_{0,0})_i = \bar{x}_{0,0} - \left(\sqrt{(L + \lambda)P_{0,0}}\right)_{i-L}, i = L + 1 \dots 2L$ <p>et les poids de la moyenne et de la covariance par les équations (Eq III-8) et (Eq III-10) respectivement</p>
<p>Prediction</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Transformer les points sigma à travers le modèle de processus $(\chi_{k,k-1})_i = f((\chi_{k-1,k-1})_i), i = 0 \dots 2L$ - Calculer la moyenne et la covariance à partir des points sigma transformés : $\hat{x}_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (\chi_{k,k-1})_i$ $P_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(\chi_{k,k-1})_i - \hat{x}_{k,k-1}][(\chi_{k,k-1})_i - \hat{x}_{k,k-1}]^T + Q_{k-1}$ - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(L \cdot \lambda)P_{k,k-1}$ - Recalculer les points sigma $(\chi_{k,k-1})_i$ par l'équation (Eq III-4).
<p>Correction</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Transformer les points sigma à travers le modèle de mesure $(Z_{k,k-1})_i = h((\chi_{k,k-1})_i), i = 0 \dots 2L$ - Calculer les mesures prédites à partir des points sigma transformés : $\hat{z}_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (Z_{k,k-1})_i$ - Calculer la covariance entre les états et les mesures : $P_{x,z_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(\chi_{k,k-1})_i - \hat{x}_{k,k-1}][(\chi_{k,k-1})_i - \hat{x}_{k,k-1}]^T [(Z_{k,k-1})_i - \hat{z}_{k,k-1}]$ - Calculer la covariance de la séquence d'innovation : $P_{z_k,z_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(Z_{k,k-1})_i - \hat{z}_{k,k-1}][(Z_{k,k-1})_i - \hat{z}_{k,k-1}]^T + R_k$ <p>(Le premier terme du membre droit est équivalent à $H_k P_{k,k-1} H_k^T$ dans l'EKF)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Les mise à jour des équations de correction sont écrites comme suit : $K_k = P_{x,z_k} P_{z_k,z_k}^{-1}$

	$\hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k,k-1})$ $P_{k,k} = P_{k,k-1} - K_k P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} K_k^T$ <ul style="list-style-type: none"> - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(L + \lambda)P_{k,k}$ - Recalculer les points sigma $(\chi_{k,k})_i$ par l'équation (Eq.III-4).
--	--

Tableau III.1 : Filtrage UKF dans le cas de bruit additif

III.2.2- UKF pour des systèmes de bruits non additifs

Nous assumons que le modèle du système est donné comme suit :

$$x_{k+1} = f[x_k^a] \equiv f[x_k, w_k] \tag{Eq.III-17}$$

L'algorithme descriptif du filtrage UKF dans ce cas est représenté dans le tableau III.2, [12].

Initialisation	<ul style="list-style-type: none"> - Initialiser le vecteur d'état augmenté et sa covariance : $\hat{x}_{0,0}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{0,0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{0,0}^a = \begin{bmatrix} P_{0,0} & 0 \\ 0 & Q_0 \end{bmatrix}$ <p>où $P_{0,0} = E[(x_{0,0} - \hat{x}_{0,0})(x_{0,0} - \hat{x}_{0,0})^T]$ et $Q_0 = E[w_0 w_0^T]$</p> - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(L + \lambda)P_{0,0}^a$ - Générer les points sigma : $(\chi_{0,0}^a)_0 = \bar{x}_{0,0}^a$ $(\chi_{0,0}^a)_i = \bar{x}_{0,0}^a + \left(\sqrt{(L + \lambda)P_{0,0}^a} \right)_i, \quad i = 1 \dots L$ $(\chi_{0,0}^a)_i = \bar{x}_{0,0}^a - \left(\sqrt{(L + \lambda)P_{0,0}^a} \right)_{i-L}, \quad i = L + 1 \dots 2L$ <p>et les poids de la moyenne et de la covariance par les équations (Eq.III-8) et (Eq.III-10) respectivement.</p>
Prediction	<ul style="list-style-type: none"> - Transformer les points sigma à travers le modèle de processus : $(\chi_{k,k-1})_i = f((\chi_{k-1,k-1}^a)_i), \quad i = 0 \dots 2L$ - Calculer la moyenne et la covariance à partir des points sigma transformés : $\hat{x}_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (\chi_{k,k-1})_i$

	$P_{k \ k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(\chi_{k \ k-1})_i - \hat{x}_{k \ k-1}] [(\chi_{k \ k-1})_i - \hat{x}_{k \ k-1}]^T$ <ul style="list-style-type: none"> - Composer le vecteur d'état augmenté et sa covariance : $\hat{x}_{k \ k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k \ k-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{k \ k-1}^a = \begin{bmatrix} P_{k \ k-1} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix}$ <ul style="list-style-type: none"> - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(I + \lambda)P_{k \ k-1}^a$ - Recalculer les points sigma $(\chi_{k \ k-1}^a)_i$ par l'équation (Eq.III-4).
Correction	<ul style="list-style-type: none"> - Transformer les points sigma à travers le modèle de mesure $(Z_{k \ k-1})_i = h((\chi_{k \ k-1})_i), \quad i = 0 \dots 2L$ - Calculer les mesures prédites à partir des points sigma transformés : $\hat{z}_{k \ k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (Z_{k \ k-1})_i$ <ul style="list-style-type: none"> - Calculer la covariance entre les états et les mesures : $P_{\hat{x}_k \hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(\chi_{k \ k-1})_i - \hat{x}_{k \ k-1}] [(Z_{k \ k-1})_i - \hat{z}_{k \ k-1}]^T$ <ul style="list-style-type: none"> - Calculer la covariance de la séquence d'innovation : $P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} [(Z_{k \ k-1})_i - \hat{z}_{k \ k-1}] [(Z_{k \ k-1})_i - \hat{z}_{k \ k-1}]^T + R_k$ <ul style="list-style-type: none"> - Les mises à jour des équations de correction sont écrites comme suit : $K_k = P_{\hat{x}_k \hat{z}_k} P_{\hat{z}_k \hat{z}_k}^{-1}$ $\hat{x}_{k \ k} = \hat{x}_{k \ k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k \ k-1})$ $P_{k \ k} = P_{k \ k-1} - K_k P_{\hat{z}_k \hat{z}_k} K_k^T$ <ul style="list-style-type: none"> - Composer le vecteur d'état augmenté et sa covariance : $\hat{x}_{k \ k}^a = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k \ k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{k \ k}^a = \begin{bmatrix} P_{k \ k} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix}$ <ul style="list-style-type: none"> - Appliquer la décomposition de Cholesky pour obtenir la racine carrée de la matrice $(I + \lambda)P_{k \ k}^a$ - Recalculer les points sigma $(\chi_{k \ k}^a)_i$ par l'équation (Eq.III-4).

Tableau III.2 : Filtrage UKF dans le cas de bruit non additif

III.3- UKF POUR LA FUSION INS/GPS

Comme pour l'EKF, nous présentons une description algorithmique de l'UKF omettant quelques considérations théoriques. La mécanisation INS est utilisée comme un modèle de base dans le système hybride INS/GPS. La fonction de mesures peut être directement utilisée dans l'étape de correction sans linéarisation.

III.3.1- Modèle d'erreur et mécanisation du système hybride INS/GPS

Similairement au concept de l'EKF du paragraphe II.4, le vecteur d'état augmenté inclut les erreurs de position, de vitesse, d'attitude, des accéléromètres et des gyroscopes. L'évolution de ces erreurs s'expriment par les équations (Eq.II-34), (Eq.II-35), (Eq.II-36) et (Eq.II-41).

Pour le modèle mécanique de l'équation (Eq.I-41), la compensation d'erreurs (Eq.I-44), la mise à jours de la position (Eq.I-49) et de la vitesse (Eq.I-48) se font de la même manière sans aucune modification. Concernant la mise à jour de l'attitude, cela se fait en terme de quaternion pour éviter les singularités.

Le quaternion est mis à jour comme suit :

$$q_k = q_{k-1} + \Omega_{nb}^h \cdot q_{k-1} \quad \text{Eq.III-18}$$

Finalement, la mise à jour du quaternion peut être normalisée comme suit :

$$q_k = (1 - e_q) q_k \quad \text{Eq.III-19}$$

où :

$$e_q = \frac{1}{2} [q_k^T \cdot q_k - 1]$$

Le modèle de processus du système se reporte à :

$$x_k = m_f [t_k, x_{k-1}, \tilde{f}^h(t_k), \tilde{\omega}_{nb}^h(t_k)] \quad \text{Eq.III-20}$$

III.3.2 Implémentation du filtre UKF pour la fusion INS/GPS

L'algorithme de l'UKF est appliqué de la manière suivante :

Initialisation

Soit δx dénote le vecteur augmenté par les erreurs de biais des capteurs :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta r^{LLa} & \delta v^n & \delta \rho^n & \delta b_a & \delta b_g \end{bmatrix}^T \quad \text{Eq.III-21}$$

où :

$$\delta r^{LLa} = \hat{r}^{LLa} - r^{LLa}, \quad \delta v^n = \hat{v}^n - v^n, \quad \delta \rho^n = \hat{\rho}^n - \rho^n, \quad \delta b_a = \hat{b}_a - b_a \quad \text{et} \quad \delta b_g = \hat{b}_g - b_g.$$

Le vecteur d'état augmenté et sa covariance peuvent être initialisés comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,0} = \hat{\mathbf{x}}_{0,0} \quad \text{et} \quad P_{0,0}^a = P_{0,0} \quad \text{Eq.III-22}$$

où :

$$P_{0,0}^a = E[\tilde{\mathbf{x}}_{0,0} \tilde{\mathbf{x}}_{0,0}^T] \quad \text{et} \quad Q_0 = E[w_0 w_0^T]$$

L'équation (Eq.III.4) est appliquée pour générer les points sigma, puis les équations (Eq.III-8) et (Eq.III-10) pour calculer les poids de la moyenne et de la covariance :

En posant $S_{0,0}^a$ la matrice racine carrée de $(L + \lambda)P_{0,0}^a$, les points sigma sont alors :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{0,i}^{LLa} \\ \mathcal{X}_{0,i}^n \\ \mathcal{X}_{0,i}^{\rho} \\ (\hat{b}_a)_{0,i} \\ (\hat{b}_g)_{0,i} \end{bmatrix} = \alpha S_{0,0}^a \quad \text{et} \quad (\chi_{0,0})_i = \begin{bmatrix} \hat{r}_{0,0}^{LLa} + \Delta r_{0,i}^{LLa} \\ \hat{v}_{0,0}^n + \Delta v_{0,i}^n \\ (q_\rho)_{0,i} \\ (\hat{b}_a)_{0,0} + \Delta (b_a)_{0,i} \\ (\hat{b}_g)_{0,0} + \Delta (b_g)_{0,i} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.III-23}$$

où q_ρ est le quaternion correspondant au vecteur rotation ρ .

