

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Saad DAHLEB de Blida



Département D'aéronautique

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme Master en Aéronautique*



Option : Structure avion

**THEME :**

**CALCUL DE LA VITESSE CRITIQUE DE  
FLOTTEMENT DES MODES COUPLES D'UNE AILE  
COMPOSITE PAR LA METHODE DES ELEMENTS  
FINIS**

**Présenté par :**

**M<sup>r</sup> .YAHIA CHERIF Mansour**

**M<sup>r</sup> .CHIBANI Ahmed**

**Promoteur :**

**M<sup>r</sup> .A.BADEREDDINE.**

**Octobre 2013**

من خلال هذا البحث تم معرفة تأثير عامل القص و اتجاه الألياف للمواد المركبة التي تستخدم في صناعة أجنحة الطائرات على سرعة الرفرفة للجناح. من حيث مقاومة الأحمال المسلطة، تم التعامل مع الجناح على أنه عتبة تقاوم الأحمال المسلطة على الجناح.

قوة الرفع و عزم الالتواء حسبتم لمقطع جناح ثنائي الأبعاد باستخدام صيغة ثيودرسن لحساب قوة الرفع و عزم الالتواء المتغير، مع الزمن لجريان غير انضغاطي و سرعة أقل من سرعة الصوت و من ثم حسبتم على طول الجناح باستخدام التكامل العددي تم دراسة و تحليل الاهتزاز الحر للجناح المركب لغرض حساب الترددات الطبيعية و أشكال التشوه استخدمت طريقة (السرعة و عامل التضائل) لحساب سرعة و تردد رفرفة الجناح و لهذا استخدمنا برنامج ما طلاب للحساب باستخدام نظرية العناصر المنتهية.

## RESUME

D'après cette étude on a déterminé l'influence du coefficient de cisaillement et la variation de l'orientation des fibres des matériaux composite sur la vitesse de flottement de l'aile d'avion. En premier lieu, nous avons utilisé la méthode de Theodorsen pour calculer la portance et le moment de tangage instationnaire sur la longueur d'aile, en régime subsonique dans la limite d'un fluide incompressible.

L'aile est assimilée à un modèle de poutre composite dont la discrétisation par la méthode des éléments finies (MEF) a permis d'en calculer les fréquences et les modes propres. En deuxième lieu, la méthode (V- $\zeta$ ) a été utilisée pour calculer la vitesse et la fréquence de flottement en modes multiples par la (MEF), à l'aide d'un programme en langage MATLAB.

## ABSTRACT

In this work presents an investigation to the flutter speed of composite wing for different ply orientation. Theodorsen's expression was used to get the two dimensions unsteady lifting force and pitching moment in the limit of incompressible flow and subsonic speed which were integrated over the wing span.

Structurally the composite wing was idealized as a composite beam. A free vibration analysis was first carried out to get the natural frequencies and mode shapes. The velocity-damping (V- $\zeta$ ) method was used to calculate the flutter speed and the flutter frequency on multiple modes by using the finite element method. For calculating this speed we have used a program within MATLAB.

## REMERCIEMENT

*Nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu de nous avoir donné le Courage, la patience et la capacité de mener ce travail à terme.*

*Nous exprimons nos vifs remerciements à notre promoteur monsieur A.BADEREDDINE et notre Co promoteur I.BENNAMIA de nous avoir encadré malgré la charge du travail et à exprimer mon profonde gratitude pour nous avoir proposé ce sujet.*

*Au membre de jury pour l'honneur qui nous ont accordé en acceptant de juger notre travail.*

*Enfin nous voudrions exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marge de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelque mois seulement, nombreux sont celles et ceux qui ont participé à notre épanouissement. Nous les en remercions sincèrement.*

---

## TABLES DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIÈRES	
LISTE DES NOMENCLATURE	
LISTE DES FIGURES	
LISTE DES TABLEAUX	
ITRODUCTION.....	1

## CHAPITRE 01 GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

1.1) CONSTRUCTION DES MATERIAUX COMPOSITES.....	3
1.1.1) Renforts .....	3
1.1.2) Matrices .....	3
1.2) UTILISATION DES MATERIAUX COMPOSITES EN AERONAUTIQUE.....	4
1.3) AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES MATERIAUX COMPOSITES .....	4
1.3.1) Avantages.....	4
1.3.2) Inconvénients.....	5
1.4) COMPORTEMENTS MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES .....	5
1.4.1) Loi de hooke généralisée.....	5
1.4.2) Relation entre contraintes et déformations hors axes d'orthotrope.....	7
1.4.3) Equation constitutive .....	9
1.4.4) Matrices $[A]_{ij}, [B]_{ij}, [D]_{ij}$ .....	9
1.4.5) Calcul des caractéristique de rigidité $EI, GJ$ et $K$ .....	10
1.5) POUTRE D'EULER BERNOULLI ANISOTROPE.....	10
1.6) POUTRE TIMOSHENKO.....	11

## CHAPITRE 02 MODELISATION DES AILES COMPOSITES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS(MEF)

2.1) PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	12
2.1.1) Discrétisation spatiale.....	12
2.2) DETERMINATION DES MATRICES ELEMENTAIRES (MASSE ET RIGIDITE).....	13
2.2.1) Formulation globale.....	13
2.3) MODELISATION D'UNE AILE COMPOSITE PAR ELEMENTS FINIS .....	14
2.4) MODELISATION D'UNE POUTRE COMPOSITE MINCE .....	15
2.4.2) Poutre en flexion .....	15
2.4.2.1) Matrice de masse .....	15

2.4.2.2) Matrice de rigidité .....	15
2.4.3) Poutre en torsion .....	15
2.4.3.1) Matrice masse .....	16
2.4.3.2) Matrice de rigidité .....	16
2.4.4) Matrices globales .....	17
2.4.4.1) Matrice de masse .....	17
2.4.4.2) Matrice de rigidité .....	17
2.4.1) Fonctions d'interpolation d'une poutre d'Euler Bernoulli .....	18
2.4.1.1) En flexion .....	18
2.4.1.2) En torsion .....	18
2.5) MODELISATION D'UNE POUTRE COMPOSITE EPAISSE .....	18
2.5.1) Matrice de masse .....	18
2.5.2) Matrice de rigidité .....	21
2.5.3) Fonctions d'interpolation (poutre de Timoshenko) .....	23
2.6) CALCUL DES FREQUENCES ET DES MODES PROPRES .....	24

### CHAPITRE 03 PHENOMENE AEROELASTIQUE

3.1) AERODYNAMIQUE STATIONNAIRE .....	26
3.1.1) Hypothèses .....	26
3.1.2) Conséquences directes des hypothèses .....	27
3.2) AERODYNAMIQUE INSTATIONNAIRE .....	28
3.3) L'AEROELASTICITE STATIQUE .....	28
3.3.1) La divergence .....	28
3.3.2) Renversement de contrôle .....	29
3.4) L'AEROELASTICITE DYNAMIQUE .....	29
3.4.1) Le Buffeting .....	29
3.4.2) Buzz-tansonique .....	29
3.4.3) Le flottement (flutter) .....	29
3.5) LES TYPES DE FLOTTEMENTS .....	30
3.5.1) Flottement à fréquence nulle .....	30
3.5.2) Flottement de panneau .....	30
3.5.3) Flottement de décrochage .....	30
3.5.4) Le flottement des modes couplés .....	30
3.6) LES TYPES D'AMORTISSEMENT .....	31
3.6.1) L'amortissement structural .....	31
3.6.2) L'amortissement aérodynamique .....	31
3.7) EQUATIONS AEROELASTIQUE .....	32
3.8) REPRESENTATION MODALE .....	33

3.9) LA FREQUENCE REDUITE .....	34
3.10) METHODES DE CALCUL DE FLOTTEMENT .....	35
3.10.1) La méthode 'k' .....	35
3.10.2) La méthode 'p-k' .....	36

**CHAPITRE 04 RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

4.1) PROCESSUS DE CALCUL .....	40
4.2) ORGANIGRAMMES .....	40
4.3) MODES ET FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE_ MODELE EULER - BERNOULLI .....	43
4.3.1) Mode découplé (sans couplage).....	43
4.3.2) Modes couplés .....	45
4.4) LES MODES ET LES FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE-MODELE TIMOSHENKO (POUTRE EPAISSE).....	49
4.5) LES MODES ET LES FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE-MODELE TIMOSHENKO (COUPLAGE EN MASSE) .....	51
4.6) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT PAR LA METHODE DE RITZ .....	54
4.6.1) Aile de Fung - Premier modèle.....	54
4.6.2) Aile de Fung - Deuxième modèle .....	55
4.6.3) Aile de Fung - Troisième modèle.....	55
4.6.4) Aile de Goland .....	56
4.7) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS. 59	
4.7.1) Aile de Goland .....	59
4.7.1.1) Pour deux modes.....	59
4.7.1.2) Pour trois modes .....	60
4.7.1.3) Pour quatre modes .....	60
4.7.1.4) Pour cinq modes .....	61
4.7.1.5) Pour six modes .....	61
4.7.2) Effet de couplage en rigidité sur la vitesse de flottement .....	62
4.8) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT POUR UNE POUTRE COMPOSITE.....	64

CONCLUSION

ANNEXES

REFERENCES

## LISTE DES NOMENCLATURE

$(x, y, z)$	: Coordonnées cartésiennes.
$(u, v, w)$	: Déplacements.
$(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$	: Rotation autour les axes.
$(E_f, E_m)$	: Modules de YOUNG des fibres et de la matrice, respectivement.
$(V_f, V_m)$	: Fractions en volume des fibres et de la matrice, respectivement.
$(\nu_f, \nu_m)$	: Coefficients de Poisson des fibres et de la matrice, respectivement.
$(G_f, G_m)$	: Modules de cisaillement des fibres et de la matrice, respectivement.
$(E_{11}, E_{22})$	: Modules de YOUNG du composite dans les directions 1 et 2.
$(G_{12})$	: Module de cisaillement du composite.
$(\nu_{12})$	: Coefficient de poisson du composite.
$(x_a)$	: Distance entre le centre de gravité et le centre élastique.
$(l)$	: Largueur des fibres.
$(k)$	: Fréquence réduite.
$(A)$	: Section.
$(E)$	: Module de Young.
$(G)$	: Module de cisaillement transversal.
$(I_a)$	: Moment d'inertie et moment d'inertie polaire respectivement.
$(I_\theta)$	: Moment d'inertie de torsion.
$(L, M)$	: Forces aérodynamiques.
$(\rho_a)$	: Masse volumique de l'air.
$(T, U)$	: Energie cinétique et énergie potentielle respectivement.
$(\omega)$	: Pulsation.
$\{q\}$	: Vecteur déplacement.
$\{Q\}$	: Vecteur des forces aérodynamiques généralise.
$[M_g], [K_g]$	: Matrice masse et rigidité globales.
$[T]$	: Matrices de passage.
$[\Phi]$	: Matrice modale.
$(\xi)$	: Coefficient d'amortissement.
$(x_f)$	: Position du centre élastique.
$(EI)$	: Coefficient de rigidité en flexion.
$(GJ)$	: Coefficient de rigidité en torsion
$(K)$	: Coefficient de couplage de rigidité.
$(\kappa GA)$	: Coefficient de cisaillement.
$(\omega_f)$	: Fréquence de flexion.
$(\omega_t)$	: Fréquence de torsion.
$(mu)$	: Rapport de masse.

## LISTE DES FIGURES

Fig.1.1	Quelques utilisations des matériaux composites dans un avion commercial moderne.	4
Fig.1.2	Configuration des axes	7
Fig.1.3	Géométrie descriptive d'un stratifié	9
Fig.1.5	Schéma présente la différence entre les poutres Timoshenko et Euler Bernoulli	11
Fig.2.1	Présentation des axes d'une aile d'avion.	15
Fig.2.2	Élément fini de poutre en flexion.	15
Fig.2.1	Élément de poutre en torsion.	16
Fig.3.1	Séparation du problème réel d'un profil en un problème d'épaisseur et portant.	27
Fig.3.2	Etat d'un profile à un instant t.	31
Fig.4.1	Organigramme de calcul des fréquences propres et des modes propres.	41
Fig.4.2	Organigramme de calcul de la vitesse de flottement.	42
Fig.4.3	Poutre composite encastree –libre modèle Euler Bernoulli.	43
Fig.4.4.a	Mode1 $w=51.004$ rad/s	44
Fig.4.4.b	Mode2 $w=88.479$ rad/s	44
Fig.4.4.c	Mode3 $w=265.46$ rad/s	44
Fig.4.4	Les trois premiers modes propres de poutre composite (sans couplage).	44
Fig.4.5.a	Mode1 $w=50.796$ rad/s	45
Fig.4.5.b	Mode2 $w=89.58$ rad/s	46
Fig.4.5.c	Mode3 $w=262.029$ rad/s	46
Fig.4.5	Les trois premier modes propres de la poutre composite (couplage en masse).	46
Fig.4.6.a	Mode1 $w=42.671$ rad/s	47
Fig.4.6.b	Mode2 $w=91.244$ rad/s	47
Fig.4.6.c	Mode3 $w=212.382$ rad/s	47
Fig.4.6	Les trois premier modes propres de la poutre composite (couplage en rigidité).	47
Fig.4.7.a	Mode1 $w= 41.051$ rad/s	48
Fig.4.7.b	Mode2 $w= 59.915$ rad/s	48
Fig.4.7.c	Mode3 $w = 202.286$ rad/s	49
Fig.4.7	Les trois premier modes propres de la poutre composite couplage en masse et en rigidité.	49
Fig.4.8	Poutre composite modèle Timoshenko.	49
Fig.4.9.a	Mode1 $w = 193.02$ rad/s	50
Fig.4.9.b	Mode2 $w = 1185.67$ rad/s	50



## CHAPITRE 01 GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

Les matériaux composites, au sens le plus courant du terme, sont un ensemble des matériaux de synthèse conçu et mis en œuvre essentiellement pour des applications structurales, où la fonction mécanique est dominante.

Ils combinent un matériau de renfort, dispersé sous forme de particules, fibres courtes ou fibres longues, au sein d'une matrice qui les enrobe. Le choix des renforts et de la matrice, de leur disposition, de leur fraction respective, permet à l'élaborateur du matériau de le concevoir pratiquement « sur mesure », optimisé pour la pièce où il sera utilisé, et même parfois optimisé localement en fonction de la distribution locale des contraintes dans la pièce.[13]

### 1.1) CONSTRUCTION DES MATERIAUX COMPOSITES

#### 1.1.1) Renforts

Les rôles des renforts consistent à :

- supporter les efforts appliqués ;
- conférer au composite sa rigidité élastique et sa résistance à la rupture, éventuellement à haute température.

Ils doivent également être compatibles avec la matrice du composite sur le plan chimique, c'est-à-dire assurer une adhérence inter faciale renfort-matrice suffisante et stable dans le temps.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les fibres (aléatoire 3D, feutres, nappes de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissages 3D) ou par leur nature. [13]

#### 1.1.2) Matrices

La matrice d'un composite a pour rôles :

- d'enrober les renforts, les protégeant ainsi du milieu extérieur;
- d'assurer une répartition spatiale homogène des renforts;
- de transmettre aux renforts les efforts extérieurs et de les répartir;
- de conférer la forme à la pièce de matériau composite : ce sont elles qui conditionnent l'aptitude à la mise en forme du composite. [13]

Ce travail consiste à déterminer la vitesse de flottement d'une aile d'avion en composites selon les étapes suivantes :

- Modélisation structurale de l'aile à base d'une poutre par la méthode des éléments finis.
- En utilisant les résultats des éléments finis (mode et fréquences propres) pour écrire les équations de flottement avec la méthode numérique  $V-\zeta$ .
- Faire introduire les forces aérodynamiques de raideur et d'amortissement pour écrire les équations aéroélastiques
- Faire résoudre le système et tracer les courbes  $V-\zeta$  afin de déterminer la vitesse de flottement du système.

## INTRODUCTION

Les vibrations aéroélastiques d'une aile d'avion proviennent de l'interaction entre les forces élastiques et inertielles de la structure et les forces aérodynamiques instationnaires induites par ses mouvements. Lors d'une instabilité en flottement, deux modes de vibrations, ou plus, sont engagés. Il s'agit en général d'un mode de flexion et d'un mode de torsion. Les forces aérodynamiques instationnaires associées à ces deux modes créent des réactions réciproques permettant à la structure en mouvement vibratoire d'absorber l'énergie de l'écoulement. Quand il s'enclenche, ce phénomène provoque sur le système aéroélastique induit des vibrations d'amplitudes croissantes.

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés en construction aérospatiale. En effet, les matériaux composites ont des rapports raideur-masse importants qui peuvent donc réduire la masse des structures tout en leur permettant de conserver leurs caractéristiques mécaniques.

De plus il possède souvent de bonnes propriétés amortissantes, une bonne durée de vie en fatigue et en corrosion. Ainsi, les matériaux composites ont été introduit avec succès dans les structures soumises à des excitations dynamiques telles que les pièces des avions, les pièces de machine tournante, ... etc.

L'idée de diminuer les vibrations en utilisant les matériaux composites multicouches a été introduite pour la première fois par William Swallow [24] en 1939 dans le "British Patent Spécification". Au début des années 50, P.Léonard [11] s'est attaché à mesurer le coefficient d'amortissement des matériaux composites à revêtement simple (sans plaque de contrainte) en fonction du coefficient d'amortissement de la couche viscoélastique.

En nous appuyant sur la méthode des éléments finis, nous nous proposons de résoudre le problème dynamique de recherche des fréquences et modes propres d'une aile composite modélisée comme une poutre composite.

## LISTE DES TABLEAUX

Tab (4.1)	Les trois premier modes propres de la poutre composite mince pas de couplage.	43
Tab (4.2).	Les trois premiers modes propres de la poutre composite- couplage en masse (Euler Bernoulli).	45
Tab (4.3)	Les trois premiers modes propres de la poutre composite couplage en rigidité (Euler Bernoulli).	46
Tab (4.4)	Les trois premiers modes propres de la poutre composite (couplage en masse et en rigidité-Euler Bernoulli).	48
Tab (4.5)	Les quatre premiers modes propres de la poutre composite Timoshenko.	50
Tab (4.6)	Les quatre premier modes propres de poutre composite Timoshenko $x_\alpha = 0.003m$ .	52
Tab (4.7)	La vitesse de flottement pour un profil d'aile-Fung.	56
Tab (4.8)	La vitesse de flottement pour aile de Goland avec $k=0.47$ .	59
Tab (4.9)	Vitesse de flottement pour aile de Goland par MEF.	62
Tab(4.10)	Vitesse de flottement pour l'aile de Goland avec couplage en rigidité.	63
Tab(4.11)	Vitesse de flottement pour une poutre composite.	64



## 1.2) UTILISATION DES MATERIAUX COMPOSITES EN AERONAUTIQUE

Les matériaux composites sont des nouveaux matériaux utilisés en structures d'avion à partir des années soixante. Alors un matériau composite est constitué d'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [7].

L'industrie des composites en construction d'avion apparaît pour atteindre le plateau, particulièrement sur les avions civils subsoniques où la fraction de la structure composite presque 15%. Ceci dû largement au prix cher de fabrication de composites comparé avec les structures en alliages d'aluminium [3].

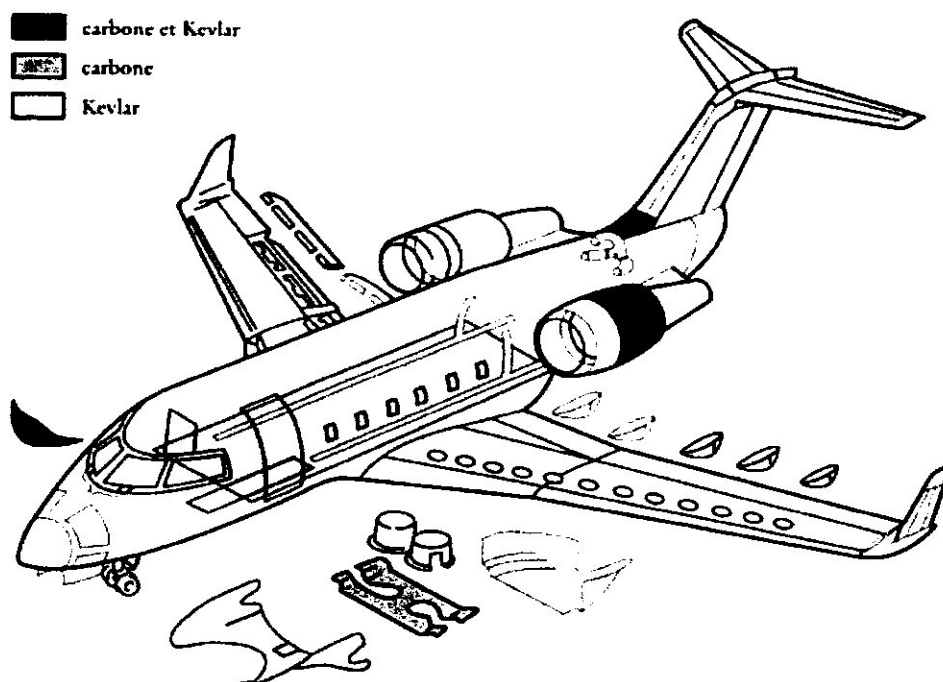


Fig. (1.1) Quelques utilisations des matériaux composite dans un avion commercial moderne.

## 1.3) AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES MATERIAUX COMPOSITES

### 1.3.1) Avantages

- Ils sont beaucoup plus légers, ce qui est un gain énorme au niveau du poids de l'avion qui est nettement réduit. L'avion consomme donc moins de carburant.
- Certains types ils sont bien sûr insensibles aux produits chimiques tels que les huiles, les liquides hydrauliques.
- Il y a l'assurance d'en disposer beaucoup et pendant longtemps, ce qui n'est pas le cas des métaux dont le prix augmente vertigineusement.

- On peut créer des matériaux de toutes les formes, de toutes les épaisseurs, en fonction de la demande. Ils offrent de grandes possibilités de maniement.
- Ils se déforment moins en fonction de la température et de la pression ce qui est un des gros enjeux des matériaux utilisés en aviation commerciale. Ils sont peu sensibles à l'humidité, la chaleur, la corrosion.

### 1.3.2) Inconvénients

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts. Une petite faille peut engendrer de grosses déformations. .
- La détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe. [06]

## 1.4) COMPORTEMENTS MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

### 1.4.1) Loi de HOOKE généralisée

Dans le repère lié au matériau, la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations s'écrit [20] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pour un matériau orthotrope, cette relation s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Pour un pli soumis à un état complet de contraintes dans le plan constitué par les axes naturels  $x_1, x_2$  (longitudinal et transversal), cette relation devient [20] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Les coefficients de raideurs  $Q_{ij}$  sont calculés en fonction des constantes élastiques fondamentales  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}$  et  $G_{12}$  tel que :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{12}} \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{12}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{12}} \quad Q_{16} = G_{12}$$

Avec :

$$E_{12} = E_f V_f + E_m V_m$$

$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}}$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f}} \quad (1.5)$$

Où :

$E_f, E_m$  : Modules de Young des fibres et de la matrice respectivement ;

$V_f, V_m$  : Fractions en volume des fibres et de la matrice respectivement ;



$\nu_f, \nu_m$  : Coefficients de Poisson des fibres et de la matrice respectivement ;

$G_f, G_m$  : Modules de cisaillement des fibres et de la matrice respectivement ;

$E_{11}, E_{22}$  : Modules de Young du composite dans les directions 1 et 2 ;

$G_{12}$  : Module de cisaillement du composite ;

$\nu_{12}$  : Coefficient de poisson du composite.

La 5<sup>ème</sup> constante élastique est en fonction des autres constantes et peut être déterminée du fait que la matrice  $[Q]$  est symétrique.

$$\nu_{21} \cdot E_{11} = \nu_{12} \cdot E_{22} \quad (1.6)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}} \quad (1.7)$$

#### 1.4.2) Relation entre contraintes et déformations hors axes d'orthotrope

En général les axes principaux L et T ne coïncident pas avec les axes  $x$  et  $y$  figure (II.6) pour cela on utilise les relations de transformations décrites :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

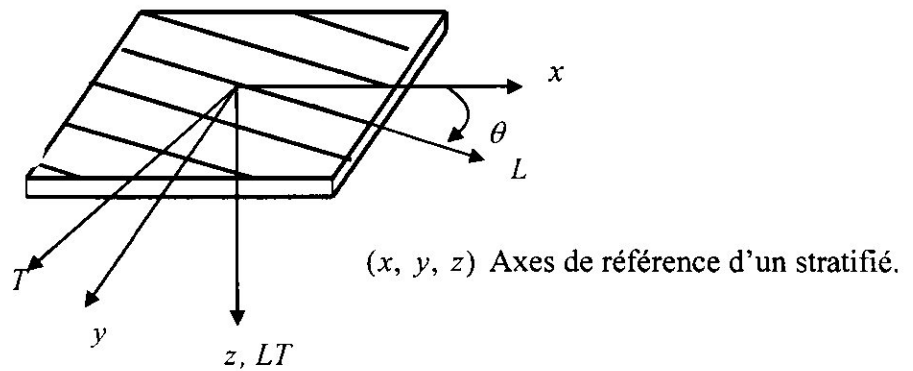


Fig. (1.2) Configuration des axes.

La matrice de transformation  $[T]$  est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2s^2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Où :

$$c = \cos \theta$$

$$s = \sin \theta$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

On obtient après avoir effectué des transformations intermédiaires :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Où :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

On note :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \quad (1.13)$$

Matrice de rigidité hors axes d'orthotrope.

Donc :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Les composantes de la matrice de rigidité  $[\bar{Q}]$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4 \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})cs^3 \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4)
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

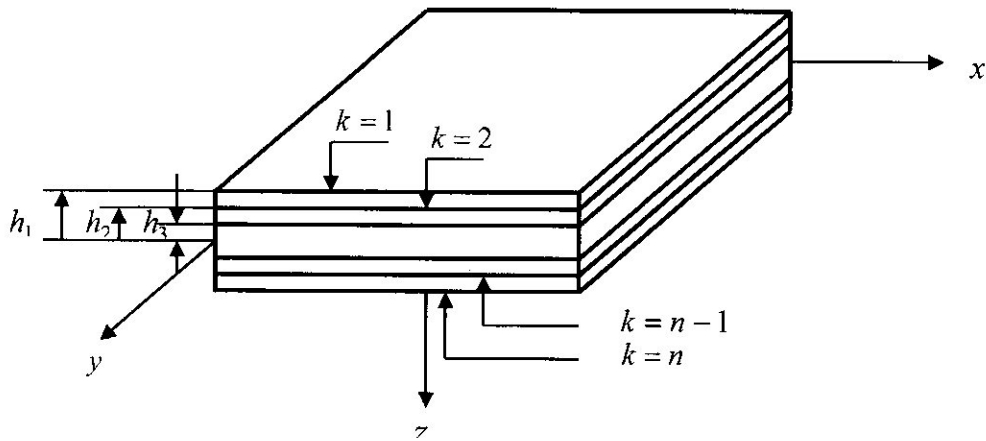


Fig. (1.3) Géométrie descriptive d'un stratifié

1.4.3) Equation constitutive

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{1.17}$$

1.4.4) Matrices  $[A]_{ij}, [B]_{ij}, [D]_{ij}$

$$\begin{aligned}
 [A]_{ij} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k ; [B]_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k ; \\
 [D]_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\bar{Q}_{ij})_k
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

#### 1.4.5) Calcul des caractéristique de rigidité $EI$ , $GJ$ et $K$

$$EI = b \left( D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}} \right) ; GJ = 4b \left( D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}} \right) ; K = 2b \left( D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}} \right) \quad (1.19)$$

Avec  $b$  est la largeur du stratifié

#### 1.5) POUTRE D'EULER BERNOULLI ANISOTROPE

Cette formulation néglige les déformées dues à l'effort tranchant, hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé, ainsi que l'inertie de rotation.

