

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE BLIDA 1**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

Département de Construction

**MEMOIRE**

**Pour l'obtention du diplôme**

**MASTER Aéronautique**

*Option : Propulsion Avion*

046/005  
EX2



*Elaboration d'un code de calcul pour l'étude des écoulements  
axisymétriques dans les tuyères.*

**Présenté par :**

❖ Mr. LAKHMES Idir

**Dirigé par :**

- Pr. T. REZOUG : **promoteur**
- Dr. R. AMRI : **Co-promoteur**

Blida Oct 2015

# Résumé

L'objectif principal du travail est de développer un code de calcul basé sur la résolution numérique des écoulements compressible non visqueux (équations d'Euler) dans des tuyères convergent-divergente. Nous avons appliqué le schéma de Maccormack pour résoudre le système d'équations d'Euler après avoir formulé mathématiquement le problème posé. Afin de montrer l'efficacité et la robustesse de notre code on a testé plusieurs types de tuyères (plane, conique, profilée)

# Abstract

The main aim of our work is to develop a computer code based on the numerical resolution of inviscid compressible flow (Euler equations) applied to the nozzle. We have applied the MacCormack scheme to solve the system of Euler equation after the formulation of mathematical problem in order to show the efficiency of the present simulation, several configurations of nozzles are tested.

## TABLE DES MATIERES

Résumé

Remerciement

Dédicaces

Table des matières

Liste des figures

Nomenclature

INTRODUCTION ..... 1

CHAPITRE I : Généralités sur les tuyères.....3-22

I.1. Définition de la tuyère supersonique :..... 3

I.2. Types de tuyères : ..... 3

I.2.1. Tuyères conventionnelles : ..... 3

    ➤ Tuyères Coniques : ..... 3

    ➤ Tuyère à contour profilé : ..... 4

    ➤ Tuyère à noyau centrale : ..... 5

I.2.2. Tuyères innovantes : ..... 6

    ➤ Tuyère à section variable : ..... 6

    ➤ Tuyère à chevrons (tuyères en dents de scie): ..... 6

    ➤ Tuyère orientable : ..... 7

    ➤ Tuyère à divergent déployable : ..... 7

    ➤ Tuyère double-galbe : ..... 8

I.3. L'APPROCHE QUASI-MONODIMENSIONNELLE : ..... 9

I.3.1. Rappel sur la Dynamique des gaz : ..... 9

I.3.1.a. Le rapport de température : ..... 10

I.3.1.b. Le rapport de pression : ..... 10

I.3.1.c. Le rapport de masse volumique : ..... 10

I.3.2. Les relations de rapport de section : ..... 11

I.3.2.a. Relation vitesse section (relation d'Hugoniot) : ..... 11

I.3.2.b. Rapport de section : ..... 12

|  |    |
|--|----|
| II.5.3. Les matrices de passage entre les variables conservatives et non conservatives : | 31 |
| II.6. Formulation caractéristique :  | 33 |
| II.7. Traitement des conditions aux limites :  | 36 |
| II.8. Conclusion :   | 38 |

### **CHAPITRE III : Méthode de résolutions numérique..... 39-47**

|   |    |
|---|----|
| III.1. Introduction :   | 39 |
| III.2. Schéma de Lax-Wendroff :   | 39 |
| III.3. Schéma de MacCormack :   | 40 |
| III.3.1. Schéma 1D monodimensionnel :   | 40 |
| III.3.2. Schéma avec la viscosité artificielle :                              | 41 |
| III.4. Schéma cas 2D bidimensionnel :   | 42 |
| III.5. Transformation des équations d'Euler en coordonnées généralisées :     | 43 |
| III.6. Analyse linéaire de la stabilité du schéma :                           | 44 |
| III.7. Traitement des conditions aux limites :                                | 45 |
| III.7.1. Traitement des nœuds à la paroi :                                    | 45 |
| III.7.2. Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère (tuyère axisymétrique) : | 46 |
| III.8. Génération de maillage :   | 46 |
| III.8.1. Méthode algébrique :   | 47 |

### **CHAPITRE IV : Code de calcul ..... 49-65**

|   |    |
|---|----|
| IV.1. Introduction :                              | 49 |
| IV.2. Présentation du code :                      | 49 |
| IV.2.1. Choix de la tuyère :                      | 50 |
| IV.2.2. Génération de Maillage :                  | 51 |
| IV.2.3. Choix du fluide :                         | 52 |
| IV.2.4. Condition initial et limite :             | 52 |
| IV.2.5. Lancer les calculs :                      | 53 |
| IV.2.6. Visualisation des résultats :             | 53 |
| IV.3. Test de validation :                        | 54 |
| IV.3.1. Test écoulement subsonique-supersonique : | 54 |



## Table des matières

|  |              |
|--|--------------|
| <b>CHAPITRE IV : Code de calcul .....</b>  | <b>49-65</b> |
| <b>Fig. IV.1 : Interface du code.....</b>  | <b>50</b>    |
| <b>Fig. IV.2 : box de choix de tuyère. ....</b>  | <b>50</b>    |
| <b>FigIV.3 :box de message d'indiction de non remplissage .....</b>                        | <b>51</b>    |
| <b>FigIV.4 : box de spécification du maillage .....</b>                                    | <b>51</b>    |
| <b>FigIV.5 :box de choix du fluide.....</b>  | <b>52</b>    |
| <b>FigIV.6 :box de spécification des condition .....</b>                                   | <b>53</b>    |
| <b>FigIV. 7 :box de lacement de calcul.....</b>  | <b>53</b>    |
| <b>Fig IV.8 :box de visualisation des resultats.....</b>                                   | <b>53</b>    |
| <b>figIV.9 : maillage de tuyere cv-dv .....</b>  | <b>54</b>    |
| <b>figIV.10 : graphes et conteurs de T ,masse volumique et P .....</b>                     | <b>55</b>    |
| <b>FigIV.11 :graphes conteurs de mach et vitesse.....</b>                                  | <b>56</b>    |
| <b>figIV.13 (a)graphes de résultats code (b)graphes référence 13 .....</b>                 | <b>57</b>    |
| <b>figIV .14:graphes et conteurs de mach ,vitesse avec onde de choc .....</b>              | <b>58</b>    |
| <b>FigIV.15 :Maillage tuyère plane .....</b>   | <b>59</b>    |
| <b>figIV.16 :graphes et conteurs de T ,masse volumique et P pour tuyère plane.....</b>     | <b>59</b>    |
| <b>figIV.17. graphes et conteurs de mach ,vitesse pour tuyère plane.....</b>               | <b>60</b>    |
| <b>figIV.18 :maillage tuyère conique.....</b>  | <b>61</b>    |
| <b>figIV.19 : graphes et conteurs de T ,masse volumique et P pour tuyère conique .....</b> | <b>62</b>    |
| <b>FigIV.20 : graphes et conteurs de mach ,vitesse pour tuyère conique .....</b>           | <b>62</b>    |
| <b>FigIV.21 :Maillage tuyère profilée.....</b>   | <b>63</b>    |
| <b>figIV.22. : graphes et conteurs de T ,masse volumique et P pour tuyère.....</b>         | <b>64</b>    |
| <b>figIV.23:. graphes et conteurs de mach ,vitesse pour tuyère profilée.....</b>           | <b>64</b>    |
| <b>figIV.24 :graphes des résultats avec cp constant et cp variable pour O2,CO2 .....</b>   | <b>65</b>    |

## LISTE DES FIGURES

|  |    |
|--|----|
| <b>Fig. I.1 : La tuyère De-Laval</b> .....   | 3  |
| <b>Fig. I.2 : Tuyère Conique</b> .....   | 4  |
| <b>Fig. I.3 : Tuyère à contour profilé</b> .....   | 4  |
| <b>Fig. I.4 : Tuyère annulaire</b> .....   | 5  |
| <b>Fig. I.5 : Tuyère à noyau centrale</b> .....  | 5  |
| <b>Fig. I.6 : Tuyère à section variable</b> .....  | 6  |
| <b>Fig. I.7 : Tuyère à chevrons</b> .....  | 7  |
| <b>Fig. I.8 : Tuyère orientable</b> .....  | 7  |
| <b>Fig. I.9 : Tuyère déployable</b> .....  | 8  |
| <b>Fig. I.10 : Tuyère double galbe</b> .....   | 8  |
| <b>Fig. I.10 : La différence entre l'approche <i>Monodimensionnel</i></b> .....              | 9  |
| <b>Fig. I.11 : Relations vitesse-section</b> .....   | 12 |
| <b>Fig. I.12 : Canal convergent divergent</b> .....  | 12 |
| <b>Fig. I.13 : Schéma de la tuyère supersonique</b> .....                                    | 13 |
| <b>Fig. I.14 : Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique</b> .....               | 14 |
| <b>Fig. I.15 : Régime de sur-détente en 1D</b> .....   | 15 |
| <b>Fig. I.16 : Organisation de l'écoulement à l'adaptation</b> .....                         | 17 |
| <b>Fig. I.17 : Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente</b> .....              | 18 |
| <b>Fig. I.18 : Profil de pression pariétale le long de la tuyère</b> .....                   | 18 |
| <b>Fig. I.19 : Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche limite</b> ..... | 19 |
| <b>Fig. I.20 : Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite</b> .....   | 20 |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Fig. IV.1 : Interface du code.....</b>  | <b>50</b> |
| <b>Fig. IV.2 : box de choix de tuyère. ....</b>  | <b>50</b> |
| <b>FigIV.3 :box de message d'indiction de non remplissage.....</b>                         | <b>51</b> |
| <b>FigIV.4 : box de spécification du maillage .....</b>                                    | <b>51</b> |
| <b>FigIV.5 :box de choix du fluide.....</b>  | <b>52</b> |
| <b>FigIV.6 :box de spécification des condition .....</b>                                   | <b>53</b> |
| <b>FigIV. 7 :box de lacement de calcul.....</b>  | <b>53</b> |
| <b>Fig IV.8 :box de visualisation des resultats.....</b>                                   | <b>53</b> |
| <b>figIV.9 : maillage de tuyere cv-dv .....</b>  | <b>54</b> |
| <b>figIV.10 : graphes et contours de T ,masse volumique et P.....</b>                      | <b>55</b> |
| <b>FigIV.11 :graphes contours de mach et vitesse.....</b>                                  | <b>56</b> |
| <b>figIV.13 (a)graphes de résultats code (b)graphes référence 13 .....</b>                 | <b>57</b> |
| <b>figIV .14:graphes et contours de mach ,vitesse avec onde de choc .....</b>              | <b>58</b> |
| <b>FigIV.15 :Maillage tuyère plane .....</b>   | <b>59</b> |
| <b>figIV.16 :graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère plane .....</b>    | <b>59</b> |
| <b>figIV.17. graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère plane.....</b>               | <b>60</b> |
| <b>figIV.18 :maillage tuyère conique .....</b>   | <b>61</b> |
| <b>figIV.19 : graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère conique .....</b> | <b>62</b> |
| <b>FigIV.20 : graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère conique .....</b>           | <b>62</b> |
| <b>FigIV.21 :Maillage tuyère profilée.....</b>   | <b>63</b> |
| <b>figIV.22. : graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère.....</b>         | <b>64</b> |
| <b>figIV.23:. graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère profilée .....</b>          | <b>64</b> |
| <b>figIV.24 :graphes des résultats avec cp constant et cp variable pour O2,CO2 .....</b>   | <b>65</b> |

## NOMENCLATURE

- C : vitesse du son
- A : matrice jacobienne suivant x dans les variables conservatives
- $\tilde{A}$  : matrice jacobienne suivant x dans les variables primitives
- B : matrice jacobienne suivant y dans les variables conservatives
- $\tilde{B}$  : matrice jacobienne suivant y dans les variables primitive
- $C_v$  : chaleur massique à volume constant
- e : énergie interne
- E : énergie spécifique totale par unité de volume
- F : flux convectif suivant la direction x
- G : flux convectif selon la direction y
- J : jacobienne de transformation de système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées généralisées
- L : longueur caractéristique ou matrice de passage entre les variables primitives et caractéristiques
- p : pression statique
- P : matrice de passage entre les variables conservatives et caractéristiques
- R : constante universelle des gaz parfaits
- T : Température
- t : temps
- U : vecteur de quantités conservatives
- u : vitesse axial
- v : vitesse radial
- V : vecteur des variables primitives
- W : vecteur de variables caractéristiques
- (x, y) : coordonnées cartésiennes
- ( $\xi, \eta$ ) : coordonnées généralisées
- $\gamma$  : rapport des chaleurs spécifiques
- $\rho$  : masse volumique

## INTRODUCTION GENERALE

Lorsque la vitesse de l'écoulement dépasse le nombre de Mach de l'ordre 0.3, l'approximation du fluide incompressible ne tient plus. On a alors recours aux équations d'Euler ou de Navier stocks compressible pour la modélisation de ces écoulements qui représentent la majorité des écoulements en aéronautique.

Deux conséquences importantes de l'écoulement compressible sont : l'étranglement où l'écoulement est limité par la condition sonique pour le cas d'un écoulement interne, et l'onde de choc qui introduit des discontinuités dans les propriétés de fluide qui sont très irréversibles.

Étant donné que la variation de densité ne peut pas être négligée, suivant l'équation d'état, les variations de T et P doivent être considérer. Il y aura quatre variables indépendantes, notamment pression, température, densité et vitesse de l'écoulement. Deux nouvelles variables, température et densité, sont introduites et deux nouvelles équations doivent être utilisées pour une solution complète. Ce sont l'équation d'énergie et l'équation d'état. Dans ce qui suit, nous allons faire l'approximation d'un gaz parfait.

L'étude des écoulements compressibles est indispensable dans le cas de l'aérodynamique interne et externe.

En mécanique des fluides les équations à résoudre sont dans le cas général des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Les outils numériques utilisés (schémas numériques temporels et/ou spatiaux, type de discrétisation) pour résoudre ce type d'équation sont très différents. Il est donc nécessaire de choisir l'algorithme de résolution en fonction du type d'équation à résoudre.

Dans le cadre du présent travail, nous nous sommes attachés à élaborer un code de calcul qui va simuler l'écoulement dans une tuyère convergente-divergente. Et de visualiser les résultats sur des graphes et conteurs.

### ***Plan de mémoire :***

Le mémoire est divisé en quatre chapitres.

Le ***premier chapitre*** présente une synthèse des connaissances actuelles sur les phénomènes physiques rencontrés dans les tuyères supersoniques. Après la présentation de la tuyère supersonique, le fonctionnement théorique et réel avec les différents régimes d'écoulement sont discutés. Puis les différents profils des tuyères conventionnelles sont exposés.

Le ***deuxième chapitre*** est consacré à l'établissement du modèle mathématique qui sert à gouverner le phénomène physique d'un écoulement compressible.

La méthode de résolution numérique du système d'équations gouvernent le phénomène physique sera développée dans ***le chapitre trois***.

Enfin, ***le dernier chapitre*** sera réservé à la présentation du code de calcul, avec des tests de validation et quelque application

**I.1. Définition de la tuyère supersonique :**

Une tuyère supersonique est une conduite de forme convergente-divergente qui a un profil spécifiquement étudié. Elle met en communication une chambre contenant un gaz comprimé avec un milieu extérieur d'évacuation. La chambre et le milieu extérieur sont à des pressions différentes pour permettre le mouvement du gaz. La tuyère supersonique a pour rôle d'accélérer les gaz d'une vitesse faible à l'entrée du convergent à une vitesse sonique au col puis à une vitesse supersonique à la sortie du divergent de la tuyère. La forme de la tuyère permet de détendre les gaz. L'opération de détente transforme l'énergie potentielle du gaz en énergie cinétique. Tout le long de la tuyère, la vitesse du gaz augmente, cependant que sa pression et sa température diminuent. La tuyère supersonique est appelée *tuyère De-Laval*, elle est représentée dans la figure I.1 [1], [2].

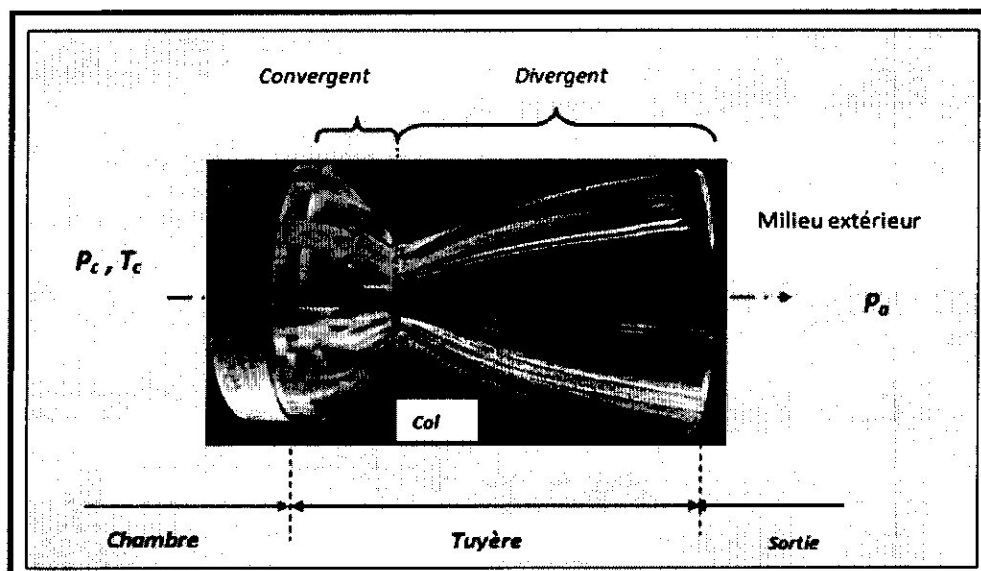


Fig. I.1 : La tuyère De-Laval [3].

**I.2. Types de tuyères :****I.2.1. Tuyères conventionnelles :****➤ Tuyères Coniques :**

Les tuyères à profils coniques sont utilisées particulièrement en raison de la simplicité de la conception et de la réalisation de leur divergent. La vitesse de sortie de ce type de tuyère est essentiellement égale à la valeur correspondante à un rapport de détente unidimensionnel, à l'exception de la direction de l'écoulement à la sortie qui n'est pas



complètement axial, d'où une perte de performances due à la divergence de l'écoulement. L'angle de divergence se situe entre 15 et 25 degrés. Ce type de profil simple équipe principalement les missiles et les propulseurs à poudre. Un exemple de tuyère conique est la tuyère de la fusée historique allemande V-2

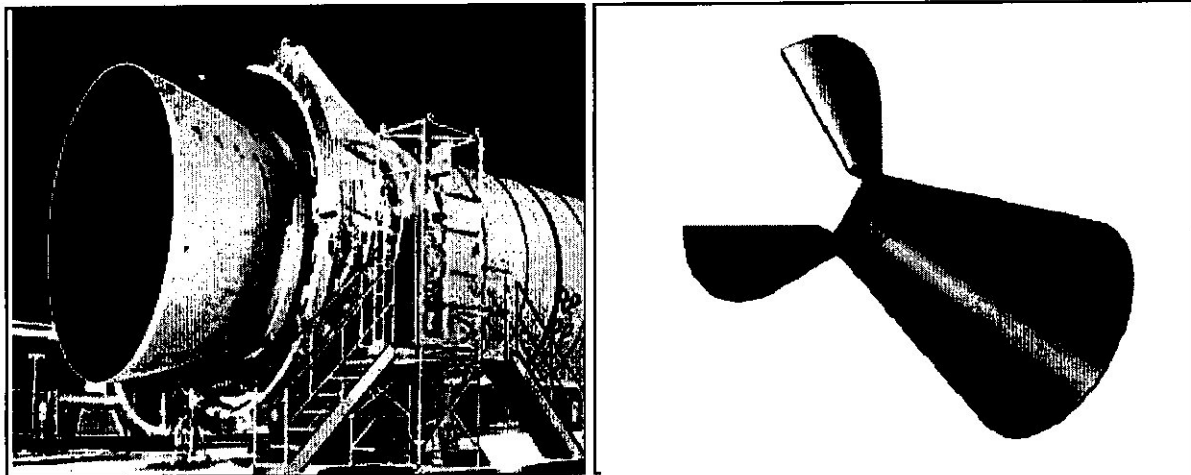


Fig. I.2 : Tuyère Conique.

➤ Tuyère à contour profilé :

Comme on vient de le voir, les tuyères coniques engendrent une perte de poussée considérable à cause de la divergence de l'écoulement à la sortie, donc pour remédier à ce problème ; il faut tourner le contour du divergent vers l'intérieur pour ramener l'écoulement à une direction axiale et aller avec la partie divergente près du col à des valeurs de divergence relativement importantes pour compenser la détente manquée en faisant incliner le profil vers l'intérieur c'est justement le but de cette conception.

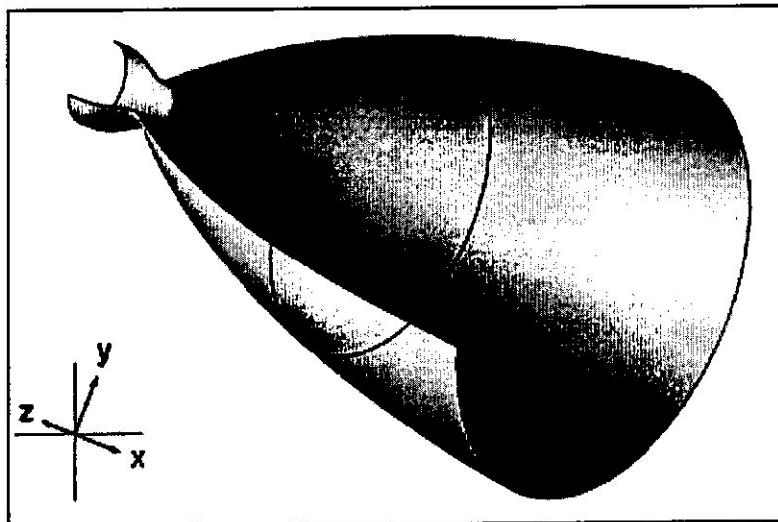


Fig. I.3 : Tuyère à contour profilé.

➤ **Tuyère annulaire :**

Dans les deux types de tuyères citées précédemment, les formes de sections au col et à la sortie sont circulaires et normales à l'axe. La tuyère annulaire par ses contours diffère en présentant des sections au col en forme d'anneau. Les gaz de combustion en aval de ce col se détendent au sein de ces anneaux et le long de la section divergente.

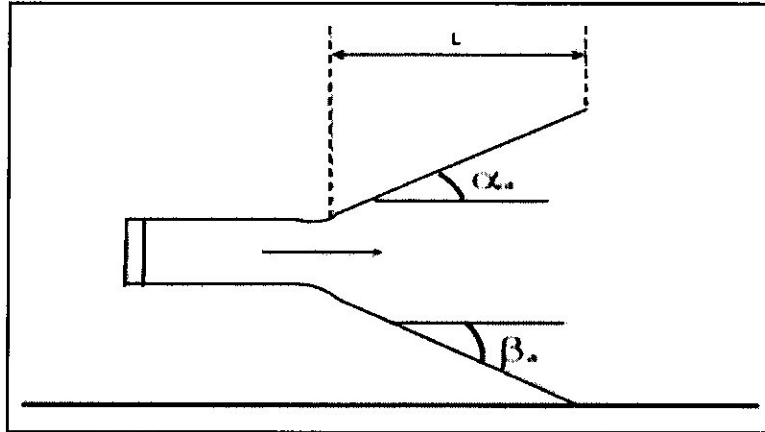


Fig. I.4 : Tuyère annulaire.

➤ **Tuyère à noyau centrale :**

Tuyère comportant un corps central qui obture plus ou moins l'orifice de la sortie en vue d'améliorer les performances en modifiant le débit et la forme du jet. Le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du corps central dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion  $P_t$  jusqu'à la pression ambiante  $P_a$ . La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-divergente.

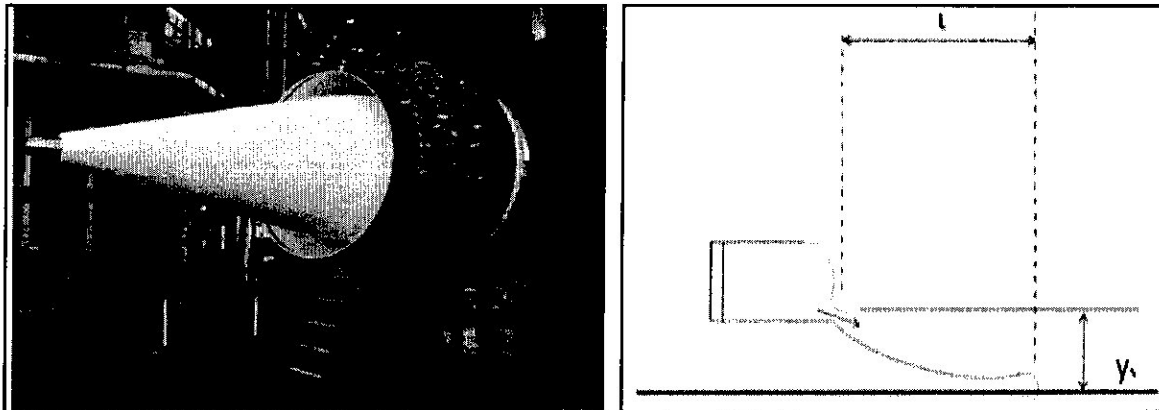


Fig. I.5 : Tuyère à noyau centrale.

Les tuyères conventionnelles limitent les performances globales du moteur (pendant la montée du lanceur) à cause de leurs géométries fixes. Des pertes de performances significatives sont introduites pendant le fonctionnement de la tuyère en hors adaptation, quand l'écoulement est sur détendu, pendant le fonctionnement en basses altitudes avec une pression ambiante supérieure à la pression sortie tuyère ou sous détendu (haute altitude) avec une pression ambiante inférieure à la pression sortie tuyère.

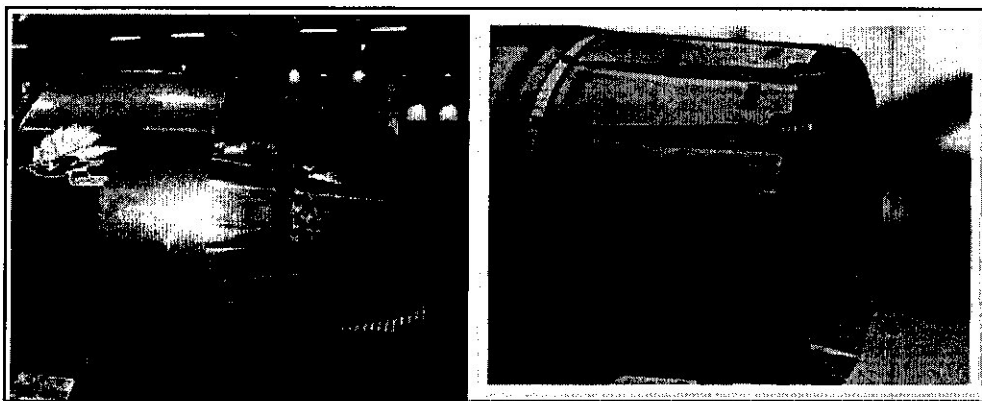
Lors du fonctionnement hors adaptation, que ça soit en sur-détente ou en sous-détente, l'écoulement de sortie induit des pertes de performances.