Prediction

Dans l'étape de prédiction, chacun des points sigma est propagé à travers le temps par le modèle du système :

$$(\chi_{k,i})_i = m_f \left[t_k, (\chi_{k,k-1})_i, \tilde{f}^b(t_k), \tilde{\omega}_{ib}^b(t_k) \right] \quad \text{Eq.III-24}$$

Les équations (Eq.III-7) et (Eq.III-9) consistent à calculer la moyenne et la covariance prédites à partir des points sigma transformés :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (\chi_{k,k-1})_i \quad \text{Eq.III-25}$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(c)} [(\chi_{k|k-1})_i - \hat{x}_{k|k-1}] [(\chi_{k|k-1})_i - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q_{k-1} \quad \text{Eq.III-26}$$

Cependant, un traitement spécial est exigé pour la moyenne de l'attitude puisque elle n'appartient pas au vecteur d'état. Donc, ces dernières équations seront modifiées ici.

A moyenner le quaternion, cela est très compliqué. Par exemple, de moyenner directement les DCMs, les vecteurs du quaternion et de rotation ne donnent pas la même attitude. D'ailleurs, le résultat des quaternions directement moyennés n'est pas égal au quaternion. Des caractéristiques intrinsèques des rotations nécessitent d'être considérées en utilisant la géométrie Riemannienne. L'algorithme du gradient descendant intrinsèque, expliqué dans l'algorithme WMQ (Weighted Mean Quaternion) ci-dessous, s'utilise le fait qu'une algèbre de quaternion fournit une unique distance définie entre deux attitudes (Distance Riemannienne invariante). Donc, l'algorithme sera utilisé pour calculer un quaternion de poids moyen. Le nombre d'itérations exigé est usuellement petit.

Algorithme WMQ, [12] :

Soit donné des quaternions $q_i, i=0...2l$. Le quaternion de poids moyen \bar{q} , peut être calculé comme suit :

1. Choisir un des quaternions q_i comme le quaternion moyen initial \bar{q} .
2. Calculer la différence de l'attitude : $q_{\rho,i} = q_i * \bar{q}^{-1}$
3. Convertir $q_{\rho,i}$ au vecteur rotation correspondant $\delta\rho_i$
4. Calculer le poids moyen des vecteurs rotation : $\delta\bar{\rho} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(m)} \delta\rho_i$
5. Convertir $\delta\bar{\rho}$ au quaternion correspondant q_ρ
6. Mettre à jour le quaternion moyen : $\bar{q} := q_\rho * \bar{q}$
7. Répéter les étapes 2 à 6 jusqu'à ce que $\|\delta\bar{\rho}\|$ chute en dessous d'un seuil spécifié.

Maintenant, le calcul de la variance prédite sera considéré. Introduisant :

$$(\chi_{k|k-1})_i = \begin{bmatrix} (\hat{r}_{k|k-1}^{lla})_i \\ (\hat{v}_{k|k-1}^n)_i \\ (\hat{q}_{\rho,k|k-1})_i \\ (\hat{h}_{a,k|k-1})_i \\ (\hat{h}_{g,k|k-1})_i \end{bmatrix}, \quad \Delta(\chi_{k|k-1})_i = \begin{bmatrix} (\hat{r}_{k|k-1}^{lla})_i - \hat{r}_{k|k-1}^{lla} \\ (\hat{v}_{k|k-1}^n)_i - \hat{v}_{k|k-1}^n \\ (\delta\hat{\rho}_{k|k-1})_i \\ (\hat{h}_{a,k|k-1})_i - (\hat{h}_a)_{k|k-1} \\ (\hat{h}_{g,k|k-1})_i - (\hat{h}_g)_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.III-27}$$

où $(\delta\hat{\rho}_{k,k-1})_i$ est le vecteur rotation correspondant au quaternion $(\hat{q}_{\rho,k,k-1})_i$. Alors, l'équation (Eq.III-9) est aussi modifiée comme suit :

$$P_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(c)} [(\Delta\chi_{k,k-1})_i][(\Delta\chi_{k,k-1})_i]^T + Q_{k-1} \quad \text{Eq.III-28}$$

Une fois l'état et la covariance prédits sont calculés, les points sigma sont nécessaires d'être générés en commençant par la matrice racine carrée $S_{k,k-1}^a$ de $(l + \lambda)P_{k,k-1}^a$. Donc :

$$\begin{bmatrix} \Delta r_{k,i}^{lla} \\ \Delta v_{k,i}'' \\ \Delta \rho_{k,i}'' \\ \Lambda(h_a)_{k,i} \\ \Lambda(h_g)_{k,i} \end{bmatrix} = \alpha S_{k,k-1} \quad \text{et} \quad (\chi_{k,k-1})_i = \begin{bmatrix} \hat{r}_{k,k-1}^{lla} + \Delta r_{k,i}^{lla} \\ \hat{v}_{k,k-1}'' + \Delta v_{k,i}'' \\ (q_{\rho,k,k-1})_i \\ (\hat{h}_a)_{k,k-1} + \Delta(h_a)_{k,i} \\ (\hat{h}_g)_{k,k-1} + \Delta(h_g)_{k,i} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.III-29}$$

Correction

Durant l'étape de correction, les points sigma sont transformés à travers le modèle de mesure :

$$(Z_{k,k-1})_i = h((\chi_{k,k-1})_i) \quad \text{Eq.III-30}$$

Le vecteur de mesure prédit est calculé comme suit :

$$\hat{z}_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(m)} (Z_{k,k-1})_i \quad \text{Eq.III-31}$$

Alors, la matrice de covariance de la séquence d'innovation peut être calculée comme suit :

$$P_{z,\hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(c)} [(\Delta Z_{k,k-1})_i][(\Delta Z_{k,k-1})_i]^T + R_k \quad \text{Eq.III-32}$$

$$(\Delta Z_{k,k-1})_i = (Z_{k,k-1})_i - \hat{z}_{k,k-1} \quad \text{Eq.III-33}$$

La matrice de covariance entre les états et les mesures est calculée comme suit :

$$P_{x,\hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(c)} [(\Delta\chi_{k,k-1})_i][(\Delta Z_{k,k-1})_i]^T \quad \text{Eq.III-34}$$

Le gain est calculé par l'équation (Eq.III-13) et les états se mettent à jour comme suit :

$$\begin{bmatrix} \delta \hat{r}_k^{lla} \\ \delta \hat{v}_k^n \\ \delta \hat{\rho}_k^n \\ \delta \hat{h}_{a,k} \\ \delta \hat{h}_{g,k} \end{bmatrix} = K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad \text{et} \quad \hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{k|k-1}^{lla} + \delta \hat{r}_k^{lla} \\ \hat{v}_{k|k-1}^n + \delta \hat{v}_k^n \\ \hat{q}_{\rho,k} \\ (\hat{h}_a)_{k|k-1} + \delta \hat{h}_{a,k} \\ (\hat{h}_g)_{k|k-1} + \delta \hat{h}_{g,k} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.III-35}$$

où z_k est le vecteur de mesure.

La mise à jour de la covariance est la même que celle de l'équation (Eq.III-16).

Après la mise à jour de l'état et de la covariance, les points sigma sont nécessaires d'être régénérés.

En calculant la matrice racine carrée $S_{k|k}^u$ de la matrice $(I + \lambda)P_{k|k}^u$, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \Delta r_{k,i}^{lla} \\ \Delta v_{k,i}^n \\ \Delta \rho_{k,i}^n \\ \Delta (h_a)_{k,i} \\ \Delta (h_g)_{k,i} \end{bmatrix} = \alpha S_{k|k} \quad \text{et} \quad (\chi_{k|k})_i = \begin{bmatrix} \hat{r}_{k|k}^{lla} + \Delta r_{k,i}^{lla} \\ \hat{v}_{k|k}^n + \Delta v_{k,i}^n \\ (q_{\rho,k})_i \\ (\hat{h}_a)_{k|k} + \Delta (h_a)_{k,i} \\ (\hat{h}_g)_{k|k} + \Delta (h_g)_{k,i} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.III-36}$$

III.3.3 Mesure de position GPS

Soit donnée la fonction du vecteur de mesure par :

$$h[x] = \text{diag}([1 \quad 1 \quad 1]) [(r_{INS}^{lla} - r_{GPS}^{lla}) - C_b^n \ell_{GPS}^b] \quad \text{Eq.III-37}$$

où ℓ_{GPS}^b est le lever arm de l'antenne GPS dans le repère b.

Pour les points sigma transformés $(\mathfrak{R}_{k|k-1})_i$ par l'équation (Eq.III-37) au temps t_k , la séquence d'innovation peut être obtenue directement par la moyenne suivante :

$$s_k = z_k - \hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2l} W_i^{(m)} (Z_{k|k-1})_i \quad \text{Eq.III-38}$$

La différence entre les points sigma transformés et la mesure prédite peut se calculer par :

$$(\Delta Z_{k|k-1})_i = s_k - (\mathfrak{R}_{k|k-1})_i \quad \text{Eq.III-39}$$

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Après avoir détaillé les algorithmes nécessaires pour le positionnement par le système hybride INS/GPS dans les chapitres précédents, nous allons examiner dans ce chapitre les résultats obtenus par le traitement des données INS/GPS réelles. Deux programmes écrits sous Matlab sont réalisés : Le programme d'alignement par implémentation EKF et le programme d'alignement par implémentation UKF. La mécanisation d'INS est la base de ces deux programmes. Les différentes erreurs de l'état du système sont alors analysées et comparées.

IV.1- DESCRIPTION DES DONNEES

IV.1.1- Matériels et fichiers joints

Les mesures utilisées dans notre travail ont été collectées par les matériels suivants :

- GPS Trimble AG132 avec correction différentielle, fréquence ~ 10Hz
- Centrale inertielle Crossbow VG600, fréquence ~ 84 Hz

dont les fichiers joints disponibles sont les suivants :

- Fichier GPSTrimble_oLLAPosition.m : qui regroupe les mesures de la position en latitude, longitude et altitude d'après la configuration suivante :

Ts (timestamp)	Toi (time of issue)	Latitude WGS84 rad en	Longitude WGS84 rad en	Altitude WGS84 mètres en	clock biais	temps de correction selon l'UTC de base
----------------	---------------------	-----------------------	------------------------	--------------------------	-------------	---

- Fichier GPSTrimble_oDOPs.m : qui regroupe les mesures des différents DOPs.

Ts (timestamp)	Toi (time of issue)	PDOP	HDOP	VDOP	TDOP	--
----------------	---------------------	------	------	------	------	----

- Fichier Crossbow_VG_Family_oRotationRate.m : qui rassemble les mesures de la vitesse angulaire (rad/sec) exprimées dans le repère véhicule b .

Ts (timestamp)	Toi (time of issue)	Vitesse angulaire/roulis	Vitesse angulaire/tangage	Vitesse angulaire/lacet	Température
----------------	---------------------	--------------------------	---------------------------	-------------------------	-------------

- Fichier Crossbow VG Family oAngle.m : qui contient les mesures des angles de roulis et de tangage.

Ts (timestamp)	Toi (time of issue)	roulis	tangage	--	Température
----------------	---------------------	--------	---------	----	-------------

- Fichier Crossbow VG Family oAcceleration.m : qui contient les mesures de la force spécifique exprimée dans le repère véhicule *b*.