Plusieurs recherches ont conduit à l'utilisation de couplage flexion-torsion pour optimiser les caractéristiques vibratoires de poutres anisotropes composites. Les bénéfices de l'utilisation des matériaux composites pour l'optimisation sont dues à leurs rigidité directionnelles et bonnes propriétés, leurs rapport rigidité / légèreté élevé et l'habilité de coupler les déplacements de flexion et de torsion [04]. L'effet de couplage de rigidité flexion – torsion en vibration d'une poutre encastree est examiné par Weisshaar et Foist [25], [26].

Les équations différentielles de mouvement d'une poutre d'Euler :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = L(y, t) \quad (1.20)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + S_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = M(y, t) \quad (1.21)$$

Où  $EI$ ,  $GJ$  et  $K$  sont la rigidité de flexion et de torsion et de couplage de rigidité flexion - torsion respectivement. De plus  $m$ ,  $S_x$  et  $I_\theta$  sont la masse, le moment statique et le moment d'inertie polaire, par unité de longueur.

Les fréquences et les modes propres sont déterminés par l'algorithme de Wittrick et Williams [27].

La modélisation en poutre est applicable pour le calcul du flottement où on s'intéresse au calcul de stabilité des premiers modes de flexions et de torsions de la structure [27].

### 1.6) POUTRE TIMOSHENKO

Dans cette formulation les déformées dues à l'effort tranchant sont prises en compte (hypothèse de Timoshenko), le cisaillement transverse et tous les termes d'inertie sont pris en compte.

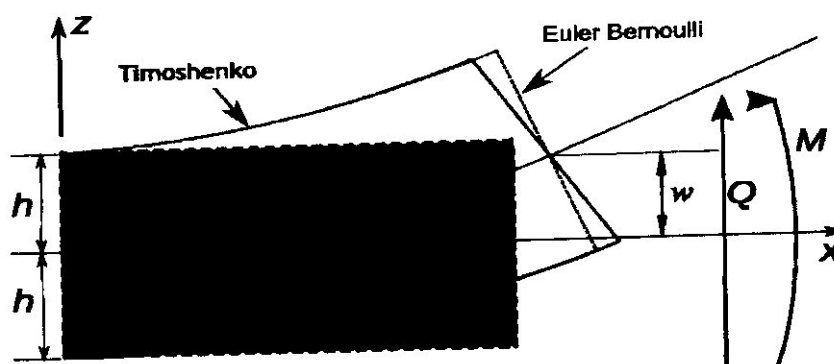


Fig. (1.4) Schéma présente la différence entre les poutres Timoshenko et Euler Bernoulli

Les équations différentielles de mouvement libre d'une poutre de Timoshenko sont :

$$EI\theta_x'' - \kappa GA (w' - \theta_y) + K\theta_y'' - \rho I \ddot{\theta}_y = 0 \quad (1.22)$$

$$\kappa GA (w'' - \theta_y) - m\ddot{w} = 0 \quad (1.23)$$

$$GJ\theta_y'' + K\theta'' - I_{\theta y} \ddot{\theta}_y = 0 \quad (1.24)$$

La résolution des équations (1.20), (1.21), (1.22), (1.23) et (1.24) est faite analytiquement par Bannerjee dans les références [17] et [30] (solution exacte).

Dans ce chapitre nous avons étudié en général les matériaux composites et l'importance de leur utilisation dans l'industrie aéronautique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons résoudre numériquement les équations de la dynamique des structures en utilisant la théorie des éléments finie pour calculer les matrices de masse et de rigidité pour les poutres composites d'Euler- Bernoulli et de Timoshenko.

## CHAPITRE 02 MODELISATION DES AILES COMPOSITES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'utilisation des matériaux composites dans les différentes industries automobile, navale, aéronautique, ainsi que dans l'industrie du bâtiment, devient de plus en plus fréquente. Ceci est dû aux avantages appréciables qu'ils présentent, notamment leur légèreté et leur résistance. Cependant, leur emploi nécessite une maîtrise de leur comportement mécanique plus particulièrement dans le domaine des vibrations. Cette maîtrise repose sur la connaissance de leurs caractéristiques dynamiques c'est-à-dire la détermination de leurs fréquences et modes propres.

Pour cela, une approche d'homogénéisation des poutres composites, basée sur le principe des rigidités équivalentes, est proposée. La poutre multicouche est remplacée pour les besoins du calcul par une poutre monocouche fictive de même dimension. Les équations du mouvement libre non amorti sont établies et les fréquences propres de vibration sont alors déterminées en tenant compte des différentes conditions aux limites. Afin de pouvoir chiffrer ces caractéristiques mécaniques équivalentes, un logiciel de calcul est mis en place. Pour chaque pli on introduit les modules d'Young, les modules de cisaillement, la masse volumique, le coefficient de Poisson, la hauteur du pli ainsi que la hauteur totale. Une fois ces paramètres déterminés, ils sont automatiquement utilisés par un logiciel de calcul pour poutres homogènes.

### 2.1) PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par la méthode d'analyse statique, cependant, il existe également de nombreux cas où l'on ne peut pas négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultants de la variation des forces appliquées, pour cela nous allons considérer successivement :

#### 2.1.1) Discrétisation spatiale

La phase de discrétisation consiste à découper la structure en élément finis de forme géométrique simple, dans chaque élément on définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées d'espace et de temps.

Dans le cas du déplacement nodal comme coordonnée généralisée :

$$\{U(x, y, z, t)\} = [N(x, y, z)]\{q(t)\} \tag{2,1}$$

Avec :

$\{q(t)\}$  : le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément.

$[N(x, y, z)]$  : la matrice des fonctions d'interpolation pour l'élément.

$\{U(x, y, z, t)\}$  : la matrice des fonctions base de l'approximation spatiale.

## 2.2) DETERMINATION DES MATRICES ELEMENTAIRES (MASSE ET RIGIDITE)

L'étude dynamique où le calcul des pulsations et les modes propres ainsi que la réponse d'une structure à une excitation donnée (réponse transitoire et harmonique). Les matrices masse et rigidité sont déterminées déterminer par la méthode énergétique (la méthode de l'énergie cinétique pour la matrice masse et l'énergie potentiel), (l'équation de Lagrange).

### 2.2.1) Formulation globale

La formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir de l'expression des énergies cinétiques et potentielles en fonction des vitesses et des déplacements aux nœuds de la structure.

Les équations de Lagrange permettant d'obtenir les équations discrètes du mouvement. On a les énergies cinétiques, potentielles et de dissipation ont les expressions suivantes :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \tag{2,2}$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\} \tag{2,3}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [D] \cdot \{\dot{q}\} \tag{2,4}$$

Pour un système discret non conservatif d'ordre  $\ll r \gg$ , les équations différentielles de Lagrange prennent la forme suivant :

$$\frac{d}{dt} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_I} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_I} + \frac{\partial U}{\partial q_I} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_I} = \{F\} \tag{2,5}$$

D'où :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \tag{2,6}$$

Avec :

$[M]$ ,  $[D]$  et  $[K]$  : sont respectivement les matrices masse, dissipation et élastique dans un système de coordonnées généralisées.

Les matrices de rigidité des éléments sont souvent calculées d'un système de cordones locale, pour obtenir la matrice de rigidité de tous les éléments qui composent la structure on doit introduire les matrices de transformation nécessaire pour passer au système globale de la structure.

Si :

$(o, x', y', z')$  : représente le système locale.

$(o, x, y, z)$  : représente le système globale.

Alors les déplacements s'expriment comme suit :

$$\{q\}_{locale} = [T] \cdot \{q\}_{globale} \quad (2,7)$$

Avec :  $[T]$  : la matrice de passage.

D'où, la matrice de rigidité s'écrit :

$$[K]_{globale} = [T]^T \cdot [K]_{Locale} \cdot [T] \quad (2,8)$$

### 2.3) MODELISATION D'UNE AILE COMPOSITE PAR ELEMENTS FINIS

Le modèle poutre est le modèle le plus utilisé pour analyser les structures d'avions. Plusieurs chercheurs et plusieurs ouvrages [3] [14] [15] [25] montrent l'importance de ce modèle comme un modèle préliminaire efficace qui répond à tous les problèmes de l'analyse des structures d'avions telles que l'aéroélasticité, la réponse dynamique, l'analyse des contraintes, etc.

La section de la poutre joue un rôle primordial pour la modélisation, pour cela les caractéristiques du profil de la poutre sont préalablement déterminées. Le centre de gravité (centre de masse), le centre de torsion (centre élastique) ont une importance major pour le calcul des structures, car les équations différentielles correspondantes dépendent d'eux.



2.4) MODELISATION D'UNE POUTRE COMPOSITE MINCE

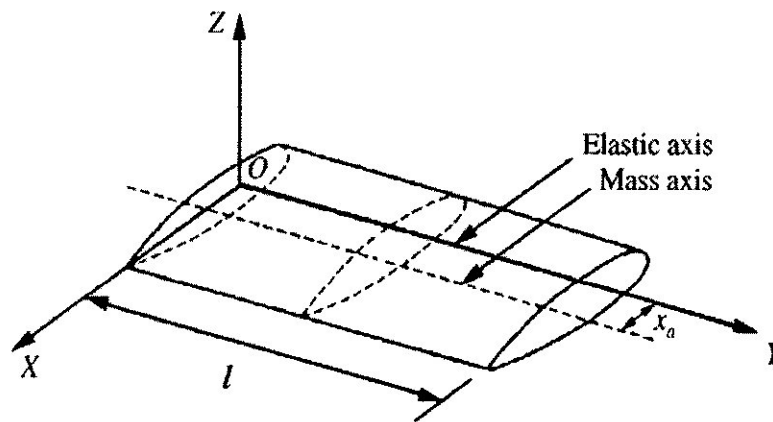


Fig. (2.1) Présentation des axes d'une aile d'avion.

2.4.2) Poutre en flexion



Fig. (2.2) Élément fini de poutre en flexion.

2.4.2.1) Matrice masse

A partir de l'énergie cinétique, la matrice masse d'un élément de la poutre est donné par :

$$[M_f] = \int_0^l \rho A [N_f]^T [N_f] dy \tag{2.9}$$

Sous la forme matricielle s'écrit :

$$[M_f] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & 22l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

\$A\$ : la section de la poutre et \$l\$ est la longueur de la poutre.

{q} = {w<sub>1</sub> \$\theta\_{x1}\$ w<sub>2</sub> \$\theta\_{x2}\$} : Le vecteur des degrés de liberté de la poutre.

2.4.2.2) Matrice de rigidité

A partir de l'énergie potentielle, la matrice de rigidité de la poutre en flexion est donnée par :

$$[K_f] = \int_0^l EI_{xx} [N_f'']^T [N_f''] dy \tag{2.11}$$

Sous la forme matricielle s'écrit :

$$[K_f] = \frac{EI_{xx}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ sym & & & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$[N_f] = [N_1(y) \ N_2(y) \ N_3(y) \ N_4(y)]$  : La matrice des fonctions d'interpolation en flexion.

**2.4.3) Poutre en torsion**



Fig. (2.3) Elément de poutre en torsion.

Par application de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, les matrices masse et de rigidité de la poutre sont données par [5] [19] [25] :

**2.4.3.1) Matrice de masse**

$$[M_t] = \int_0^l \rho I_{xx} [N_t']^T [N_t'] dy$$

$$[M_t] = \frac{\rho I_{xx} l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

**2.4.3.2) Matrice de rigidité**

$$[K_t] = \int_0^l GJ [N_t']^T [N_t'] dy$$

$$[K_t] = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$I_{xx}$  : Le moment quadratique de la poutre,

$J$  : Constante de torsion.

$GJ$  : la rigidité de torsion de la poutre.

$[N_t] = [N_9(y) \ N_{10}(y)]$  : La matrice des fonctions d'interpolation en torsion.

## 2.4.4) Matrices globales

### 2.4.4.1) Matrice de masse

- Matrice masse élémentaire (flexion pure)

$$[M_f] = \int_0^l \rho A \{N_f\}^T \{N_f\} dy \quad (2.15)$$

- Matrice masse élémentaire (torsion pure)

$$[M_t] = \int_0^l I_{\theta x} \{N_t\}^T \{N_t\} dy \quad (2.16)$$

- Matrice masse élémentaire couplage (flexion torsion)

$$[M_{ft}] = \int_0^l S_x \{N_f\}^T \{N_t\} dy \quad (2.17)$$

- Matrice masse élémentaire couplage (torsion flexion)

$$[M_{tf}] = \int_0^l S_x \{N_t\}^T \{N_f\} dy \quad (2.18)$$

- Matrice masse élémentaire globale Réf [37]

$$[M_g] = [M_f] + [M_t] + [M_{ft}] + [M_{tf}] \quad (2.19)$$

$$[M_g] = \begin{bmatrix} 156 c_1 & 22l c_1 & -7c_2/2 & 54 c_1 & -13lc_1 & -3 c_2/2 \\ & 4l^2 c_1 & -lc_2/2 & 13lc_1 & -3l^2 c_1 & -l c_2/3 \\ & & 2c & -3c_2/2 & l c_2/3 & c_3 \\ & & & 156 c_1 & -22l c_1 & -7 c_2/2 \\ & sym & & & 4l^2 c_1 & l c_2/2 \\ & & & & & 2 c_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Avec :  $c_1 = \frac{M_x l}{420}$ ,  $c_2 = S_x l/10$ ,  $c_3 = I_{\theta x} l/6$

### 2.4.4.2) Matrice de rigidité

Matrice rigidité élémentaire (flexion pure)

$$[K_f] = \int EI_{xx} \{N''_f\}^T \{N''_f\} dy \quad (2.21)$$

- Matrice rigidité élémentaire (torsion pure)

$$[K_t] = \int GJ \{N'_t\}^T \{N'_t\} dy \quad (2.22)$$

- Matrice rigidité élémentaire globale Réf [37]

$$[K_g] = \int EI_{xx} \{N''_f\}^T \{N''_f\} dy + \int GJ \{N'_t\}^T \{N'_t\} dy \quad (2.23)$$

$$[K_g] = EI_{xx} \begin{bmatrix} 12 & 6l & 0 & -12 & 6l & 0 \\ & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 \\ & & (GJ/EI_{xx})l^2 & 0 & 0 & -(GJ/EI_{xx})l^2 \\ \text{sym} & & & 12 & -6l & 0 \\ & & & & 4l^2 & 0 \\ & & & & & (GJ/EI_{xx})l^2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

**2.4.5) Fonctions d'interpolation d'une poutre d'Euler Bernoulli**

**2.4.5.1) En flexion**

$$N_1(y) = 1 - \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} \quad (2.25)$$

$$N_2(y) = y - \frac{2y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \quad (2.26)$$

$$N_3(y) = \frac{3y^2}{l^2} + \frac{2y^3}{l^3} \quad (2.27)$$

$$N_4(y) = \frac{-y^2}{l} + \frac{y^3}{l^2} \quad (2.28)$$

**2.4.5.2) En torsion**

$$N_5(y) = \frac{y}{l} \quad (2.29)$$

$$N_6(y) = 1 - \frac{y}{l} \quad (2.30)$$

**2.5) MODELISATION D'UNE POUTRE COMPOSITE EPAISSE**

**2.5.1) Matrice de masse**

$$T = \frac{1}{2} \int_v [\rho(\{\dot{w}\} + y\{\dot{\theta}_x\})^2 + \frac{1}{2} \int_v \rho(z\dot{\theta}_y)^2] dv$$

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho[(\{\dot{w}\} + y\{\dot{\theta}_x\})^t(\{\dot{w}\} + y\{\dot{\theta}_x\}) + \frac{1}{2} \int_v \rho z\{\dot{\theta}_y\}^2] dv$$

$$T = \frac{1}{2} \int_v [\rho\{\dot{w}\}^t\{\dot{w}\} + \rho y\{\dot{w}\}^t\{\dot{\theta}_x\} + \rho y\{\dot{\theta}_x\}^t\{\dot{w}\} + \rho y^2\{\dot{\theta}_x\}^t\{\dot{\theta}_x\} + \frac{1}{2} \int_v \rho z^2\{\dot{\theta}_y\}^t\{\dot{\theta}_y\}] dv$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l [M_x\{\dot{w}\}^t\{\dot{w}\} + S_x\{\dot{w}\}^t\{\dot{\theta}_y\} + S_x\{\dot{\theta}_y\}^t\{\dot{w}\} + I_{\theta_y}\{\dot{\theta}_y\}^t\{\dot{\theta}_y\} + I_{\theta_x}\{\dot{\theta}_x\}^t\{\dot{\theta}_x\}] dy \quad (2.31)$$

Avec :

$M_x = \rho A$  : La masse par unité de la longueur.

$S_x = M_x y$  : Moment statique.

$I_{\theta_y}$  = moment d'inertie.

Donc :

$$[M]_{globale} = [M]_{flexion} + [M]_{couplage\ flexion\_torsion} + [M]_{couplage\ torsion\_flexion} + [M]_{torsion}$$

Matrice masse élémentaire (flexion pure)

$$[M]_{flexion} = [M_v] + [M_{\theta_x}]$$

$$[M_v] = \int_0^l \rho A [N_v]^t [N_v] dy \quad (2.32)$$

$$[M_{\theta_x}] = \int_0^l \rho I_y [N_{\theta_x}]^t [N_{\theta_x}] dy \quad (2.33)$$

Avec :

$$w(y) = \{N_f\} \{q_e\} \quad (2.34)$$

$$\theta_x(y) = \{N_{\theta_x}\} \{q_e\} \quad (2.35)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

$$w(y) = N_1 w_1 + N_2 \theta_{y1} + N_3 w_2 + N_4 \theta_{y2} \quad (2.37)$$

$$\theta_y(y) = N_5 w_1 + N_6 \theta_{y1} + N_7 w_2 + N_8 \theta_{y2} \quad (2.38)$$

$$\theta_x(y) = N_9 \theta_{x1} + N_{10} \theta_{x2} \quad (2.39)$$

- Matrice masse élémentaire (torsion pure)

$$[M_t] = \int_0^l I_{\theta} \{N_t\}^T \{N_t\} dy \quad (2.40)$$

- Matrice masse élémentaire couplage (flexion torsion)

$$[M_{ft}] = \int_0^l S_x \{N_f\}^T \{N_t\} dy \quad (2.41)$$

- Matrice masse élémentaire couplage (torsion flexion)

$$[M_{tf}] = \int_0^l S_x \{N_t\}^T \{N_f\} dy \quad (2.42)$$

- Matrice masse élémentaire globale

$$[M]_g = [M_f] + [M_t] + [M_{ft}] + [M_{tf}] \quad (2.43)$$

Donc :

$$[M_v] = \int_0^l M_x \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \{N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0\} dy \quad (2.44)$$

$$[M_v] = \int_0^l M_x \begin{bmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 & 0 & N_1N_3 & N_1N_4 & 0 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & 0 & N_2N_3 & N_2N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & 0 & N_3N_3 & N_3N_4 & 0 \\ N_4N_1 & N_4N_2 & 0 & N_4N_3 & N_4N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.45)$$

$$[M_{\theta x}] = \int_0^l M_x \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ 0 \\ N_7 \\ N_8 \\ 0 \end{Bmatrix} \{N_5 \ N_6 \ 0 \ N_7 \ N_8 \ 0\} dy \quad (2.46)$$

$$[M_{\theta x}] = \int_0^l M_x \begin{bmatrix} N_5N_5 & N_5N_6 & 0 & N_5N_7 & N_5N_8 & 0 \\ N_6N_5 & N_6N_6 & 0 & N_6N_7 & N_6N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_7N_5 & N_7N_6 & 0 & N_7N_7 & N_7N_8 & 0 \\ N_8N_5 & N_8N_6 & 0 & N_8N_7 & N_8N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.47)$$

$$[M_{ft}] = \int_0^l S_x \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \\ 0 \end{Bmatrix} [0 \ 0 \ N_9 \ 0 \ 0 \ N_{10}] dy \quad (2.48)$$

$$[M_{ft}] = \int_0^l S_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1N_9 & 0 & 0 & N_1N_{10} \\ 0 & 0 & N_2N_9 & 0 & 0 & N_2N_{10} \\ N_1N_9 & N_2N_9 & 0 & N_3N_9 & N_4N_9 & 0 \\ 0 & 0 & N_3N_9 & 0 & 0 & N_3N_{10} \\ 0 & 0 & N_4N_9 & 0 & 0 & N_4N_{10} \\ N_1N_{10} & N_2N_{10} & 0 & N_3N_{10} & N_4N_{10} & 0 \end{bmatrix} dy$$

$$[M_{tf}] = S_x \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_9 \\ 0 \\ 0 \\ N_{10} \end{Bmatrix} [N_1 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ N_4 \ 0] dy \quad (2.49)$$

$$[M_{tf}] \int_0^l S_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_9 N_1 & 0 & 0 & N_{10} N_1 \\ 0 & 0 & N_9 N_2 & 0 & 0 & N_{10} N_2 \\ N_9 N_1 & N_9 N_2 & 0 & N_9 N_3 & N_9 N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_9 N_3 & 0 & 0 & N_{10} N_3 \\ 0 & 0 & N_9 N_4 & 0 & 0 & N_{10} N_4 \\ N_{10} N_1 & N_{10} N_2 & 0 & N_{10} N_3 & N_{10} N_4 & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.50)$$

$$[M_t] = I_{\theta y} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_9 \\ 0 \\ 0 \\ N_{10} \end{bmatrix} [0 \ 0 \ N_9 \ 0 \ 0 \ N_{10}] dy \quad (2.51)$$

$$[M_t] = \int_0^l I_{\theta y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9 N_9 & 0 & 0 & N_9 N_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{10} N_9 & 0 & 0 & N_{10} N_{10} \end{bmatrix} dy \quad (2.52)$$

Le calcul matriciel est effectué dans l'annexe 01

### 2.5.2) Matrice de rigidité

Détermination la matrice de rigidité [K] en utilisant l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l EI_{xx} \left( \frac{d\theta_x}{dy} \right)^2 + \int_0^l K \frac{d\theta_x}{dy} \frac{d\theta_y}{dy} + \int_0^l K \frac{d\theta_y}{dy} \frac{d\theta_x}{dy} + \int_0^l GJ \left( \frac{d\theta_y}{dy} \right)^2 + \kappa GA \int_0^l \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right] dy \quad (2.53)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l EI \left( \frac{d\theta_x}{dy} \right)^t \left( \frac{d\theta_x}{dy} \right) + \int_0^l k \left( \frac{d\theta_x}{dy} \right)^t \left( \frac{d\theta_y}{dy} \right) + \int_0^l k \left( \frac{d\theta_y}{dy} \right)^t \left( \frac{d\theta_x}{dy} \right) + \int_0^l GJ \left( \frac{d\theta_y}{dy} \right)^t \left( \frac{d\theta_y}{dy} \right) + \int_0^L \kappa GA \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^t \left( \frac{d\varphi}{dy} \right) \right] dy \quad (2.54)$$

Donc :

$$[K]_{globale} = [K]_{flexion} + [K]_{couplage \ flexion\_torsion} + [K]_{couplage \ torsion\_flexion} + [K]_{torsion} + [K]_{cisalement}$$

- Matrice de rigidité élémentaire (Flexion pure)

$$[K_f] = \int_0^l EI_{xx} \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ 0 \\ N_3' \\ N_4' \\ 0 \end{bmatrix} [N_1' \ N_2' \ 0 \ N_3' \ N_4' \ 0] dy \quad (2.55)$$

D'ou

$$[K_f] = EI_{xx} \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'^2 & N_1'N_2' & 0 & N_1'N_3' & N_1'N_4' & 0 \\ N_2'N_1' & N_2'^2 & 0 & N_2'N_3' & N_2'N_4' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3'N_1' & N_3'N_2' & 0 & N_3'^2 & N_3'N_4' & 0 \\ N_4'N_1' & N_4'N_2' & 0 & N_4'N_3' & N_4'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.56)$$

- Matrice de rigidité élémentaire (Torsion pure)

$$[K_t] = \int_0^l GJ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_9' \\ 0 \\ 0 \\ N_{10}' \end{bmatrix} [0 \ 0 \ N_9' \ 0 \ 0 \ N_{10}'] dy \quad (2.57)$$

C'est-à-dire

$$[K_t] = \int_0^l GJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9'^2 & 0 & 0 & N_9'N_{10}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{10}'N_9' & 0 & 0 & N_{10}'^2 \end{bmatrix} dy \quad (2.58)$$

- Matrice de rigidité (couplage flexion-torsion et torsion- flexion)

$$[K_c] = \int_0^l K [B]^T [B] dx \quad (2.59)$$

$$\text{Avec : } [B] = \begin{bmatrix} N_1' & N_2' & 0 & N_3' & N_4' & 0 \\ 0 & 0 & N_9' & 0 & 0 & N_{10}' \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$[K_c] = K \int_0^l \begin{bmatrix} N_1' & 0 \\ N_2' & 0 \\ 0 & N_9' \\ N_3' & 0 \\ N_4' & 0 \\ 0 & N_{10}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' & N_2' & 0 & N_3' & N_4' & 0 \\ 0 & 0 & N_9' & 0 & 0 & N_{10}' \end{bmatrix} dy \quad (2.61)$$



$$[K_c] = K \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1' N^{9'} & 0 & 0 & N_1' N^{10'} \\ 0 & 0 & N_2' N^{9'} & 0 & 0 & N_2' N^{10'} \\ N_1' N^{9'} & N_2' N^{9'} & 0 & N_3' N^{9'} & N_4' N^{9'} & 0 \\ 0 & 0 & N_3' N^{9'} & 0 & 0 & N_3' N^{10'} \\ 0 & 0 & N_4' N^{9'} & 0 & 0 & N_4' N^{10'} \\ N_1' N^{10'} & N_2' N^{10'} & 0 & N_3' N^{10'} & N_4' N^{10'} & 0 \end{bmatrix} dy \quad (2.62)$$

- Matrice de rigidité élémentaire (Effet de cisaillement)

$$[K_{ci}] \int_0^l \kappa GA [B_c]^T [B_c] dy \quad (2.63)$$

$$\text{Avec : } [B_c] = \left[ \frac{dN_v}{dy} \right] - [N_{\theta_z}] = \frac{C}{2L(1+A)} [-2 \quad -L \quad 2-L] \quad \text{et} \quad C = \frac{12 EI_{xx}}{\kappa GA L^2} \quad (2.64)$$

### 2.5.3) Fonctions d'interpolation (poutre de Timoshenko)

$$N_1(y) = - \frac{2\left(\frac{y}{l}-1\right)\left(\frac{y}{l}-\frac{2y^2}{l^2}+\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+1\right)}{\frac{24EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+2} \quad (2.65)$$

$$N_2(y) = - \frac{y\left(\frac{y}{l}-1\right)\left(\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}-\frac{2y}{l}+2\right)}{\frac{24EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+2} \quad (2.66)$$

$$N_3(y) = \frac{2y\left(\frac{3y}{l}-\frac{2y^2}{l^2}+\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}\right)}{l\left(\frac{24EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+2\right)} \quad (2.67)$$

$$N_4(y) = \frac{y\left(\frac{2y}{l}+\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}\right)\left(\frac{y}{l}-1\right)}{\frac{24EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+2} \quad (2.68)$$

$$N_5(y) = \frac{6y\left(\frac{y}{l}-1\right)}{l^2\left(\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+1\right)} \quad (2.69)$$

$$N_6(y) = - \frac{\left(\frac{y}{l}-1\right)\left(\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}-\frac{3y}{l}+1\right)}{\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+1} \quad (2.70)$$

$$N_7(y) = - \frac{6y\left(\frac{y}{l}-1\right)}{l^2\left(\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+1\right)} \quad (2.71)$$

$$N_8(y) = \frac{y\left(\frac{3y}{l}+\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}-2\right)}{l\left(\frac{12EI_{xx}}{\kappa GA l^2}+1\right)} \quad (2.72)$$

$$N_9(y) = \frac{y}{l} \quad (2.73)$$

$$N_{10}(y) = 1 - \frac{y}{l} \quad (2.74)$$

2.6) CALCUL DES FREQUENCES ET DES MODES PROPRES

La formulation globale du problème consiste à obtenir des équations du mouvement à partir des expressions des énergies cinétiques et potentielles en fonction des vitesses et déplacements aux nœuds de la structure.