### I.2.2. Tuyères innovantes :

#### ➤ **Tuyère à section variable :**

La sortie de la tuyère est à section variable et constituée d'une multitude de volets qui, en se rapprochant ou en s'écartant, modifient le diamètre de la tuyère afin qu'elle soit "adaptée".

Afin de se rapprocher le plus possible de la forme circulaire, les demi-volets sont réalisés par une multitude de petits volets, s'emboîtant les uns dans les autres. En général la commande de position est assurée par un anneau qui est tiré ou poussé (fermeture – ouverture) par des vérins répartis à la périphérie du canal de post-combustion. La pression et la vitesse du jet maintiennent plaqués les volets sur l'anneau de commande. Un ergot de position interdit aux volets de descendre lorsque le moteur est arrêté.



**Fig. I.6 : Tuyère à section variable.**

#### ➤ **Tuyère à chevrons (tuyères en dents de scie):**

C'est une tuyère pour les turboréacteurs de type double flux d'air séparés, comportant :

- Une paroi interne à l'intérieur de laquelle circule un flux d'air primaire (FP) et qui comporte, à l'extrémité externe, des chevrons
- Une paroi externe entourant au moins partiellement la paroi interne et le long de laquelle s'écoule un flux d'air secondaire (FS), la paroi externe étant mobile le long de la paroi interne.

L'invention trouve des applications dans le domaine de l'aéronautique et, en particulier, dans le domaine de la réduction des nuisances sonores extérieures produites par les turboréacteurs d'un aéronef notamment lors de la phase de décollage.



Fig. I.7 : Tuyère à chevrons.

➤ **Tuyère orientable :**

C'est une tuyère articulée autour d'un ou deux axes comportant une partie fixe d'une part et de l'autre une partie pivotante et des vérins de commande permettant de déplacer la partie pivotante avec déformation de la structure annulaire élastique ce qui permet d'orienter l'axe de poussé.

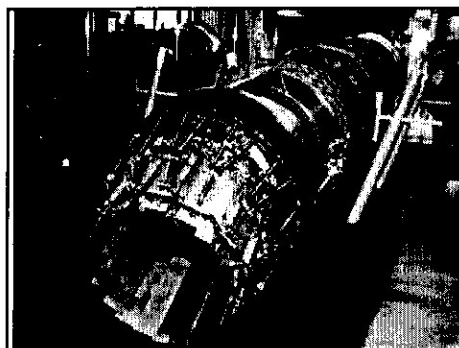


Fig. I.8 : Tuyère orientable.

➤ **Tuyère à divergent déployable :**

Cette tuyère présente un axe longitudinal et comprend une première partie définissant un col de tuyère et un premier tronçon de divergent fixe, au moins un deuxième tronçon de

divergent déployable de section supérieure à celle du premier tronçon et un mécanisme de déploiement du deuxième tronçon disposé à l'extérieur des premier et deuxième tronçons de divergent. Le déploiement de la partie déployable du divergent s'effectue de façon automatique à partir d'une commande électrique ou hydraulique, voire pneumatique.

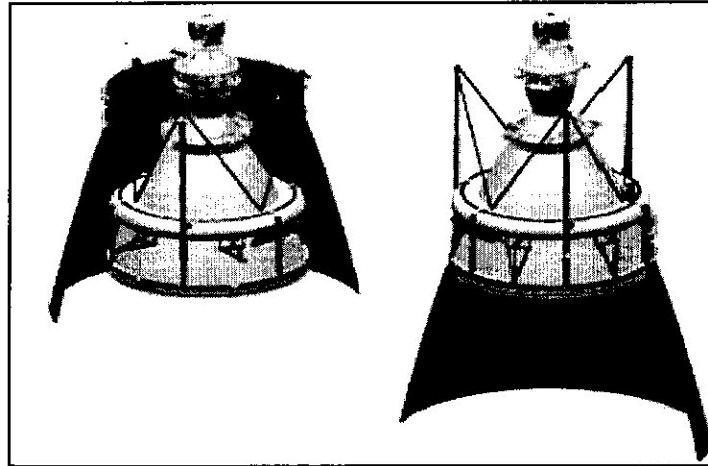


Fig. I.9 : Tuyère déployable.

➤ **Tuyère double-galbe :**

Le principal objectif d'une tuyère double-galbe est le gain de performances par principe d'auto-adaptation en fonction de l'altitude.

En effet, ce système a pour avantage d'avoir une auto adaptation de l'écoulement pour deux régimes de fonctionnement (à basse et à haute altitude) sans activation mécanique. Le principe est théoriquement assez simple mais les efforts structurels mis en jeu peuvent être importants. Il en découle une étude approfondie de ce concept afin de garantir un fonctionnement optimal de ce système.

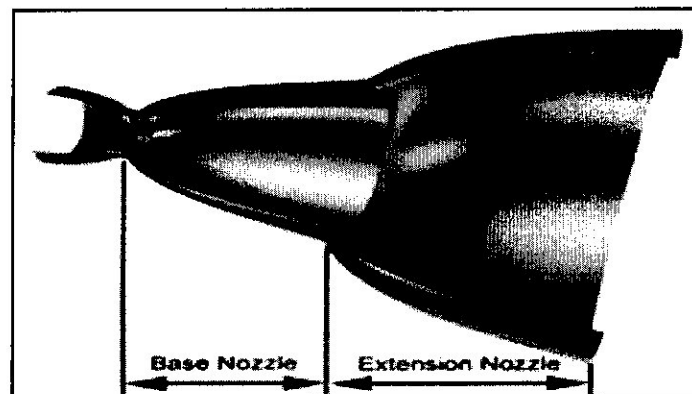
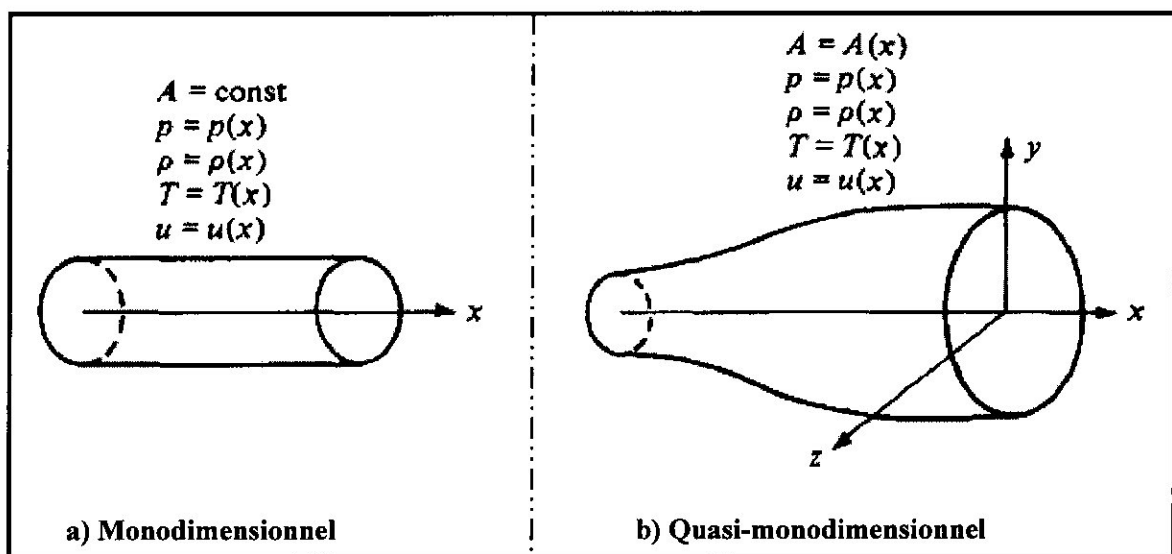


Fig. I.10 : Tuyère double galbe.

I.3.L'APPROCHE QUASI-MONODIMENSIONNELLE :

L'approche quasi monodimensionnelle est une approximation de l'écoulement dans une surface variable du tube de courant (Fig. I.10.b). En trois dimensions la solution exacte doit être trouvée avec des méthodes numériques comme : les différences finies, les volumes finis et la méthode des caractéristiques, toutefois, pour une large variété des problèmes d'ingénierie, comme l'étude de l'écoulement dans les souffleries ou dans les moteurs fusés, les résultats quasi-monodimensionnel sont fréquemment suffisant. L'approche quasi-monodimensionnelle permet à la section du tube de courant de varier contrairement à l'approche monodimensionnelle (Fig. I.10.a), en même temps, on continue de supposer que toutes les propriétés de l'écoulement sont uniformes à travers une section donnée, d'où ces propriétés sont fonction seulement de "x" et du temps "t" si l'écoulement est non permanent.

Chaque écoulement où  $A = A(x)$ ,  $P = P(x)$ ,  $\rho = \rho(x)$  et  $V = u = u(x)$  en plus d'être permanent (pas de variation par rapport au temps) est définie comme un écoulement quasi monodimensionnel.



**Fig. I.10 : La différence entre l'approche *Monodimensionnel* et l'approche *Quasi-monodimensionnel*.**

I.3.1. Rappel sur la Dynamique des gaz :

Pour calculer analytiquement les différents paramètres de l'écoulement dans n'importe quelle section du canal on fait appel aux relations de la dynamique des gaz avec l'approche quasi-monodimensionnelle.

I.3.1.a. Le rapport de température :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad (\text{I.1})$$

Avec :

 $T_0$ : Température d'arrêt $T$ : Température statique $M$ : nombre de mach

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

 $c_p$ : Capacité calorifique a pression constante $c_v$ : Capacité calorifique a volume constantI.3.1.b. Le rapport de pression :

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{I.2})$$

Avec :

 $P_0$ : Pression totale $P$ : pression statiqueI.3.1.c. Le rapport de masse volumique :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{I.3})$$

Avec :

 $\rho_0$ : Masse volumique de référence $\rho$ : Masse volumique

Notes :

- les grandeurs totales ( $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $T_0$ ) représentent les paramètres de l'écoulement quand il est ramené à l'arrêt d'une manière isentropique.



- On note les paramètres à la vitesse du son par un Astérix  $M^*=1$ ,  $U^*=a^*$ ,  $A_t=A^*$  et les relations ci-dessus deviennent alors:

❖ **Le rapport de température :**

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (I.4)$$

Où :

$T^*$ : La température statique à la vitesse du son

❖ **Le rapport de pression :**

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (I.5)$$

Où :

$P^*$ : La pression statique à la vitesse du son

❖ **Le rapport de masse volumique :**

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (I.6)$$

Où :

$\rho^*$ : La masse volumique à la vitesse du son

**I.3.2. Les relations de rapport de section :**

**I.3.2.a. Relation vitesse section (relation d'Hugoniot) :**

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dU}{U} \quad (I.7)$$

Cette équation nous montre des résultats très importants :

- Si  $0 \leq M \leq 0.3$  , ça correspond à un écoulement incompressible.
- Si  $0.3 \leq M < 1$  (écoulement subsonique) : une augmentation de la vitesse ( $dU > 0$ ) est associée à une diminution de la section ( $dA < 0$ ) et vice-versa (voir fig I.11.a)
- Si  $M > 1$  (écoulement supersonique): une augmentation de la vitesse s'accompagne d'une augmentation de section et vice-versa (fig I.11. b).
- Si  $M=1$  (écoulement sonique) : l'équation (I.7) donne  $\frac{dA}{A} = 0$  , qui mathématiquement correspond à la section minimale ou maximale. La section minimale est la seule qui a une signification physique.

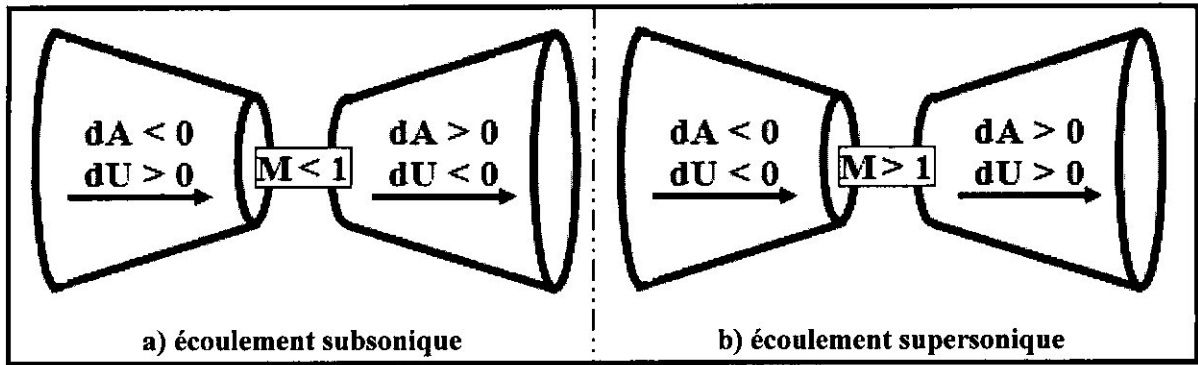


Fig. I.11 : Relations vitesse-section.

Les résultats ci-dessus montrent clairement que pour qu'un gaz se détend d'une manière isentropique à partir d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique, il doit s'écouler à travers un canal convergent-divergent comme le montre la figure (I.12). En outre, la section minimale qui sépare les sections convergentes et divergentes doit avoir un écoulement sonique, cette section est appelée col.

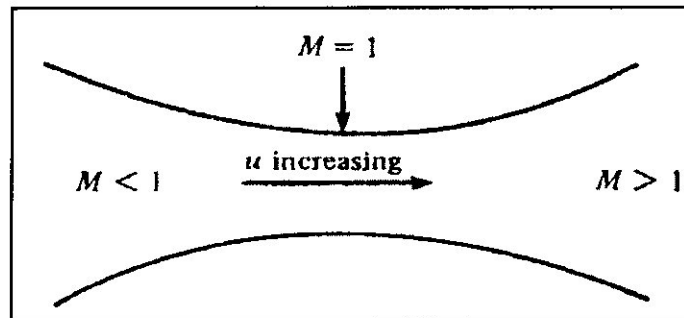


Fig. I.12 : Canal convergent divergent.

**I.3.2.b. Rapport de section :**

La relation (I.8) est appelée relation section-nombre de Mach, elle présente un résultat remarquable. En effet, elle montre que  $M = f(A/A^*)$ , c'est-à-dire que le nombre de Mach dans n'importe quelle position de la tuyère est fonction du rapport de la section locale sur celle du col.

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (I.8)$$

Tel que :

$A$  : Section du canal

$A^*$  : Section du canal où  $M=1$

### I.3.3. Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique :

L'approche *monodimensionnelle* des écoulements des gaz *caloriquement parfait* et *non-visqueux* permet de décrire *les différents régimes* de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté par la figure I.13, constitué d'une tuyère De-Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice  $P_c$  *supposée fixe*. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique  $P_a$  est *variable*.

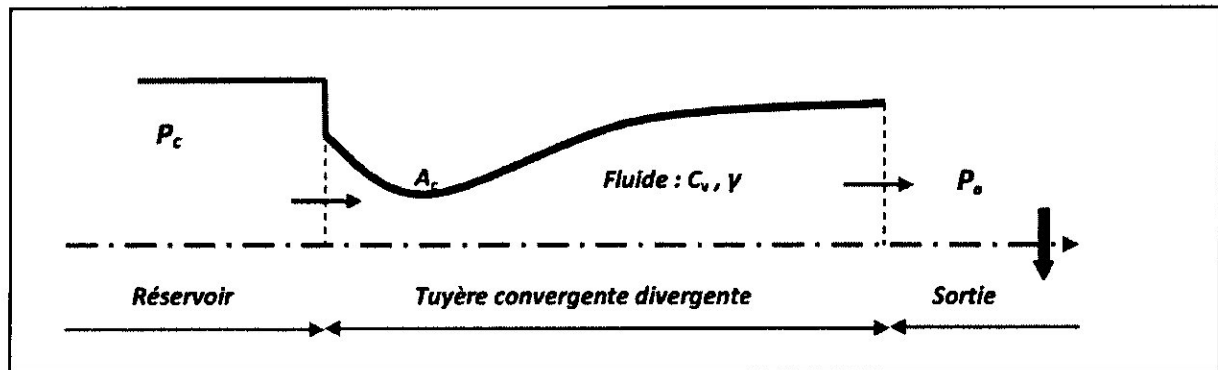


Fig. I.13 : Schéma de la tuyère supersonique.

Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression de la chambre, le fluide est entièrement au repos (Fig. I.14, *courbe* (a)). Si la pression du milieu ambiant  $P_a$  *diminue progressivement* au-dessous de la pression  $P_c$  supposée constante, un débit d'écoulement prend naissance et *cinq régimes* particuliers d'écoulements sont *distingués* [4], [5], [6].

#### I.3.3.a. Écoulement subsonique :

Au début de l'écoulement le débit augmente avec la diminution de la pression ambiante. L'écoulement est subsonique dans toute la tuyère [Fig. I.14, courbes (b) et (c)]. Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col. Dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression du milieu extérieur. La pression est donc minimale dans la section du col où la vitesse passe par une valeur maximale.

#### I.3.3.b. Écoulement sonique adapté :

Si  $P_a$  continue à diminuer jusqu'à une valeur caractéristique notée  $P_{ac1}$ , l'écoulement au col devient sonique et le débit atteint une valeur limite maximale [Fig. I.14, courbe (d)].

L'écoulement est dit sonique adapté. Partout encore, sauf au col, l'écoulement est subsonique. Au col de la tuyère, la pression atteint la valeur critique  $P^*$  et la vitesse atteint la vitesse du son. Le col est amorcé.

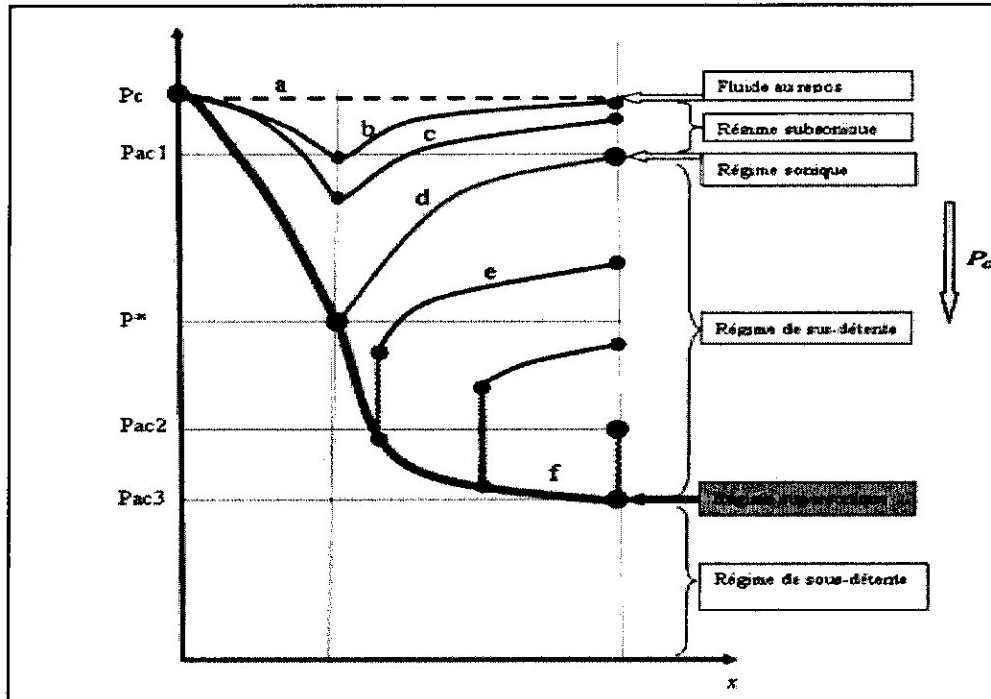


Fig. I.14 : Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique. Evolution de la pression le long de la tuyère.

**I.3.3.c. Ecoulement sonique non adapté :**

Si  $P_a$  diminue au-dessous de  $P_{ac1}$ , le col reste toujours sonique. Dans le divergent apparaît un phénomène irréversible appelé onde de choc, l'écoulement est dit sonique non adapté ou régime de sur-détente. L'évolution de l'écoulement du gaz est représentée par la courbe (e) de la figure I.14.

Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc stationnaire et normale à l'axe de la tuyère divise l'écoulement en deux parties (Fig. I.15). Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. A travers l'onde de choc, la pression augmente brusquement, et la vitesse diminue brusquement. L'onde de choc se place de telle façon à ce que la recompression qui s'effectue ramène la pression de la sortie à la pression ambiante  $P_a$ . Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) la pression remonte et la vitesse diminue progressivement, l'écoulement est à nouveau subsonique.

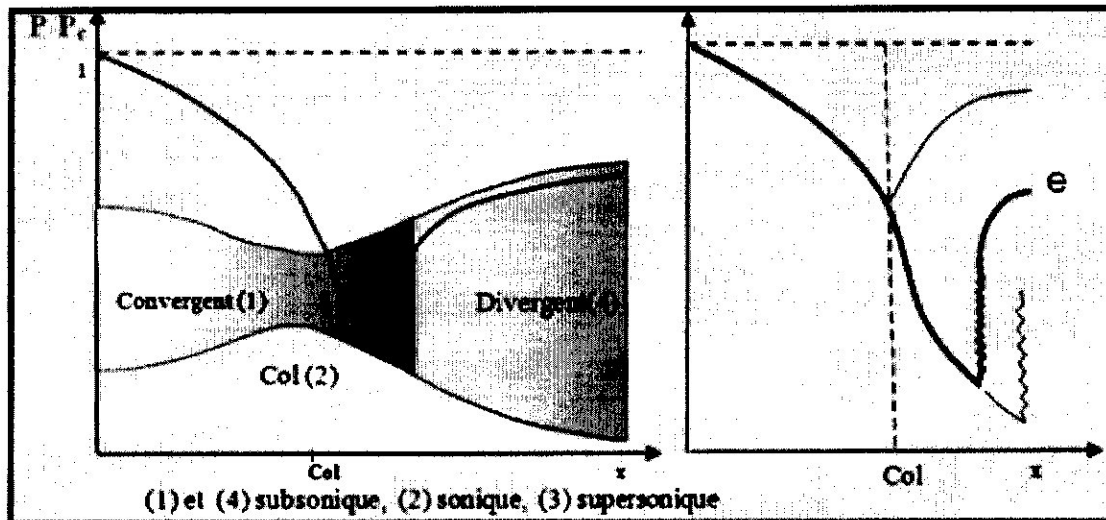


Fig. I.15 : Régime de sur-détente en 1D.

L'onde de choc se déplace vers la sortie lorsque  $P_a$  diminue. Soit  $P_{ac2}$  la pression ambiante pour laquelle l'onde de choc se place à la sortie de la tuyère.

En diminuant encore la pression  $P_a$  au-dessous de  $P_{ac2}$ , l'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique, la diminution de  $P_a$  ne modifie plus l'écoulement à l'intérieur de la tuyère. L'adaptation de la pression entre celle de sortie de la tuyère et la pression du milieu ambiant doit se faire à l'extérieur du divergent par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques.

**I.3.3.d. Ecoulement supersonique adapté :**

Si  $P_a$  continue à diminuer il arrive un moment où l'écoulement sera entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît et il n'y est plus de recompression externe, alors la tuyère est parfaitement adaptée. L'évolution du gaz est représentée par la courbe (f) de la figure I.14. Notons par  $P_{ac3}$  la pression ambiante pour laquelle ce phénomène se produit.  $P_{ac3}$  est appelé *pression d'adaptation*.

**I.3.3.e. Ecoulement supersonique non adapté :**

Lorsque la pression  $P_a$  devient inférieure à  $P_{ac3}$  l'écoulement est dit supersonique non adapté. L'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification, l'adaptation entre la tuyère et la pression ambiante doit se faire à l'extérieur de la tuyère par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques.

**Remarques et résultats :**

- ✓ L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique.
- ✓ Une tuyère supersonique ne fonctionne donc correctement que pour la seule valeur du rapport de pression  $P_{ac3}/P_c$ , où  $P_{ac3}$  est appelée *pression d'adaptation*.
- ✓ La limitation de l'intervalle de chaque régime d'écoulement nécessite la détermination des valeurs caractéristiques de la pression du milieu ambiant pour une pression chambre  $P_c$  fixe. Ces valeurs sont  $P_{ac1}$ ,  $P_{ac2}$ ,  $P_{ac3}$ .
- ✓ L'approche monodimensionnelle permet l'étude de l'effet de variation de section, de l'onde de choc normale, des ondes de choc obliques et des ondes de détente.
- ✓ L'approche monodimensionnelle permet d'obtenir une première estimation des paramètres de fonctionnement des tuyères supersoniques.

**I.3.4. Fonctionnement réel de la tuyère supersonique :**

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux suppose l'absence totale des effets visqueux. Dans les écoulements réels, la tuyère comporte une couche limite qui est très sensible aux variations de pression, ce qui rend les phénomènes physiques dans la tuyère plus complexes. Lorsque le col de la tuyère est sonique, l'écoulement dans la tuyère dépend uniquement de la pression à la sortie de la tuyère notée  $P_e$  et de la pression du milieu ambiant  $P_a$ . En fonction de la *différence* entre ces deux pressions, *trois cas* sont rencontrés :

- ❖ Si  $P_e = P_a$ , la tuyère est dite adaptée.
- ❖ Si  $P_e > P_a$ , la tuyère est dite sous-détendue.
- ❖ Si  $P_e < P_a$ , la tuyère est dite sur-détendue.

**I.3.4.a. Le régime d'adaptation :**

Dans le cas du régime adapté, la détente du gaz est complètement accomplie dans la tuyère. Le gaz se détend depuis la chambre jusqu'à la sortie de la tuyère. En sortant de la tuyère aucune adaptation de pression n'est nécessaire vue que la pression du milieu ambiant  $P_a$  est *égale* à la pression de sortie  $P_e$ . L'écoulement du gaz sort de la tuyère sous forme d'un jet supersonique quasi-uniforme. Une frontière isobare sépare le jet supersonique du fluide

ambiant. En sortant de la tuyère, la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage. Cette interaction forme une couche de mélange (Fig. I.16).

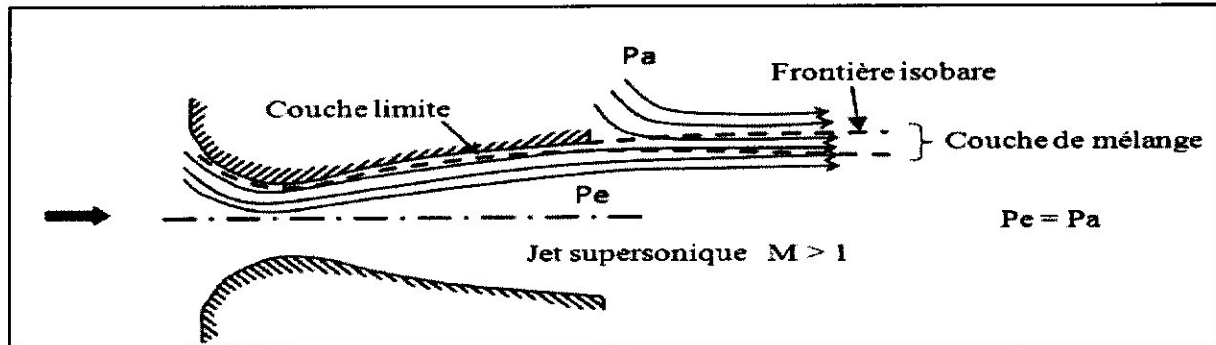


Fig. I.16 : Organisation de l'écoulement à l'adaptation.