Ts (timestamp)	Toi (time of issue)	X	Y	Z	Température
----------------	---------------------	---	---	---	-------------

où,

Ts (timestamp) : temps MAPS d'acquisition physique des données, exprimé en microsecondes.

Toi (time of issue) : temps MAPS de mise à disposition des données pour les modules consommateurs, exprimé en microsecondes.

IV.1.2- Solution GPS

L'itinéraire d'acquisition des données est celui de la rue de « Gay-Lussac » numérisé le 27/07/2006. L'heure de départ : 10h 47 min 01 sec, avec une durée d'acquisition de 2 min 34 sec, 382 ms.



Fig.IV.1 : Rue Gay-lussac au 5ème arrondissement de Paris

Les données des fichiers GPS nous ont permis de tracer la trajectoire du véhicule, prise comme trajectoire de référence, et les différents DOP.

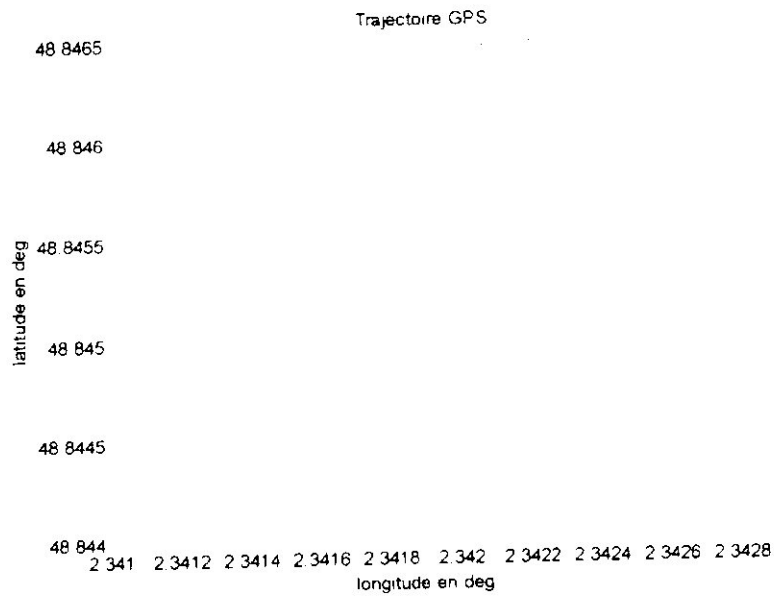


Fig.IV.2 : Trajectoire GPS

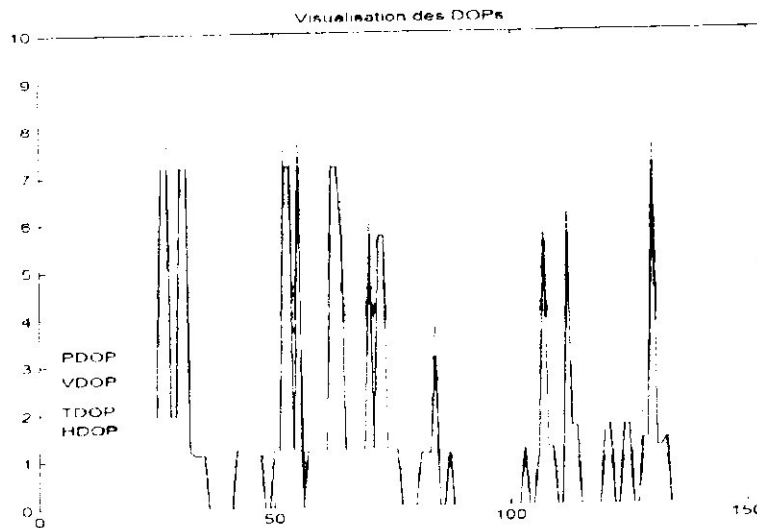


Fig.IV.3 : Les différents DOP

D'après la figure (Fig.IV.3), nous constatons que les données GPS sont parfois dégradées d'après les valeurs des DOP mesurées. Dès les premières 30 secondes, le PDOP a atteint une valeur supérieure à 6.

A cause de cette dégradation, les erreurs de la vitesse GPS des équations (Eq.II-53) sont parfois supérieures à 10m/sec quand les DOP deviennent grands.

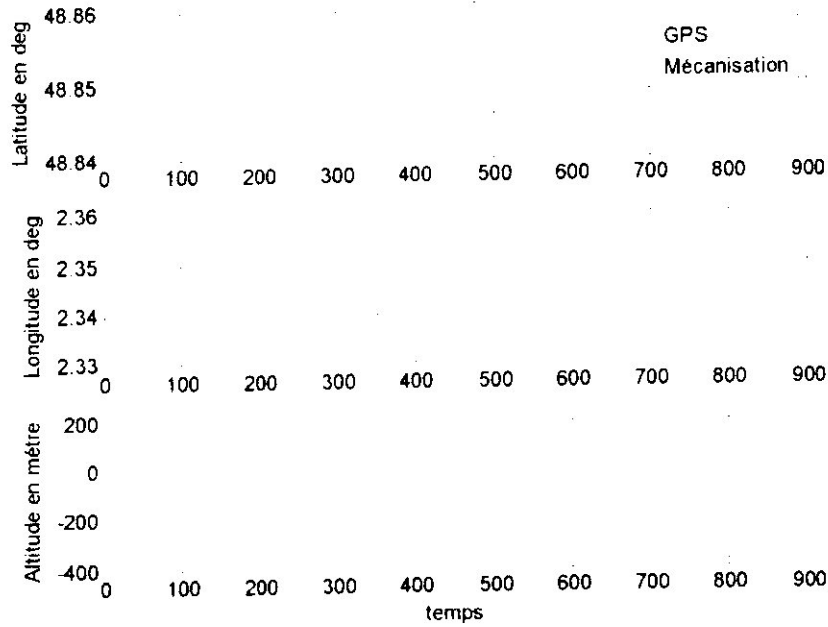


Fig.IV.5 : Comparaison des positions par GPS et mécanisation

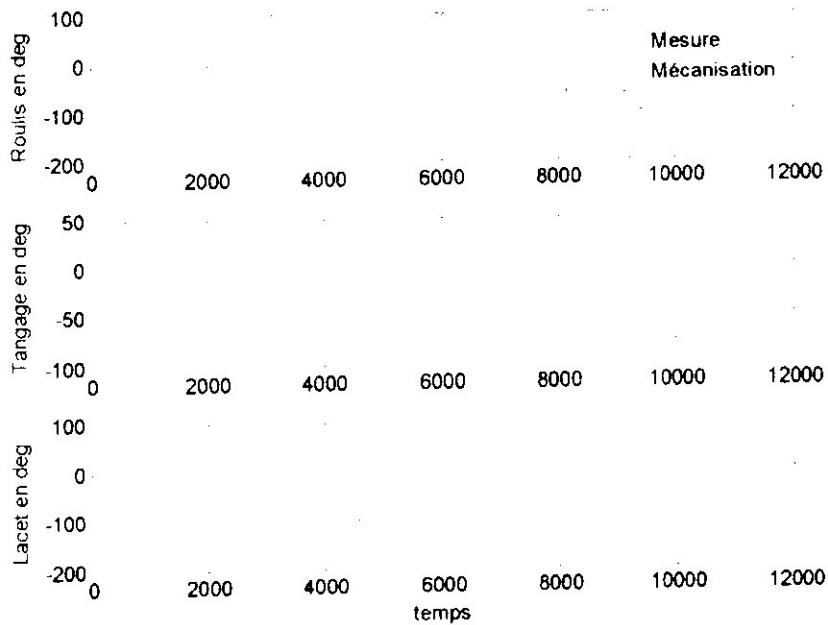


Fig.IV.6 : Variations des angles d'Euler

IV.2- ESTIMATION DES ERREURS PAR EKF ET UKF

Nous allons présenter dans cette partie les erreurs obtenues durant la phase d'alignement (Fine alignment) du lacet pour une configuration de couplage faible en boucle ouverte et en boucle fermée. Nous rappelons qu'une correction sera faite une fois qu'une observation GPS soit disponible. En absence de l'information GPS, les deux filtres resteront en boucle de prédiction.

IV.2.1- Erreurs en boucle ouverte

IV.2.1.1- VARIATION DE L'INNOVATION EN BOUCLE OUVERTE

L'innovation est la seule information pour détecter la nature de l'observation GPS. La figure (Fig.IV.7) montre que aux moments où les DOP ont dépassés leurs niveaux admissibles, l'innovation a atteint un niveau supérieur à $\pm 30\text{m/sec}$. Cela veut dire que l'observation GPS était trop dégradée. Une fois arrivée une observation, le vecteur d'innovation est devenu peu oscillatoire jusqu'à ce qu'il a convergé vers zéro.

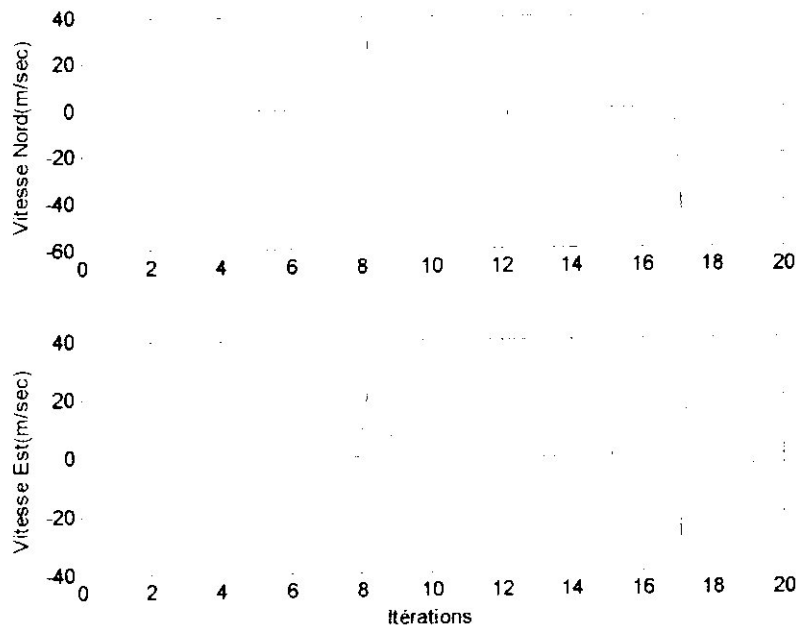


Fig.IV.7 : L'innovation en boucle ouverte

IV.2.1.2- ERREURS DE VITESSE EN BOUCLE OUVERTE

Les erreurs de la vitesse obtenues étaient dans la plupart du temps voisines de zéro sauf en cas d'absence ou de dégradation des mesures GPS. La figure (Fig.IV.8) montre bien que si l'observation est erronée, les deux filtres étaient présentés par des pics de niveaux élevés pour l'UKF relativement à l'EKF. A l'arrivée d'une nouvelle observation acceptable, le filtre UKF a convergé plus vite tandis que le filtre EKF a convergé lentement en oscillation.