Soit  $\{q\}_g^T$  : Le vecteur ligne des déplacements aux nœuds de la structure à N nœuds :

$$\{q\}_g^T = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_N\} \tag{2.75}$$

Les équations de Lagrange permettant d'obtenir les équations discrètes du mouvement, pour une structure libre et sans amortissement, sont :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, N \tag{2.76}$$

$$T = 1/2 \{ \dot{q} \}_g^T [M]_g \{ \dot{q} \}_g \tag{2.77}$$

$$U = 1/2 \{ q \}_g^T [K]_g \{ q \}_g \tag{2.78}$$

D'où on obtient :

$$[M]_g \{ \ddot{q} \} + [K]_g \{ q \} = \{ 0 \} \tag{2.79}$$

Où  $[M]_g$  et  $[K]_g$  sont les matrices masse et rigidité de la structure obtenue par assemblage des matrices élémentaires.

Pour le problème de vibration libre on a :

$$\{ q \} = \{ q_0 \} e^{i\omega t} \tag{2.80}$$

$$\{ \ddot{q} \} = -\omega^2 \{ q \} \tag{2.81}$$

Où  $\omega$  est la pulsation propre de la structure.

D'où, l'équation (2.79) devient :

$$([K]_g - \omega^2 [M]_g) \{ q \} = 0 \tag{2.82}$$

La résolution de l'équation (2.76) donne les modes et les fréquences propres de la structure. Donc, on peut dire que l'analyse dynamique des structures peut se ramener à la résolution d'un système d'équations différentielles de second ordre.

Dans le cas de structures faiblement amorties, on ramène le cas à l'étude des oscillations libres, c'est-à-dire la résolution aux valeurs propres générales.

$$[K]_g \{q\} = \omega^2 [M]_g \{q\} \quad (2.83)$$

Avec :  $[K]_g$  est la matrice de la rigidité de la structure, symétrique, positive, dans le cas des structures iso ou hyper statique, semi-définie dans le cas de structures libres.

$[M]_g$  Matrice masse définie positive et symétrique.

En calculant la rigidité homogénéisée à partir de celle des différentes couches, un modèle de calcul des fréquences propres d'une poutre composite multicouche symétrique est développé. Le code de calcul correspondant est introduit dans un logiciel de calcul pour poutres homogènes modifié à l'occasion. Les différentes comparaisons effectuées ont permis d'une part de vérifier la validité du modèle proposé, et d'autre part de montrer que pour un ordre de précision sensiblement équivalent à celui donné par un calcul par éléments finis ou par la méthode des matrices de transfert, le modèle simple que nous avons développé s'est avéré suffisant et satisfaisant pour les cas étudiés.

## CHAPITRE 03 PHENOMENE AEROELASTIQUE

Aéroélasticité est le domaine d'études sur l'interaction entre la déformation d'une structure élastique dans un courant d'air et l'effet couplé résultant sur l'aérodynamique et la dynamique des structures.

L'aéroélasticité tient compte des 3 paramètres :

- Forces aérodynamiques ;
- Rigidité de la structure ;
- répartitions massiques.

L'aile vibrant sinusoïdalement dans un écoulement à vitesse  $v$  autour d'une position d'équilibre se voit soumise aux forces [01]:

- Stationnaires, classiques (*portance et trainée*),
- Instationnaires dépendant de la fréquence et de l'amplitude du mouvement.

### 3.1) AERODYNAMIQUE STATIONNAIRE

#### 3.1.1) Hypothèses

Pour établir les équations des forces aérodynamiques instationnaires, des hypothèses sont adoptées. Elles sont relatives à l'écoulement de l'air d'une part, au mouvement du profil et à sa forme d'autre part. Ce sont les suivantes [8], [22], [23], [24]:

- 1 - La voilure est plongée dans un écoulement qui, à l'infini amont, est défini par une vitesse  $V$  (suivant OX) et un nombre de mach.
- 2 - Le profil subit des oscillations harmoniques.
- 3 - Les variations de la vitesse de l'air au voisinage de la voilure sont suffisamment faibles devant  $V$  pour que la théorie des petites perturbations soit applicable.
- 4 - L'écoulement est supposé irrotationnel, il existe donc des potentiels de vitesse et d'accélération.
- 5 - L'air est considéré comme gaz parfait.
- 6 - L'écoulement est isentropique.

### 3.1.2) Conséquences directes des hypothèses

Des conséquences directes découlent des hypothèses prises dont, les suivantes :

1 La théorie des petites perturbations permet de linéariser les équations régissant l'écoulement de l'air et donc, tel que le montre la figure (3.1), de séparer le problème en [8], [22]:

a - un problème d'épaisseur déterminé par la loi d'épaisseur du profil.

b - un problème portant déterminé par la forme du squelette du profil. Seul ce problème nous concerne.

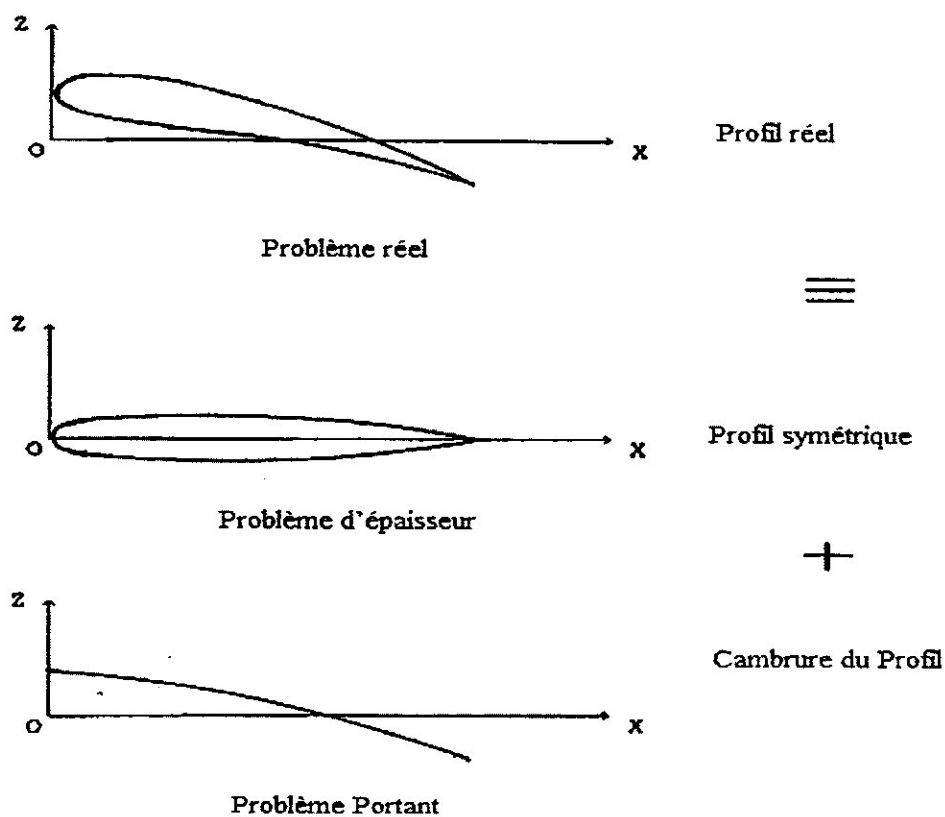


Fig. (3.1) Séparation du problème réel d'un profil en un problème d'épaisseur et un problème portant [6], [8].

2- la théorie des petites perturbations permet également de séparer le problème portant en un problème stationnaire et un problème instationnaire.

Pour l'étude du flottement qui ne concerne que les mouvements autour d'une position moyenne, l'étude peut se limiter au calcul de la partie instationnaire qui est indépendante de la partie stationnaire [21].

Dans ces conditions, les potentiels de vitesse et d'accélération ne dépendent plus de la cambrure de la voilure mais seulement de sa forme en plan, c'est-à-dire la projection de la voilure sur le plan XOY.

### 3.2) AERODYNAMIQUE INSTATIONNAIRE

Les hypothèses et les simplifications adoptées pour établir les équations des forces instationnaires sont relatives à l'écoulement de l'air d'une part, au mouvement du profil et à sa forme d'autre part.

En ce qui concerne l'écoulement, il est admis que :

- Le fluide est non visqueux quoique répondant cependant à la condition de Kutta Joukowski (*vitesse finie au bord de fuite*),
- La linéarisation de l'écoulement est acceptée bien qu'en certains points du profil les vitesses dépassent de 20 % la vitesse à l'infini,
- L'écoulement est irrotationnel donc à potentiel de vitesse et d'accélération.

En ce qui concerne le profil :

Il est supposé que ses déplacements sont assez faibles pour que ce dernier puisse servir de système de référence au champ aérodynamique, que l'angle d'attaque est assez petit pour qu'il n'y ait pas de décollement, et que le profil est une plaque plane infiniment mince. Il est supposé que le profil subit des oscillations harmoniques de pulsation  $\omega$ .

### 3.3) L'AEROELASTICITE STATIQUE

Les phénomènes les plus importants en aéroélasticité statique sont :

#### 3.3.1) La divergence

Pour un avion flexible en vol stationnaire, un équilibre s'établit entre les forces aérodynamiques et les forces de rappel élastique, mais pour une certaine vitesse cet équilibre devient instable, ce qui peut conduire à la ruine brutale de la structure.

Même avant la vitesse de divergence, la déformation des ailes entraîne une modification de la portance sur celles-ci, dont il est important de tenir compte pour prévoir les performances réelles de l'avion.

### 3.3.2) Renversement de contrôle

L'efficacité des surfaces de contrôle (gouvernes de profondeur, ailerons, . . .) est également modifiée par les effets aéroélastiques, et il peut même exister une vitesse pour laquelle leurs effets s'inversent.

## 3.4) L'AEROELASTICITE DYNAMIQUE

Contrairement à l'aéroélasticité statique, ce type de phénomène dépend des effets d'inertie ou on peut citer le buffeting, buzz-trasonique et le flottement.

### 3.4.1) Le Buffeting

Dans le cas de forces turbulences, on rencontre souvent les phénomènes de Buffeting sur l'aile ou plus fréquemment sur les empennages horizontaux et les surfaces de contrôle par suite des excitations irrégulières de l'écoulement avec des vitesses et fréquences aléatoires.

### 3.4.2) Buzz-tansonique

Ce phénomène peut apparaître dans le cas de déplacements d'onde de choc qui poussent les surfaces de contrôle à vibrer en provoquant l'instabilité.

❖ *Dans le cadre de l'aéroélasticité dynamique, on s'intéressera plus particulièrement aux phénomènes suivants :*

### 3.4.3) Le flottement (flutter)

C'est parmi les problèmes qui risquent un avion en vol de le rencontrer. Le phénomène de flottement est l'origine d'interaction entre le mouvement vibratoire de la structure et l'écoulement de l'air.

Le flottement peut se présenter sous la forme classique qui est associé à l'écoulement potentiel et aux forces aérodynamiques.

Ceux-ci entraînent la coalition des fréquences de deux au plusieurs modes propres de la structure. Les formes non classiques proviennent de la séparation de l'écoulement tel que le décollement et le choc retard causé par la forme de l'écoulement et le mouvement de la structure.

Le problème du phénomène flottement peut se résumer en deux problèmes, dynamique et aérodynamique.

La première considération est d'entraîner le mouvement afin d'avoir une nature vibratoire continue par les différents forces et l'effet d'amortissement internes. Ce problème peut s'associer à un seul pour décrire l'équation de mouvement du système.

La seconde considération c'est de déterminer la nature des forces aérodynamiques afin de maintenir l'équilibre de la structure.

### 3.5) LES TYPES DE FLOTTEMENTS

Les types de flottements se résument en :

#### 3.5.1) Flottement à fréquence nulle

C'est un problème de stabilité statique ou les effets d'inertie sont négligeables. Il est appelé aussi phénomène de divergence.

#### 3.5.2) Flottement de panneau

C'est un problème qui apparait en écoulement supersonique ou l'interaction des forces aérodynamiques instationnaire avec la vibration d'un panneau dans le sens normal à sa surface peut entraîner la perforation de la structure.

#### 3.5.3) Flottement de décrochage

Ce phénomène se produit à grand angle d'attaque, il est la conséquence de l'interaction entre la torsion de l'aile et le décollement de l'écoulement.

#### 3.5.4) Le flottement des modes couplés

Ce type de flottement est le plus fréquent sur les structures d'avions, dans lesquelles les fréquences des oscillations de deux ou plusieurs modes convergent vers une même valeur qui provoque l'instabilité de la structure.



### 3.6) LES TYPES D'AMORTISSEMENT

#### 3.6.1) L'amortissement structural

Il a pour origine l'hystérésis du matériau et le frottement au niveau des joints et de connexions entre les différents composants de la structure d'avions.

Analyser l'amortissement d'un assemblage structural n'est pas une tâche facile, il est important de considérer, non seulement les matériaux constituant la structure, mais également la façon dont cette structure est assemblée.

En plus de cela, le phénomène de fatigue des matériaux est à prendre en considération. C'est pourquoi souvent on ne cherche pas à calculer l'amortissement structural. Il est quelque fois supposé négligeable ou bien estimé expérimentalement.

Dans ce cas, l'hypothèse de basile est souvent envisagée. Elle considère que seuls les termes de la diagonale de la matrice amortissement structural  $[\beta]$  sont prépondérants.

#### 3.6.2) L'amortissement aérodynamique [08]

Pour le définir, considérons un profil d'aile placé dans un écoulement uniforme horizontal avec une incidence  $i(t)$ .

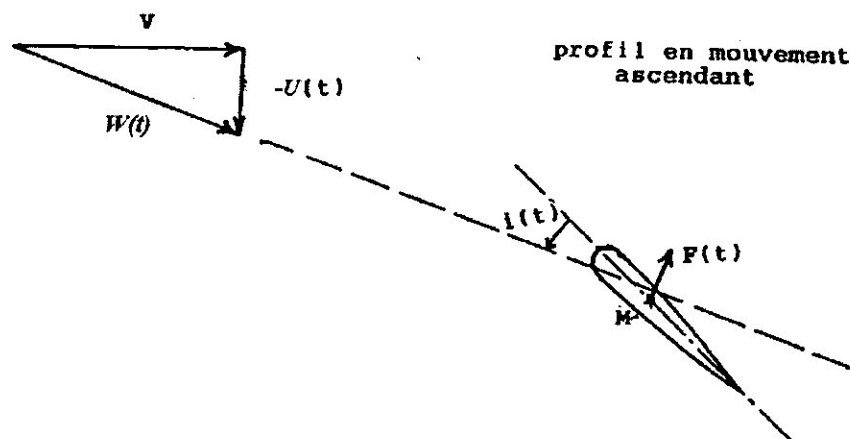


Fig. (3.2) Etat d'un profile à un instant t.

La force aérodynamique qui s'exerce en un point  $M_1$  du profil est verticale et est en fonction de l'angle d'incidence.

Pour la simplicité du raisonnement, nous considérons le profil animé d'un mouvement vibratoire de translation vertical et nous faisons l'hypothèse que chaque position du profil est en

état d'équilibre (hypothèse quasi-stationnarité) ; nous voyons qu'à chaque instant  $t$ , le profil a une vitesse instantané  $U(t)$  et soumis à la force aérodynamique  $F(t)$  perpendiculaire à la vitesse  $W(t)$  de l'écoulement relatif par rapport au profil.

Il apparait ainsi que dans le domaine où la force aérodynamique est une fonction croissante de l'angle d'incidence, lorsque dans son mouvement le profil monte, sa vitesse instantanée se retranche de la vitesse de l'écoulement uniforme pour donner une vitesse relative  $W$  dont la direction fait avec la corde du profil un angle  $i(t)$  inférieure à l'incidence initiale et qui par conséquent diminue la force aérodynamique et s'oppose au mouvement.

De même lorsque le profil descend, la vitesse  $W$  fait avec la corde du profil un angle  $i(t)$  supérieur à l'incidence initiale, ce qui augmente la force aérodynamique et s'oppose au mouvement.

Ainsi, lorsque le profil vibre, la force aérodynamique quasi stationnaire tend à le ramener au repos. Ce phénomène reste encore vrai pour les forces aérodynamiques réellement instationnaires agissant sur un profil en mouvement vibratoire quelconque.

C'est ce qui est conventionnellement appelé ; amortissement aérodynamique.

Dans les équations du flottement, la partie imaginaire de la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques représente la contribution de l'écoulement dans l'amortissement du mouvement vibratoire.

### 3.7) EQUATIONS AEROELASTIQUE

L'avion peut être considéré comme un ensemble de masse ponctuelle reliée entre elles par des forces internes et soumises à des forces externes.

Les équations du mouvement vibratoires aéroélastiques sont de la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3.1)$$

Avec:  $[M]$  : la matrice masse.

$[D]$  : la matrice dissipation.

$[K]$  : la matrice rigidité.

$\{q\}$ : le vecteur de déplacement nodaux.

$\{F\}$ : le vecteur des forces aérodynamique appliqués aux nœuds de la structure.

Il est clair qu'à fin d'obtenir une bonne approximation des déplacements, la structure modélisée par éléments finis devra présenter un maillage très fin. Il en résulte un système d'équation de grande dimension dont les inconvénients sont évidents.

C'est pourquoi, nous devons réduire artificiellement la taille du système élastique en utilisant le principe de la superposition modale.

Tout mouvement vibratoire général d'un système élastique, ayant des déformations à partir d'une configuration d'équilibre, peut être exprimé comme une combinaison linéaire de différents modes naturels. Ceci est le principe de la superposition modale dont le but fondamentale est de créer un nouvel ensemble d'équations découplées.

Dans le cas spécifique du phénomène de flottement cet avantage ne peut être exploité car la transformation du problème en un ensemble de système découplée, à un degré de liberté ne peut être facilement appliqué à cause de la présence de la matrice aérodynamique.

Cependant, nous bénéficierons du fait que nous réduisons artificiellement la taille du système et ainsi le nombre d'équations à résoudre.

### 3.8) REPRESENTATION MODALE

La représentation modale consiste à représenter les déflexions de la structure sur la base de ces formes propres de vibrations. Pour pouvoir exposer cette représentation et montrer toutes les propriétés qu'elles présentent, il faut d'abord étudier le comportement propre de la structure et notamment définir les modes propres de vibrations qui fournissent les éléments de base de cette représentation.

$$\{q\} = [\phi] \cdot \{p\} \quad (3.2)$$

$n \times n$     $n \times 1$     $1 \times n$

Avec :  $[\phi]$ : la matrice modale.

L'introduction des expressions des énergies cinétique, potentielle et dissipation écrites dans la base des coordonnées généralisées dans l'équation de **Lagrange** nous conduit à :

$$* \left[ [\mu] \cdot \{\ddot{p}\} + [\beta] \cdot \{\dot{p}\} + [\gamma] \cdot \{p\} \right] = \{Q(p, \dot{p})\} \quad (3.3) *$$

Cette équation dans lequel  $\{Q(p, \dot{p})\}$  est le vecteur des forces aérodynamiques généralisées, représente la formulation générale des vibrations aéroélastique se produisant sur une structure d'avion ou autre structure en déplacement dans un écoulement.

Les vecteurs propres  $\{\phi\}$  peuvent être normalisés par rapport à la matrice masse donnant lieu à une nouvelle forme de l'équation (3,1).

$$[[I] \cdot \{\ddot{p}\} + [\mu^{-1}] \cdot [\beta] \{\dot{p}\} + [\omega_n^2] \cdot \{p\}] = [\mu^{-1}] \cdot \{Q\}(p, \dot{p}) \quad (3.4)$$

Avec  $[I]$  est la matrice d'identité, d'ordre  $n \times n$ , et  $[\omega_n^2]$  la matrice diagonale des carrées des fréquences naturelles ou des valeurs propres d'ordre  $n \times n$ .

### 3.9) LA FREQUENCE REDUITE

La fréquence réduite  $k$  constitue un paramètre très important puisqu'il va conditionner le mode opératoire pour l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure en présence d'écoulement. Ce nombre est défini comme le rapport de deux durées liées au système étudié : la première est le temps de balayage de la structure par une particule fluide, tandis que la seconde est la période de vibration propre de la structure.

Une fois les équations du flottement établies, et le vecteur des forces aérodynamiques généralisées déterminé, le problème est de caractériser ce phénomène, autrement dit de déterminer :

- L'évolution des fréquences et des amortissements en fonction de la vitesse de vol et de l'altitude,
- La vitesse à laquelle se produisent des oscillations auto-entretenues qu'on appelle également : vitesse critique de flottement.

La formulation de l'équation de flottement :

$$[\mu] \{\ddot{p}\} + [\beta] \{\dot{p}\} + [\omega_n^2] \{p\} = \rho_a V^2 b ([C] \{\dot{p}\} + [B] \{p\}) \quad (3.5)$$

Avec :

$[C]$  et  $[B]$  sont les matrices de dissipation et de rigidité aérodynamiques, respectivement.

Il est important de rappeler que les termes aérodynamiques des équations du flottement ne sont valables que dans le cas de l'oscillation sinusoïdale, autrement dit juste pour la vitesse de flottement.

Cependant ils fournissent des valeurs approchées suffisamment correctes dans le cas d'oscillations faiblement amorties ou faiblement divergentes, en d'autres termes pour des vitesses légèrement inférieures ou supérieures à la vitesse de flottement.

### 3.10) METHODES DE CALCUL DE FLOTTEMENT

#### 3.10.1) La méthode 'k'

Une observation pratique d'une oscillation harmonique d'un profil aérodynamique montre que le l'énergie totale éliminée par cycle ou l'amortissement total est une fonction carrée de l'amplitude et indépendante de la fréquence d'oscillation [5]. Si l'amortissement de la structure est incorporé dans la formation des équations de mouvement comme une fonction du coefficient inconnue d'amortissement de structure  $g$ ,

$$[\beta] = ig[\gamma] \quad (3.6)$$

Alors l'équation harmonique du mouvement est de la forme [5]

$$\left[ [\mu] + i\rho_a \left(\frac{b}{k}\right) [B] - \rho_a \left(\frac{b}{k}\right)^2 [C] + \frac{1+ig}{\omega^2} [\gamma] \right] \{p\} = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation est un problème aux valeurs propres généralisé,

$$([FE] - \lambda [\gamma])\{p\} = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{Avec : } [FE] = \left[ [\mu] + i\rho_a \left(\frac{b}{k}\right) [B] - \rho_a \left(\frac{b}{k}\right)^2 [C] \right] \quad \text{et} \quad \lambda_j = \frac{1+ig_j}{\omega_j^2}$$

La fréquence d'oscillation aéroélastique et l'amortissement structurale de chaque degré de liberté sont données par :

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(\lambda_j)}}, \quad g_j = -2\zeta_j = \frac{\text{Im}(\lambda_j)}{\text{Re}(\lambda_j)}. \quad (3.9)$$

Le terme  $\zeta$  est l'équivalent du facteur d'amortissement, la méthode k est mise en œuvre dans un processus d'étape décrit ci-dessous :

1. Choisir une fréquence réduite ( $k$ ) d'intérêt, le plus souvent proche de zéro.
2. Calculer les matrices aérodynamiques correspondantes  $[B]$  et  $[C]$ .
3. Résoudre le problème des valeurs de l'équation (3.7) pour les valeurs propres complexes.
4. Déterminer la fréquence et l'amortissement correspondants de l'équation (3.8).
5. Relier la fréquence d'oscillation et la fréquence réduite sélectionnée dans l'étape 1 avec la vitesse d'avancement basé sur la définition de la fréquence réduite de l'équation  $k = \frac{\omega b}{V}$
6. Répétez les étapes 1-5 jusqu'à ce que la série des valeurs  $k$  soit étudiée.
7. Assembler les valeurs calculées de la fréquence par rapport à la vitesse de chaque mode respectif par l'affichage de la fréquence calculée par rapport à son vitesse correspondante par une "méthode de tir" de l'origine.

### 3.10.2) La méthode 'p-k'

La méthode procédé  $k$  est une formulation convenable pour la prédiction de vitesse critique de flottement, mais il s'agit d'une formulation mathématiquement incorrecte car elle impose un amortissement structural artificiel. Une méthode d'amortissement proportionnel  $p-k$  démontré par Hassig se rapproche mieux de la vraie solution d'amortissement des modes amortis légèrement inférieurs en incorporant l'amortissement proportionnel, et elle se compare précisément à la charge transitoire générale à petites déviations. L'équation aéroélastique doit d'abord être réduite à une équation du premier ordre en tenant compte de l'équation triviale :

$$[I]\{\dot{p}\} - [I]\{p\} = \{0\} \quad (3.10)$$

Combiné avec l'équation (3.3) en partitionné ou l'état de l'espace donne la formulation

$$\begin{bmatrix} [I] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{P} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ -(\rho_a V^2 [C] + [\gamma]) & -(\rho_a V [B] + [D]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Or l'équation peut être réécrite en premier ordre pour une solution propre classique

$$\begin{Bmatrix} \dot{P} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\mu]^{-1}(\rho_a V^2 [C] + [\gamma]) & -[\mu]^{-1}(\rho_a V [B] + [D]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\text{Ou} \quad \{\dot{X}\} - [QA]\{X\} = \{0\} \quad (3.13)$$

$$\text{Avec} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix}, j = 1, 2, \dots, \dots, N. \quad (3.14)$$

L'équation (3.13) est maintenant en forme de premier ordre mais notons que la matrice [QA] a une taille double que celle de l'équation aéroélastique.