**I.3.4.b. Le régime de sous-détente :**

Ce régime supersonique hors adaptation est appelé régime de sous-détente. Il se concrétise lorsque la pression du milieu ambiant  $P_a$  est *inférieure* à la *pression d'adaptation*. La *détente* est *incomplète* dans la tuyère. En sortant de la tuyère, le gaz continue sa détente de la pression de sortie  $P_e$  à la pression *inférieure* ambiante  $P_a$ . La suite de la détente du gaz est réalisée à la sortie de la tuyère par un faisceau d'ondes de détente. Vu que la pression de sortie est supérieure à la pression ambiante, un élargissement du jet supersonique est observé à la sortie de la tuyère. La frontière isobare qui sépare le jet supersonique du fluide du milieu ambiant prend une forme divergente (Fig. I.17).

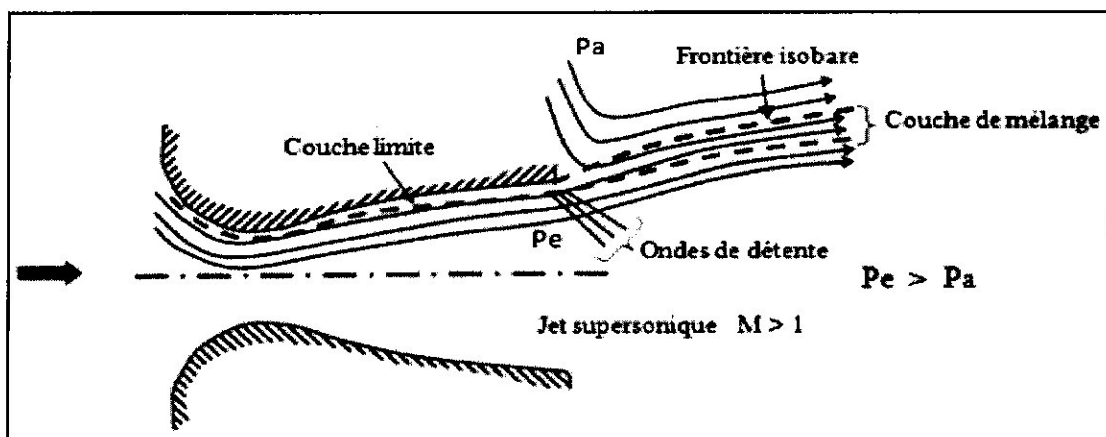


Fig. I.17 : Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente.

La figure I.18 représente le profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente. L'écoulement suit une distribution de pression strictement décroissante depuis la pression chambre jusqu'à la pression de sortie.



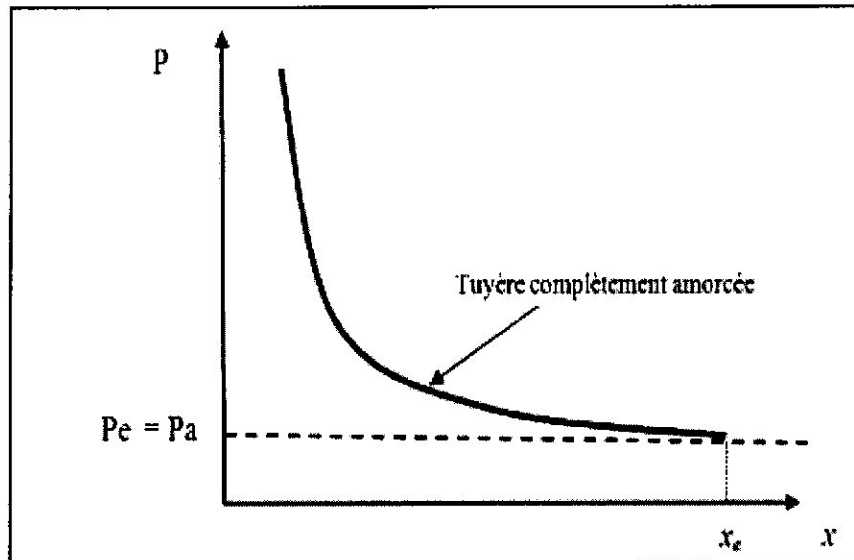


Fig. I.18 : Profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente.

#### I.3.4.c. Le régime de sur-détente :

Le deuxième régime supersonique hors adaptation est le régime désigné par le régime de sur détente. Ce régime se produit lorsque la pression du milieu ambiant  $P_a$  est *supérieure* à la *pression d'adaptation* de la tuyère. La détente des gaz dans la tuyère s'effectue jusqu'à une pression statique  $P_1$  qui est *inférieure* à la pression ambiante  $P_a$ . La couche limite du jet dans cette situation subit une contre-pression et un choc d'intensité  $P_2/P_1$  se forme dans l'écoulement. La pression  $P_2$  est la pression après le choc, elle est presque égale à la pression ambiante. Suivant l'intensité du choc, *deux cas* sont rencontrés : le régime de sur-détente avec *décollement naissant* et le régime de sur-détente avec *décollement étendu*.

##### ❖ Sur-détente avec décollement naissant :

Pour des gradients de pression adverse modérés, la couche limite subsonique détecte ou ressent la contre pression en un *point O* appelé *origine de l'interaction* juste un peu en avant de la sortie de la tuyère. La couche limite *décolle* de la tuyère *à la lèvre* et un choc oblique se forme à la sortie de la tuyère. Dans ce régime il *n'y a pas de point de décollement*. Ce régime de sur-détente est qualifié de sur-détente avec décollement naissant (Fig. I.19).

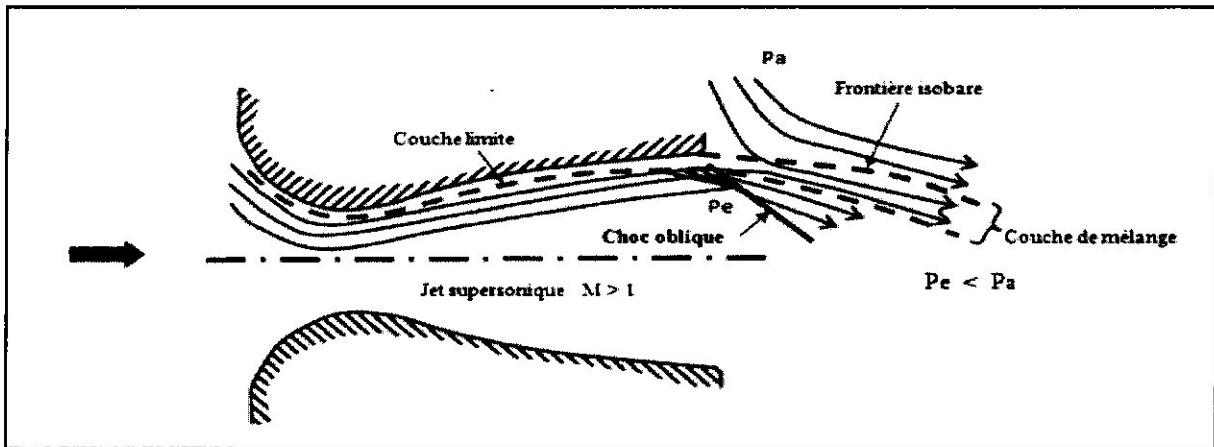


Fig. I.19 : Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche limite.

❖ Sur-détente avec décollement étendu :

La couche limite n'est pas en mesure de supporter n'importe qu'elle valeur de contre pression. Au-delà d'une certaine valeur critique, la couche limite *décolle à l'intérieur* de la tuyère. Ce décollement entraîne une profonde modification de l'écoulement, comme le montre le montage réalisé dans la figure (I.20), [7], [8].

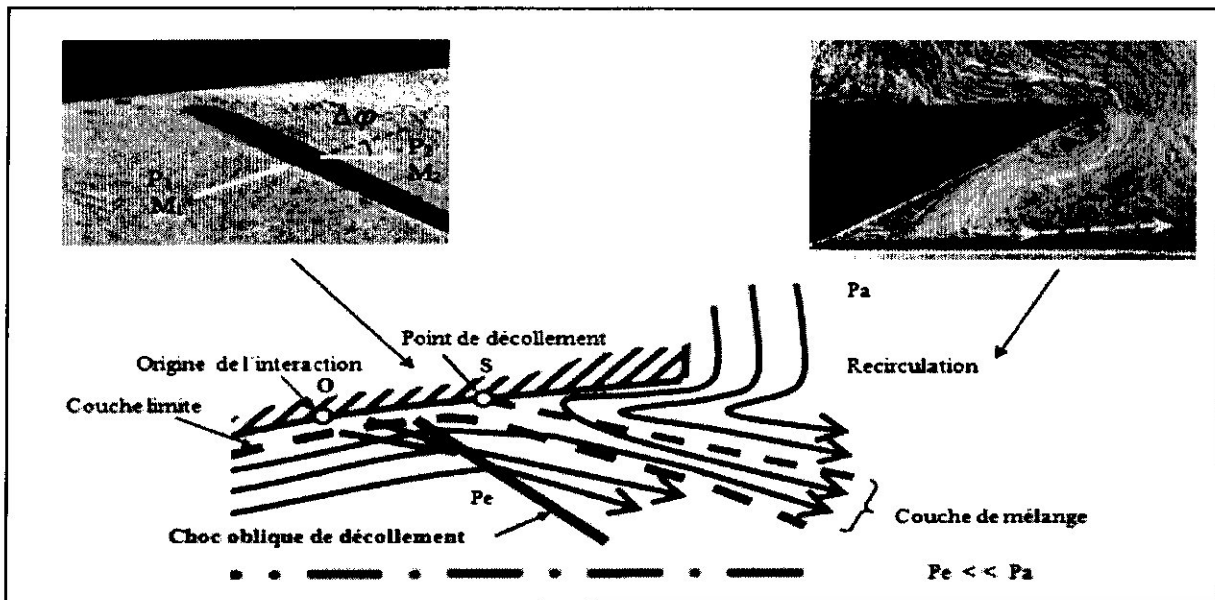


Fig. I.20 : Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite.

Le décollement ainsi créé va se produire dans un *point S* situé à *l'intérieur* de la tuyère. Au niveau de ce point de décollement, il se produit une *compression rapide* de l'écoulement interne de la tuyère *depuis* la pression  $P_1$  (pression non perturbée immédiatement avant le décollement) jusqu'à la pression  $P_2$  (pression en aval du point de décollement). Cette rapide contre pression provoque la formation d'un choc oblique à travers

duquel l'écoulement est *ralenti* et *dévié* d'un angle  $\Delta\varphi$  et son nombre de Mach passe de  $M_1$  à  $M_2$ . De  $S$  part une couche de mélange, zone visqueuse assurant une transition continue des propriétés de l'écoulement décollé entre le jet à grande vitesse situé près de l'axe de symétrie et la région proche de la paroi, où le fluide est presque stagnant. Le fluide du milieu externe est aspiré à l'intérieur de la tuyère sous l'effet d'entraînement puis évacué dans la couche de mélange.

Ce régime est *très dangereux* pour la tuyère. La topologie de l'écoulement dans ce régime est fortement influencée par le profil de la tuyère ainsi que le rapport de pression  $P/P_a$ .

### 1.3.5. Les paramètres principaux de performance :

#### 1.3.5.a. La poussée :

La poussée délivrée par une tuyère est fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion mais aussi de la différence entre les pressions de sortie et ambiante.

En théorie monodimensionnelle d'un écoulement permanent non visqueux, la poussée s'écrit :

$$F = \dot{m}V_e + (P_e - P_a)A_e \quad (I.9)$$

Avec :

$F$  : La poussée (N)

$V_e$  et  $A_e$  : Vitesse et Section de sortie tuyère (m)

$\dot{m}$  : Débit massique (kg/s)

#### 1.3.5.b. Coefficient de poussée :

Le coefficient de poussée est un paramètre sans dimension défini comme le rapport de la poussée  $F$  au produit de la pression dans la chambre de combustion ou pression totale  $P_t$  par l'aire de la section au col  $A^*$  :

$$C_F = \frac{F}{P_t A^*} \quad (I.10)$$

C'est un coefficient caractéristique de la détente des gaz dans la section divergente de la tuyère. Il peut être considéré comme particulièrement caractéristique de la performance du contour de la section divergente supersonique.

**I.3.5.c. Coefficient de décharge :**

A cause principalement des effets de frottement, les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celles déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique. Le coefficient de décharge noté  $C_d$  est défini comme étant le rapport du débit actuel réel à celui déterminé à partir des relations isentropiques :

$$C_d = \frac{\text{Débit actuel réel}}{\text{Débit isentropique}} \quad (\text{I.11})$$

Le débit réel  $\dot{m}_{rel}$  est alors corrigé avec ce coefficient  $C_d$  approchant l'unité selon la relation:

$$\dot{m}_{rel} = C_d \cdot \dot{m} \quad (\text{I.12})$$

**I.3.5.d. Vitesse caractéristique :**

C'est un paramètre qui n'est fonction que de la nature du mélange et de la température de combustion :

$$C^* = \frac{P_t A^*}{\dot{m}} \quad (\text{I.13})$$

Où :  $\dot{m}$  : Débit masse (kg/s)

**I.3.5.e. Vitesse effective :**

La vitesse effective notée  $V_{eff}$  est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie par le rapport de la poussée au débit massique :

$$V_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (\text{I.14})$$

Avec :  $F$  : La poussée (N)

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

**I.3.5.f. Impulsion spécifique :**

L'impulsion spécifique, notée  $I_s$ , est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique par l'accélération de la pesanteur :

$$I_s = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (\text{I.15})$$

Avec :  $g$  : La gravité ( $\text{m.s}^{-2}$ )

C'est un paramètre généralement utilisé pour les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

**I.3.5.g. Impulsion totale :**

L'impulsion totale, notée  $I$ , est définie comme l'intégrale de la poussée durant la totalité du temps de fonctionnement :

$$I = \int_0^t F \cdot dt \quad (I.16)$$

**I.4. Conclusion :**

Dans ce chapitre on a exposé les différents types de tuyères en partant des tuyères conventionnelles jusqu'aux tuyères auto-adaptables.

Ensuite on a exposé la théorie quasi monodimensionnelle qui est très utile pour les écoulement deux dimension où les résultats donnés par cette théorie sont fréquemment suffisants pour une large variété des problèmes d'ingénierie, comme l'étude de l'écoulement dans une soufflerie ou les moteurs fusée.

**II.1. Introduction :**

Le point de départ de toute simulation numérique d'écoulement est l'ensemble des équations d'Euler auxquelles s'ajoute l'équation d'état du fluide permettant de fermer le système.

Les écoulements des fluides dans les tuyères convergente-divergentes sont gouvernées par les **équations d'Euler**. Ces équations expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour un fluide réel dans un volume de contrôle pris arbitrairement du domaine de l'écoulement

**II.2. Hypothèses :**

Pour étudier le comportement d'un fluide compressible le long d'une tuyère, nous allons admettre les hypothèses suivantes :

- ✓ Fluide compressible
- ✓ Fluides non visqueux
- ✓ Ecoulement stationnaire
- ✓ Ecoulement adiabatique
- ✓ Gaz parfait
- ✓ Force de gravité négligeable

**II.3. Formulation mathématique d'équations d'Euler :****II.3.1. Les équations de conservation :**

- *l'équation de conservation de la masse*

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{II.1}$$

Où  $t$  désigne le temps,  $\rho$  la masse volumique et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse.

- *l'équation de conservation de la quantité de mouvement*

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = 0 \quad \text{II.2}$$

- *L'équation de conservation de l'énergie*

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \vec{V} + p \vec{V}) = 0 \quad \text{II.3}$$

L'énergie totale  $E$  est définie comme étant la somme de l'énergie interne  $e$  et de l'énergie cinétique (par unité de masse) :

$$E = e + \frac{1}{2} V^2 \quad \text{II.4}$$

Avec  $e = c_v T$

Le système formé par les équations (II.1), (II.2) et (II.3) est présenté sous la forme d'équations aux dérivées partielles. Il permet de déterminer, à partir de conditions initiales données, l'évolution des grandeurs caractéristiques principales de l'écoulement : le champ de la masse volumique  $\rho$ , le champ de la quantité de mouvement  $\rho V$  par unité de volume et le champ de l'énergie totale  $\rho E$  par unité de volume.

- *Equations additives :*

Afin de rendre le problème résoluble, il est capitale de faire l'inventaire des équations et des inconnues ; dans notre situation nous énumérons le nombre des inconnues et des équations, il nous manque alors une équation pour fermer le système ; c'est alors que le salut viens de la thermodynamique et plus exactement de l'équation des gaz parfait :

$$p = \rho r T \quad \text{II.5}$$

La constante du gaz  $r$  représente le rapport de la constante universelle des gaz parfait  $R$  ( $R = 8.314 \text{ j. mole}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) à la masse molaire  $M$  du gaz considéré :

$$R = r M \quad \text{II.6}$$

$r$  est relié aux chaleurs spécifiques  $c_v$ ,  $c_p$  par la relation de Meyer :

$$r = c_p - c_v \quad \text{II.7}$$

La pression peut être donnée en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement par :

$$p = \rho(\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} V^2 \right) \quad \text{II.8}$$



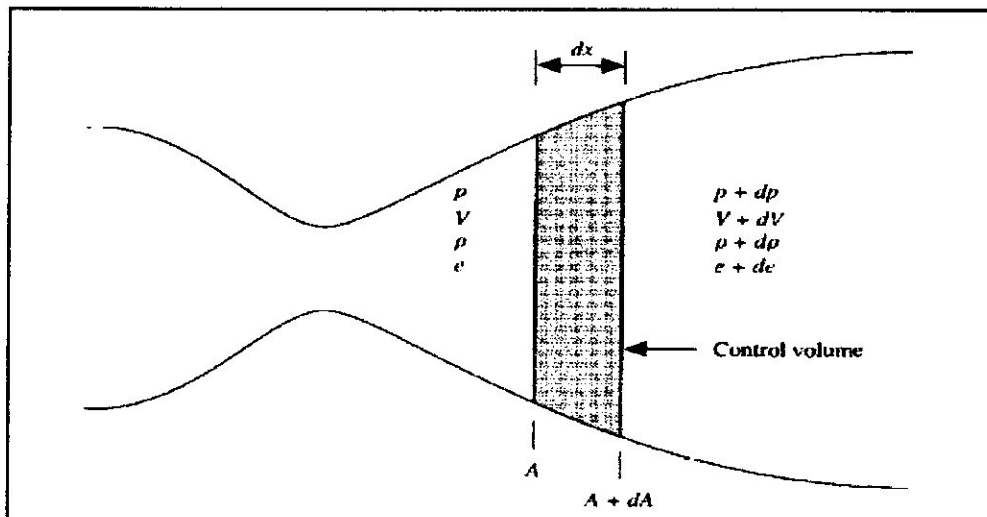
Où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

La chaleur spécifique à pression constante est donnée par une loi polynomiale de la température est nommée aussi modèle Thermodynamique :

$$C_p = a + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4 \quad \text{II.9}$$

**II.3.2. Equations 1D dimensionnel :**



- *l'équation de conservation de la masse*

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0 \quad \text{II.10}$$

- *l'équation de conservation de la quantité de mouvement*

$$\frac{\partial(\rho AV)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV^2 + pA)}{\partial x} = p \frac{\partial A}{\partial x} \quad \text{II.11}$$

- *L'équation de conservation de l'énergie*

$$\frac{\partial[\rho EA]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho EAV + pAV]}{\partial x} = 0 \quad \text{II.12}$$

**II.3.3. Equations 1D adimensionnel :**

Nous pourrions aisément effectuer la solution numérique de système d'équation, cependant pour l'écoulement en tuyère, les variables primitives sont fréquemment exprimées en termes des variables adimensionnelles. et cela pour éviter des grands calculs est pour la représentation graphique des résultats.

Les variables adimensionnelles sont définies par :

$$T' = \frac{T}{T_0} \quad , \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad , \quad p' = \rho' T' \quad , \quad V' = \frac{V}{a_0}$$

$$\text{Avec : } a_0 = \sqrt{\gamma r T_0} \quad , \quad x' = \frac{x}{L} \quad , \quad t' = \frac{t a_0}{L} \quad , \quad A' = \frac{A}{A^*}$$

$T_0, \rho_0$  : conditions d'entrée.

$L$  : longueur de la tuyère.

$A$  : section de la tuyère.

$A^*$  : section au col.

On devise l'équation (II.10) par les termes  $T_0, \rho_0, A^*, L, a_0$ , on aura :

$$\frac{\partial \left( \frac{\rho A}{\rho_0 A^*} \right)}{\partial \left( \frac{t}{L/a_0} \right)} \left( \frac{\rho_0 A^* a_0}{L} \right) + \frac{\partial \left( \frac{\rho A V}{\rho_0 A^* a_0} \right)}{\partial (x/L)} \left( \frac{\rho_0 A^* a_0}{L} \right) = 0 \quad \text{II.13}$$

Donc l'équation de **continuité adimensionnelle** :

$$\frac{\partial(\rho' A')}{\partial t'} + \frac{\partial(\rho' A' V')}{\partial x'} = 0 \quad \text{II.14}$$

Et avec la même procédure pour l'équation (II.11):

$$\frac{\partial \left( \frac{\rho A V}{\rho_0 A^* a_0} \right)}{\partial \left( \frac{t}{L/a_0} \right)} \left( \frac{\rho_0 A^* a_0^2}{L} \right) + \frac{\partial \left[ \frac{\rho A V^2}{\rho_0 A^* a_0^2} (\rho_0 A^* a_0^2) + \frac{p A}{\rho_0 A^*} (\rho_0 A^*) \right]}{\partial \left( \frac{x}{L} \right)} = \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial(A/A^*)}{\partial (x/L)} \left( \frac{\rho_0 A^*}{L} \right) \quad \text{II.15}$$

Avec

$$\frac{p_0}{\rho_0 a_0^2} = \frac{\rho_0 R T_0}{\rho_0 a_0^2} = \frac{\rho_0 R T_0}{\rho_0 \gamma R T_0} = \frac{1}{\gamma}$$

On aura l'équation de **quantité de mouvement adimensionnelle** :

$$\frac{\partial(\rho' A' V')}{\partial t'} + \frac{\partial[\rho' A' V'^2 + (1/\gamma)p' A']}{\partial x'} = \frac{1}{\gamma} p' \frac{\partial A'}{\partial x'} \quad \text{II.16}$$

Et l'équation (II.12) :

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\rho}{\rho_0} \left[ \frac{e}{e_0} (e_0) + \frac{V^2}{2a_0^2} (a_0^2) \right] \frac{A}{A^*} \right\}}{\partial \left( \frac{t}{L/a_0} \right)} \left( \frac{\rho_0 A^* a_0}{L} \right) + \frac{\partial \left\{ \frac{\rho}{\rho_0} \left[ \frac{e}{e_0} (e_0) + \frac{V^2}{2a_0^2} (a_0^2) \right] \frac{V A}{a_0 A^*} (\rho_0 a_0 A^*) + \left( \frac{p A V}{\rho_0 A^* a_0} \right) (p_0 A^* a_0) \right\}}{\partial \left( \frac{x}{L} \right) L} = 0 \quad \text{II.17}$$

$$e' = \frac{e}{e_0} \quad , \quad e_0 = c_v T_0 = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \quad , \quad \frac{p_0}{\rho_0 RT_0} = \frac{\rho_0 RT_0}{\rho_0 RT_0} = 1$$

Donc l'équation d'**énergie adimensionnelle** :

$$\frac{\partial \left[ \rho' \left( \frac{e'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) A' \right]}{\partial t'} + \frac{\partial \left[ \rho' \left( \frac{e'}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{2} V'^2 \right) V' A' + p' A' V' \right]}{\partial x'} = 0 \quad \text{II.18}$$

#### II.4. Formulation conservative :

##### II.4.1. Formulation 1D monodimensionnel :

La forme conservative du système d'équations d'Euler est nécessaire pour un calcul correct des intensités de discontinuités [9]. Pour un écoulement monodimensionnel et dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations d'Euler d'un écoulement compressible inerte s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = j \quad \text{II.19}$$

avec:  $U$  est le vecteur de "quantités conservatives" qui possède trois composantes, et  $F(U)$  est le flux convectif s'écrit sous la forme [9, 10, 11]:

$$U = \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho u A \\ \rho E A \end{bmatrix} \quad , \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u A \\ (\rho u^2 + p) A \\ u(\rho E + p) A \end{bmatrix} \quad , \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où:

$\rho$  est la masse volumique ;

$U$  est la composant cartésiennes de la vitesse ;

$p$  est la pression ;  
 $E$  est l'énergie spécifique totale par unité de volume

**II.4.2. Extension en 2D bidimensionnel :**

Dans ce cas, les approximations dans le cas bidimensionnel sont obtenues comme extension du cas monodimensionnel (1D).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = 0 \quad \text{II.20}$$

avec:  $U$  est le vecteur de "quantités conservatives" qui possède quatre composantes, s'écrit sous la forme [9, 10, 11]:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \text{II.21}$$

$F(U)$  et  $G(U)$  sont les flux convectifs dans les directions  $x, y$  respectivement

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad \text{II.22}$$

Avec :  $v$  composent de vitesse selon  $y$

L'énergie interne qui est reliée à l'énergie totale par:

$$e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad \text{II.23}$$

Dans le cas d'un gaz parfait, on a:

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\rho[E - 0,5(u^2 + v^2)] \quad \text{II.24}$$

Le système (II.20) est hyperbolique non linéaire couplé.

**II.5. Formulation quasi-linéaire :**

Afin d'illustrer les propriétés mathématiques pour le système d'équations d'Euler, il convient nécessaire, selon [12] de réécrire ces équations sous la forme quasi- linéaire qui nous

permet d'obtenir un système d'équations du premier ordre en terme de vecteur des quantités conservatives U.

**II.5.1. Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives :**

En introduisant les deux matrices jacobiennes A et B, la formulation quasi- linéaire s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{II.25}$$

avec:

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad ; \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \quad \text{II.26}$$

les matrices A et B ont les expressions suivantes [9] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma uE + (\gamma-1)uu^{-2} & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad \text{II.27}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\gamma vE + (\gamma-1)vu^{-2} & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad \text{II.28}$$

V est le vecteur vitesse de composantes u, v dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y).

**II.5.2. Les matrices jacobiennes pour les variables primitives :**

Vue l'importance des valeurs propres dans l'étude numérique du système d'équations d'Euler, il est plus commode d'obtenir ces valeurs en partant d'une formulation non conservative basée sur le vecteur de variables primitives V. Ce dernier, est généralement imposé par les conditions aux limites physiques.

