

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BLIDA 1



INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du Master en Aéronautique

Option : Structures Aéronautiques

THEME :

*Etude de la vibration libre d'une plaque composite semi-épaisse à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone.*

➤ Présenté par :

- Abdelmadjid BOUHAFS

➤ Encadré par :

- Dr Amale MAHI (MC Université Blida 1)

BLIDA LE 10/2017

## ***RESUME***

Dans ce mémoire de fin d'étude, nous avons étudié les vibrations libres de la plaque rectangulaire à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNTRC) en utilisant une approche analytique. Les plaques rectangulaires sont renforcées par des nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT) qui sont supposés être distribués dans le sens de l'épaisseur avec quatre types de distributions. Le modèle mathématique de la plaque FG-CNTRC est développé sur la base de la théorie de déformation en cisaillement de la plaque du premier ordre (FSDT) et en vertu du principe de Hamilton. Dans le cas de la condition aux limites simplement appuyée sur les quatre côtés de la plaque, et en appliquant la méthode de Navier sur les équations différentielles couplées du mouvement, le problème est résolu pour donner les paramètres de fréquences naturelles.

Une comparaison des résultats avec ceux de la littérature existante est faite, validant ainsi le programme numérique élaboré. De plus, les effets de différents paramètres sur les propriétés mécaniques et sur la réponse de la vibration libre et la fréquence naturelle adimensionnelle de la plaque à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes de carbone (FG-CNTRC) sont mis en évidence en résolvant de nombreux exemples de plaques.

**Mots-clés** : nanotube de carbone ; Vibration libre ; FG-CNTRC ; SWCNT ; FSDT ; principe de Hamilton ; Solution de Navier.

## ***ABSTRACT***

In this end-of-study memory, we studied the free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) rectangular plate using an analytical approach. The rectangular plates are reinforced by single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) which are assumed to be graded through the thickness direction with four types of distributions. The mathematical model of the FG-CNTRC plate is developed based on the first-order shear deformation plate theory (FSDT) and Hamilton principle. In the case of simply supported boundary condition, by applying Navier solutions on the governing coupled differential equations of motion, the problem can be solved to give the natural frequency parameters.

To validate the elaborated numerical program, our results were compared with those of literature. Furthermore, effects of different parameters on mechanical properties and on the free vibration response and natural frequencies of functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) plate are highlighted by solving several numerous examples.

***Keywords:*** Carbon nanotube; Free vibration; FG-CNTRC; SWCNT; FSDT; Hamilton principle; Navier solution.

## ملخص

في هذه المذكرة الخاصة بالتخرج، قمنا بدراسة الاهتزازات الحرة للصفائح المستطيلة ذات التدرج الوظيفي والمدعمة بألياف الكربون (FG-CNTRC) باستعمال نهج تحليلي. تلك الصفائح المستطيلة مدعمة بألياف من الكربون احادي الجدار (SWCNT) والمفترض تصنيفها حسب منحى الارتفاع ضمن أربع انواع من التوزيعات. النموذج الرياضي لصفحة FG-CNTR مطور على اساس نظرية تشوه الصفائح من الدرجة الاولى FSDT ومبدأ Hamilton. في حالة الشرط الحدودي المدعم ببساطة، من خلال تطبيق حل Navier على المعادلات التفاضلية المقترنة للحركة، يتم حل الإشكالية لإعطاء العامل المتغير للتردد الطبيعي.

يتم مقارنة النتائج مع تلك المذكورة في المرجع، وبالتالي التحقق من صحة المنهاج المعد. أيضاً، للتحقق من تأثير مختلف العوامل المتغيرة على الاهتزاز الحر والتردد الطبيعي الخاص بالصفحة ذات التدرج الوظيفي والمدعمة بألياف الكربون FG-CNTRC ليتم تسليط الاضواء عليها لحل عدة انواع من الامثلة.

الكلمات المفتاحية: الياف الكربون؛ الاهتزاز الحر؛ FG-CNTRC؛ SWCNT؛ FSDT؛ مبدأ Hamilton؛ المنهج التحليلي Navier.

## *Dédicaces*

*À mes chers parents et à toute ma famille,*

*À tous mes amis et camarades,*

*À tous les étudiants de la promotion 2016/2017,*

*À tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer ....*

*Abdelmadjid*

## **Remerciements**

*Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Dr. MAHI AMALE**, pour sa patience, sa confiance et surtout pour ses remarques et ses conseils. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude. Qui a très volontiers accepté d'être le promoteur de ce projet de fin d'étude master 2. Sa grande connaissance dans le domaine, ainsi que son expérience ont joué un rôle important dans la conception de ce travail.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement ma famille et mes amis proches.*

***Mon père** qui a toujours su être là dans tous les moments, les bons comme les difficiles ; son soutien et sa générosité constante ont été fondamentaux, sa droiture et sa conduite ont toujours été un modèle pour moi.*

***Ma mère** qui a toujours su m'écouter ; sa douceur, sa tendresse et sa volonté ont toujours mérité mon plus profond respect.*

*Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel et les enseignants de l'institut d'aéronautique et des études spatiales (spécialité structure d'avion) au niveau d'université SAAD DAHLAB DE BLIDA.*

*Merci à vous tous*

## **TABLE DES MATIERES**

**RESUME.**

**DEDICACES & REMERCIMENT.**

**TABLE DES MATIERES.**

**LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS.**

**LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.**

**INTRODUCTION GENERALE.....1**

**CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.....4**

**1.1. Introduction :.....5**

**1.2. Définition :.....5**

**1.3. Les différentes types des matériaux composites :.....6**

**1.3.1. Composites à matrice organique (CMO) :.....6**

**1.3.2. Composites à matrice céramique (CMC) :.....7**

**1.3.3. Composites à matrice métallique (CMM) :.....10**

**1.4. Les constituants des matériaux composites :.....11**

**1.4.1. Matrices :.....11**

**1.4.1.1. Résines thermodurcissables :.....11**

**1.4.1.2. Résines thermoplastiques :.....12**

**1.4.2. Renforts :.....13**

**1.4.2.1. Fibres de verre :.....14**

**1.4.2.2. Fibres de carbone :.....14**

**1.4.2.3. Fibres aramides :.....14**

**1.4.2.4. Fibres céramiques :.....15**

**1.4.2.5. Caractéristiques mécaniques des fibres :.....15**

**1.4.3. Charges et additifs :.....16**

**1.5. Structures composites :.....17**

**1.5.1. Structures composites stratifiées :.....17**

**1.5.1.1. Désignation des structures stratifiées :.....18**

**1.5.1.2. Désignation des structures sandwiches :.....19**

**1.5.2. Structures composites tissées multidirectionnelles :.....20**

**1.6. Conclusion :.....23**

<b>CHAPITRE 2 : LES MATERIAUX FGM ET LES NANO TUBES DE CARBONES (NTC).</b>	24
<b>2.1. Introduction :</b>	25
<b>2.2. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :</b>	25
<u>2.2.1 Types de matériaux fonctionnellement gradués :</u>	25
<u>2.2.1.1 Composition chimique du FGM :</u>	26
<u>2.2.1.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité :</u>	27
<u>2.2.1.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure :</u>	28
<u>2.2.2. Techniques de traitements des matériaux FGM :</u>	31
<u>2.2.3. Domaines d'application du FGM :</u>	33
<u>2.2.4. Avantages des FGM :</u>	34
<u>2.2.5. Difficultés du FGM :</u>	35
<b>2.3. Les nanotubes de carbone NTC :</b>	35
<u>2.3.1. Histoire des nanotubes de carbone :</u>	35
<u>2.3.2. Morphologie NTC :</u>	36
<u>2.3.3. Structure nanotube de carbone :</u>	37
<u>2.3.4. Chiralité es nanotubes de carbone :</u>	38
<u>2.3.5. Synthèses des NTC :</u>	38
<u>2.3.5.1. Mécanisme de croissance :</u>	39
<u>2.3.5.2. Décharge d'arc :</u>	39
<u>2.3.5.3. Ablation au laser :</u>	40
<u>2.3.5.4. Dépôt chimique en phase vapeur :</u>	41
<u>2.3.6. Propriétés des NTC :</u>	41
<u>2.3.6.1. Réactivité chimique :</u>	41
<u>2.3.6.2. Conductivité électrique :</u>	42
<u>2.3.6.3. Activité optique :</u>	42
<u>2.3.6.4. Force mécanique :</u>	42
<u>2.3.7. Limitations des NTC :</u>	43
<b>2.4. FGM renforcé par les nanotubes de carbone (FG-CNTRC) :</b>	43
<u>2.4.1. Définition :</u>	43
<u>2.4.2. Applications des FGM renforcées par les NTC :</u>	43



2.5. Conclusion :	45
<b>CHAPITRE 3 : MODELISATION, THEORIES DE DEFORMATIONS ET FORMULATION ENERGITIQUE DES PLAQUES FG-CNTRC.</b>	46
3.1. Introduction :	46
3.2. Modélisation d'une plaque FG-CNTRC :	46
3.3. Vue d'ensemble des théories de la plaque FGM :	49
<u>3.3.1. Classification des théories structurelles :</u>	49
<u>3.3.2. Théorie classique des plaques minces (CPT) :</u>	52
<u>3.3.3. La théorie des plaques du premier ordre :</u>	54
<u>3.3.3.1 Déplacements et déformations :</u>	54
<u>3.3.3.2. Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM :</u>	57
<u>3.3.3.3. Modélisation des charges externes :</u>	61
3.4. Formulation énergétique des plaques composite renforcée par des nanotubes en carbone :	62
<u>3.4.1. Energie de déformation :</u>	62
<u>3.4.2. Energie cinétique :</u>	62
<u>3.4.3. Travail des charges externes :</u>	62
<u>3.4.4. Formulation variationnelle :</u>	63
<u>3.4.4.1. Variation de l'énergie de déformation :</u>	63
<u>3.4.4.2. La variation du travail :</u>	63
<u>3.4.4.3. Variation de l'énergie cinétique :</u>	64
<u>3.4.5. Application du principe d'Hamilton :</u>	64
<u>3.4.5.1. Equations de mouvement :</u>	64
<u>3.4.5.2. Équations de mouvement en termes de déplacements :</u>	65
<u>3.4.6. Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :</u>	67
<u>3.4.7. Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :</u>	67
3.5. Conclusion :	67

<b>CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.</b> .....	68
<b>4.1. Introduction :</b> .....	69
<b>4.2. Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées :</b> .....	69
<b><u>4.2.1. Les équations de mouvement :</u></b> .....	69
<b><u>4.2.2. Conditions aux limites et solution Navier :</u></b> .....	70
<b><u>4.2.3 Solution analytique :</u></b> .....	71
<b>4.3. Analyse des vibrations libres :</b> .....	72
<b>4.4. Résolution numérique du problème aux valeurs propres :</b> .....	73
<b><u>4.4.1 Modélisation numérique d'une plaque composite à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone mono-paroi :</u></b> .....	73
<b><u>4.4.2 Graphes de variation des propriétés de la plaque :</u></b> .....	74
<b><u>4.4.3 Calcul des inerties et des rigidités du système vibratoire libre :</u></b> .....	78
<b><u>4.4.4. Comparaison des résultats :</u></b> .....	82
<b><u>4.4.5. Etude paramétrique :</u></b> .....	84
<b>4.5. Organigramme des principales étapes du programme :</b> .....	89
<b>4.5. Conclusion :</b> .....	91
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	92
<b>REFERENCE</b> .....	94

## **LISTE DES SYMBOLES**

$E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}$  : Modules de Young.

$G_{12}^{CNT}$  : Module de cisaillement.

$E_m, G_m$  : Module de Young et le module de cisaillement de la matrice polymère.

$\eta_1, \eta_2$  et  $\eta_3$  : Paramètres d'efficacité de NTC.

$V_{CNT}, V_m$  : Fraction volumique des NTC et de la matrice.

$\nu_{12}^{CNT}, \rho_{CNT}$  : Coefficient de Poisson et la masse volumique de NTC.

$\nu_m, \rho_m$  : Coefficient de Poisson et la masse volumique de la matrice.

$W_{CNT}$  : Fraction massique des nanotubes.

$\varphi_i$  :  $i$ ème composante du déplacement ou de la contrainte.

$z$  : Coordonnée suivant l'épaisseur.

$t$  : Coordonnée du temps.

$\Omega_0$  : Plan médian non déformé de la plaque.

$R_{ij}^{(m)}$  : Résistances moyennes exprimées par unité d'épaisseur.

$u_0, v_0, w_0$  : Composants de déplacement le long des directions de coordonnées  $(x, y, z)$ .

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : Rotations autour des axes  $x$  et  $y$ .

$\frac{h}{a}, \frac{h}{b}$  : Epaisseurs relatives.

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$  : Déplacements et rotations généralisés.

$\beta_x, \beta_y$  : Rotations autour des axes  $x$  et  $y$ .

$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  : Déformations transversales.

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$  : Déformations normales suivant  $x$  et  $y$ .

$\gamma_{xy}$  : Déformations dans le plan  $(x, y)$ .

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  : Contraintes normales suivant  $x$  et  $y$ .

$\sigma_{xy}$  : Contraintes de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ .

$N_x, N_y, N_{xy}$  : Résultantes en membrane (normales et cisaillement).

$M_{xx}, M_{yy}$  : Moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ .

$M_{xy}$  : Moment de torsion.

$Q_x, Q_y$  : Forces transversales résultantes.

$K_s$  : Coefficient de correction de cisaillement.

$U$  : Energie de déformation (énergie potentielle).

$K$  : Energie cinétique.

$V$  : Travail des charges externes.

$V_q$  : Travail fait par q.

$V_p$  : Travail effectué par les forces externes.

$\lambda_1, \lambda_2$  : Paramètres de flambage.

$P_x, P_y, P_{xy}$  : Forces de compression.

$\delta U$  : Energie de déformation (énergie potentielle) virtuelle.

$\delta K$  : Energie cinétique virtuelle.

$\delta V$  : Travail des charges externes virtuelle.

$E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}, I_{mn}$  : Paramètres arbitraires.

$\omega$  : Fréquence naturelle de vibration.

$\bar{\omega}$  : Fréquence naturelle adimensionnelle.

$q(x, y, t)$  : Charge mécanique.

$Q_{mn}$  : La coefficients de la charge uniformément répartie.

$q_0$  : Intensité de la charge appliquée à la plaque.

$[M], [k]$  : Matrices globales de masse et de rigidité de la plaque.

$V_{CNT}^*$  : Fraction volumique des NTC.

$E_{11}, E_{22}$  : Modules de Young.

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  : Module de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{21}$  : Coefficients de Poisson.

$I_1, I_2, I_3$  : Moments d'inerties (longitudinal, de couplage longitudinal-rotation et de rotation).

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^S$  : Rigidités de traction, de couplage traction - flexion, de flexion et de cisaillement.

## ***LISTE DES ABREVIATION***

**CMO** : Composites à matrice organique.

**CMC** : Composites à matrice céramique.

**CMM** : Composites à matrice métallique.

**PyC** : Pyrocarbone.

**PVC** : Polychlorures de vinyle.

**PAN** : Polyacrylnitrique.

**FGM** : Matériaux à gradient fonctionnel.

**PVD** : Dépôt physique de vapeur.

**CVD** : Dépôt chimique de vapeur.

**SHS** : Synthèse à haute température auto-propagée.

**IBAD** : Dépôt assisté par faisceau ionique.

**PM** : Métallurgie en poudre.

**SFF** : Solid Freeform.

**NTC** : Nanotubes de carbone.

**MWNT** : Nanotubes de carbone à paroi multiple.

**SWNT** : Nanotubes de carbone à paroi unique.

**FG-CNTRC** : Matériaux composites à gradient fonctionnel renforcé par les nanotubes de carbone.

**PVA** : Alcool polyvinylique.

**UD** : Distribution FG des NTC uniformément répartie.

**FG-O, FG-V, FG-X** : Distributions FG des NTC dans la matrice polymère.

**ESL** : Théories des plaques équivalentes à une seule couche.

**CPT** : Théorie classique des plaques stratifiées.

**FSDT** : Théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre.

**UDL** : Charge uniformément répartie.

**PmPV** : Poly {(m-phénylènevinylène) -co - [(2,5-dioctoxy-p-phe-nylène) vinylène]}.

## **LISTE DES FIGURES**

### **CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.**

<b>Figure 1.1.</b> Quelques applications des CMO "haute performance" : (a) un catamaran, (b) le support de la charge utile d'Ariane 5, (c) des skis de compétition (image de Thomas Grollier). .....	6
<b>Figure 1.2.</b> Quelques applications des CMC : (a) la tuyère d'un moteur spatial, (b) le disque à aubes d'une turbine), (c) un disque de frein haut de gamme .....	7
<b>Figure 1.3.</b> (a) Schématisation d'une matrice multicouches ; (b) effet protecteur des interfaces : les fissures sont déviées et leur progression vers les fibres est donc ralentie. ....	8
<b>Figure 1.4.</b> Principe d'une matrice auto-cicatrisant : (a) de l'oxygène pénètre dans la matrice fissurée, (b) l'oxydation de la matrice crée un verre qui bouche la fissure, protégeant ainsi les fibres. ....	9
<b>Figure 1.5.</b> Exemples d'applications des composites à matrice métallique. ....	10
<b>Figure 1.6.</b> Types de matrice.....	11
<b>Figure 1.7.</b> Structures moléculaires : (a) d'un polymère thermoplastique, (b) d'un polymère thermodurcissable. ....	13
<b>Figure 1.8.</b> Types de renfort. ....	14
<b>Figure 1.9.</b> Exemples de tissus de renforts utilisés pour les CMO haute performance : (a) verre, (b) carbone, (c) aramide (Kevlar). ....	16
<b>Figure 1.10.</b> Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice. ....	17
<b>Figure 1.11.</b> Stratifié constitué de couches parfaitement liées. ....	18
<b>Figure 1.12.</b> Désignations du stratifié. ....	19
<b>Figure.1.13.</b> Désignations d'une âme nid d'abeilles. ....	20
<b>Figure.1.14.</b> D Sic-Sic, matériau avec deux directions de renfort. ....	20
<b>Figure.1.15.</b> Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32. ....	21
<b>Figure 1.16.</b> Sepcarb(r) 4D C/C : Renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre directions de l'espace. ....	22

## **CHAPITRE 2 : LES MATERIAUX FGM ET LES NANO TUBES DE CARBONES (NTC).**

<b>Figure 2.1.</b> Schéma de l'excision à gradient de porosité.....	28
<b>Figure 2.2.</b> Schéma de principe d'une partie cylindrique soumis à : <i>(a) écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement.</i> ....	29
<b>Figure 2.3.</b> Schéma de microstructure classé. ....	30
<b>Figure 2.4.</b> Schéma du concept de gradation. ....	31
<b>Figure 2.5.</b> Domaines d'application pour les trois types de matériaux fonctionnellement gradués. ....	34
<b>Figure 2.6.</b> Molécules de fullerène. ....	36
<b>Figure 2.7.</b> La chiralité du NTC. ....	38
<b>Figure 2.8.</b> Mécanisme de croissance de nanotubes de carbone. ....	39
<b>Figure 2.9.</b> Arc de décharge Méthode. ....	40
<b>Figure 2.10.</b> Laser Ablation. ....	40

## **CHAPITRE 3 : MODELISATION, THEORIES DE DEFORMATIONS ET FORMULATION ENERGITIQUE DES PLAQUES FG-CNTRC.**

<b>Figure 3.1</b> La distribution des CNT dans une matrice SWCNT. ....	47
<b>Figure 3.2</b> Déformation de la section normale par rapport au plan moyen. ....	49
<b>Figure 3.3</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques. ...	53
<b>Figure 3.4</b> Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque sous les hypothèses de la théorie des plaques de premier ordre. ....	54
<b>Figure 3.5.</b> Composants du vecteur des contraintes. ....	56
<b>Figure 3.6.</b> Efforts agissant dans le plan. ....	58
<b>Figure 3.7</b> Moments agissant sur un élément. ....	58
<b>Figure 3.8</b> Efforts tranchants dans un élément. ....	59
<b>Figure 3.9</b> Résistance de la force et du moment sur un élément de plaque. ....	60
<b>Figure 3.10</b> Equilibre d'un élément plaque. ....	61
<b>Figure 3.11</b> Les forces distribuées de pré-flambage. ....	62

## **CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.**

<b>Figure 4.1</b> Variation de la fraction volumique $V_{CNT}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	75
<b>Figure 4.2.</b> Variation du module de Young $E_{11}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	75
<b>Figure 4.3.</b> Variation du module de Young $E_{22}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	76
<b>Figure 4.4.</b> Variation du module de la masse volumique $\rho$ suivant l'épaisseur de la plaque pour 176es différents types de distribution de CNT. ....	76
<b>Figure 4.5.</b> Variation du module de cisaillement $G_{12}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	77
<b>Figure 4.6.</b> Variation du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	77
<b>Figure 4.7.</b> Variation du coefficient de Poisson $\nu_{21}$ suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT. ....	78
<b>Figure 4.8.</b> Variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque <b>FG-X</b> CNTRC en fonction du rapport $b/h$ . ( $V_{CNT}^* = 0.11$ ). ....	88
<b>Figure 4.9.</b> Variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque <b>FG-X</b> CNTRC en fonction du rapport $b/h$ et de la fraction volumique $V_{CNT}^*$ ( $a/b=1$ ) ....	88
<b>Figure 4.10.</b> Variation de la fréquence fondamentale $\omega$ en fonction du rapport $a/b$ pour les quatre types de FGM ( $V_{CNT}^*=0.11$ , $b/h = 10$ ). ....	89
<b>Figure 4.11.</b> Organigramme du programme de calcul (Maple). ....	90



## **LISTE DES TABLEAUX**

### **CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES.**

<b>Tableau 1.1.</b> Caractéristiques des résines thermodurcissables.....	12
<b>Tableau 1.2.</b> Caractéristiques des résines thermoplastiques.....	12
<b>Tableau 1.3.</b> Caractéristiques mécaniques des fibres. ....	15

### **CHAPITRE 4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.**

<b>Tableau 4.1.</b> Moments d'inerties $I_1, I_2$ et $I_3$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	79
<b>Tableau 4.2.</b> Rigidités de traction $A_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	80
<b>Tableau 4.3.</b> Rigidités de couplage traction - flexion $B_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT. ....	80
<b>Tableau 4.4.</b> Rigidités de flexion $D_{ij}$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.....	81
<b>Tableau 4.5.</b> Rigidités de cisaillement $A_{ij}^S$ de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT .....	81
<b>Tableau 4.6.</b> Effet de la fraction de volume CNT sur la fréquence naturelle adimensionnelle $\bar{\omega}$ , d'une plaque semi-épaisse simplement appuyée.....	83
<b>Tableau 4.7.</b> Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ de la plaque <b>FG-X CNTRC</b> pour les différentes fractions volumiques $V_{CNT}^*$ .....	85
<b>Tableau 4.8.</b> Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ de la plaque <b>UD CNTRC</b> pour les différentes fractions volumiques $V_{CNT}^*$ .....	86
<b>Tableau 4.9.</b> Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ de la plaque <b>FG-V CNTRC</b> pour les différentes fractions volumiques $V_{CNT}^*$ .....	86
<b>Tableau 4.10.</b> Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ de la plaque <b>FG-O CNTRC</b> pour les différentes fractions volumiques $V_{CNT}^*$ .....	87

## ***INTRODUCTION GENERALE***

Dans les composites traditionnels, les propriétés mécaniques, thermiques ou physiques ne varient pas spatialement au niveau macroscopique car les renforts sont distribués uniformément ou aléatoirement dans les composites. Les matériaux composites ont été utilisés avec succès dans des applications d'aéronefs et d'autres applications d'ingénierie pendant de nombreuses années en raison de leur excellente résistance au poids et de la rigidité aux rapports pondéraux. Récemment, les matériaux composites avancés connus sous le nom de matériau à gradient fonctionnel ont attiré beaucoup d'attention dans de nombreuses applications d'ingénierie en raison de leurs avantages de résister à un gradient de température élevé tout en maintenant l'intégrité structurale.

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM :Functionally graded material) sont une nouvelle race de matériaux composites qui sont constitués de deux ou plusieurs phases constitutives avec des propriétés qui varient spatialement selon une certaine distribution non uniforme de la phase de renforcement. Ces matériaux avancés avec des gradients d'ingénierie de composition, de structure ou de propriétés spécifiques dans la direction / l'orientation préférée sont supérieurs aux matériaux homogènes composés de constituants similaires. Pour les FGM, les propriétés mécaniques résultantes telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement et la densité du matériau varient en douceur et en continu dans les directions privilégiées. De nombreuses études sur les FGM ont été menées dans un large éventail de domaines, puisque la notion de FGM a été proposée pour la première fois en 1984 [1,2]. Stimulée par la notion de FGM, le modèle de la répartition de renforcement fonctionnellement graduée (FG) a été appliqué avec succès pour les matériaux composites renforcés par la CNT.

Les nanotubes de carbone ont généré un énorme intérêt pour la recherche dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Ceci est principalement dû à leurs propriétés physiques et chimiques remarquables, telles que la résistance élevée, la rigidité élevée et le rapport d'élanement élevé, mais très faible densité. Les nanotubes de carbone existent dans des structures à parois simples ou à plusieurs parois. Le nanotube de carbone à paroi unique (SWCNT) [3] est créé en roulant une feuille de graphène unique pour former un cylindre d'un diamètre de 1 nm et une longueur d'ordre des centimètres, semblable à la séparation du plan basal en graphite.

Les structures en plaques sont l'un des éléments structurels les plus courants. Sa large applicabilité a attiré l'attention de nombreux chercheurs. En fait, l'analyse des plaques a d'abord commencé dans les années 1800. Euler [4] a été responsable de la résolution des vibrations libres d'une plaque plate en utilisant une approche mathématique pour la première fois. Alors que c'était le physicien allemand Chladni [5] qui a découvert les différents modes de vibrations libres. Plus tard, la théorie de l'élasticité a été formulée. Navier [6] peut être considéré comme l'auteur de la théorie moderne de l'élasticité.

Beaucoup d'études ont été réalisées ces dernières années sur les matériaux composites renforcés aux nanotubes de carbone. Diverses recherches existent dans la littérature, en termes de vibration libre de FG-CNTRC (Functionally Graded-Carbone Nano-Tube Reinforced Composite). Un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes à cette introduction et pour mettre en évidence la littérature la plus pertinente disponible pour l'étude mécanique des FG-CNTRC :

Shahrbabaki et Alibeigloo [7] ont étudié les vibrations libres tridimensionnelles des plaques rectangulaires CNTRC dans différentes conditions aux limites. On a constaté que les fréquences non dimensionnelles variaient selon les valeurs minimales pour la plaque avec CFFF aux valeurs maximales de la plaque avec les conditions aux limites CCCC, travail dans lequel la théorie tridimensionnelle de l'élasticité a été utilisée. Zhu et Liew [8] ont rapporté une analyse de vibration libre de plaques fonctionnellement gradée de taille modérée par la méthode locale sans maillage de Kriging. Lin et Xiang [9] ont étudié la vibration linéaire libre des faisceaux nano composites renforcés par des nanotubes de carbone à paroi unique. Ils ont utilisé la méthode classique de Hamilton pour obtenir l'énergie de déformation virtuel et les énergies cinétiques du faisceau FG-CNTRC et ensuite résolu par la méthode kp-Ritz avec l'utilisation de l'élément flexible de cisaillement QUAD-8 développé sur la base d'une théorie structurale d'ordre supérieur.

Dans un autre cas, Lei et al. [10,11] ont présenté une analyse de la vibration libre de plaque nano composite à gradient fonctionnel et des panneaux renforcés par des nanotubes de carbone à paroi unique. La méthode « element-free kp-Ritz » a été utilisée. Les effets de la fraction de volume des nanotubes de carbone, le rapport largeur / épaisseur de la plaque, le rapport d'élançement de la plaque et le changement de température sur les fréquences naturelles et les formes de mode ont été discutés. Sur la base de la théorie de la plaque de déformation du cisaillement de premier ordre [12], Zhu et al. [13] ont effectué des analyses de vibrations et de vibrations libres de plaques composites à épaisseurs modérées renforcées par des nanotubes de carbone à paroi unique. La

méthode des éléments finis a été utilisée. Dans cette étude, quatre types de distributions du matériau de renforcement aligné uni axialement ont été considérés, c'est-à-dire uniformes et trois types de distributions fonctionnellement graduée de nanotubes de carbone le long de la direction de l'épaisseur des plaques. Les résultats ont révélé les influences des fractions volumiques des nanotubes de carbone et des rapports largeur / épaisseur sur les réponses de flexion, les fréquences naturelles et les formes des plaques FG-CNTRC. De plus, ils ont découvert que les CNT répartis entre les surfaces supérieures et inférieures sont plus efficaces que ceux qui sont distribués près du milieu du plan afin d'augmenter la rigidité des plaques, avec les faisceaux FG-CNTRC reposant sur la fondation élastique de Winkler- Pasternak. En se basant sur la connaissance des auteurs, aucune étude n'a été rapportée sur le l'analyse des vibrations libres des plaques composites à gradient fonctionnel renforcées par des nanotubes en carbone utilisant le modèle cinématique FSDT avec la méthode de Navier.