L'équation peut être résolue en supposant  $\{X\} = \{X_0\}e^{\lambda t}$  et l'équation aéroélastique devient ainsi :

$$([I]\lambda - [QA])\{X_0\} = \{0\} \quad (3.15)$$

Pour un système oscillant, tel que le système aéroélastique considéré ici, les valeurs propres  $\lambda$  du système vont être dans un repère complexe conjugué :

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (3.16)$$

Où le  $\omega_j, j = 1, 2, \dots, N$ , sont les fréquences du système amorti et les  $\zeta_j, j = 1, 2, \dots, N$ , sont les constantes d'amortissement.

Les fréquences modales et amortissement qui en résultent peuvent être calculés à partir des valeurs propres complexe avec les fonctions ;

$$\omega_j = \sqrt{(Re(\lambda_j))^2 + (Im(\lambda_j))^2}, \quad \zeta_j = \frac{Re(\lambda_j)}{\omega_j} \quad (3.17)$$

Si la partie réelle des valeurs propres complexes est positive le système devient instable. On parle donc de l'instabilité aéroélastique de flottement. Cependant si les valeurs propres sont réelles positives (avec  $k \rightarrow 0$ ) le système est statiquement instable, on parle donc de l'instabilité aéroélastique statique ou divergence.

La méthode p-k est mise en œuvre de manière itérative décrite ci-dessous [5]:

1. Sélectionnez une vitesse d'intérêt.
2. Sélectionner un mode d'intérêt parmi les degrés de liberté.

3. Devinez la fréquence d'oscillation initiale pour le mode en utilisant la fréquence naturelle sans écoulement ou de la vitesse précédente.
4. Calculez la fréquence réduite pour cette condition de l'équation  $k = \frac{\omega b}{V}$
5. Calculer les matrices de rigidité aérodynamique  $[B]$  et amortissement  $[C]$  correspondant.
6. Résoudre le problème des propres de l'équation (3.12) pour les valeurs propres complexes.
7. Calculer les fréquences d'oscillation du système en utilisant les valeurs propres de la matrice réelle  $Q$ .
8. Prenez la fréquence du système le plus proche d'estimation initiale de l'étape 3 et répétez les étapes 4-7.
9. Poursuivre l'itération jusqu'à ce que la différence entre l'estimation initiale et la fréquence finale soit inférieure à une certaine valeur de tolérance près de zéro.
10. Envisager le prochain mode d'intérêt et répétez les étapes 3-9 jusqu'à ce que tous les modes d'intérêt pour la condition de vol soient vérifiés.
11. Envisager la prochaine vitesse d'intérêts et répétez les étapes 2-10 jusqu'à ce que toutes vitesses de vol soient vérifiées
12. Assemblez la fréquence et l'amortissement, qui s'applique désormais directement à chaque mode.



## CHAPITRE 04 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

L'analyse théorique du problème de flottement a réalisé un grand pas vers l'avant depuis l'avènement des machines de calcul très rapides ayant des capacités de mémoire très importantes, et le développement des techniques d'analyse efficace et d'algorithmes pouvant manipuler des grosses matrices, Il devint alors évident que l'on puisse obtenir des solutions de flottement économiques pour des types de structures très complexes et des grandes dimensions tout en ayant une très bonne précision sur les résultats. En effet, d'avantage de précieuses informations sur les distributions de masse et de rigidité, sur les modes d'oscillations et sur les charges aérodynamiques peuvent être obtenues par la méthode des éléments finis et de calculs aérodynamiques. Ainsi, le rêve de concevoir des structures optimales et qui ne "flottent pas" peut devenir une réalité [8].

### 4.1) PROCESSUS DE CALCUL

L'interprétation des résultats est l'étape la plus importante après toute une étude théorique ou expérimentale. Aussi la confrontation des résultats obtenus avec ceux donnés par d'autre études permet d'apprécier leurs qualité et leurs validité. Pour obtenir ces résultats, un code de calcul a été conçu en langage de programmation MATLAB, dont les différents modules qui le comportent sont organisés comme suit :

- 1- Calcul des modes et des fréquences propres du couplage flexion-torsion pour une poutre composites mince (modèle Euler Bernoulli).
- 2- Calcul des modes et des fréquences propres du couplage flexion-torsion pour une poutre composites épaisse (modèle Timoshenko).
- 3- Calcul aérodynamique instationnaire bidimensionnel.
- 4- Calcul de la vitesse de flottement.

### 4.2) ORGANIGRAMMES

L'analyse modale des structures, effectuée par les différents sous programmes, est organisée suivant l'organigramme ci-dessous :

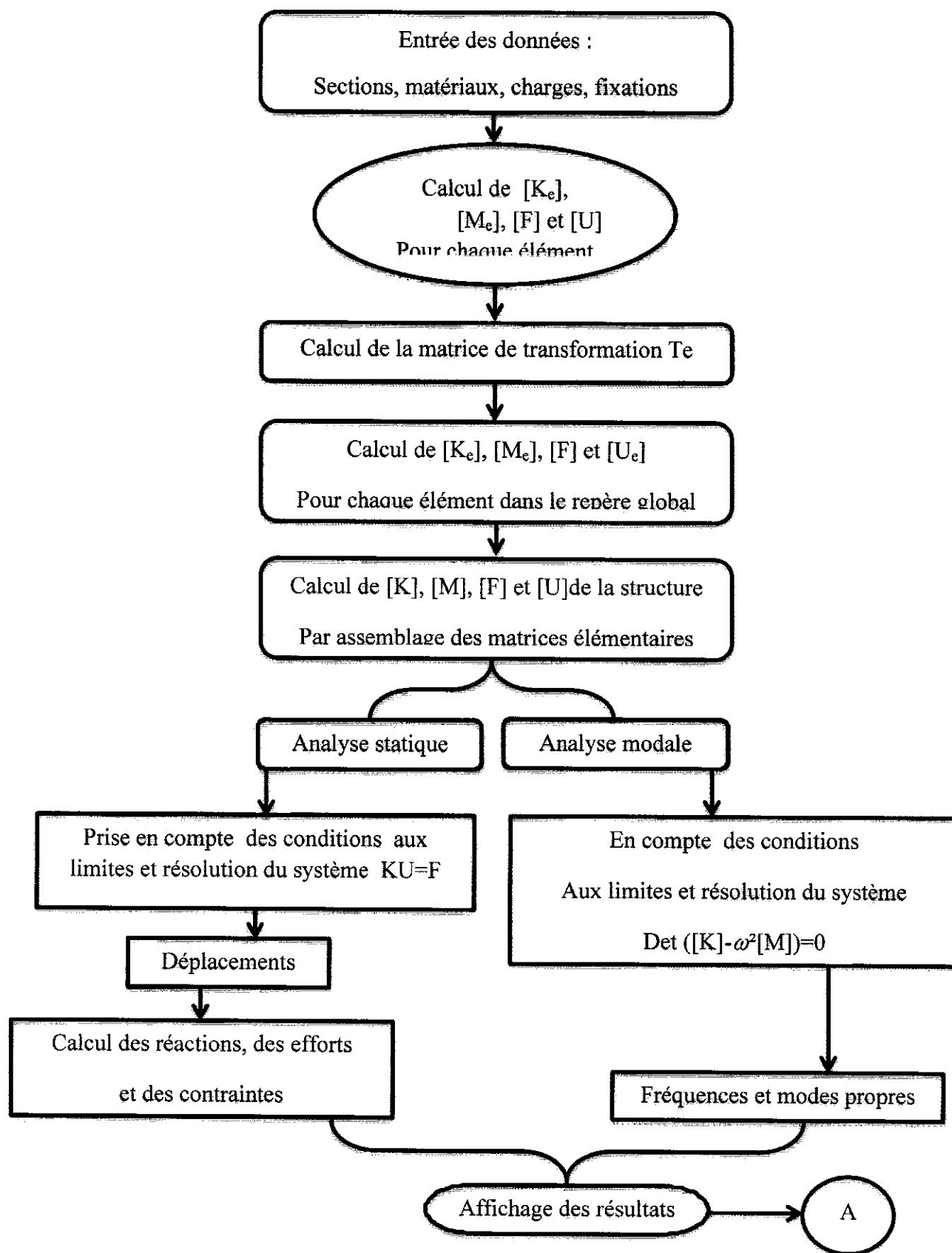


Fig. (4.1) Organigramme de calcul des fréquences propres et des modes propres.

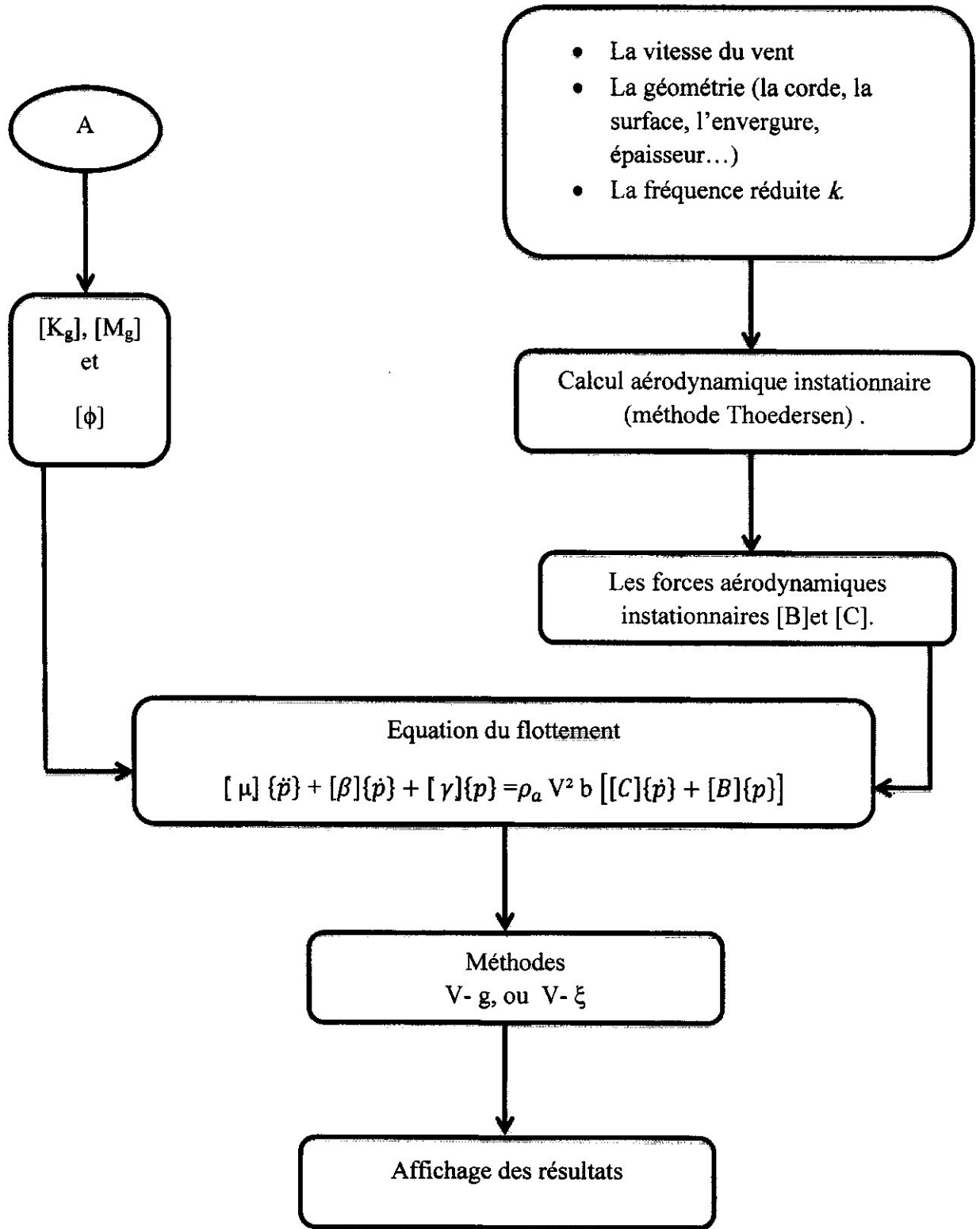


Fig. (4.2) Organigramme de calcul de la vitesse de flottement.

4.3) MODES ET FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE\_MODELE  
EULER BERNOULLI

Soit une poutre composite mince, de longueur  $L$ , encastree sur un cote et libre sur l'autre (Figure 4.3) avec les caracteristiques suivantes:  $EI_{xx} = 9.75E10^6 Nm^2$ ,  $GJ = 9.88E10^5 Nm^2$ ,  $m = 35.75 kg/m$ ,  $I_{\theta y} = 8.65 kg m$ ,  $l = 6m$ .

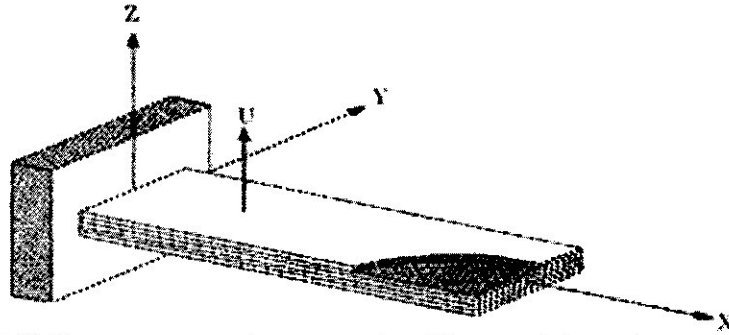


Fig. (4.3) Poutre composite encastree - libre modele Euler Bernoulli.

4.3.1) Mode decouple (sans couplage)

Dans le tableau (4.1) on a compare notre resultat et les resultats de Ref [17] pour les trois premiers modes propres de la poutre composite (mince).

Pour  $K=0$ ,  $x_a=0$

	Nos resultats		Réf [17]	Err
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(%)
1 <sup>ere</sup> frequence	51.004	8.117	51.005	0.00196
2 <sup>eme</sup> frequence	88.479	14.081	88.478	0.00112
3 <sup>eme</sup> frequence	265.46	42.249	265.44	0.00753

Tableau (4.1) Les trois premier modes propres de la poutre composite mince pas de couplage.

En comparant nos resultats et ceux de la reference [17], on trouve que nos resultats sont tres proches des resultats theoriques calcules, car les erreurs relatives sont tres petites.

Les resultats des modes propres de la poutre pour les trois premieres frequences sont representes dans les figures suivantes :

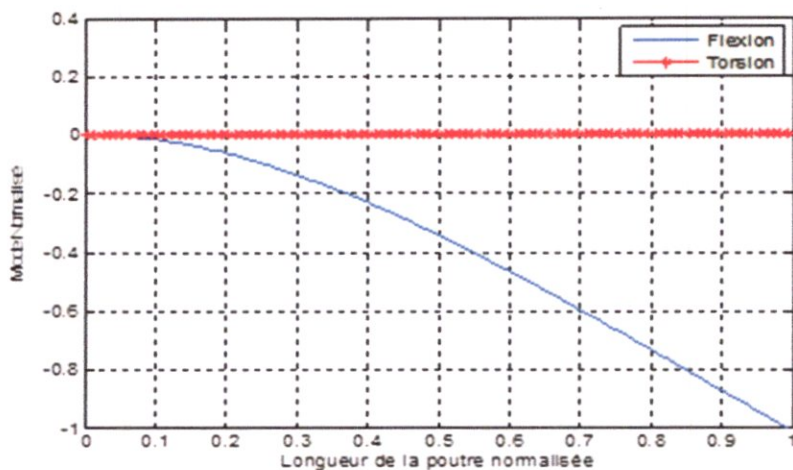


Fig. (4.4.a) Mode1  $w=51.004$  rad/s

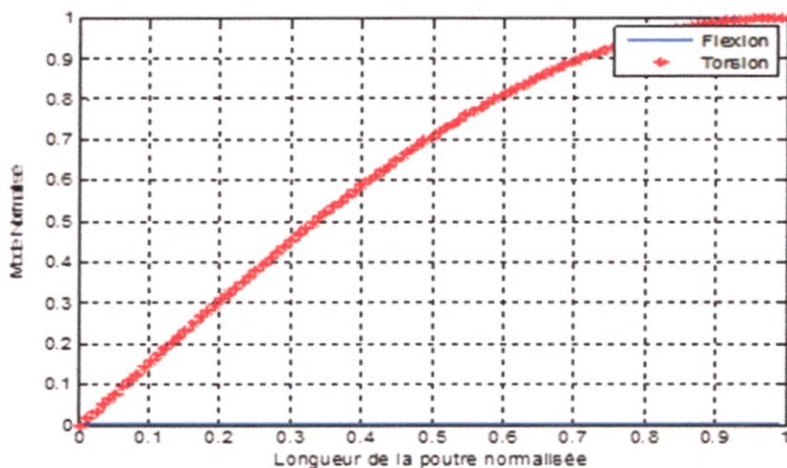


Fig. (4.4.b) Mode2  $w=88.479$  rad/s

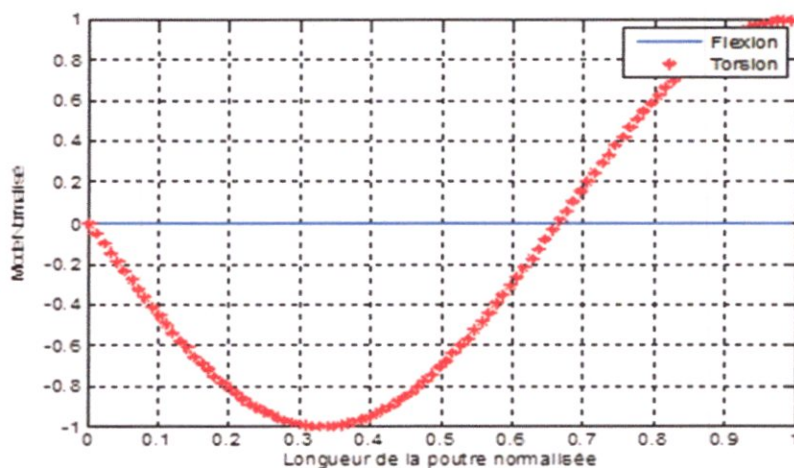


Fig. (4.4.c) Mode3  $w=265.46$  rad/s

Fig 4.4.Les trois premiers modes propres de poutre composite (sans couplage).

On voit clairement que les valeurs  $x_\alpha$  et  $K$  sont toutes les deux nulles il n'y a pas eu de couplage entre les déformations de flexion et de torsion comme prévu.

**4.3.2) Modes couplés**

a) couplage en masse

Pour  $K=0, x_\alpha=0.1$

	Nos résultats		Réf [17]	Err
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(%)
1 <sup>ère</sup> fréquence	50.796	8.080	50.539	0.508
2 <sup>ème</sup> fréquence	89.580	14.257	91.020	1.58
3 <sup>ème</sup> fréquence	262.029	41.703	258.43	1.39

Tableau (4.2) Les trois premier modes propres de la poutre composite-couplage en masse (Euler Bernoulli).

Les résultats montrés sur le Tableau (4.2) indiquent que la géométrie et le matériau ont des effets significatifs sur les fréquences naturelles de la poutre. Cela peut avoir une influence considérable sur la conception des ailes en matériaux composites, les résultats sont représentés dans les figures suivantes :

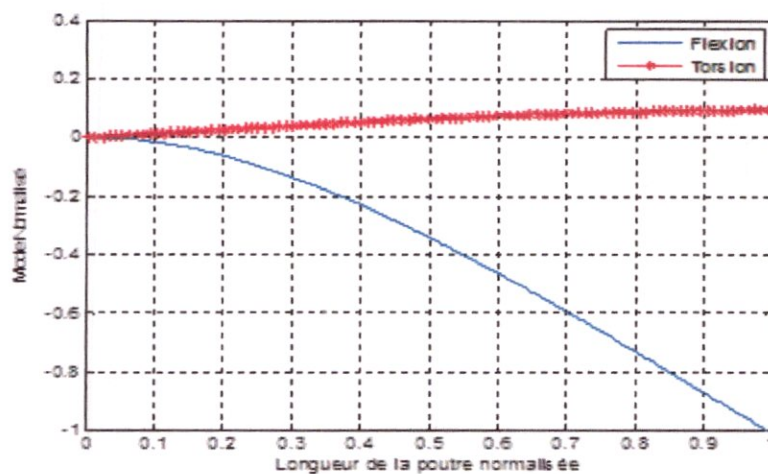


Fig. (4.5.a) Mode1  $w=50.796$  rad/s

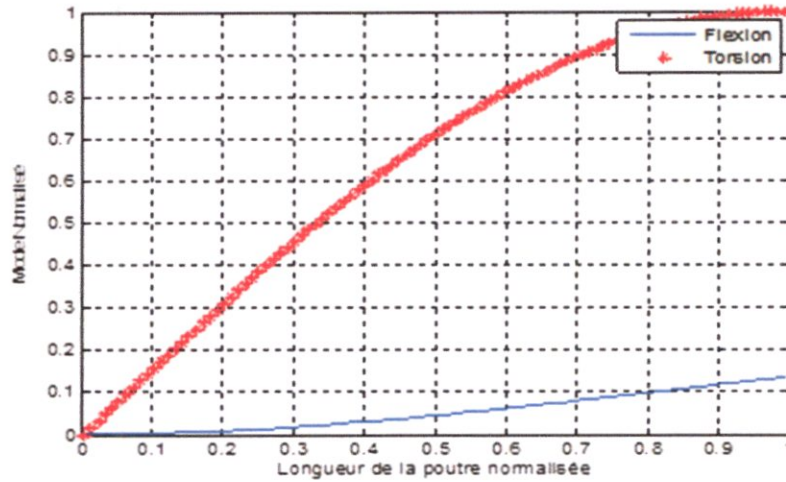


Fig. (4.5.b) Mode2  $\omega=89.58$  rad/s

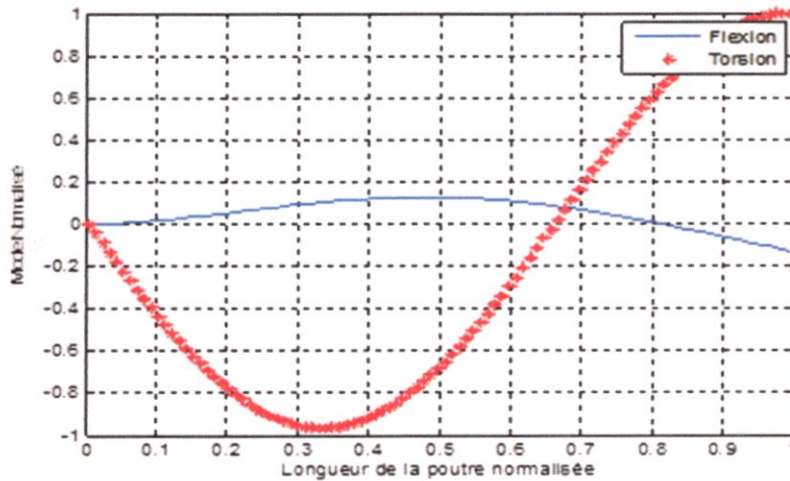


Fig. (4.5.c) Mode3  $\omega=262.029$  rad/s

Fig. (4.5) Les trois premier modes propres de la poutre composite (couplage en masse).

b) Couplage en rigidité

Pour  $K=1.5e6$ ,  $x_a=0$ .

	Nos résultats		Réf [17]	Err
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(%)
1 <sup>ère</sup> fréquence	42.671	6.791	42.684	0.03
2 <sup>ème</sup> fréquence	91.244	14.521	91.216	0.03
3 <sup>ème</sup> fréquence	212.382	33.801	212.44	0.027

Tableau (4.3) Les trois premier modes propres de la poutre composite couplage en rigidité (Euler Bernoulli).

Les résultats sont représentés dans les figures suivantes :

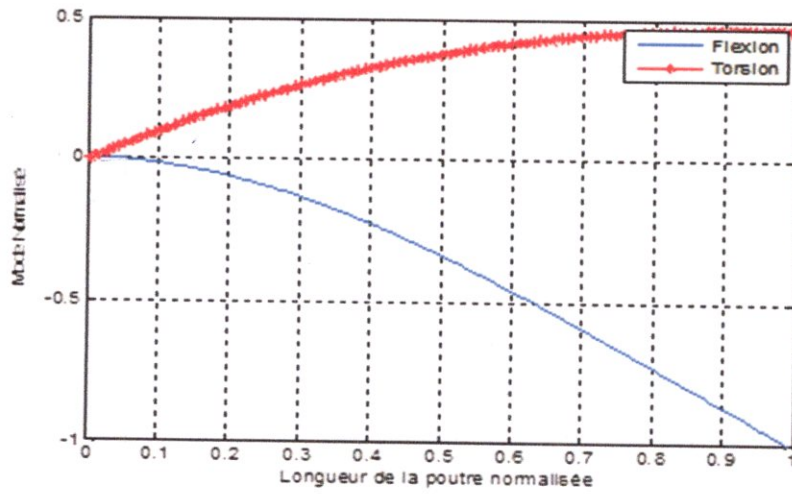


Fig. (4.6.a) Mode1  $w=42.671$  rad/s

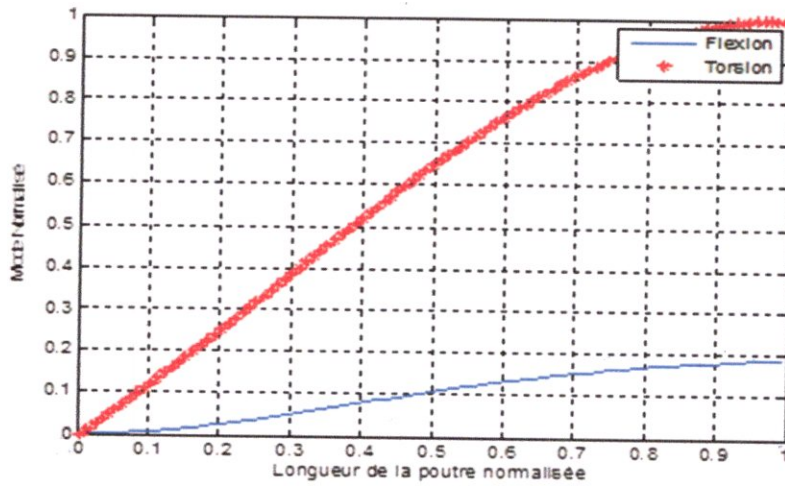


Fig. (4.5.b) Mode2  $w=91.244$  rad/s

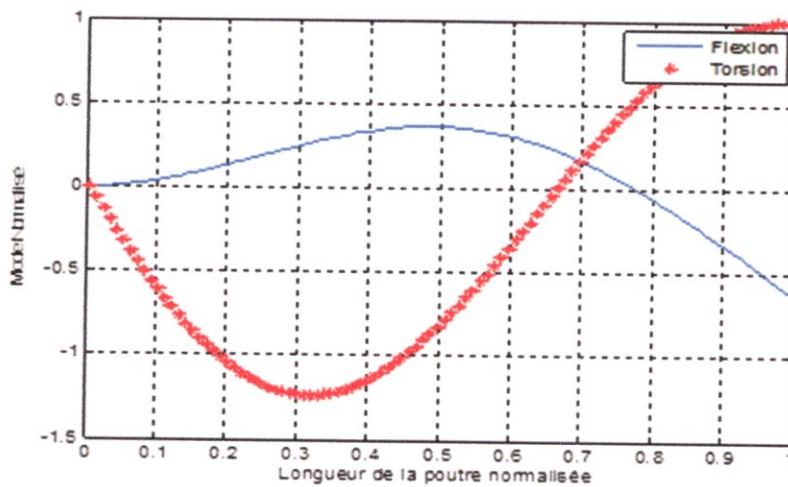


Fig. (4.6.c) Mode3  $w=212.382$  rad/s

Fig. (4.6) Les trois premiers modes propres de la poutre composite (couplage en rigidité).



c) Couplage en rigidité et en mass

Pour  $K=1.5e6$ ,  $x_\alpha=0.1$ .