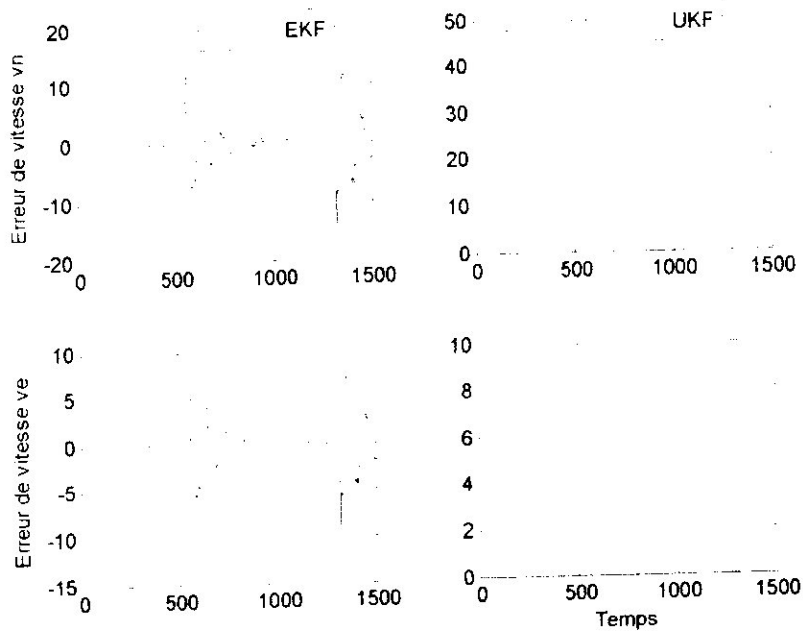


Fig.IV.8 : Erreurs de vitesse en boucle ouverte

IV.2.1.3- ERREURS D'ATTITUDE EN BOUCLE OUVERTE

La même chose pour les erreurs de l'attitude, les erreurs par EKF étaient oscillatoires lorsque les DOP ont augmenté, puis convergence vers zéro. Les erreurs du lacet ont atteint des niveaux supérieurs non seulement à cause de dégradation GPS mais aussi à cause des fortes dérives affectant les mesures inertielles.

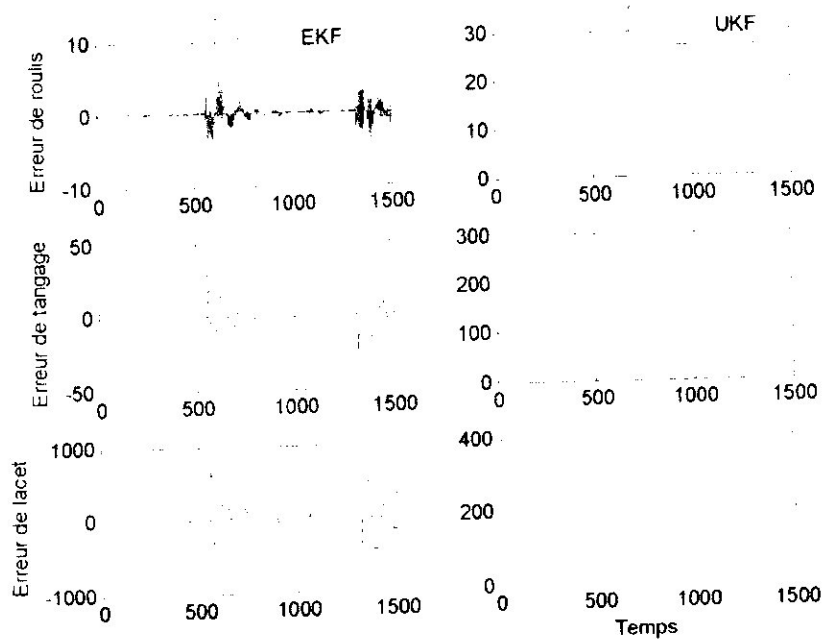


Fig.IV.9 : Erreurs d'attitude en boucle ouverte

IV.2.1.4- VARIATION DU RMS DE VITESSE EN BOUCLE OUVERTE

Le RMS est la racine carrée de la variance des erreurs de vitesse incluse dans la matrice de covariance du vecteur d'état. Les RMS de vitesse ont été initialisés par la valeur de 2m/sec.

Nous avons obtenu des RMS variés de 0,25 à 0,4m/sec pour le filtre EKF et de 0,15 à 0,25m/sec seulement pour le filtre UKF.

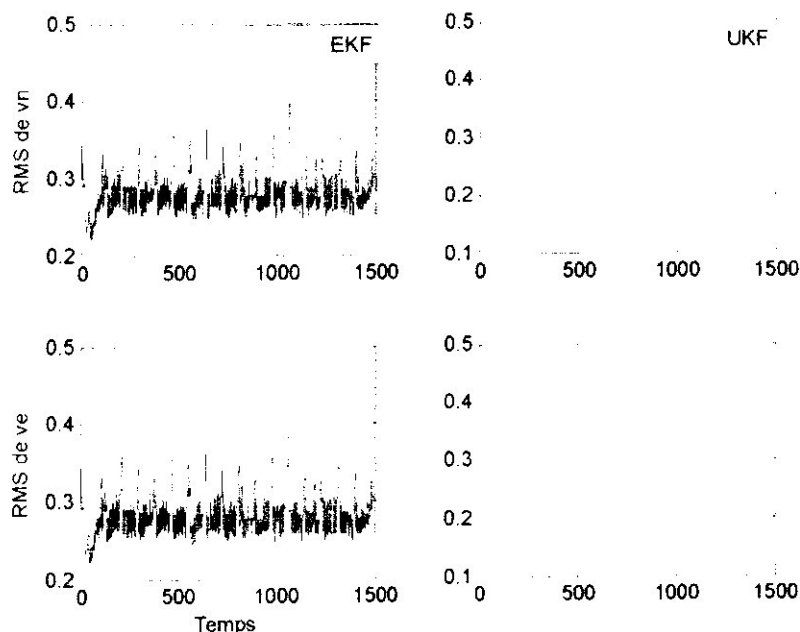


Fig.IV.10 : Variation du RMS de la vitesse en boucle ouverte

IV.2.2- Erreurs en boucle fermée

Après chaque phase de correction, les erreurs estimées par les deux filtres ont été soustraites des paramètres estimés pour obtenir les paramètres réels du système. Les résultats de cette compensation sont présentés dans les figures ci-dessous.

IV.2.2.1- VARIATION DE L'INNOVATION EN BOUCLE FERMEE

Comparer à l'innovation en boucle ouverte, les oscillations aux moments des dégradations GPS ont été disparu et ont été remplacées par des pics comme l'indique la figure (Fig.IV.11).

IV.2.2.2- ERREURS DE VITESSE EN BOUCLE FERMEE

De même, les oscillations après dégradations GPS ont été disparues mais toujours la convergence du filtre UKF était plus rapide que celle du filtre EKF et les erreurs sont minimisées par rapport au cas de la boucle ouverte, (Fig.IV.12).

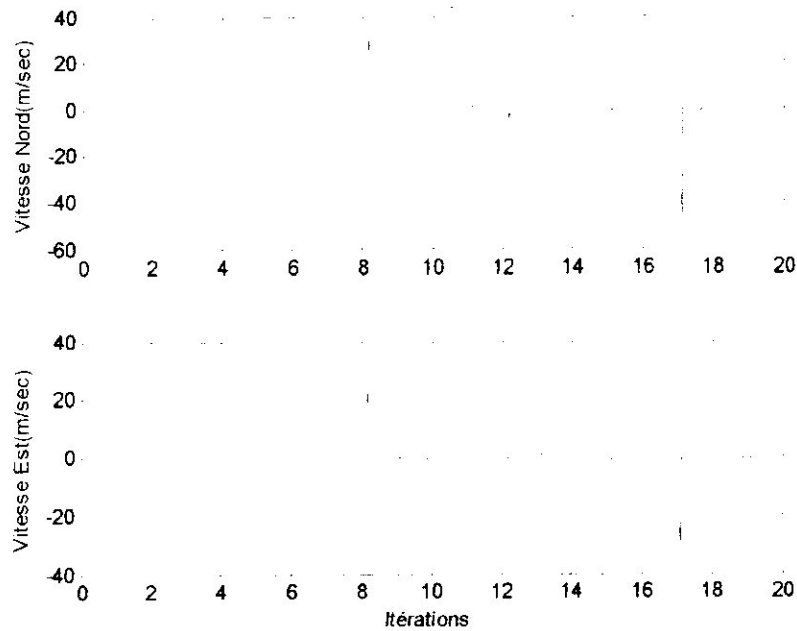


Fig.IV.11 : L'innovation en boucle fermée

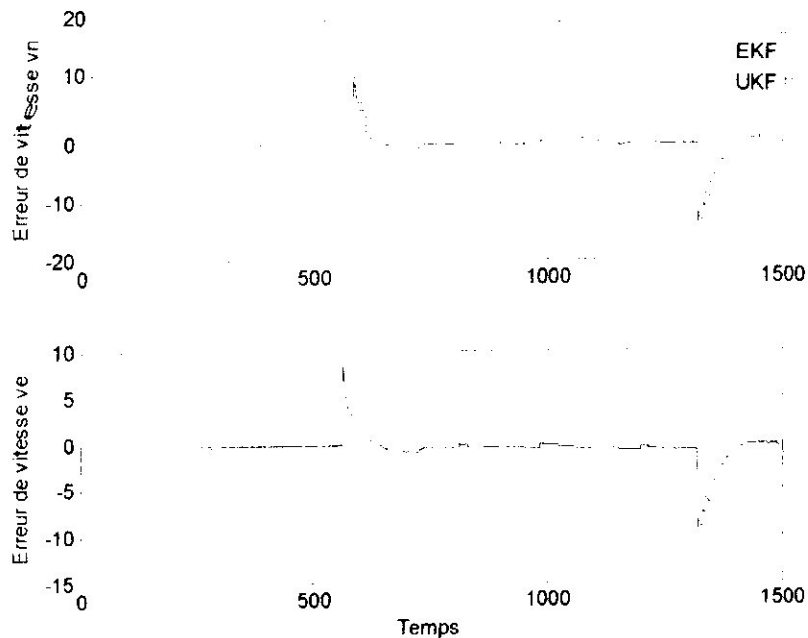


Fig.IV.12 : Erreurs de vitesse en boucle fermée

IV.2.2.3- ERREURS D'ATTITUDE EN BOUCLE FERMEE

L'avantage de ce couplage est que les erreurs d'attitude ont été aussi très minimisées par rapport au couplage précédent et le filtre UKF n'était pas influencé chaque fois qu'il y'avait une dégradation.