Le présent travail traite des formulations analytiques et propose des solutions pour l'analyse des vibrations libres des plaques composites à gradient fonctionnel renforcées par des nanotubes en carbone. Les équations de mouvement de la plaque et ses conditions aux limites sont dérivées en employant le principe de Hamilton. Des solutions sont obtenues pour les FG-CNTRC en utilisant la technique de Navier et en résolvant l'équation aux valeurs propres. Les résultats obtenus seront comparés à des solutions disponibles dans la littérature afin de valider le programme que nous avons élaboré pour la prévision des fréquences naturelles adimensionnelles des FG-CNTRC. L'effet des rapports largeur-épaisseur, les rapports d'élanement longueur/largeur et de la fraction volumique des nanotubes sur les fréquences naturelles seront étudiés après l'établissement de la précision des résultats actuels pour les FG-CNTRC. Nous analyserons également l'influence du type de distribution des nanotubes à travers l'épaisseur de la plaque sur l'évolution des propriétés mécaniques de celle-ci.

***CHAPITRE 1***  
***GENERALITES SUR LES MATERIAUX***  
***COMPOSITES***

## **1.1. Introduction :**

Ce chapitre offre une présentation synthétique des matériaux composites « modernes » utilisés dans la fabrication des produits industriels.

L'accent est mis sur la nature des différents constituants. Les aspects structurels et géométriques des composites ne sont abordés que brièvement.

## **1.2. Définition :**

Un matériau composite est un matériau hétérogène formé d'au moins deux constituants non miscibles, disposés selon une organisation géométrique particulière. Quasiment tous les composites sont constitués [14] :

- De renforts, prenant généralement la forme de fibres ou de particules, assurant l'essentiel des propriétés mécaniques du composite ;
- D'une matrice dans laquelle sont noyés les renforts, assurant la cohésion de l'ensemble et le transfert des efforts ainsi que l'essentiel des propriétés autres que mécaniques.

L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure, nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie automobile, aéronautique et spatiale.

Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

Nous nous intéressons au choix des constituants élémentaires, c'est-à-dire à la nature physique des renforts et de la matrice, en nous focalisant essentiellement sur les composites « modernes » ; nous n'abordons donc pas le cas des multi-matériaux traditionnels ou naturels comme les bétons (armés ou non) ou les bois. Il est d'usage de classer les composites par la nature de leur matrice, pour deux raisons : la matrice assure toutes les fonctions autres que la

tenue mécanique, et conditionne le choix du procédé de mise en forme. On distingue habituellement trois familles :

- Les composites à matrice organique (CMO),
- Les composites à matrice céramique (CMC),
- Les composites à matrice métallique (CMM).

Chacune de ces familles possède des propriétés différentes et pour chacune d'entre elles, différents types de renforts sont employés.

### 1.3. Les différentes types des matériaux composites :

#### 1.3.1. Composites à matrice organique (CMO) :

Il s'agit, de loin, des composites les plus répandus : ce sont en effet les seuls composites ayant, pour beaucoup d'entre eux, des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries [15]. Plus précisément, on distingue généralement deux types de CMO:

- **Les composites à grande diffusion**, peu coûteux et représentant près de 95% des CMO fabriqués, utilisés pour toutes sortes de pièces faiblement sollicitées ;
- **Les composites à haute performance**, plus onéreux mais présentant des qualités mécaniques supérieures, notamment employés dans l'aéronautique, le nautisme, les sports et loisirs ou encore la construction industrielle (**Figure.1.1**).



(a)



(b)



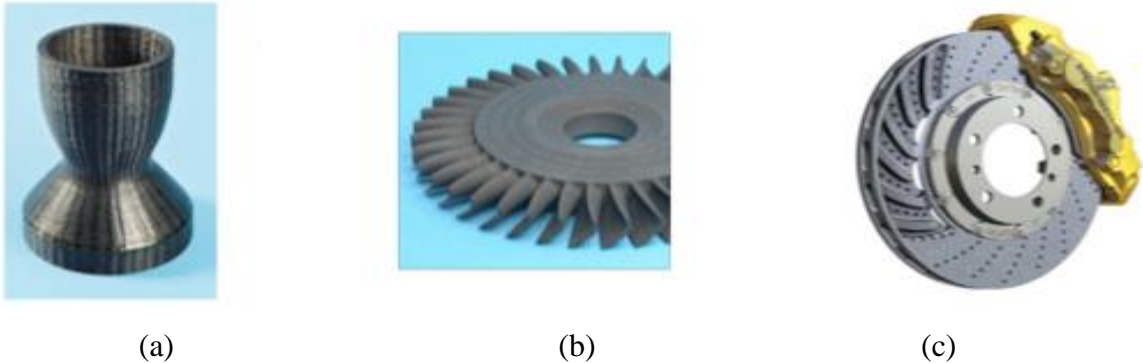
(c)

**Figure 1.1.** Quelques applications des CMO "haute performance" : (a) un catamaran, (b) le support de la charge utile d'Ariane 5 (image [1]), (c) des skis de compétition (image de Thomas Grollier).

Cette famille est donc très vaste et regroupe des gammes de prix et de performances très étendues.

### **1.3.2. Composites à matrice céramique (CMC) :**

Beaucoup moins répandus que leurs homologues à matrice organique en raison d'un coût élevé, les CMC s'adressent aux applications à très haute température. Ils sont principalement utilisés dans l'industrie spatiale et l'aéronautique militaire, ainsi que pour la conception d'organes haut de gamme comme des disques ou plaquettes de freins (**Figure.1.2**).



**Figure 1.2.** Quelques applications des CMC : (a) la tuyère d'un moteur spatial, (b) le disque à aubes d'une turbine, (c) un disque de frein haut de gamme.

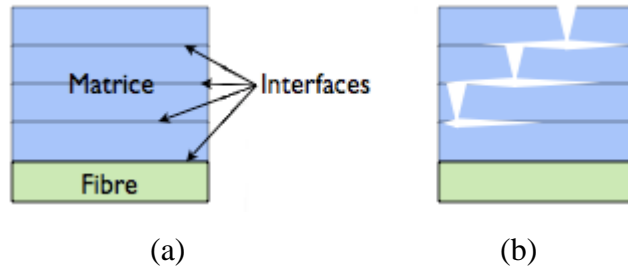
Les céramiques possèdent de nombreux atouts pour de telles applications : elles peuvent résister à des températures très élevées, sont plus légères que de nombreux métaux, et présentent une bonne stabilité chimique. Malheureusement, leur grande fragilité limite fortement leur domaine d'utilisation. Le principe des CMC est donc de rendre les céramiques moins cassantes en leur donnant une structure composite, c'est-à-dire en les façonnant sous forme de renforts et d'une matrice, cela conduit à une meilleure résistance à la rupture, pour deux raisons :

- Les fibres ayant un diamètre microscopique, il est possible de les fabriquer avec très peu de défauts, ce qui conduit à des contraintes de rupture plus élevées ;
- Lorsque le composite se dégrade, les fissures ont tendance à suivre les interfaces situées entre les fibres et la matrice au lieu de se propager dans les fibres ; au lieu de rompre brutalement, le matériau se « désassemble » donc progressivement.

Afin de ralentir le plus possible la rupture, les matrices céramiques possèdent généralement une structure multicouches (**Figure 1.3.a**) : la matrice est faite de plusieurs couches superposées, ce qui permet de multiplier les interfaces et donc les déviations des fissures (**Figure 1.3.b**). Tout ceci fait que les CMC sont beaucoup moins fragiles et beaucoup



plus tenaces que les céramiques massives, et peuvent donc être utilisés dans des pièces mécaniques.



**Figure 1.3.** (a) Schématisation d'une matrice multicouche ; (b) effet protecteur des interfaces: *les fissures sont déviées et leur progression vers les fibres est donc ralentie.*

Dans les CMC, les renforts et la matrice sont souvent constitués de carbure de silicium (SiC), de carbone (C) ou d'alumine ( $Al_2O_3$ ) ; bien que le carbone ne soit pas une céramique, les matrices de carbone possèdent des comportements assez similaires aux matrices céramiques et sont donc souvent assimilées aux CMC. Il est relativement fréquent que les renforts et la matrice soient faits du même matériau : le rôle de la structure composite, ici, n'est pas tant de combiner les propriétés des constituants que d'en faire émerger de nouvelles, à savoir la ténacité et la ductilité. Une particularité des CMC est d'ailleurs que souvent, les fibres sont moins rigides que la matrice !

En outre, au niveau des interfaces, on dépose une fine couche d'un autre matériau qui joue le rôle de fusible : les fissures s'y propagent au lieu de le traverser, ce qui protège les fibres (ou les couches inférieures) de la rupture. La contrainte de rupture du matériau d'interface doit donc être inférieure à celle des autres constituants... sans pour autant être trop faible, faute de quoi l'interface se dégrade prématurément et ne transfère plus les efforts entre les différentes couches. Un matériau d'interface courant, répondant bien à ces exigences, est le pyrocarbone (PyC).

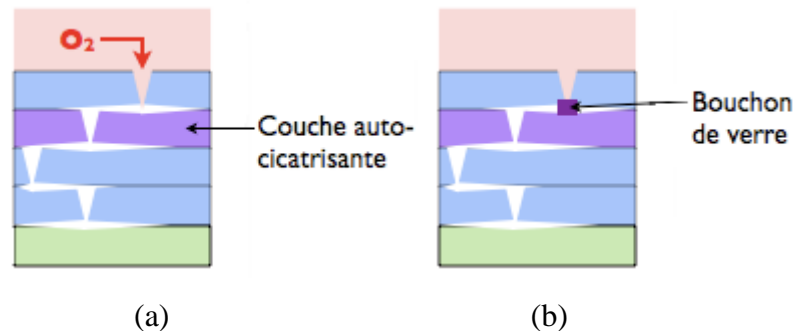
Côté architecture, les CMC possèdent généralement des fibres longues continues, tressées en fils qui sont ensuite organisés en tissus 2D ou 3D ; comme pour les CMO, il existe également des CMC à fibres courtes, dont le comportement et la mise en forme se rapprochent beaucoup plus des céramiques traditionnelles.

Là encore, il est possible d'intégrer de nouvelles fonctions techniques au sein du composite en jouant sur la constitution de la matrice. Dans le cas des CMC, l'objectif recherché est souvent d'allonger la durée de vie car il s'agit d'une problématique vitale pour

ces matériaux : typiquement, la plupart des CMC actuels ont encore une durée de vie trop courte pour être utilisés dans les moteurs d'avions civils. L'expérience montre que le mécanisme limitant la durée de vie est souvent l'oxydation sous contraintes, qui provient de l'action de trois facteurs :

- Un environnement oxydant (par exemple, l'oxygène de l'air ou la vapeur d'eau).
- Une température élevée, qui accélère fortement les réactions d'oxydation.
- Un chargement mécanique élevé, qui crée un réseau de fissures dans le composite et finit ainsi par mettre les fibres à nu.

Dans ces conditions, les oxydants s'infiltrent dans les fissures (**Figure 1.4.a**) ; s'ils atteignent et oxydent les fibres, la rupture survient rapidement. Pour les en empêcher, les industriels ont mis au point des matrices auto-cicatrisantes, contenant des composés à base de bore. Lorsque le bore s'oxyde, il forme un verre qui rebouche les fissures et ralentit la progression des oxydants vers les fibres (**Figure 1.4.b**). Ce mécanisme prolonge grandement la durée de vie du CMC : le gain peut atteindre un facteur 1000 !



**Figure 1.4.** Principe d'une matrice auto-cicatrisante : (a) de l'oxygène pénètre dans la matrice fissurée, (b) l'oxydation de la matrice crée un verre qui bouche la fissure, protégeant ainsi les fibres.

Les CMC comptent ainsi parmi les matériaux les plus performants pour les applications thermomécaniques exigeantes. Malheureusement, leur coût de revient est très élevé à cause des procédés de fabrication employés : il s'agit de mettre en place un tissu de fibres, puis d'y infiltrer des précurseurs gazeux ou liquides qui vont réagir chimiquement pour former la matrice, couche après couche. Cette réaction s'effectue à des températures assez élevées, est parfois très lente, et demande des équipements lourds. Sa mise en œuvre a donc un coût très élevé, qui explique la faible diffusion de ces matériaux.

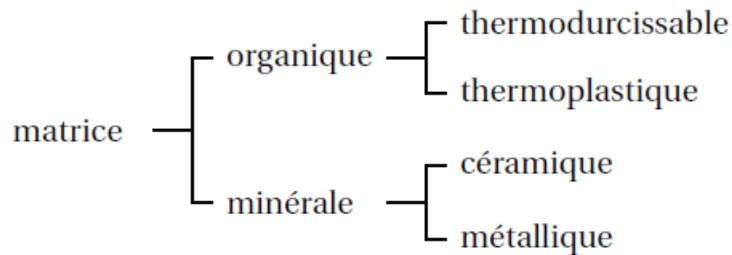


s'assurer que la matrice et le renfort ne peuvent pas réagir entre eux, faute de quoi les conséquences sur les propriétés mécaniques peuvent être catastrophiques.

## **1.4. Les constituants des matériaux composites :**

### **1.4.1. Matrices :**

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la **Figure.1.6**.



**Figure 1.6.** Types de matrice.

Les matrices employées pour ces composites sont des résines polymères. Il en existe deux types, qui possèdent des propriétés foncièrement différentes et sont employées dans des filières distinctes :

#### **1.4.1.1. Résines thermodurcissables :**

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants, les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables.

Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont : 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le **Tableau 1.1 [16]**.

Résines	T <sub>f</sub> (°C)	ρ(Kg/m <sup>3</sup> )	ε <sub>t</sub> (%)	σ <sub>t</sub> (MPa)	σ <sub>r</sub> (MPa)	E (GPa)
Polyesters	60 à 100	1140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
Phénolique	120	1200	2.5	40	250	3 à 5
Epoxydes	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

**Tableau.1.1.** Caractéristiques des résines thermodurcissables.

**1.4.1.2. Résines thermoplastiques :**

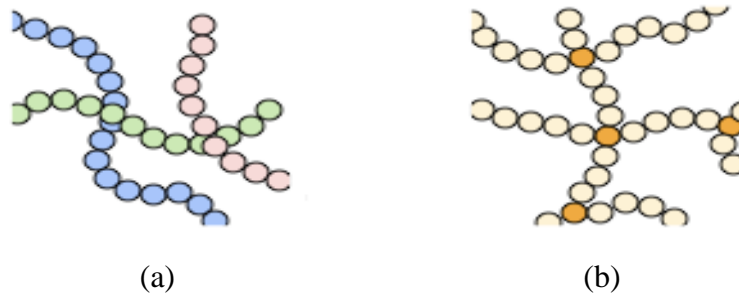
Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B.

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le **Tableau 1.2** [16].

Résines	T <sub>f</sub> (°C)	ρ(Kg/m <sup>3</sup> )	σ <sub>t</sub> (MPa)	E (GPa)
Polyamide	65 à 100	1140	60 à 85	1,2 à 2,5
Polypropylène	900	1200	20 à 35	1,1 à 1,4

**Tableau.1.2.** Caractéristiques des résines thermoplastiques.

La différence essentielle entre ces deux types de polymères est la nature des phénomènes physiques assurant leur cohésion. Les thermoplastiques sont constitués de longues molécules linéaires, maintenues entre elles par des liaisons physiques de faible énergie (liaisons hydrogène ou de Van der Waals, **Figure 1.7.a**) ; ces liaisons se cassent lorsque l'on chauffe le polymère et se rétablissent lorsqu'on le refroidit, de façon réversible. A l'inverse, les thermodurcissables sont des molécules en forme de réseaux tridimensionnels, maintenus par des liaisons chimiques de forte énergie (liaisons covalentes, **Figure 1.7.b**) établies de manière irréversible lors de la polymérisation.



**Figure 1.7.** Structures moléculaires :

*(a) d'un polymère thermoplastique, (b) d'un polymère thermodurcissable.*

Cette différence fondamentale est à l'origine de propriétés bien distinctes. Par exemple :

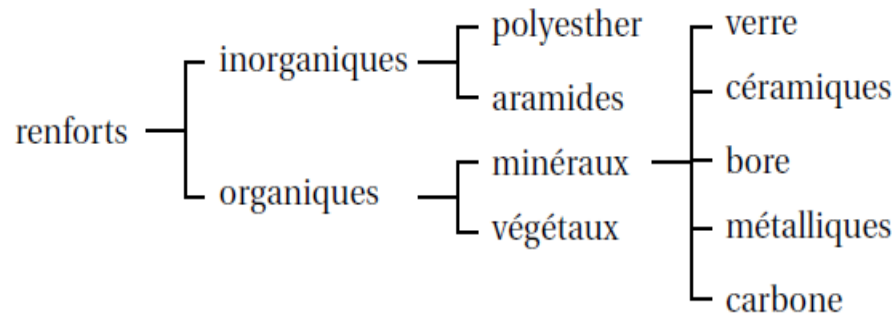
- Les thermoplastiques sont moins rigides et moins résistants que les thermodurcissables (mais cela importe peu sur les composites à fibres longues, car la rigidité et la résistance proviennent essentiellement des fibres !).
- Les thermoplastiques sont plus ductiles que les thermodurcissables, donc résistent mieux à la fissuration.
- Les déchets thermoplastiques sont recyclables, les déchets thermodurcissables ne le sont pas.
- Les granulés thermoplastiques peuvent être stockés indéfiniment et à température ambiante, les thermodurcissables doivent être stockés au froid et pendant une durée limitée si la résine et le durcisseur sont déjà mélangés ;
- Les thermoplastiques doivent toujours être portés à haute température pour être mis en forme, les thermodurcissables pas forcément...

De manière générale, les matrices thermodurcissables sont plus fréquemment employées que les thermoplastiques, en raison de leur plus grande facilité de mise en forme (il est plus facile d'imprégner des fibres avec un liquide qu'avec des granulés ramollis, et les températures à utiliser sont souvent plus raisonnables). Parmi les plus courantes, on peut citer les résines polyester, peu coûteuses et souvent utilisées dans les applications « grande diffusion », et les résines époxy (ou époxydes), très employées dans les applications « hautes performances ».

### **1.4.2. Renforts :**

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes

suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [16]. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la **Figure 1.8**.



**Figure 1.8.** Types de renforts.

#### **1.4.2.1. Fibres de verre :**

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance–prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites.

#### **1.4.2.2. Fibres de carbone :**

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres *précurseurs* utilisées sont des *fibres acryliques* élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

#### **1.4.2.3. Fibres aramides :**

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbonés mais leur résistance à la compression est faible. La faible tenue mécanique en

compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisées.

L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

#### **1.4.2.4. Fibres céramiques :**

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- Fibres de Carbure de Silicium
- Fibres de Bore
- Fibres de Bore carbure de silicium

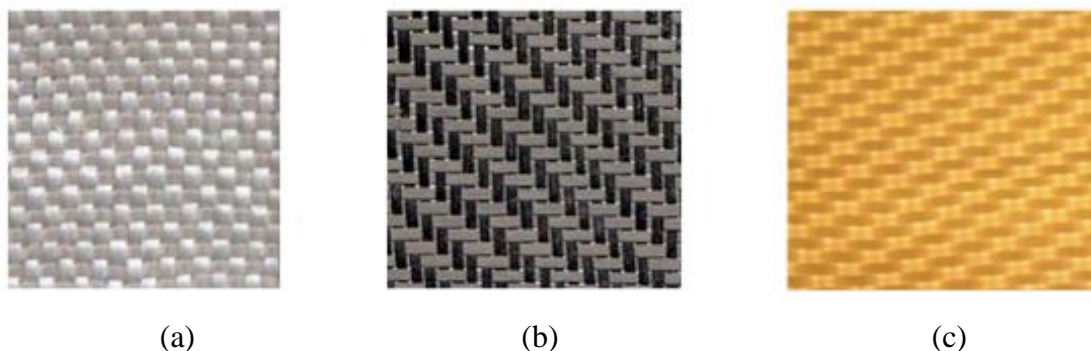
#### **1.4.2.5. Caractéristiques mécaniques des fibres :**

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

Renforts	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_r$ (MPa)	E (GPa)
AS4	1800	/	3599	235
T300	1700	1,2	3654	231
IM6	/	0,88	1460	/
IM8	1800	/	5171	310
Kevlar 49	1440	2,5	3620	124
Verre E	2580	3,5	3450	69

**Tableau 1.3.** Caractéristiques mécaniques des fibres [16].





**Figure 1.9.** Exemples de tissus de renforts utilisés pour les CMO haute performance :  
*(a) verre, (b) carbone, (c) aramide (Kevlar).*

L'architecture de ces renforts doit elle aussi être adaptée aux fonctions techniques à remplir. Pour les applications « grande diffusion », on utilise souvent des fibres de verre courtes ; les procédés de fabrication sont alors relativement proches de ceux que l'on emploie avec des polymères seuls, On peut également utiliser des fibres longues disposées en mats (c'est-à-dire « en vrac », sans orientation privilégiée). Les applications « hautes performances » utilisent quant à elles des fibres longues tissées (comme sur la **Figure 1.9**) ou empilées en plis unidirectionnels, ce qui permet d'optimiser les propriétés mécaniques du composite. La mise en forme est alors, la plupart du temps, plus coûteuse.

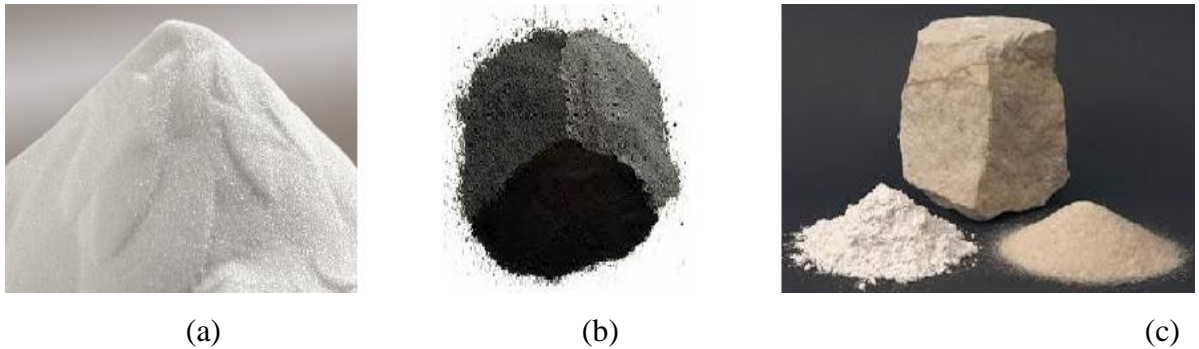
### **1.4.3. Charges et additifs :**

Enfin, des charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir davantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso-modo de la même façon que dans les plastiques « traditionnels ». On peut par exemple rencontrer (**Figure 1.10**) :

- Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice.
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant.

- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;



**Figure 1.10.** Exemples de charges utilisées dans les CMO :

*(a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.*

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- Des stabilisants, qui retardent les dégradations dues à l'oxygène, aux UV ou encore à l'ozone
- Des ignifugeants ou retardateurs de flamme (la plupart des polymères sont inflammables !)
- Des agents de démoulage
- Des colorants...

Il est ainsi possible de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite, et d'adapter finement ses propriétés aux besoins du concepteur.

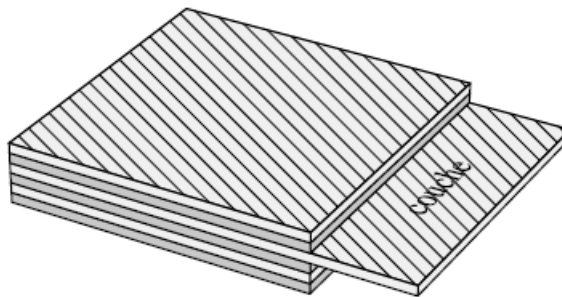
## **1.5. Structures composites :**

### **1.5.1. Structures composites stratifiées :**

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures

stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir [17].

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires, la couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la **Figure.1.11**, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées, l'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier, l'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches).



**Figure 1.11.** Stratifié constitué de couches parfaitement liées.

#### **1.5.1.1. Désignation des structures stratifiées :**

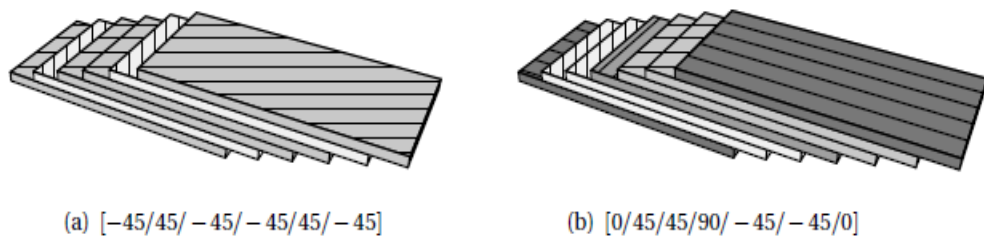
Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur

de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau carbone époxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence.

Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence  $x$ . Sur les **Figures 1.12.a** et **1.12.b**, les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;
- Les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la **Figures.1.12.a**:  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$  ;
- Les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la **Figures 1.12.b**:  $[0/45_2/90/-45_2/0]$  ;
- En cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- En cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole  $s$  indique la symétrie



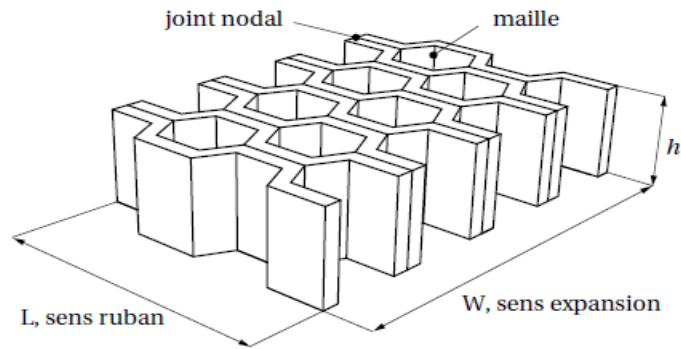
**Figure 1.12.** Désignations du stratifié.

### 1.5.1.2. Désignation des structures sandwiches :

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwiches. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à

l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la **Figure.1.13**.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.



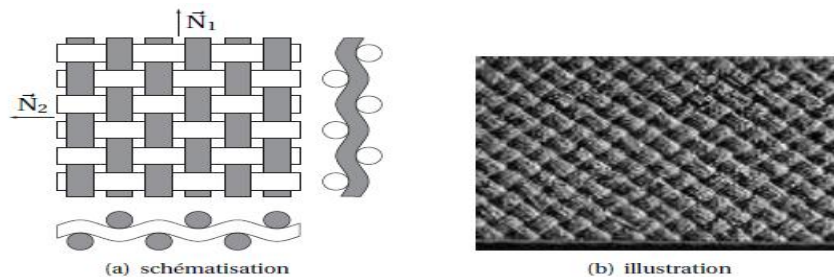
**Figure.1.13.** Désignations d'une âme nid d'abeilles.

**1.5.2. Structures composites tissées multidirectionnelles :**

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aérospatiale.

Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice, quelques exemples de matériaux composites multidirectionnels sont maintenant présentés, les structures massives sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique et restent très marginales en raison de leur coût de production très élevé.

- **2D SiC-SiC**



**Figure 1.14.** D Sic-Sic, matériau avec deux directions de renfort.

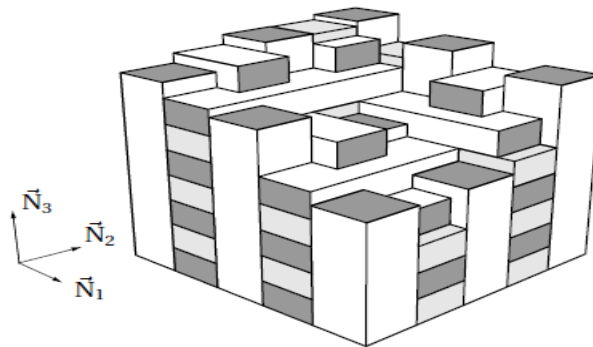
Le matériau composite 2D tissé SiC-SiC (fibre-céramique/matrice-céramique) a deux directions de renfort comme illustré sur les **Figures 1.14.a** et **1.14.b**, ce type de matériau est destiné à des utilisations thermo structurales (température d'utilisation de 1 000°C à 1 400°C).

Ce type de matériau est réalisé par la Société Européenne de Propulsion / Groupe Snecma.

Il est étudié pour être utilisé dans les parties chaudes des structures moteurs d'avions, moteurs fusés et protections thermiques.

- **Aerolor 32 C/C**

L'Aerolor 32 est un matériau thermo structural réalisé par l'Aérospatiale. C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par trois directions de fibres, comme indiqué sur la **Figure 1.15**. La matrice est infiltrée dans les blocs préalablement tissés au moyen de mèches de 3 000 filaments.



**Figure.1.15.** Géométrie tri-orthogonale de l'Aerolor 32

- **3D-Evolutif C/C**

Le 3D-Evolutif est un matériau thermo structural réalisé par l'Aérospatiale. Le concept de cette architecture fibreuse permet de concevoir des pièces de formes complexes. Il permet également une évolution des taux et directions de renforts fibreux en fonction des besoins mécaniques et thermiques. Le matériau avec quatre directions de renfort dans le plan a un comportement mécanique global de type élastique fragile, les niveaux de non linéarité étant très faibles. C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par deux directions de fibres. Un tissage suivant la troisième direction de l'espace renforce le tissage bi-directionnel. Les renforts et la matrice du 3D-Evolutif C/C sont en carbone. Les constituants sont :

- La fibre en carbone.

- La matrice RA 101 carbonisée. C'est un carbone vitreux déposé par des phases successives d'imprégnation et de pyrolyse.