	Nos résultats		Réf [17]	Err
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(%)
1 <sup>ère</sup> fréquence	41.051	6.533	40.252	1.98
2 <sup>ème</sup> fréquence	95.915	15.265	99.072	3.18
3 <sup>ème</sup> fréquence	202.286	32.194	197.57	2.38

Tableau (4.4) Les trois premiers modes propres de la poutre composite (couplage en masse et en rigidité-Euler Bernoulli).

Les résultats sont représentés dans la figure suivante :

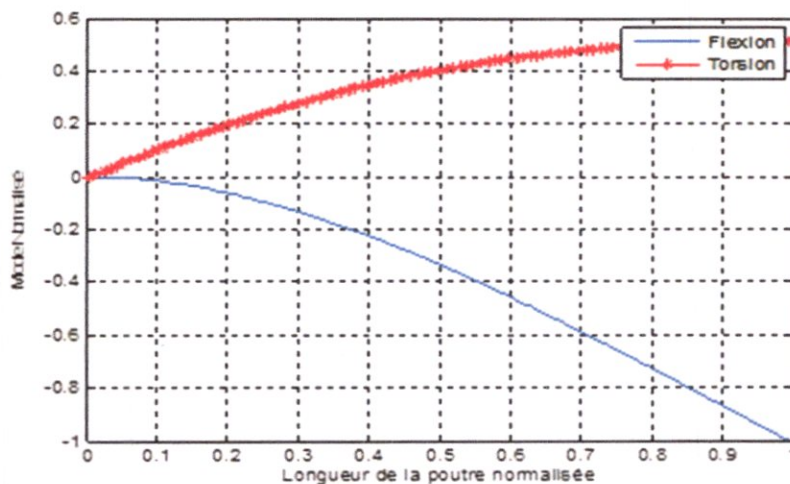


Fig. (4.7.a) Mode1  $w= 41.051$  rad/s

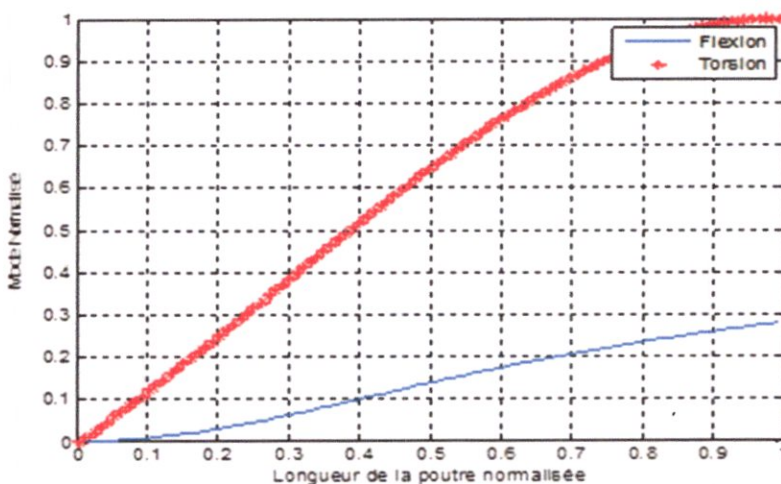


Fig. (4.7.b) Mode2  $w= 59.915$  rad/s

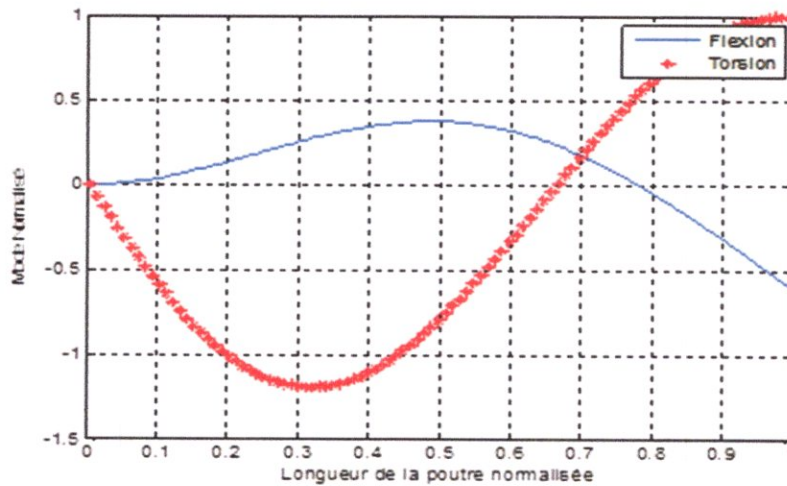


Fig. (4.7.c) Mode3  $\omega = 202.286 \text{ rad/s}$

Fig. (4.7) Les trois premiers modes propres de la poutre composite couplage en masse et en rigidité.

Les séries des résultats dans les tableaux (4.2, 4.3 et 4.4) a été obtenu pour démontrer l'effet du couplage du matériau et de la géométrie sur la forme des modes propres d'une poutre composite encastéré.

#### 4.4) LES MODES ET LES FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE-

##### MODELE TIMOSHENKO (POUTRE EPAISSE)

Soit une poutre composite, de longueur  $l$ , (Figure 4.8) Avec les caractéristiques suivantes : la longueur  $l = 190.5 \text{ mm}$ , La largeur  $b = 12.7 \text{ mm}$  et l'épaisseur  $e = 3.18 \text{ mm}$ .

Les propriétés physiques sont :

$EI = 0.2865 \text{ Nm}^2$ ,  $GJ = 0.1891 \text{ Nm}^2$ ,  $K = 0.1143 \text{ Nm}^2$ ,  $m = 0.0544 \text{ kg/m}$ ,  $I_{\theta y} = 0.777E10^{-6} \text{ kgm}$ ,  $\kappa GA = 6343.3 \text{ N}$  et  $x_a = 0.0 \text{ m}$ .

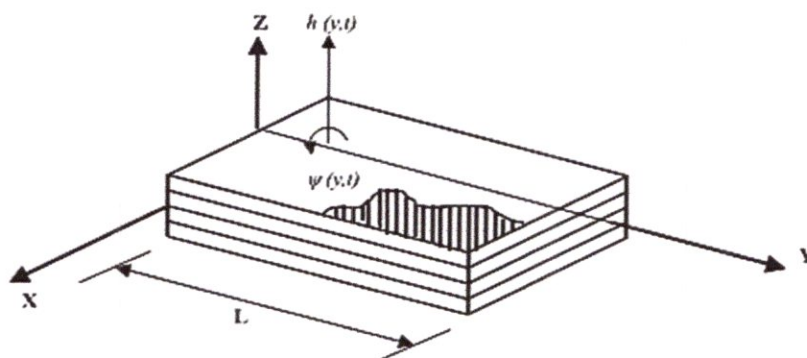


Fig. (4.8) poutre composite modèle Timoshenko.

Dans le tableau (4.5) nos résultats sont comparés à ceux donnés par les différents articles pour les quatre premiers modes propres de la poutre composite.

	Nos résultats		Réf [30]	Err	Réf [29]	Err	Réf [34]	Err
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)
1 <sup>ère</sup> fréq	193.02	30.72	193.62	0.309	30.7471	0.088	30.747	0.088
2 <sup>ème</sup> fréq	1185.67	188.70	1210.9	2.08	189.779	0.56	189.779	0.56
3 <sup>ème</sup> fréq	3219.67	512.42	3376.5	4.64	518.791	1.22	518.791	4.64
4 <sup>ème</sup> fréq	4072.88	648.22	4076.1	0.079	648.169	0.0078	648.169	0.0078

Tableau (4.5) Les quatre premiers modes propres de la poutre composite Timoshenko.

Les résultats des modes de la poutre pour chaque fréquence sont représentés dans les figures suivantes :

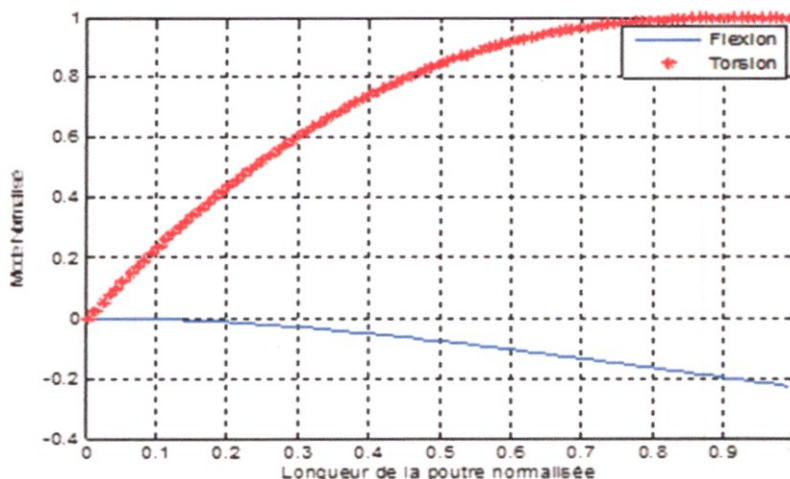


Fig. (4.9.a) Model  $w = 193.02$  rad/s

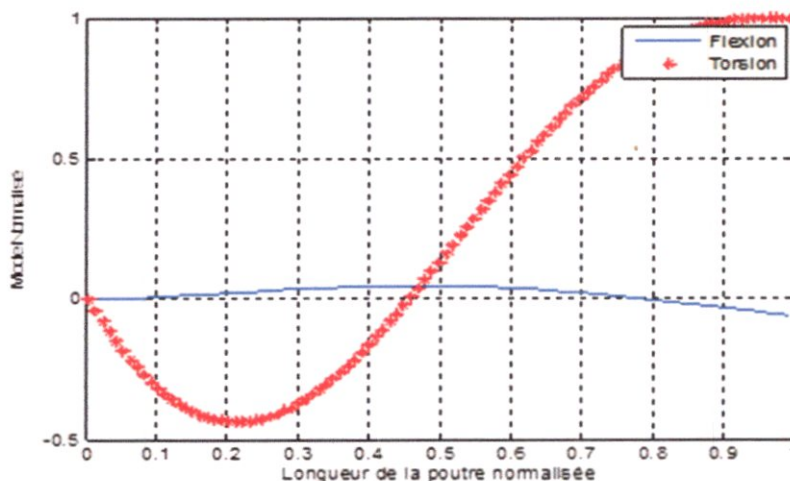


Fig. (4.9.b) Mode2  $w = 1185.67$  rad/s

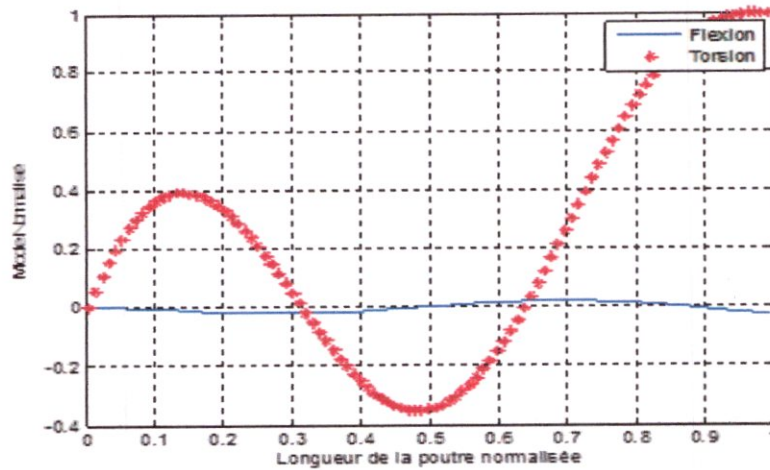


Fig. (4.9.c) Mode3  $\omega = 3219.67$  rad/s

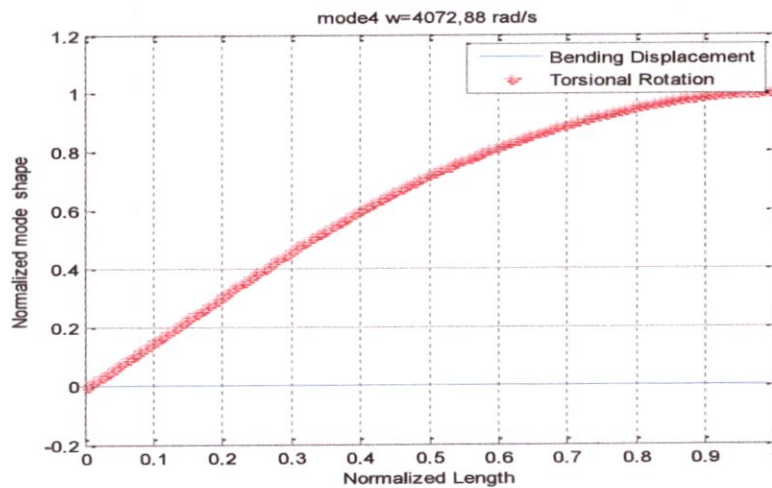


Fig. (4.9.d) Mode4  $\omega = 4072.88$  rad/s

Fig. (4.9) Les quatre premiers modes propres de la poutre composite Timoshenko.

#### 4.5) LES MODES ET LES FREQUENCES PROPRES D'UNE POUTRE COMPOSITE- MODELE TIMOSHENKO (COUPLAGE EN MASSE)

On garde toutes les caractéristiques de la poutre et change  $x_a$  pour présenter l'influence de couplage de masse sur les fréquences et les modes propres.

Dans le tableau (4.6) les résultats pour les quatre modes propres de la poutre composite (épaisse), sont donnés Pour  $x_a=0.003m$ .

Pour  $x_a=0.003m$ .

	Nos résultats	
	(rad/s)	Hz
1 <sup>ère</sup> fréquence	196.65	31.29
2 <sup>ème</sup> fréquence	1202.5	191.38
3 <sup>ème</sup> fréquence	3246.21	516.65
4 <sup>ème</sup> fréquence	5977.73	951.38

Tableau (4.6) Les quatre premier modes propres de poutre composite Timoshenko  $x_a=0.003m$ .

Les résultats des modes de la poutre pour chaque fréquence sont représentés dans les figures suivantes :

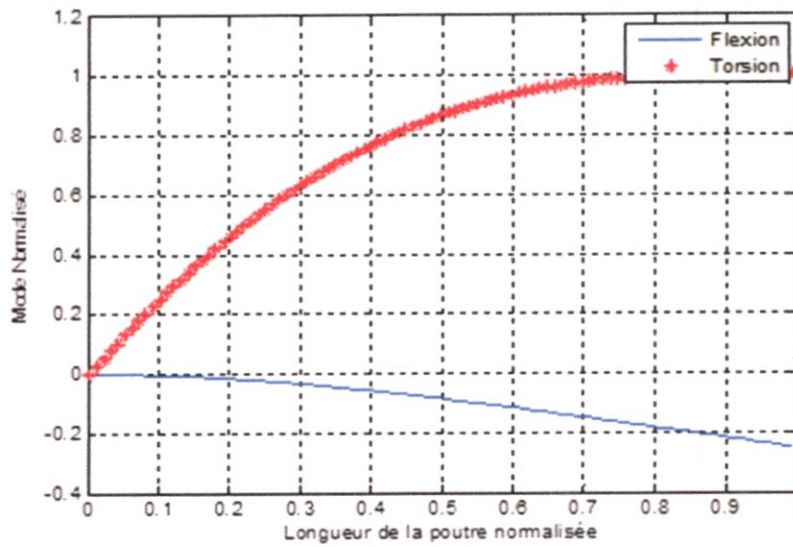


Fig. (4.10.a) Mode1  $w = 196.65 \text{ rad/s}$

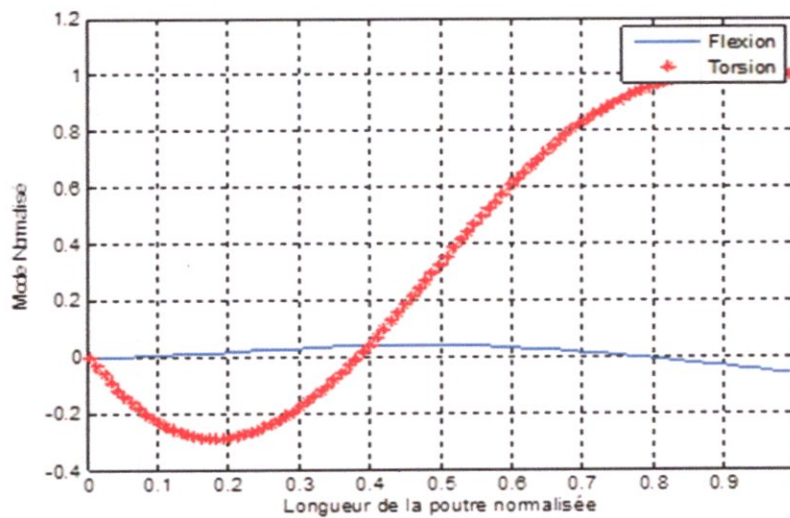


Fig. (4.10.b) Mode2  $w = 1202.5 \text{ rad/s}$

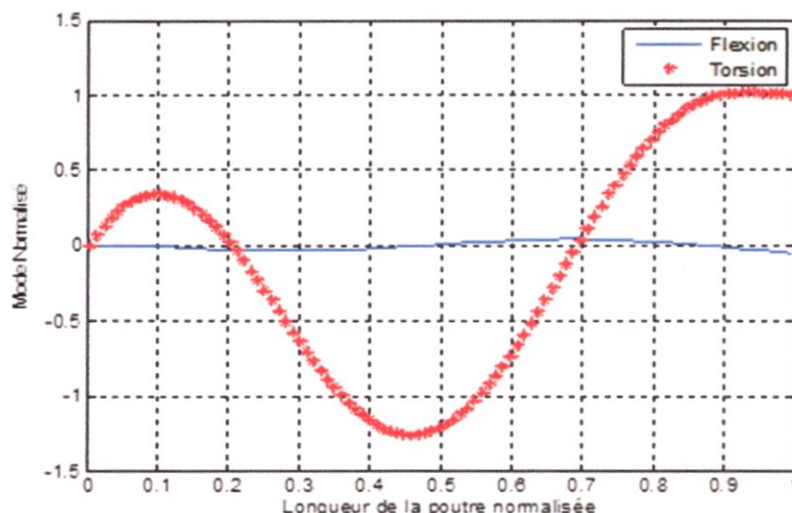


Fig. (4.10.c) Mode3  $\omega = 3246.21$  rad/s

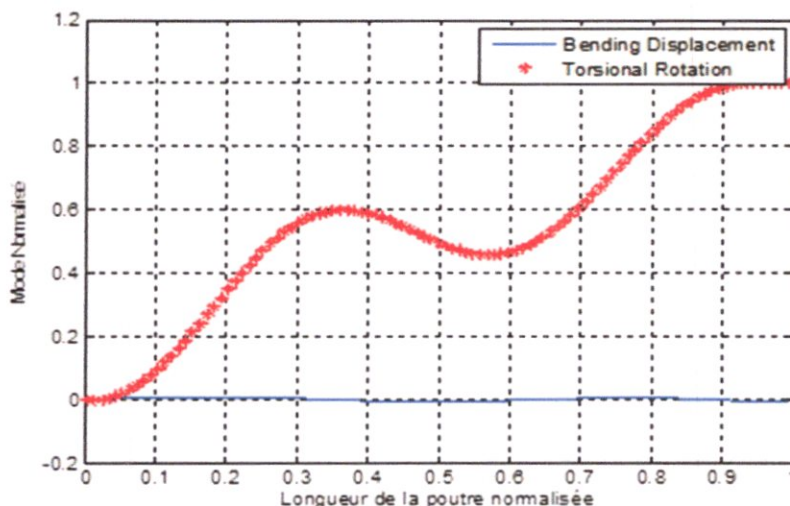


Fig. (4.10.d) Mode4  $\omega = 5977.73$  rad/s

Fig. (4.10) Les quatre premiers modes propres d'une poutre composite épaisse (couplage en rigidité et en masse)

D'après les différents résultats présentés, on remarque que les erreurs relatives des fréquences de la poutre données par notre code de calcul pour une discrétisation de 100 éléments de la poutre, et par chaque méthode de calcul sont négligeables. En comparant nos résultats et les résultats des références [29] [30] [34], on trouve que nos résultats sont plus proches des résultats théoriques calculés.

4.6) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT PAR LA METHODE DE RITZ

4.6.1) Aile de Fung - Premier modèle

Demi-aile  $s=1\text{ m}$

Chorde  $c=0.254\text{ m}$

Rapport de masse  $\mu=76$

Fréquence de flexion:  $\omega_f=64.1\text{ rad/s}$

Fréquence de torsion :  $\omega_t=55.9\text{ rad/s}$

Position du centre de masse  $x_a=0.25$  par rapport à la center élastique

Position du centre élastique  $x_f=-0.15$  par rapport à la moitié de la corde

Le domaine de vitesse est entre  $1$  et  $30\text{ m/s}$  avec incrémentation de  $0, 2\text{ m/s}$

La densité de l'aire  $\rho_a=1,225\text{ kg/m}^3$

La fréquence réduite  $k=0,276$

Avec les modes rigides suivants :

Le premier mode:  $\begin{cases} F1 = 1. \\ G1 = 0. \end{cases}$

Le deuxième mode  $\begin{cases} F2 = 0. \\ G2 = 1. \end{cases}$

Le résultat obtenu est donné par le graphe suivant :

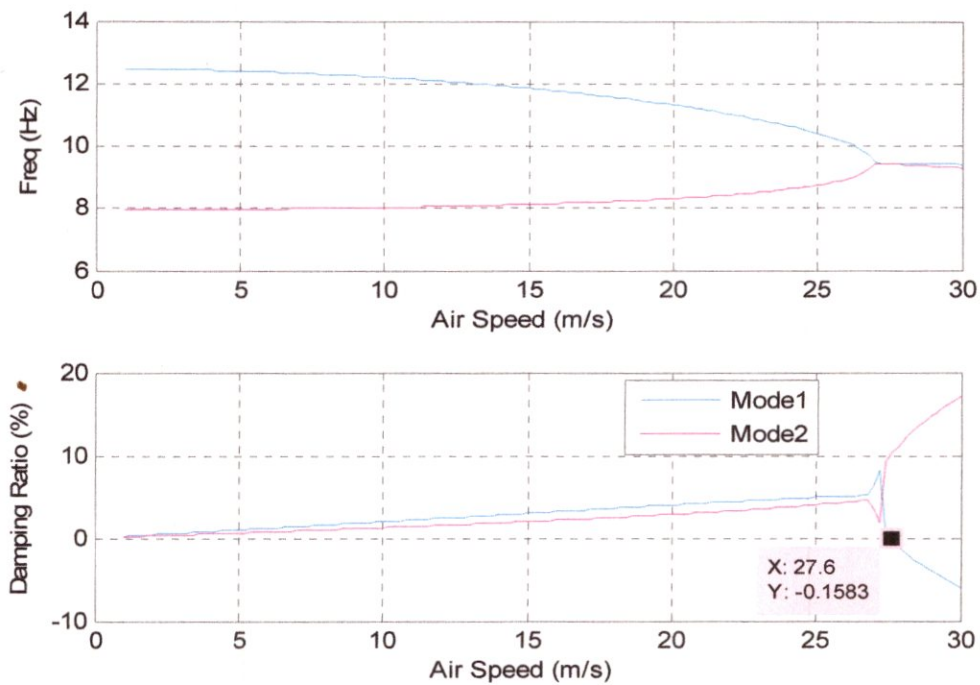


Fig.(4.11) Vitesse de flottement d'une aile de Fung- Premier modèle.

**4.6.2) Aile de Fung - Deuxième modèle**

Pour présenter l'influence de la rigidité sur la vitesse critique de flottement on garde toutes les caractéristiques de l'aile et changer  $\omega_f = 48 \text{ rad/s}$  (fréquence de flexion), avec un même rapport ( $\omega_f/\omega_t$ ) donc :  $\omega_t = 41.86 \text{ rad/s}$

Le résultat obtenu est donné par le graphe suivant :

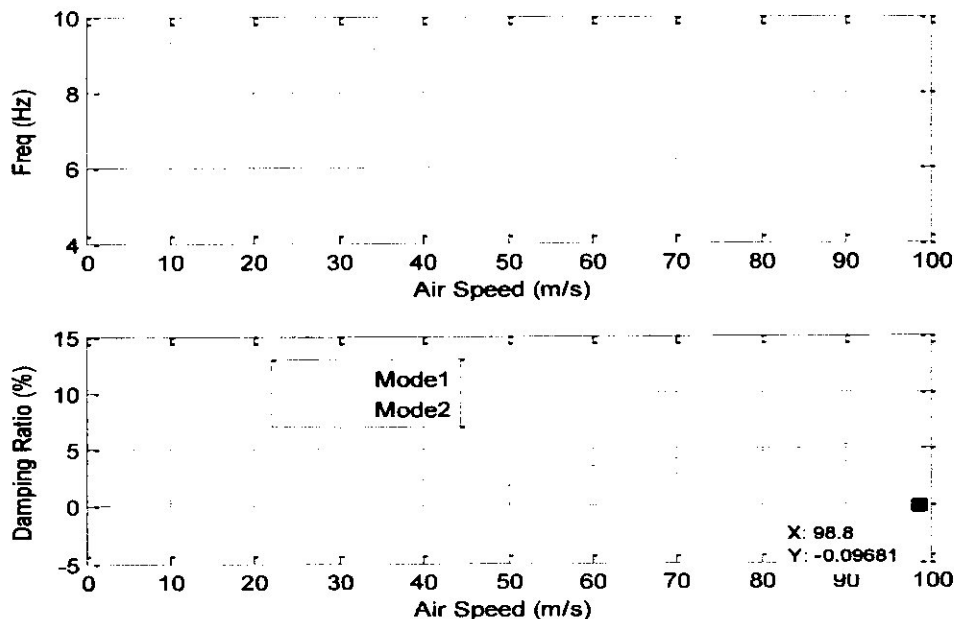


Fig. (4.12) Vitesse de flottement d'une aile de Fung - deuxième modèle.