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad \text{II.29}$$

En l'absence de la conduction et sources de chaleur, de plus, les forces extérieures sont négligées, les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) E + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} p) &= 0 \end{aligned} \tag{II.30}$$

La dernière équation (conservation d'énergie) peut être transformée à une équation pour la pression  $p$ . Afin d'obtenir cette équation, on introduit l'hypothèse "d'écoulement isentropique" à travers les relations:

$$\begin{aligned} e &= e(p, s) \\ \left. \frac{\partial e}{\partial \rho} \right|_s &= c^2 \end{aligned}$$

$c$  : est la célérité du son

$$\delta e = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s \cdot \delta p$$

La dérivée isentropique  $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s$  peut être déduite à partir des relations thermodynamiques

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = de + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

La condition d'isentropie, conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s &= \frac{1}{\rho} \\ \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s &= \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s - \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{p}{\rho^2 c^2} \\ E dp &= c^2 d\rho \end{aligned}$$

Le système (II.30) devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \end{aligned} \tag{II.31}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})p + \rho c^2 (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) = 0$$

Avec le vecteur de variables primitives  $V$ ,

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ (\gamma - 1)\rho[E - 0.5(u^2 + v^2)] \end{bmatrix} \quad \text{II.32}$$

Ainsi, la formulation quasi-linéaire (II.25) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{II.33}$$

Les matrices jacobienes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ont des expressions assez simples que celles des matrices  $A$  et  $B$ :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{bmatrix} \quad \text{II.34}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \quad \text{II.35}$$

**II.5.3. Les matrices de passage entre les variables conservatives et non conservatives :**

La matrice jacobienne de passage de variables conservatives aux variables non conservatives est définie par:

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad \text{II.36}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{\vec{u}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad \text{II.37}$$

Puisque le déterminant de  $M = \frac{\rho}{\gamma-1} \neq 0$  ( $\gamma > 1$ ), il existe une matrice inverse  $M^{-1}$ :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad \text{II.38}$$

$$\det M^{-1} = \frac{\gamma-1}{\rho} > 0$$

L'identification entre les deux formulations (II.25) et (II.33) (après quelques développements) nous donne:

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1}AM \\ \tilde{B} = M^{-1}BM \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = M\tilde{A}M^{-1} \\ B = M\tilde{B}M^{-1} \end{cases} \quad \text{II.39}$$

Si on considère  $\vec{\tilde{A}}$  comme un vecteur matrice a pour composantes les matrices jacobiniennes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , aussi même chose pour le vecteur matrice  $\vec{A}$  de composantes A et B, on peut écrire:

$$\vec{K} = \vec{\tilde{A}} \cdot \vec{K} \quad \text{et} \quad K = \vec{A} \cdot \vec{K}$$

Avec  $\vec{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$  indique une direction arbitraire de propagation des caractéristiques.

La matrice K a les mêmes valeurs propres que la matrice  $\vec{K}$  à travers la relation de similarité suivante:

$$\vec{K} = M^{-1}KM \quad \text{II.40}$$

Pour cela, il est plus pratique d'analyser les valeurs propres du système d'équations d'Euler en utilisant la matrice  $\vec{K}$  basée sur les variables primitives.



**II.6. Formulation caractéristique :**

Les schémas numériques et leurs propriétés, ainsi que la formulation mathématique des équations sont dominés par le caractère hyperbolique (par rapport au temps) d'équations d'Euler.

Du fait que les phénomènes de base sont de nature convective ou de propagation, les caractéristiques du système d'équations d'Euler et leurs propriétés jouent un rôle essentiel dans la description mathématique et aussi dans plusieurs techniques numériques de discrétisation, en particulier dans l'étude des conditions aux limites physiques et numériques. Cependant une telle analyse nécessite la connaissance des valeurs propres et les vecteurs propres associés. Pour simplifier la présentation, on considère ici le cas monodimensionnel pour lequel les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{II.41}$$

Le cas multidimensionnel et particulièrement, le cas bidimensionnel est traité en détail dans la référence [9].

La matrice  $\tilde{K}$  se réduit à la matrice  $\tilde{A}$ .

Si  $\lambda_j$  désigne les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  obtenues à partir de:

$$\det \left| \lambda I - \tilde{A} \right| = 0 \quad \text{II.42}$$

Ou :

$$\begin{bmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{II.43}$$

Un calcul direct donne:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{II.44}$$

avec  $\Lambda$  est la matrice diagonale de toutes les valeurs propres:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + c \\ \lambda_3 &= u - c \end{aligned} \tag{II.45}$$

Du fait du caractère hyperbolique de l'équation (II.41), les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  sont réelles. La matrice  $\tilde{A}$  peut être écrite sous la forme:

$$\tilde{A} = L \Lambda L^{-1} \tag{II.45}$$

$L^{-1}$  désigne la matrice de vecteurs propres gauches associés à chaque valeur propre  $\lambda_j$  et qui nous permet de définir une nouvelle ensemble des variables dite "variables caractéristiques  $W$ " en partant de variables conservatives  $U$  ou de variables primitives  $V$  à l'aide des matrices de passage  $P$  et  $L$ :

$$\begin{aligned} \delta W &= L^{-1} \delta V \\ \delta W &= P^{-1} \delta U \end{aligned} \tag{II.46}$$

Où l'indice  $\delta$  indique une variation temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  ou spatiale  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

La figure (II.1) résume les relations mathématiques entre les trois différents groupes de variables:

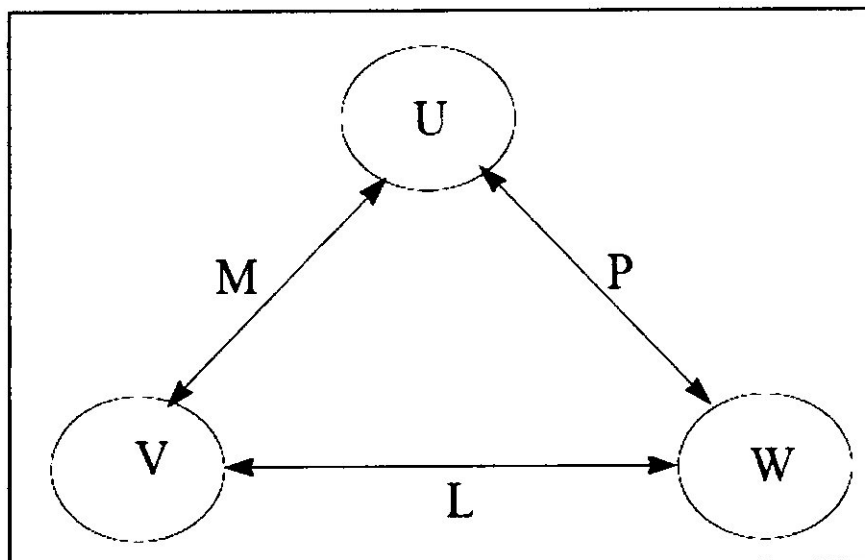


Fig.II.1. Relations entre les trois types de variables: conservatives U, primitives V et caractéristiques W.

Ainsi, après développement, on obtient les différentes matrices de passage:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad \text{II.47}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{bmatrix} \quad \text{II.48}$$

Les matrices P et P<sup>-1</sup> en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui de L et L<sup>-1</sup> en variables primitives respectivement; elles diagonalisent la matrice A (A Λ P<sup>-1</sup>):

$$P^{-1} = L^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1) \frac{u}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ \left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 - uc\right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} [c - (\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ -\left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 + uc\right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} [c + (\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix}$$

$$P = M.L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c} (u+c) & -\frac{\rho}{2c} (u+c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c} \left[ \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right] & -\frac{\rho}{2c} \left[ \frac{u^2}{2} - uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right] \end{bmatrix} \quad \text{II.49}$$

le vecteur des variables caractéristiques (ou les variables de Riemann) s'écrit:

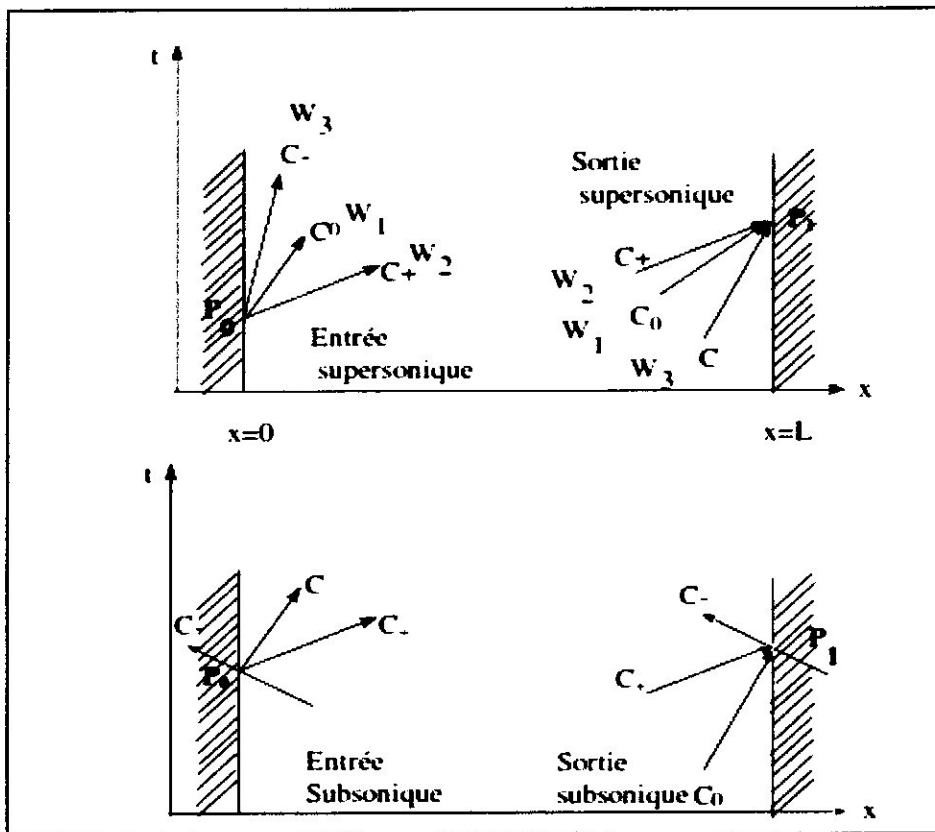
$$\delta w = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p \\ \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p \end{bmatrix} \quad \text{II.50}$$

Les trois composants de vecteur  $\delta w$  (en bidimensionnel: quatre (4) composantes) se propagent respectivement le long des caractéristiques  $C_0$ ,  $C_+$  et  $C_-$  avec des vitesses de propagation associées  $u$ ,  $u+c$  et  $u-c$  (sont les valeurs propres du système).

**II.7. Traitement des conditions aux limites :**

Le schéma numérique destiné à la résolution d'équations d'Euler, nécessite un traitement spécial des conditions aux limites et de s'avoir adapté convenablement ces dernières au problème posé. La diversité des conditions aux limites à imposer dépend essentiellement de la nature d'écoulement entrant ou sortant à travers les surfaces frontières.

L'intérêt pratique de variables caractéristiques réside essentiellement dans l'étude des conditions aux limites selon le régime d'écoulement : subsonique ou supersonique.



**Fig.II.2. Conditions aux limites pour un écoulement monodimensionnel.**

Les caractéristiques sont utilisées uniquement dans le cas où l'information se propage depuis l'intérieur du domaine de calcul vers l'extérieur de manière à compléter les conditions aux limites physiques.

Selon les valeurs propres de la matrice jacobienne qui définissent les directions caractéristiques, on peut classer les conditions aux limites imposées aux frontières en deux catégories :

- **Conditions physiques** : le nombre de conditions physiques à imposer dépend de la nature d'écoulement : subsonique ou supersonique à l'entrée ou à la sortie. A l'entrée ce nombre est déterminé par les valeurs propres positives [9] (l'information se propage de la surface frontière vers l'intérieur du domaine computationnel). Cependant, à la sortie du domaine computationnel, ce nombre est déterminé par les valeurs propres négatives.

- **Conditions numériques** : leur nombre est lié étroitement au nombre total de la première catégorie. A l'entrée du domaine computationnel, ce nombre est déterminé par les valeurs propres négatives (caractéristiques sortantes). Pour cela, l'information se propage de l'intérieur du domaine computationnel vers les surfaces frontières sur lesquelles l'état d'écoulement est déterminé numériquement et considéré comme étant une partie de la solution finale. Cependant à la sortie, le nombre des conditions numériques est égal à celui des valeurs propres positives.

Tenant en compte de l'analyse précédente (1D), le comportement des lignes caractéristiques et le nombre des conditions physiques à imposer sur chaque frontière (entrée, sortie) dans le présent cas se traduit comme suit :

**Entrée subsonique :**

Il y a alors deux caractéristiques entrantes, il faut donc imposer deux conditions physiques, par exemple, la pression et température d'arrêt. Et pour la caractéristique sortante (une variable primitive) est déterminée à partir des valeurs de cette même variable situées aux nœuds intérieurs adjacents par extrapolation

**Sortie subsonique :**

Il n'y a qu'une seule caractéristique entrante donc une seule condition physique à imposer sur la frontière. On choisit usuellement la pression statique. Et pour les deux caractéristiques sortantes (deux variables primitives) sont déterminées à partir des valeurs de ces mêmes variables situées aux nœuds intérieurs adjacents par extrapolation.

**Entrée supersonique :**

Toutes les caractéristiques sont entrantes, il faut donc imposer les trois conditions physiques.

**Sortie supersonique :**

Aucune caractéristique n'est entrante et aucune condition aux limites ne doit être prescrite. Toutes les variables primitives sont déterminées à partir des valeurs de ces mêmes variables situées aux nœuds intérieurs adjacents par extrapolation.

**II.8. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons vu les différentes formes d'écriture du système d'Euler, ainsi que la relation entre elles. Comme on a vu aussi l'intérêt de ces formes dans l'étude des conditions aux limites du problème.

**III.1. Introduction :**

Ce chapitre s'insère dans le cadre du développement d'un schéma numérique pour la résolution des équations d'Euler.

Le système des équations d'Euler est hyperbolique non linéaire. On s'intéresse aux solutions stationnaires que l'on obtient par intégration en temps à partir d'une condition initiale arbitraire. L'intégration en temps est utilisée pour construire un processus itératif convergent vers la solution stationnaire. En effet, à l'heure actuelle, on peut citer plusieurs approches numériques :

- Les schémas de type Lax-Wendroff (Richtmeyer, MacCormack...)
- Les schémas centrés (Jameson...)
- Les schémas à décomposition de flux (Steger et Warming, Van Leer...)
- Les schémas de type solveur de Riemann (Godunov, Roe...)

La résolution du système d'équation d'Euler par l'utilisation de la méthode des différences finies consiste principalement à remplacer les équations aux dérivées partielles par les équations algébriques aux différences finies.

**III.2. Schéma de Lax-Wendroff :**

Le schéma de Lax-Wendroff (1960) est basé sur un développement de Taylor en temps jusqu'à l'ordre 3. L'expression du flux numérique est :

$$F_{i+1/2} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{\Delta t^2}{2} A_{i+1/2} \frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta x}$$

Ce schéma est formulé de la façon suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \frac{A_{i+1/2}^n (F_{i+1} - F_i) - A_{i-1/2}^n (F_i - F_{i-1})}{\Delta x^2} \right\}$$

Ce schéma est consistant, précis à l'ordre 2 en temps et en espace, et stable sous condition

$$CFL: \quad \frac{|u| + c}{\Delta x} \Delta t \leq 1$$

L'inconvénient de cette approche est qu'elle requiert le calcul de la matrice jacobienne A

### III.3. Schéma de MacCormack :

Du fait de sa validité expérimentale et de son efficacité numérique largement reconnues, le schéma de Mac Cormack est aujourd'hui très utilisé pour la simulation.

#### III.3.1. Schéma 1D monodimensionnel :

Le schéma de MacCormack (1969) est le schéma le plus populaire parmi ceux qui appartiennent à la famille des schémas dite "de Lax-Wendroff à deux pas". Ce schéma aux différences finies a été développé par Robert MacCormack à la NASA et publié en 1969; précis au second ordre en temps et en espace.

La méthodologie du schéma de MacCormack consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, une séquence de Prédiction et une autre de Correction. Le but est de calculer les valeurs des variables primitives de l'écoulement au niveau du pas de temps n+1, en sachant que leurs valeurs sont connues au pas de temps n.

Les différences finies Avants sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape prédiction et les différences finies Arrières utilisant les variables prédites, sont utilisées dans l'étape correction. Cependant, il est possible d'utiliser les différences finies arrières dans l'étape prédiction et les différences finies Avants dans l'étape Correction.

En désignant par  $\bar{U}_i$  le vecteur des variables conservatives lors de prédiction et par  $\bar{\bar{U}}_i$  lors de correction ; le système des équations d'Euler () s'écrit :

$$\text{Prédicteur :} \quad \bar{U}_i = U_i^n - \tau (F_{i+1}^n - F_i^n)$$

$$\text{Correcteur :} \quad \bar{\bar{U}}_i = U_i^n - \tau (\bar{F}_{i-1}^n - \bar{F}_i^n)$$

$$\text{Solution finale :} \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i + \bar{\bar{U}}_i)$$

$$\text{Ou bien :} \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + \bar{U}_i - \tau (\bar{F}_{i-1}^n - \bar{F}_i^n))$$



Avec :  $\bar{F}_i = F(\bar{U}_i)$  et  $\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

**Remarque :**

Les vecteurs flux  $\bar{F}$  sont en fonction des variables primitives T, V, P, e, et par expérience lors du calcul itérative (l'exécution du programme); difficultés numérique surgissent de temps en temps et des instabilités se développent, pour ces raison il est meilleur de d'écrire les vecteurs flux en fonction des vecteurs de variables conservatives U [13] :

$$F_1 = U_2$$

$$F_2 = \frac{U_2^2}{U_1} + \frac{1}{\gamma}(\gamma - 1) \left( U_3 - \frac{\gamma U_2^2}{2 U_1} \right)$$

$$F_3 = \gamma \frac{U_2 U_3}{U_1} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \frac{U_2^3}{U_1^2}$$

**III.3.2. Schéma avec la viscosité artificielle :**

La modélisation des écoulements compressibles doit prendre en compte la transition d'écoulement du régime supersonique au régime subsonique avec capture d'ondes de choc. Le schéma de MacCormack présente des instabilités numériques en présence d'ondes de choc.

Le calcul des ondes de choc pose un problème difficile, mais essentiel, qui a trouvé une solution tout à fait générale grâce à l'idée de la viscosité artificielle due à Von Neumann et Richtmyer (1950). Cette méthode consiste à modifier les équations du fluide parfait en y introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et à donner à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles.

Cette approche est très puissante car elle permet une "capture" automatique des chocs, quel que soit leur nombre "Shock Capturing Method". Son inconvénient est d'étaler les discontinuités, ce qui impose d'avoir un maillage assez fin pour limiter l'épaisseur artificielle des chocs

Donc pour procéder avec cette solution, il faut ajouter aux équations Euler l'expression de la viscosité artificielle suivante [13] :

$$S_i^n = C_X \frac{|p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n|}{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n)$$

Le système d'équations d'Euler devient :

Prédicteur :  $\bar{U}_i = U_i^n - \tau (F_{i+1}^n - F_i^n) + S_i^n$

Correcteur :  $\bar{\bar{U}}_i = U_i^n - \tau (\bar{F}_{i-1}^n - \bar{F}_i^n) + \bar{S}_i^n$

Solution finale :  $U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i + \bar{\bar{U}}_i)$

Avec :  $\bar{F}_i = f(\bar{U}_i)$  ,  $\bar{S}_i^n = f(\bar{U}_i, \bar{p}_i)$  ,  $\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

#### III.4. Schéma cas 2D bidimensionnel :

Dans ce cas, les approximations dans le cas bidimensionnel sont obtenues comme extension du cas monodimensionnel (1D).

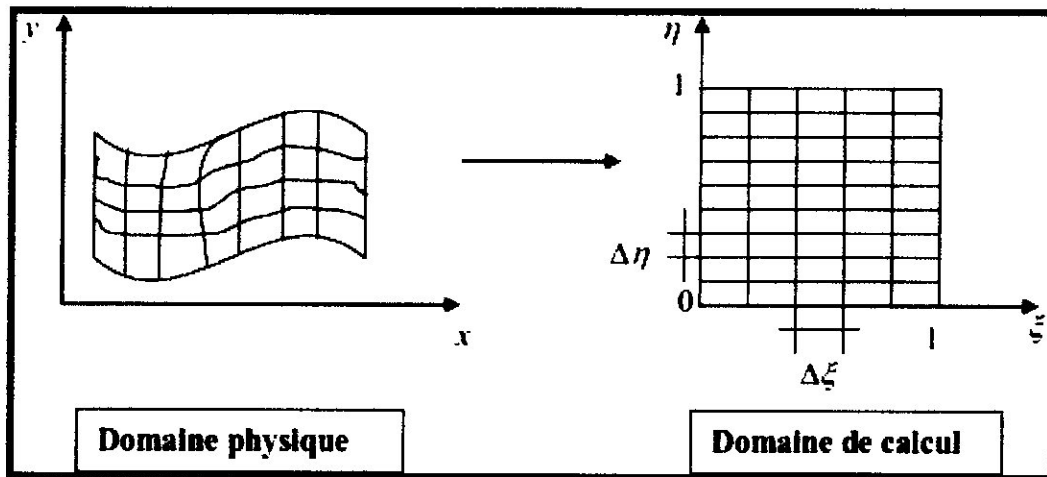
$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

Prédicteur :  $\bar{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n)$

Correcteur :  $\bar{\bar{U}}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n) - \tau_y (G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n)$

Solution finale :  $U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{U}}_{i,j}^{n+1})$

**III.5. Transformation des équations d'Euler en coordonnées généralisées :**



**Fig. III.1 : Transformation du domaine physique au domaine de calcul.**

Le domaine physique sera converti en un domaine de calcul. Donc le système des équations d'Euler doit être transformé du domaine physique de coordonnées (x, y) vers le domaine computationnel (de calcul) de coordonnées généralisées (ξ, η)

La raison principale de ce changement du domaine est l'adaptation du maillage aux méthodes de différences finies qui se basent dans leur implémentation sur des mailles rectangulaires

Le domaine physique précédent sera converti en un domaine de calcul parla transformation suivante :

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{h(x)}$$

$h(x)$  représente l'ordonnée de la paroi de la tuyère par rapport à l'axe horizontal passant par l'axe de symétrie du convergent divergent.

Le système d'équations à résoudre dans le nouveau repère sera :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = 0$$

Avec :

$$\tilde{U} = \frac{U}{J} \tilde{F} = \frac{1}{J} (\xi_x G + \xi_y F) \tilde{G} = \frac{1}{J} (\eta_x G + \eta_y F)$$

$$\text{Et : } \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-dh(x)/dx}{h(x)} \eta, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{h(x)}$$

J est le jacobien de la transformation et son expression est

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

Par ailleurs les dérivées premières par rapport à x et y sont données par les relations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}$$

### **III.6. Analyse linéaire de la stabilité du schéma :**

Le schéma de MacCormack est un schéma explicite et par suite il est conditionnellement stable

On dit qu'un processus de calcul est stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent. Selon l'analyse de Von Neumann la stabilité des schémas explicites est déterminée par le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy, brièvement le nombre C.F.L ou le nombre de Courant.

Le pas du temps de méthodes explicites utilisées en général pour les calculs à Mach élevé est limité par une condition de stabilité de type C.F.L.

$$\Delta t \leq \frac{\alpha \Delta x}{|u| + c} \quad \alpha = O(1)$$

- $\Delta x$  est une longueur caractéristique
- $u$  une vitesse caractéristique de l'écoulement
- $c$  la vitesse du son.

Pour le cas bidimensionnel (2D), la forme courante de la stabilité que l'on peut trouver dans la littérature spécialisée est :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta y \Delta x}{|u| \Delta y + |v| \Delta x + c \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

### **III.7. Traitement des conditions aux limites :**

Le traitement inexact des conditions aux limites mène à des erreurs sérieuses qui peuvent conduire à l'instabilité du schéma numérique.

A cet effet, le traitement des conditions aux limites est très important dans toute étude numérique et il est nécessaire de traiter convenablement ces conditions et de savoir les adapter au problème posé.

Pour ce qui du traitement des nœuds à l'entrée et à la sortie, ils sont déjà étudiés selon le régime de l'écoulement dans le paragraphe (II.7) du chapitre précédent.

#### **III.7.1. Traitement des nœuds à la paroi :**

Sachant que l'écoulement est non-visqueux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottement sur la paroi, donc l'écoulement va être parallèle à la paroi, ce qui conduit à l'hypothèse de ( $v_n = 0$ ) à la paroi (condition de glissement).

**III.7.2. Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère (tuyère axisymétrique) :**

La même méthode est appliquée pour déterminer les paramètres sur l'axe de la tuyère, sauf que la vitesse radiale est nulle sur cet axe à cause de l'écoulement qui doit être parallèle à cet axe.

On obtient  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \implies u_{i,1} = u_{i,2}$  pour raison de symétrie.

$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \implies p_{i,1} = p_{i,2}$  pour raison de symétrie.

$v_{i,1} = 0$  L'écoulement est parallèle à l'axe de la tuyère.

$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0 \implies \rho_{i,1} = \rho_{i,2}$  pour raison de symétrie.

**III.8. Génération de maillage :**

La génération de maillage consiste à établir la relation entre les points du domaine physique irrégulier, et les points du domaine de calcul régulier. L'approche de conception de génération de maillage est de fixer les valeurs des coordonnées du domaine de calcul.

De nombreux développements des techniques de génération de maillage ont été effectués notamment pour les problèmes bidimensionnels pour des résolutions numériques, utilisant soit la méthode des champs ou celle de singularité.

On peut distinguer trois méthodes de génération de maillage autour de géométrie simple ou complexe. Elles sont classées essentiellement en catégories suivantes :

- Méthode de la variable complexe.
- Méthode algébrique.
- Méthode de résolution d'un système d'équation aux dérivées partielles.

**III.8.1.Méthode algébrique :**

Les techniques algébriques permettent de faire une interpolation des données à la frontière pour générer le maillage intérieur. L'interpolation explicite peut être unidimensionnelle ou multidimensionnelle. L'exigence primordiale est que la grille à générer devait être bien conditionnée c'est-à-dire variant très lentement pour assurer l'orthogonalité. Pour des problèmes d'écoulement de fluide, la solution change rapidement pour une surface particulière.

La distribution des points le long des frontières du domaine est efficacement manipulée en définissant normalement des fonctions de condensation unidimensionnelles le long des segments considérés. Qui correspondent typiquement à chaque côté du rectangle de calcul dans le plan  $(\xi, \eta)$  La fonction de condensation unidimensionnelle la plus convenable est décrite ultérieurement. Les fonctions de condensation sont applicables en association avec le maillage intérieur qui est généré par la résolution d'équations aux dérivées partielles ou par la méthode algébrique.

Dans notre étude, nous avons utilisé la méthode des techniques algébriques par rapport à cas principale caractéristique qui est la répartition des lignes coordonnées et raffinement de maillage : Un paramètre qui peut jouer un rôle très important dans certains problèmes physiques est la répartition des lignes coordonnées dans le maillage. Une répartition qui prend en compte les régions sensibles du problème physique, c'est le cas notamment des problèmes de l'apparition d'onde de choc. Ce problème est contrôlé souvent par les fonctions de condensation unidimensionnelles "Stretching functions".