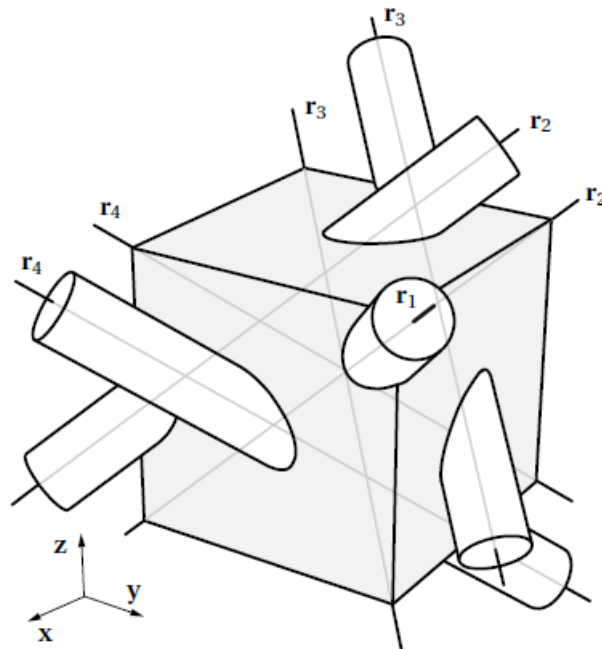
La méthode de tissage consiste à déposer des fils relativement jointifs de façon à réaliser des couches, le nombre de couches et les orientations des renforts sont déterminés en fonction des propriétés thermomécaniques recherchées, on obtient ainsi un empilement de type multicouche sans liant. Un piquage de mèches dans la troisième direction assure le maintien et le tassement du substrat fibreux, ce piquage représente un faible taux volumique du total des fibres du composite, la matrice est ensuite imprégnée au substrat et pyrolysée suivant des séries de cycles thermiques.

Le composite est légèrement dissymétrique puisque sur la face supérieure sont visibles les retours de piquage alors que la face inférieure est usinée au ras des picots lui donnant ainsi un aspect plus régulier.

- **Sepcarb(r) 4D C/C**

Le Sepcarb(r) 4D est un matériau thermo structural réalisé par la Société Européenne de Propulsion.

C'est un composite à renfort et matrice de carbone renforcé par des fibres suivant quatre directions de l'espace. Les renforts sont notés  $r_1, r_2, r_3$  et  $r_4$  sur la **Figure 1.16**.



**Figure 1.16.** Sepcarb(r) 4D C/C

*Renfort carbone/matrice carbone : tissage suivant quatre directions de l'espace.*

## **1.6. Conclusion**

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants. En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres. Mais Selon la nature de la matrice, ils sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.



***CHAPITRE 2***  
***LES MATERIAUX FGM ET LES NANO  
TUBES DE CARRBONES (NTC)***

## **2.1. Introduction :**

Au cours des dernières années, la composition de plusieurs matériaux différents est souvent utilisée dans les composants structurels afin d'optimiser les réponses des structures subissant des charges sévères et des effets thermiques dus à des environnements complexes. Pour réduire les concentrations locales de contraintes induites par des transitions abruptes dans les propriétés du matériau, le concept de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) a été développé par des chercheurs au Japon au milieu des années 1980 où la transition entre différents matériaux est faite progressivement. Le résultat est une réduction considérable de la sévérité des contraintes interfaciales et de la préservation de la résistance structurelle et de la ductilité.

En général, les FGM sont fabriqués à partir d'un mélange de métaux et de céramiques et se caractérisent de manière à modifier graduellement la composition de chacun et la fraction volumique des constituants. En modifiant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, leurs propriétés thermomécaniques présentent un changement continu et régulier d'une surface à l'autre et, par conséquent, éliminent les problèmes d'interface et réduisent les concentrations de contraintes.

Des recherches fondamentales et pratiques sur les nanotubes ont montré des applications possibles dans divers domaines. Les applications réelles sont encore en cours de développement. Ce chapitre donne un aperçu de la technologie actuelle des nanotubes, avec un accent particulier sur la synthèse et la purification, les propriétés, les avantages et les applications.

## **2.2. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :**

### **2.2.1 Types de matériaux fonctionnellement gradués :**

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface pointue qui existait dans le matériau composite traditionnel et de le remplacer par l'interface progressivement changeante, qui a été traduite par la composition chimique changeante de ce composite. L'intérêt croissant pour ce type de matériau a entraîné la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application prévue détermine habituellement le type de FGM à utiliser. Dans l'application biomédicale, par exemple, certains implants doivent vraiment imiter l'organe humain qu'ils ont l'intention de remplacer ou de réparer, afin qu'ils puissent fonctionner

correctement sans détruire les tissus environnants. Ils ont également besoin de pouvoir durer plus longtemps en service. On a constaté que la plupart du corps humain était constitué de FGM, en raison de l'exigence de fonctionnalité. C'est l'une des raisons pour lesquelles les implants doivent également être constitués de FGM, afin de faire correspondre la pièce en cours de remplacement ou de réparation. Les différents types de FGM qui se produisent maintenant comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté en détail dans les sections suivantes [18].

#### **2.2.1.1 Composition chimique du FGM :**

C'est le type de matériaux fonctionnellement classés, où la composition chimique varie graduellement, en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait se faire sous la forme d'une seule phase, ou d'un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit en une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage [19]. Le changement progressif dans la répartition des éléments chimiques en phase unique entraîne la formation du matériau à gradation fonctionnelle. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau à phase unique (mais avec une composition chimique variable) en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins fréquent. Les matériaux fonctionnellement classés les plus couramment utilisés sont ceux avec une composition chimique polyphasée.

Les phases et la composition chimique sont faites pour varier selon le volume en vrac du matériau [20-21]. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideront à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication tels que le taux de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau.

Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, puis on procède à un compactage en poudre puis à un frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former

différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieront selon la position spatiale dans le matériau à gradation fonctionnelle.

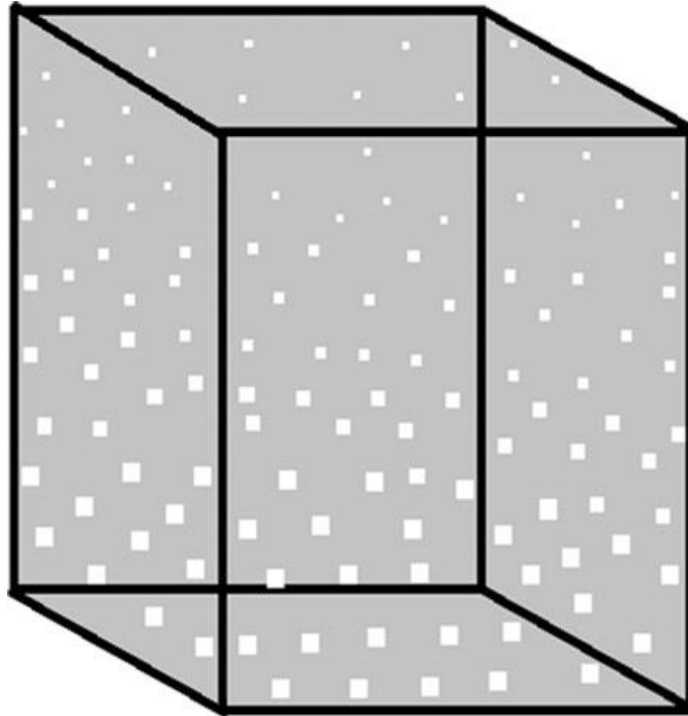
#### **2.2.1.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité :**

Le matériau à gradient fonctionnel à gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec la variation de la position spatiale dans le matériau en vrac. La forme et la taille du pore sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnelle. Le diagramme schématique d'un gradient de porosité typique, un matériau à gradient fonctionnel est représenté sur la **Figure 2.1**.

Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer se compose de porosité à gradient fonctionnel et la porosité graduée aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant, et elle contribue également à la circulation sanguine des tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids global de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant.

La gradation de la taille des pores peut être obtenue en faisant varier les granulométries de poudre qui sont utilisées à différents endroits du matériau en vrac pendant le processus de gradation. Il peut également être produit en faisant varier les paramètres de traitement de la production ou en utilisant différents paramètres de frittage pour produire le gradient de porosité requis.

Le gradient de porosité dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau. Un certain nombre de FGM à gradient de porosité ont été rapportés dans la littérature pour une application biomédicale.



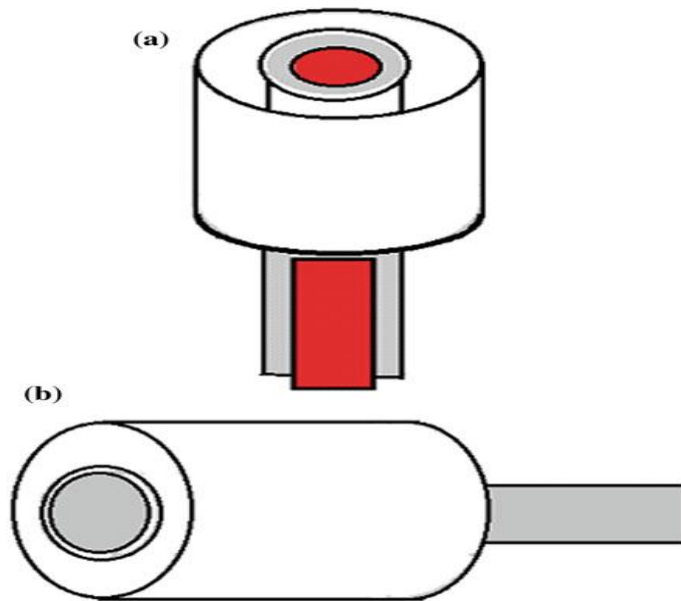
**Figure 2.1.** Schéma de l'excision à gradient de porosité.

### **2.2.1.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure :**

Le matériau à gradient fonctionnel de microstructure est un autre type de FGM, où la microstructure est conçue de sorte que différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation en microstructures peut être réalisée pendant le processus de solidification, de telle sorte que la surface de la matière est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est autorisé à refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles sur la surface du matériau vers la partie la plus interne. En outre, la gradation microstructurale peut être obtenue grâce à un processus de traitement thermique contrôlé. Par exemple, une microstructure variable peut être produite par un traitement thermique contrôlé d'une partie cylindrique en alliage de titane, comme le montre le diagramme schématique de la **Figure 2.2**.

On peut obtenir une microstructure à gradation fonctionnelle par d'abord permettre à un métal liquide, dont la température de fusion est inférieure à la température de fusion de l'alliage de titane, et de telle sorte que soit atteint la température de recristallisation de l'alliage de titane lorsque ce métal fondu est exécuté dans un Type d'installation de l'échangeur de chaleur, comme le montre la

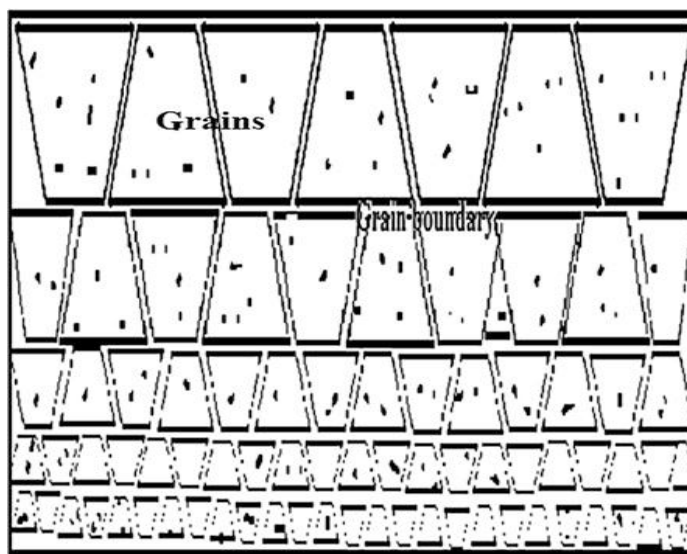
**Figure 2.2.a.** Le métal liquide est autorisé à fonctionner pendant une certaine période de temps, puis retiré, puis la partie est autorisée à refroidir. La chaleur est transférée de la partie interne du cylindre à la partie externe. On s'attend à ce que la température de la partie la plus interne du cylindre soit beaucoup plus élevée que celle de la température la plus à l'extérieur.



**Figure 2.2** Schéma de principe d'une partie cylindrique soumise à :  
(a) écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement.

Cela entraînerait une microstructure variable, car la partie est autorisée à refroidir. La partie extérieure se comporterait comme un dissipateur de chaleur, et la microstructure de cette zone serait plus grande en raison de la croissance des grains, tandis que la microstructure la plus intérieure serait plus petite et équi-axe, en raison du processus de recristallisation et le refroidissement lent. Dans un autre type de processus de gradation microstructural, le cylindre pourrait être chauffé à une certaine température, puis l'eau de refroidissement pourrait être traversée par la partie interne du cylindre également dans une configuration d'échangeur de chaleur, comme le montre la **Figure.2.2.b**. La partie interne du cylindre serait soumise à un refroidissement rapide, provoquant ainsi la formation d'une microstructure non équilibrée sur cette face. La microstructure la plus interne consisterait en une microstructure martensitique plus difficile, tandis que la microstructure du cylindre, loin de la partie la plus interne, serait complètement différente de la microstructure sur la partie extérieure du cylindre.

Un diagramme schématique d'une microstructure classiquement graduée est représenté sur la **Figure 2.3**. C'est parce que la partie la plus extérieure du cylindre refroidirait plus lentement, ce qui favoriserait la formation d'une microstructure plus à l'équilibre et une microstructure largement équiaxe serait produite. Les gradients dans la microstructure en raison du traitement thermique pourraient également provoquer des changements dans la composition élémentaire, et dans certains cas, la phase intermétallique pourrait être produite dans la microstructure graduée.

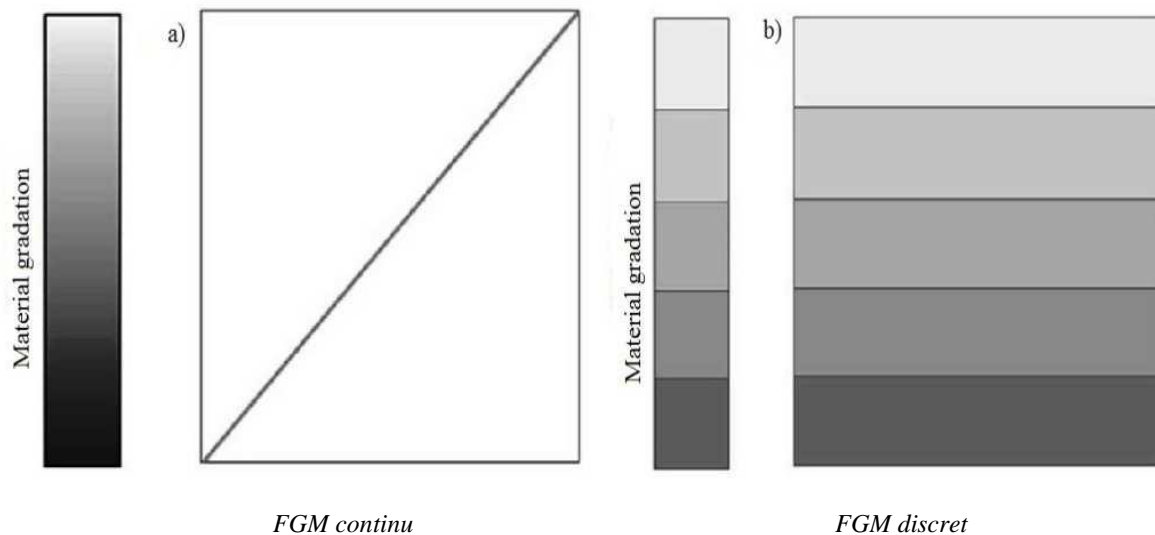


**Figure 2.3.** Schéma de microstructure classée.

La microstructure graduée entraînerait un changement graduel des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et parce que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Le FGM de gradient microstructural trouve leur application dans les composants qui doivent avoir une surface très difficile de résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact important qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau à gradient fonctionnel comprend l'acier durci, les cames ou la couronne dentée, les roulements ou les arbres, et les applications de turbine [22-23]. Les domaines d'application des différents types de FGM sont présentés dans la section suivante et sont classés selon différents critères :

- **Selon la structure** : FGM structuré continu et discontinu (Layered) FGM. La différence est montrée par la **Figure 2.4.a** et la **Figure 2.4.b**.



**Figure 2.4.** Schéma du concept de gradation.

- **Selon le processus de fabrication :** FGM mince et Bulk FGM.

Les FGM minces sont fabriquées avec des méthodes différentes telles que le dépôt physique de vapeur (PVD), le dépôt chimique de vapeur (CVD), la méthode de synthèse à haute température auto-propagée (SHS) et bien d'autres, alors que les FGM en vrac sont fabriqués par des procédés tels que la technique métallurgique en poudre, la technique « Solid Free Form », etc.

### **2.2.2. Techniques de traitements des matériaux FGM :**

Les matériaux minces de qualité fonctionnelles sont habituellement sous la forme de revêtements de surface, il existe une large gamme de processus de dépôt de surface à choisir en fonction de l'exigence de service du processus.

- **Technique de dépôt de vapeur**

Il existe différents types de techniques de dépôt en phase vapeur, notamment : dépôt par pulvérisation cathodique, dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et dépôt physique de vapeur (PVD). Ces procédés de dépôt de vapeur sont utilisés pour déposer des revêtements de surface à gradation fonctionnelle et ils donnent une excellente microstructure, mais ils ne peuvent être utilisés que pour déposer un revêtement de surface mince. Ils sont intensifs en énergie et produisent des gaz toxiques comme sous-produits.



D'autres méthodes utilisées pour produire un revêtement à gradation fonctionnelle comprennent : la pulvérisation au plasma, l'électrodéposition, l'électrophorétique, le dépôt assisté par faisceau ionique (IBAD), l'auto-propagation, la synthèse à haute température (SHS), etc. Tous les procédés susmentionnés ne peuvent être utilisés pour produire des FGM en vrac parce qu'ils sont généralement lents et nécessitant beaucoup d'énergie, donc ils ne sont pas rentables pour produire des FGM en vrac.

Certains des procédés de fabrication pour la production de matériaux à gradient fonctionnel en vrac sont les suivants :

- **Métallurgie des poudres (PM)**

La technique de la métallurgie de la poudre (PM) est utilisée pour produire des matériaux à gradation fonctionnel grâce à trois étapes de base, à savoir : la pesée et le mélange de la poudre selon la répartition spatiale préconçue telle que dictée par l'exigence fonctionnelle, l'empilage et le collage des poudres prémélangées et enfin le frittage. La technique PM donne lieu à une structure par étapes. Si la structure continue est souhaitée, on utilise la méthode centrifuge.

- **Méthode centrifuge**

La méthode centrifuge est similaire à la coulée centrifuge où la force de gravité est utilisée par filage du moule pour former un matériau à grande échelle fonctionnel. Le matériau gradué est produit de cette manière en raison de la différence de densité de matière et du filage du moule. Il existe d'autres procédés similaires, comme la méthode centrifuge dans la littérature (p. Ex. Méthode de gravité, etc.). Bien que le classement continu puisse être réalisé en utilisant une méthode centrifuge, mais seules des formes cylindriques peuvent être formées. Un autre problème de la méthode centrifuge est qu'il existe une limite à laquelle le type de gradient peut être produit car le gradient est formé par un processus naturel (force centrifuge et différence de densité). Pour résoudre ces problèmes, les chercheurs utilisent une méthode de fabrication alternative connue sous le nom de forme solide.

- **Méthode de fabrication Solid Freeform (SFF)**

« Solid freeform » est un processus de fabrication additif qui offre de nombreux avantages qui incluent : Une vitesse de production plus élevée, moins énergivore, une utilisation maximale des

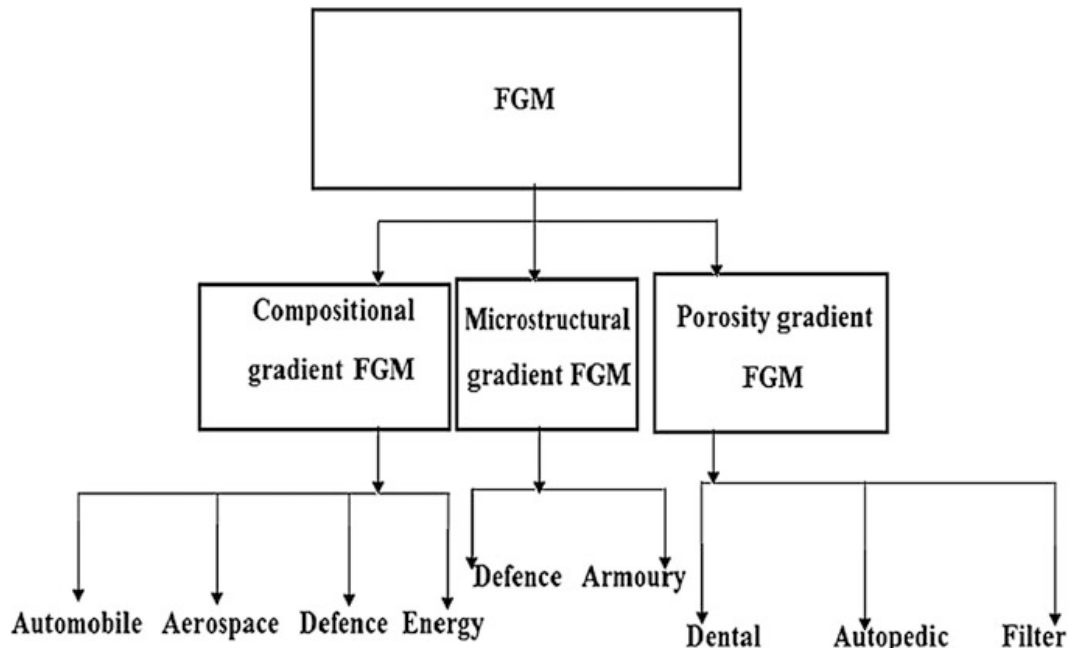
matériaux, la capacité de produire des formes complexes et la liberté de conception, car les pièces sont produites directement à partir de données CAO (par exemple, AutoCAD).

« SFF » comporte cinq étapes de base :

Génération de données CAO à partir du logiciel comme AutoCAD, Solid Edge, etc., conversion des données CAO en fichier STL (Triangulation Standard Language), tranche du STL en profils bidimensionnels en coupe transversale, construction du composant couche par couche, et l'enlèvement et la finition de la dernière couche. Il existe différents types de technologies SFF, les procédés à base de laser sont principalement utilisés dans la fabrication de matériaux à gradation fonctionnel.

### **2.2.3. Domaines d'application du FGM :**

Les caractéristiques importantes des FGM les ont favorisés dans presque tous les domaines humains. Les matériaux à gradation fonctionnel sont actuellement appliqués dans un certain nombre d'industries, avec un énorme potentiel à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et l'application futuriste des FGM sont présentées dans cette section. Les domaines d'application actuels comprennent l'aéronautique, l'automobile, la biomédicale, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique. La **Figure 2.5** présente les différents types de FGM et leurs domaines d'application. les FGM offrent une grande promesse dans les applications avec des conditions de fonctionnement difficiles, par exemple, pour des garnitures résistant à l'usure pour la manipulation de grandes particules de minerais abrasifs lourds dans l'industrie minière, pour les blindages thermiques de la fusée, pour les composants du moteur thermique, pour les tubes échangeurs de chaleur, pour les Parements au plasma pour les réacteurs à fusion dans les réacteurs nucléaires, les générateurs thermoélectriques et les applications isolantes électriques[24].



**Figure 2.5.** Domaines d'application pour les trois types de matériaux fonctionnellement gradués.

#### **2.2.4. Avantages des FGM :**

Certains des avantages des matériaux fonctionnellement classés sont mis en évidence ci-dessous :

- Le FGM comme une couche d'interface pour connecter deux matières incompatibles peut grandement améliorer la force de liaison.
- Le revêtement de FGM et l'interface peuvent être utilisés pour réduire la contrainte résiduelle et le stress thermique.
- Le revêtement en FGM peut être utilisé pour relier des matériaux différents et permet d'éliminer la contrainte à l'interface.
- Le revêtement en FGM améliore la résistance des connexions
- Le FGM a la capacité de contrôler la déformation.
- Le FGM fournit également les occasions de prendre les avantages des différents types de matériaux, par exemple, des céramiques et des métaux. La partie céramique présente une bonne résistance thermique, une résistance à l'usure et à l'oxydation (rouille), alors que la partie métallique a une résistance à la rupture supérieure, une résistance élevée et une forte capacité de liaison.

- Les FGM sont utilisées dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et sont utilisés comme revêtement protecteur sur des pales de turbine dans un moteur à turbine à gaz.

#### **2.2.5. Difficultés du FGM :**

Certaines questions nécessitent une étude approfondie et une attention particulière, principalement dans les aspects suivants :

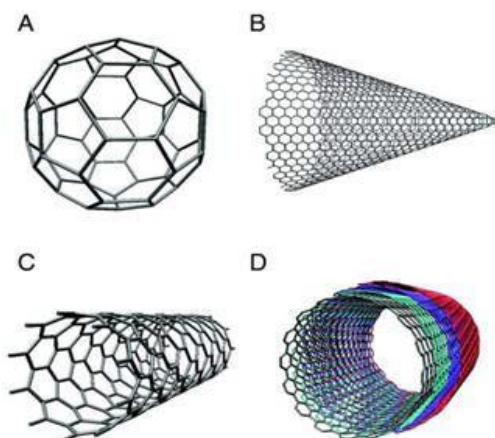
- Une base de données appropriée de matériau à gradient fonctionnel (comprenant les propriétés de matériaux, certains paramètres, le procédé de préparation des matériaux et de l'évaluation de la performance) doit être mise au point.
- Encore besoin d'autres recherches et un examen sur les propriétés physiques du modèle de matériau. La structure microscopique et la relation quantitative entre les conditions de préparation à établir afin de prévoir avec précision et fiabilité les propriétés physiques des matériaux classés.
- La recherche doit se concentrer sur la variation du gradient du matériau par rapport à la relaxation des contraintes thermiques et garder la route ouverte à la variété des applications d'ingénierie.
- Les matériaux à gradient fonctionnel préparés sont des échantillons de petite taille ou des structures simples. Des matériaux plus pratiques et valorisés doivent encore être développés.
- Les coûts de préparation sont très élevés.

### **2.3. Les nanotubes de carbone NTC :**

#### **2.3.1. Histoire des nanotubes de carbone :**

Depuis leur découverte en 1991 par Iijima [3], des nanotubes de carbone ont été étudiés par de nombreux chercheurs partout dans le monde. Leur grande longueur (jusqu'à plusieurs microns) et un petit diamètre (quelques nanomètres) donnent un grand rapport d'élancement. Ils peuvent être considérés comme la forme presque unique de fullerènes. Par conséquent, ces matériaux devraient posséder d'autres propriétés électroniques, mécaniques et moléculaires intéressantes. Surtout au début, toutes les études théoriques sur les nanotubes de carbone ont porté sur l'influence de la structure presque unidimensionnelle sur les propriétés moléculaires et électroniques.

Les fullerènes sont des molécules entièrement composées de carbone sous la forme d'une sphère creuse, d'un ellipsoïde ou d'un tube. Le C<sub>60</sub> sphérique (**Figure 2.6.a**) est composé de 60 atomes de carbone disposés dans une série d'hexagones et de pentagones entrelacés (icosaèdre tronqué); Cependant, des configurations de Fullerène moins sphériques, telles que C<sub>20</sub>, C<sub>36</sub>, C<sub>70</sub> et C<sub>78</sub>, ont également été décrites. Les CNH sont des gaines en forme de cornes composées de feuilles de graphène à paroi unique, de 2 à 3 nm de diamètre, qui se regroupent en agrégats d'un diamètre d'environ 80 nm. Les CNH individuels sont des structures en carbone graphite de forme conique, avec leurs pointes par des anneaux à cinq chaînons (**Figure 2.6.b**). Les NTC ont des diamètres relativement bien définis avec des longueurs contrôlables, tandis que les CNH augmentent de diamètre à mesure que leur longueur augmente, car, à mesure que la longueur augmente, la base de l'anocone augmente.



**Figure 2.6** molécules de fullerène.

### **2.3.2. Morphologie NTC :**

Les NTC appartiennent à la famille Fullerène d'allotropes carbone. Ce sont des molécules cylindriques constituées d'un arrangement hexagonal de sp<sup>2</sup> atomes de carbone hybridé. Ils sont décrits comme des cylindres creux formés par laminage de couches simples ou multiples de feuilles de graphène dans des bouteilles sans soudure. Ces structures cylindriques ont deux formes (SWNT) et des nanotubes de carbone à paroi multiple (MWNT). Les SWNT sont composés d'une seule couche de graphène cylindrique coiffée aux deux extrémités dans une disposition hémisphérique des réseaux de carbone. La fermeture du cylindre résulte de l'inclusion de structures CC pentagonales et heptagonales pendant le processus de croissance. Les MWNT comprennent plusieurs à des dizaines

de cylindres concentriques de coquilles graphitiques, chacun formant un SWNT. Les MWNT ont généralement un diamètre extérieur plus grand (2.5-100 nm) que les SWNT (0,6-2,4 nm) et se composent d'un nombre variable de couches SWNT concentriques, avec une séparation inter-couches d'environ 0,3 nm. Les SWNT ont un diamètre mieux défini, tandis que les MWNT sont plus susceptibles d'avoir des défauts de structure, ce qui entraîne une nanostructure moins stable [25].

### **2.3.3. Structure nanotube de carbone :**

De nombreuses structures exotiques de fullerènes existent : des sphères régulières, des cônes, des tubes et des formes aussi compliquées et étranges. Ici, nous décrivons certaines des structures les plus importantes et les plus connues.