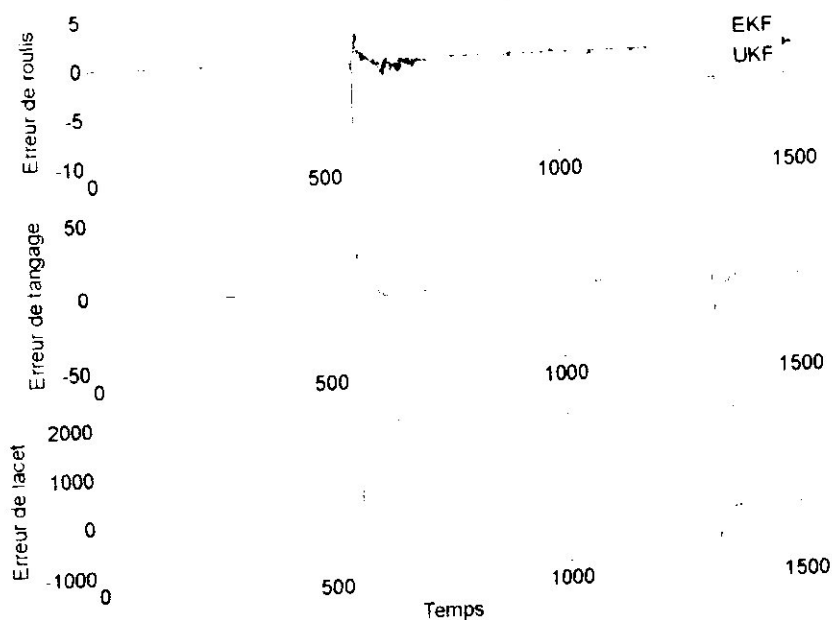


Fig.IV.13 : Erreurs d'attitude en boucle fermée

IV.2.2.4- VARIATION DU RMS DE VITESSE EN BOUCLE FERMEE

Les RMS ont varié maintenant au voisinage des valeurs 0,2m/sec (pour v_n) et 0,25m/sec (pour v_e). Alors, les deux filtres ont convergés vers des valeurs limites stables.

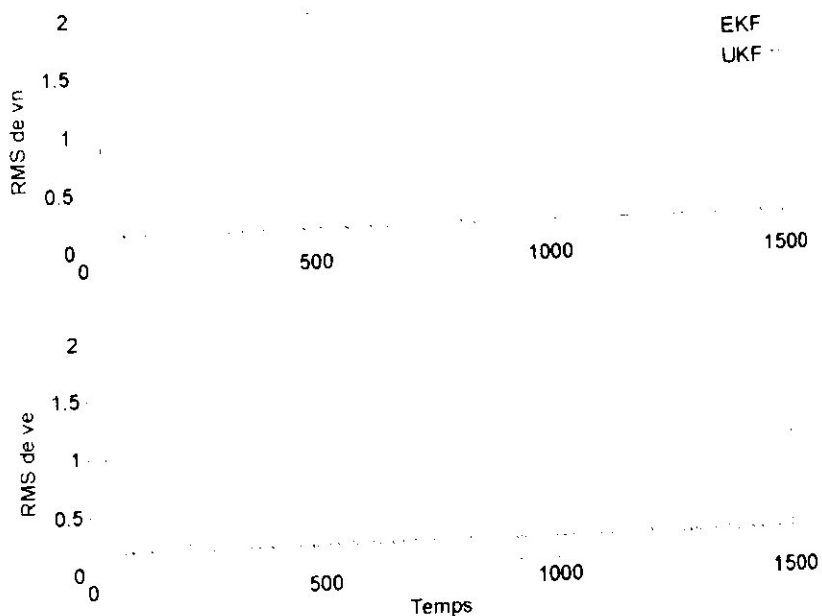


Fig.IV.14 : Variation du RMS de la vitesse en boucle fermée

IV.3- CONCLUSION

L'utilisation du système inertiel INS seul à basse précision est déconseillée pour faire positionner un mobile à cause de larges erreurs de mesures de ses capteurs qui augmentent les incertitudes d'attitude.

L'intégration de l'INS avec le système GPS par couplage faible, en boucle ouverte et en boucle fermée, basée sur les deux filtres EKF ET UKF a permis une précision remarquable pendant l'alignement de l'angle de lacet.

Lors d'une dégradation du système INS/GPS, à cause de l'absence du signal ou à cause de mauvaise géométrie de la constellation du GPS, le filtre UKF s'adapte mieux à cette dégradation. Les niveaux des erreurs étaient moins que ceux du filtre EKF. Une fois arrivée l'observation GPS de nouveau, le filtre UKF converge très rapidement que le filtre EKF.

Si les données INS et GPS étaient disponibles pendant plus de 10min au moins, les filtres réalisés de 10 variables d'état pouvaient normalement passer vers les filtres de positionnement de 15 ou 21 variables d'état.

Ce mémoire consiste à présenter un système de positionnement tridimensionnel temps réel basé sur la fusion INS/GPS. Ce système hybride permet de tirer profit des avantages de chaque capteur.

Les principes de fonctionnement, du traitement de l'information et de l'intégration des deux systèmes de navigation ont été expliqués. Le but de cette intégration est de chercher dans les spécifications d'un système utilisé ce qui peut compenser les défauts de l'autre système.

Nous avons constaté que le système INS est un système parfaitement autonome, de fréquence d'acquisition élevée, mais il est caractérisé par une certaine dérive des mesures qui augmente avec le temps. Contrairement au GPS, ce dernier possède une fréquence d'acquisition beaucoup moins élevée que celle de l'INS et ne fournit pas l'information d'attitude, mais il parvient à corriger les dérives inertielles.

L'avantage du système hybride INS/GPS est qu'il peut offrir une solution de navigation complète. La position, la vitesse et l'accélération peuvent être calculées avec une précision supérieure à celle des capteurs individuels avec une fréquence d'échantillonnage élevée. Aussi, l'information de l'attitude est fournie avec une bonne précision, comparée à celle fournie par une CI de moyenne ou basse précision, après avoir appliquées les corrections de GPS.

Le but de ce mémoire était d'aligner la CI de basse précision durant une période d'acquisition de 2min 34sec. La position et l'attitude se calculent après que l'alignement fin (Fine alignment) sera terminé, c-à-d après au moins 10min lorsque l'angle de lacet devient stable.

Différents algorithmes pour la fusion INS/GPS ont été développés pour tester et analyser les données sous Matlab. Un algorithme de mécanisation a été développé dans un repère local de navigation pour évaluer les données inertielles.

Les données INS et GPS ont été intégrées dans une approche faiblement couplée, en boucle ouverte et en boucle fermée, par utilisation des deux filtres EKF et UKF.

Les filtres EKF et UKF ont été bien mis en œuvre et de manière optimale avec une précision de positionnement presque similaire.

Pour un véhicule où les erreurs de lacet grandissent vite à cause de larges incertitudes existantes dans les sorties gyro, alors le filtre UKF est préféré. Cependant, quand des petites erreurs d'attitude parviennent, la précision de troisième ordre du filtre UKF devient négligeable.



CONFIDENTIAL

[1] BOTTON S., DUQUENNE F., EGELS Y., EVEN M., WILIIS P. (1997). "GPS : localisation et navigation". Edition Hermès, Paris, 1997.

[2] FARRELL J, and BARTH M. (1998). "The Global Positioning System & Inertial Navigation". McGraw- Hill, 1998.

[3] MAYBECK P.S. (1979). "Stochastic models, estimation and control". Vol. 1, Ch. 1, Academic Press, New York, 1979.

[4] MOHINDER S., GREWAL, L. WEILL, and ANDREWS A. (2001). "Global Positioning Systems, Inertial Navigation & Integration". Wiley & Sons, 2001.

[5] ROBERT G. Brown, PATRICK Y.C. Hwang (1997). "Introduction to Random Signals & Applied Kalman Filtering with MATLAB Exercises and Solutions". 3rd edition, John Wiley & Sons, November 1997.

Rapports et thèses

[6] ABUHADROUS I. (2005). "Système embarqué temps réel de localisation et de modélisation 3D par fusion multi-capteur". Thèse de doctorat de l'école des Mines de Paris.

[7] BRUTON A.M. (2000). "Improving the Accuracy and Resolution of SINS DGPS Airborne Gravimetry". UCGE Reports N° 20145. PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, Calgary, ALBERTA.

[8] GODHA S. (2006). "Performance Evaluation of Low-Cost MEMS-Based IMU Integration with GPS for land vehicle Navigation Application". UCGE Reports N° 20239. Master Thesis, Department of Geomatics Engineering, Calgary, ALBERTA.

[9] MOHAMED A. H. (1999) "Optimizing the Estimation Procedure in INS GPS Integration for Kinematic Applications". UCGE Reports Number 20127, Dept. of Geomatics Engineering, University of Calgary, Calgary, Canada, 1999.

[10] SCHLEPPE J.B. (1996). "Development of a Real Time Attitude System Using a Quaternion Parameterization and Non-Dedicated GPS Receivers". Dept. of Geomatics Engineering, Calgary, Alberta July, 1996.

[11] SHIN E.H. (2001). "Accuracy improvement of low cost INS GPS for land vehicle application", UCGE Reports N° 20156 of the Calgary University, Alberta, Master thesis, December 2001.

[12] SHIN E.H. (2005). "Techniques for Low-Cost Inertial Navigation". UCGE Reports N° 20219 of the Calgary University, Alberta, Doctorat thesis, May 2005.

[13] WAN E.A., and R. van der Merwe (2000). "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation". In Proceedings of Symposium 2000 on Adaptive Systems for Signal Processing, Communication and Control (AS-SPCC), IEEE Press, 2000.



1945



Pour mieux comprendre les équations de navigation inertielle, nous présentons dans cette annexe les systèmes de référence et de coordonnées utilisés et les transformations entre eux.

Les repères de référence

Le repère véhicule «b» (body)

Ce système est lié au véhicule (le référentiel propre au mobile) et on considère qu'il est le même que celui du capteur inertielle. Dans la pratique, ceci n'est pas normalement possible, et il faudrait alors introduire une transformation rigide (translation/rotation). L'origine de ce repère étant le centre de gravité de l'avion, l'axe x (roulis), axe-y (tangage) et axe z (lacet).

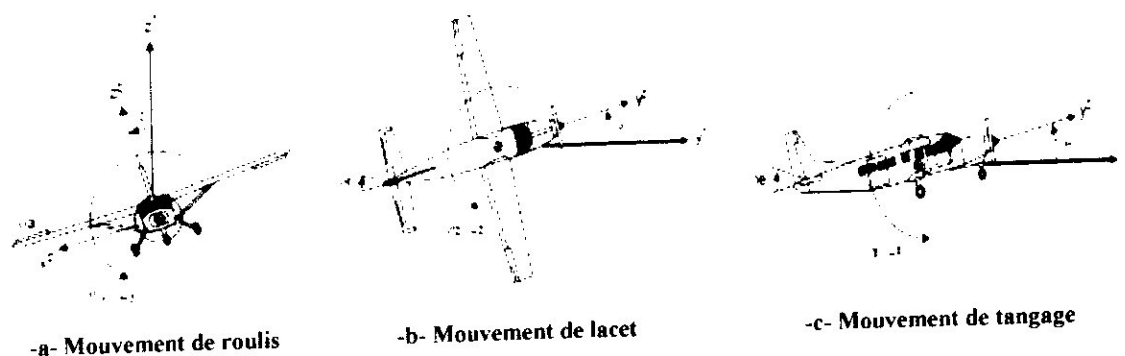


Fig.A.1 : Le repère avion

Le repère de navigation « n »

Il est défini dans le plan tangent local. Son origine se trouve toujours à la position actuelle du véhicule et son plan ($n-e$) est tangent à la surface de la terre, ou à l'ellipsoïde. Il existe deux conventions en navigation du système local :

NED : North, East, Down (vers le bas ou vers le vecteur de gravité),

ENU : East, North, Up (vers le haut),

Dans ce travail, le repère NED a été choisi.