Pour une fonction de condensation unidimensionnelle appliquée une variable indépendante appropriée serait :

$$x^* = \frac{x_i - x_A}{x_B - x_A}$$

Avec :  $0 < x^* < 1$  et  $x_A \leq x_i \leq x_B$

La fonction de condensation est:

$$x = x_r * \left\{ 1 + \frac{\sinh[\beta(x^* - A)]}{\sinh(\beta A)} \right\} \quad \text{III-22}$$

Avec :

$$A = \frac{1}{2\beta} * \ln \left( \frac{1 + (e^\beta - 1)(x_r/x_B)}{1 + (e^{-\beta} - 1)(x_r/x_B)} \right)$$

et  $\beta \in ]0, \infty[$

$\beta$  et  $x_r$  sont des paramètres qui permettent le contrôle du maillage :

- $x_r$  : La position du nœud où le maillage sera condensé.
- $\beta$  : Le paramètre de condensation, il varie d'une petite valeur a une grande valeur pour donner un maillage plus raffiné au point  $x_r$

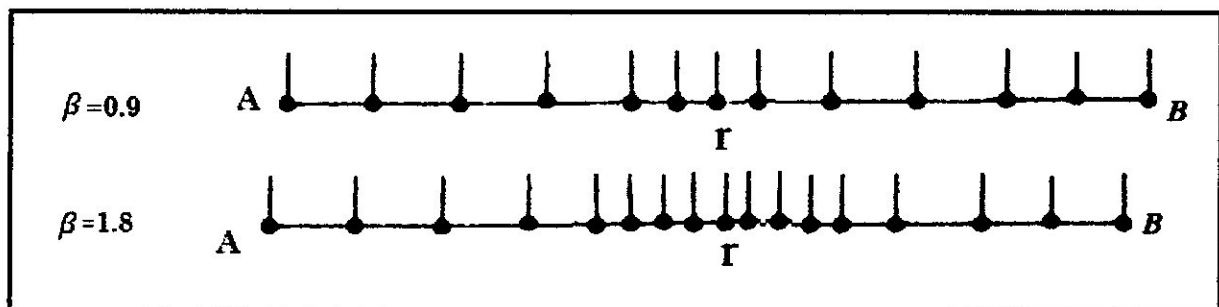


Fig. III.2 : utilisation des distributions de maillage.

### III.9. Conclusion :

Ce chapitre nous a permis de nous familiariser avec la technique de génération de maillage de type algébrique ainsi que la méthode de discrétisation et de résolution des équations Euler.

Cette technique va servir à généré le maillage dans notre code, et la méthode de Maccormack pour résoudre le système d'équation .



**IV.1. Introduction :**

Tenant compte des caractéristiques du problème posé précédemment et du modèle mathématique avec son schéma numérique qu'on lui a associé pour la résolution, on a procédé à l'élaboration d'un code de calcul sous le langage de programmation Fortran. Ce code de calcul réalise des simulations numériques pour des écoulements axisymétriques à travers les tuyères.

**IV.2. Présentation du code :**

Pour un meilleur usage, et afin de faciliter l'utilisation de notre code de calcul par d'autres personnes, comme tous les codes de calcul de ce genre, on lui a attribué une interface graphique. Cette dernière est faite en Visual Basic. Dans ce qui suit, les principales étapes à suivre pour effectuer un calcul avec notre code sont décrites.

La première fenêtre qui apparaît une fois le code est lancé est illustrée par la figure 1. C'est la fenêtre principale du code où tous les choix et données sont effectués.

Elle est répartie en cinq quadrants :

1. Choix de la tuyère ;
2. Génération de Maillage ;
3. Choix du fluide ;
4. Conditions initiales et limites ;
5. Visualisation des résultats.

En plus de ces quadrants, en bas de la fenêtre, on retrouve une case pour spécifier l'ordre de précision des calculs et aussi le bouton avec lequel on lance notre calcul.

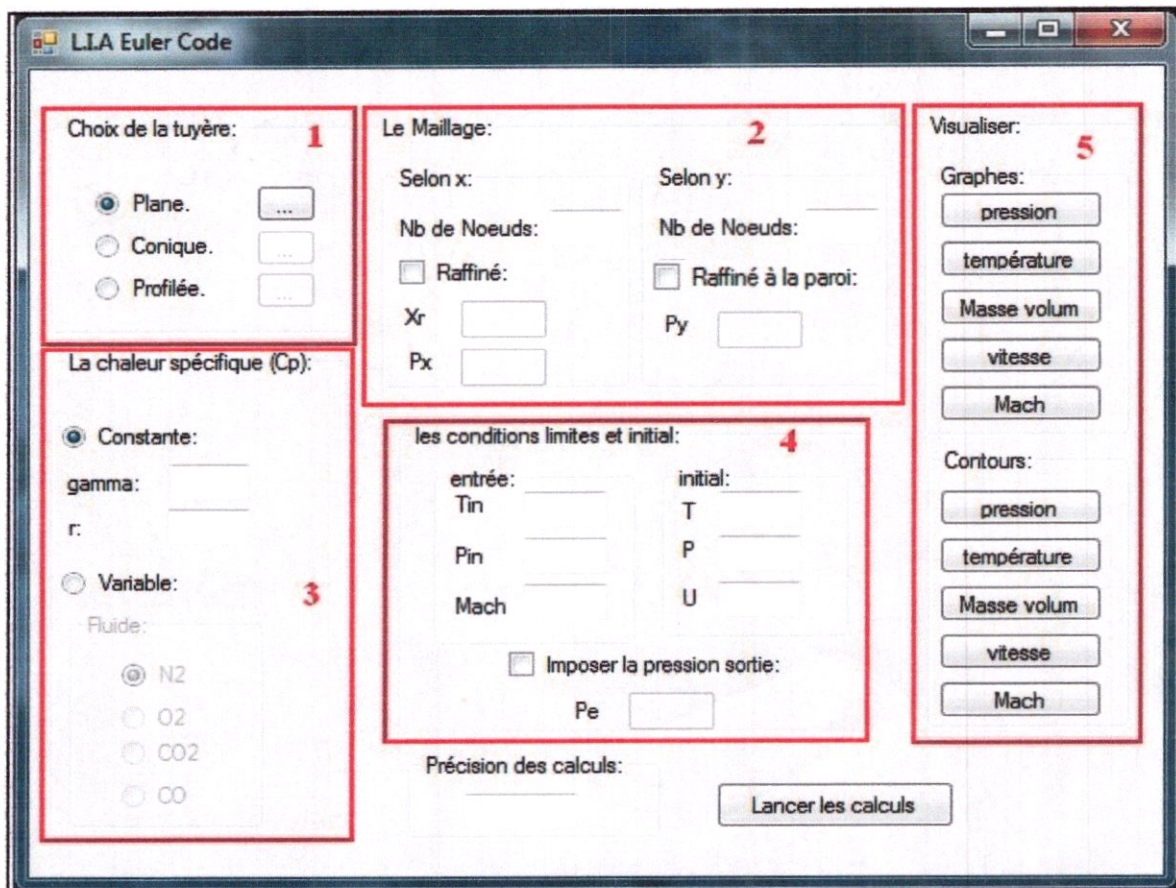
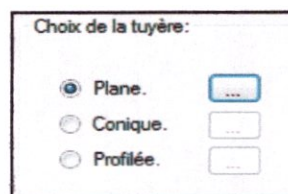


Fig. IV.1 : Interface du code.

**IV.2.1. Choix de la tuyère :**

Ce quadrant nous permet de sélectionner le type de tuyère sur laquelle notre simulation va être effectuée.



Et comme chaque tuyère a ses caractéristiques, donc on sélectionnant un type, le bouton [...] s'active. En cliquant sur ce dernier, une deuxième fenêtre apparaît (figure 2) nous permettant ainsi de saisir les données géométriques

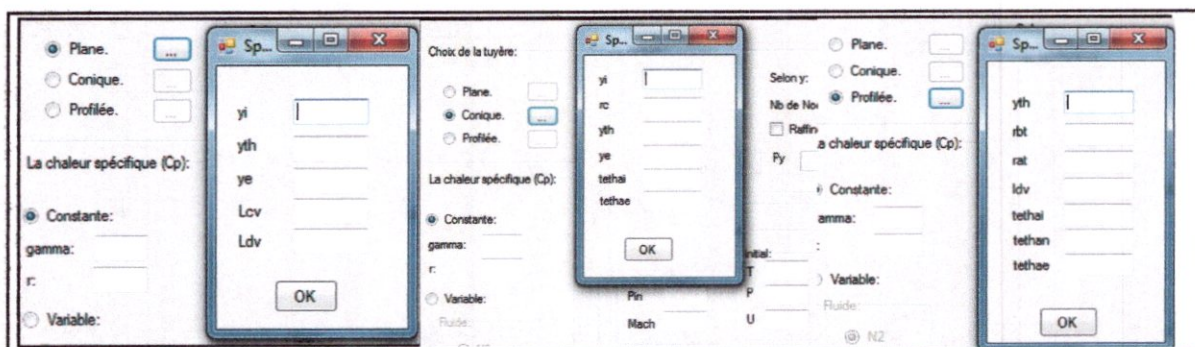
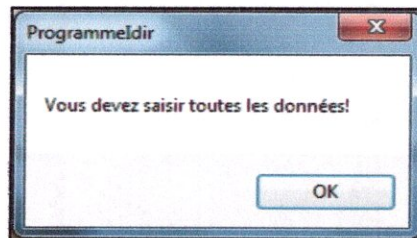


Fig. IV.2 : box de choix de tuyère.

Avec :

- ✓ Hauteur de l'entrée  $y_i$
- ✓ Hauteur de la sortie  $y_e$
- ✓ Rayon de l'arc :  $r_c$
- ✓ Longueur du convergent:  $l_{cv}$
- ✓ Longueur du divergent :  $l_{dv}$
- ✓ Hauteur du col  $y_{th}$
- ✓ Rayon de l'arc avant col:  $r_{bt}$
- ✓ Rayon de l'arc après col :  $r_{at}$
- ✓ Angle au Rayon de l'arc avant col :  $t_{etain}$
- ✓ Angle au point d'attache :  $t_{etan}$
- ✓ Angle de sortie :  $t_{etae}$

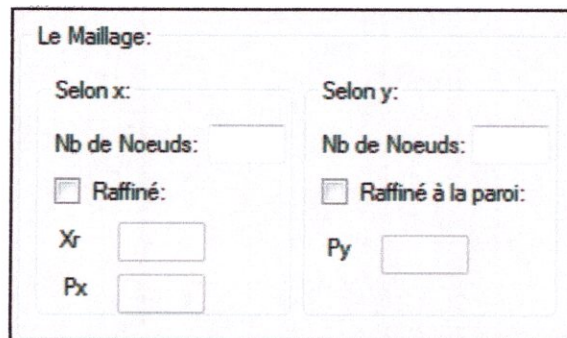
**Remarque :** si on oublie de remplir une case de cette fenêtre, un message d'erreur apparaîtra (fig. 3).



FigIV.3 :box de message d'indiction de non remplissage

**IV.2.2. Génération de Maillage :**

Après avoir choisi le type de tuyère, la génération du maillage est primordiale pour les calculs numériques. Le quadrant ci-dessous (fig.4) nous permet de saisir le nombre de nœuds selon l'axe des X et selon l'axe des Y toute en ayant à choisir de raffiner ou pas le maillage selon les deux directions.



FigIV.4 : box de spécification du maillage

On choisissant de raffiner le maillage selon l'axe des X, les deux cases  $X_r$ ,  $P_x$  s'activent pour nous permettre de spécifier respectivement la position où l'on souhaite raffiner et le paramètre de concentration du maillage.

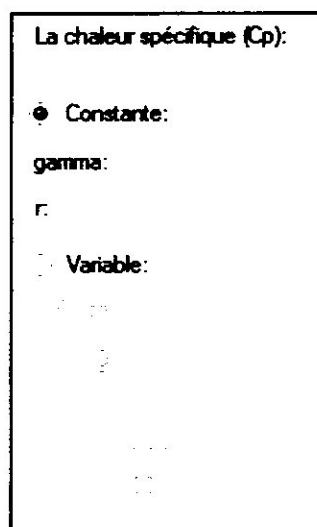
Par contre pour le choix de raffiné à la paroi, on a juste besoin de précisé la valeur du paramètre de concentration du maillage  $P_y$ .

### IV.2.3. Choix du fluide :

Dans notre code les calculs se font selon deux cas :

- Le premier consiste à simuler l'écoulement en prenant comme hypothèse que le fluide est calorifiquement parfait c.à.d. : la chaleur spécifique  $C_p$  n'est pas affecter par les changement dans la température. Dans ce cas, on introduit juste les deux paramètres  $\gamma$  et  $r$  qui sont le *rapport des chaleurs spécifiques* et la *constante caractéristique du gaz* respectivement.
- Le deuxième cas est de prendre en considération l'effet du changement de la température sur la chaleur spécifique  $C_p$ . Dans ce cas, on n'a qu'à choisir un gaz parmi les gaz implémenté dans notre code de calcul ( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$  et  $CO$ ).

La figure 5 montre le quadrant qui nous permet de choisir le type de fluide avec lequel on souhaite effectuer notre simulation.



FigIV.5 :box de choix du fluide

### IV.2.4. Condition initial et limite :

Le schéma numérique utilise pour la résolution des équations d'Euler nécessite des conditions aux limites et d'autres initiales. Le quadrant représenté sur la figure qui suit nous permet justement d'introduire ces conditions.



les conditions limites et initial:

|         |          |
|---------|----------|
| entrée: | initial: |
| Tin     | T        |
| Pin     | P        |
| Mach    | U        |

Imposer la pression sortie:

Pe

FigIV.6 :box de spécification des condition

**IV.2.5. Lancer les calculs :**

Après avoir suivi toutes ces étapes, une dernière spécification, avant de lancer les calculs, est indispensable ; c'est la valeur de précision des calculs. Une fois cette valeur est inséré, il nous reste qu'à lancer nos calculs en cliquant sur le boutant " *Lancer les calculs*" qu'on voie sur la figure suivante.

Précision des calculs:

Lancer les calculs

FigIV. 7 :box de lacement de calcul

**IV.2.6. Visualisation des résultats :**

Visualiser:

Graphes:

- pression
- température
- Masse volum
- vitesse
- Mach

Contours:

- pression
- température
- Masse volum
- vitesse
- Mach

Une fois le calcul terminer, on a besoin d'afficher les résultats obtenues. Le sinquième quadrant est justement reserver pour cette tache.

Il met a notre disposition deux type d'affichage : soit en visualisant les résultats sous forme de courbes, soit en les visualisant sous forme de contours. Pour ce faire, il suffit de cliquer sur l'un des boutant : "*pression*", "*température*", "*masse volum*", "*vitesse*", "*Mach*" qu'on vois sur la figure 8.

Fig IV.8 :box de visualisation des resultats

**IV.3. Test de validation :**

Dans le but de validé notre code, on a effectué une simulation d'une tuyère simplement convergente-divergente. Ce cas test a été choisi parce qu'il est parmi les références utilisées [13], et fournit de nombreux résultats. L'objectif global est d'expliquer l'exactitude de notre code de sorte qu'il puisse être employé avec confiance.

La géométrie de la tuyère est donne par l'équation suivent :

$$A' = 1 + 2.2(x' - 1.5)^2$$

Avec  $0 \leq x' \leq 3$ .

**IV.3.1. Test écoulement subsonique-supersonique :**

Dans ce test on va prendre les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} T' = 1 \\ \rho' = 1 \end{array} \right\} 0 \leq x' \leq 0.5$$

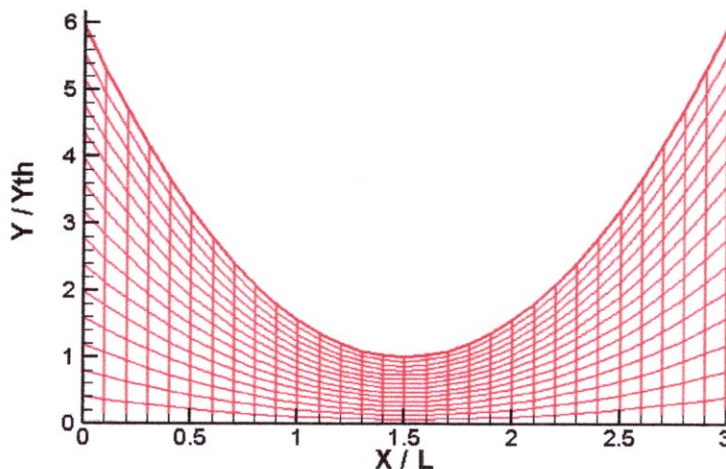
$$\left. \begin{array}{l} T' = 1 - 0.366(x' - 0.5) \\ \rho' = 1 - 0.167(x' - 0.5) \end{array} \right\} 0.5 \leq x' \leq 1.5$$

$$\left. \begin{array}{l} T' = 0.634 - 0.3879(x' - 1.5) \\ \rho' = 1 - 0.3507(x' - 1.5) \end{array} \right\} 1.5 \leq x' \leq 3$$

$$V' = \frac{0.59}{\rho' * A'}$$

**IV.3.1.a. Résultats :**

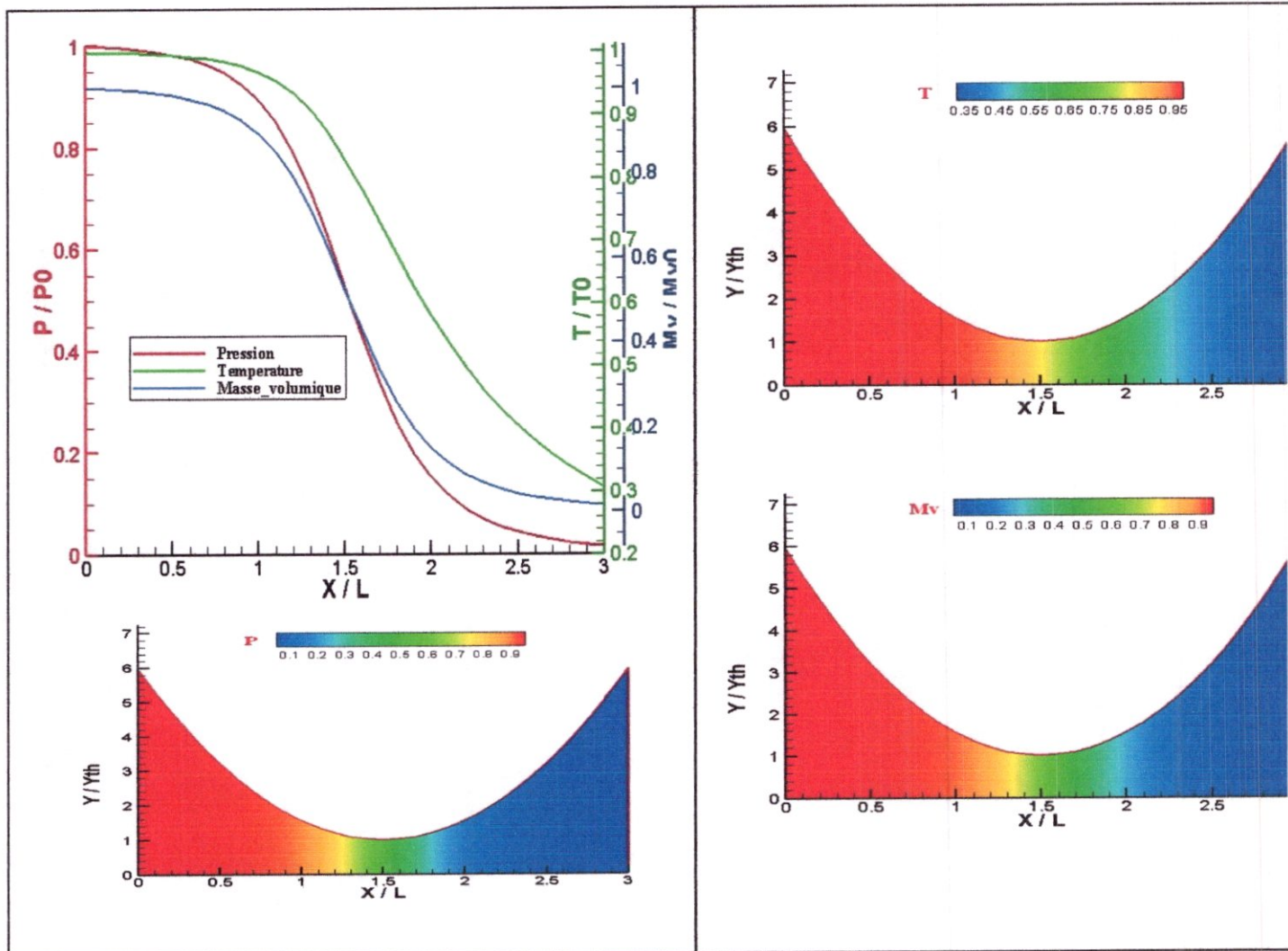
- **Maillage :** Le maillage obtenu par le code est représenté par la figure (9): il est constitué de 31X10 nœuds.



figIV.9 : maillage de tuyere cv-dv

• **Répartition de la pression, température et de la masse volumique :**

La figure 10 représente la variation de la pression, température et de la masse volumique le long de la tuyère.



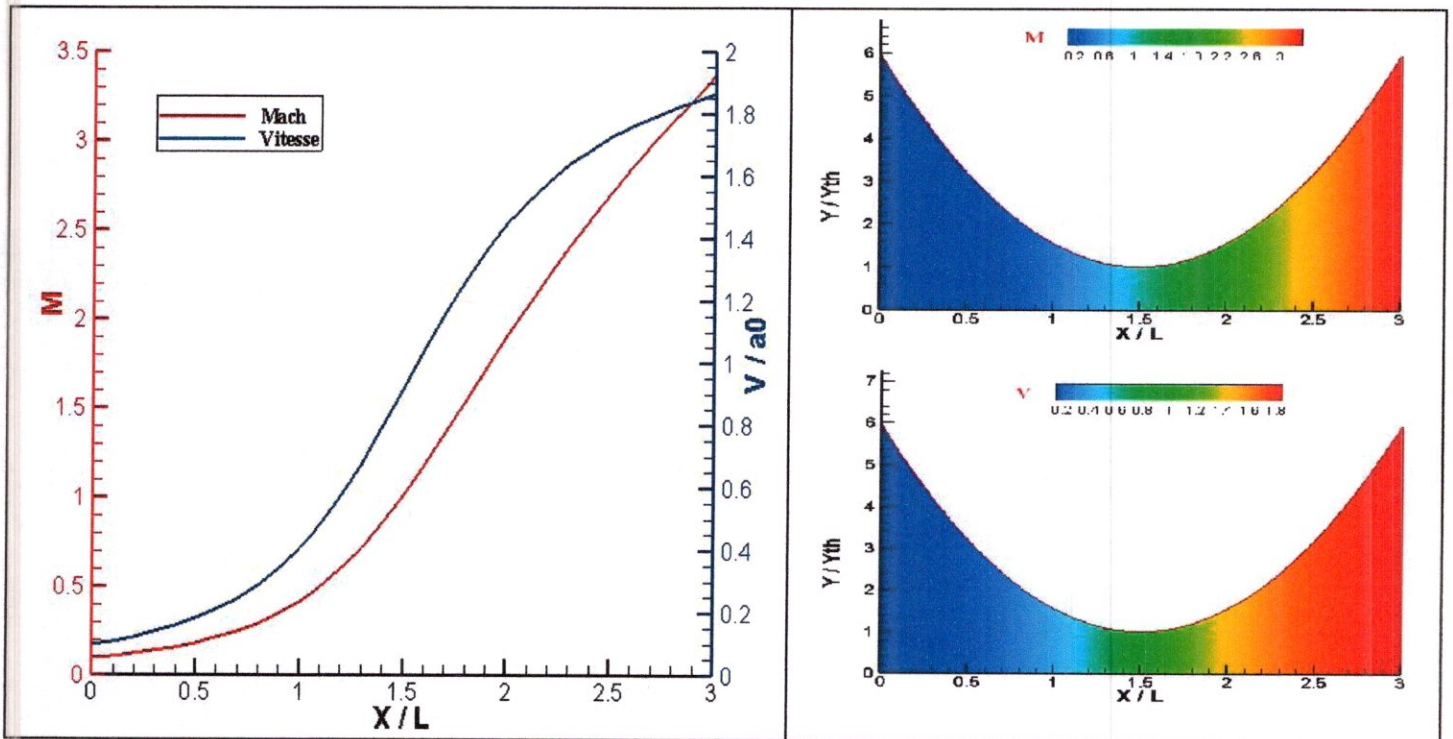
figIV.10 : graphes et contours de T ,masse volumique et P

D'après les figures, on remarque que les trois paramètres (pression, température, vitesse) diminuent de l'entrée jusqu'à la sortie, ceci est naturel car il s'agit d'une détente. Cette dernière se réalise d'une manière progressive dans le convergent. Près du col la variation devient rapide jusqu'à la sortie de la zone de forte gradient (zone de kernel), ensuite la détente continue d'une manière progressive jusqu'à la section de sortie.



• **Répartition de nombre de mach et dela vitesse :**

La figure (IV.11 ) représente les variations de la vitesse et du nombre de mach le long de la tuyère. On remarque la même chose pour la vitesse et le nombre de mach. Ils augmentent de la rentrée à la sortie en passent par une variation progressive dans le convergent, puis une variation rapide près de col et une augmentation progressive jusqu'à la sortie.



FigIV.11 :graphes contours de mach et vitesse

**IV.3.1.b. Comparaison des résultats :**

| Position x | VITESSE       |                        |        | TEMPERATURE   |                        |        |
|------------|---------------|------------------------|--------|---------------|------------------------|--------|
|            | Résultat code | Résultats reference 13 | Erreur | Résultat code | Résultats reference 13 | Erreur |
| 0          | 0.98          | 0.098                  | 0      | 1.00          | 1.00                   | 0      |
| 0.1        | 0.11          | 0.11                   | 0      | 1.00          | 0.999                  | 0.001  |
| 0.2        | 0.124         | 0.124                  | 0      | 0.999         | 0.999                  | 0      |
| ....       |               |                        |        |               |                        |        |
| 1.4        | 0.798         | 0.798                  | 0      | 0.874         | 0.874                  | 0      |
| 1.5        | 0.925         | 0.904                  | 0.021  | 0.83          | 0.839                  | 0.009  |
| 1.6        | 1.045         | 1.046                  | 0.001  | 0.783         | 0.783                  | 0      |
| ....       |               |                        |        |               |                        |        |
| 2.8        | 1.818         | 1.817                  | 0.001  | 0.340         | 0.344                  | 0.004  |
| 2.9        | 1.840         | 1.840                  | 0      | 0.323         | 0.327                  | 0.004  |
| 3.0        | 1.864         | 1.863                  | 0.001  | 0.036         | 0.310                  | 0.004  |

tableau de comparaison des résultats



figIV .12 :tableau de comparaison des resultats

D'après la comparaison de nous résultats avec les résultats la référence (13), on constate que l'erreur est très petit .ceci permet de dire que le code donne des résultats satisfaisant.

Mais pour bien validé notre code on a effectué un deuxième test.