Les nanotubes (SWNT) peuvent être considérés comme des feuilles de graphène à longue enveloppe. Comme indiqué précédemment, les nanotubes ont généralement un rapport longueur / diamètre d'environ 1000 afin qu'ils puissent être considérés comme des structures à peu près unidimensionnelles.

Plus détaillé, un SWNT se compose de deux régions distinctes avec différentes propriétés physiques et chimiques. Le premier est le flanc du tube et le second est le capuchon d'extrémité du tube. La structure de capuchon d'extrémité est similaire ou dérivée à partir d'un plus petit fullerène, tel que C<sub>60</sub>. Ces atomes de carbone placés dans des hexagones et pentagones forment les structures de capuchon d'extrémité. On peut facilement dériver du théorème d'Euler que douze pentagones sont nécessaires pour obtenir une structure de cage fermée qui ne comporte que des pentagones et des hexagones. La combinaison d'un pentagone et de cinq hexagones environnants entraîne la courbure souhaitée de la surface pour entourer un volume.

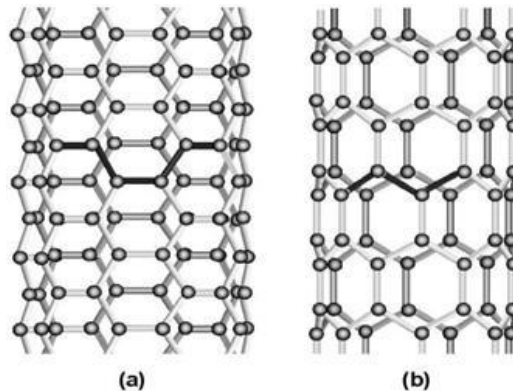
Une deuxième règle est la règle du pentagone isolée qui stipule que la distance entre les pentagones sur la coque Fullerène est maximisée afin d'obtenir une courbure locale minimale et un stress superficiel, ce qui donne une structure plus stable. La structure stable la plus petite qui peut être faite de cette façon est C<sub>60</sub>. Une autre propriété est que tous les Fullerènes sont composés d'un nombre pair d'atomes de carbone car ajouter un hexagone à une structure existante signifie ajouter deux atomes. L'autre structure dont un SWNT est composé est un cylindre. Il est généré lorsqu'une feuille de graphène d'une certaine taille est enveloppée dans une certaine direction. Comme le résultat est symétrique par cylindre, nous ne pouvons rouler que dans un ensemble discret de directions pour former un cylindre fermé.

Les nanotubes multi-murs (MWNT) peuvent être considérés comme une collection de SWNT concentriques à différents diamètres. La longueur et le diamètre de ces structures diffèrent beaucoup de ceux des SWNT et, bien sûr, leurs propriétés sont également très différentes.

#### **2.3.4. Chiralité des nanotubes de carbone :**

La chiralité d'un SWNT est obtenue à partir de son vecteur chiral  $C$ , défini par une paire d'entiers  $(n, m)$  obtenus à partir de l'agencement des hexagones de graphite par rapport à l'axe SWNT.

La configuration du fauteuil (**Figure 2.7.a**) avec les vecteurs chiraux  $(n, n)$  se caractérise par la forme perpendiculaire de la chaise à l'axe du tube, alors que la conformation zigzag (**Figure.2.7.b**) est caractérisée par des vecteurs  $(n, 0)$  et a une forme en V perpendiculaire à l'axe du tube. La chiralité des SWNT détermine leur conductivité, permettant leur développement potentiel dans une grande variété de dispositifs de commutation électroniques basés sur SWNT.



**Figure 2.7** La chiralité du NTC.

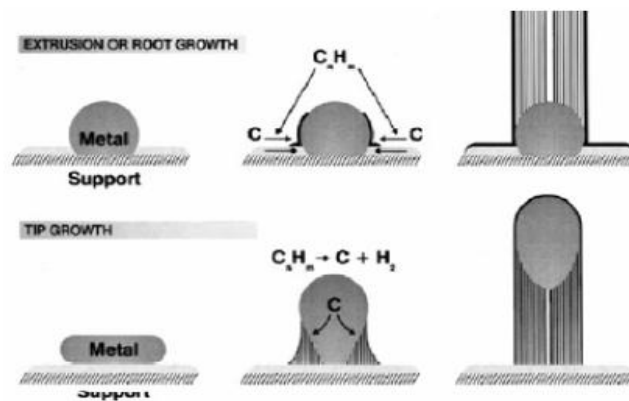
#### **2.3.5. Synthèses des NTC :**

Les nanotubes de carbone sont généralement produits par trois techniques principales, la décharge d'arc, l'ablation par laser et le dépôt chimique en phase vapeur, bien que les scientifiques recherchent des moyens plus économiques pour produire ces structures. En décharge d'arc, une vapeur est créée par une décharge d'arc entre deux électrodes de carbone avec ou sans catalyseur. Les nanotubes s'auto-assemblent à partir de la vapeur de carbone résultante. Dans la technique d'ablation par laser, un faisceau laser à haute puissance frappe un volume de gaz contenant du carbone contenant des gaz d'alimentation (méthane ou monoxyde de carbone). En ce

moment, l'ablation au laser produit un petit nombre de nanotubes propres, alors que les procédés de décharge d'arc produisent généralement de grandes quantités de matière impure. En général, le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) entraîne des MWNT ou des SWNT de mauvaise qualité [26].

### **2.3.5.1. Mécanisme de croissance :**

Le mécanisme de croissance des nanotubes de carbone est illustré sur la figure 2.8



**Figure 2.8** Mécanisme de croissance de nanotubes de carbone.

### **2.3.5.2. Décharge d'arc :**

La compréhension du mécanisme de croissance augmente et les mesures ont montré que différentes distributions de diamètre ont été trouvées en fonction du mélange d'hélium et d'argon. Ces mélanges ont différents coefficients de diffusions et conductivités thermiques. Ces propriétés affectent la vitesse avec laquelle les molécules de carbone et de catalyseur diffusent et refroidissent, affectant le diamètre des nanotubes dans le processus de l'arc. Cela implique que les tubules monocaténaire se nucléent et poussent sur des particules métalliques de différentes tailles en fonction de la vitesse de trempe dans le plasma et suggère que la température et les densités de catalyseur au carbone et au métal affectent la distribution du diamètre des nanotubes. Selon la technique exacte, il est possible de faire pousser sélectivement des SWNT ou des MWNT, ce qui est montré à la **Figure 2.9**. Deux méthodes de synthèse distinctes peuvent être réalisées avec l'appareil à décharge d'arc.



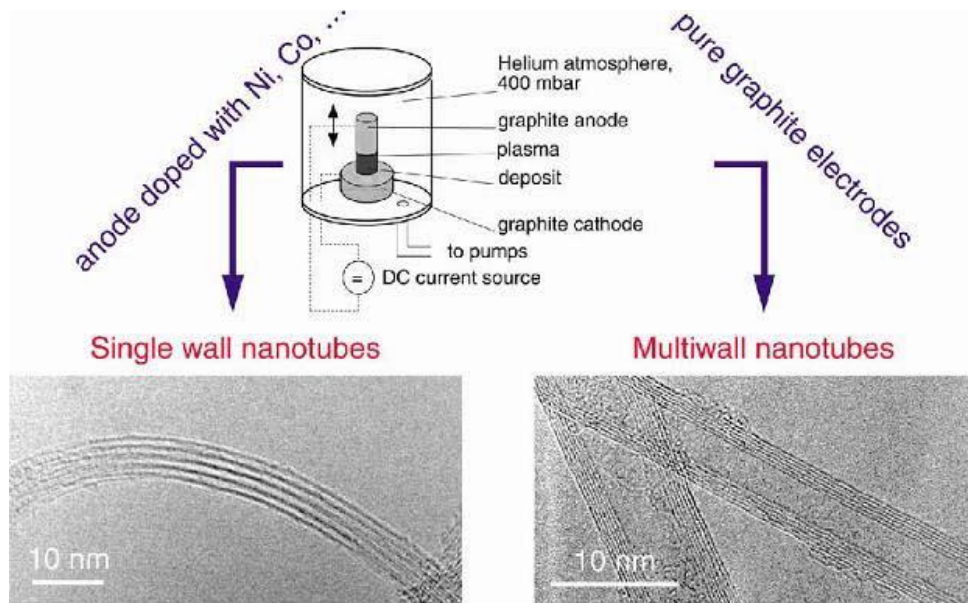


Figure 2.9. Méthode « Arc de décharge ».

### 2.3.5.3. Ablation au laser :

En 1995, le groupe de Smalley à Rice University a signalé la synthèse des nanotubes de carbone par vaporisation au laser. L'appareil de vaporisation laser utilisé par le groupe de Smalley est représenté sur la **Figure 2.10**. Un laser pulsé ou continu est utilisé pour vaporiser une cible de graphite dans un four à 1200 ° C. La principale différence entre le laser continu et pulsé, c'est que le laser pulsé exige une intensité lumineuse beaucoup plus élevée. Le four est rempli de gaz d'hélium ou d'argon afin de maintenir la pression à 500 Torr. Un panache de vapeur très chaud se forme, puis se dilate et se refroidit rapidement.

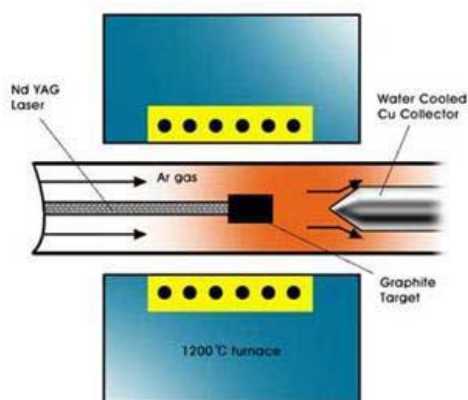


Figure 2.10. Ablation au Laser.

#### **2.3.5.4. Dépôt chimique en phase vapeur :**

La synthèse de dépôt chimique en phase vapeur (CVD) est obtenue en mettant une source de carbone dans la phase gazeuse et en utilisant une source d'énergie, telle qu'un plasma ou une bobine chauffée de façon résistive, pour transférer de l'énergie à une molécule de carbone gazeuse.

La synthèse CVD de nanotubes de carbone est essentiellement un processus en deux étapes consistant en une étape de préparation du catalyseur suivie de la synthèse réelle du nanotube. Le catalyseur est généralement préparé en pulvérisant un métal de transition sur un substrat puis en utilisant soit une attaque chimique soit un recuit thermique pour induire une nucléation de particule de catalyseur. Le recuit thermique entraîne une formation de grappes sur le substrat, à partir duquel les nanotubes vont croître.

L'ammoniac peut être utilisé comme agent de gravure. Les températures pour la synthèse de nanotubes par CVD sont généralement dans la gamme 650-900 ° C. Les rendements typiques pour les maladies cardiovasculaires sont d'environ 30%. Ce sont les principes fondamentaux du processus CVD. Au cours de la dernière décennie, des techniques différentes pour la synthèse des nanotubes de carbone avec CVD ont été développées, telles que le CVD amélioré par plasma, CVD chimique thermique, CVD catalytique à l'alcool, croissance de la phase vapeur, CVD à base de gel aéroélectrique et CVD assisté par laser.

#### **2.3.6. Propriétés des NTC :**

Les propriétés électroniques, moléculaires et structurelles des nanotubes de carbone sont déterminées dans une large mesure par leur structure presque unique. Les propriétés les plus importantes des NTC et leur origine moléculaire sont indiquées ci-dessous.

##### **2.3.6.1. Réactivité chimique :**

La réactivité chimique d'un NTC est, comparée à une feuille de graphène, améliorée en conséquence directe de la courbure de la surface NTC. La réactivité des nanotubes de carbone est directement liée à l'incompatibilité orbitaire par pi-orbital provoquée par une courbure accrue. Par conséquent, une distinction doit être faite entre le flanc et les extrémités d'un nanotube. Pour la

même raison, un diamètre de nanotubes plus petit entraîne une réactivité accrue. La modification chimique covalente des parois latérales ou des extrémités s'est révélée possible. Par exemple, la solubilité des NTC dans différents solvants peut être contrôlée de cette façon. Cependant, l'étude directe des modifications chimiques sur le comportement des nanotubes est difficile car les échantillons de nanotubes bruts ne sont pas encore assez purs.

#### **2.3.6.2. Conductivité électrique :**

Selon leur vecteur chiral, les nanotubes de carbone à petit diamètre sont semi-conducteurs ou métalliques. Les différences dans les propriétés conductrices sont causées par la structure moléculaire qui aboutit à une structure de bande différente et donc à un écart de bande différent. Les différences de conductivité peuvent facilement être obtenues à partir des propriétés de la feuille de graphène. Il a été montré que  $(n, m)$  nanotube est métallique en tant que compte que :  $n = m$  ou  $(nm) = 3i$ , où  $i$  est un entier et  $n$  et  $m$  définissent le nanotube. La résistance à la conduction est déterminée par des aspects de la mécanique quantique et a été prouvé être indépendant de la longueur du nanotube.

#### **2.3.6.3. Activité optique :**

Les études théoriques ont révélé que l'activité optique de nanotube chiral disparaît si les nanotubes deviennent plus grands. Il est donc prévu que d'autres propriétés physiques sont influencées par ces paramètres aussi. L'utilisation de l'activité optique peut entraîner des dispositifs optiques dans lesquels les NTCs jouent un rôle important.

#### **2.3.6.4. Force mécanique :**

Les nanotubes de carbone ont un très grand module d'Young dans leur direction axiale. Le nanotube dans son ensemble est très flexible en raison de son grand rapport d'élancement. Par conséquent, ces composés sont potentiellement appropriés pour des applications dans des matériaux composites qui nécessitent des propriétés anisotropes.

#### **2.3.7. Limitations des NTC :**

- Le manque de solubilité dans la plupart des solvants compatibles avec le milieu biologique (à base aqueuse).
- la production de lots structurellement et chimiquement reproductibles de nanotubes de carbone ayant des caractéristiques identiques.
- La difficulté à maintenir une qualité élevée et impuretés minimales [27].

## **2.4. FGM renforcé par les nanotubes de carbone (FG-CNTRC) :**

### **2.4.1. Définition :**

Les matrices métalliques ou en céramique renforcées CNT renforcées fonctionnellement offrent des améliorations dans les propriétés thermomécaniques telles que : la légèreté, la stabilité dimensionnelle, les propriétés de barrière ignifuge et résistance à la chaleur. Par rapport aux métaux, les composites FGM renforcés par les CNT présentent des rapports de résistance à la densité plus élevés, des rapports de rigidité à la densité plus élevée, une meilleure résistance à la fatigue, une plus grande résistance à l'usure et des propriétés de résistance à des températures élevées.

### **2.4.2. Applications des FGM renforcées par les NTC :**

La technologie FGM offre un grand potentiel pour créer la révolution technologique de la prochaine génération, en particulier dans le domaine de la biotechnologie et de la nanotechnologie. Les matrices métalliques renforcées de NTC sont classiquement utilisées dans les outils de coupe, l'usinage de matériaux résistant à l'usure, les mines et le forage géothermique en raison de leur combinaison unique de dureté, de ténacité et de résistance à la chaleur. Les matériaux composites renforcés fonctionnellement de NTC ont la capacité de générer de nouvelles fonctionnalités et d'exécuter de nouvelles fonctions plus efficaces que les plus grandes structures et machines. En raison de la variation fonctionnelle de leurs compositions et de leurs propriétés physiques / chimiques (par exemple, stabilité, dureté, conductivité, réactivité, sensibilité optique, point de fusion, etc.), ils peuvent être manipulés pour améliorer les propriétés globales des matériaux classiques. Certaines des applications actuelles et futuristes des FGM sont répertoriées comme suit :

- **Commercial et industriel**

Certaines des applications dans le domaine commercial et industriel sont : les récipients sous pression, les réservoirs de carburant, les inserts d'outils de coupe, les cas d'ordinateur portable, les pales de turbines éoliennes, les bouteilles d'air de lutte contre l'incendie, les tubes cryogéniques à

scanner IRM, les cadres de lunettes, les instruments de musique, l'arbre du moteur de forage, les rayons X Tables, casques.

- **Automobiles**

Dans le domaine de l'automobile, les applications comprennent : les chambres de combustion (SiC-SiC), les garnitures de cylindre moteur (Al-SiC), les pistons moteurs diesel (SiCw / Al-alliage), les ressorts à lames (Eglass / époxy), les arbres d'entraînement (Al-C ), Volants (Al-SiC), freins de voiture de course, amortisseurs (SiCp / Al-alliage).

- **Équipement et structure aérospatiale**

Les FGM sont très utiles dans l'aéronautique spécialement pour la buse de fusée (fibres TiAl-SiC), les panneaux d'échange de chaleur, la structure de treillis spatial, les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de caméra, les roues de turbine (fonctionnement supérieur à 40 000 tr / min), les capuchons de nez et le bord d'attaque des missiles et Navette spatiale, etc.

- **Sous-marine**

Certaines des applications des FGM pour sous-marine impliquent : arbre de propulsion (carbone et fibres de verre), coque de pression cylindrique (graphite / époxy), domes sonar (verre / époxy), système de tuyauterie composite, bouteilles de plongée (Al-SiC).

- **Biotechnologie**

Les bio-composites en gel polyvinylique renforcé à base de nano hydroxyapatite à gradient fonctionnel (Nano HA / PVA) peuvent être préparés par une méthode de coulée couche par couche combinant avec la technologie des cycles de congélation / décongélation. Nano HA / PVA gel bio composites ont été un matériau de réparation de cartilage articulaire artificiel prometteur et excellent. Par rapport aux matériaux à base d'hydrogel tels que ; L'alcool polyvinylique (PVA), l'acide poly lactique et le chitosane, les bio composites nano HA / PVA possèdent une bio activité et des propriétés mécaniques supérieures en raison de l'existence de nano HA dans les composites. Les applications potentielles des FGM sont à la fois diverses et nombreuses. D'autres applications des CNT dans FGM ayant des applications récentes sont les suivantes :

- Les actionneurs piézoélectriques à gradation fonctionnelle renforcés par la CNT.
- Revêtements de four et éléments de protection thermique en microélectronique.
- Les outils et les matrices à gradient fonctionnel renforcé par la CNT pour une meilleure gestion thermique, une meilleure résistance à l'usure, une réduction de la ferraille et une amélioration de la productivité des procédés.

- Les matériaux de phosphate de calcium à base de polymère renforcés par la CNT ont été renforcés pour le remplacement des os [28].

## **2.5. Conclusion :**

Les FGM fournissent un changement relatif en termes de propriétés des matériaux sur la distance et la direction. Ainsi, ils disposent d'une large gamme d'applications d'ingénierie qui devrait augmenter à mesure que le coût des processus de fabrication de ces matériaux sera réduit en améliorant les techniques de traitement.

Cette modeste recherche sur des nanotubes de carbone révèle une vue d'ensemble sur la structure, la morphologie, la synthèse et les méthodes de purification ainsi que leurs propriétés, leurs avantages et leurs applications.

**CHAPITRE 3**

***MODELISATION, THEORIES DE  
DEFORMATIONS ET FORMULATION  
ENERGITIQUE DES PLAQUES FG-  
CNTRC***

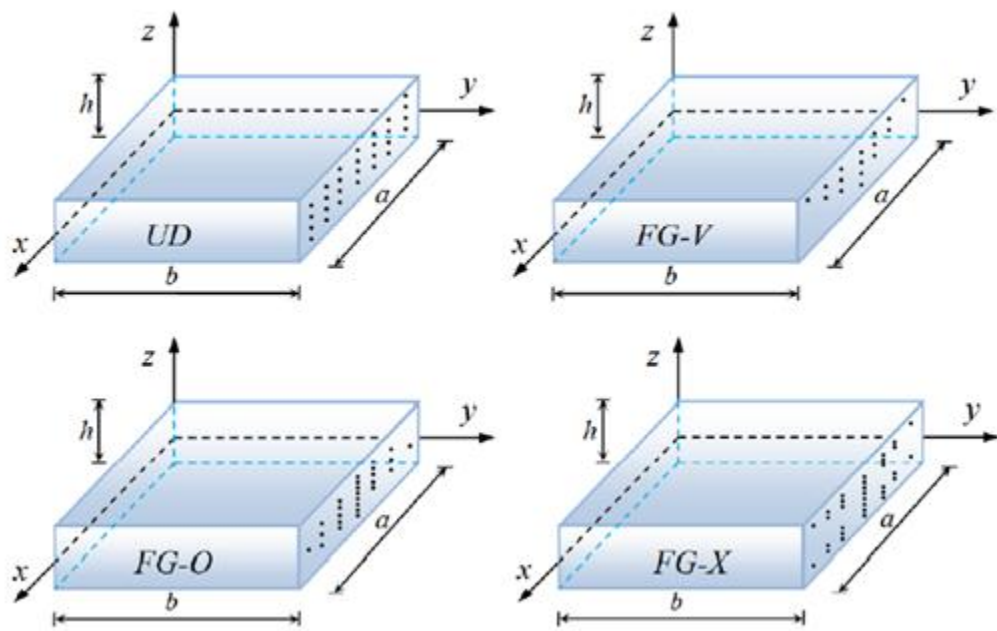
### 3.1. Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de modéliser la plaque FG-CNTRC, ainsi que d'explicitier deux théories de plaques composites couramment utilisées, à savoir la théorie classique des plaques et la théorie de la plaque de déformation en cisaillement du premier ordre incluant l'effet de l'inertie de rotation. Pour donner un aperçu des théories discutées dans ce chapitre, un aperçu de la littérature pertinente sur les théories des plaques est inclus. Donc le présent chapitre a pour objectif d'établir les équations de mouvement de notre système structural, soit la plaque FG-CNTRC en se basant sur les théories sus-citées.

### 3.2. Modélisation d'une plaque FG-CNTRC :

- **Plaque composite à gradient fonctionnel renforcée aux nanotubes de carbone.**

Considérons une plaque FG-CNTRC avec la longueur  $a$ , la largeur  $b$  et l'épaisseur  $h$  comme indiqué sur la **Figure 3.1** :



**Figure 3.1.** La distribution des CNT dans une matrice SWCNT.

La matrice polymère de la plaque composite est renforcée par les SWCNT. La distribution des CNT dans une matrice peut être FG ou uniforme. Dans cette étude, on considère quatre types de FG avec le cas réparti uniformément. UD, FG-O, FG-V et FG-X représentant les distributions FG des CNT dans la matrice polymère. La distribution uniforme est affichée par UD. Dans cette



recherche, l'approche de la règle modifiée des mélanges qui contient les paramètres d'efficacité est largement utilisée pour extraire les propriétés élastiques de la plaque FG-CNTRC [29] :

$$E_{11} = \eta_1 \cdot V_{CNT} \cdot E_{11}^{CNT} + V_m \cdot E_m \quad (3.1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (3.2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3.3)$$

Où  $(E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT})$  sont les modules de Young et le module de cisaillement de NTC, respectivement.  $(E_m, G_m)$  sont le module de Young et le module de cisaillement de la matrice polymère ;  $\eta_1, \eta_2$  et  $\eta_3$  sont les paramètres d'efficacité des NTC. La fraction volumique des NTC et de la matrice est désignée respectivement par  $V_{CNT}$  et  $V_m$ , qui peut être donnée par [30] :

$$V_m + V_{CNT} = 1 \quad (3.4)$$

Le coefficient de Poisson et la masse volumique effectifs dépendent faiblement de la position et sont exprimés par :

$$\nu_{12} = V_{CNT}^* \cdot \nu_{12}^{CNT} + V_m \cdot \nu_m \quad (3.5)$$

$$\rho = V_{CNT} \cdot \rho_{CNT} + V_m \cdot \rho_m \quad (3.6)$$

Où  $\nu_{12}^{CNT}, \rho_{CNT}$  et  $\nu_m, \rho_m$  sont le coefficient de Poisson et la masse volumique de NTC et de la matrice, respectivement.

La fraction volumique des NTC en fonction de la coordonnée z dans la direction de l'épaisseur peut être exprimée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} V_{CNT}(z) &= V_{CNT}^* && \text{(UD CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - V CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - O CNTRC)} \\ V_{CNT}(z) &= 2 \left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* && \text{(FG - X CNTRC)} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Où :

$$V_{CNT}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) \cdot W_{CNT}} \quad (3.8)$$

$W_{CNT}$  : est la fraction massique des nanotubes qui est la même pour les 4 types de distributions.

### 3.3. Vue d'ensemble des théories de la plaque FGM :

#### 3.3.1. Classification des théories structurales :

L'analyse des plaques composites dans le passé a été basée sur l'un des éléments suivants :

(1) Théories équivalentes à une seule couche (2-D) :

- (a) Théorie classique des plaques stratifiées.
- (b) théories de la plaque laminée de déformation par cisaillement.

(2) Théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3-D) :

- (a) Formations d'élasticité 3-D traditionnelles.
- (b) Théories de Layerwise.

(3) Méthodes de modèle multiples (2-D et 3-D) :

Les théories des plaques équivalentes à une seule couche (ESL) sont dérivées de la théorie de l'élasticité 3-D en faisant des hypothèses appropriées concernant la cinématique de déformation ou l'état de contrainte par l'épaisseur du stratifié. Ces hypothèses permettent la réduction d'un problème 3-D à un problème 2-D. Dans la théorie de l'élasticité tridimensionnelle ou dans une théorie en couches, chaque couche est modélisée en solide 3-D. Dans ce chapitre, nous présentons la théorie classique des plaques et la théorie de la plaque de déformation du cisaillement de premier ordre appliquée aux plaques composites.

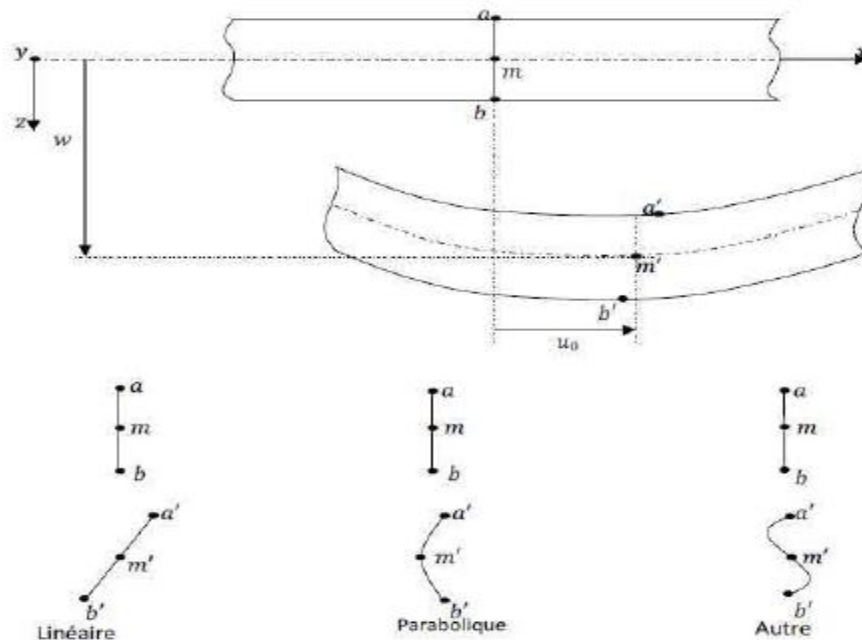


Figure 3.2. Déformation de la section normale par rapport au plan moyen.

Les théories de plaques composites stratifiées à une seule couche équivalente sont celles dans lesquelles une plaque stratifiée hétérogène est traitée comme une couche unique statiquement équivalente ayant un comportement constitutif complexe, réduisant le problème continu 3D à un problème 2D. Les théories ESL sont développées en supposant la forme du champ de déplacement ou du champ de contrainte comme une combinaison linéaire de fonctions inconnues et la coordonnée d'épaisseur [31-33] :

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (3.9)$$

Où  $\varphi_i$  est la ième composante du déplacement ou de la contrainte,  $(x, y)$  les coordonnées dans le plan,  $z$  la coordonnée d'épaisseur,  $t$  le temps, et  $\varphi_i^j$  sont des fonctions inconnues à déterminer. Lorsque  $\varphi_i$  sont des déplacements, les équations régissant  $\varphi_i^j$  sont déterminées par le principe des déplacements virtuels (ou sa version dynamique lorsque la dépendance temporelle doit être incluse).

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) (x, y, t) \quad (3.10)$$

Ces quantités sont déterminées en termes de contraintes réelles et de contraintes virtuelles, qui dépendent des fonctions supposées de déplacement,  $\varphi_i$  et leurs variations. Pour les structures de plaques, laminées ou non, l'intégration sur le domaine de la plaque est représentée comme le produit (tensorant) de l'intégration sur le plan de la plaque et l'intégration sur l'épaisseur de la plaque, en raison de la nature explicite du déplacement supposé Champ dans la coordonnée d'épaisseur :

$$\int_{Vol} (\cdot) dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_0} (\cdot) d\Omega dz \quad (x, y, t) \quad (3.11)$$

Où  $h$  désigne l'épaisseur totale de la plaque, et  $\Omega_0$  désigne le plan médian non déformé de la plaque, qui est choisi comme plan de référence. Étant donné que toutes les fonctions sont explicites dans la coordonnée d'épaisseur, l'intégration sur l'épaisseur de la plaque est réalisée explicitement, ce qui réduit le problème en deux dimensions. Par conséquent, les équations d'Euler-Lagrange de l'équation (3.10) consistent en des équations différentielles impliquant les variables dépendantes  $\varphi_i^j(x, y, t)$  et les résistances moyennes exprimées en épaisseur  $R_{ij}^{(m)}$ :

$$R_{ij}^{(m)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z)^m \sigma_{ij} dz \quad (3.12)$$

Les résultats peuvent être écrits en termes de  $\varphi_i$  à l'aide des équations constitutives présumées (relations contraintes-contraintes) et de contraintes de déplacement. Un développement plus complet de cette procédure se trouve dans ce chapitre.