**4.6.3) Aile de Fung - Troisième modèle**

Les caractéristiques de ce modèle sont :

$s = 1 \text{ m}$ ,  $c = 18,29 \text{ m}$ ,  $\mu = 40 \text{ kg/m}$ ,  $\omega_f = 0.880341 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_t = 1.552 \text{ rad/s}$ ,  $x_a = 0$ ,  $x_f = 0$ ,  $\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$  et  $k = 0,232$

Le résultat obtenu est donné par le graphe suivant :



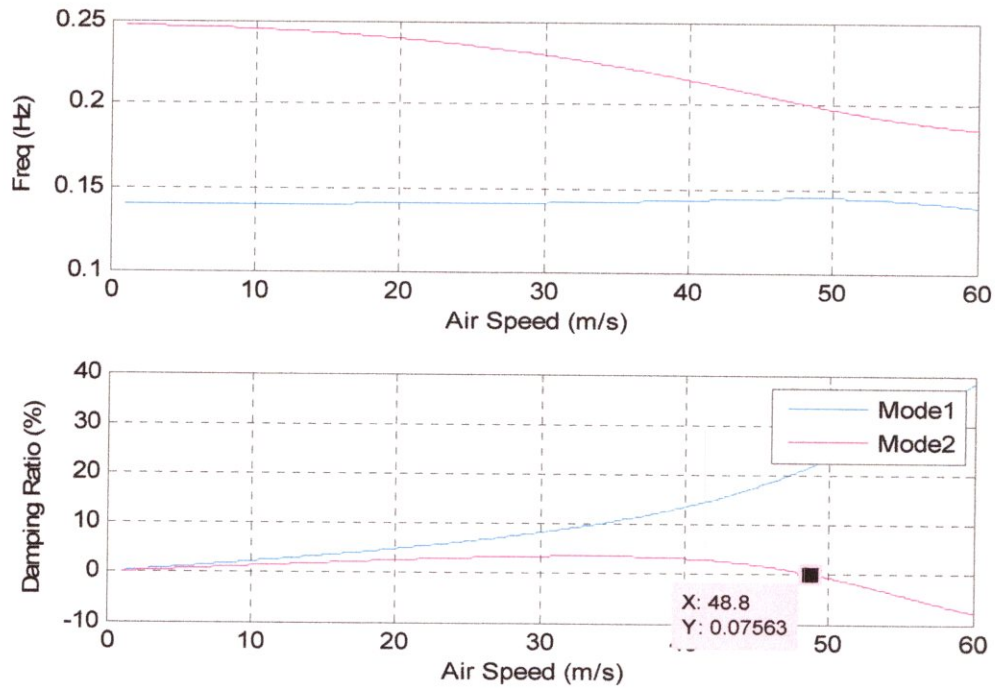


Fig.(4.13) Vitesse de flottement d'une aile de Fung - troisième modèle.

Dans le tableau (4.7) nos résultats sont comparés à ceux de Fung Réf [31]

	Nos résultats		Réf [31]	Err
	(m/s)	(Feet/s)	(Feet/s)	(%)
Premier modèle	27.6	90.55	90.1	0.5
Deuxième modèle	98.8	324.15	334	2.95
Troisième modèle	48.8	160.104	162	1.170

Tableau (4.7) La vitesse de flottement pour un profil d'aile-Fung

#### 4.6.4) Aile de Goland

Les caractéristiques de l'aile sont :

$$EI=9770000 \text{ Nm}^2 \quad GJ=989000 \text{ Nm}^2 \quad s=6,096 \text{ m} \quad c=1,83 \text{ m} \quad a=-1/3$$

$$m=35,719 \quad x_a=0,33 \quad \text{et} \quad r_a=0,25$$

Avec les modes élastiques suivants :

Le premier mode:  $\begin{cases} F1 = (y/s)^2. \\ G1 = 0. \end{cases}$  La deuxième mode  $\begin{cases} F2 = 0. \\ G2 = \sin((\pi * y)/(2 * s)). \end{cases}$

Les résultats obtenus sont donnés par les graphes suivants :

Pour  $k=0.15$

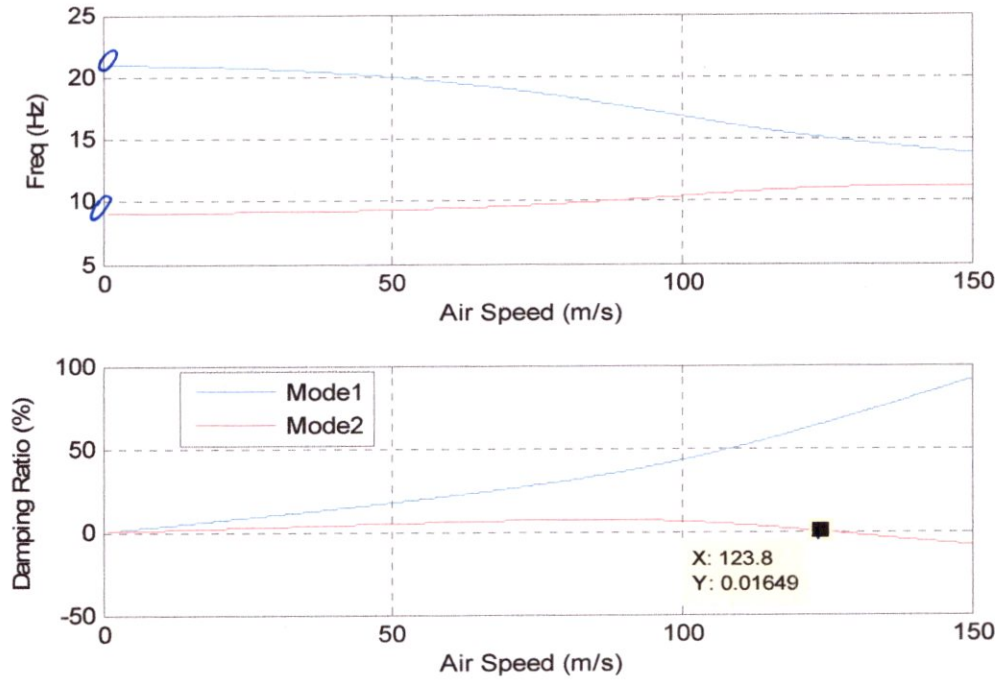


Fig. (4.14) Vitesse de flottement d'une aile de Golang ( $k=0.15$ )

Pour  $k=0.25$

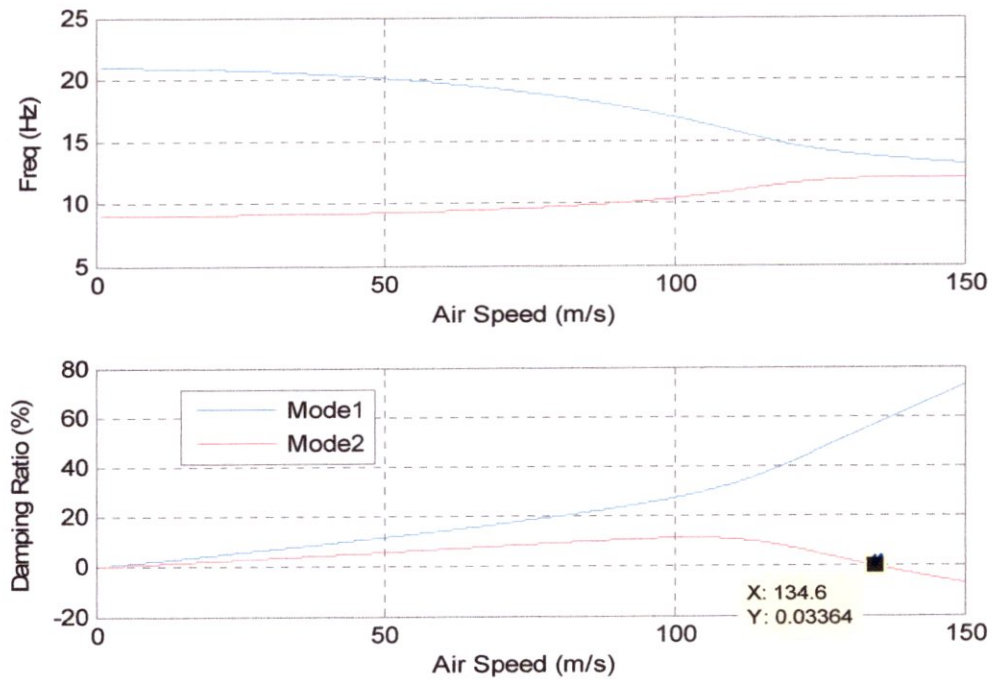


Fig. (4.15) Vitesse de flottement d'une aile de Golang ( $k=0.25$ )

Pour  $k=0.35$

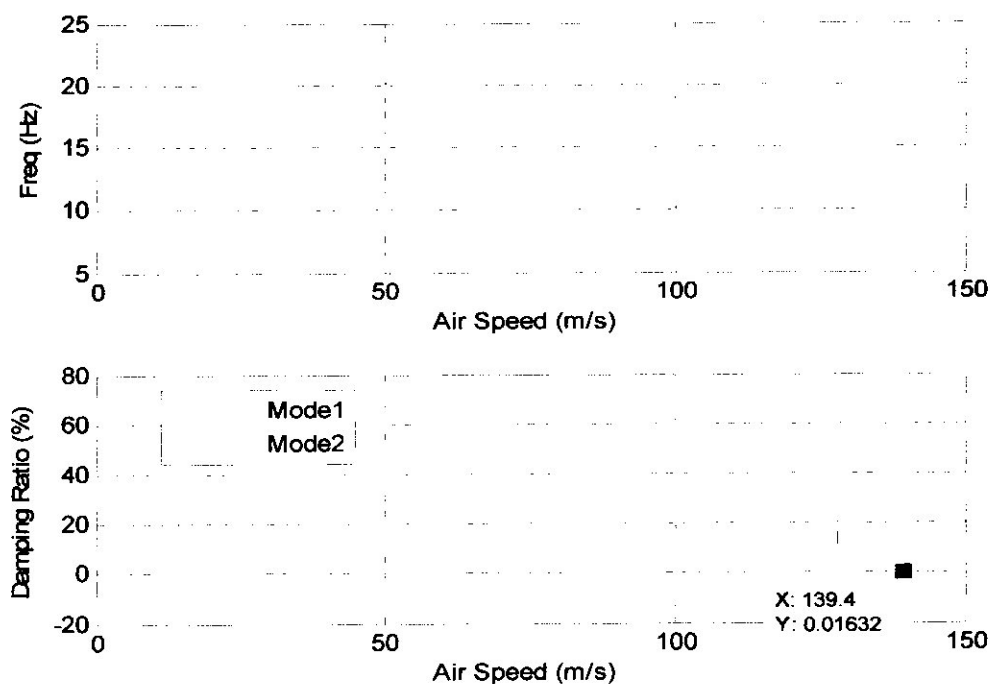


Fig. (4.16) Vitesse de flottement d'une aile de Goland ( $k=0.35$ )

Pour  $k=0.47$

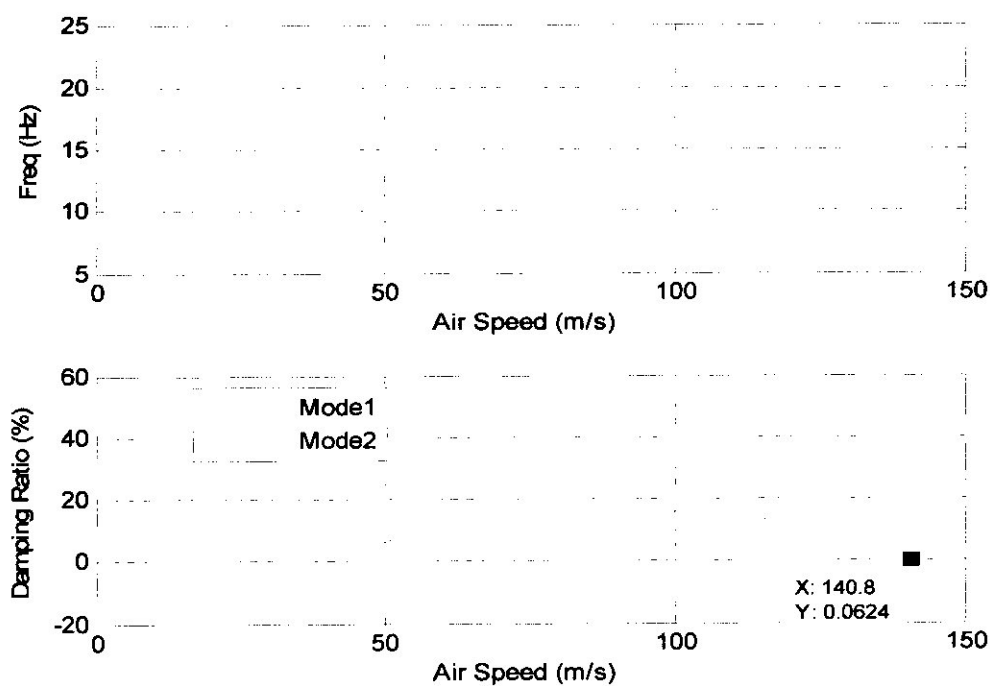


Fig. (4.17) Vitesse de flottement d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ).

Dans le tableau (4.8) notre résultat et le résultat de Goland, Réf [36], sont bien comparables.

Flottement pour une aile Goland  Pour $k=0.47$	Notre résultat		Réf [36]	Err
	<i>(m/s)</i>	<i>(feet/s)</i>	<i>(feet/s)</i>	(%)
	140.8	461.94	451	2.425

Tableau (4.8) La vitesse de flottement pour aile de Goland avec  $k=0.47$ .

#### 4.7) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

##### 4.7.1) Aile de Goland

Les fonctions d'interpolation des modes de l'aile de Goland (Les six premiers modes) sont présentées dans l'annexe 04.

Il s'agit d'un calcul de flottement pour une aile de Goland en modes multiples par (MEF).

Les résultats sont présentés dans les figures suivantes :

##### 4.7.1.1) Pour deux modes

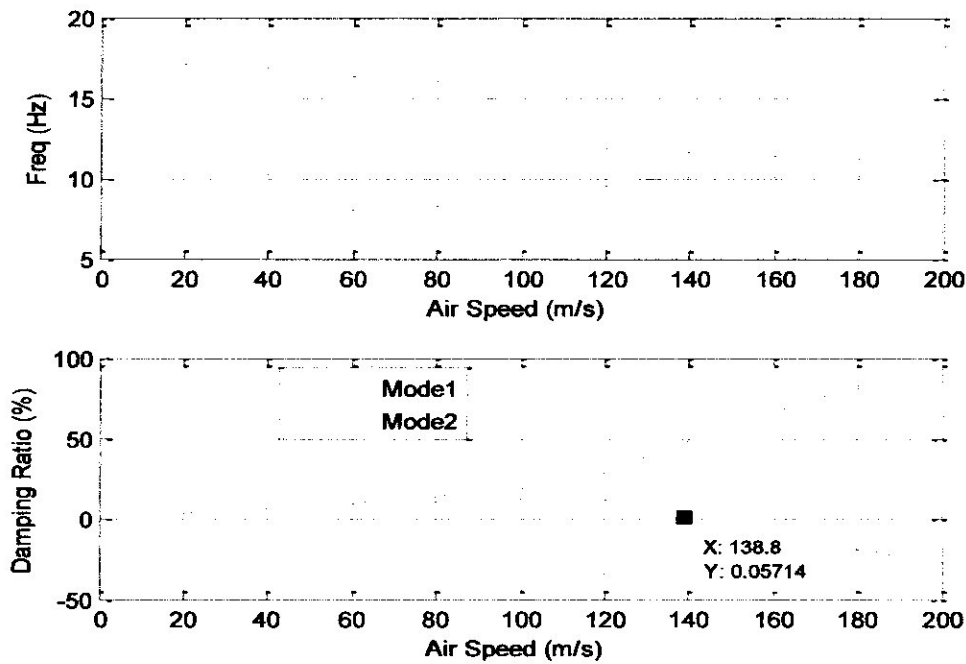


Fig. (4.18) Vitesse de flottement pour deux modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF.

4.7.1.2) Pour trois modes

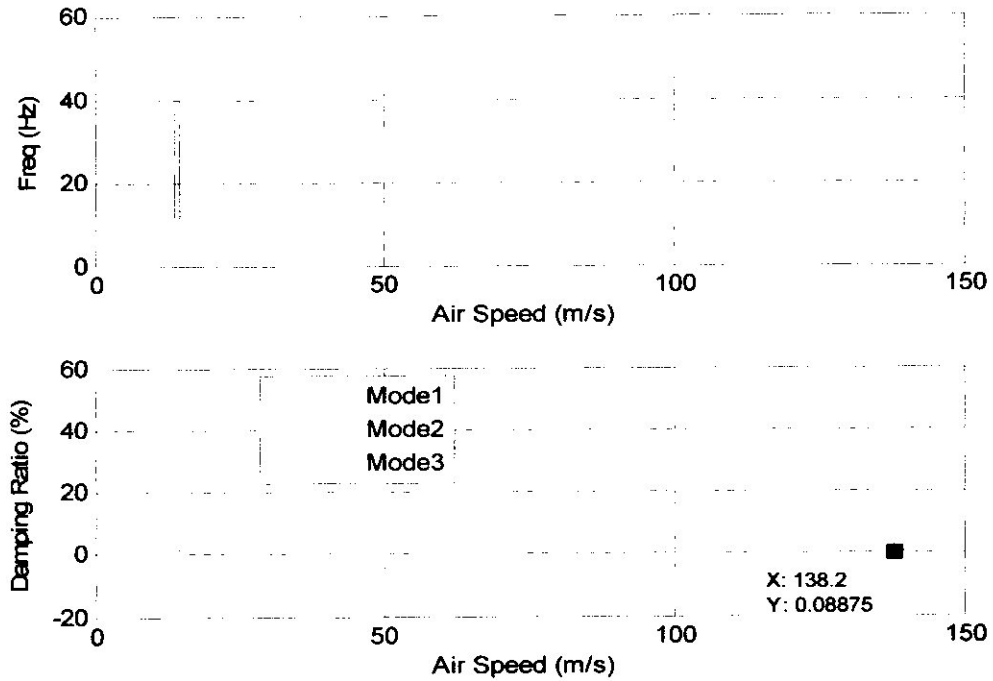


Fig. (4.19) Vitesse de flottement pour trois modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF.

4.7.1.3) Pour quatre modes

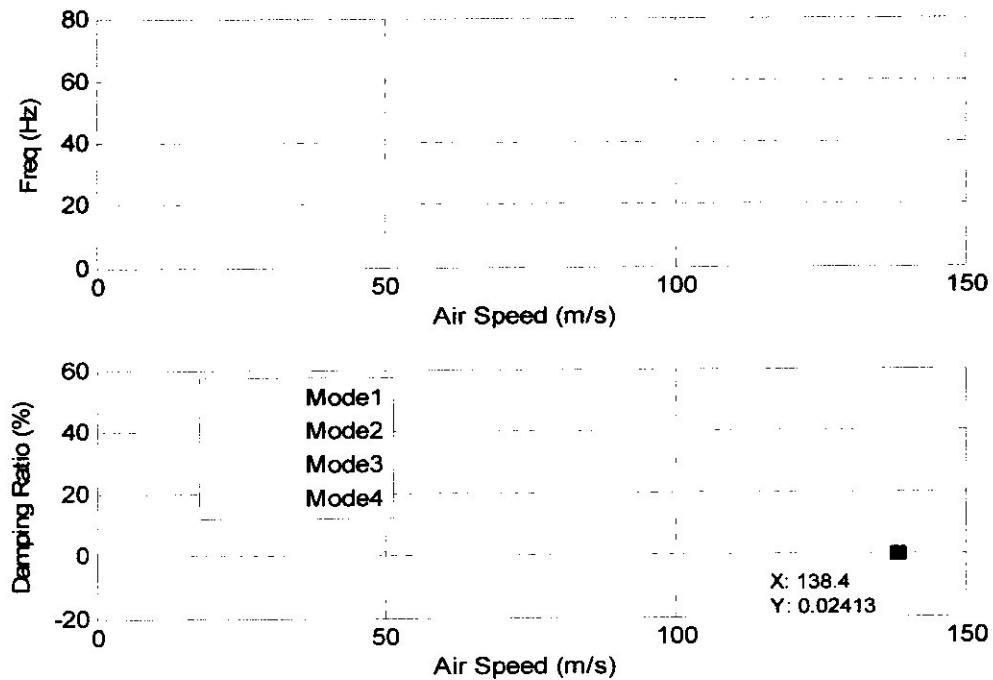


Fig. (4.20) Vitesse de flottement pour quatre modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF.

4.7.1.4) Pour cinq modes

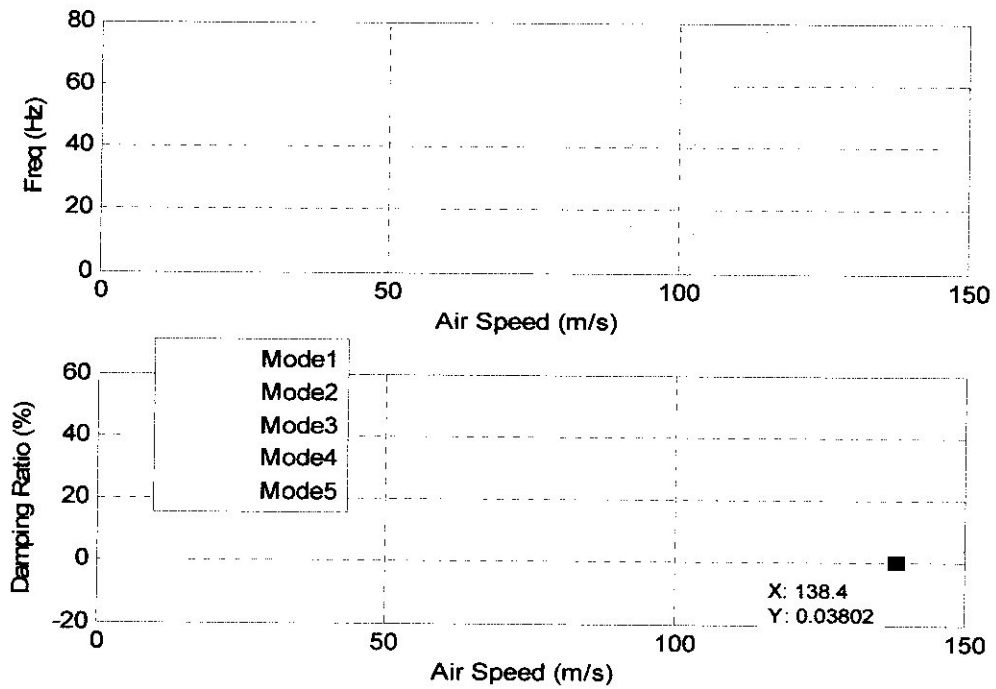


Fig. (4.21) Vitesse de flottement pour cinq modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF.

4.7.1.5) Pour six modes

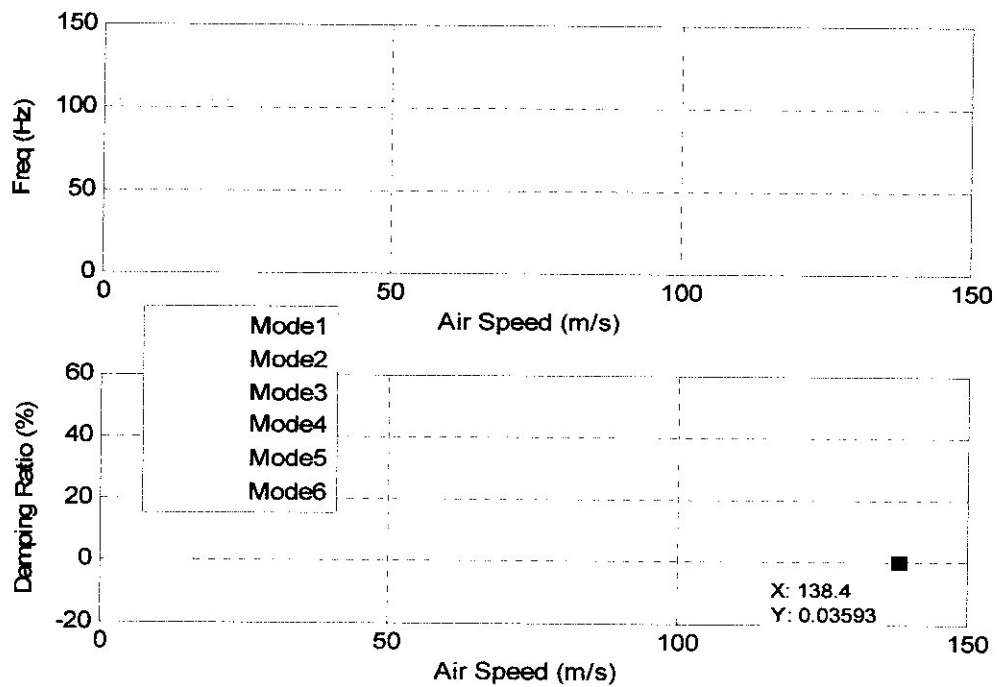


Fig. (4.22) Vitesse de flottement pour six modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF

On a résumé tous les résultats de calcul de flottement pour l'aile de Goland par (MEF) dans le tableau (4.9)

Flottement pour une aile Goland MEF Pour $k=0.47$	N° de mode	Nos résultats		Réf [36]	Err
		(m/s)	(feet/s)	(feet/s)	(%)
	2M	138.8	455.38	451	0.971
	3M	138.2	453.41		0.53
	4M	138.4	454.06		0.76
	5M	138.4	454.06		0.76
	6M	138.4	454.06		0.76

Tableau (4.9) Vitesse de flottement pour aile de Goland par MEF.