**IV.3.2. Test écoulement subsonique-subsonique :**

Dans ce test on va prendre les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} T' &= 1 \\ \rho' &= 1 \end{aligned} \right\} 0 \leq x' \leq 1.5$$

$$\left. \begin{aligned} T' &= 0.634 - 0.7020(x' - 1.5) \\ \rho' &= 0.833 - 0.4908(x' - 1.5) \end{aligned} \right\} 1.5 \leq x' \leq 2.1$$

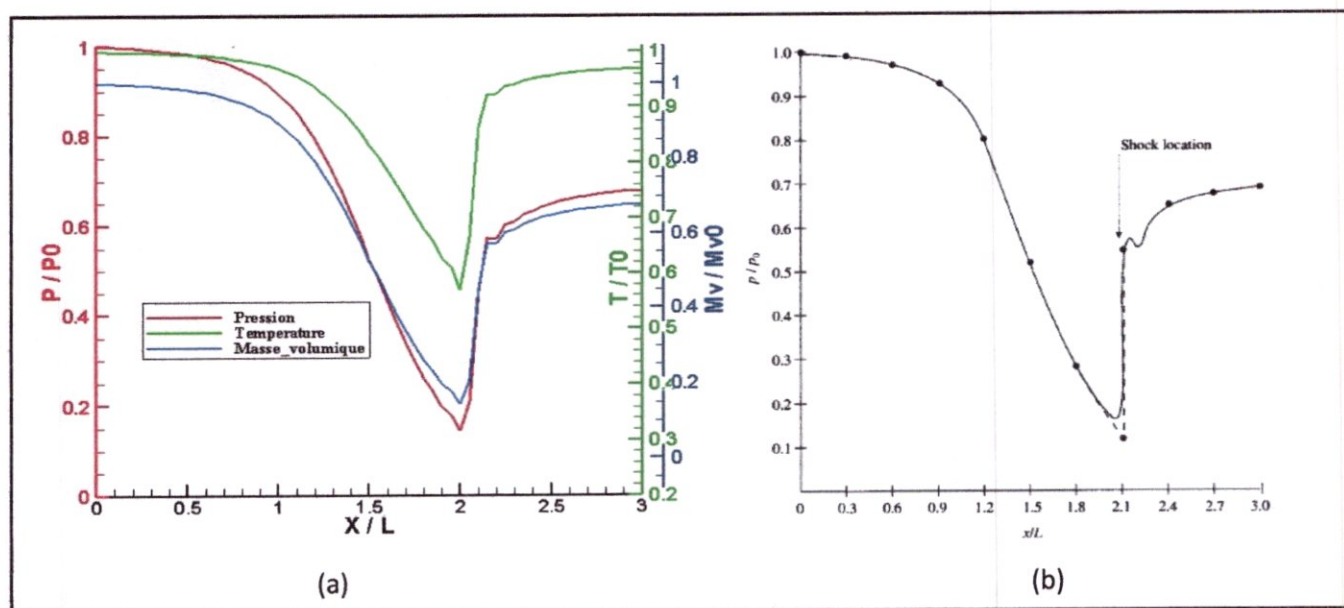
$$\left. \begin{aligned} T' &= 0.5892 - 0.10228(x' - 2.1) \\ \rho' &= 0.93968 - 0.0622(x' - 2.1) \end{aligned} \right\} 2.1 \leq x' \leq 3$$

$$V' = \frac{0.59}{\rho' * A'}$$

Comme l'écoulement a la sortie est subsonique, donc on doit imposer une condition physique qui est la pression : $p' = 0.6784$

**IV.3.2.a. Résultats :**

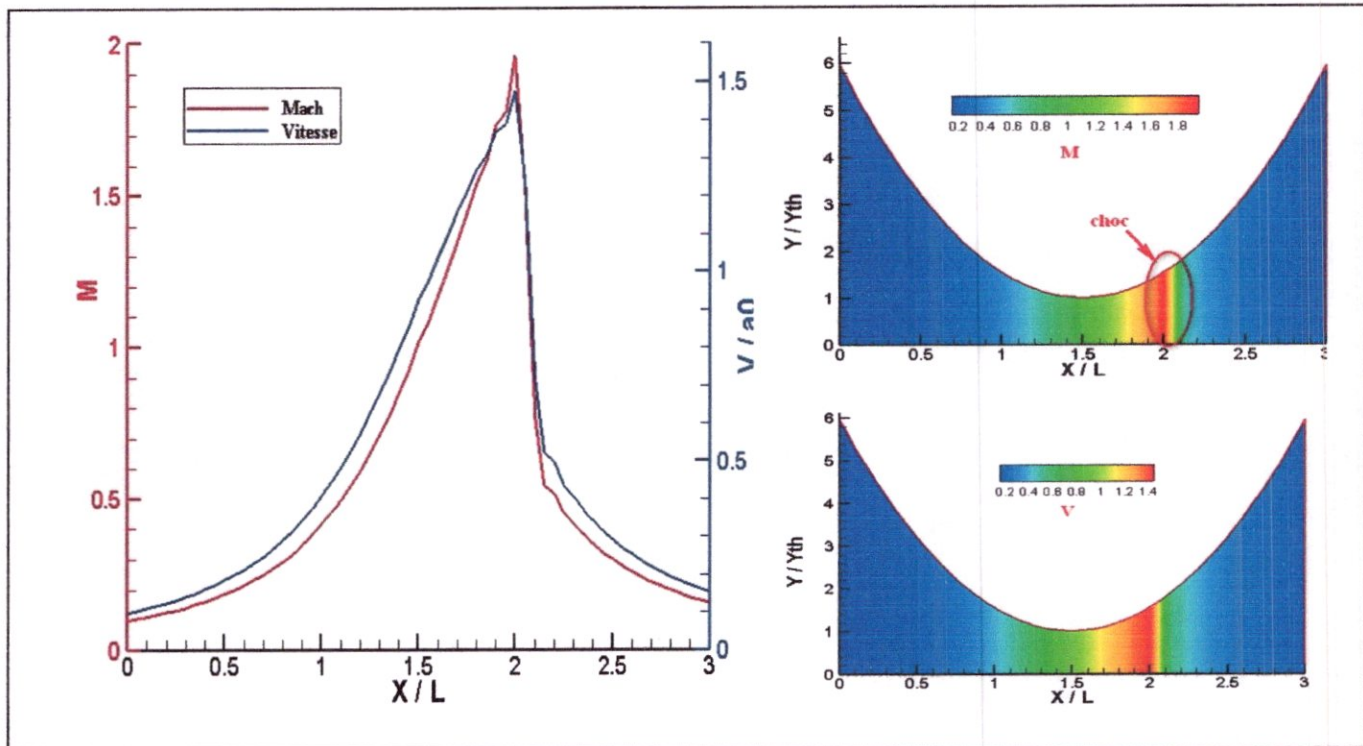
- **Répartition de la pression, température et de la masse volumique :**



figIV.13 (a)graphes de résultats code (b)graphes référence 13

On constate dans les graphes (a) et (b) la présence d'une onde de choc dans le divergent. Si on compare le graphe de pression de (a) avec le graphe (b), on remarque qu'ils sont la même allure avec presque les mêmes valeurs.

- **Répartition de nombre de mach et de la vitesse :**



**figIV .14:graphes et contours de mach ,vitesse avec onde de choc**

D'après la figure du nombre mach et de la vitesse, on constate une augmentation progressive dans le convergent puis rapide au col, mais au voisinage de sortie col il y a une chute rapide de la vitesse et le mach due à la présence d'une onde de choc

**Les résultats obtenu dans les des deux tests et la comparaison avec les résultats de la référence (13) nous permet de valide notre code.**

#### **IV.4. Applications :**

##### **IV.4.1. Tuyère plane :**

Nous nous proposons de simulé de l'écoulement d'un fluide parfait dans une tuyère avec Les données suivantes :

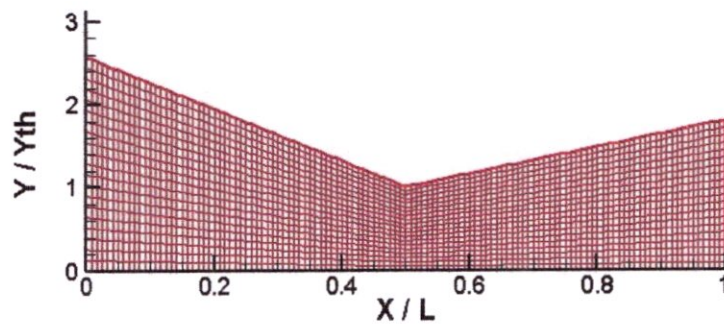
- ✓ Nombre de Mach : 0.232
- ✓ Constante de l'air :  $R=287 \text{ J}/(\text{Kg.K})$
- ✓ Rapport des chaleurs spécifiques :  $\gamma=1.4$
- ✓ Rapport de la pression totale et de la pression statique à la sortie : 0.1135



- ✓ Température :  $T=300K$
- ✓ Pression :  $0.85 \text{ bar}$
- ✓ Longueur horizontale de la tuyère :  $L_h = 0.1156 \text{ m}$
- ✓ Hauteur de l'entrée  $y_i = 0.0352 \text{ m}$
- ✓ Hauteur de la sortie  $y_e = 0.0246 \text{ m}$
- ✓ Hauteur du col  $y_{th} = 0.0137 \text{ m}$

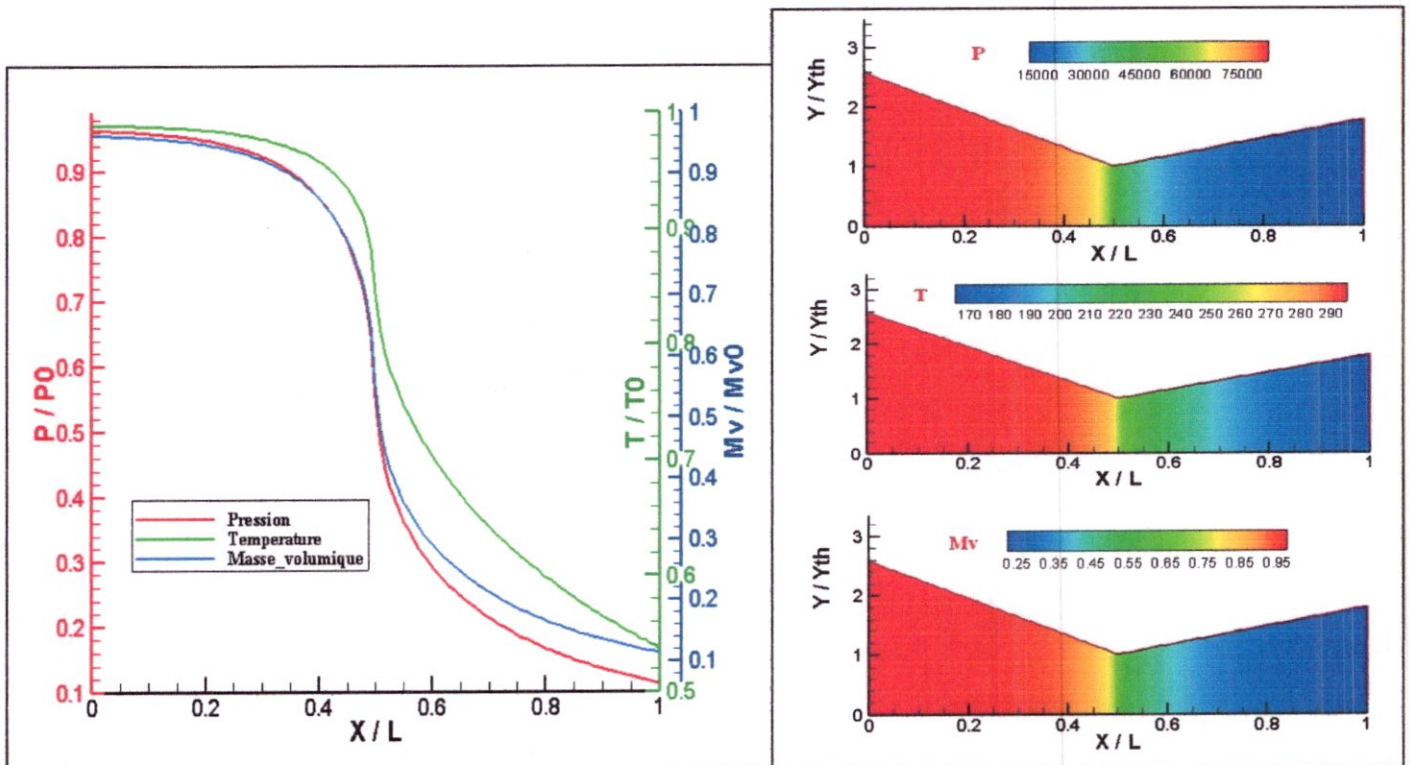
**Résultats :**

- **Maillage :** Le maillage est constitué de  $121 \times 21$  nœuds. il est représenté par la figure suivant :



FigIV.15 :Maillage tuyère plane

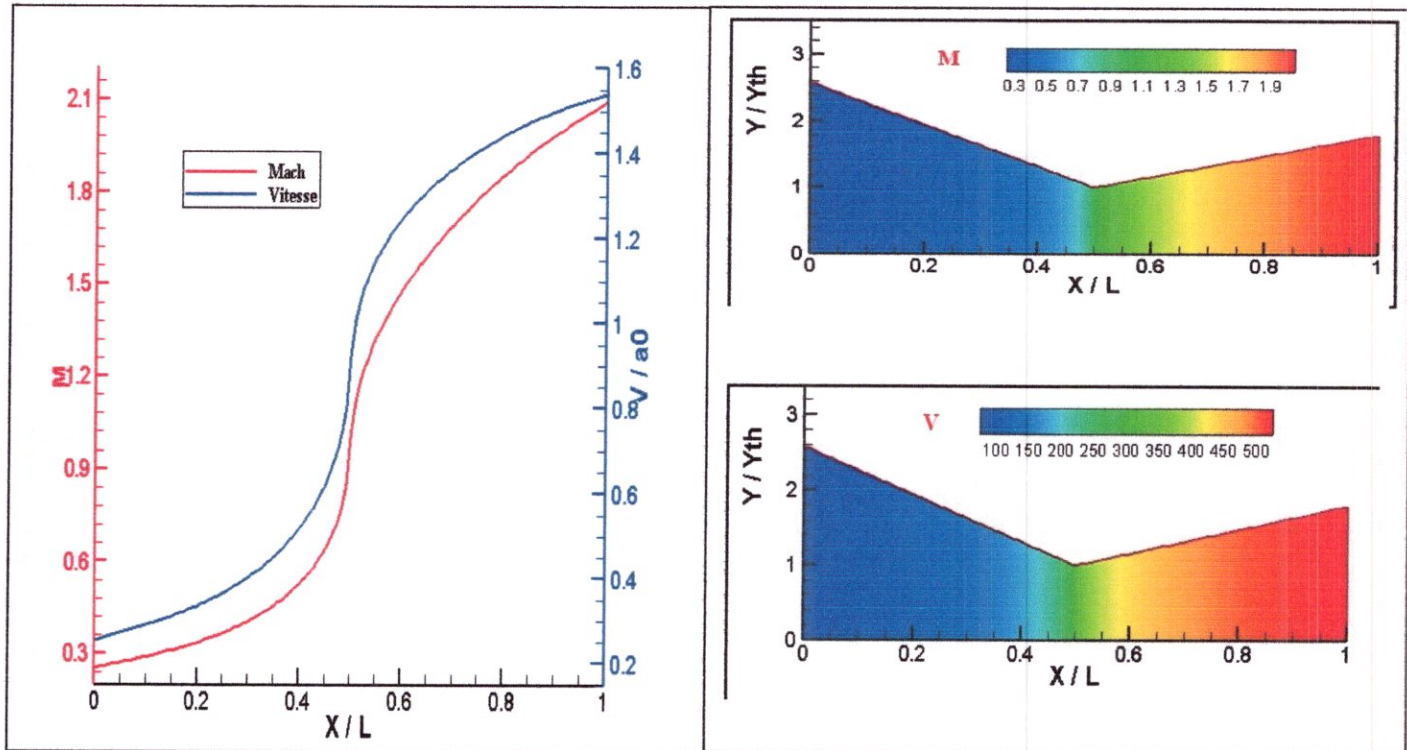
- **Répartition de la pression, température et de la masse volumique**



figIV.16 :graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère plane

Le comportement des trois paramétrés est similaire à celui de la tuyère étudiée précédemment (test 01). on constate que la détente passe par trois phase : progressive au convergent, rapide au col et progressive jusqu'à la sortie.

• **Répartition de nombre de mach et de la vitesse :**



**figIV.17. graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère plane**

On remarque la même chose que l'étude précédente (test 01). La mach et la vitesse augmentent de la rentrée à la sortie en passant par une variation progressive dans le convergent, puis une variation rapide près de col et une augmentation progressive jusqu'à la sortie.

Si on compare nos résultats pour le calcul 1D avec les résultats de la référence (15) qui a fait un calcul 2D, on trouve presque les mêmes valeurs à la sortie.

Le nombre de mach trouve par notre code de calcul est 2.09 et le mach trouve par la référence (15) est varié de 2 jusqu'à 2.12.

**IV.4.2. Tuyère conique :**

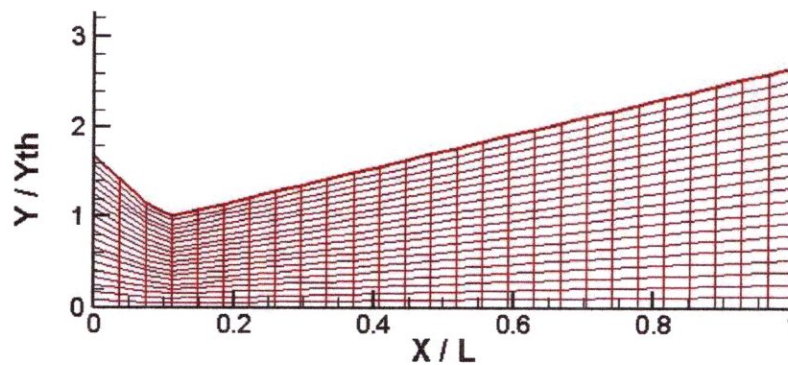
Les données nécessaires au lancement du code sont :

- ✓ Nombre de Mach : 0.232
- ✓ Constante de l'air :  $R=287 \text{ J}/(\text{Kg.K})$
- ✓ Rapport des chaleurs spécifiques :  $\gamma=1.4$
- ✓ Température :  $T=300\text{K}$
- ✓ Pression : 4.82 bar
- ✓ Hauteur de l'entrée  $y_i=0.034\text{m}$
- ✓ Hauteur de la sortie  $y_e=0.0542\text{m}$
- ✓ Hauteur du col  $y_{th}=0.02032\text{m}$
- ✓ Rayon de l'arc :  $r_c=0.0127 \text{ m}$
- ✓ Angle au point d'attach :  $\text{tetan}=45^\circ$
- ✓ Angle de sortie :  $\text{tetae}=15^\circ$
- ✓  $P_x=0.1$

**Résultats :**

- **Maillage :**

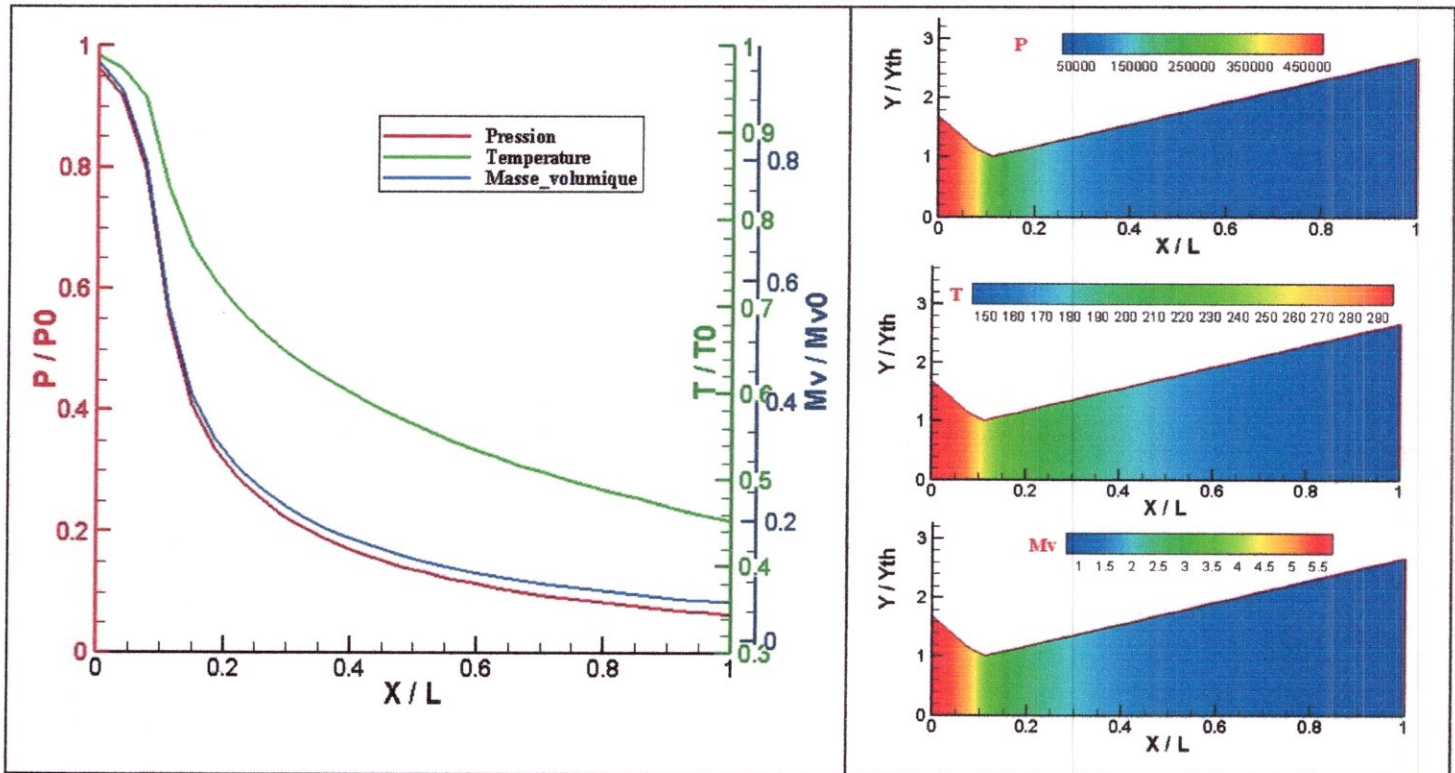
Le maillage est constitué de 28X21 nœuds. il est représenté par la figure suivant :



**figIV.18 :maillage tuyère conique**

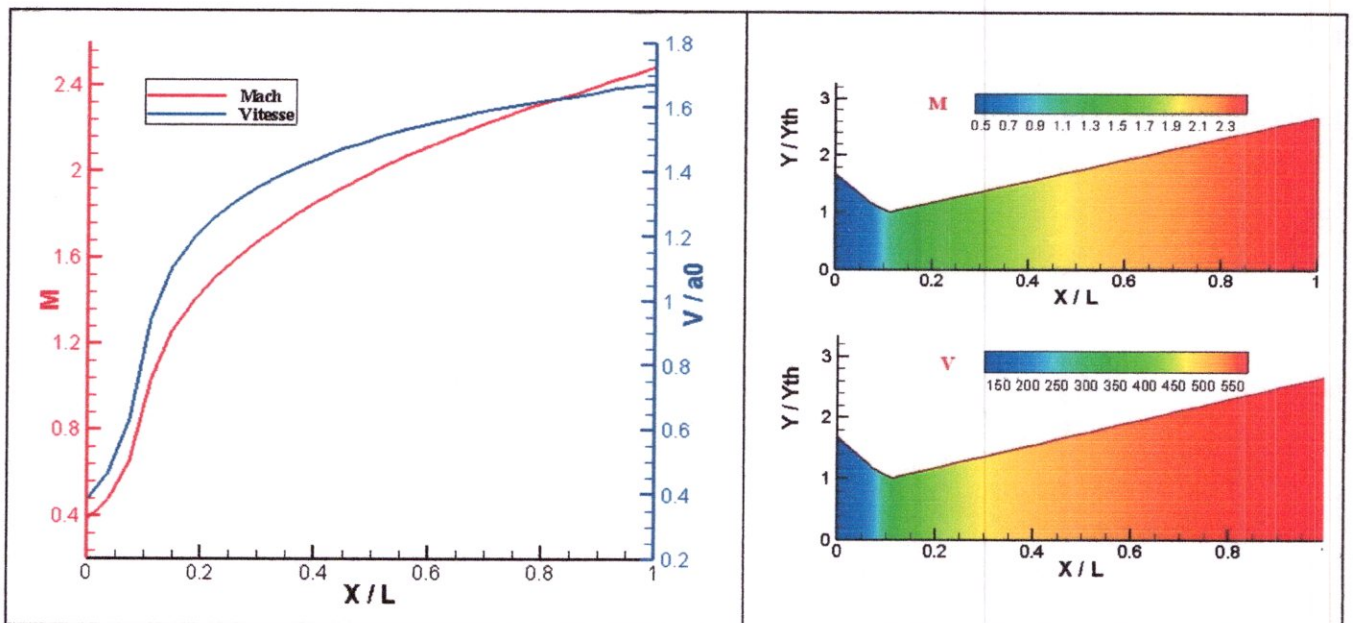


• Répartition de la pression, température et de la masse volumique :



figIV.19 : graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère conique

La figure représente la variation des paramètres pression, température et masse volumique le long de la tuyère. On remarque que les paramètres diminuent de l'entrée jusqu'à la sortie, ceci est naturel car il s'agit d'une détente. Cette dernière se réalise rapidement jusqu'au point d'attache vu que la partie convergent est petite. Ensuite la détente se poursuit d'une manière progressive jusqu'à la sortie. la même chose pour le mach et la vitesse.