La même approche est utilisée lorsque  $\varphi_i$  désigne les composantes de la contrainte, sauf que la base de la dérivation des équations de régulation est le principe des forces virtuelles, les théories basées sur la contrainte ne seront pas développées ici. La théorie de la plaque laminée ESL la plus simple est la théorie classique des plaques stratifiées (ou CPT) [34], qui est une extension de la théorie des plaques Kirchhoff (classique) aux plaques composites stratifiées sont basées sur le champ de déplacement :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Où  $(u_0, v_0$  et  $w_0)$  sont les composantes du déplacement le long des directions des coordonnées  $(x, y, z)$ , respectivement, d'un point sur le plan médian (c'est-à-dire  $z = 0$ ). Le champ de déplacement (3.13) implique que les lignes droites normales au plan  $(xy)$  avant la déformation restent droites et normales à la surface médiane après déformation. L'hypothèse de Kirchhoff équivaut à négliger à la fois les effets de cisaillement transversaux et transversaux normaux ; C'est-à-dire que la déformation est due entièrement à l'étirement en pliage et au plan.

La théorie suivante dans la hiérarchie des théories de la plaque composites est la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (ou FSDT) [34], qui repose sur le champ de déplacement suivant :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  désignent des rotations sur les axes  $x$  et  $y$ , respectivement. La FSDT étend la cinématique de la CPT en incluant une déformation de cisaillement transversale brute dans ses hypothèses cinématiques ; C'est-à-dire que la contrainte transversale de cisaillement est supposée constante par rapport à la coordonnée d'épaisseur. L'inclusion de cette forme rudimentaire de déformation par cisaillement permet de relâcher la restriction de la normalité de la théorie du stratifié classique. La théorie de la déformation du cisaillement du premier ordre nécessite des

facteurs de correction du cisaillement [34] qui sont difficiles à déterminer pour les structures de plaques composite stratifiées arbitrairement. Les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement des paramètres de stratification et géométriques, mais aussi des conditions de chargement et de contour.

En CPT et en FSDT, on utilise l'hypothèse d'état de contrainte plane et on utilise la forme réduite de contrainte plane de la loi constitutive. Dans les deux théories, l'inextensibilité et / ou la rectitude des normales transversales peuvent être supprimées. De telles extensions conduisent à des théories des plaques de second ordre et d'ordre supérieur.

Les théories d'ordre supérieur introduisent d'autres inconnues qui sont souvent difficiles à interpréter en termes physiques. La théorie du second ordre avec une inextensibilité transversale est basé sur le champ de déplacement suivant :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

La théorie de la plaque laminée de troisième ordre de Reddy [35-36] avec une inextensibilité transversale est basée sur le champ de déplacement :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^3 \left( -\frac{4}{3h^2} \right) \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^3 \left( -\frac{4}{3h^2} \right) \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

### **3.3.2. Théorie classique des plaques minces (CPT) :**

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent a deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement  $\frac{h}{a}$  ou  $\frac{h}{b} \leq 0.05$  ). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligeable.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'inertie de rotation est aussi négligée.

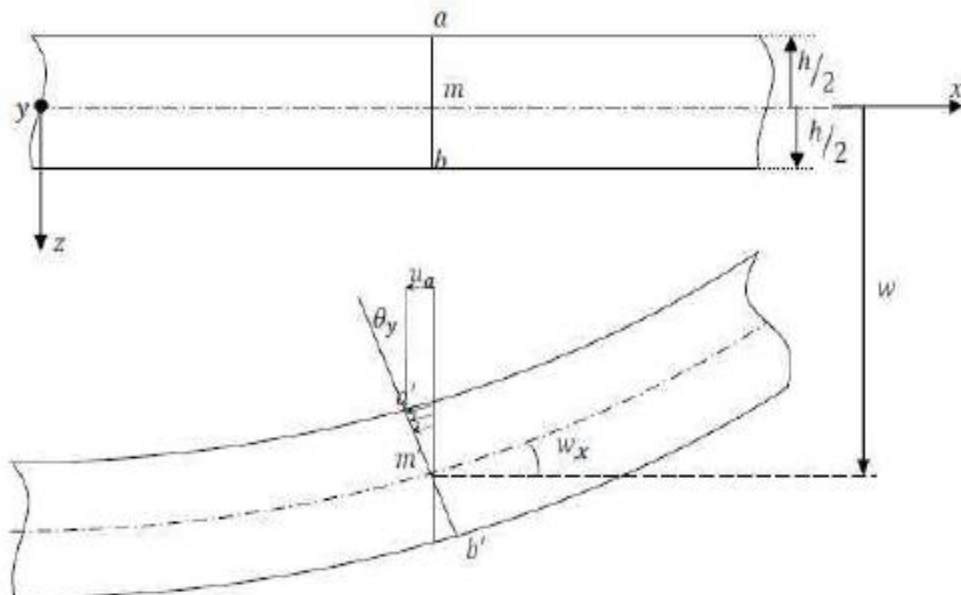
- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaque ». Le champ des déplacements d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $(t)$  s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z, t) &= U_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= V_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= W_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Où  $U_0, V_0, W_0$  sont des déplacements le long des axes de coordonnées  $x, y$  et  $z$  d'un point du plan moyen (plan  $z = 0$ ).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (**Figure 3.3**), ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney, Timoshenko et Woinowsky-Krieger).



**Figure 3.3.** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.

**3.3.3. La théorie des plaques du premier ordre :**

**3.3.3.1 Déplacements et déformations :**

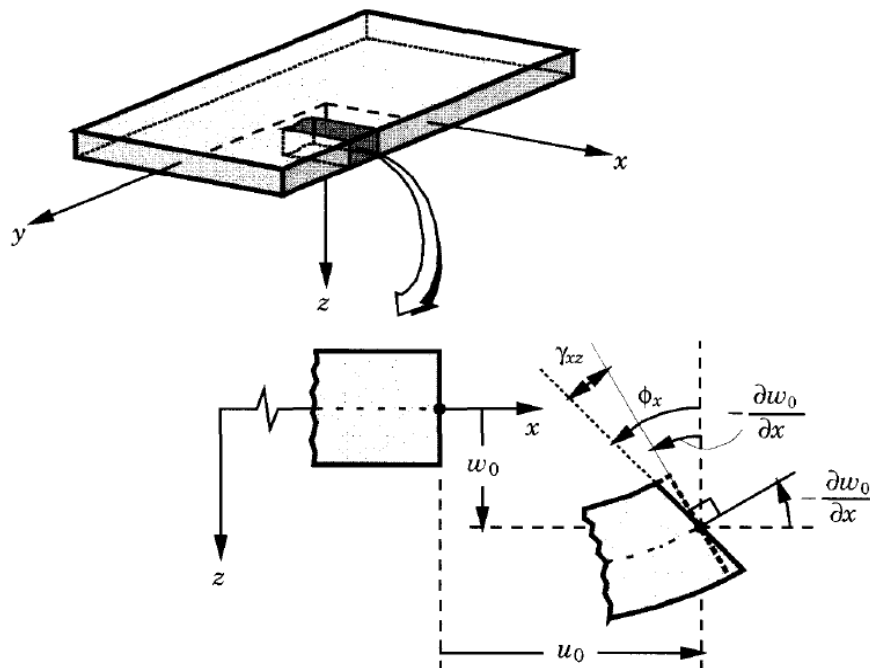
• **Détermination du champ des déformations :**

Dans la théorie des plaques composites de déformation par cisaillement (FSDT) du premier ordre, l'hypothèse de Kirchhoff est détendue en retirant la troisième partie ; C'est-à-dire que les normales transversales ne restent pas perpendiculaires à la surface médiane après déformation (**Figure 3.4**). Cela équivaut à inclure des déformations transversales de cisaillement dans la théorie. L'inextensibilité des normales transversales exige que  $w$  ne soit pas fonction de la coordonnée de l'épaisseur  $z$ . Sous les mêmes hypothèses et restrictions que dans la théorie du stratifié classique, le champ de déplacement de la théorie du premier ordre est sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Où  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  sont des fonctions inconnues à déterminer. Comme précédemment,  $(u_0, v_0, w_0)$  désignent les déplacements d'un point sur le plan ( $z = 0$ ). Notez que :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y \quad (3.19)$$



**Figure 3.4.** Géométries non déformées et déformées d'un bord d'une plaque sous les hypothèses de la théorie des plaques de premier ordre.

Notons que  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations d'une normale transversale autour des axes  $y$  et  $x$ , respectivement (**Figure 3.4**). La notation de  $\phi_x$  et  $\phi_y$  indique que la rotation autour de l'axe des abscisses peut être source de confusion pour certains, et ils ne suivent pas la règle de droite. Cependant, la notation a été largement utilisée dans la littérature. Si  $(\beta_x, \beta_y)$  désignent les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement, et qui suivent la règle de droite, alors :

$$\beta_x = -\phi_y, \quad \beta_y = \phi_x \tag{3.20}$$

Les quantités  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  seront appelées les déplacements et rotations généralisés. Pour des plaques moyennement épaisses, c'est-à-dire lorsque le rapport dimensionnel / épaisseur de la plaque dans le plan est de l'ordre 50 ou supérieur, les fonctions de rotation  $\phi_x$  et  $\phi_y$  devraient s'approcher des pentes respectives de la déviation transversale :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{3.21}$$

Les déformations non linéaires associées au champ de déplacement (3.24) sont obtenues En utilisant l'équation (3.22) dans les relations de déplacement – déformation [37] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{yz} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{yz} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

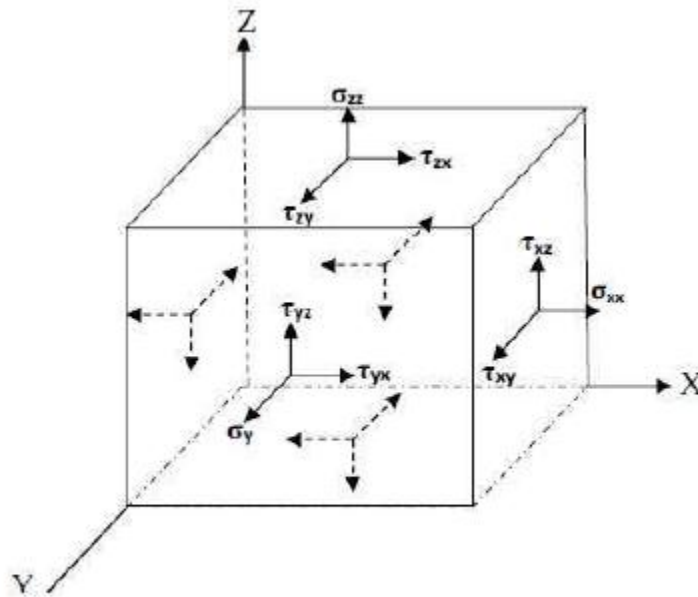


$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Notons que les contraintes ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ ) sont linéaires à travers l'épaisseur de la plaque, tandis que les contraintes transversales ( $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ ) sont constantes par rapport à l'épaisseur du stratifié dans la théorie de la plaque laminée de premier ordre. Bien sûr, l'état constant des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque est une approximation grossière du champ de contrainte réelle, qui est au moins quadratique à travers l'épaisseur.

- **Détermination du champ des contraintes :**

Les différentes contraintes agissant sur un point matériel sont représentées sur la **Figure 3.5**.



**Figure 3.5.** Composants du vecteur des contraintes.

Les relations contraintes-déformations peuvent être écrites comme une fonction linéaire par l'équation suivante [37] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yy} &= Q_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + Q_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} &= Q_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \\ \tau_{xz} &= Q_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \\ \tau_{xy} &= Q_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21} \cdot E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

### 3.3.3.2. Détermination des efforts et moments appliqués à la plaque FGM :

- **Résultantes en membrane :**

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$  est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(x, y) dz \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.29)$$

Les composantes  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de la plaque. Elles sont schématisées symboliquement sur la **Figure 3.6**.

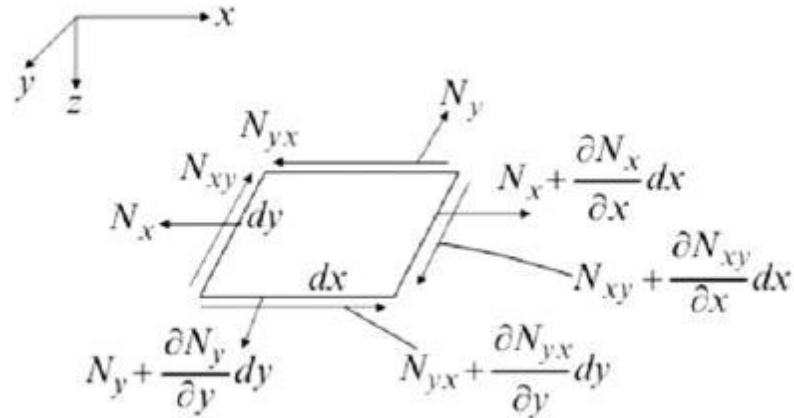


Figure 3.6. Efforts agissant dans le plan.

- **Moments de flexion et de torsion :**

Les relations fondamentales sont également intervenues les moments résultants des contraintes exercées sur un élément FGM. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.30)$$

Les composantes  $M_{xx}, M_{yy}$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la **Figure 3.7**.

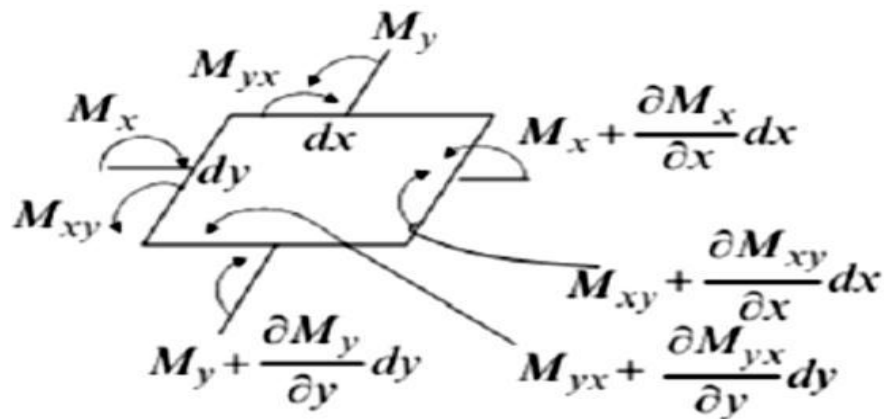


Figure 3.7. Moments agissant sur un élément.

- **Résultantes en cisaillement :**

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière (**Figure 3.8**) par :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.31)$$

Et les quantités  $(Q_x, Q_y)$  sont appelées les forces transversales résultantes.

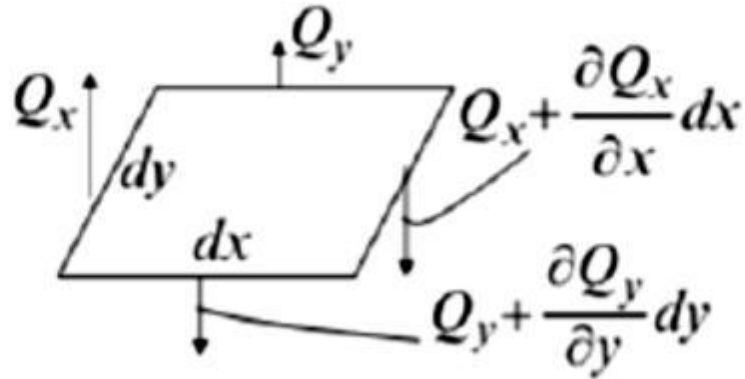


Figure 3.8. Efforts tranchants dans un élément.

- **Facteurs de correction du cisaillement ;**

Étant donné que les déformations de cisaillement transversales sont représentées comme constantes par l'épaisseur du stratifié, il s'ensuit que les contraintes de cisaillement transversales seront également constantes. Il est bien connu de la théorie élémentaire des faisceaux homogènes que la contrainte de cisaillement transversale varie paraboliquement à travers l'épaisseur du faisceau. Dans les poutres et plaques stratifiées composites, les contraintes transversales de cisaillement varient au moins quadratiquement à travers l'épaisseur de la couche. Cet écart entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la théorie du premier ordre est souvent corrigé dans le calcul de la force de cisaillement transversale résultante  $(Q_x, Q_y)$  en multipliant les intégrales dans l'équation (3.31) par un paramètre  $K_s$ , Appelé coefficient de correction de cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.32)$$

Où :  $K_s = 5/6$

La force et le moment résultant sont liés au déplacement généralisé  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ , en remplaçant les équations. (3.24) dans l'équation (3.25) et ensuite dans l'équation (3.29), (3.30) et (3.32) nous avons les formes matricielles suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Où :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \cdot (1, z, z^2) \cdot dz ; (ij = 11,22,12,66) \quad (3.36)$$

$$A_{ij}^s = K_s \cdot \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz ; (ij=44,55) \quad (3.37)$$

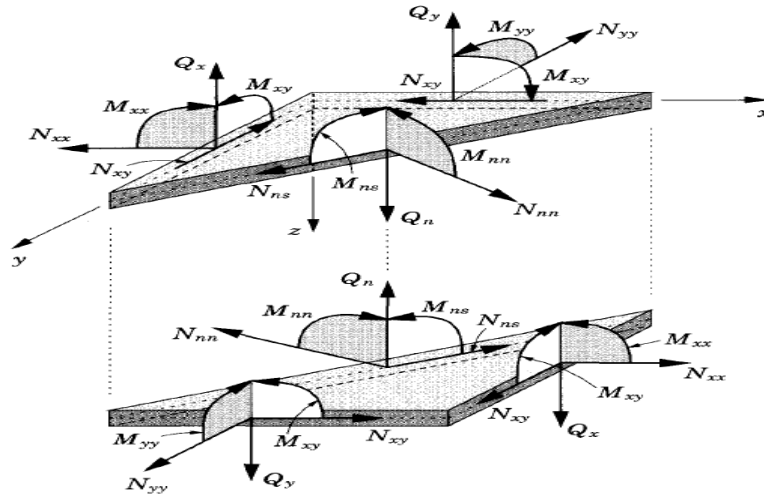


Figure 3.9. Résistance de la force et du moment sur un élément de plaque.

### 3.3.3.3. Modélisation des charges externes :

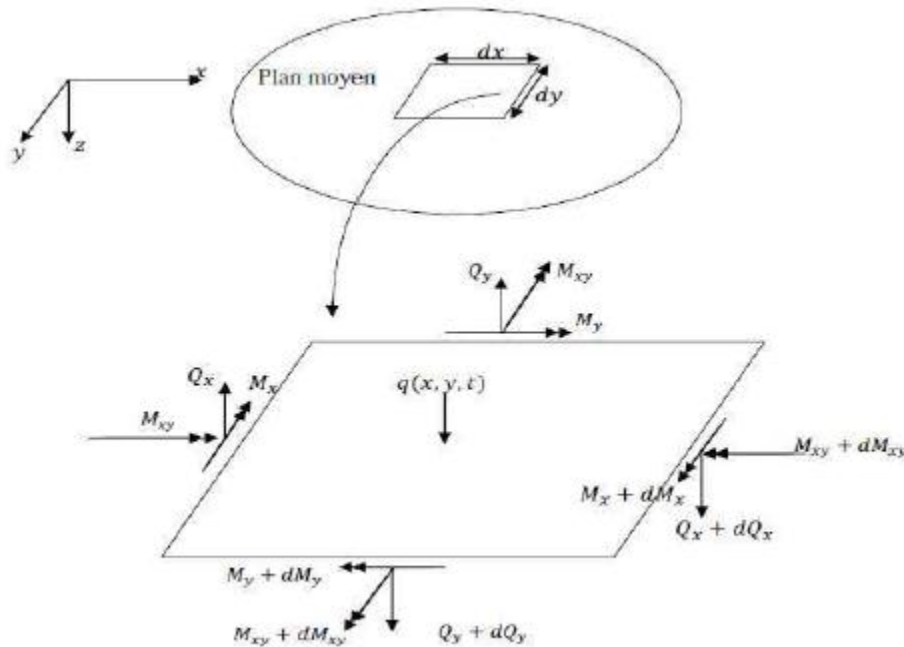
Dans le cas de l'étude des plaques en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des plaques constituées d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion.

Dans un problème d'élasticité, une plaque subissant des chargements transversaux au milieu (selon  $x$  et  $y$ ) que ces charges peuvent être sinusoïdales ou ayant toute autre forme de distribution d'intensité  $q(x, y)$  doit pouvoir supporter ces chargements, autrement dit, la plaque réagit de telle manière qu'elle puisse créer l'équilibre dans chacun de ses éléments. **La Figure 3.10** montre le cas général d'un élément d'une plaque en équilibre.

Ainsi, dans certains procédés de mise en forme, l'apparition des contraintes résiduelles est inévitable, et peut engendrer le flambage, qui se traduit en défauts géométriques.

Le phénomène de flambage apparait ainsi comme le processus qui produit un écart infiniment petit avec la position d'équilibre. Ceci exige la modélisation de ce phénomène d'instabilité mécanique afin de bien définir la forme de l'amplitude de ces présents articles.

On présente un modèle de flambage (**Figure 3.11**) possédant la faculté de détecter la charge critique de flambage d'une plaque FGM sous forces distribuées de pré-flambage ( $P_x, P_y$ ) sachant que :



**Figure 3.10.** Equilibre d'un élément plaque.

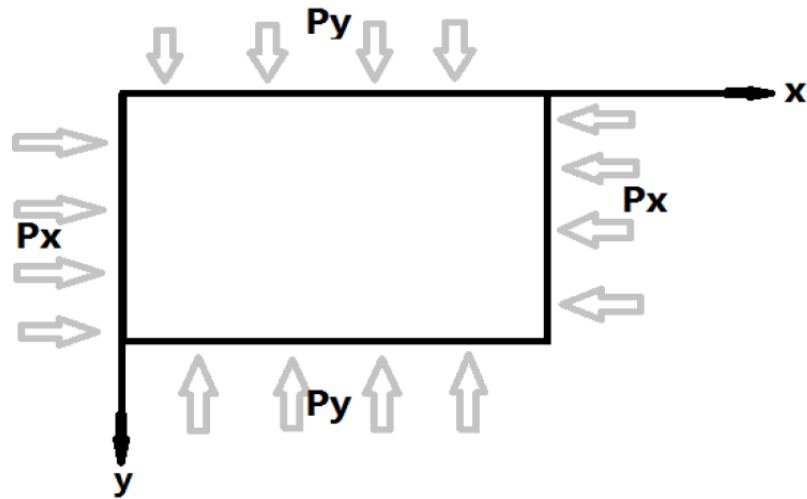


Figure 3.11. Les forces distribuées de pré-flambage.

### 3.4. Formulation énergétique des plaques composite renforcée par des nanotubes en carbone :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des FGM. Cette formulation associée aux conditions aux limites permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des méthodes de recherche de solutions approchées du comportement mécanique des FGM.

#### 3.4.1. Energie de déformation :

L'énergie de déformation (énergie potentielle) d'un solide élastique s'écrit comme suit :

$$U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}] dz \right\} dx dy \quad (3.38)$$

#### 3.4.2. Energie cinétique :

L'énergie cinétique s'écrit comme suit :

$$K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dz dx dy \quad (3.39)$$

#### 3.4.3. Travail des charges externes :

Le travail fait par q est :

$$V_q = - \int_{\Omega_0} [qw_0] dx dy \quad (3.40)$$

Sachant que q est la charge transversale appliquée au milieu de la plaque (selon x ou y). Ainsi, le travail effectué par les forces externes est emmagasiné par la plaque sous forme d'énergie potentielle :

$$V_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2P_{xy} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.41)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \lambda_1 P_{cr} \\ P_y &= \lambda_2 P_{cr} \\ \text{avec } \alpha &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

$\lambda_1, \lambda_2$  Sont les paramètres de flambage.

$P_x, P_y$  Sont des forces de compression.

Donc le travail total est :

$$V = V_q + V_p \quad (3.43)$$

$$V = - \int_{\Omega_0} [qw_0] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.44)$$

### **3.4.4. Formulation variationnelle :**

#### **3.4.4.1. Variation de l'énergie de déformation :**

La variation de l'énergie de déformation est :

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \left( \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} \right) + \sigma_{yy} \left( \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} \right) + \sigma_{xy} \left( \delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} \right) + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right] dz \right\} dx dy \quad (3.45)$$

#### **3.4.4.2. La variation du travail :**

Le travail sous forme virtuelle est donné par :

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [q \delta w_0] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) + P_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.46)$$

Et par intégration par partie, on trouve :

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [q \delta w_0] dx dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[ P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta w_0 + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \right] dx dy \quad (3.47)$$



### 3.4.4.3. Variation de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique est donnée par :

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) [(\dot{u}_0 + z\dot{\phi}_x)(\delta\dot{u}_0 + z\delta\dot{\phi}_x) + (\dot{v}_0 + z\dot{\phi}_y)(\delta\dot{v}_0 + z\delta\dot{\phi}_y) + \dot{w}_0\delta\dot{w}_0] dz dx dy \quad (3.48)$$

### 3.4.5. Application du principe d'Hamilton :

#### 3.4.5.1. Equations de mouvement :

Les équations de mouvement de la théorie du premier ordre seront dérivées en utilisant la version dynamique du principe des déplacements virtuels appelée principe d'Hamilton (**Eq 3.49**) [35] :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (3.49)$$

Où  $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta K$  désignent l'énergie de déformation virtuelle, le travail virtuel effectué par les forces externes appliquées et l'énergie cinétique virtuelle, respectivement.

Où toutes les variables ont été précédemment introduites.

Substituer  $\delta U$ ,  $\delta V$  et  $\delta K$  des équations. ( 3.45), ( 3.47) et ( 3.48) dans l'énoncé de travail virtuel dans l'équation ( 3.49) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque FG-CNTRC, on obtient:

$$0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} + Q_x \delta \gamma_{xz}^{(0)} + Q_y \delta \gamma_{xz}^{(1)} + q \delta w_0 + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \delta w_0 + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) - I_1 (\dot{\phi}_x \delta \dot{u}_0 + \dot{\phi}_y \delta \dot{v}_0 + \dot{u}_0 \delta \dot{\phi}_x + \dot{v}_0 \delta \dot{\phi}_y) - I_0 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \delta \dot{\phi}_y) \right] dx dy \right\} dt \quad (3.50)$$

Les quantités ( $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$ ) sont les forces normales et dans le plan xy respectivement. ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$ ) sont appelés les résultantes du moment (**voir Figure 3.7**). Toutes ces quantités ont été définies dans les équations (3.33)-(3.35). Les quantités ( $I_0, I_1, I_2$ ) sont les moments d'inertie et sont définis dans l'Eq (4.42). Toutes les résistances à la contrainte sont mesurées par unité de longueur.

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho(z) dz \quad (3.51)$$

Retour à l'énoncé du travail virtuel dans l'équation (3.50), nous remplaçons les contraintes virtuelles dans l'équation (3.50) et intégrons par partie pour soulager les déplacements virtuels généralisés  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y)$  dans  $\Omega_0$  de toute différentiation, afin que nous puissions utiliser le lemme fondamental du calcul variationnel ; nous obtenons :

$$0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[ -(N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \ddot{\phi}_x) \delta u_0 - (N_{xy,x} + N_{yy,y} - I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \ddot{\phi}_y) \delta v_0 - (M_{xx,x} + M_{xy,y} - \phi_x - I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \ddot{\phi}_x) \delta \phi_x - (M_{xy,x} + M_{yy,y} - \phi_y - I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \ddot{\phi}_y) \delta \phi_y - (Q_x + Q_y + q - I_0 \ddot{w}_0 + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)) \delta w_0 \right] dx dy \right\} dt \quad (3.52)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont obtenues en posant les coefficients de  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y)$  dans  $\Omega_0$  égaux à zéro, séparément :

$$\left. \begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + P_x \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + P_y \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_x : \quad & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \phi_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_y : \quad & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \phi_y = I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

### **3.4.5.2. Équations de mouvement en termes de déplacements :**

Les équations du mouvement (3.53) peuvent être exprimées en termes de déplacements  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y)$  en substituant la force et le moment résultant des équations (3.33), (3.34) et (3.35). Pour les stratifiés homogènes, les équations de mouvement (3.53) prennent la forme :

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$A_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$

$$(P_x + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (P_y + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$B_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$B_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (3.54)$$

**Donc :**

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} .$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} .$$

$$(P_x + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (P_y + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} .$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} - A_{55} \phi_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} .$$

$$B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} - A_{44} \phi_y = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (3.55)$$

Les Equations (3.55) décrivent cinq équations différentielles partielles linéaires de second ordre en fonction des cinq déplacements généralisés. Par conséquent, la théorie des plaques stratifiées du premier ordre est une théorie du dixième ordre et il existe dix conditions aux limites.