**4.7.2) Effet de couplage en rigidité sur la vitesse de flottement**

Dans ce cas, on montre l'influence de couplage de rigidité sur la vitesse du flottement de l'aile de Goland par MEF

Les résultats sont présentés dans les figures suivantes :

Pour deux modes avec  $k=0,47$  et  $K=1*10^6 Nm^2$

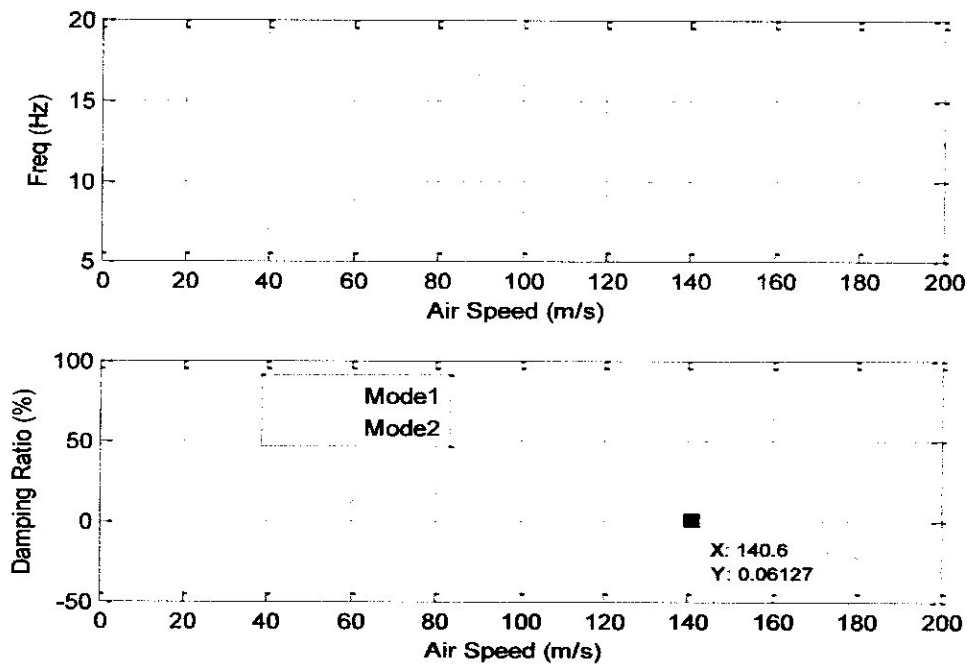


Fig. (4.23) Vitesse de flottement pour deux modes d'une aile de Goland ( $k=0.47$ ) par MEF (couplage en rigidité)

4.8) CALCUL DE LA VITESSE DE FLOTTEMENT POUR UNE POUTRE COMPOSITE

Les caractéristiques de la poutre sont :

$l = 695 \text{ mm}$   
 $L = 0.55 \text{ m}, E_1 = 10.2 \text{ Gpa}, E_2 = 10.2 \text{ Gpa}, G_{12} = 1.767 \text{ Gpa}, \nu_{12} = 0.1 \rho = 1800 \text{ kg/m}^3$   
 $e = 4,24 \text{ mm}$

manque  
 - Epaisseur  
 - Largeur

Orientation des fibres (°)	Coefficients des rigidités (Nm <sup>2</sup> )	Notre résultat		Réf [19] (Rad/s)		Err (%)
		Fréquences propres (Rad/s)	Vitesse de flottement (m/s)	Fréquences propres (Rad/s)	Vitesse de flottement (m/s)	
[45/0/45/0] <sub>s</sub>	$EI=2.785$ $GJ=5.748$ $K=0$	$\omega_1=23.515$ $\omega_2=147.095$ $\omega_3=410.128$	88.7	$\omega_1=23.516$ $\omega_2=147.059$ $\omega_3=409.903$	87	1.95

Tableau (4.11) Vitesse de flottement pour une poutre composite.

Les résultats sont présentés dans les figures suivantes :

Avec  $k=0.1073$

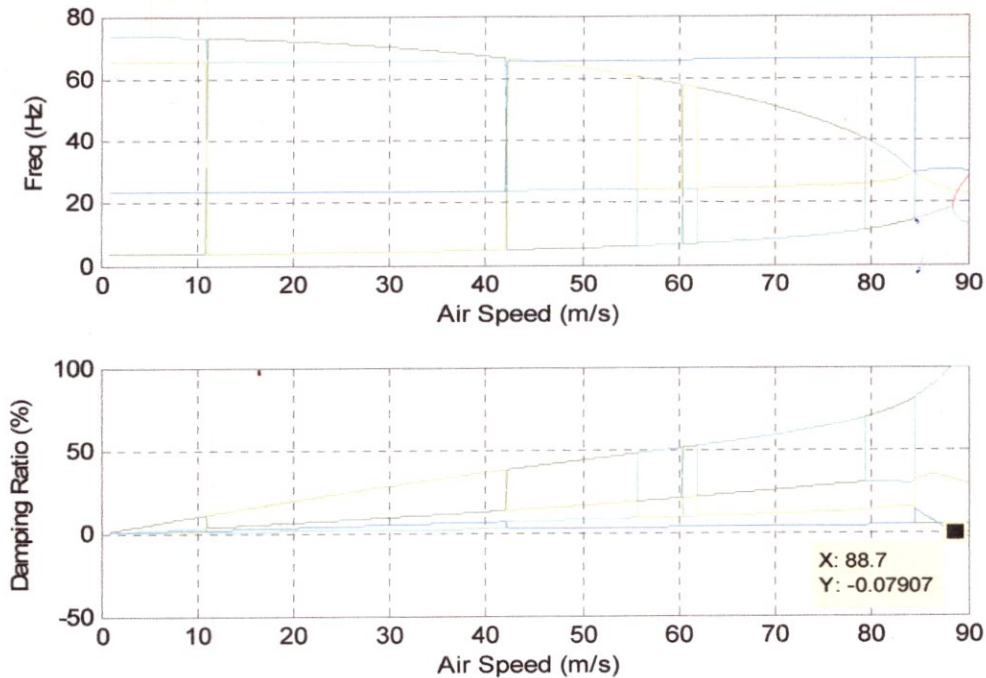


Fig. (4.25) Vitesse de flottement pour une poutre composite par MEF.



## CONCLUSION

L'étude dynamique des structures d'avions est une étude vaste et demande une recherche approfondie car les structures d'avions sont complexes et différentes. Ainsi que les avions ne sont pas de même type et le choix de la structure est en conséquence conforme au type d'avion.

La modélisation joue un rôle très important pour analyser les phénomènes qui entourent l'avion (aéroélasticité, optimisation, calcul vibratoire, champ des contraintes, etc.).

Dans notre travail, la modélisation de la structure est faite par la Méthode des Eléments Finis pour le couplage Flexion – Torsion des poutres composites 'mince et épaisse'. Cela nous a permis de savoir les effets de couplage et de cisaillement sur le comportement dynamique des poutres composites (fréquences et modes vibratoires).

De plus, par l'intermédiaire du calcul des matrices aérodynamiques instationnaire, nous avons pu étudier la stabilité aéroélastique pour différents couplages structuraux en résolvant l'équation de flottement sur des plages de vitesses et de fréquences réduite par la méthode ( $V-\zeta$ ).

Ce projet montre qu'il faut procéder à une étude approfondie dans la phase de conception pour éviter les problèmes d'exploitation telle que le phénomène de flottement qui surgit sur la stabilité de la structure de l'avion. Le choix des matériaux joue un rôle très important dans la conception de l'avion, l'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique est un sujet de recherche actuelle.

Enfin on souhaite que ce modeste travail trouve la satisfaction de lecteur et survira comme document utile dans le domaine d'aéroélasticité pour les futures promotions aéronautique.

## ANNEXE A

## A.1) Matrices de masse élémentaire d'une poutre composite (Timoshenko)

## A.1.1) Matrice de masse élémentaire sans effet de cisaillement (flexion pure)

$$[Mf] = \begin{pmatrix} \sigma_4 & \sigma_3 & 0 & \sigma_5 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_3 & \rho A \left( \frac{L^3}{120} + \frac{L^3}{340(\phi+1)^2} \right) & 0 & \sigma_2 & \sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_5 & \sigma_2 & 0 & \sigma_4 & \sigma_1 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_6 & 0 & \sigma_1 & \rho A \left( \frac{L^3}{120} + \frac{L^3}{340(\phi+1)^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

where

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad (A.1.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho A L^2 (35\phi^2 + 63\phi + 26)}{340(\phi+1)^2} \quad (A.1.2)$$

$$\sigma_3 = \frac{\rho A L^2 (35\phi^2 + 77\phi + 44)}{340(\phi+1)^2} \quad (A.1.3)$$

$$\sigma_4 = \frac{\rho A L (70\phi^2 + 147\phi + 78)}{210(\phi+1)^2} \quad (A.1.4)$$

$$\sigma_5 = \frac{\rho A L (35\phi^2 + 63\phi + 27)}{210(\phi+1)^2} \quad (A.1.5)$$

$$\sigma_6 = -\rho A \left( \frac{L^3}{120} - \frac{L^3}{340(\phi+1)^2} \right) \quad (A.1.6)$$

### A.1.2) Matrice de masse élémentaire avec effet de cisaillement (flexion pure)

$$[Mo] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_3 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_4 & 0 & \sigma_2 & -\frac{\rho I_z L (5\phi - 5\phi^2 + 1)}{30(\phi+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & -\frac{\rho I_z L (5\phi - 5\phi^2 + 1)}{30(\phi+1)^2} & 0 & \sigma_2 & \sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.2)$$

where

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \quad (A.2.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho I_z (5\phi - 1)}{10(\phi+1)^2} \quad (A.2.2)$$

$$\sigma_3 = \frac{6\rho I_z}{5L(\phi+1)^2} \quad (A.2.3)$$

$$\sigma_4 = \frac{\rho I_z L (10\phi^2 + 5\phi + 4)}{30(\phi+1)^2} \quad (A.2.4)$$

### A.1.3) Matrice de masse élémentaire (couplage flexion torsion)

$$[Mft] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & \frac{L^2 S_x (5\phi + 6)}{120(\phi+1)} & 0 & 0 & \frac{L^2 S_x (5\phi + 4)}{120(\phi+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2 S_x (5\phi + 4)}{120(\phi+1)} & 0 & 0 & -\frac{L^2 S_x (5\phi + 6)}{120(\phi+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

where

$$\sigma_1 = \frac{L S_x (10\phi + 9)}{60(\phi+1)} \quad (A.3.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{L S_x (20\phi + 21)}{60(\phi+1)} \quad (A.3.2)$$

#### A.1.4) Matrice de masse élémentaire (couplage torsion flexion)

$$[\text{Mtf}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 \frac{L^2 Sx (5\phi+6)}{120 (\phi+1)} & 0 & \sigma_1 & -\frac{L^2 Sx (5\phi+4)}{120 (\phi+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 \frac{L^2 Sx (5\phi+4)}{120 (\phi+1)} & 0 & \sigma_2 & -\frac{L^2 Sx (5\phi+6)}{120 (\phi+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

where

$$\sigma_1 = \frac{L Sx (10\phi+9)}{60 (\phi+1)} \quad (\text{A.4.1})$$

$$\sigma_2 = \frac{L Sx (20\phi+21)}{60 (\phi+1)} \quad (\text{A.4.2})$$

#### A.1.5) Matrice de masse élémentaire (torsion pure)

$$[\text{Mt}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho I_z L}{3} & 0 & 0 & \frac{\rho I_z L}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho I_z L}{6} & 0 & 0 & \frac{\rho I_z L}{3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

## A.1.6) Matrice de masse globale poutre Timoshenko

$$[Mg] = \begin{pmatrix} \sigma_4 & \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 77\phi + 44)}{840(\phi+1)^2} + \sigma_2 & \sigma_8 & \frac{L Mx (\sigma_5 + 63\phi + 27)}{210(\phi+1)^2} - \frac{6 Lx}{5 L (\phi+1)^2} & \sigma_2 - \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 63\phi + 26)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_9 \\ \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 77\phi + 44)}{840(\phi+1)^2} + \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_2 + \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 63\phi + 26)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_3 & \sigma_7 \\ \sigma_8 & \sigma_6 & \frac{Lx L}{3} & \sigma_9 & -\sigma_7 & \frac{Lx L}{6} \\ \frac{L Mx (\sigma_5 + 63\phi + 27)}{210(\phi+1)^2} - \frac{6 Lx}{5 L (\phi+1)^2} - \sigma_2 + \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 63\phi + 26)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_9 & \sigma_4 & \sigma_4 & -\sigma_2 - \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 77\phi + 44)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_8 \\ \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 63\phi + 26)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_3 & -\sigma_7 & -\sigma_2 - \frac{L^2 Mx (\sigma_5 + 77\phi + 44)}{840(\phi+1)^2} & \sigma_1 & -\sigma_6 \\ \sigma_9 & \sigma_7 & \frac{Lx L}{6} & \sigma_8 & -\sigma_6 & \frac{Lx L}{3} \end{pmatrix}$$

where

(A.6)

$$\sigma_1 = Mx \left( \frac{L^3}{120} + \frac{L^3}{840(\phi+1)^2} \right) + \frac{Lx L (10\phi^2 + 5\phi + 4)}{30(\phi+1)^2}$$

(A.6.1)

$$\sigma_2 = -\frac{Lx (5\phi - 1)}{10(\phi+1)^2}$$

(A.6.2)

$$\sigma_3 = -Mx \left( \frac{L^3}{120} - \frac{L^3}{840(\phi+1)^2} \right) - \frac{Lx L (5\phi - 5\phi^2 + 1)}{30(\phi+1)^2}$$

(A.6.3)

$$\sigma_4 = \frac{6 Lx}{5 L (\phi+1)^2} + \frac{L Mx (70\phi^2 + 147\phi + 78)}{210(\phi+1)^2}$$

(A.6.4)

$$\sigma_5 = 35\phi^2$$

(A.6.5)

$$\sigma_6 = \frac{L^2 Sx (5\phi - 6)}{120(\phi+1)}$$

(A.6.6)

$$\sigma_7 = \frac{L^2 Sx (5\phi + 4)}{120(\phi+1)}$$

(A.6.7)

$$\sigma_8 = \frac{L Sx (20\phi + 21)}{60(\phi+1)}$$

(A.6.8)

$$\sigma_9 = \frac{L Sx (10\phi + 9)}{60(\phi+1)}$$

(A.6.9)

$$\text{Avec : } \phi = \frac{12EI_{xx}}{l^2 \kappa GA}$$

## A.2) Les Matrice de rigidité élémentaire (poutre composite Timoshenko)

### A.2.1) Matrice de rigidité élémentaire (flexion pure)

$$[Kf] = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & 0 & -\sigma_2 & \sigma_3 & 0 \\ \sigma_3 & EI \left( \frac{1}{L} + \frac{3}{L(\phi+1)^2} \right) & 0 & \sigma_1 & \sigma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_4 & 0 & \sigma_1 & EI \left( \frac{1}{L} + \frac{3}{L(\phi+1)^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

where

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad (A.7.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{12 EI}{L^3 (\phi+1)^2} \quad (A.7.2)$$

$$\sigma_3 = \frac{6 EI}{L^2 (\phi+1)^2} \quad (A.7.3)$$

$$\sigma_4 = -EI \left( \frac{1}{L} - \frac{3}{L(\phi+1)^2} \right) \quad (A.7.4)$$

### A.2.2) Matrice de rigidité élémentaire (couplage flexion torsion)

$$[Kft] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{L} & 0 & 0 & -\frac{K}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{L} & 0 & 0 & \frac{K}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

## A.2.3) Matrice de rigidité élémentaire (couplage torsion flexion)

$$[K_{tf}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{L} & 0 & 0 & -\frac{K}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K}{L} & 0 & 0 & \frac{K}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

(A.9)

## A.2.4) Matrice de rigidité élémentaire (cisaillement)

$$[K_{ci}] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_2 & 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_3 & -\sigma_2 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A.10)

where

$$\sigma_1 = \frac{\kappa GA \phi^2 L}{4(\phi+1)^2} \quad (A.10.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\kappa GA \phi^2}{2(\phi-1)^2} \quad (A.10.2)$$

$$\sigma_3 = \frac{\kappa GA \phi^2}{L(\phi+1)^2} \quad (A.10.3)$$

## A.2.5) Matrice de rigidité élémentaire (torsion pure)

$$[K_t] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{pmatrix}$$

(A.11)

## ANNEXE B

## B.1) Forces aérodynamiques instationnaires

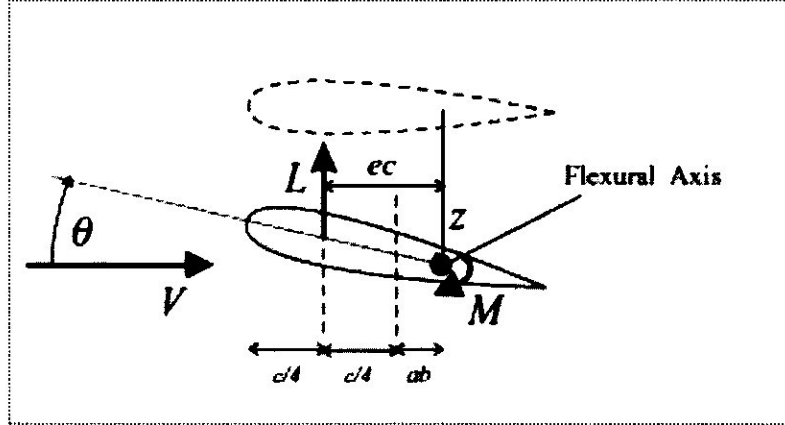


Fig. (B.1) Profil aérodynamique en mouvements de tangage et de translation verticale.

Considérons un profil aérodynamique bidimensionnel symétrique ( $C_{m0} = 0$ ) de la corde  $c$ , avec l'axe élastique placé à la distance ( $ab = ac/2$ ) à l'arrière de la demi-corde suivant les indications du schéma ci-dessus. Le profil aérodynamique subit un mouvement harmonique oscillant, avec  $w = w_0 e^{i\omega t}$  et  $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$  (bord d'attaque vers le haut). La solution classique pour la portance et le moment autour de l'axe élastique peut être :

$$L = \pi \rho b^2 [\dot{w} + V \dot{\theta} - ba \ddot{\theta}] + 2\pi \rho V b C(k) \left[ \dot{w} + V \theta + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (B.1)$$

$$M = \pi \rho b^2 \left[ ba \ddot{w} - V b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] + 2\pi \rho V b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[ \dot{w} + V \theta + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] \quad (B.2)$$

La dérivation de ces deux équations décrit la façon dont la portance aérodynamique et le moment varient avec la fréquence réduite.

On prend les deux expressions (B.1) et (B.2) et on les remplace par la forme complexe de la fonction de Theodorsen :

$$L = \left\{ \pi \rho b^2 [-\omega^2 w_0 + i\omega V \theta_0 + \omega^2 ba \theta_0] + 2\pi \rho V b (F + iG) \left[ i\omega w_0 + V \theta_0 + i\omega b \left( \frac{1}{2} - a \right) \theta_0 \right] \right\} e^{i\omega t} \quad (B.3)$$

$$M = \left\{ \pi \rho b^2 \left( -\omega^2 ba w_0 - i\omega V b \left( \frac{1}{2} - a \right) \theta_0 + b^2 \omega^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \theta_0 \right) + 2\pi \rho V b^2 \left( a + \frac{1}{2} \right) (F + iG) (i\omega w_0 + V \theta_0 + i\omega b \left( \frac{1}{2} - a \right) \theta_0) \right\} e^{i\omega t} \quad (B.4)$$

Ces équations peuvent alors être écrites sous la forme harmonique suivante :



$$\begin{cases} L = \left[ \rho V^2 b (L_w + ikL_{\dot{w}}) \frac{w_0}{b} + (L_\theta + ikL_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t} \\ M = \left[ \rho V^2 b (M_w + ikM_{\dot{w}}) \frac{w_0}{b} + (M_\theta + ikM_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Avec :

$$\begin{cases} L_w = 2\pi \left( -\frac{k^2}{2} - Gk \right), \quad L_{\dot{w}} = 2\pi F \\ L_\theta = 2\pi \left[ \frac{k^2 a}{2} + F - Gk \left( \frac{1}{2} - a \right) \right], \quad L_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[ \frac{1}{2} + F \left( \frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \right] \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{cases} M_w = 2\pi \left[ -\frac{k^2 a}{2} - k \left( a + \frac{1}{2} \right) G \right], \quad M_{\dot{w}} = 2\pi \left( a + \frac{1}{2} \right) F \\ M_\theta = 2\pi \left[ \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) + F \left( a + \frac{1}{2} \right) - kG \left( a + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \\ M_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[ -\frac{k}{2} \left( \frac{1}{2} - a \right) + kF \left( a + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \left( a + \frac{1}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Les valeurs quasi-stationnaires des dérivés aérodynamiques ( $k \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow 1$ ,  $G \rightarrow 0$ ) peuvent être trouvées

$$\begin{cases} L_w = 0, \quad L_{\dot{w}} = 2\pi, \quad L_\theta = 2\pi, \quad kL_{\dot{\theta}} = 0, \quad M_w = 0. \\ M_{\dot{w}} = 2\pi \left( a + \frac{1}{2} \right), \quad M_\theta = 2\pi \left( a + \frac{1}{2} \right), \quad kM_{\dot{\theta}} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

### C.2) Matrice amortissement et rigidité aérodynamiques :

$$\left\{ k = \frac{\omega b}{V}, \quad w = w_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{w} = i\omega w_0 e^{i\omega t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{\theta} = i\omega \theta_0 e^{i\omega t} \right\}. \quad (\text{B.9})$$

La substitution de ces expressions dans les équations de portance et de moment (B.5) donne :

$$\begin{cases} L = \rho V^2 \left( L_w w + L_{\dot{w}} \frac{b\dot{w}}{V} + L_\theta b\theta + L_{\dot{\theta}} \frac{b^2 \dot{\theta}}{V} \right), \\ M = \rho V^2 \left( M_w b w + M_{\dot{w}} \frac{b^2 \dot{w}}{V} + M_\theta b^2 \theta + M_{\dot{\theta}} \frac{b^3 \dot{\theta}}{V} \right) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Et ceci peut être écrit sous la forme de matrices :

$$\begin{Bmatrix} L \\ M \end{Bmatrix} = \rho V \begin{bmatrix} bL_w & b^2 L_{\dot{\theta}} \\ b^2 M_w & b^3 M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 \begin{bmatrix} L_w & bL_\theta \\ bM_w & b^2 M_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \rho V B \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 C \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Avec : [B] : matrice amortissement aérodynamique.

[C]: matrice d'amortissement aérodynamique.

### B.3) Fonction de Théodoroson

La fonction de Theodorson  $C(k) = F(k) + iG(k)$  où  $C(k)$  est une quantité complexe, exprimé comme une fonction de fréquence réduite comme ci-dessous Réf [31]:

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = \frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)}, \quad (\text{B.12})$$

Où les termes  $K_j(ik)$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) sont des fonctions de Bessel du deuxième genre modifiées et  $H_n^{(2)}(k)$  sont des fonctions de Hankel du deuxième genre. Bien qu'une explication des fonctions de Bessel et Hankel ne fasse pas objet de ce livre, ces fonctions sont incluses dans beaucoup de logiciels et elles sont faciles de calculer. Une expression approximatives de  $C(k)$  a été trouvé comme (Fung, 1969; Al Bisplinghoffet., 1996)

$$\begin{aligned} C(k) &= 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.045}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.30}{k}i}, \quad k \leq 0.5, \\ &= 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}i}, \quad k > 0.5. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

La figure (B.2) montre les parties réelles et imaginaires, l'amplitude et la phase, de la fonction de Theodorson dans une forme graphique. Notez que comme  $k$  augmente la magnitude diminue, et l'augmentation du décalage de la phase jusque à une valeur de  $k$  d'autour de 0.3 puis il se réduit encore. La représentation du plan complexe est montrée dans la figure 10.5, avec la fonction qui suit la courbe le sens des aiguilles d'une montre pour une fréquence croissante.

Pour l'aérodynamique quasi-stationnaire, donc  $k = 0$  ainsi  $F=1$  et  $G=0$ , donc le relevé non stationnaire peut être vu pour surveiller les valeurs quasi-stationnaires. Dans la limite où  $k \rightarrow \infty$  alors  $F=0.5$  et  $G=0$ , mais typiquement pour un avion de dimension avec  $k$  a une valeur maximale de l'ordre d'unité.

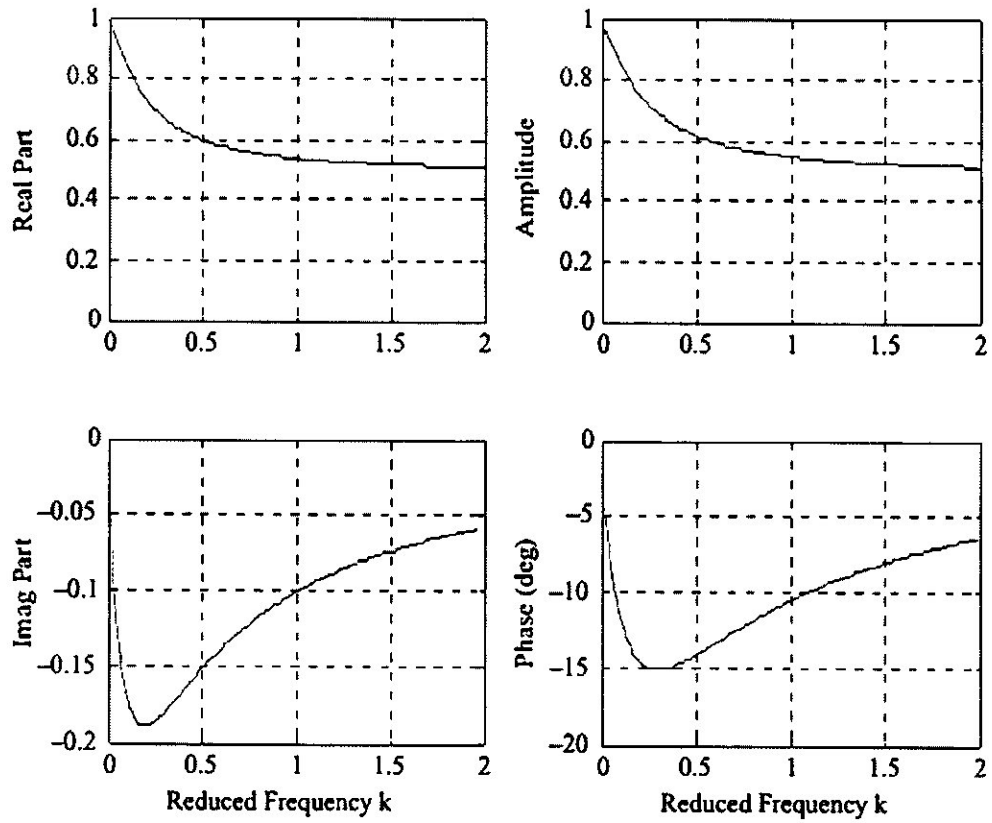


Fig. (B.2) La fonction de Théodorsen.

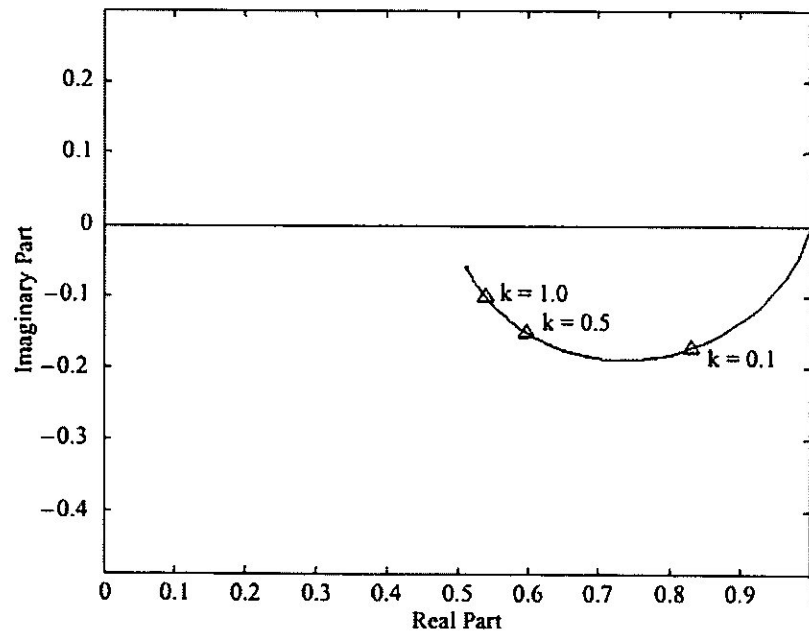


Fig. (B.3) Représentation du plan complexe de la fonction de Theodorsen.