Le repère inertielle « i »

C'est le repère dans lequel les lois de Newton sont applicables. Il ne suit pas la rotation de la terre et donc ne tourne pas par rapport aux étoiles. L'origine de ce repère est le centre de la Terre. Le système de coordonnées correspondant sera un système cartésien avec ses axes notés :

Axe X: vers le «Vernal Équinoxe» (étoile distante),

Axe Z: vers le pôle nord,

Axe Y: pour compléter le repère direct.

Attention: la CI fournit ses mesures (accélération et vitesse angulaire) par rapport à ce référentiel

Le repère terre «e» (ECEF-Earth Centered Earth Fixed)

Il suit la rotation de la terre et l'origine de ce repère est le centre de la terre, en conséquence ce repère coïncide avec le repère inertiel une fois par révolution complète de la terre sur elle même.

Axe X: vers le méridien de Greenwich (Longitude=0),

Axe Z: vers le pôle nord,

Axe Y: pour compléter le repère direct.

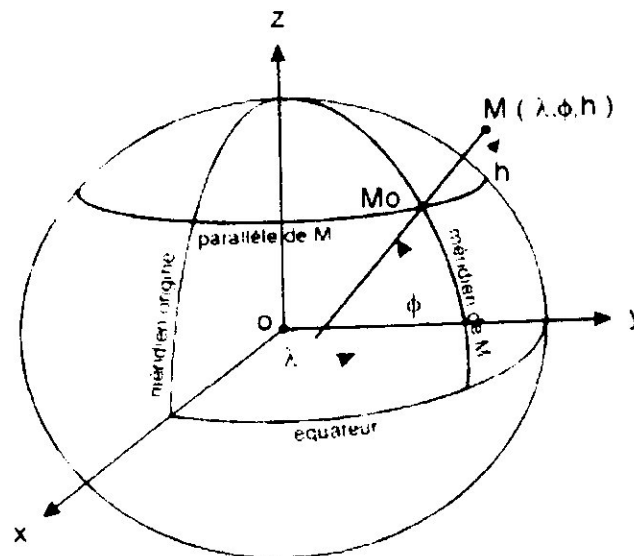


Fig.A.2 : ECEF, NED, et Coordonnées géodésiques

Le World Geodetic System: (WGS 84)

Comme ses initiales l'indiquent, le « WGS 84 » est un système de référence terrestre, mis au point par l'armée américaine en 1984, il est lui-même l'évolution du WGS72 utilisé précédemment. Ce modèle modélise la surface de la planète sous la forme d'un ellipsoïde, référencé comme IAG-GRS80.

Le WGS est un système tridimensionnel, les coordonnées géographiques expriment la position en termes de latitude, de longitude et de hauteur h. Celles-ci sont basées sur une référence d'ellipsoïde de révolution, qui est une approximation de la forme de la Terre.

La latitude φ : est l'angle entre le plan équatorial et la normale sur la surface de la Terre (l'ellipsoïde) au point en question, est égal à zéro à l'équateur et est compté positif pour l'hémisphère Nord, négatif pour l'hémisphère Sud.

La longitude λ : c'est l'angle entre le méridien de Greenwich et le méridien du point en question. Il est compté positive vers l'Est.

La hauteur h « hauteur ellipsoïdale - ne pas confondre avec l'altitude », est la différence en mètre entre le point considéré et l'ellipsoïde de référence mesurée selon la normale à l'ellipsoïde. Cette

valeur est définie dans un système géodésique et peut différer de l'altitude de plusieurs dizaines de mètres. Il faut remarquer que tous les systèmes de positionnement par satellites fournissent une hauteur ellipsoïdale et non une altitude.

L'altitude d'un point M d'une surface topographique est de manière très approchée la distance entre le point et la surface de référence appelée géoïde. (Le système des altitudes IGN69).

Demi grand-axe a	6378137.0 m
Demi petit-axe b	6356752.314 m
Inverse de l'aplatissement 1/f	298.257222101
Excentricité e	0.08181919106

Tableau A.1 : Propriétés de l'ellipsoïde IAG-GRS80

Transformations entre les systèmes de coordonnées

Transformation du référentiel (g) : Plan tangent (g)

Le référentiel géocentrique (g) est défini par les axes x, y, z qui sont respectivement dirigés vers le méridien de Greenwich, l'équateur et le pôle Nord. Le référentiel géodésique (g) est défini par les axes x, y, z qui sont respectivement dirigés vers le méridien de Greenwich, l'équateur et le pôle Nord.

Mathématiquement, cela revient à une transformation de coordonnées des axes du repère géocentrique (g) vers les axes du repère géodésique (g) . Cette transformation est définie par les angles d'Euler ϕ, θ, ψ qui sont respectivement les angles de roulis, de tangage et de lacet.

Sur des repères n standards, on définit les angles d'Euler pour ce repère :

La définition de la matrice de transformation du repère- n au repère- g est comme suit :

$$R_n^g = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi) \quad \text{Eq.A-1}$$

où R_x, R_y, R_z sont les matrices de rotation autour des axes x, y, z respectivement.

$P = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ sont les angles d'Euler (roulis(x), tangage(y), et lacet(z)) (en radian) qui sont calculés à partir des vitesses angulaires fournies par les gyroscopes par simple intégration de l'équation (Eq.I-30). La « Direction Cosinus Matrice » R_b^n est la matrice de passage inverse du repère b vers le repère n ; par conséquent :

$$R_c^c = (R_c^b)^{-1} = R_c(-\psi)R_c(-\theta)R_c(-\phi) = (R_c^b)^T \tag{Eq.A-2}$$

$$R_c^c = \begin{pmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{pmatrix} \tag{Eq.A-3}$$

$$R_c^c = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \tag{Eq.A-4}$$

Les notations *S* et *C* sont utilisées pour sinus et cosinus.

Les angles d'Euler, le cap (lacet), le tangage et le roulis de la matrice R_b^n se calculent à partir des éléments de la matrice DCM R_b^n simplement comme suit, [2] :

$$\begin{aligned} \psi &= \text{atan2}(c_{21}, c_{11}) \\ \theta &= -\tan^{-1}\left(\frac{c_{31}}{\sqrt{1-c_{31}^2}}\right) = -\sin^{-1}(c_{31}) \end{aligned} \tag{Eq.A-5}$$

$$\phi = \text{atan2}(\dots)$$

la représentation DCM

On peut calculer la matrice de rotation directement, les vitesses angulaires données par les gyroscopes ou déterminer la matrice de rotation avec l'axométrie différentielle.

ou S est une matrice antisymétrique (SKM) de base de rotation.

$$R_c^c = R_c^c \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{Eq.A-7}$$

où *p*, *q*, *r* sont les vitesses angulaires (en radian/sec) autour des axes *x(phi)*, *y(theta)*, *z(psi)* de la CI (horizontale) par les gyroscopes.

On peut calculer la matrice R_b^n par l'intégration :

$$R_c^c = \int R_c^c dt = \int R_c^c \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} dt \tag{Eq.A-8}$$

La forme discrète de la dernière équation est :

$$R_c^c(k-1) = R_c^c(k) - R_c^c(k) \Delta T \begin{bmatrix} 1 & -r & q \\ r & 1 & -p \\ -q & p & 1 \end{bmatrix} \Delta T \tag{Eq.A-9}$$

où $\Delta T = t_{k+1} - t_k$ est le temps d'échantillonnage.

Pour rendre la mise à jour de la matrice R_b^n plus précise, on peut utiliser l'expansion de Taylor. L'idée est de calculer la matrice du taux de rotation e^A en utilisant $\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ qui mène à l'équation (Eq.A-7).

$$e^A = I_{3,3} - \frac{\sin \sigma}{\sigma} \cdot A + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} \cdot A^2 \tag{Eq.A-10}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Delta T = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 0 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_z & \Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \tag{Eq.A-11}$$

$$e^A = I_{3,3} - \frac{\sin \sigma}{\sigma} \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Delta T + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}^2 \Delta T^2$$

Le terme $\frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2}$ peut être écrit :

$$\frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right)}{4 \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{\sigma}{2} \right)}{\frac{\sigma}{2}} \right)^2 \tag{Eq.A-12}$$

Les angles d'Euler peut être déterminés, pour la commande de positionnement, à partir de :

Calcul de R_b^n en utilisant les Quaternions :

Dans l'approche du Quaternion, la rotation d'un repère à un autre peut être accomplie par une rotation simple au sujet d'un vecteur q par un angle q . Les quaternions se composent de quatre paramètres qui sont une fonction de ce vecteur et cet angle. Le quaternion initial est obtenu à partir des angles d'Euler au moyen de la relation existante dans la représentation d'Euler au quaternion. Les paramètres de la matrice DCM R_b^n en utilisant l'équation suivant :

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4q_0} (c_{11} - c_{33}) \\ \frac{1}{4q_0} (c_{12} - c_{23}) \\ \frac{1}{4q_0} (c_{13} - c_{22}) \\ \frac{1}{2} \sqrt{1 - (c_{11} - c_{33}) - c_{22}} \end{bmatrix} \tag{Eq.A-14}$$

La dernière équation est utile pour initialiser les quaternions. Ensuite, la relation entre les quaternions et le taux de rotation « la vitesse angulaire fourni par la centrale » est donnée par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_x & -\omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & \omega_z & \omega_y \\ \omega_x & -\omega_z & 0 & \omega_y \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \underline{q} = A(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \underline{q} \quad \text{Eq.A-15}$$

$$\underline{q}_{t+\Delta t} = (I + A(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \Delta t) \underline{q}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \omega_x \Delta t & -\omega_y \Delta t & \omega_z \Delta t \\ -\omega_x \Delta t & I & \omega_z \Delta t & \omega_y \Delta t \\ \omega_x \Delta t & -\omega_z \Delta t & I & \omega_y \Delta t \\ -\omega_x \Delta t & -\omega_y \Delta t & -\omega_z \Delta t & I \end{pmatrix} \underline{q}_t \quad \text{Eq.A-16}$$

Et ensuite, la matrice DCM exprimée en termes de paramètres des quaternions est :

$$R^n = \begin{pmatrix} (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A-17}$$

qui est utile pour calculer l'accélération dans le repère local n .

La conversion des quaternions aux angles d'Euler « roulis, tangage et lacet » :

$$\begin{aligned} \theta &= \sin^{-1}(2(q_1 q_2 - q_0 q_3)) \\ \psi &= \tan^{-1} \left(\frac{q_1 - q_2}{q_3 - q_4} \right) ; -\tan^{-1} \left(\frac{q_1 - q_2}{q_3 - q_4} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{q_1 - q_2}{q_3 - q_4} \right) ; -\tan^{-1} \left(\frac{q_1 - q_2}{q_3 - q_4} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq.A-18}$$

Transformation ECEF(e), plan tangent (n) et inertielle (i):

La matrice de transformation (ou le DCM) entre le repère e et le repère n est exprimée par:

$$R_n^e = R_n^i(-\varphi - \pi/2) R_i^e(\lambda) = \begin{pmatrix} -s\varphi c\lambda & -s\varphi s\lambda & c\varphi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\varphi c\lambda & -c\varphi s\lambda & -s\varphi \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A-19}$$

et

$$R_i^e = (R_n^e)^T \quad \text{Eq.A-20}$$

φ est la latitude géodésique du système WGS-84 exprimée en radian.