### **3.4.6. Relations fondamentales de flexion d'une plaque FGM :**

En tenant compte de la charge transversale, les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} q \neq 0 \\ P_x = P_y = 0 \end{array} \right\} \quad (3.56)$$

Les relations fondamentales de la flexion sont données par les relations (3.55), les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  étant définis à partir des relations (3.36), (3.37) évoquées précédemment, associés à (3.55.a). La relation correspondant aux  $\delta w_0$  étant modifiée suivant :

$$A_{55} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + A_{44} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.55.a)$$

### **3.4.7. Relations fondamentales de flambage d'une plaque FGM :**

Les relations fondamentales de flambage sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} q = 0 \\ P_x = \lambda_1 P_{cr} \\ P_y = \lambda_2 P_{cr} \end{array} \right\} \quad (3.57)$$

$\lambda_1, \lambda_2$  Sont les paramètres de flambage :

- Flambage unidirectionnel (selon l'axe  $x$ ) :  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$
- Flambage unidirectionnel (selon l'axe  $y$ ) :  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$
- Flambage bidirectionnel (selon les axes  $x$  et  $y$ ) :  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 \neq 0$

Les équations fondamentales des plaques FGM permettant de formuler le flambage sont constituées des équations (3.55), La relation correspondant aux  $\delta w_0$  étant modifiée suivant :

$$(\lambda_1 P_{cr} + A_{55}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + (\lambda_2 P_{cr} + A_{44}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.55.b)$$

## **3.5. Conclusion :**

Le but de ce chapitre est de trouver la formulation de l'énergie de déformation d'une part, et celle du travail des charges externes d'une autre part. Ensuite, on a déterminé les équations de mouvement en se servant du principe de Hamilton. Suite à cela, nous avons déterminé le système d'équations différentielles couplées pour le cas d'une plaque FG-CNTRC.

***CHAPITRE 4***  
***RESULTATS ET INTERPRETATIONS***

## 4.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode utilisée pour la résolution des équations de vibration libre d'une plaque FG-CNTRC. L'ensemble des résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul que nous avons élaboré en se servant du langage Maple, sont listés. Maple est un langage interprété, contrairement à Pascal et Fortran qui sont des langages compilés. On peut donc considérer que Maple est un interlocuteur toujours attentif et prêt à réagir à vos "paroles", sans passer par des étapes intermédiaires comme la compilation et l'établissement des liens (linking). C'est donc un environnement de calcul très puissant permettant de résoudre aisément une variété impressionnante de problèmes mathématiques et physiques. Nous présentons d'abord les étapes de la méthode analytique de résolution des équations de vibration libre, et par la suite, nous allons résoudre le système d'équations différentielles couplées. Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés. Enfin, nous montrerons l'influence des paramètres considérés (dimensions géométriques, épaisseur relative et fraction volumique) dans cette étude sur les fréquences naturelles de vibration.

## 4.2. Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en se référant au type de support utilisé. Nous sommes ici concernés par les solutions analytiques de l'équation 4.1 pour les plaques FG-CNTRC simplement supportées.

### 4.2.1. Les équations de mouvement :

Pour discuter la solution de Navier, les équations de mouvement obtenues dans le chapitre 3 (3.55) peuvent être écrites comme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \right] + P_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] - \\
 & A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} + D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] - \\
 & A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

#### 4.2.2. Conditions aux limites et solution Navier :

Les conditions aux limites le long des côtés d'une plaque simplement appuyée peuvent être obtenues comme suit :

Pour la FSDT, les conditions aux limites de la plaque FG-CNTRC sont :

$$\left. \begin{aligned}
 u_0(x, 0, t) = 0, & \quad u_0(x, b, t) = 0, & v_0(0, y, t) = 0, & \quad v_0(a, y, t) = 0 \\
 w_0(x, 0, t) = 0, & \quad w_0(x, b, t) = 0, & w_0(0, y, t) = 0, & \quad w_0(a, y, t) = 0 \\
 \phi_x(x, 0, t) = 0, & \quad \phi_x(x, b, t) = 0, & \phi_y(0, y, t) = 0, & \quad \phi_y(a, y, t) = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.2.a}$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_x(0, y, t) = 0, & \quad N_x(a, y, t) = 0, & N_y(x, 0, t) = 0, & \quad N_y(x, b, t) = 0 \\
 M_x(0, y, t) = 0, & \quad M_x(a, y, t) = 0, & M_y(x, 0, t) = 0, & \quad M_y(x, b, t) = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.2.b}$$

Pour la solution analytique des équations (4.1), la méthode de Navier est utilisée et qui reste valable uniquement pour les conditions aux limites spécifiées ci-dessus. Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations (4.2) sont exprimées en séries de Fourier comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{mn}(t) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 V(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} F_{mn}(t) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 W(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} G_{mn}(t) \sin(\alpha x) \sin(\beta y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_x(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H_{mn}(t) \mathbf{Cos}(\alpha x) \mathbf{Sin}(\beta y) \\ \Psi_y(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} I_{mn}(t) \mathbf{Sin}(\alpha x) \mathbf{Cos}(\beta y)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Où

$$\alpha = m\pi/a \quad \text{et} \quad \beta = n\pi/b \tag{4.3.a}$$

Et  $E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}, I_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer.

Toute charge mécanique  $q(x, y, t)$  transversale appliquée à la plaque peut être aussi développée en séries de Fourier pour avoir :

$$q(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin(\alpha x) \sin(\beta x)\tag{4.4}$$

Les coefficients  $Q_{mn}$  pour le cas de charge uniformément répartie (UDL) sont définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} Q_{mn} &= \frac{16q_0}{mn\pi^2} \rightarrow \text{pour } m \neq n \\ Q_{mn} &= 0 \rightarrow \text{pour } m = n \end{aligned} \right\} \tag{4.4.a}$$

Où  $q_0$  représente l'intensité de la charge appliquée à la plaque.

### 4.2.3 Solution analytique :

En substituant les équations (4.3) dans les équations de mouvement (4.1), on obtient un système d'équations algébriques pour chaque valeur fixée de m et n correspondant au problème de vibration libre. Cette manipulation nous conduit donc au système matricielle usuel suivant :

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{0\} \tag{4.5}$$



Où  $[M]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices globales de masse et de rigidité de la plaque,  $\{U\}$  et  $\{\ddot{U}\}$  sont respectivement le vecteur des variables nodales et le vecteur des accélérations nodales du système vibratoire défini au temps  $t$ .

Le système précédent peut aussi s'écrire sous forme explicite suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{12} & k_{22} & 0 & k_{15} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{14} & k_{15} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{ij} \\ F_{ij} \\ G_{ij} \\ H_{ij} \\ I_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{E}_{ij} \\ \ddot{F}_{ij} \\ \ddot{G}_{ij} \\ \ddot{H}_{ij} \\ \ddot{I}_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(4.5.a)

Avec :

$$k_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta,$$

$$k_{14} = B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2, k_{15} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta,$$

$$k_{22} = A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2, k_{25} = B_{22}\beta^2 + B_{66}\alpha^2,$$

$$k_{33} = (P_x + A_{55})\alpha^2 + (P_y + A_{44})\beta^2,$$

$$k_{34} = A_{55}\alpha, k_{35} = A_{44}\beta$$

$$k_{44} = (D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + A_{55}),$$

$$k_{45} = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta, k_{55} = (D_{22}\beta^2 + D_{66}\alpha^2 + A_{44}).$$

(4.5.b)

### 4.3. Analyse des vibrations libres :

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures ( $q = 0, P_x = P_y = 0$ ). Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. La déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques.

Pour un problème de vibration libre ( $q = 0, P_x = P_y = 0$ ) nous supposons une solution périodique de la forme :

$$\begin{cases} E_{mn}(t) \\ F_{mn}(t) \\ G_{mn}(t) \\ H_{mn}(t) \\ I_{mn}(t) \end{cases} = \begin{cases} E_{mn}^0 \\ F_{mn}^0 \\ G_{mn}^0 \\ H_{mn}^0 \\ I_{mn}^0 \end{cases} e^{i\omega t} \quad (4.6)$$

Où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega$  est la fréquence naturelle de vibration.

Après avoir évalué la matrice de rigidité et la matrice de masse pour tous les éléments, les équations du mouvement, pour l'analyse de la vibration libre, peuvent être établies sous la forme de problème aux valeurs propres généralisé en substituant l'équation (4.6) dans l'équation (4.5) pour obtenir :

$$([K] - \omega^2[M])\{d\} = 0 \quad (4.7)$$

Ou encore :

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} \\ k_{12} & k_{22} & 0 & k_{15} & k_{25} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{14} & k_{15} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \right) \begin{cases} E_{mn}^0 \\ F_{mn}^0 \\ G_{mn}^0 \\ H_{mn}^0 \\ I_{mn}^0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (4.7.a)$$

Où  $\omega$  est la fréquence naturelle associée au mode  $(i, j)$  et  $\{d\}$  sont les modes de vibration. Pour avoir une solution non triviale de l'équation (4.7), le déterminant suivant doit être nul :

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) fournie, au terme d'une résolution numérique, les fréquences naturelles d'une plaque à gradient fonctionnel renforcée par les nanotubes de carbone (FG-CNTRC).

Des solutions analytiques ont été obtenues pour les plaques FG-CNTRC simplement appuyées en résolvant un problème aux valeurs propres grâce à la méthode de Navier.

#### 4.4. Résolution numérique du problème aux valeurs propres :

##### 4.4.1 Modélisation numérique d'une plaque composite à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone mono-paroi :

Pour notre étude, on considère les mêmes données que celles de Zhu P. et al [13] pour pouvoir faire des comparaisons de résultats avec ceux de la référence [38] :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés pour étudier la vibration libre des plaques CNTRC. Le poly {(m-phénylènevinylène) -co - [(2,5-dioctoxy-p-phe-nylène) vinylène]} (PmPV) est considéré comme la matrice du composite et les propriétés du matériau sont supposées être (à température ambiante 300K) comme suit (Réf. [13]) :

$$\left. \begin{array}{l} \nu^m = 0,34 \\ \rho^m = 1150 \frac{Kg}{m^3} \\ E^m = 2,1 \text{ GPa} \end{array} \right\} \text{ PmPV : matrices-en polymère.}$$

Les propriétés mécaniques des nanotubes (SWCNT) sont données par (réf. [2]) :

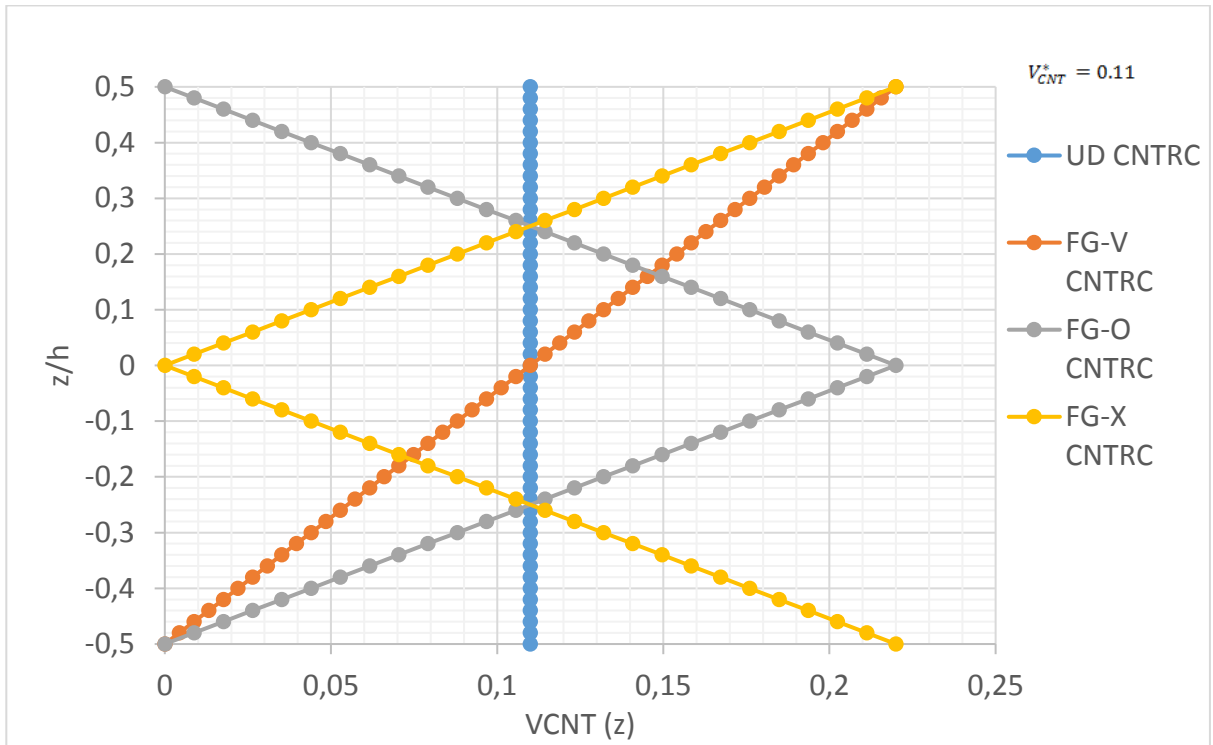
$$\left. \begin{array}{l} V_{12}^{CNT} = 0,175, \rho^{CNT} = 1400 \text{ Kg/m}^3 \\ E_{22}^{CNT} = 7,0800 \text{ TPa}, G_{12}^{CNT} = 1,9445 \text{ TPa} \\ E_{11}^{CNT} = 5,6466 \text{ TPa} \end{array} \right\} \text{ Nanotubes en chaise [Armchair (10,10)].}$$

Les paramètres d'efficacité CNT sont données par (réf. [2]) :

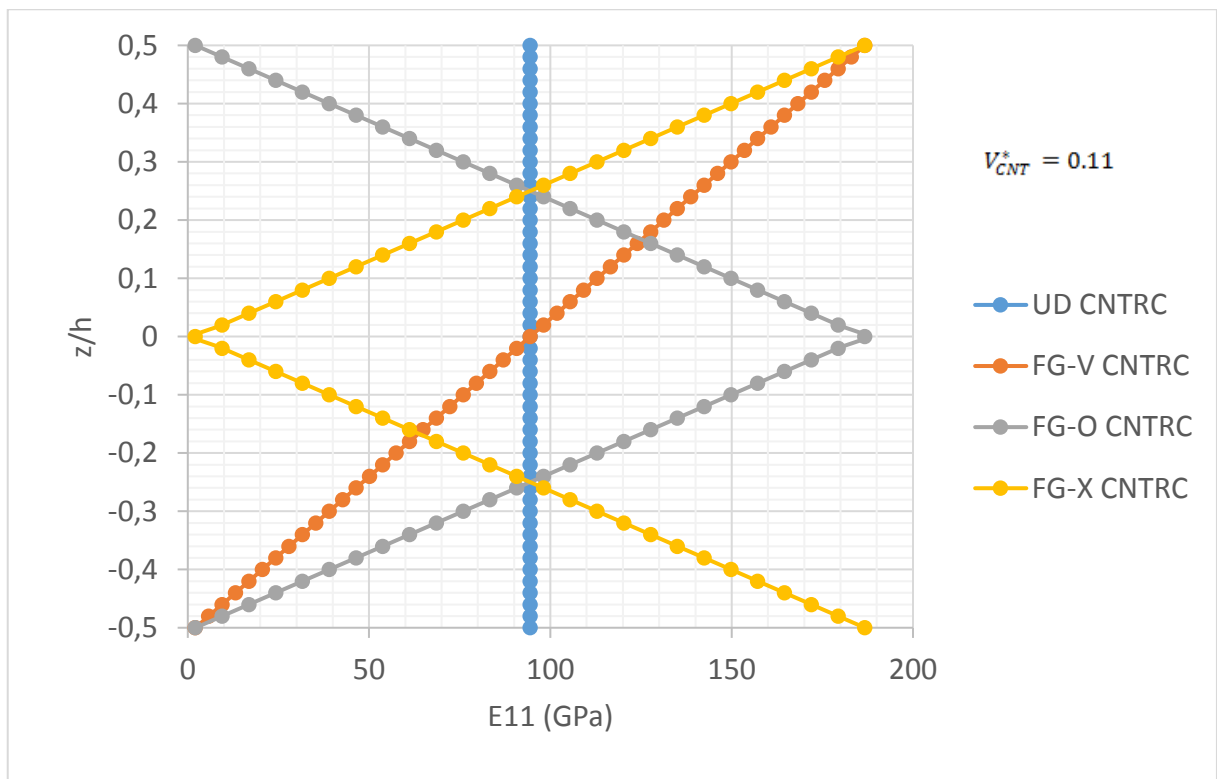
$$\left. \begin{array}{l} V_{CNT}^* = 0,11 \rightarrow \eta_1 = 0,149 \text{ et } \eta_2 = 0,934 \\ V_{CNT}^* = 0,14 \rightarrow \eta_1 = 0,150 \text{ et } \eta_2 = 0,941 \\ V_{CNT}^* = 0,17 \rightarrow \eta_1 = 0,149 \text{ et } \eta_2 = 1,381 \\ \eta_2 = \eta_3 \end{array} \right\} \text{ Nanotubes en chaise [Armchair (10,10)].}$$

#### **4.4.2 Graphes de variation des propriétés de la plaque :**

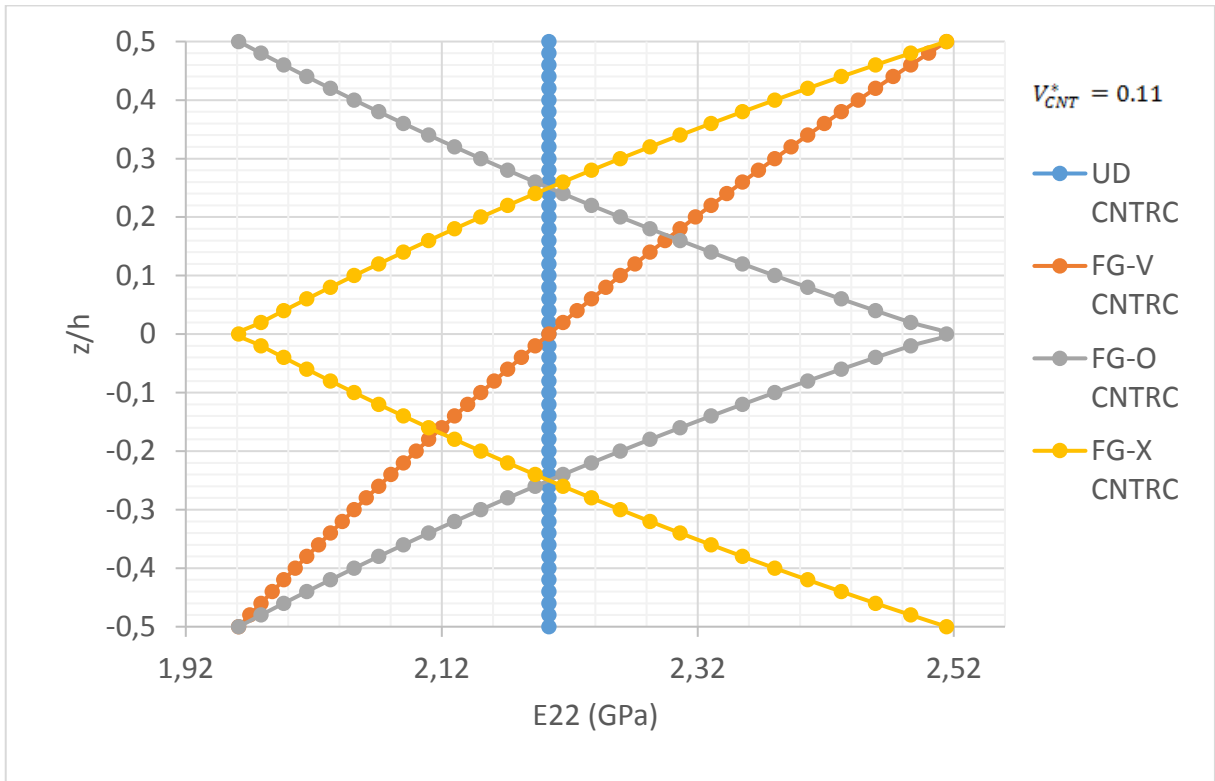
Après des séries de calcul, nous avons obtenus les graphes de  $V_{CNT}(z)$ ,  $E_{11}(z)$ ,  $E_{22}(z)$ ,  $G_{12}(z)$ ,  $\nu_{12}(z)$ ,  $\rho(z)$ , et  $\nu_{21}(z)$  pour les 4 types de distributions **FG-CNTRC** (cas de  $b/h = 10$  et  $V_{CNT}^* = 0.11$  ).



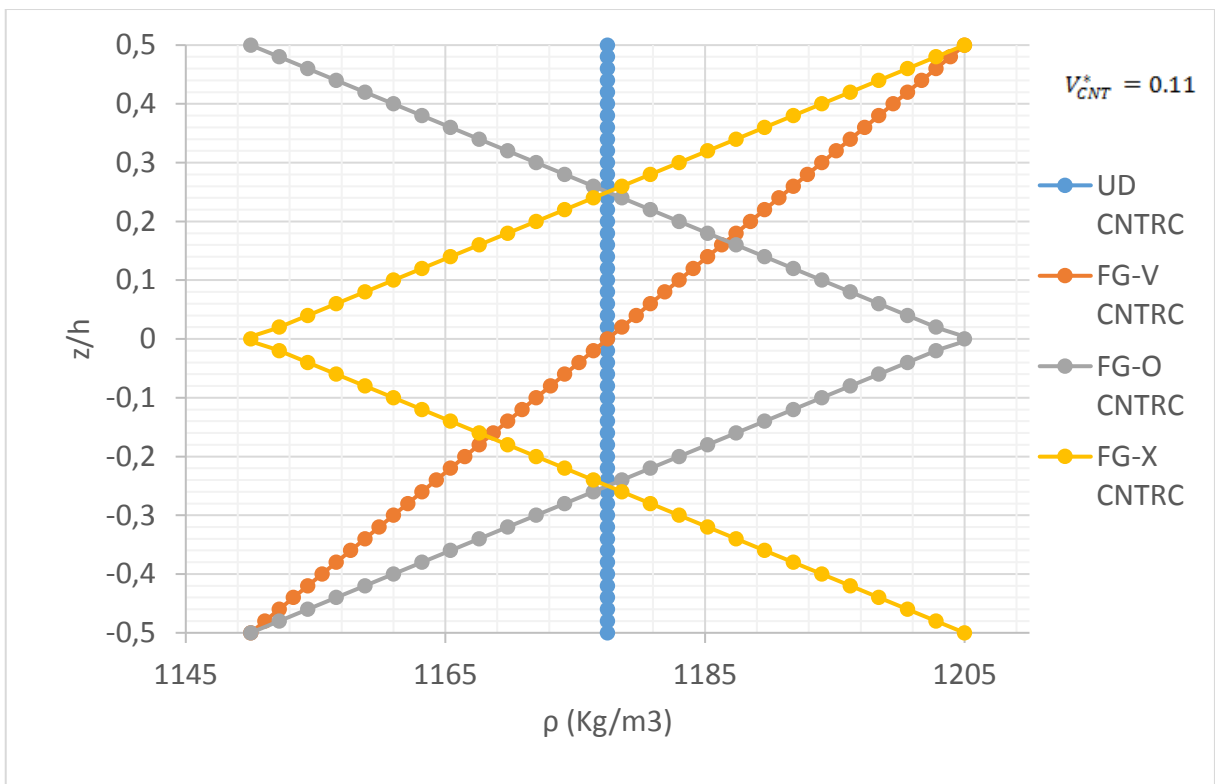
**Figure 4.1** Variation de la fraction volumique  $V_{CNT}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



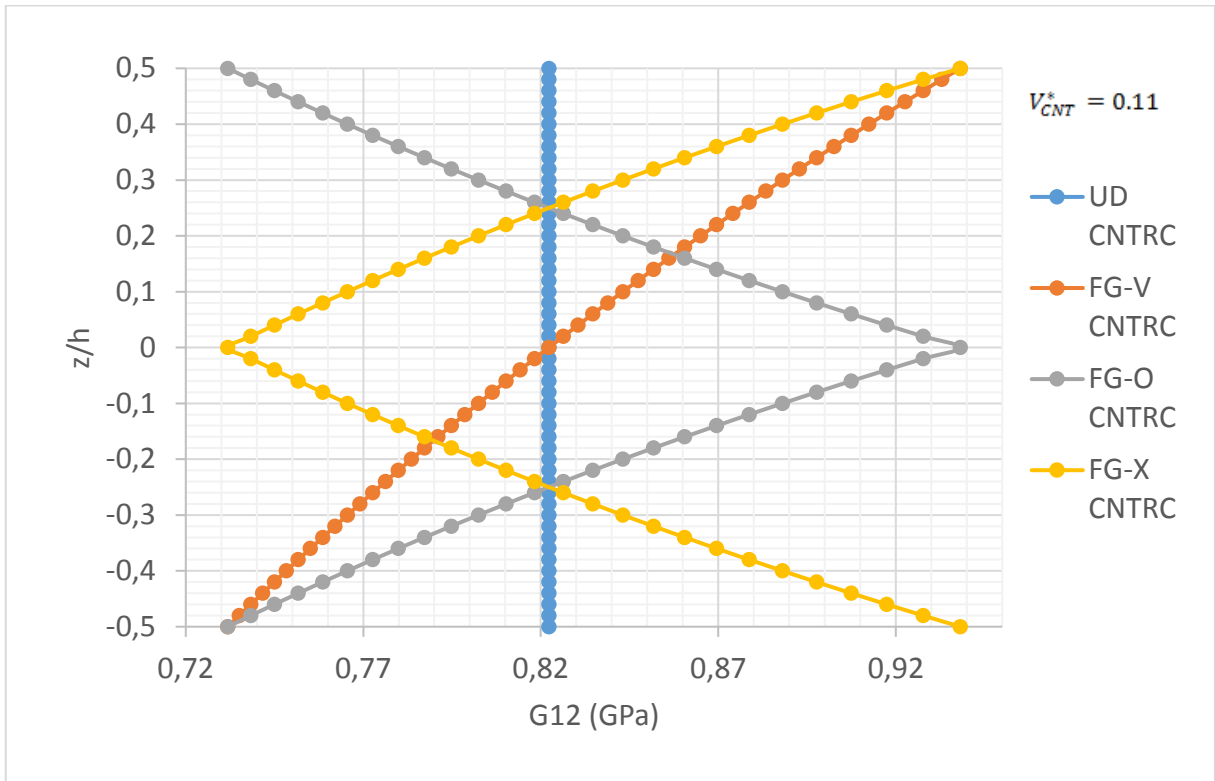
**Figure 4.2.** Variation du module de Young  $E_{11}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



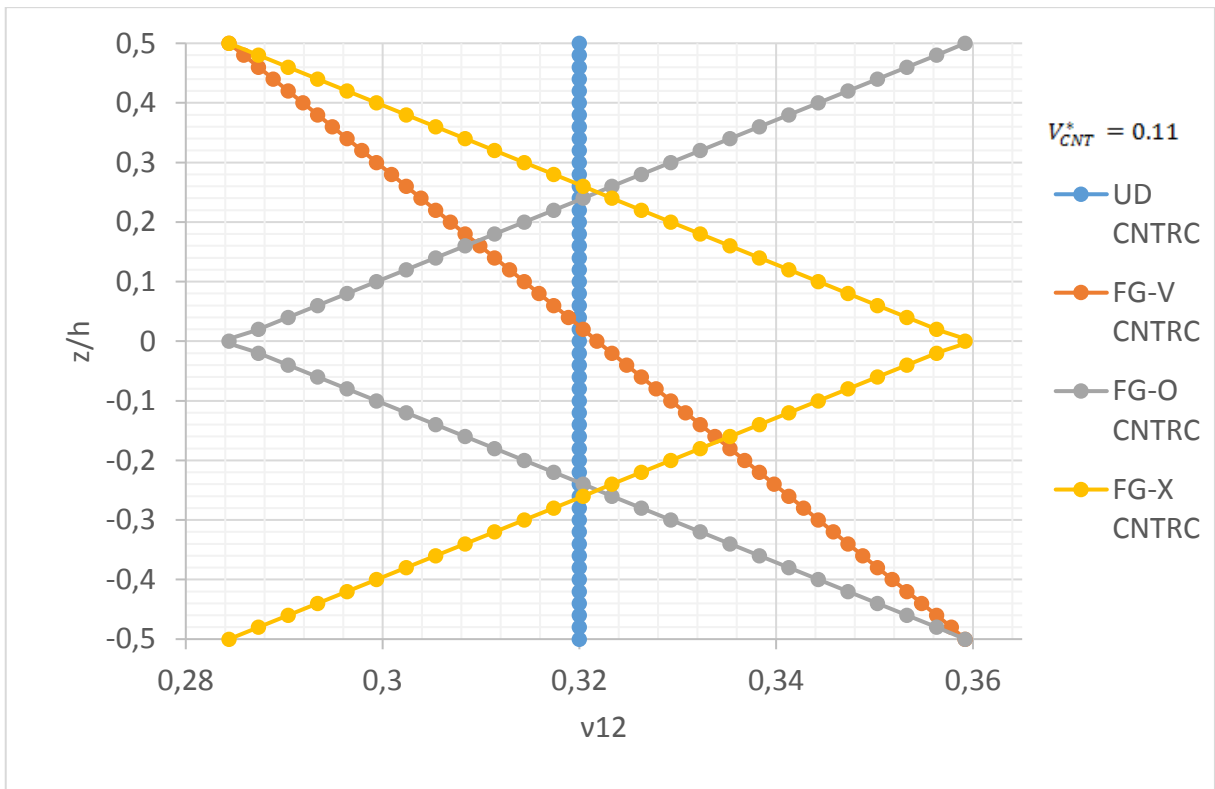
**Figure 4.3.** Variation du module de Young  $E_{22}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



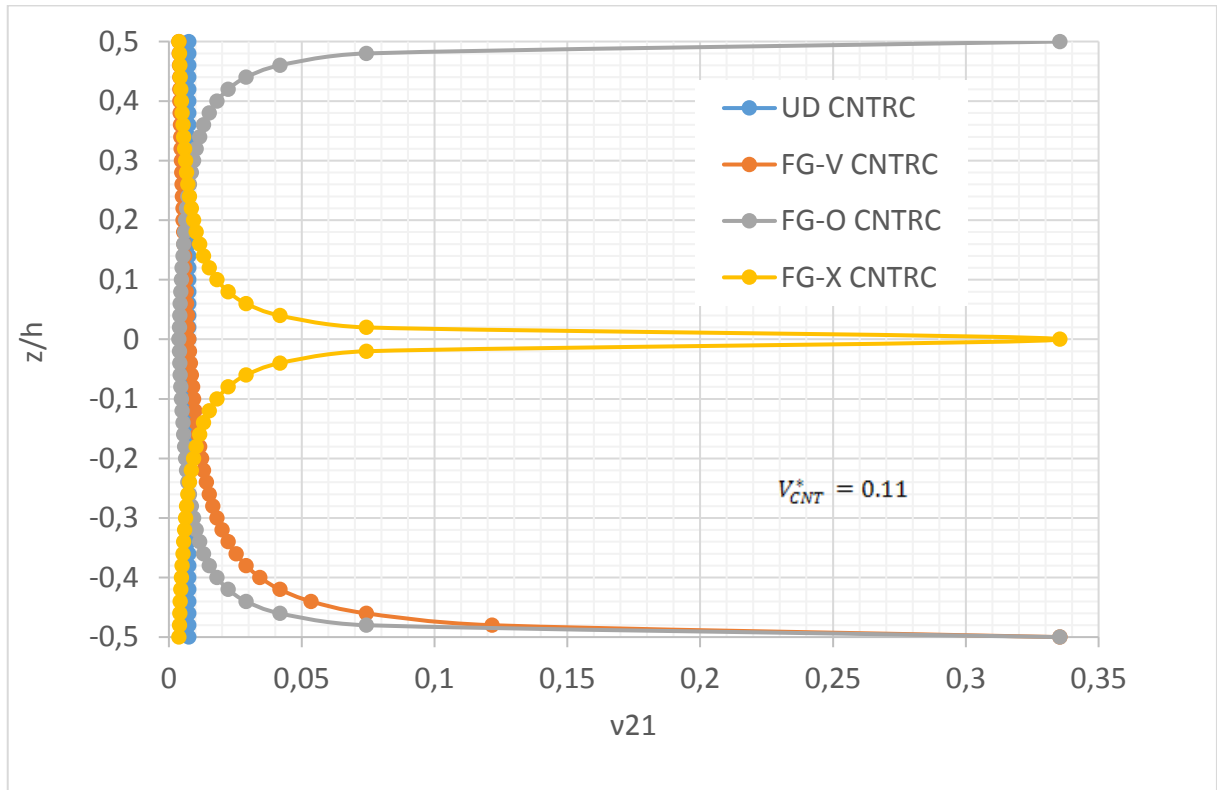
**Figure 4.4.** Variation du module de la masse volumique  $\rho$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



**Figure 4.5.** Variation du module de cisaillement  $G_{12}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



**Figure 4.6.** Variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.



**Figure 4.7.** Variation du coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  suivant l'épaisseur de la plaque pour les différents types de distribution de CNT.