## ANNEXE C

## C.1) Les fonction d'interpolation de l'aile de Goland (les premier six mode)

## Model

$$F1 = -1.8623e-6*x^5 + 9.632e-6*x^4 + 0.00045312*x^3 - 0.0061915*x^2 - 2.0034e-5*x + 2.3717e-6$$

$$G1 = -2.282e-006*x^4 - 5.8347e-005*x^3 + 7.8121e-005*x^2 + 0.0073241*x + 1.1597e-5$$

## Mode2

$$F2 = 7.9601e-6*x^4 + 0.00012631*x^3 - 0.0033552*x^2 + 0.00025855*x - 5.3972e-5$$

$$G2 = -7.3475e-7*x^5 - 4.4359e-5*x^4 + 0.00098698*x^3 - 0.00011126*x^2 - 0.062087*x - 7.9464e-6$$

## Mode3

$$F3 = 0.00056983*x^4 - 0.0074605*x^3 + 0.022891*x^2 + 0.0011758*x - 0.00042422$$

$$G3 = 3.7317e-5*x^6 - 0.00053254*x^5 + 0.00095198*x^4 + 0.0093441*x^3 - 0.0014797*x^2 - 0.10162*x - 8.9258e-5$$

## Mode4

$$F4 = 4.505e-5*x^5 + 0.0003243*x^4 - 0.010287*x^3 + 0.037791*x^2 - 0.0065992*x + 0.00092965$$

$$G4 = 7.1705e-5*x^6 - 0.0022626*x^5 + 0.022639*x^4 - 0.083795*x^3 + 0.050687*x^2 + 0.18429*x + 0.0018852$$

## Mode5

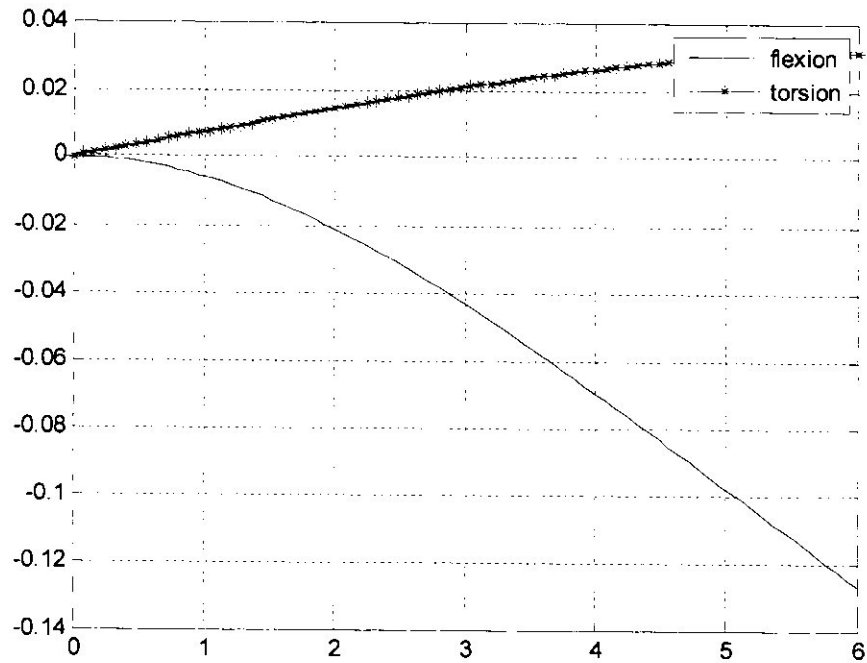
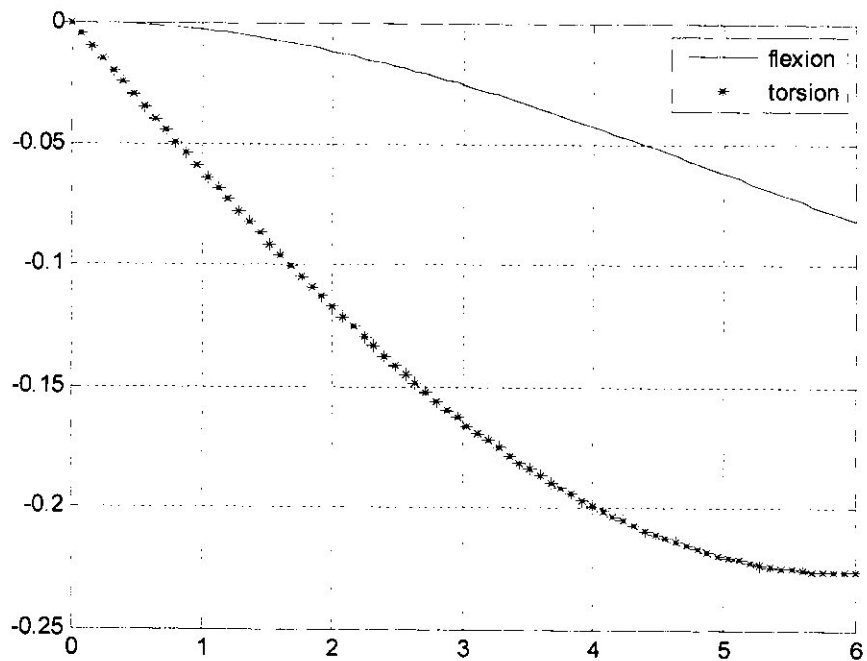
$$F5 = 0.0002067*x^5 - 0.0036477*x^4 + 0.022249*x^3 - 0.045481*x^2 + 0.002377*x - 7.4077e-5$$

$$G5 = 0.00013076*x^7 - 0.0021271*x^6 + 0.0092848*x^5 + 0.0079401*x^4 - 0.10406*x^3 + 0.051033*x^2 + 0.17336*x + 0.0015017$$

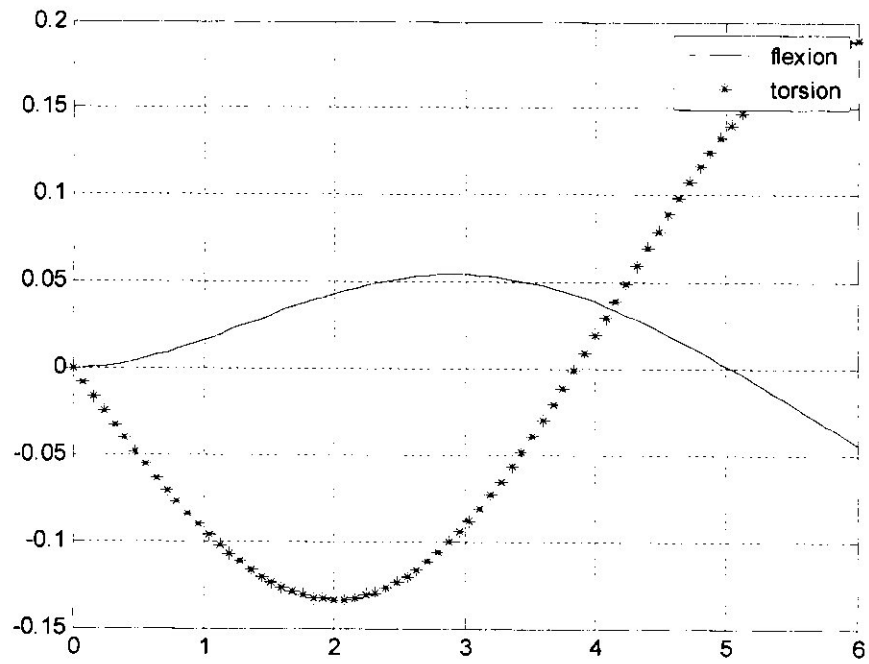
## Mode6

$$F6 = -8.5119e-5*x^6 + 0.0012364*x^5 - 0.0053503*x^4 + 0.004153*x^3 + 0.012518*x^2 - 0.0071536*x + 0.00089736$$

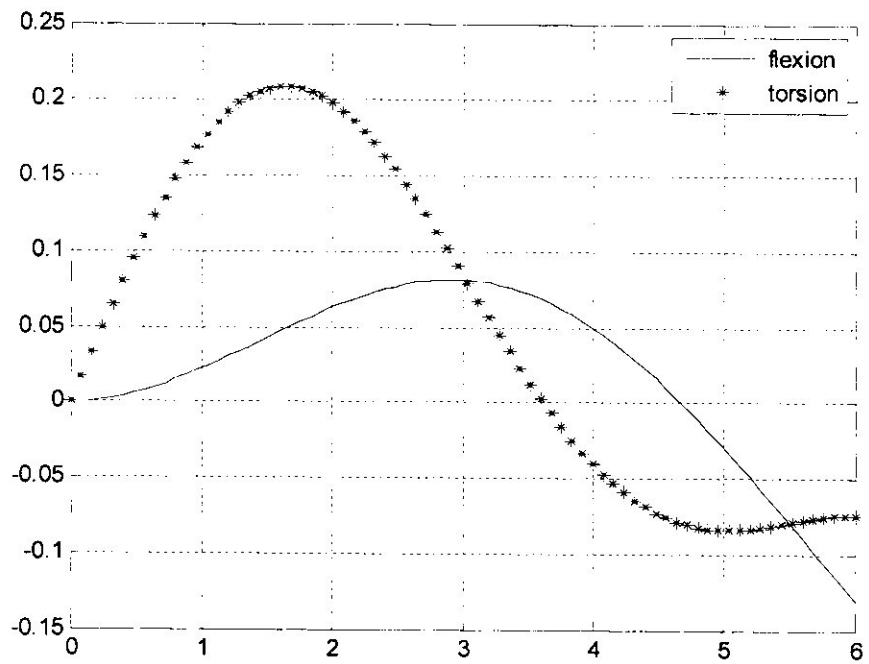
$$G6 = 3.8904e-5*x^9 - 0.001242*x^8 + 0.015747*x^7 - 0.10014*x^6 + 0.32851*x^5 - 0.50211*x^4 + 0.27754*x^3 - 0.23988*x^2 + 0.43798*x - 0.0016672$$

**C.2) Les présentations des modes propres de l'aile de Goland (les premier six mode)****Model :****Mode2 :**

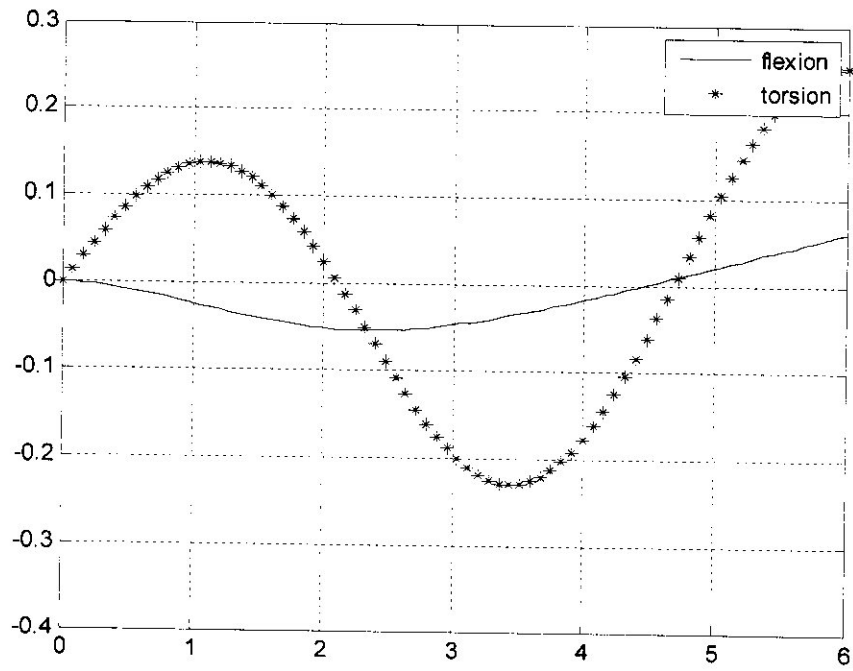
Mode3 :



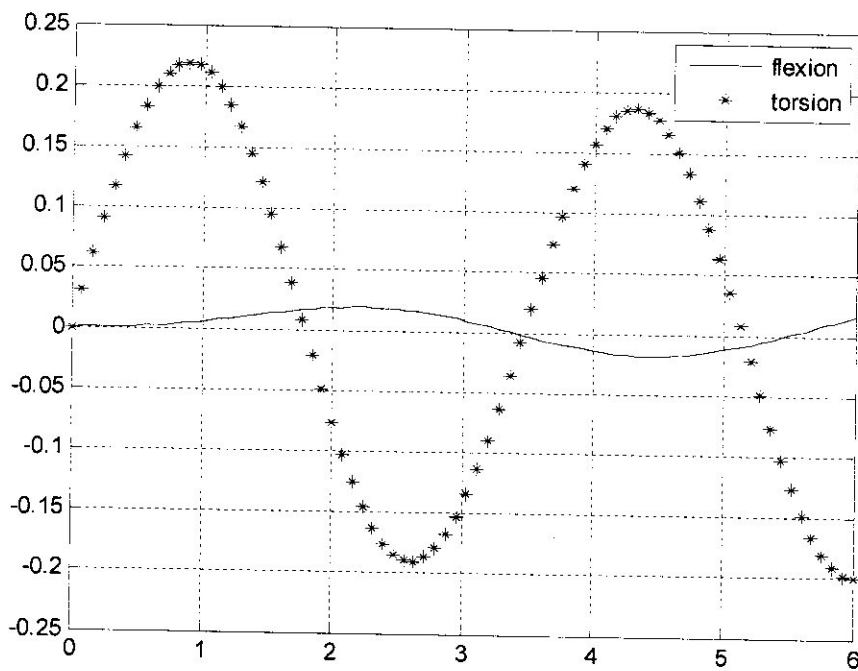
Mode4 :



## Mode5 :



## Mode6 :



## REFERENCES

- [01] M.Coquelet, "Aéroélasticité", école nationale supérieure d'ingénieurs de constructions aéronautiques Toulouse (1980).
- [02] Supaéro école Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace [http : www.supaero.fr](http://www.supaero.fr).
- [03] Megson, THG, "Aircraft Structures for Engineering Students", Butterworth Heinemann, Oxford (1999).
- [04] Benamia.I,'Etude dynamique des structures par la Méthode F.E.M''Mémoire Magister, Département d'Aéronautique, Université de Blida, (2007).
- [05] PHILIPPE DESTUYNDER "aéroélasticité et aéroacoustique" édition la voisier,(2008)
- [06] Grouas, J. "Dynamique des structures", ENSICA (1984).
- [07] Bahlouli,N, "Les Matériaux Composites», Cours de Mécanique, Strasbourg (2000).
- [08] Mahi, A, " Formulation Théorique et Résolution Numérique des équations du Flottement", Thèse de Magister, Université de Blida (1994).
- [09] Michel Cazenave, "Méthode des éléments finis" Dunod, Paris, (2010).
- [10] Roland FORTUNIER, , "Comportement M'mécanique des Matériaux" Ecole Nationale Supérieure des Mine
- [11] P. Liénard "Etude d'une méthode de mesure du frottement intérieur de revêtements plastiques travaillant en flexion", La recherche Aéronautique, no.20, 1951.
- [12] Dhatt, G et Touzou, G, " Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis", les presses de l'Université de Laval Québec Maloine S A éditeur paris (1984).
- [13] Michel Dupeux : "science des matériaux", IUT \_ 1er cycle/Licence \_ 2eme cycle/Master Écoles d'ingénieurs ,( 2005).
- [14] W. Swallow "An Improved Method of Damping Penel Vibrations", British Patent Specification 513, 171, (1939).
- [15] Fehrenburg, J.M, "Eléments pour le calcul des Structures D'avions", ENSAE, Toulouse (1982).
- [16] Georghiades, G.A, Guo, S.J and Banarjee, "Flutter Characteristics of Laminated Composite Wings", Journal of Aircraft, V. 33, n° 6 (1996), 1204-1205.
- [17] J.R. Banerjee, H.Su, C. Jayatunga "A dynamic stiffness element for free vibration analysis of composite beams and its application to aircraft wings ", Computers and Structures 86 (2008) 573–579



- 
- [18] A. Attaran, D.L. Majid, S. Basri, A.S. Mohd Rafie, E.J. Abdullah "Structural optimization of an aeroelastically tailored composite flat plate made of woven fiberglass/epoxy ", *Aerospace Science and Technology* 15 (2011) 393–401.
- [19] Prof. Dr.Ahmed Abd Al-Hussain Ali Mohammed Ismael Hamed "The Effect of Laminated Layers on the Flutter Speed of Composite Wing ", *Journal of Engineering*, V.18, Number 8 , August (2012).
- [20] Berthelot, J.M "Matériaux Composites", édition Masson, Paris (1992).
- [21] BARNES, W.M "Aerodynamics and flight dynamics", John Willey & Sons, (1979).
- [22] KUETHE, A.M and CHOU, C.Y "Foundations of aerodynamics", John Willey & Sons, (1986).
- [23] DAVIES, D.E "Calculation of unsteady generalized air forces on a thin wing oscillating harmonically in subsonic flow ", RAE report, A.R.C R, & M.N° 3049, August (1963).
- [24] UEDA, T. and DOWWELL, E.H., "Flutter analysis using nonlinear aerodynamic forces ", *journal of aircraft*, Vol.21, N°2, February (1984).
- [25] YOUNG.W. Kwon and HYOCHOONG Bang "The Finite Element Method using MATLAB", CRC Press, Boca Raton. London New York (1996).
- [26] Taylor, J. M, and Butter, R, "Optimum design and validation of flat Composite Beams subject to Frequency Constraints", *AIAA Journal*, V. 35, n° 3, (March 1997), 540-545.
- [27] Lillio, M, Butler, R, Guo, S, Banarjee, "Aeroelastic Optimization of Composite Wings using the Dynamic Stiffness Method", *The Aeronautical Journal* (February 1997).
- [28] Usik Lee and Injoon Jang "Spectral element model for axially bending-shear-torsion coupled composite Timoshenko beam ", *Composite structures* 92 P 2860 – 2870 (2010).
- [29] O. Ozdemir Ozgumus, M. O. Kaya "flexural–torsional coupled vibration analysis of a rotating closed section composite Timoshenko beam by using DTM " *AIAC* (September, 2007).
- [30] J.R. Banerjee "Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams ", *Composite structures* 51 P 381 – 388 (2001).
- [31] Y.C.Fung "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity"Dover publications, New York.(1993).
- [32] Jan R. Wright and Jonathan E. Cooper "Introduction to Aircraft Aeroelsticity and loads "British Library (2007).
- [33] Laurent stainier "Aéroélasticité" (aero-016), Notes de cours Année académique. (2006-2007).
-

- 
- [34] J. Li, R. Shen, H. Hua and X. Jin, Bending-torsional coupled vibration of axially loaded composite Timoshenko thin-walled beam with closed cross-section, *Composite Structures* 64, 23-35, (2004).
- [35] J. R. Wright and J. E. Cooper, 'Introduction to aircraft aeroelasticity and loads', John Wiley and Sons, (2007).
- [36] H. Haddadpour, R.D. Firouz-Abadi "Evaluation of quasi-steady aerodynamic modeling for flutter prediction of aircraft wings in incompressible flow ", *Thin-Walled Structures* 44 931-936 (2006).
- [37] H.SAHIR, O.BEN ABDELLAH " modelisation par la methode des elements finis du couplage flexion-torsion des poutres composites (poutres minces) ", 'Mémoire ingéniorat, Département d'Aéronautique, Université de Blida (2011).
-



Pawińskiego 5B, 02-106 Warsaw, Poland, PHONE (+48 22)8261281, FAX (+48 22)8269815

<http://www.ippt.gov.pl>

Warsaw, 16-09-2013

Yahia Cherif Mansour  
Institut d'Aéronautique  
et des Etudes Spatiales  
Université Saad DAHLAB de BLIDA  
Algeria  
e-mail: mansouryahiacherif@yahoo.com

### Confirmation of ICMM3 conference attendance

This confirms, on behalf of the Local Organizing Committee of the 3rd International Conference on Material Modelling held in Warsaw, 8th - 11th of September 2013, that Yahia Cherif Mansour participated in the ICMM3 conference.

It was our great pleasure to host Yahia Cherif Mansour during that international conference. Yahia Cherif Mansour presented poster entitled "A Classical Finite Element Beam for Free Vibration Analysis of a Model of Composite Light Aircrafts" with co-authors Professor Bennamia Ismail and Professor Badereddine Aimad-Eddine. Their contribution to the session "Aeronautic materials" is appreciated.

With kind regards,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Grzegorz Jurczak'.

Dr. Grzegorz Jurczak  
ICMM3 Secretary

INSTITUTE OF FUNDAMENTAL  
TECHNOLOGICAL RESEARCH  
POLISH ACADEMY OF SCIENCE  
Pawińskiego 5B, 02-106 Warsaw  
POLAND

# 3rd International Conference on Material Modelling (ICMM3- EMMC13)

September 8 - 11, 2013, Warsaw, Poland

## A CLASSICAL FINITE ELEMENT BEAM FOR FREE VIBRATION ANALYSIS OF A MODEL OF COMPOSITE LIGHT AIRCRAFTS

I.Bennamia, A.Badereddine, and M.Yahia Cherif

In the present work, the finite element method is adopted for modal analysis of a model of a light aircrafts in composite Timoshenko beams. We are interest in this study to flexural – torsion coupling due to the fiber orientation of the laminate composite materials. The plane is modeled by spatial beam elements, where the fuselage is a long beam of isotropic constant section, wings and empennage (horizontal and vertical) are modeled by of composite Timoshenko beams elements (bending-torsion coupling).

The equations of a composite Timoshenko beam in free natural vibration are:

$$EI\theta'' + kAG(h' - \theta) + K\psi'' - \rho I \ddot{\theta} = 0, \quad (1)$$

$$kAG(h'' - \theta') - m\ddot{h} = 0, \quad (2)$$

$$GJ\psi'' + K\theta'' - I_2 \ddot{\psi} = 0. \quad (3)$$

Where  $EI$ ,  $GJ$ ,  $K$  and  $kAG$ , respectively, the bending rigidity, torsional rigidity, bending-torsion coupling rigidity and shear rigidity of the composite beam;  $I$  the second moment of area of the beam cross section about the X-axis;  $m$  the mass per unit length =  $\rho A$ , where  $A$  the cross-sectional area;  $I_2$  the polar mass moment of inertia per unit length about the Y-axis; and  $\theta$  is the angle of rotation in radians of the cross-section about the X-axis due to bending alone, so that the total slope equals the sum of the slopes  $h'$  due to bending and due to shear deformation.

The beam has length = 190.5 mm, width = 12.7 mm and thickness = 3.18 mm. The rigidities and other properties are taken from Ref.4 as  $EI = 0.2865 \text{ Nm}^2$ ,  $GJ = 0.1891 \text{ Nm}^2$ ,  $K = 0.1143 \text{ Nm}^2$ ,  $m = 0.0544 \text{ kg/m}$ ,  $I_2 = 0.777 \times 10^{-6} \text{ kgm}$  and  $kAG = 6343.3 \text{ N}$ .

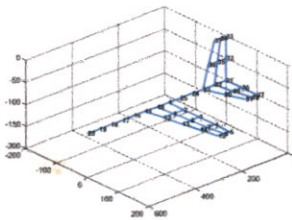


Fig. 1 model aircraft

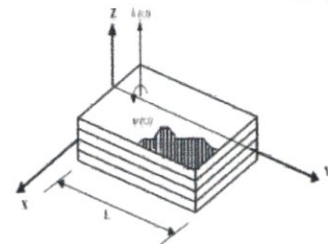


Fig. 2 Timoshenko beam composite model.

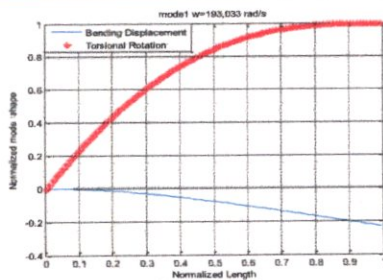


Fig. 3 : mode 1

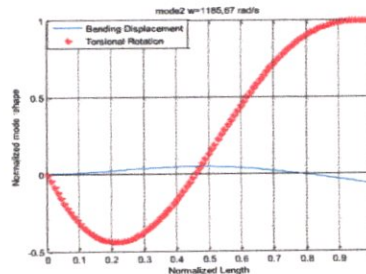


Fig. 4 : mode 2

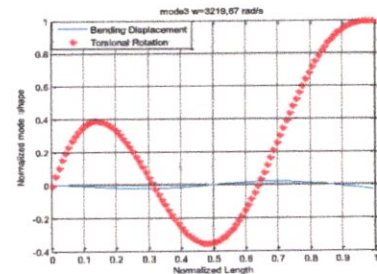


Fig. 5 : mode 3

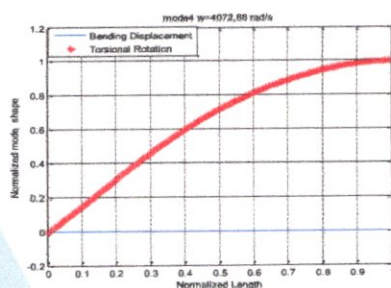


Fig. 6 : mode 4

	our result		Ref [1]	Ref [2]	Ref [3]
	(rad/s)	Hz	(rad/s)	(Hz/s)	(Hz/s)
1 <sup>st</sup> frequency	193.02	30.72	193.62	30.7471	30.747
2 <sup>nd</sup> frequency	1185.67	188.70	1210.9	189.779	189.779
3 <sup>rd</sup> frequency	3219.67	512.42	3376.5	518.791	518.791
4 <sup>th</sup> frequency	4072.88	648.22	4076.1	648.169	648.169

Table. 1 Four Eigen modes composite Timoshenko beam.

### Conclusion

In this study, we calculated the frequencies and modes shapes of composite beam and see the effect of the shear rigidity on frequencies. We use these results for other studies as an account speed flutter of the body is made of composite materials to show the effect of the direction of fiber on the speed flutter where when we change the direction of fiber change factors and thus change flutter speed, and through it shows how important the use of composite materials in aircraft, the spectrum of light and allow us to manipulating the characteristics of the metal composite got a rigid and light metal. A model of a light aircraft is developed to dynamic studies and Aeroelasticity.

Ref. 1 J.R. Banerjee "Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams ", Composite structures 51 P 381 – 388 (2001).

Ref. 2 O. Ozdemir Ozgumus, M. O. Kaya "flexural-torsional coupled vibration analysis of a rotating closed section composite Timoshenko beam by using DTM " AIAC (September, 2007).

Ref. 3 J. Li, R. Shen, H. Hua and X. Jin, Bending-torsional coupled vibration of axially loaded composite Timoshenko thin-walled beam with closed cross-section, Composite Structures 64, 23-35, 2004.

Ref. 4 Banerjee JR, Williams FW. Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications. J Sound Vib 1996;194:573-85.