Avant de se pencher sur le filtre de Kalman expliqué dans le chapitre II, il est nécessaire d'étudier les modèles d'erreur sur lesquels il est basé. Cette annexe présente une discussion abrégée des aspects de la théorie des signaux aléatoires qui sont exploités dans notre travail. Des sources de bruit dans le filtre de Kalman sont modélisées en tant que processus aléatoires. Le processus aléatoire peut être considéré comme une collection de fonctions de temps appelées un ensemble. D'habitude, la variation statistique de l'ensemble de fonctions à tout moment est connue.

Il est possible de définir et de comprendre le modèle de bruit du filtre de Kalman. Les bruits modélisés dans un filtre de Kalman doivent être :

- Gaussiens (ayant une distribution gaussienne)
- Centrés (non biaisés) (ayant une moyenne nulle)
- Blancs (contient toutes les fréquences)

Ce modèle est une idéalisation mathématique puisque le bruit blanc ne peut pas se produire dans la nature parce qu'il exige une énergie infinie. Les formules ci-dessous permettent d'exprimer ces processus de bruit blancs sous forme de variances et de covariances qui sont plus facile d'assimiler.

Les modèles stochastiques normalement utilisés par les concepteurs du filtre de Kalman pour décrire des variables aléatoires sont des modèles linéaires simples tels que : biais (constante) aléatoire, un bruit blanc, une marche aléatoire et un processus de Markov, ou un processus périodique. Ceux-ci sont habituellement distingués par leurs fonctions d'autocorrélation distinctes $R(\tau)$.

Bruit Blanc (« white noise »)

Le bruit blanc est défini comme un processus aléatoire stationnaire dont la fonction de densité spectrale de puissance (PSD) est constante, cela signifie que le bruit blanc est un processus aléatoire centré dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences et qu'il contient toutes les fréquences d'amplitudes égales. Si l'amplitude spectrale constante est A , alors la fonction d'autocorrélation correspondante est donnée par la transformée inverse de Fourier d'une constante, qui est le delta de Dirac $\delta(\tau)$ « La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est une impulsion de Dirac ». C'est à dire que la fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire gaussien blanc zéro centré $x(t)$ est :

	Filtre Formeur (Shaping Filter)	Auto-corrélation	DSP
Bruit Blanc $x(t) = w(t)$			
Constante (biais) Aléatoire $\dot{x}(t) = 0$			
Marche Aléatoire $x(t) = w(t)$			D.N.E
Gauss-Markov $\dot{x}(t) = w(t) - \frac{1}{T}x(t)$			

Tableau B.1 : Fonctions (filtres) d'Autocorrélations et densités spectrales de puissance typiques

$$R(\tau) = A\delta(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

Eq.B-1

La variance d'un processus d'un bruit blanc est égale à son amplitude spectrale. La valeur d'un signal de bruit blanc à un certain instant ne dit absolument rien au sujet de sa valeur à n'importe quelle autre instant.

Constante aléatoire (random bias (constant))

Une constante aléatoire satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = 0, y(0) = a$$

Eq.B-2

L'état initial a_0 est une variable aléatoire dont la distribution est présumée connue. L'équation de déférence aura la forme suivant :

$$y(t-1) = y(t) - a$$

Eq.B-3

Marche Aléatoire ("Winner process" ou "Brownian-motion process" ou "random walk")

Le processus de Winner est défini comme l'intégrale d'un bruit blanc gaussien avec un état initial égal à zéro (l'intégration d'un bruit blanc gaussien mène à un effet appelé marche aléatoire). Ainsi le modèle approprié d'état est sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$y = ku(t); y(0) = 0 \tag{Eq.B-4}$$

là où $u(t)$ est l'unité d'un bruit blanc gaussien et k est un facteur d'échelle.

L'équation de différence aura la forme :

$$y(t+1) = (I + kdt)y(t) \tag{Eq.B-5}$$

où dt est la fréquence d'échantillonnage.

Ainsi la variance de l'intégrale du bruit blanc croît linéairement avec le temps. En outre, l'écart type croît avec la racine carrée du temps.

Processus Aléatoire Gaussien

La distribution normale ou gaussienne est très populaire et sert souvent à modéliser les systèmes aléatoires, beaucoup de processus aléatoires se produisant dans la nature semblent naturellement être normalement distribués. On les appelle donc normalement distribués.

Les propriétés caractéristiques de la population gaussienne sont :

1. Le moment d'ordre n est nul si n est impair et est donné par l'équation (1) si n est pair.

2. La fonction de densité de probabilité est donnée par l'équation (2) où μ est la moyenne et σ est l'écart type.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \tag{Eq.B-6}$$

où σ et μ sont des constantes. Le paramètre μ est la moyenne de la population, et l'écart type est égale à σ . La loi normale (ou la loi de Gauss) de moyenne m et d'écart type σ sera représentée

mathématiquement par :

Processus aléatoire de Gauss-Markov (Markov process)

Un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ s'appelle un processus de Gauss-Markov si sa fonction d'autocorrélation est de la forme (Tableau B.1) :

$$R_{xx}(t) = \sigma^2 e^{-\beta|t|} \tag{Eq.B-7}$$

On remarque qu'elle est décrite par deux paramètres: son RMS σ et sa constante de temps $T = 1/\beta$. La fonction exponentielle d'autocorrélation indique que les valeurs d'échantillon du processus

devennent graduellement de moins en moins corrélées au fur et à mesure que le temps de variation $|\tau|$ entre les échantillons augmente.

Ce processus simple de Gauss-Markov, dont la fonction d'autocorrélation est exponentielle, est parfois mentionné comme processus de Gauss-Markov du premier ordre. C'est parce que la version discrète de temps du processus est décrite par l'équation suivante de premier ordre de la forme :

$$x(t) = e^{-\beta t} X(t_0) + W(t) \tag{Eq.B-8}$$

par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = -\beta x + w \tag{Eq.B-9}$$

où $W(t)$, w_j est une séquence non-corrélée de distribution gaussienne de moyenne nulle (bruit blanc).

Le processus de Markov de premier ordre est probablement le modèle stochastique le plus simple puisque le biais (constant) aléatoire et le bruit blanc sont tous les deux, dans un certain sens, des cas particuliers du processus de Markov. Nous déduisons qu'il y a une représentation générale du biais aléatoire et le bruit blanc, dépendant de la valeur de β .

$$e^{-\beta T} \approx \sigma^2 (1 - \beta T) \tag{Eq.B-10}$$

En équation (Eq.B-7), si $T = 1/\beta$ est très grand, ce processus de Markov se comportera essentiellement comme biais aléatoire (corrélé), et si $T = 1/\beta$ est très petit, elle se comportera comme un bruit blanc (non corrélé, mais forte corrélation à zéro !). L'équation (Eq.B-24) fournit un "modèle" idéal à utiliser en extrayant les paramètres du modèle d'erreur (σ et $T = 1/\beta$) à partir d'une fonction d'autocorrélation.

Maintenant en utilisant la définition donnée ci-dessus, nous pouvons obtenir "une fonction d'autocorrélation" du $x(t)$ mesuré (dans ce cas-ci, par exemple les erreurs systématiques (biais) de l'Eq. B-7). Alors, en associant la tracé de cette fonction d'autocorrélation R_{xx} au modèle de l'équation (Eq. B-7), les paramètres du modèle σ et $T = 1/\beta$ peuvent être facilement extraits comme suit. La valeur initiale est σ^2 :

$$\sigma^2 = R_{xx}(0) \quad \text{Eq.B-11}$$

et le point où R_{xx} baisse à $\sigma^2 e^{-\beta T}$ est $T = 1/\beta$:

$$R_{xx}(T) = \sigma^2 e^{-\beta T} \quad \text{Eq.B-12}$$

Stationnarité et Ergodicité

Stationnarité

Un processus aléatoire est dit stationnaire si les paramètres statistiques (moyenne et écart type) du processus ne changent pas avec le temps, (le système est supposé avoir des paramètres fixes).

Un processus faiblement stationnaire a une moyenne et une fonction d'auto-corrélation (donc une variance) constantes.

Un processus est véritablement stationnaire (ou fortement stationnaire) lorsque tous les moments sont constants (y compris la variance et la moyenne).

Ergodicité

Un processus aléatoire est *ergodique* si ses moments peuvent être obtenus comme des moyennes à partir d'une seule de ses réalisations (réalisation \equiv ensemble d'échantillons). De même, un signal aléatoire serait ergodique si la moyenne instantanée est équivalente à la moyenne d'ensemble. Dans le sens qualitatif, ceci implique qu'un échantillon de signal du processus contient toutes les variations statistiques possibles du processus.

Ainsi, aucune information additionnelle ne doit être gagnée en observant un ensemble de signaux témoin en plus de l'information obtenue à partir d'un seul échantillon.

On peut donc affirmer que pour qu'un processus soit ergodique, il doit nécessairement être stationnaire. L'inverse n'est pas vrai.

L'analyse de l'erreur utilise la différenciation pour linéariser les équations différentielles de notre système (Eq.I-41). L'expansion par série de Taylor utilisée pour la linéarisation d'une fonction $f(x)$ est évaluée autour d'un certain point nominal connu $of(x)$.

L'état (ou la trajectoire) réelle \hat{x}'' peut être écrit en termes de x'' et d'erreur $\delta x''$ comme suit :

$$\dot{\hat{x}}' = \dot{x}' + \delta \dot{x}' \quad \text{Eq.C-1}$$

Par exemple, les perturbations de la position, la vitesse, l'attitude, et de la gravité peuvent être exprimées comme :

$$\dot{r}' = \dot{r}' + \delta \dot{r}' \quad \text{Eq.C-2}$$

$$\dot{v}' = \dot{v}' + \delta \dot{v}' \quad \text{Eq.C-3}$$

$$\dot{R}' = (I - E') \dot{R}' \quad \text{Eq.C-4}$$

$$\dot{g}' = \dot{g}' + \delta \dot{g}' \quad \text{Eq.C-5}$$

où g'' signifie le vecteur normal de gravité sur l'ellipsoïde. Le $\hat{\cdot}$ et δ indiquent les valeurs d'état calculées et les erreurs, respectivement. E'' est la matrice antisymétrique représentant les erreurs d'orientation.

$$E' = S(\delta p') = (\varepsilon' \times) \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_3 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-6}$$

Modèles dynamiques de l'erreur inertielle (position, vitesse, attitude)

Le modèle dynamique de l'erreur en position

On peut obtenir le modèle dynamique linéarisé de l'erreur en position par la différenciation de l'équation (Eq.I-34). Puisque les équations dynamiques de la position sont des fonctions de la position et de la vitesse, les équations dynamiques d'erreur en position peuvent être obtenues en utilisant les dérivées partielles :

$$\delta \dot{r}' = F_{r'} \delta r' + F_{v'} \delta v' \quad \text{Eq.C-7}$$

$$F_{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} & \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} & \frac{\partial \sigma}{\partial h} & 0 & 0 & \frac{-v_e}{(r_e - h)} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial h} & \frac{v_e \sin \sigma}{(r_e - h) \cos \sigma} & 0 & \frac{-v_e}{(r_e - h) \cos \sigma} \\ \frac{\partial h}{\partial \sigma} & \frac{\partial h}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-8}$$

$$F_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial v_n} & \frac{\partial \sigma}{\partial v_e} & \frac{\partial \sigma}{\partial v_s} & \frac{1}{r_e - h} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v_n} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_e} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_s} & 0 & \frac{1}{(r_e - h) \cos \sigma} & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial v_n} & \frac{\partial h}{\partial v_e} & \frac{\partial h}{\partial v_s} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-9}$$

et r_M , r_T sont les rayons de courbure Méridional (nord - sud) et Transversal (est-ouest).