Sur la base de l'analyse des courbes ci-dessus, nous notons :

- Des valeurs constantes (uniformes) des propriétés mécaniques dans le cas de distribution **UD-CNTRC** suivant l'épaisseur de la plaque (**Figures 4.2-4.7**).
- Une variation linéaire des propriétés mécaniques pour le cas du **FG-V** (**Figures 4.2-4.6**) et une variation parabolique du coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  (**Figure 4.7**).
- Une variation symétrique des propriétés mécaniques par rapport au plan  $z/h = 0$  dans le cas des distributions **FG-X** et **FG-O** (**Figures 4.2-4.5**).

#### **4.4.3 Calcul des inerties et des rigidités du système vibratoire libre :**

- Moments d'inerties  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  (longitudinal, de couplage longitudinal-rotation et de rotation).

Fractions volumiques $V_{CNT}^*$	Moments d'inerties	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC	FG-V CNTRC	FG-O CNTRC	FG-X CNTRC
0.11	$I_1 (Nm^2)$	2.355	2.355	2.355	2.355
	$I_2 (Nm^3)$	0	0.0000183	0	0
	$I_3 (Nm^4)$	$7.85 \cdot 10^{-7}$	$7.85 \cdot 10^{-7}$	$7.758 \cdot 10^{-7}$	$7.941 \cdot 10^{-7}$
0.14	$I_1 (Nm^2)$	2.37	2.37	2.37	2.37
	$I_2 (Nm^3)$	0	0.0000233	0	0
	$I_3 (Nm^4)$	$7.9 \cdot 10^{-7}$	$7.9 \cdot 10^{-7}$	$7.783 \cdot 10^{-7}$	$8.016 \cdot 10^{-7}$
0.17	$I_1 (Nm^2)$	2.385	2.385	2.385	2.385
	$I_2 (Nm^3)$	0	0.0000283	0	0
	$I_3 (Nm^4)$	$7.95 \cdot 10^{-7}$	$7.95 \cdot 10^{-7}$	$7.808 \cdot 10^{-7}$	$8.091 \cdot 10^{-7}$

**Tableau 4.1.** Moments d'inerties  $I_1, I_2$  et  $I_3$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.

- Rigidités de traction  $A_{ij}$ , de couplage traction - flexion  $B_{ij}$ , de flexion  $D_{ij}$  et de cisaillement  $A_{ij}^S$ .

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de traction	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$
0.11	$A_{11}$	189.2912	189.2930	189.2930	189.2930
	$A_{12}$	1.4219	1.4275	1.4275	1.4275
	$A_{22}$	4.4181	4.4550	4.4550	4.4550
	$A_{66}$	1.6445	1.6530	1.6530	1.6530
0.14	$A_{11}$	241.2315	241.2332	241.2332	241.2332
	$A_{12}$	1.4590	1.4647	1.4647	1.4647
	$A_{22}$	4.6041	4.6581	4.6581	4.6581
	$A_{66}$	1.7146	1.7300	1.7300	1.7300
0.17	$A_{11}$	290.2243	290.2279	290.2279	290.2279
	$A_{12}$	2.1849	2.1973	2.1973	2.1973



	$A_{22}$	7.0042	7.1297	7.1297	7.1297
	$A_{66}$	2.6073	2.6446	2.6446	2.6446

**Tableau 4.2.** Rigidités de traction  $A_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de couplage	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m^2(10^2)$
0.11	$B_{11}$	0	615.2606	0	0
	$B_{12}$	0	-0.0173	0	0
	$B_{22}$	0	1.6865	0	0
	$B_{66}$	0	0.6834	0	0
0.14	$B_{11}$	0	788.3350	0	0
	$B_{12}$	0	0.01471	0	0
	$B_{22}$	0	2.4042	0	0
	$B_{66}$	0	0.9450	0	0
0.17	$B_{11}$	0	950.7316	0	0
	$B_{12}$	0	0.0499	0	0
	$B_{22}$	0	4.6363	0	0
	$B_{66}$	0	1.8253	0	0

**Tableau 4.3.** Rigidités de couplage traction - flexion  $B_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT.

Les fractions volumiques $V_{CNT}^*$	Les rigidités de flexion	Les 4 types de fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m^3$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m^3$
0.11	$D_{11}$	93.8609	63.0985	32.3348	93.8609
	$D_{12}$	0.4756	0.4783	0.4773	0.4756
	$D_{22}$	1.5725	1.4976	1.4038	1.5725
	$D_{66}$	0.5857	0.5532	0.5173	0.5857
0.14	$D_{11}$	80.4105	80.4119	40.9945	119.8280

	$D_{12}$	0.4863	0.4906	0.4881	0.4895
	$D_{22}$	1.5347	1.5697	1.4367	1.6771
	$D_{66}$	0.5715	0.5808	0.5304	0.6249
0.17	$D_{11}$	96.7414	96.7443	49.2064	144.2796
	$D_{12}$	0.7283	0.7377	0.7312	0.7362
	$D_{22}$	2.3347	2.4158	2.1545	2.6182
	$D_{66}$	0.8691	0.8916	0.7928	0.9753

**Tableau 4.4.** Rigidités de flexion  $D_{ij}$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT

Fraction volumique $V_{CNT}^*$	Rigidités de cisaillement	Fractions volumiques $V_{CNT}(z)$			
		UD CNTRC $Pa \cdot m (10^6)$	FG-V CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-O CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$	FG-X CNTRC $Pa \cdot m(10^6)$
0.11	$A_{44}$	1.3704	1.3775	1.3775	1.3775
	$A_{55}$	1.3704	1.3775	1.3775	1.3775
0.14	$A_{44}$	1.4288	1.4416	1.4416	1.4416
	$A_{55}$	1.4288	1.4416	1.4416	1.4416
0.17	$A_{44}$	2.1727	2.2039	2.2039	2.2039
	$A_{55}$	2.1727	2.2039	2.2039	2.2039

**Tableau 4.5.** Rigidités de cisaillement  $A_{ij}^S$  de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques des CNT

Ce que nous notons sur les valeurs des tableaux précédents est comme suit :

**Tableau 4.1 :**

- Valeurs presque identiques des moments d’inerties  $I_1$  et  $I_3$  pour les trois types **UD**, **FG-V** et **FG-O**, bien que légèrement plus grand dans le type **FG-X**.
- Valeurs nulles pour les moments d’inerties  $I_2$  (distribution symétrique des propriétés) sauf dans le type **FG-V**.
- Ces valeurs augmentent avec l’augmentation de la fraction volumique  $V_{CNT}^*$ .

**Tableau 4.2 :**

- Valeurs presque identiques des rigidités de traction  $A_{ij}$  pour les quatre types de distribution. On note une augmentation de ces valeurs à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$ .

**Tableau 4.3 :**

- Les valeurs de rigidités de couplage traction - flexion  $B_{ij}$  augmentent à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$  dans le type de **FG-V**, alors que les valeurs les autres types restent nulles (pas de couplage à cause de la symétrie des distributions par rapport au plan  $z/h = 0$ ).

**Tableau 4.4 :**

- On note une augmentation des rigidités de flexion  $D_{ij}$  à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$ , avec des valeurs plus importantes dans le cas de **FG-X**.

**Tableau 4.5 :**

- Valeurs presque identiques des rigidités de cisaillement  $A_{ij}^s$  pour les quatre types de distribution. On note aussi une augmentation de ces valeurs à cause de l'augmentation de  $V_{CNT}^*$ .

**4.4.4. Comparaison des résultats :**

Afin de valider les résultats de la formulation actuelle, une étude comparative est effectuée. Les résultats issus de cette étude sont présentés dans le **tableau 4.6**.

Les fréquences naturelles sont déterminées sous forme adimensionnelle pour notre étude paramétrique :

$$\text{Avec } \bar{\omega} = \omega * (a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m} \tag{4.9}$$

$V_{CNT}^*$	$h/a$	Mode	UD		FG-V		FG-O		FG-X		Erreur relatives max (%)
			Présente	Réf [38]	Présente	Réf [38]	Présente	Réf [38]	Présente	Réf [38]	
<b>0.11</b>	<b>0.1</b>	(1,1)	<b>13.507</b>	13.555	<b>12.430</b>	12.263	<b>11.532</b>	11.332	<b>14.589</b>	14.668	<b>1,76</b>
		(2,1)	<b>17.619</b>	17.666	<b>16.985</b>	16.909	<b>16.197</b>	16.106	<b>18.560</b>	18.600	<b>0,57</b>
		(3,1)	<b>19.428</b>	19.427	<b>19.477</b>	19.477	<b>19.477</b>	19.477	<b>19.477</b>	19.477	<b>0,01</b>
	<b>0.02</b>	(1,1)	<b>19.153</b>	19.168	<b>16.200</b>	16.208	<b>14.264</b>	14.280	<b>22.892</b>	22.898	<b>0,11</b>
		(2,1)	<b>23.267</b>	23.284	<b>21.024</b>	21.046	<b>19.276</b>	19.306	<b>26.611</b>	26.617	<b>0,16</b>
		(3,1)	<b>34.030</b>	34.054	<b>32.726</b>	32.785	<b>31.025</b>	31.092	<b>36.914</b>	36.919	<b>0,22</b>

0.14	0.1	(1,1)	<b>14.294</b>	14.357	<b>13.248</b>	13.058	<b>12.335</b>	12.125	<b>15.354</b>	15.388	<b>1,73</b>
		(2,1)	<b>18.296</b>	18.354	<b>17.674</b>	17.578	<b>16.796</b>	16.699	<b>19.312</b>	19.313	<b>0,58</b>
		(3,1)	<b>19.774</b>	19.775	<b>19.862</b>	19.862	<b>19.863</b>	19.862	<b>19.863</b>	19.863	<b>0,01</b>
	0.02	(1,1)	<b>21.315</b>	21.328	<b>17.969</b>	17.968	<b>15.787</b>	15.799	<b>25.500</b>	25.491	<b>0,08</b>
		(2,1)	<b>25.185</b>	25.199	<b>22.552</b>	22.566	<b>20.493</b>	20.517	<b>29.052</b>	29.042	<b>0,12</b>
		(3,1)	<b>35.659</b>	35.679	<b>34.064</b>	34.111	<b>31.949</b>	32.006	<b>39.182</b>	39.171	<b>0,18</b>
0.17	0.1	(1,1)	<b>16.780</b>	16.838	<b>15.434</b>	15.253	<b>14.264</b>	14.103	<b>18.236</b>	18.173	<b>1,19</b>
		(2,1)	<b>21.958</b>	22.014	<b>21.220</b>	21.140	<b>20.024</b>	19.983	<b>23.414</b>	23.319	<b>0,41</b>
		(3,1)	<b>24.308</b>	24.306	<b>24.480</b>	24.480	<b>24.481</b>	24.480	<b>24.481</b>	24.481	<b>0,01</b>
	0.02	(1,1)	<b>23.606</b>	23.622	<b>19.919</b>	19.932	<b>17.503</b>	17.531	<b>28.286</b>	28.264	<b>0,16</b>
		(2,1)	<b>28.806</b>	28.825	<b>26.068</b>	26.098	<b>23.687</b>	23.730	<b>33.185</b>	33.163	<b>0,18</b>
		(3,1)	<b>42.358</b>	42.386	<b>40.886</b>	40.959	<b>38.172</b>	38.257	<b>46.629</b>	46.605	<b>0,22</b>

**Tableau 4.6.** Effet de la fraction de volume CNT sur la fréquence naturelle adimensionnelle  $\bar{\omega}$ , d'une plaque semi-épaisse simplement appuyée.

Le tableau 1 montre la comparaison des fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque FG-CNTRC simplement supportée avec celles publiées. Les données sont les mêmes que celles des références utilisées pour la comparaison. Les résultats de la présente formulation sont comparés à ceux rapportés par **Alibeigloo et Emtchani [38]**. Quatre types de distributions de nanotubes de carbone à paroi simple suivant l'épaisseur sont considérés ; dénommés dans la littérature par UD, FG-O, FG-V et FG-X. Nous utilisons la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (incluant l'inertie de rotation) dont le facteur de correction du cisaillement K est pris égal à 5/6. Il faut noter que les résultats présentés dans la **Réf. [38]** ont été obtenus grâce à une analyse basée sur l'élasticité 3D couplée à la méthode analytique de Navier pour le cas SSSS (simplement supportée) et par la DQM (differential quadrature method) qui est une méthode numérique à haute performance pour les autres cas de conditions aux limites. À la vue des bons résultats trouvés (**Fableau 4.6**) comparés à ceux de la **Réf. [38]**, nous pouvons conclure que notre analyse, qui est basée sur une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (nécessitant un volume de calcul moindre) et sur la méthode analytique de résolution, convient parfaitement aux problèmes vibratoires des plaques FGM renforcées par des nanotubes en carbone en appuis simples.

Une étude paramétrique est ensuite faite pour vérifier les résultats de l'analyse de vibration libre. Nous examinons le paramètre de fréquence non dimensionnel  $\bar{\omega}$  de différents types de plaques FG-CNTRC simplement supportée pour différents rapports épaisseur/longueur (h/a). Les résultats obtenus sont comparés à ceux d'Alibeigloo et Emtemani. [38]. Le tableau 4.6 montre clairement que les paramètres de fréquence sont en bon accord avec les solutions publiées par Alibeigloo et Emtemani. [38].

**4.4.5. Etude paramétrique :**

Dans cette section, nous étudions l'influence de la fraction volumique  $V_{CNT}^*$  et du rapport b/h sur les fréquences naturelles d'une plaque de type FG-X renforcée par des nanotubes en carbone mono-paroi. D'après les résultats des Tableaux 4.7 - 4.10, nous remarquons que les fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  augmentent lorsque le rapport b/h augmente (on passe d'une plaque moyennement épaisse à une plaque mince). Les fréquences naturelles  $\omega$  diminuent car la plaque devient moins rigide et ceci est valable pour toutes les fractions volumiques des nanotubes choisies et du rapport a/b (plaque carrée ou rectangulaire). La figure 4.9 montre que le taux de variation des fréquences reste faible au-delà du rapport h/b = 30. Ce taux reste de même ordre pour les autres fractions volumiques des nanotubes (voir Figure 4.10). L'augmentation du rapport a/b (Figure 4.11) a aussi pour effet d'augmenter les fréquences adimensionnelles alors que les fréquences non adimensionnelles, quant à elles, diminuent (en vertu de l'équation (4.9)) car la plaque devient plus souple. De même que lorsque la fraction volumique  $V_{CNT}^*$  augmente, les fréquences adimensionnelles et non adimensionnelles augmentent pour un rapport b/h fixé (le reste des termes de l'équation (4.9) est constant car il ne dépend que des propriétés constantes  $\rho_m$  et  $E_m$  de la matrice en polymère). Cette augmentation des fréquences naturelles s'explique physiquement par le fait que plus on ajoute des nanotubes en carbone comme renforcement plus on augmente  $V_{CNT}^*$  et plus on rigidifie la plaque. Nous pouvons d'ores et déjà conclure que le renforcement d'un composite par nanotubes en carbone est un moyen efficace pour contrôler la rigidité et donc les fréquences naturelles de vibration.

$V_{CNT}^*$	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.11	1	<b>14,589</b>	19,877	<b>21,718</b>	22,500	<b>23,114</b>	23,342	<b>23,449</b>
		<b>18,560</b>	23,647	<b>25,451</b>	26,222	<b>26,735</b>	26,788	<b>26,813</b>
		<b>19,477</b>	25,831	<b>26,383</b>	26,586	<b>26,832</b>	27,059	<b>27,166</b>
		<b>19,477</b>	33,799	<b>35,703</b>	36,509	<b>37,143</b>	37,378	<b>37,490</b>
		<b>23,430</b>	38,955	<b>46,283</b>	46,902	<b>47,364</b>	47,529	<b>47,607</b>
	2	<b>38,955</b>	46,902	<b>47,364</b>	47,529	<b>47,649</b>	47,691	<b>47,710</b>
		<b>44,665</b>	54,158	<b>55,023</b>	55,341	<b>55,574</b>	55,657	<b>55,695</b>
		<b>50,351</b>	77,339	<b>84,622</b>	87,706	<b>90,128</b>	91,025	<b>91,449</b>

		<b>56,285</b>	77,910	<b>86,874</b>	89,999	<b>92,456</b>	93,366	<b>93,797</b>
		<b>58,356</b>	79,508	<b>101,803</b>	104,890	<b>106,941</b>	107,152	<b>107,251</b>
0.14	1	<b>15,354</b>	21,608	<b>23,950</b>	24,977	<b>25,798</b>	26,106	<b>26,253</b>
		<b>19,312</b>	25,257	<b>27,153</b>	27,366	<b>27,521</b>	27,577	<b>27,602</b>
		<b>19,863</b>	26,577	<b>27,531</b>	28,537	<b>29,346</b>	29,651	<b>29,795</b>
		<b>19,863</b>	35,370	<b>37,664</b>	38,668	<b>39,475</b>	39,778	<b>39,922</b>
		<b>24,076</b>	39,726	<b>47,625</b>	48,272	<b>48,754</b>	48,927	<b>49,007</b>
	2	<b>39,726</b>	48,272	<b>48,754</b>	48,927	<b>49,052</b>	49,096	<b>49,116</b>
		<b>45,938</b>	56,448	<b>57,459</b>	57,836	<b>58,113</b>	58,211	<b>58,257</b>
		<b>52,141</b>	79,452	<b>93,705</b>	97,768	<b>101,018</b>	102,235	<b>102,813</b>
		<b>59,439</b>	84,411	<b>95,802</b>	99,907	<b>103,194</b>	104,425	<b>105,011</b>
		<b>61,414</b>	86,430	<b>108,611</b>	109,462	<b>110,085</b>	110,306	<b>110,409</b>
0.17	1	<b>18,236</b>	24,675	<b>26,886</b>	27,819	<b>28,550</b>	28,820	<b>28,948</b>
		<b>23,414</b>	29,629	<b>31,799</b>	32,722	<b>33,448</b>	33,717	<b>33,845</b>
		<b>24,481</b>	33,080	<b>33,809</b>	34,078	<b>34,275</b>	34,345	<b>34,378</b>
		<b>24,481</b>	42,817	<b>45,155</b>	46,137	<b>46,907</b>	47,192	<b>47,327</b>
		<b>29,926</b>	48,962	<b>59,286</b>	60,104	<b>60,714</b>	60,933	<b>61,036</b>
	2	<b>48,962</b>	60,104	<b>60,714</b>	60,933	<b>61,092</b>	61,147	<b>61,173</b>
		<b>57,154</b>	68,941	<b>70,029</b>	70,430	<b>70,722</b>	70,826	<b>70,874</b>
		<b>64,117</b>	95,839	<b>104,577</b>	108,255	<b>111,135</b>	112,199	<b>112,702</b>
		<b>70,210</b>	97,925	<b>107,545</b>	111,275	<b>114,199</b>	115,280	<b>115,791</b>
		<b>72,945</b>	98,701	<b>127,195</b>	130,886	<b>133,792</b>	134,869	<b>135,379</b>

**Tableau 4.7.** Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-X CNTRC pour les différentes fractions volumiques  $V_{CNT}^*$ .

$V_{CNT}^*$	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.11	1	<b>13.506</b>	17.303	<b>18.459</b>	18.925	<b>19.281</b>	19.410	<b>19.471</b>
		<b>17.618</b>	21.396	<b>22.562</b>	23.035	<b>23.397</b>	23.529	<b>23.591</b>
		<b>19.427</b>	25.042	<b>25.553</b>	25.741	<b>25.878</b>	25.927	<b>25.950</b>
		<b>19.427</b>	31.829	<b>33.206</b>	33.759	<b>34.181</b>	34.335	<b>34.407</b>
		<b>22.803</b>	38.855	<b>44.855</b>	45.427	<b>45.853</b>	46.006	<b>46.077</b>
	2	<b>38.855</b>	45.428	<b>45.854</b>	46.006	<b>46.117</b>	46.155	<b>46.173</b>
		<b>43.354</b>	51.449	<b>52.126</b>	52.372	<b>52.551</b>	52.614	<b>52.643</b>
		<b>48.326</b>	66.684	<b>71.221</b>	73.044	<b>74.436</b>	74.943	<b>75.181</b>
		<b>51.687</b>	69.213	<b>73.838</b>	75.701	<b>77.124</b>	77.643	<b>77.886</b>
		<b>54.028</b>	77.710	<b>90.251</b>	92.141	<b>93.590</b>	94.119	<b>94.367</b>
0.14	1	<b>14.294</b>	18.894	<b>20.391</b>	21.009	<b>21.488</b>	21.663	<b>21.746</b>
		<b>18.296</b>	22.779	<b>24.261</b>	24.878	<b>25.358</b>	25.534	<b>25.617</b>
		<b>19.774</b>	25.484	<b>26.003</b>	26.194	<b>26.334</b>	26.384	<b>26.407</b>
		<b>19.774</b>	33.025	<b>34.655</b>	35.326	<b>35.847</b>	36.038	<b>36.128</b>
		<b>23.206</b>	39.549	<b>45.645</b>	46.228	<b>46.661</b>	46.816	<b>46.889</b>
	2	<b>39.549</b>	46.228	<b>46.661</b>	46.816	<b>46.928</b>	46.968	<b>46.986</b>
		<b>44.118</b>	52.977	<b>53.733</b>	54.010	<b>54.211</b>	54.282	<b>54.316</b>
		<b>49.558</b>	73.266	<b>79.167</b>	81.599	<b>83.481</b>	84.171	<b>84.497</b>
		<b>55.014</b>	75.575	<b>81.563</b>	84.036	<b>85.951</b>	86.654	<b>86.985</b>
		<b>57.177</b>	79.098	<b>97.046</b>	99.512	<b>101.430</b>	102.136	<b>102.469</b>

0.17	1	<b>16.780</b>	21.388	<b>22.776</b>	23.333	<b>23.758</b>	23.912	<b>23.985</b>
		<b>21.958</b>	26.558	<b>27.962</b>	28.528	<b>28.962</b>	29.120	<b>29.194</b>
		<b>24.308</b>	31.332	<b>31.971</b>	32.206	<b>32.378</b>	32.439	<b>32.468</b>
		<b>24.308</b>	39.679	<b>41.359</b>	42.030	<b>42.541</b>	42.727	<b>42.815</b>
		<b>28.531</b>	48.615	<b>56.121</b>	56.837	<b>57.370</b>	57.561	<b>57.650</b>
	2	<b>48.615</b>	56.837	<b>57.370</b>	57.561	<b>57.699</b>	57.748	<b>57.770</b>
		<b>54.242</b>	64.225	<b>65.058</b>	65.361	<b>65.581</b>	65.659	<b>65.695</b>
		<b>60.367</b>	82.349	<b>87.794</b>	89.973	<b>91.634</b>	92.238	<b>92.521</b>
		<b>64.159</b>	85.551	<b>91.104</b>	93.332	<b>95.032</b>	95.650	<b>95.940</b>
		<b>67.121</b>	97.230	<b>111.848</b>	114.114	<b>115.848</b>	116.480	<b>116.777</b>

**Tableau 4.8.** Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque UD

CNTRC pour les différentes fractions volumiques  $V_{CNT}^*$ .