FigIV.20 : graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère conique

**IV.4.3. Tuyère profilée :**

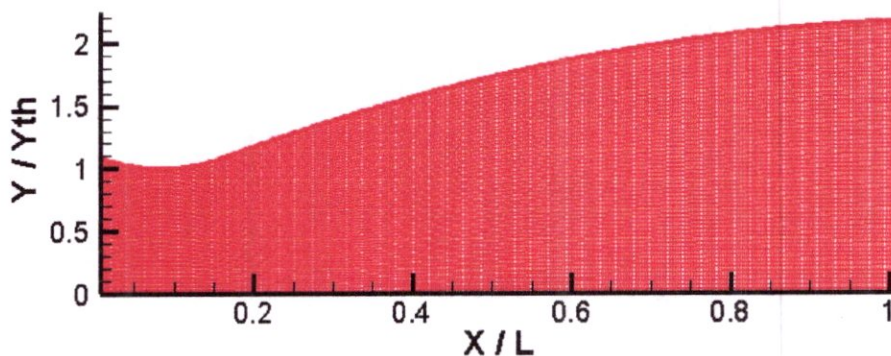
Les données nécessaires au lancement du code sont :

- ✓ Nombre de Mach : 0.232
- ✓ Constante de l'air :  $R=287 \text{ J}/(\text{Kg.K})$
- ✓ Rapport des chaleurs spécifiques :  $\gamma=1.4$
- ✓ Température :  $T=960\text{K}$
- ✓ Pression : 2.1 bar
- ✓ Longueur du divergent :  $ldv=0.08684 \text{ m}$
- ✓ Hauteur du col  $y_{th}=0.01\text{m}$
- ✓ Rayon de l'arc avant col :  $r_{bt}=0.03\text{m}$
- ✓ Rayon de l'arc après col :  $r_{at}=0.03$
- ✓ Angle au Rayon de l'arc avant col :  $t_{etain}=14^\circ$
- ✓ Angle au point d'attache :  $t_{etan}=13.7486^\circ$
- ✓ Angle de sortie :  $t_{etae}=1.61^\circ$

**Résultats :**

- **Maillage :**

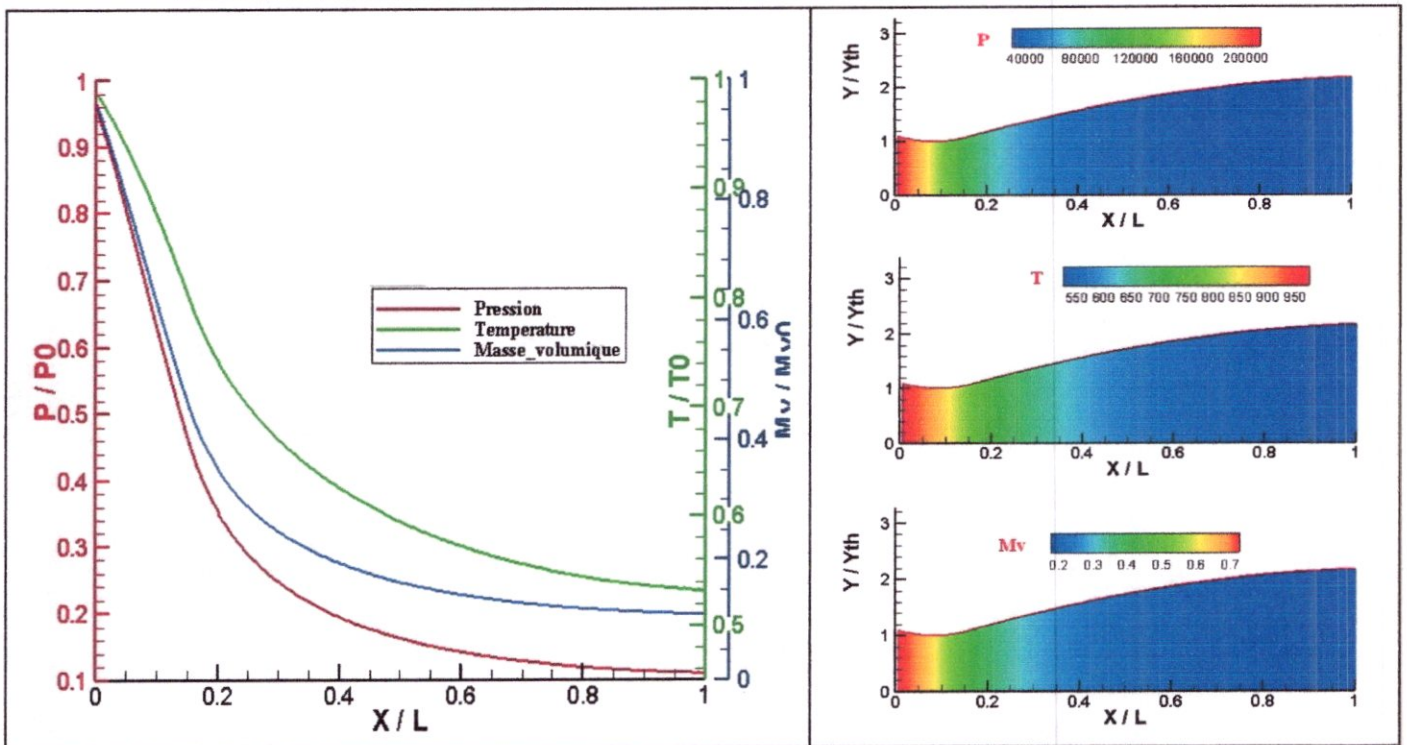
Le maillage est constitué de 261X61 nœuds. il est représenté par la figure suivante :



**FigIV.21 :Maillage tuyère profilée**

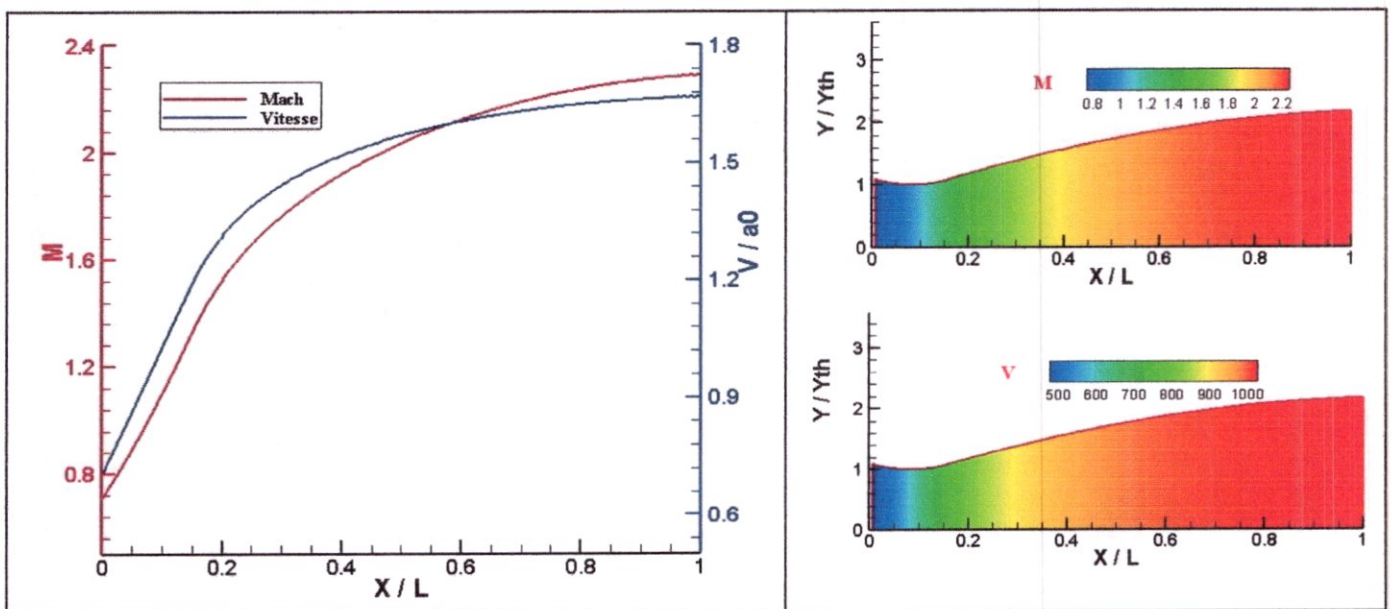


**Répartition de la pression, température et de la masse volumique**



figIV.22. : graphes et contours de T ,masse volumique et P pour tuyère

On remarque que les paramètres diminuent de l'entrée jusqu'à la sortie comme la tuyère conique, ceci est naturel car il s'agit d'une détente. Pour cette tuyère la détente se réalise encore plus rapide jusqu'au point d'attache vue que la partie convergent est petite. Ensuite la détente se poursuit d'une manière progressive jusqu'à la sortie .la même chose pour le mach et la vitesse, et c'est la même chose pour la vitesse et le mach



figIV.23.: graphes et contours de mach ,vitesse pour tuyère profilée

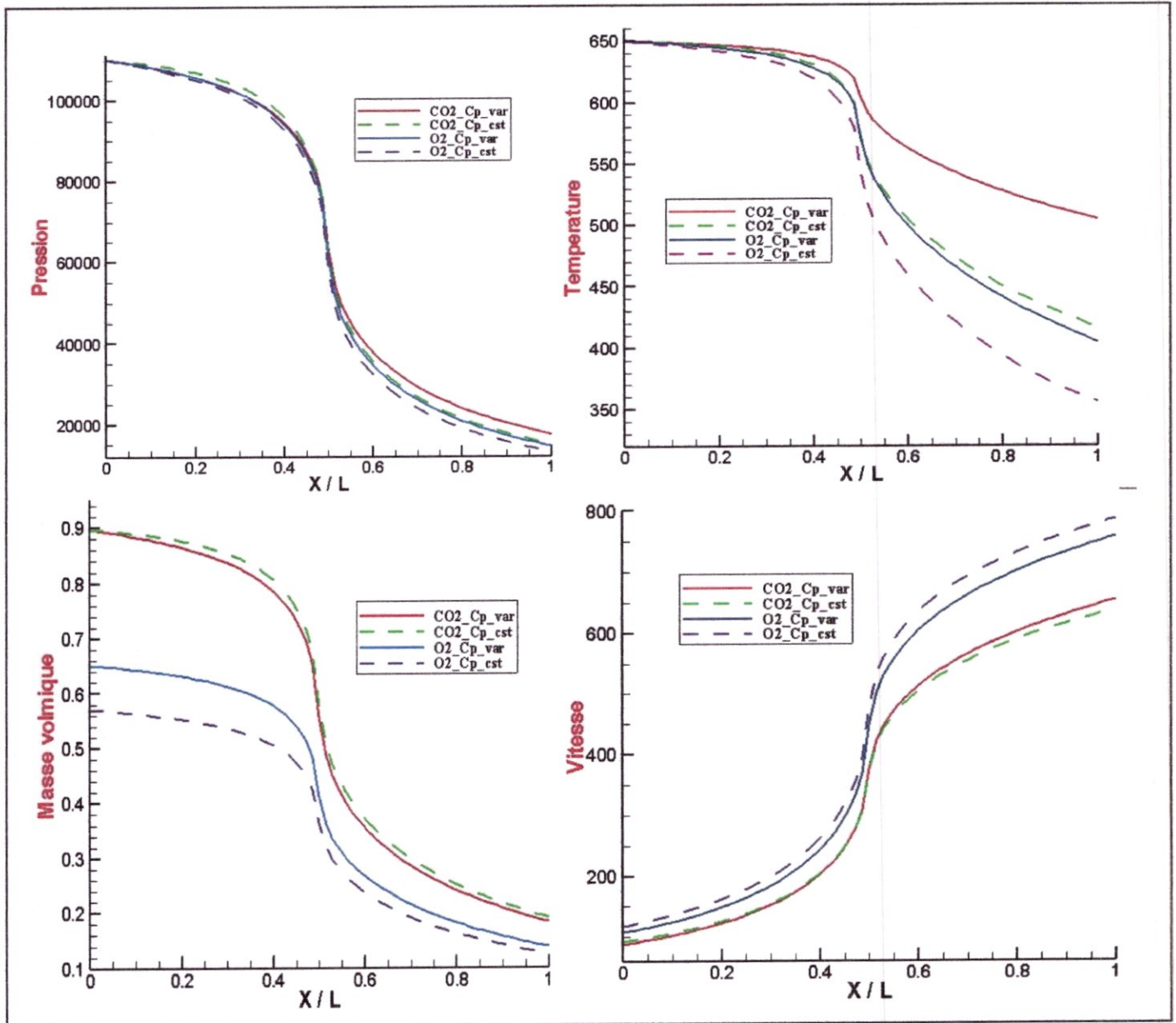


**IV.4.4. Tuyère plane avec variation de la chaleur spécifique Cp :**

On a choisi deux gaz CO<sub>2</sub> et le O<sub>2</sub> pour voir l'effet de cp sur l'écoulement. Les données utilise sont celui du la première application est on a changé les paramètres suivent :

- ✓ Température : T = 650K
- ✓ Pression : 1.1 bar

**Résultats :**



figIV.24 :graphes des résultats avec cp constant et cp variable pour O<sub>2</sub>,CO<sub>2</sub>

D'après les graphes on remarque l'influence de la chaleur spécifique sur les paramètres et cela apparait avec la progression de la détente le long de la tuyère.

#### **IV.5. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté notre code de calcul ainsi que on a effectué des tests de simulation pour le valider avec les résultats des études précédents. et pour termine on a effectué quelque application sur diffèrent tuyère

## Conclusion générale et Perspectives

### CONCLUSION GENERALE :

Le but principal de ce travail était d'élaborer un code de calcul pour la simulation des écoulements axisymétrique orienté principalement pour les tuyères de forme convergente-divergente. Le système des équations d'Euler est pris comme modèle mathématique, il est résolu par la méthode de Maccormack explicite.

On a élaboré notre code avec le langage fortran, et nous avons fait une interface graphique pour une meilleure utilisation du code. Ce dernier permet de traiter trois types de tuyère : plane, conique et profilée.

Par ailleurs, la simulation numérique de l'écoulement se repartie en deux parties essentielles :

- ✓ Génération du maillage, qui nous permet de discrétiser le modèle mathématique et de contrôler la convergence de la solution.
- ✓ La résolution par une méthode numérique.

Cette étude nous a permis de familiariser avec les différents maillages soit raffiné ou non-raffiné, et de connaître son influence sur les résultats de la simulation. Le nombre de nœuds et le pas de raffinement ont une influence directe sur la convergence de la solution. C'est pour cela que pour chaque type de tuyère et pour chaque caractéristique géométrique, il y a un maillage adéquat qui permet d'atteindre la convergence.

Les résultats sont représentés sous forme de courbes et de contours pour chaque paramètre (Mach, Pression, Masse volumique, Température et Vitesse). Le comportement de ces dernières est cohérent avec les relations de la dynamique des gaz. En effet, pour le cas où des conditions de formation d'une onde de choc interne, le schéma avec la viscosité artificielle nous a permis une capture automatique de ce choc.

## **Conclusion générale et Perspectives**

Les résultats obtenus par notre code concordent avec ceux obtenue par les études précédentes à l'image des deux références (13) et (15).

### **Recommandations pour d'éventuels travaux futurs :**

L'actuelle étude bien qu'assez complète dans son principe, pourrait recevoir d'intéressants développements. Nous en recommandons particulièrement celui lié à l'extension du schéma 2D qui pourrait valider d'une manière décisive une telle approche bien qu'une initiative dans ce sens a été lancée.

Une intégration de routines d'évaluation de la couche limite qui se développant près de la paroi (bien que celle-ci soit généralement très faible pour les écoulements supersoniques) pourrait être intéressante.

Toutes fois, nous espérons que ce travail puisse servir de base pour un développement ultérieur progressif dans le domaine des écoulements supersoniques dans les tuyères de propulsion.

## REFERENCES

- [1] JEAN DELERY, "*Traité d'aérodynamique compressible, Volume 2, écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité*", Lavoisier, 2008.
- [2] ANDRE LALLEMEND, "*Écoulement monodimensionnel des fluides compressibles*", Techniques de l'ingénieur Génie énergétique – B 8 165.
- [3] YOHANN PERROT, "*étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible*", Thèse de doctorat, INSA de Rouen 2006.
- [4] S. CANDEL, "*Mécanique des Fluides*", Dunod 1995.
- [5] INGEL RYHMING, "*Dynamiques des Fluides*", Presses Polytechniques Romandes 1985.
- [6] R. COMOLET, "*Mécanique expérimentale des fluides, Tome I*", Masson, 1990
- [7] REIJASSE, P, "*Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé*", PhD Thesis, Université de Paris VI, 2005.
- [8] JEAN DELERY, "*Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps*", Département Aérothermodynamique, E.N.S.A.E, 1989.
- [9] HIRSCH.C. "*Numerical computation of internal and external flows*", Vol II, John Wiley & Sonc, 1990
- [10] KWON.J.H - JEONG.H.K. "*Solution-adaptive grid generation for compressible flow*", Computers & Fluids, Vol.25 - N°6, pp 551-560,1996
- [11] ROE.P.L. "*Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*", JI of computational Physics 43, 357-372, 1981
- [12] HIRSCH.C. "*Numerical computation of internal and external flows*", Vol I, John Wiley & Sonc, 1990
- [13] Anderson, J.D. "*Computational fluid dynamics; The basic with application*" McGraw-Hill Book. ISBN 0-07-001685-2, 1995.

Peric  
[14] Ferziger, J.H et Peric. M. " *Computational methods for fluid dynamics*", Springer 3<sup>rd</sup>  
rev edition, 2002. OK

[15] EUTAMEN. S, " *Etude numérique de l'écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère*". M.S. Thesis, Université MENTOURI-CONSTANTINE, 2010. (à vérifier)

## ANNEXE

Dans cette annexe, se regroupent tous les résultats du code qui ont été utilisées pour tracer les graphes et les contours ,avec les résultats de la référence (13) qui sert à la validation

### 1-TEST écoulement subsonique-supersonique :

Resultas du code :

| resultas admtnl - Bloc notes |         |        |             |       |          |       |  |
|------------------------------|---------|--------|-------------|-------|----------|-------|--|
| Fichier                      | Edition | Format | Affichage ? |       |          |       |  |
| x                            | A       | $\rho$ | vitesse     | T     | pression | Mach  |  |
| .0000                        | 5.950   | 1.000  | .098        | 1.000 | 1.000    | .098  |  |
| .1000                        | 5.312   | .999   | .110        | 1.000 | .958     | .110  |  |
| .2000                        | 4.718   | .997   | .124        | .999  | .956     | .124  |  |
| .3000                        | 4.168   | .995   | .141        | .998  | .953     | .141  |  |
| .4000                        | 3.662   | .992   | .161        | .997  | .949     | .161  |  |
| .5000                        | 3.200   | .988   | .185        | .995  | .943     | .185  |  |
| .6000                        | 2.782   | .982   | .214        | .993  | .935     | .214  |  |
| .7000                        | 2.408   | .974   | .249        | .989  | .926     | .250  |  |
| .8000                        | 2.078   | .962   | .292        | .985  | .916     | .294  |  |
| .9000                        | 1.792   | .946   | .345        | .978  | .904     | .348  |  |
| 1.0000                       | 1.550   | .923   | .408        | .968  | .891     | .415  |  |
| 1.1000                       | 1.352   | .891   | .485        | .955  | .876     | .497  |  |
| 1.2000                       | 1.198   | .847   | .576        | .935  | .859     | .596  |  |
| 1.3000                       | 1.088   | .789   | .681        | .909  | .841     | .715  |  |
| 1.4000                       | 1.022   | .718   | .798        | .874  | .824     | .853  |  |
| 1.5000                       | 1.000   | .633   | .925        | .830  | .803     | 1.015 |  |
| 1.6000                       | 1.022   | .547   | 1.045       | .783  | .773     | 1.181 |  |
| 1.7000                       | 1.088   | .462   | 1.163       | .731  | .758     | 1.360 |  |
| 1.8000                       | 1.198   | .384   | 1.270       | .679  | .736     | 1.542 |  |
| 1.9000                       | 1.352   | .317   | 1.367       | .628  | .719     | 1.725 |  |
| 2.0000                       | 1.550   | .260   | 1.451       | .581  | .701     | 1.904 |  |
| 2.1000                       | 1.792   | .214   | 1.523       | .537  | .684     | 2.078 |  |
| 2.2000                       | 2.078   | .178   | 1.585       | .498  | .668     | 2.246 |  |
| 2.3000                       | 2.408   | .148   | 1.639       | .464  | .653     | 2.407 |  |
| 2.4000                       | 2.782   | .125   | 1.685       | .433  | .639     | 2.561 |  |
| 2.5000                       | 3.200   | .106   | 1.725       | .406  | .626     | 2.708 |  |
| 2.6000                       | 3.662   | .091   | 1.760       | .381  | .613     | 2.850 |  |
| 2.7000                       | 4.168   | .078   | 1.790       | .360  | .601     | 2.984 |  |
| 2.8000                       | 4.718   | .068   | 1.818       | .340  | .590     | 3.117 |  |
| 2.9000                       | 5.312   | .060   | 1.840       | .327  | .580     | 3.216 |  |
| 3.0000                       | 5.950   | .053   | 1.864       | .306  | .570     | 3.369 |  |

Resultats de la reference 13 :

| $\frac{x}{L}$ | $\frac{A}{A^*}$ | $\frac{\rho}{\rho_0}$ | $\frac{V}{a_0}$ | $\frac{T}{T_0}$ | $\frac{P}{P_0}$ | M     |
|---------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| 0.000         | 5.950           | 1.000                 | 0.098           | 1.000           | 1.000           | 0.098 |
| 0.100         | 5.312           | 0.999                 | 0.110           | 0.999           | 0.998           | 0.110 |
| 0.200         | 4.718           | 0.997                 | 0.124           | 0.999           | 0.996           | 0.124 |
| 0.300         | 4.168           | 0.995                 | 0.141           | 0.998           | 0.993           | 0.141 |
| 0.400         | 3.662           | 0.992                 | 0.161           | 0.997           | 0.989           | 0.161 |
| 0.500         | 3.200           | 0.988                 | 0.184           | 0.995           | 0.983           | 0.185 |
| 0.600         | 2.782           | 0.982                 | 0.213           | 0.993           | 0.975           | 0.214 |
| 0.700         | 2.408           | 0.974                 | 0.249           | 0.989           | 0.964           | 0.250 |
| 0.800         | 2.078           | 0.962                 | 0.292           | 0.985           | 0.948           | 0.294 |
| 0.900         | 1.792           | 0.946                 | 0.344           | 0.978           | 0.926           | 0.348 |
| 1.000         | 1.550           | 0.923                 | 0.408           | 0.969           | 0.894           | 0.415 |
| 1.100         | 1.352           | 0.891                 | 0.485           | 0.955           | 0.851           | 0.496 |
| 1.200         | 1.198           | 0.847                 | 0.577           | 0.935           | 0.792           | 0.596 |
| 1.300         | 1.088           | 0.789                 | 0.682           | 0.909           | 0.718           | 0.715 |
| 1.400         | 1.022           | 0.718                 | 0.798           | 0.874           | 0.628           | 0.854 |
| 1.500         | 1.000           | 0.648                 | 0.904           | 0.839           | 0.544           | 0.987 |
| 1.600         | 1.022           | 0.548                 | 1.046           | 0.783           | 0.429           | 1.182 |
| 1.700         | 1.088           | 0.462                 | 1.164           | 0.731           | 0.338           | 1.361 |
| 1.800         | 1.198           | 0.384                 | 1.272           | 0.679           | 0.261           | 1.544 |
| 1.900         | 1.352           | 0.316                 | 1.368           | 0.628           | 0.198           | 1.726 |
| 2.000         | 1.550           | 0.260                 | 1.452           | 0.581           | 0.151           | 1.905 |
| 2.100         | 1.792           | 0.214                 | 1.524           | 0.538           | 0.115           | 2.077 |
| 2.200         | 2.078           | 0.177                 | 1.586           | 0.500           | 0.088           | 2.243 |
| 2.300         | 2.408           | 0.148                 | 1.639           | 0.466           | 0.069           | 2.402 |
| 2.400         | 2.782           | 0.124                 | 1.685           | 0.436           | 0.054           | 2.554 |
| 2.500         | 3.200           | 0.106                 | 1.725           | 0.409           | 0.043           | 2.698 |
| 2.600         | 3.662           | 0.090                 | 1.760           | 0.384           | 0.035           | 2.838 |
| 2.700         | 4.168           | 0.078                 | 1.790           | 0.363           | 0.028           | 2.969 |
| 2.800         | 4.718           | 0.068                 | 1.817           | 0.344           | 0.023           | 3.100 |
| 2.900         | 5.312           | 0.060                 | 1.840           | 0.327           | 0.019           | 3.216 |
| 3.000         | 5.950           | 0.052                 | 1.863           | 0.310           | 0.016           | 3.345 |



## 2-TEST écoulement subsonique –subsonique :

Résultats du code :

Resultats de la reference 13 :

resultats admim Bloc notes

Fileur Edition Format Affichage ?

| x      | A     | mv    | vitesse | T     | pression | Mach  |
|--------|-------|-------|---------|-------|----------|-------|
| .0000  | 3.950 | 1.000 | .098    | 1.000 | 1.000    | .098  |
| .0500  | 3.626 | .999  | .104    | .999  | .999     | .104  |
| .1000  | 3.317 | .999  | .110    | 1.000 | .998     | .110  |
| .1500  | 3.020 | .998  | .117    | .999  | .997     | .117  |
| .2000  | 4.728 | .997  | .124    | .999  | .996     | .124  |
| .2500  | 4.438 | .996  | .132    | .998  | .995     | .132  |
| .3000  | 4.168 | .995  | .141    | .998  | .993     | .141  |
| .3500  | 3.920 | .994  | .150    | .997  | .991     | .150  |
| .4000  | 3.682 | .992  | .160    | .997  | .989     | .160  |
| .4500  | 3.426 | .990  | .172    | .996  | .986     | .172  |
| .5000  | 3.200 | .988  | .184    | .995  | .983     | .184  |
| .5500  | 2.986 | .985  | .198    | .994  | .979     | .199  |
| .6000  | 2.782 | .982  | .215    | .993  | .973     | .214  |
| .6500  | 2.590 | .978  | .230    | .991  | .970     | .231  |
| .7000  | 2.408 | .974  | .248    | .990  | .964     | .250  |
| .7500  | 2.238 | .969  | .269    | .987  | .957     | .270  |
| .8000  | 2.078 | .963  | .291    | .983  | .948     | .292  |
| .8500  | 1.930 | .955  | .316    | .982  | .938     | .314  |
| .9000  | 1.792 | .947  | .344    | .978  | .926     | .347  |
| .9500  | 1.666 | .936  | .374    | .974  | .912     | .379  |
| 1.0000 | 1.550 | .924  | .407    | .969  | .895     | .414  |
| 1.0500 | 1.446 | .909  | .443    | .963  | .875     | .452  |
| 1.1000 | 1.352 | .892  | .480    | .955  | .852     | .495  |
| 1.1500 | 1.270 | .871  | .527    | .946  | .825     | .542  |
| 1.2000 | 1.198 | .848  | .574    | .936  | .794     | .593  |
| 1.2500 | 1.138 | .821  | .621    | .924  | .759     | .649  |
| 1.3000 | 1.088 | .790  | .678    | .910  | .719     | .710  |
| 1.3500 | 1.050 | .756  | .734    | .894  | .676     | .777  |
| 1.4000 | 1.027 | .719  | .790    | .876  | .630     | .847  |
| 1.4500 | 1.006 | .679  | .854    | .856  | .581     | .923  |
| 1.5000 | 1.000 | .632  | .922    | .832  | .527     | 1.011 |
| 1.5500 | 1.008 | .590  | .993    | .812  | .484     | 1.080 |
| 1.6000 | 1.022 | .548  | 1.041   | .785  | .430     | 1.174 |
| 1.6500 | 1.050 | .507  | 1.096   | .761  | .386     | 1.256 |
| 1.7000 | 1.088 | .461  | 1.160   | .733  | .338     | 1.354 |
| 1.7500 | 1.138 | .423  | 1.209   | .709  | .301     | 1.436 |
| 1.8000 | 1.198 | .382  | 1.270   | .680  | .260     | 1.540 |
| 1.8500 | 1.270 | .352  | 1.309   | .658  | .231     | 1.614 |
| 1.9000 | 1.352 | .313  | 1.372   | .627  | .196     | 1.732 |
| 1.9500 | 1.446 | .282  | 1.390   | .613  | .179     | 1.777 |
| 2.0000 | 1.550 | .252  | 1.477   | .569  | .143     | 1.959 |
| 2.0500 | 1.666 | .212  | 1.232   | .663  | .207     | 1.513 |
| 2.1000 | 1.792 | .222  | .709    | .803  | .421     | .763  |
| 2.1500 | 1.930 | .190  | .577    | .977  | .471     | .543  |
| 2.2000 | 2.078 | .168  | .498    | .923  | .370     | .518  |
| 2.2500 | 2.238 | .143  | .438    | .936  | .302     | .435  |
| 2.3000 | 2.408 | .118  | .408    | .940  | .259     | .420  |
| 2.3500 | 2.590 | .091  | .369    | .946  | .225     | .380  |
| 2.4000 | 2.782 | .066  | .347    | .950  | .193     | .352  |
| 2.4500 | 2.986 | .043  | .315    | .954  | .162     | .322  |
| 2.5000 | 3.200 | .027  | .293    | .957  | .148     | .299  |