Le modèle dynamique de l'erreur en vitesse

En référence à l'équation (Eq.1-40), l'équation dynamique de la vitesse peut être exprimée comme :

$$\dot{v}^e = \mathfrak{R}(\dot{f}_e^e) - (2\omega_e^e + \dot{\omega}_e^e) \times v_{e,n}^e + \gamma^e \quad \text{Eq.C-10}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$\dot{v}^e + \delta v^e = (I - E^e) \mathfrak{R}(\dot{f}_e^e + \delta \dot{f}_e^e) - (2\omega_e^e + \omega_{e,n}^e + 2\delta \omega_e^e + \delta \omega_{e,n}^e) \times (v_{e,n}^e + \delta v_{e,n}^e) + \gamma^e + \delta \gamma^e \quad \text{Eq.C-11}$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}^e &= -(2\delta \omega_e^e + \delta \omega_{e,n}^e) \times (v_{e,n}^e) + \delta \gamma^e - (2\omega_e^e + \omega_{e,n}^e) \times (\delta v_{e,n}^e) - \varepsilon^e \times \dot{f}_e^e + \mathfrak{R}(\delta \dot{f}_e^e) \\ &= v_{e,n}^e \times (2\delta \omega_e^e + \delta \omega_{e,n}^e) + \delta \gamma^e - (2\omega_e^e + \omega_{e,n}^e) \times \delta v_{e,n}^e - \dot{f}_e^e \times \varepsilon^e + \mathfrak{R}(\delta \dot{f}_e^e) \end{aligned} \quad \text{Eq.C-12}$$

Les premier et deuxième termes peuvent être développés en fonction des erreurs de position et de vitesse. En retournant à l'équation (Eq.A-24), on trouve :

$$2\omega_e^e + \omega_{e,n}^e = \begin{pmatrix} 2\omega_e \cos \sigma - v_e / (r_e - h) \\ -v_e / (r_e - h) \\ -2\omega_e \sin \sigma - v_e \tan \sigma / (r_e - h) \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-13}$$

La perturbation de la dernière équation donne :

$$2\delta\omega'_x + \delta\omega'_y = \delta\Omega_x \delta r^r + \delta\Omega_y \delta v^r$$

où,

$$\delta\Omega_x = \begin{pmatrix} -2\omega_x \sin \phi & 0 & \frac{-v_x}{r_x - h} \\ 0 & 0 & \frac{v_y}{r_x - h} \\ -2\omega_x \cos \phi - \frac{v_x}{r_x - h \cos \phi} & 0 & \frac{v_x \tan \phi}{r_x - h} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-15}$$

Et,

$$\delta\Omega_y = \begin{pmatrix} 0 & 1(r_x - h) & 0 \\ -1(r_x - h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan \phi (r_x - h) & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'équation (Eq.C-14), le premier terme du côté droit de l'équation (Eq.C-12) peut être développé en fonction des erreurs de position et de vitesse :

$$v'_x + (2\delta\omega'_x + \delta\omega'_y) = (v'_x + \delta\Omega_x \delta r^r + \delta\Omega_y \delta v^r) = (v'_x + \delta\Omega_x \delta r^r) + \delta\Omega_y \delta v^r \quad \text{Eq.C-16}$$

En poursuivant la dérivation, nous obtenons :

$$\delta(v'_x + \delta\Omega_x \delta r^r) = \begin{pmatrix} -2\omega_x \cos \phi - \frac{v_x}{r_x - h \cos \phi} & 0 & \frac{-v_x}{r_x - h} - \frac{v_x \tan \phi}{r_x - h} \\ -\frac{v_x}{r_x - h} - \frac{v_x \tan \phi}{r_x - h} & 0 & \frac{-v_x}{r_x - h} - \frac{v_x \tan \phi}{r_x - h} \\ 2\omega_x \sin \phi & 0 & \frac{v_x}{r_x - h} - \frac{v_x}{r_x - h} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-17}$$

Et,

$$\delta(v'_x + \delta\Omega_y \delta v^r) = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{r_x - h} & \frac{-v_x \tan \phi}{r_x - h} & 0 \\ 0 & \frac{v_x}{r_x - h} - \frac{v_x \tan \phi}{r_x - h} & 0 \\ \frac{-v_x}{r_x - h} & \frac{v_x}{r_x - h} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.C-18}$$

Le vecteur de pesanteur dans le repère de navigation, g^n est approximé par le vecteur normal de pesanteur $(0 \ 0 \ \gamma)^T$, et γ change avec l'altitude. Supposons un modèle sphérique de la terre et le modèle simplifié suivant de la pesanteur :

$$\gamma = \left[\frac{R}{R-h} \right] \tag{Eq.C-19}$$

là où γ_0 est la pesanteur normale à $h = 0$, et $R = \sqrt{r_M r_I}$. Par la différenciation de la dernière équation, on obtient :

$$\delta \gamma = -2 \left[\frac{\gamma}{R-h} \right] \delta h \tag{Eq.C-20}$$

En utilisant les équations de (Eq.C.13) à (Eq.C.20), l'équation dynamique d'erreur dans la vitesse (Eq.C.12) peut être réécrite comme suit :

$$\delta \dot{v}^n = F_{v, \delta v}^n \delta v^n + F_{v, \delta \omega}^n \delta \omega^n + (f^{*n})^T \delta \epsilon^n + 3\Omega^n \delta f^n \tag{Eq.C-21}$$

où,

$$F_{v, \delta v}^n = \begin{bmatrix} -2\omega^n \cos \sigma - \frac{v_x}{r-h \cos \sigma} & 0 & \frac{-v_x v_y}{(r-h)^2} - \frac{v_x \tan \sigma}{r-h} \\ -2\omega^n \sin \sigma - \frac{v_y}{r-h \cos \sigma} & 0 & \frac{-v_x v_z}{(r-h)^2} - \frac{v_y \tan \sigma}{r-h} \\ -2\omega^n \sin \sigma & 0 & \frac{v_x}{r-h} - \frac{v_y}{r-h} - 2\omega^n (R-h) \end{bmatrix} \tag{Eq.C-22}$$

$$F_{v, \delta \omega}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_x}{r-h} & -2\omega^n \sin \sigma - 2 \frac{v_x \tan \sigma}{r-h} & \frac{v_x}{r-h} \\ -2\omega^n \sin \sigma - \frac{v_x \tan \sigma}{r-h} & \frac{v_x - v_y \tan \sigma}{r-h} & 2\omega^n \cos \sigma - \frac{v_x}{r-h} \\ -2 \frac{v_x}{r-h} & -2\omega^n \cos \sigma - 2 \frac{v_x}{r-h} & 0 \end{bmatrix} \tag{Eq.C-23}$$

Le modèle dynamique de l'erreur sur l'orientation

Le résultat calculé de la mécanisation sur l'orientation fournie par l'équation (Eq.I-41) peut être exprimé par :

$$\dot{R}^n = \dot{R}^n(S(\hat{\omega}_n)) = R^n(S(\hat{\omega}_n) - S(\hat{\omega}_n)) = \dot{R}^n(\hat{\Omega}^n, -\hat{\Omega}_n^n) \tag{Eq.C-24}$$

En comparant la dérivée de l'équation (Eq.C-4) à l'équation (Eq.C-24), ceci donne :

$$\begin{aligned}
 -E^*R^* &= (I - E^*)R^*(\Omega_c - \Omega_c^* - \delta\Omega_c - \delta\Omega_c^*) \\
 &= (I - E^*)R^*(\Omega_c - \Omega_c^*) - (I - E^*)R^*(\delta\Omega_c - \delta\Omega_c^*) \\
 &= (I - E^*)R^*(\Omega_c - \Omega_c^*) - (I - E^*)R^*(\delta\Omega_c - \delta\Omega_c^*)
 \end{aligned}
 \tag{Eq.C-25}$$

Par conséquent, l'équation ci-dessus peut être réduite à :

$$-E^*R^* = (I - E^*)R^*(\delta\Omega_c - \delta\Omega_c^*)
 \tag{Eq.C-26}$$

En rassemblant les termes du premier ordre, l'équation (Eq.C-25) peut être réduite à :

$$E^* = -R_c^*(\delta\Omega_c^* - \delta\Omega_c)R_c
 \tag{Eq.C-27}$$

ou sous la forme vectorielle :

$$\varepsilon^* = -R_c^*(\delta\omega_c^* - \delta\omega_c)
 \tag{Eq.C-28}$$

Pour obtenir l'équation d'erreur pour $\delta\omega_m^h$, commençons par $\hat{\omega}_m^h = R_n^h \hat{\omega}_m^n$, qui peut être développé à :

$$\omega_c^* - \delta\omega_c^* = R_c^*(I - E^*)(\omega_c^* - \delta\omega_c^*)
 \tag{Eq.C-29}$$

En écrivant les termes de premières ordre,

$$\delta\omega_c^* = R_c^*(\delta\omega_c^* - E^*\omega_c^*) = R_c^*[\delta\omega_c^* - (\varepsilon^* \times)\omega_c^*]
 \tag{Eq.C-30}$$

En utilisant les équations (Eq.C-29) et (Eq.C-27) :

$$\varepsilon^* = \delta\omega_c^* - (\varepsilon^* \times)\omega_c^* - R_c^*(\delta\omega_c^*) = \delta\omega_c^* - (\omega_c^* \times)\varepsilon^* - R_c^*(\delta\omega_c^*)
 \tag{Eq.C-31}$$

En remplaçant le premier terme du côté droit par les termes d'erreur de position et de vitesse explicitement, et en retournant aux équations (Eq.A-27) et (Eq.C-14), les équations dynamiques d'erreur sur l'orientation peuvent être réécrites comme :

$$\dot{\varepsilon}^* = F_{\varepsilon^*} \delta r - F_{\dot{\varepsilon}^*} \delta v^* - \omega_c^* \varepsilon^* - \mathcal{R}_c^* \delta\omega_c^*
 \tag{Eq.C-32}$$

où,

$$F_{\omega} = \begin{bmatrix} -\varphi \sin \varphi & 0 & \frac{-v_r}{(r_r + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_{\omega}}{(r_{\omega} + h)^2} \\ -\varphi \cos \varphi - \frac{v_r}{(r_r - h) \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{v_r \tan \varphi}{(r_r + h)^2} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.C-33}$$

$$F_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_r + h} & 0 \\ \frac{-1}{r_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tan \varphi}{r_r + h} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.C-34}$$