$V_{CNT}^*$	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.11	1	<b>12.430</b>	15.069	<b>15.788</b>	16.066	<b>16.275</b>	16.350	<b>16.385</b>
		<b>16.985</b>	19.801	<b>20.576</b>	20.878	<b>21.105</b>	21.187	<b>21.225</b>
		<b>19.477</b>	25.194	<b>25.711</b>	25.901	<b>26.040</b>	26.090	<b>26.113</b>
		<b>19.477</b>	30.998	<b>32.095</b>	32.521	<b>32.840</b>	32.956	<b>33.009</b>
		<b>22.930</b>	38.955	<b>45.129</b>	45.708	<b>46.140</b>	46.294	<b>46.366</b>
	2	<b>38.955</b>	45.708	<b>46.140</b>	46.294	<b>46.406</b>	46.445	<b>46.463</b>
		<b>43.610</b>	50.890	<b>51.497</b>	51.717	<b>51.876</b>	51.932	<b>51.958</b>
		<b>46.864</b>	57.159	<b>59.941</b>	61.017	<b>61.822</b>	62.112	<b>62.248</b>
		<b>48.025</b>	60.276	<b>63.150</b>	64.264	<b>65.099</b>	65.399	<b>65.540</b>
		<b>49.720</b>	77.909	<b>82.304</b>	83.512	<b>84.419</b>	84.746	<b>84.900</b>
0.14	1	<b>13.248</b>	16.491	<b>17.423</b>	17.791	<b>18.069</b>	18.169	<b>18.217</b>
		<b>17.674</b>	21.010	<b>21.980</b>	22.365	<b>22.657</b>	22.763	<b>22.813</b>
		<b>19.862</b>	25.666	<b>26.192</b>	26.385	<b>26.527</b>	26.577	<b>26.600</b>
		<b>19.862</b>	32.079	<b>33.331</b>	33.825	<b>34.198</b>	34.333	<b>34.397</b>
		<b>23.362</b>	39.725	<b>45.973</b>	46.563	<b>47.002</b>	47.159	<b>47.232</b>
	2	<b>39.725</b>	46.563	<b>47.002</b>	47.159	<b>47.272</b>	47.312	<b>47.331</b>
		<b>44.427</b>	52.273	<b>52.928</b>	53.165	<b>53.337</b>	53.398	<b>53.426</b>
		<b>49.218</b>	63.093	<b>66.728</b>	68.159	<b>69.240</b>	69.631	<b>69.814</b>
		<b>50.349</b>	65.965	<b>69.693</b>	71.163	<b>72.276</b>	72.678	<b>72.867</b>
		<b>52.992</b>	79.451	<b>87.919</b>	89.459	<b>90.628</b>	91.052	<b>91.250</b>
0.17	1	<b>15.434</b>	18.588	<b>19.435</b>	19.762	<b>20.006</b>	20.094	<b>20.135</b>
		<b>21.220</b>	24.617	<b>25.538</b>	25.896	<b>26.164</b>	26.260	<b>26.305</b>
		<b>24.480</b>	31.664	<b>32.314</b>	32.553	<b>32.728</b>	32.790	<b>32.819</b>
		<b>24.480</b>	38.783	<b>40.121</b>	40.637	<b>41.024</b>	41.164	<b>41.229</b>
		<b>28.816</b>	48.962	<b>56.718</b>	57.447	<b>57.989</b>	58.184	<b>58.275</b>
	2	<b>48.962</b>	57.447	<b>57.989</b>	58.184	<b>58.324</b>	58.374	<b>58.396</b>
		<b>54.806</b>	63.795	<b>64.547</b>	64.819	<b>65.015</b>	65.085	<b>65.117</b>
		<b>58.067</b>	70.349	<b>73.625</b>	74.886	<b>75.828</b>	76.167	<b>76.325</b>
		<b>60.241</b>	74.350	<b>77.740</b>	79.048	<b>80.026</b>	80.378	<b>80.542</b>
		<b>61.735</b>	97.924	<b>102.153</b>	103.582	<b>104.654</b>	105.040	<b>105.221</b>

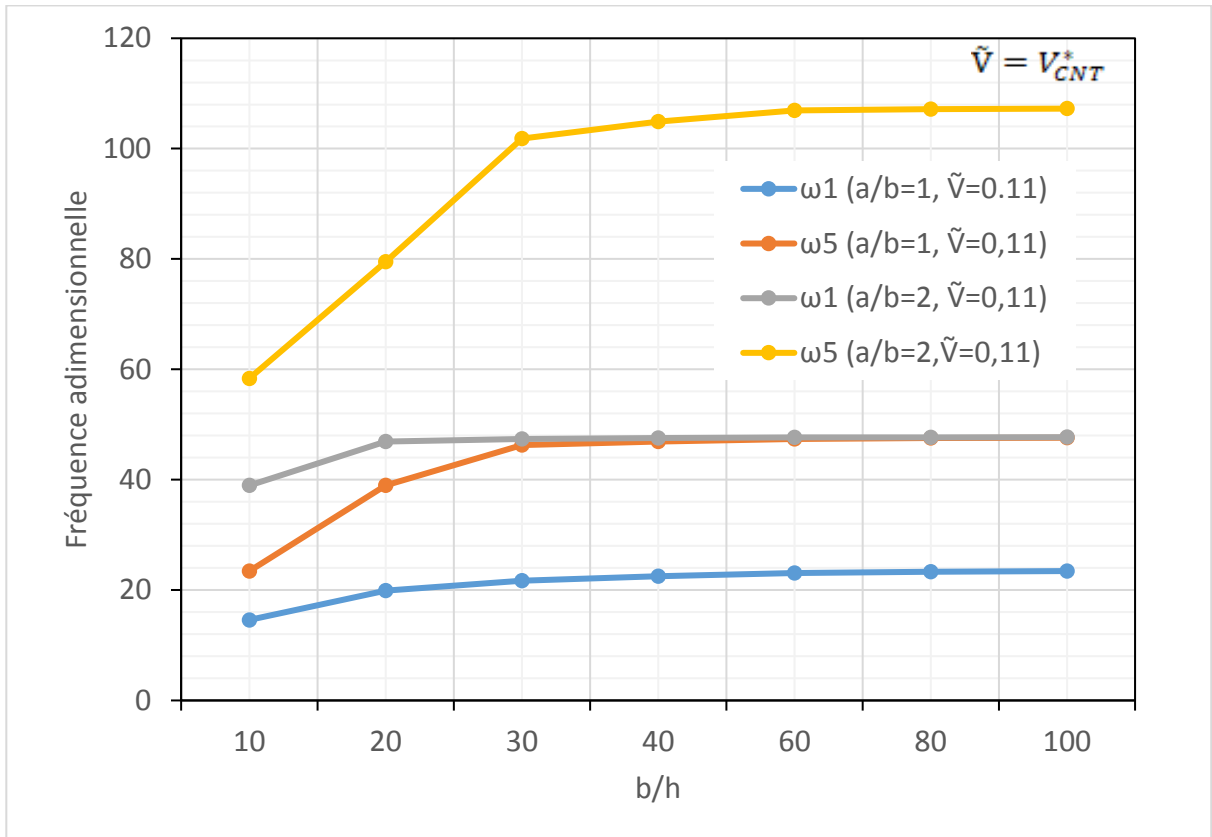
**Tableau 4.9.** Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-

V CNTRC pour les différentes fractions volumiques  $V_{CNT}^*$ .

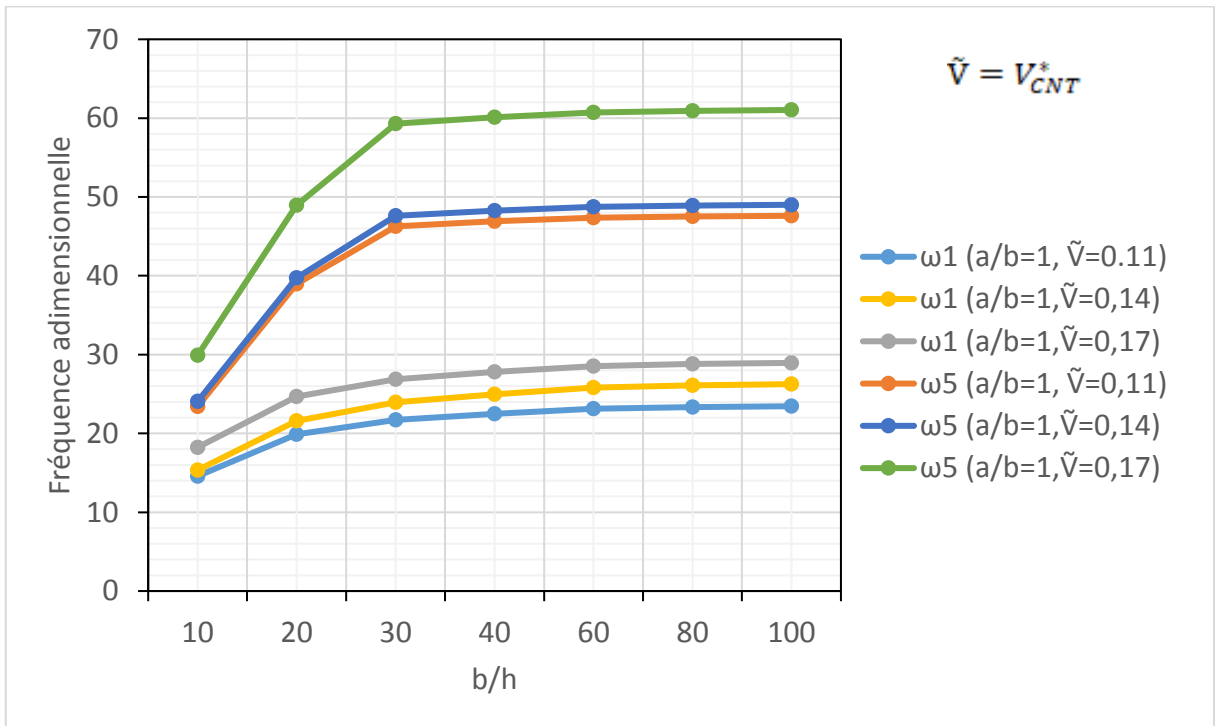
$V_{CNT}^*$	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.11	1	<b>11.532</b>	13.491	<b>13.987</b>	14.175	<b>14.314</b>	14.364	<b>14.387</b>
		<b>16.197</b>	18.399	<b>18.960</b>	19.174	<b>19.332</b>	19.389	<b>19.415</b>
		<b>19.477</b>	24.487	<b>24.966</b>	25.142	<b>25.271</b>	25.317	<b>25.338</b>
		<b>19.477</b>	29.626	<b>30.522</b>	30.862	<b>31.115</b>	31.205	<b>31.248</b>
		<b>22.371</b>	38.955	<b>43.847</b>	44.384	<b>44.783</b>	44.926	<b>44.993</b>
	2	<b>38.955</b>	44.384	<b>44.783</b>	44.926	<b>45.029</b>	45.065	<b>45.082</b>
		<b>42.434</b>	48.957	<b>49.484</b>	49.674	<b>49.811</b>	49.860	<b>49.882</b>
		<b>43.002</b>	50.549	<b>52.444</b>	53.160	<b>53.690</b>	53.880	<b>53.968</b>
		<b>46.128</b>	53.966	<b>55.948</b>	56.699	<b>57.256</b>	57.455	<b>57.547</b>
		<b>46.430</b>	73.597	<b>75.842</b>	76.695	<b>77.329</b>	77.556	<b>77.662</b>
0.14	1	<b>12.335</b>	14.773	<b>15.419</b>	15.667	<b>15.853</b>	15.919	<b>15.950</b>
		<b>16.796</b>	19.399	<b>20.095</b>	20.363	<b>20.564</b>	20.636	<b>20.670</b>
		<b>19.863</b>	24.708	<b>25.184</b>	25.359	<b>25.486</b>	25.531	<b>25.552</b>
		<b>19.863</b>	30.392	<b>31.385</b>	31.766	<b>32.051</b>	32.153	<b>32.201</b>
		<b>22.604</b>	39.726	<b>44.238</b>	44.771	<b>45.167</b>	45.309	<b>45.375</b>
	2	<b>39.726</b>	44.771	<b>45.167</b>	45.309	<b>45.411</b>	45.447	<b>45.463</b>
		<b>42.835</b>	49.780	<b>50.329</b>	50.527	<b>50.670</b>	50.721	<b>50.744</b>
		<b>46.507</b>	55.995	<b>58.491</b>	59.448	<b>60.162</b>	60.418	<b>60.537</b>
		<b>47.165</b>	59.093	<b>61.677</b>	62.670	<b>63.411</b>	63.677	<b>63.801</b>
		<b>49.339</b>	77.597	<b>80.380</b>	81.454	<b>82.256</b>	82.545	<b>82.680</b>
0.17	1	<b>14.264</b>	16.595	<b>17.178</b>	17.398	<b>17.561</b>	17.619	<b>17.646</b>
		<b>20.024</b>	22.654	<b>23.316</b>	23.568	<b>23.754</b>	23.820	<b>23.851</b>
		<b>24.481</b>	30.178	<b>30.750</b>	30.960	<b>31.114</b>	31.168	<b>31.193</b>
		<b>24.481</b>	36.511	<b>37.576</b>	37.979	<b>38.278</b>	38.385	<b>38.435</b>
		<b>27.639</b>	48.962	<b>54.025</b>	54.667	<b>55.143</b>	55.313	<b>55.393</b>
	2	<b>48.962</b>	54.667	<b>55.143</b>	55.313	<b>55.436</b>	55.479	<b>55.499</b>
		<b>52.335</b>	60.283	<b>60.911</b>	61.137	<b>61.300</b>	61.357	<b>61.384</b>
		<b>53.188</b>	62.155	<b>64.382</b>	65.220	<b>65.840</b>	66.061	<b>66.165</b>
		<b>57.056</b>	66.381	<b>68.712</b>	69.592	<b>70.243</b>	70.476	<b>70.584</b>
		<b>57.267</b>	90.615	<b>93.266</b>	94.270	<b>95.015</b>	95.281	<b>95.405</b>

**Tableau 4.10.** Les cinq (5) premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-O CNTRC pour les différentes fractions volumiques  $V_{CNT}^*$ .

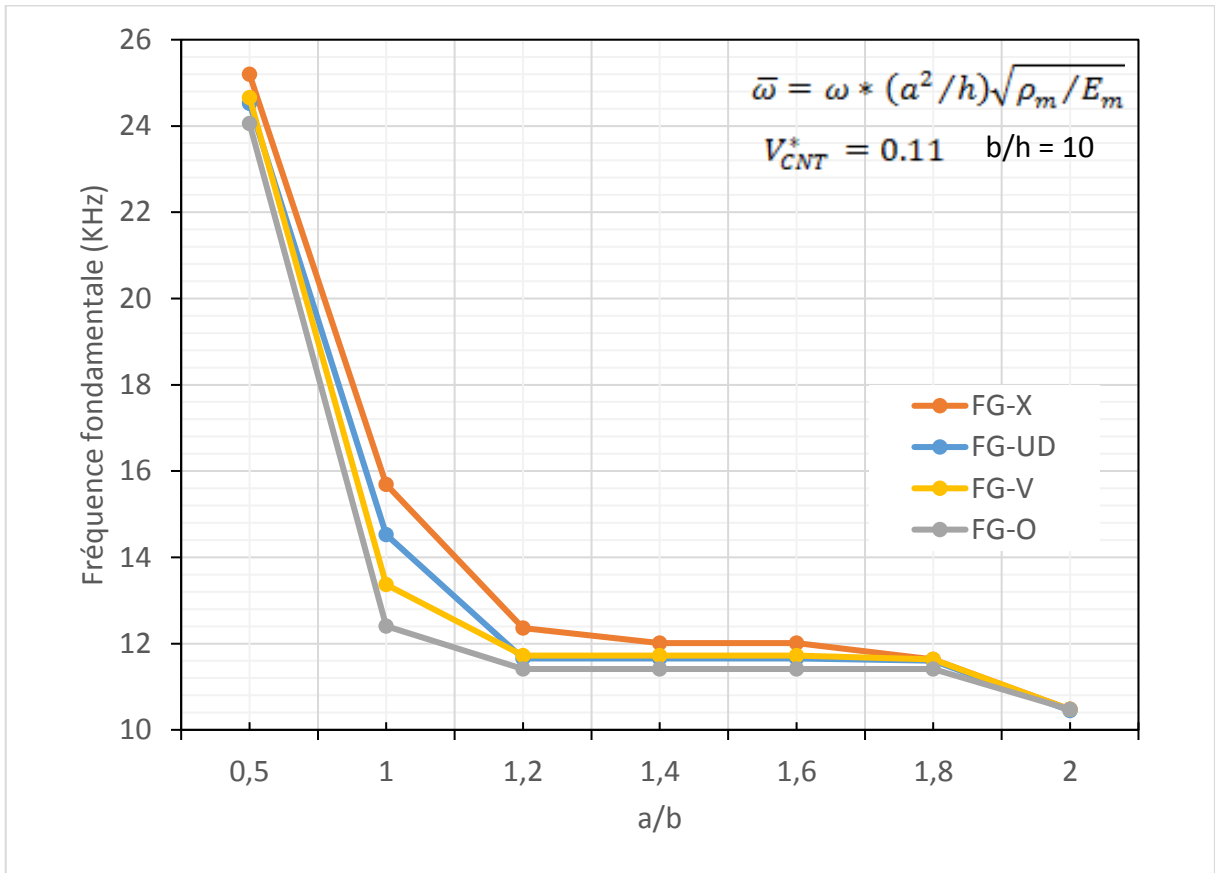




**Figure 4.8.** Variation des fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque **FG-X** **CNTRC** en fonction du rapport  $b/h$ . ( $V_{CNT}^* = 0.11$ ).



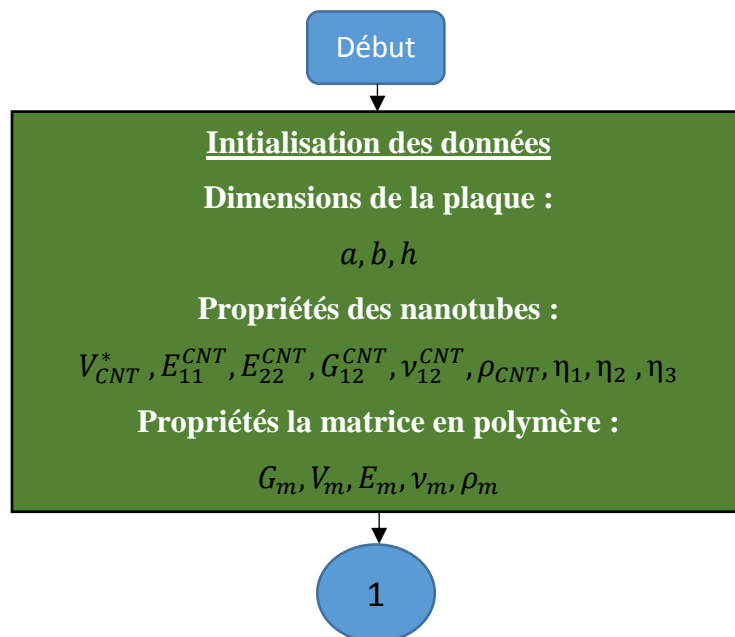
**Figure 4.9.** Variation des fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque **FG-X** **CNTRC** en fonction du rapport  $b/h$  et de la fraction volumique  $V_{CNT}^*$  ( $a/b=1$ ).



**Figure 4.10.** Variation de la fréquence fondamentale  $\omega$  en fonction du rapport  $a/b$  pour les quatre types de FGM ( $V_{CNT}^* = 0.11$ ,  $b/h = 10$ ).

#### 4.5. Organigramme des principales étapes du programme :

L'organigramme suivant résume les étapes principales employées dans le programme Maple pour la résolution des équations de mouvements de plaque FG-CNTRC simplement appuyée basée sur la méthode de Navier.



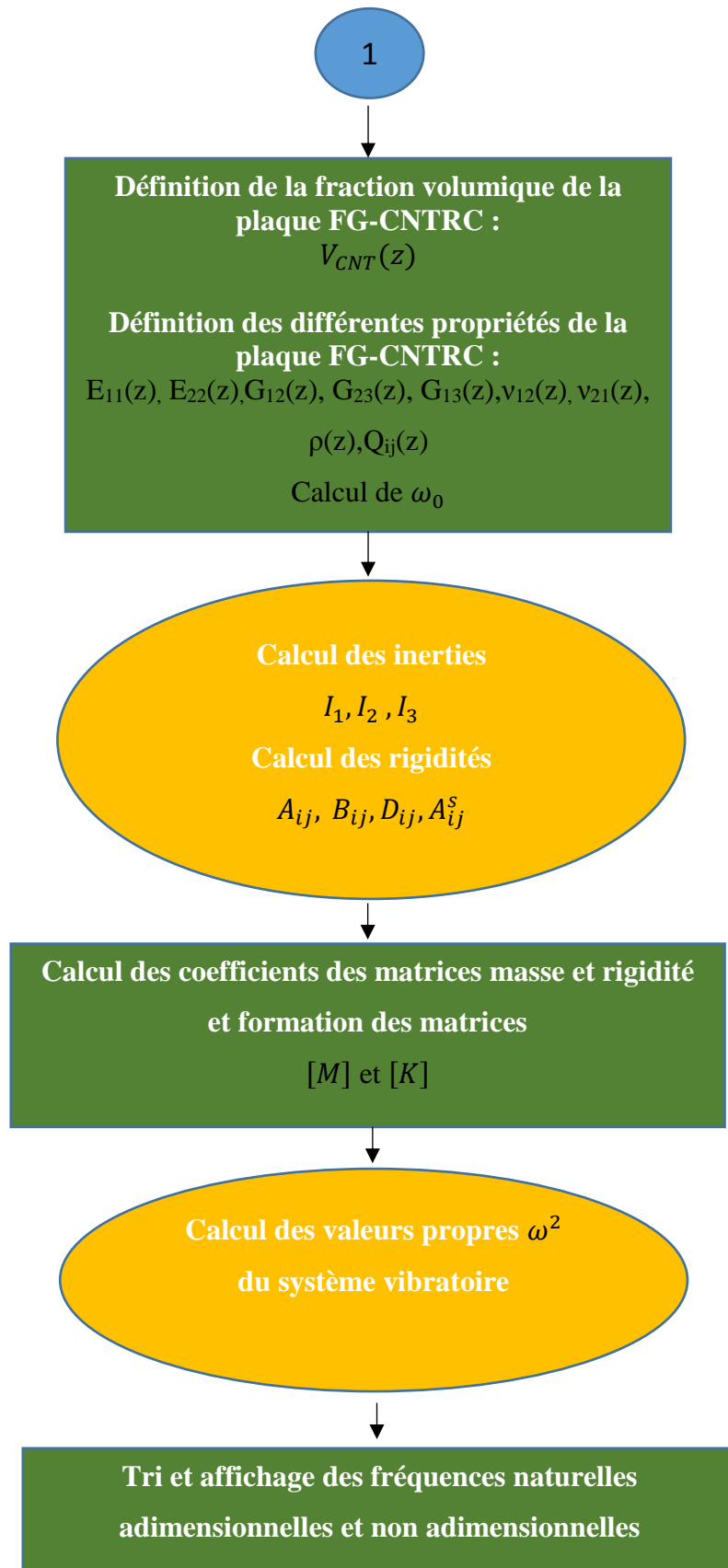


Figure 4.11. Organigramme du programme de calcul (Maple).

## **4.6. Conclusion :**

Les CNT sont considérées comme prometteurs dans l'industrie et représentent un excellent candidat pour le renforcement des composites en polymère. Leur atout majeur est lié à leurs propriétés mécaniques supérieures, c'est-à-dire une haute résistance et une très bonne rigidité.

Dans cette étude, nous avons cherché à étudier la vibration libre de différents types de plaques composites CNTRC (carbon nanotubes reinforced composite) en utilisant la méthode analytique de Navier. Les propriétés mécaniques dépendant de la position  $z$  suivant l'épaisseur ont été estimées par la règle étendue de mélange. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre incluant l'effet de l'inertie de rotation (FSDT) est utilisé pour approximer le champ de déplacement bidimensionnel. Nous avons validé notre code de calcul Maple en comparant nos résultats à ceux publiés. A cet effet, quatre types de composites CNTRC ont été choisis pour deux configurations de plaques (carrée et rectangulaire). Le tableau de comparaison inclut trois différentes fractions volumiques des nanotubes en carbone. Les résultats trouvés grâce à la théorie de déformation choisie associée à la méthode numérique de Navier concordent bien avec ceux disponibles dans la littérature. Il faut noter que le code de calcul élaboré nécessite un volume de calcul bien inférieur à celui nécessaire pour mettre en œuvre la théorie de l'élasticité 3D et la méthode DQM.

## **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif principal de la présente étude est de développer des formulations analytiques et d'utiliser une méthode numérique pour obtenir des solutions pour l'analyse des vibrations libres des plaques à gradient fonctionnel simplement appuyées renforcées par des nanotubes de carbone (FG-CNTRC). Pour ce faire nous avons utilisé la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) incluant l'effet de l'inertie de rotation.

L'étude paramétrique que nous avons entreprise nous a permis d'arriver à des résultats numériques intéressants et qui sont représentés dans des tableaux et sur des graphes pour une meilleure interprétation. Grâce à ces résultats, plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- Le renforcement des plaques en composite par des nanotubes en carbone affecte d'une manière significative le comportement de vibration libre de ces dernières,
- La loi de distribution des nanotubes le long de l'épaisseur de la plaque affecte directement les fréquences naturelles,
- Les fréquences naturelles dépendent fortement de la fraction volumique des nanotubes de carbone utilisé comme renforcement. En effet, plus la fraction volumique augmente et plus la plaque devient rigide et plus les fréquences naturelles augmentent. Ceci est vrai pour la plaque moyennement épaisse et pour la plaque mince,
- L'effet de la fraction volumique des nanotubes sur les fréquences naturelles des plaques moyennement épaisses est plus prononcé,
- Nous retrouvons aussi des résultats généraux de l'influence de la géométrie de la plaque sur le comportement vibratoire libre. En effet, plus la plaque est relativement mince (rapport longueur sur épaisseur ou largeur sur épaisseur devient grand), plus les fréquences naturelles diminuent en raison de l'augmentation de la souplesse. Le même effet est aussi constaté lorsque le rapport  $a/b$  (longueur sur largeur) augmente. Il convient de noter que les fréquences naturelles deviennent moins sensibles au changement du rapport largeur/épaisseur ou longueur/épaisseur au-delà d'un certain seuil ( $h/b$  ou  $h/a$  supérieur à 30),

- Pour pouvoir contrôler l'ordre de grandeurs des fréquences naturelles et plus spécialement la fréquence fondamentale, nos résultats suggèrent qu'il faut optimiser l'association d'un des quatre types de distributions des nanotubes en carbone avec la bonne valeur de la fraction volumique de ces derniers.

En guise de perspective, nous suggérons d'étendre le présent travail pour apporter d'avantage de résultats qui montreraient :

- L'influence de l'épaisseur variable de la plaque sur les fréquences naturelles,
- L'effet des différentes conditions aux limites (encastré, libre, simplement supporté et leur combinaison) sur la vibration libre des différents types de plaques et poutres CNTRC. Pour ce faire, nous suggérons d'utiliser des méthodes numériques appropriées (Galerkin, Ritz, DQM ou Méthodes sans maillage "Meshfree/Meshless methods"),
- L'effet des conditions hygrothermiques,
- L'intérêt d'utiliser une théorie de déformation d'ordre supérieur pour rester dans le domaine bidimensionnel comparativement à la FSDT et à l'élasticité 3D.

## REFERENCES

- [1] **Yamanouchi M, Koizumi M, Hirai T, Shiota I.** Overall view of the P/M fabrication of functionally gradient materials. In: Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, 1990. p. 59– 64.
- [2] **Koizumi M.** The concept of FGM, ceramic transactions. *Funct Gradient Mater* 1993; 34:310.
- [3] **Iijima S, Ichihashi T.** Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature* 1993; 363:6035.
- [4] **Timoshenko, S. P, and Goodier, J. N.:** Theory of elasticity, International Journal of Bulk Solids Storage in Silos, 1.4, 2014.
- [5] **Szillard, R.:** Theory and analysis of plates, 1974.
- [6] **Sokolnikoff, I. S. and Specht, R. D.:** Mathematical theory of elasticity, (Vol. 83), McGraw Hill, New York, 1956.
- [7] **Abdollahzadeh SE, Alibeigloo A.** Three-dimensional free vibration of carbon nanotube-reinforced composite plates with various boundary conditions using Ritz method. *Compos Struct* 2014; 111:362–70.
- [8] **Zhu P, Liew KM.** Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method. *Compos Struct* 2011; 93:2925–44.
- [9] **Lin F, Xiang Y.** Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories. *Appl Math Modell* 2014; 38:3741–54.
- [10] **Lei ZX, Liew KM, Yu JL.** Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Compos Struct* 2013; 106:128–38.
- [11] **Lei ZX, Liew KM, Yu JL.** Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels. *Int J Mater Sci Eng* 2013; 1:36–40.
- [12] **Reddy JN.** Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. Boca Raton, FL: CRC Press; 2004.
- [13] **Zhu P, Lei ZX, Liew KM.** Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Compos Struct* 2012;94: 1450–60.
- [14] **Stephen Tsai et Thomas Hahn.** Introduction to composite materials. Technomic Publishing, 1980.

- [15] **Jean-Marie Berthelot**. Matériaux composites. Masson, 1996.
- [16] **Daniel Gay**. Matériaux composites. 3e édition. Hermès, 2005.
- [17] **Carl Herakovich**. *Mechanics of fibrous composites*. Wiley, 1998.
- [18] **Mahi, A.**, "Analyse et étude des plaques composites FGM en vibrations libres" [Dr], Blida : Université Saad Dahlab Blida, (2012).
- [19] **Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M.**: Novel applications of functionally graded nano, opto electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224 (2013).
- [20] **Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T.**: Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. *Mater. Des.* 84, 402–410 (2015).
- [21] **Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana, S.**: Functionally graded material: An overview. In: *Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012*, vol. 3, pp. 1593–1597 (2012).
- [22] **Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G.**: Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169–177 (2011).
- [23] **Shumiya, H., Kato, K., Okubo, H.**: Feasibility studies on FGMs (functionally graded materials) application for gas insulated equipment. In: *IEEE Conference on Electrical Insulation and dielectric Phenomena*, pp. 360–363 (2004).
- [24] **Miyamoto, Y., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A., Ford, R.G.**: *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Kluwer Academic, Boston (1999).
- [25] **Dresselhaus MS, Dresselhaus G, Charlier JC, Hernandez E.** Electronic, Thermal and mechanical properties of carbon nanotubes. *PhilosTransact A Math PhysEngSci*; 362(2004);2065-2098.
- [26] **Anazawa K, Shimotani K, Manabe C, Watanabe H, Shimizu M,** High purity carbon nano tube synthesis method, *Applied Physics Letters* 81;(2002);739-741.
- [27] **Hirlekar R., Yamagar. M., Garse.H., Vij. M., Kadam.V.,** Carbon nanotubes and its applications, *Asian Journal of Pharmaceutical and Clinical Research*, Vol 2, Issue 4,2009,2426.
- [28] **Benedict Thomas**, *Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Shell Structures*”, Roll Number 512ME1045.
- [29] **H.-S. Shen**, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Compos. Struct.* 91 (2009) 9–19.



- [30] **Z.X. Lei, L.W. Zhang, K.M. Liew**, Buckling of FG-CNT reinforced composite thick skew plates resting on Pasternak foundations based on an element-free approach, *Appl. Math. Comput.* 266 (2015) 773–791.
- [31] **Gibson, R. F.**, “*Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1994).
- [32] **Jones, R. M.**,”*Mechanics of Composite Materials, Second Edition*”, Taylor & Francis, PA (1999).
- [33] **Reddy, J. N.** (Ed.), “*Mechanics of Composite Materials. Selected Works of Nicholas J. Pagano*”, Kluwer, The Netherlands (1994).
- [34] **Reddy, J. N. (Junuthula Narasimha)**, 1945- *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis* / J.N. Reddy. - 2nd ed.
- [35] **Reddy, J. N.**, "A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Composite Plates," *Communications in Applied Numerical Methods*, 3, 173-180 (1987).
- [36] **Barbero, E. J., Reddy, J. N., and Teply, J. L.**, "General Two-Dimensional Theory of Laminated Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, 28(3), 544-553 (1990).
- [37] **Barbero, E. J., Reddy, J. N.**, "Modeling of Delamination in Composite Laminates Using a Layer-Wise Plate Theory," *International Journal of Solids and Structures*, 28(3), 373-388 (1991).
- [38] **Alibeigloo A, Emtemani A.** Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method. *Meccanica*. 2015; 50:61-76.