| $\frac{x}{L}$ | $\frac{A}{A^*}$ | $\frac{\rho}{\rho_0}$ | $\frac{V}{a_0}$ | $\frac{T}{T_0}$ | $\frac{p}{p_0}$ | M     |
|---------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| 0.000         | 5.950           | 1.000                 | 0.098           | 1.000           | 1.000           | 0.098 |
| 0.050         | 5.626           | 0.999                 | 0.103           | 1.000           | 0.999           | 0.103 |
| 0.100         | 5.312           | 0.999                 | 0.110           | 1.000           | 0.998           | 0.110 |
| 0.150         | 5.010           | 0.998                 | 0.116           | 0.999           | 0.997           | 0.116 |
| 0.200         | 4.718           | 0.997                 | 0.124           | 0.999           | 0.996           | 0.124 |
| 0.250         | 4.438           | 0.996                 | 0.132           | 0.998           | 0.995           | 0.132 |
| 0.300         | 4.168           | 0.995                 | 0.140           | 0.998           | 0.993           | 0.140 |
| 0.350         | 3.910           | 0.994                 | 0.150           | 0.997           | 0.991           | 0.150 |
| 0.400         | 3.662           | 0.992                 | 0.160           | 0.997           | 0.989           | 0.160 |
| 0.450         | 3.425           | 0.990                 | 0.172           | 0.996           | 0.986           | 0.172 |
| 0.500         | 3.200           | 0.988                 | 0.184           | 0.995           | 0.983           | 0.184 |
| 0.550         | 2.985           | 0.985                 | 0.198           | 0.994           | 0.979           | 0.198 |
| 0.600         | 2.782           | 0.982                 | 0.213           | 0.993           | 0.975           | 0.214 |
| 0.650         | 2.589           | 0.979                 | 0.230           | 0.991           | 0.970           | 0.231 |
| 0.700         | 2.408           | 0.974                 | 0.248           | 0.990           | 0.964           | 0.249 |
| 0.750         | 2.237           | 0.969                 | 0.268           | 0.987           | 0.957           | 0.270 |
| 0.800         | 2.078           | 0.963                 | 0.291           | 0.985           | 0.948           | 0.293 |
| 0.850         | 1.929           | 0.956                 | 0.316           | 0.982           | 0.938           | 0.319 |
| 0.900         | 1.792           | 0.947                 | 0.343           | 0.978           | 0.926           | 0.347 |
| 0.950         | 1.665           | 0.936                 | 0.373           | 0.974           | 0.912           | 0.378 |
| 1.000         | 1.550           | 0.924                 | 0.407           | 0.969           | 0.895           | 0.413 |
| 1.050         | 1.445           | 0.909                 | 0.443           | 0.963           | 0.875           | 0.452 |
| 1.100         | 1.352           | 0.892                 | 0.483           | 0.955           | 0.852           | 0.494 |
| 1.150         | 1.270           | 0.872                 | 0.526           | 0.946           | 0.825           | 0.541 |
| 1.200         | 1.198           | 0.848                 | 0.573           | 0.936           | 0.794           | 0.593 |
| 1.250         | 1.138           | 0.821                 | 0.624           | 0.924           | 0.759           | 0.649 |
| 1.300         | 1.088           | 0.791                 | 0.678           | 0.910           | 0.720           | 0.710 |
| 1.350         | 1.050           | 0.757                 | 0.734           | 0.894           | 0.677           | 0.776 |
| 1.400         | 1.022           | 0.719                 | 0.793           | 0.876           | 0.630           | 0.847 |
| 1.450         | 1.006           | 0.679                 | 0.854           | 0.856           | 0.581           | 0.923 |
| 1.500         | 1.000           | 0.633                 | 0.921           | 0.832           | 0.527           | 1.009 |
| 1.550         | 1.005           | 0.596                 | 0.973           | 0.812           | 0.484           | 1.080 |
| 1.600         | 1.022           | 0.549                 | 1.040           | 0.786           | 0.431           | 1.173 |
| 1.650         | 1.049           | 0.507                 | 1.096           | 0.761           | 0.386           | 1.256 |
| 1.700         | 1.088           | 0.462                 | 1.159           | 0.734           | 0.339           | 1.353 |
| 1.750         | 1.137           | 0.424                 | 1.210           | 0.709           | 0.301           | 1.437 |
| 1.800         | 1.198           | 0.383                 | 1.268           | 0.680           | 0.261           | 1.538 |
| 1.850         | 1.269           | 0.351                 | 1.311           | 0.658           | 0.231           | 1.617 |
| 1.900         | 1.352           | 0.315                 | 1.368           | 0.628           | 0.198           | 1.725 |
| 1.950         | 1.445           | 0.289                 | 1.398           | 0.611           | 0.177           | 1.788 |
| 2.000         | 1.550           | 0.256                 | 1.462           | 0.574           | 0.147           | 1.930 |
| 2.050         | 1.665           | 0.218                 | 1.207           | 0.677           | 0.215           | 1.467 |
| 2.100         | 1.792           | 0.524                 | 0.697           | 0.872           | 0.457           | 0.747 |
| 2.150         | 1.929           | 0.619                 | 0.521           | 0.925           | 0.573           | 0.542 |
| 2.200         | 2.078           | 0.613                 | 0.501           | 0.926           | 0.567           | 0.521 |
| 2.250         | 2.237           | 0.643                 | 0.436           | 0.939           | 0.604           | 0.450 |
| 2.300         | 2.408           | 0.643                 | 0.410           | 0.943           | 0.607           | 0.422 |
| 2.350         | 2.589           | 0.660                 | 0.368           | 0.950           | 0.627           | 0.378 |
| 2.400         | 2.782           | 0.662                 | 0.344           | 0.953           | 0.631           | 0.353 |
| 2.450         | 2.985           | 0.671                 | 0.314           | 0.959           | 0.643           | 0.321 |
| 2.500         | 3.200           | 0.675                 | 0.294           | 0.958           | 0.647           | 0.300 |
| 2.550         | 3.425           | 0.680                 | 0.271           | 0.964           | 0.655           | 0.276 |
| 2.600         | 3.662           | 0.682                 | 0.253           | 0.965           | 0.658           | 0.258 |
| 2.650         | 3.909           | 0.687                 | 0.235           | 0.965           | 0.663           | 0.239 |
| 2.700         | 4.168           | 0.687                 | 0.221           | 0.969           | 0.666           | 0.224 |
| 2.750         | 4.437           | 0.690                 | 0.206           | 0.970           | 0.669           | 0.209 |
| 2.800         | 4.718           | 0.692                 | 0.194           | 0.970           | 0.671           | 0.197 |
| 2.850         | 5.009           | 0.694                 | 0.182           | 0.971           | 0.674           | 0.184 |
| 2.900         | 5.312           | 0.694                 | 0.171           | 0.973           | 0.675           | 0.174 |
| 2.950         | 5.625           | 0.697                 | 0.161           | 0.972           | 0.677           | 0.164 |
| 3.000         | 5.950           | 0.698                 | 0.152           | 0.972           | 0.678           | 0.154 |

|        |       |      |      |      |      |      |
|--------|-------|------|------|------|------|------|
| 2.5500 | 3.426 | .682 | .271 | .959 | .654 | .277 |
| 2.6000 | 3.682 | .685 | .253 | .961 | .658 | .258 |
| 2.6500 | 3.910 | .689 | .235 | .962 | .663 | .240 |
| 2.7000 | 4.168 | .691 | .220 | .964 | .666 | .224 |
| 2.7500 | 4.435 | .695 | .206 | .965 | .669 | .210 |
| 2.8000 | 4.718 | .695 | .193 | .966 | .671 | .197 |
| 2.8500 | 5.010 | .697 | .182 | .967 | .673 | .184 |
| 2.9000 | 5.312 | .698 | .171 | .968 | .675 | .174 |
| 2.9500 | 5.626 | .699 | .161 | .968 | .677 | .164 |
| 3.0000 | 5.950 | .700 | .152 | .970 | .678 | .155 |

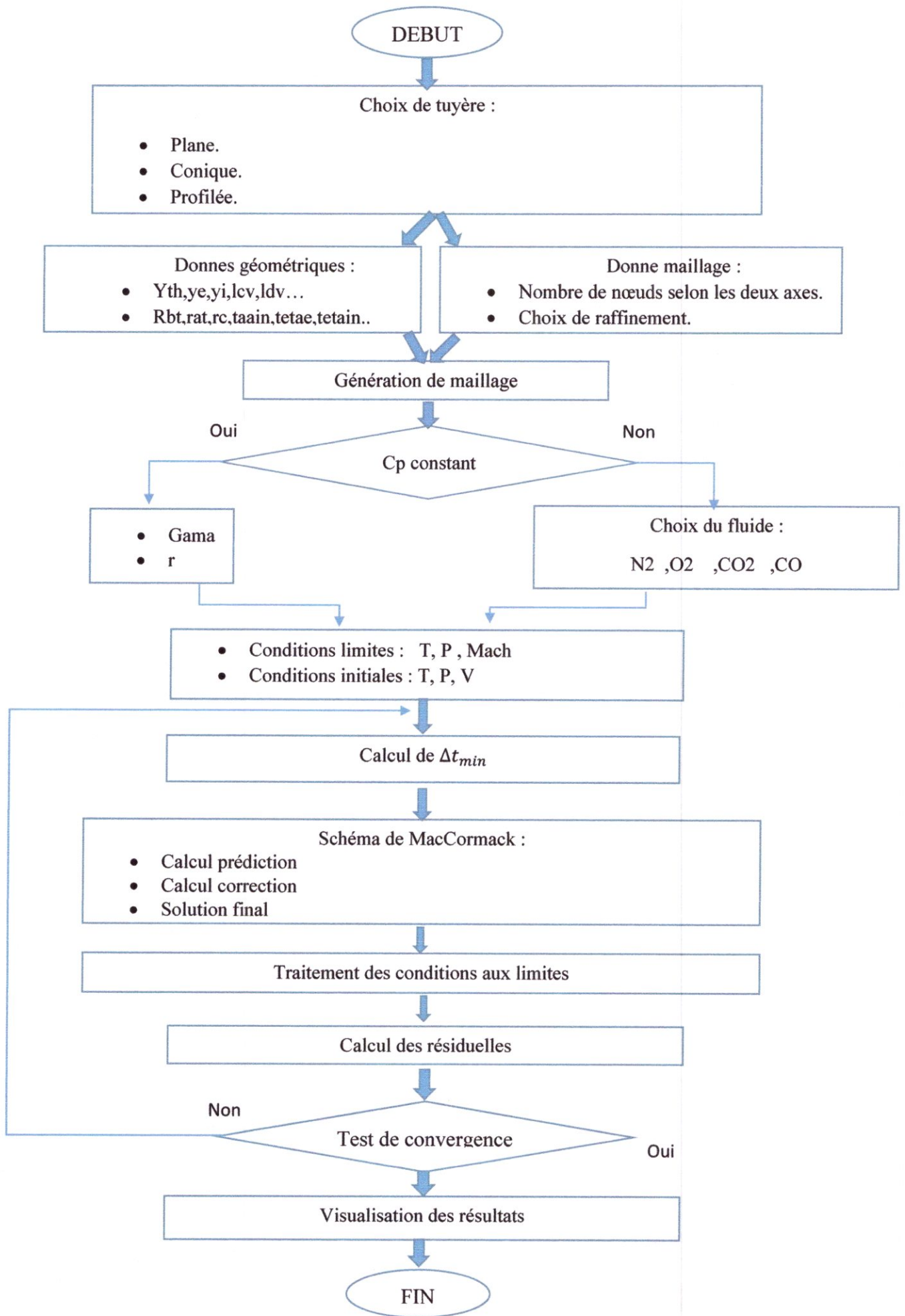


### 3-Resultats de tuyère plane :

| Resultats final - Etoc-netes |       |        |           |         |            |       |
|------------------------------|-------|--------|-----------|---------|------------|-------|
| Fichiers                     | Admis | Formul | Affichage | ?       |            |       |
| K                            | A     | W      | vitesse   | T       | pression   | Mach  |
| .0000                        | 2.569 | .987   | 88.291    | 300.000 | 85000.000  | .254  |
| .0083                        | 2.543 | .987   | 89.775    | 299.979 | 84979.016  | .257  |
| .0167                        | 2.517 | .987   | 90.190    | 299.959 | 84959.006  | .260  |
| .0250                        | 2.491 | .987   | 91.128    | 299.932 | 84919.128  | .263  |
| .0333                        | 2.465 | .956   | 92.110    | 299.875 | 84875.781  | .265  |
| .0417                        | 2.439 | .988   | 93.086    | 299.842 | 84844.206  | .268  |
| .0500                        | 2.412 | .986   | 94.203    | 299.805 | 84806.715  | .271  |
| .0583                        | 2.386 | .985   | 95.107    | 299.769 | 84771.216  | .274  |
| .0667                        | 2.360 | .985   | 96.145    | 299.729 | 84735.007  | .277  |
| .0750                        | 2.334 | .985   | 97.196    | 299.690 | 84697.879  | .280  |
| .0833                        | 2.308 | .984   | 98.271    | 299.647 | 84660.507  | .283  |
| .0917                        | 2.282 | .984   | 99.363    | 299.602 | 84627.165  | .286  |
| .1000                        | 2.255 | .984   | 100.480   | 299.555 | 84560.773  | .290  |
| .1083                        | 2.229 | .983   | 101.619   | 299.506 | 84512.131  | .293  |
| .1167                        | 2.203 | .983   | 102.784   | 299.455 | 84460.138  | .296  |
| .1250                        | 2.177 | .982   | 103.976   | 299.400 | 84404.553  | .300  |
| .1333                        | 2.151 | .982   | 105.197   | 299.338 | 84345.742  | .303  |
| .1417                        | 2.125 | .981   | 106.448   | 299.271 | 84287.287  | .307  |
| .1500                        | 2.099 | .981   | 107.728   | 299.201 | 84234.043  | .311  |
| .1583                        | 2.072 | .980   | 109.032   | 299.128 | 84200.297  | .315  |
| .1667                        | 2.046 | .979   | 110.430   | 299.051 | 84060.749  | .319  |
| .1750                        | 2.020 | .979   | 111.897   | 298.965 | 83971.785  | .323  |
| .1833                        | 1.994 | .978   | 113.446   | 298.869 | 83881.878  | .327  |
| .1917                        | 1.968 | .977   | 114.973   | 298.762 | 83781.214  | .331  |
| .2000                        | 1.942 | .976   | 116.263   | 298.647 | 83672.667  | .336  |
| .2083                        | 1.915 | .975   | 117.846   | 298.527 | 83557.291  | .340  |
| .2167                        | 1.889 | .974   | 119.486   | 298.402 | 83446.001  | .344  |
| .2250                        | 1.863 | .973   | 121.174   | 298.269 | 83291.831  | .350  |
| .2333                        | 1.837 | .972   | 122.925   | 298.122 | 83144.662  | .355  |
| .2417                        | 1.811 | .970   | 124.740   | 297.959 | 82986.071  | .361  |
| .2500                        | 1.785 | .969   | 126.621   | 297.778 | 82817.414  | .367  |
| .2583                        | 1.759 | .968   | 128.572   | 297.581 | 82641.846  | .373  |
| .2667                        | 1.732 | .966   | 130.599   | 297.372 | 82461.861  | .378  |
| .2750                        | 1.706 | .964   | 132.705   | 297.154 | 82277.738  | .384  |
| .2833                        | 1.680 | .962   | 134.896   | 296.924 | 82091.046  | .391  |
| .2917                        | 1.654 | .960   | 137.178   | 296.680 | 81748.611  | .397  |
| .3000                        | 1.628 | .958   | 139.558   | 296.414 | 81484.506  | .404  |
| .3083                        | 1.602 | .955   | 142.042   | 296.123 | 81200.125  | .412  |
| .3167                        | 1.575 | .953   | 144.640   | 295.799 | 80893.000  | .420  |
| .3250                        | 1.549 | .950   | 147.360   | 295.443 | 80563.002  | .428  |
| .3333                        | 1.523 | .947   | 150.212   | 295.057 | 80206.138  | .436  |
| .3417                        | 1.497 | .944   | 153.206   | 294.644 | 79820.260  | .445  |
| .3500                        | 1.471 | .940   | 156.360   | 294.199 | 79402.000  | .453  |
| .3583                        | 1.445 | .937   | 159.684   | 293.721 | 78984.805  | .463  |
| .3667                        | 1.418 | .932   | 163.195   | 293.202 | 78588.234  | .473  |
| .3750                        | 1.392 | .928   | 166.894   | 292.647 | 78202.608  | .483  |
| .3833                        | 1.366 | .923   | 170.697   | 292.077 | 77740.811  | .494  |
| .3917                        | 1.340 | .917   | 174.605   | 291.480 | 77304.162  | .505  |
| .4000                        | 1.314 | .911   | 178.619   | 290.859 | 76896.354  | .516  |
| .4083                        | 1.288 | .905   | 182.749   | 289.760 | 76519.000  | .528  |
| .4167                        | 1.262 | .898   | 187.993   | 288.800 | 76191.499  | .540  |
| .4250                        | 1.235 | .891   | 193.451   | 288.800 | 75911.499  | .556  |
| .4333                        | 1.209 | .885   | 199.124   | 288.800 | 75681.800  | .574  |
| .4417                        | 1.183 | .878   | 205.022   | 288.800 | 75502.738  | .593  |
| .4500                        | 1.157 | .870   | 207.967   | 288.800 | 75216.009  | .614  |
| .4583                        | 1.131 | .862   | 215.154   | 288.800 | 74958.883  | .638  |
| .4667                        | 1.105 | .855   | 223.583   | 288.800 | 74741.797  | .665  |
| .4750                        | 1.079 | .847   | 233.254   | 288.800 | 74568.861  | .697  |
| .4833                        | 1.053 | .840   | 244.167   | 288.800 | 74447.840  | .734  |
| .4917                        | 1.027 | .832   | 256.322   | 288.800 | 74379.273  | .781  |
| .5000                        | 1.000 | .824   | 270.727   | 288.800 | 74364.87   | .847  |
| .5083                        | 0.974 | .816   | 287.382   | 288.800 | 74408.623  | .939  |
| .5167                        | 0.948 | .808   | 306.295   | 288.800 | 74501.787  | 1.117 |
| .5250                        | 0.922 | .800   | 327.464   | 288.800 | 74646.338  | 1.175 |
| .5333                        | 0.896 | .792   | 351.896   | 288.800 | 74846.040  | 1.22  |
| .5417                        | 0.870 | .784   | 380.591   | 288.800 | 75095.846  | 1.262 |
| .5500                        | 0.844 | .776   | 393.825   | 288.800 | 75360.017  | 1.296 |
| .5583                        | 0.818 | .768   | 400.912   | 288.800 | 75641.825  | 1.328 |
| .5667                        | 0.792 | .760   | 407.385   | 288.800 | 75933.506  | 1.357 |
| .5750                        | 0.766 | .752   | 413.235   | 288.800 | 76234.078  | 1.384 |
| .5833                        | 0.740 | .744   | 418.469   | 288.800 | 76542.023  | 1.410 |
| .5917                        | 0.714 | .736   | 423.096   | 288.800 | 76858.658  | 1.434 |
| .6000                        | 0.688 | .728   | 428.021   | 288.800 | 77191.020  | 1.457 |
| .6083                        | 0.662 | .720   | 433.144   | 288.800 | 77530.912  | 1.479 |
| .6167                        | 0.636 | .712   | 438.479   | 288.800 | 77878.888  | 1.500 |
| .6250                        | 0.610 | .704   | 444.022   | 288.800 | 78234.966  | 1.521 |
| .6333                        | 0.584 | .696   | 449.771   | 288.800 | 78598.243  | 1.540 |
| .6417                        | 0.558 | .688   | 455.724   | 288.800 | 78968.720  | 1.559 |
| .6500                        | 0.532 | .680   | 461.880   | 288.800 | 79346.406  | 1.578 |
| .6583                        | 0.506 | .672   | 468.235   | 288.800 | 79731.306  | 1.596 |
| .6667                        | 0.480 | .664   | 474.787   | 288.800 | 80123.523  | 1.613 |
| .6750                        | 0.454 | .656   | 481.544   | 288.800 | 80523.000  | 1.630 |
| .6833                        | 0.428 | .648   | 488.506   | 288.800 | 80930.054  | 1.647 |
| .6917                        | 0.402 | .640   | 495.671   | 288.800 | 81344.890  | 1.664 |
| .7000                        | 0.376 | .632   | 503.038   | 288.800 | 81767.506  | 1.679 |
| .7083                        | 0.350 | .624   | 510.607   | 288.800 | 82197.894  | 1.694 |
| .7167                        | 0.324 | .616   | 518.378   | 288.800 | 82635.061  | 1.709 |
| .7250                        | 0.298 | .608   | 526.351   | 288.800 | 83078.915  | 1.724 |
| .7333                        | 0.272 | .600   | 534.524   | 288.800 | 83529.466  | 1.738 |
| .7417                        | 0.246 | .592   | 542.904   | 288.800 | 83986.712  | 1.752 |
| .7500                        | 0.220 | .584   | 551.489   | 288.800 | 84450.663  | 1.766 |
| .7583                        | 0.194 | .576   | 560.278   | 288.800 | 84921.320  | 1.780 |
| .7667                        | 0.168 | .568   | 569.271   | 288.800 | 85398.683  | 1.793 |
| .7750                        | 0.142 | .560   | 578.468   | 288.800 | 85882.752  | 1.806 |
| .7833                        | 0.116 | .552   | 587.871   | 288.800 | 86373.527  | 1.819 |
| .7917                        | 0.090 | .544   | 597.478   | 288.800 | 86870.909  | 1.831 |
| .8000                        | 0.064 | .536   | 607.289   | 288.800 | 87374.998  | 1.844 |
| .8083                        | 0.038 | .528   | 617.304   | 288.800 | 87885.794  | 1.856 |
| .8167                        | 0.012 | .520   | 627.523   | 288.800 | 88403.298  | 1.868 |
| .8250                        | 0.000 | .512   | 637.946   | 288.800 | 88927.512  | 1.879 |
| .8333                        | 0.000 | .504   | 648.573   | 288.800 | 89458.436  | 1.891 |
| .8417                        | 0.000 | .496   | 659.404   | 288.800 | 89996.070  | 1.902 |
| .8500                        | 0.000 | .488   | 670.439   | 288.800 | 90540.514  | 1.913 |
| .8583                        | 0.000 | .480   | 681.678   | 288.800 | 91091.768  | 1.924 |
| .8667                        | 0.000 | .472   | 693.121   | 288.800 | 91649.832  | 1.934 |
| .8750                        | 0.000 | .464   | 704.768   | 288.800 | 92214.706  | 1.944 |
| .8833                        | 0.000 | .456   | 716.619   | 288.800 | 92786.390  | 1.954 |
| .8917                        | 0.000 | .448   | 728.674   | 288.800 | 93364.884  | 1.964 |
| .9000                        | 0.000 | .440   | 740.933   | 288.800 | 93949.188  | 1.974 |
| .9083                        | 0.000 | .432   | 753.396   | 288.800 | 94539.302  | 1.984 |
| .9167                        | 0.000 | .424   | 766.063   | 288.800 | 95135.226  | 1.994 |
| .9250                        | 0.000 | .416   | 778.934   | 288.800 | 95737.060  | 2.004 |
| .9333                        | 0.000 | .408   | 792.009   | 288.800 | 96344.804  | 2.014 |
| .9417                        | 0.000 | .400   | 805.288   | 288.800 | 96958.458  | 2.024 |
| .9500                        | 0.000 | .392   | 818.771   | 288.800 | 97578.022  | 2.034 |
| .9583                        | 0.000 | .384   | 832.458   | 288.800 | 98203.496  | 2.044 |
| .9667                        | 0.000 | .376   | 846.349   | 288.800 | 98834.880  | 2.054 |
| .9750                        | 0.000 | .368   | 860.444   | 288.800 | 99472.174  | 2.064 |
| .9833                        | 0.000 | .360   | 874.743   | 288.800 | 100115.378 | 2.074 |
| .9917                        | 0.000 | .352   | 889.246   | 288.800 | 100764.492 | 2.084 |
| 1.0000                       | 0.000 | .344   | 903.953   | 288.800 | 101419.516 | 2.094 |

### 3-Resultats de tuyère conique :

| resultats Final - Bloc-notes       |   |    |         |   |          |         |         |            |       |
|------------------------------------|---|----|---------|---|----------|---------|---------|------------|-------|
| Fichier Edition Format Affichage ? |   |    |         |   |          |         |         |            |       |
| x                                  | A | mv | vitesse | T | pression | Mach    |         |            |       |
| .0000                              |   |    | 1.673   |   | 5.598    | 133.016 | 300.000 | 482000.000 | .383  |
| .0370                              |   |    | 1.415   |   | 5.415    | 162.474 | 295.276 | 458884.574 | .472  |
| .0741                              |   |    | 1.156   |   | 4.878    | 220.440 | 285.134 | 399190.213 | .651  |
| .1111                              |   |    | 1.008   |   | 3.804    | 328.126 | 254.062 | 277400.431 | 1.027 |
| .1481                              |   |    | 1.075   |   | 3.063    | 384.982 | 233.297 | 205077.991 | 1.257 |
| .1852                              |   |    | 1.144   |   | 2.664    | 416.226 | 220.768 | 168776.638 | 1.398 |
| .2222                              |   |    | 1.213   |   | 2.385    | 438.524 | 211.260 | 144587.849 | 1.505 |
| .2593                              |   |    | 1.282   |   | 2.170    | 456.045 | 203.449 | 126681.755 | 1.595 |
| .2963                              |   |    | 1.352   |   | 1.995    | 470.528 | 196.763 | 112674.901 | 1.673 |
| .3333                              |   |    | 1.421   |   | 1.850    | 482.876 | 190.899 | 101335.949 | 1.744 |
| .3704                              |   |    | 1.490   |   | 1.725    | 493.632 | 185.668 | 91933.858  | 1.807 |
| .4074                              |   |    | 1.559   |   | 1.617    | 503.147 | 180.946 | 83997.795  | 1.866 |
| .4444                              |   |    | 1.629   |   | 1.523    | 511.660 | 176.643 | 77206.572  | 1.921 |
| .4815                              |   |    | 1.698   |   | 1.439    | 519.367 | 172.691 | 71321.743  | 1.972 |
| .5185                              |   |    | 1.767   |   | 1.364    | 526.349 | 169.050 | 66191.930  | 2.020 |
| .5556                              |   |    | 1.836   |   | 1.297    | 532.805 | 165.655 | 61652.409  | 2.065 |
| .5926                              |   |    | 1.906   |   | 1.236    | 538.709 | 162.503 | 57639.957  | 2.108 |
| .6296                              |   |    | 1.975   |   | 1.181    | 544.137 | 159.560 | 54069.715  | 2.149 |
| .6667                              |   |    | 2.044   |   | 1.130    | 549.347 | 156.761 | 50818.529  | 2.189 |
| .7037                              |   |    | 2.113   |   | 1.083    | 554.062 | 154.164 | 47928.268  | 2.226 |
| .7407                              |   |    | 2.183   |   | 1.041    | 558.366 | 151.733 | 45339.007  | 2.261 |
| .7778                              |   |    | 2.252   |   | 1.000    | 562.876 | 149.326 | 42867.285  | 2.298 |
| .8148                              |   |    | 2.321   |   | .964     | 566.747 | 147.144 | 40703.480  | 2.331 |
| .8519                              |   |    | 2.390   |   | .932     | 569.843 | 145.183 | 38846.462  | 2.359 |
| .8889                              |   |    | 2.460   |   | .899     | 573.747 | 143.091 | 36921.071  | 2.393 |
| .9259                              |   |    | 2.529   |   | .866     | 577.921 | 140.981 | 35054.658  | 2.428 |
| .9630                              |   |    | 2.598   |   | .839     | 581.019 | 139.202 | 33505.780  | 2.457 |
| 1.0000                             |   |    | 2.667   |   | .812     | 584.150 | 137.390 | 32034.160  | 2.486 |



Organigramme du programme