

----- 0 -----

UNIVERSITE FERHAT ABBAS

SETIF

REMERCIEMENTS

THESE

Présentée par

**MOSTEFA NADIR**

Pour obtenir le titre de **Docteur d'Etat**

de l'Institut de Mathématiques

**ONDELETTES ET EVALUATION NUMERIQUE DES OPERATEURS**

Date de soutenance : 20 février 1999

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. N. ZEKRI	Prof.	Université des Sc. Tech. Oran
Rapporteurs :	Mr. A. BENHOCINE	M. C.	Université de Sétif
	Mr. Ph. TCHAMITCHIAN	Prof.	Université Marseille III
Examineurs :	Mr. H. BELOUADAH	M. C.	Centre Universitaire de M'sila
	Mr. N. DAILI	M. C.	Université de Sétif
	Mr. M. MOUSSAI	M. C.	Centre Universitaire de M'sila

Année 1998/1999



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Philippe TCHAMITCHIAN, professeur de l'université de Marseille III, grâce à qui j'ai mené ce travail. Il m'a toujours donné des idées, fait des suggestions, des commentaires et des critiques, il m'a encouragé et soutenu quand il fallait. Je lui suis très reconnaissant de s'être autant impliqué dans mon travail. Si je ne puis m'acquitter de la dette que j'ai envers lui, qu'il en trouve au moins ici le témoignage, et si j'ai quelques choses à dire sur lui, c'est qu'il est un grand professeur.

J'ai été très touché par l'attention que m'a portée Abdelhamid BEN-HOCINE, professeur de l'université de SETIF et par le soutien moral qu'il m'a procuré, ainsi d'avoir accepté de rapporter ma mémoire et représenter mon directeur de thèse physiquement et scientifiquement.

Je me vois très sensible à l'honneur qui m'a fait Noureddine ZEKRI, professeur de l'université d'ORAN, en acceptant la présidence de ce jury. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance pour l'attention qu'il porte à cette thèse.

Je suis particulièrement flatté que Messieurs Hocine BELOUADAH, Maître de conférence de l'université de M'SILA, ainsi que, Noureddine DAILI, Maître de conférence de l'université de SETIF et Madani MOUSSAI, Maître de conférence de l'université de M'sila aient accepté de rapporter sur cette thèse, malgré tout leur travail, la présence de chacun parmi eux dans ce jury me touche particulièrement.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques fondamentales et appliquées de Marseille III de m'avoir accueilli dans leur équipe et surtout Christian SAMUEL pour son aide d'informatique et scientifique.

Introduction . . . . .	3
<b>PARTIE I . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Les analyses multirésolution de <math>L^2(\mathbb{R})</math></b>	
<b>et bases d'ondelettes . . . . .</b>	<b>.7</b>
Introduction . . . . .	.7
Base orthonormale du M.R.A . . . . .	.9
Introduction des bases d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	10
<b>Ondelettes à support compact. . . . .</b>	<b>15</b>
<b>Algorithmes. . . . .</b>	<b>17</b>
Algorithme en arbre . . . . .	.17
Algorithme de reconstruction. . . . .	.18
Algorithme de cascade . . . . .	.18
Algorithme de la valeur propre. . . . .	.19
<b>Bases orthonormées d'ondelettes dans <math>L^2(\mathbb{R}^2)</math>. . . . .</b>	<b>.20</b>
<b>Transformations rapides en ondelettes. . . . .</b>	<b>.21</b>
Algorithme du système de Haar . . . . .	.21
Compression des opérateurs. . . . .	.27
<b>Ondelettes sur un intervalle . . . . .</b>	<b>.30</b>
Introduction . . . . .	.30
Construction. . . . .	.30
Analyses multirésolutions de $L^2([0, 1])$ . . . . .	.33
<b>PARTIE II . . . . .</b>	<b>.35</b>
<b>Opérateurs intégraux et bases d'ondelettes. . . . .</b>	<b>.36</b>
Introduction . . . . .	.36
Calculs des moments des fonctions échelles . . . . .	.38
La forme non standard . . . . .	.40
<b>PARTIE III. . . . .</b>	<b>.52</b>
<b>Opérateur de Hilbert et bases</b>	
<b>d'ondelettes sur un intervalle. . . . .</b>	<b>.53</b>
Introduction . . . . .	.53
Calculs des moments des fonctions échelles sur un intervalle. . . . .	.55
Etude de l'opérateur de Hilbert . . . . .	.59

INTRODUCTION

**PARTIE IV** ..... 70

Opérateur de dérivation et bases  
d'ondelettes sur un intervalle ..... 71

Introduction ..... 71

Opérateur de dérivation ..... 74

Approximation du vecteur  $s_{jk}$  ..... 75

Calcul de la matrice  $\langle \phi', \phi \rangle$  ..... 78

**PARTIE V** ..... 84

Sur l'approximation des intégrales singulières ..... 85

Introduction ..... 85

Calcul approché de l'intégrale singulière ..... 86

Bibliographies ..... 91

Dans le cas de la transformée en ondelettes continues, les informations données par les coefficients d'ondelettes sont redondantes puisque les paramètres de dilatation-translocation varient continuellement dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Il peut paraître numériquement plus satisfaisant de stocker les coefficients d'ondelettes qui contiennent de l'information supérieure.

Comme il est connu, les ondelettes sont des fonctions générées à partir d'une fonction  $\psi$  par translations et dilations sur l'axe des temps

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $\psi$  est appelée ondelette mère ou ondelette analysée.  $b$  est un paramètre de translation et  $a$  un paramètre de dilatation, le terme  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  est un facteur de normalisation.  $b$  est aussi le centre de l'ondelette et  $a$  sa largeur. Les coefficients d'ondelettes du signal sont alors, les nombres

$$C_j(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

où le symbole  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$ . La transformée est dite continue car les paramètres  $a$  et  $b$  varient continuellement dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Dans l'espace spectral, les paramètres  $a$  et  $\lambda$  ont pour rôles respectifs de dilater et de modular l'échelle des fréquences,

$$\hat{f}_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} e^{-i\omega b} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Notons que, pour des raisons numériques, les fonctions  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  sont bien localisées, et que la fonction  $\psi$  est une fonction oscillante, autrement dit,

## INTRODUCTION

Parlant un peu de l'histoire ; il y'a une quinzaine d'années, une nouvelle méthode d'analyse, appliquée à l'origine aux signaux sismiques, obtenue lors de la prospection pétrolière, a été proposée par le géophysicien J. Morlet [39] "l'analyse par ondelettes", il eut l'idée d'analyser un signal à l'aide des fonctions élémentaires (ondelettes) toutes issues, par translations et dilatations, d'une même fonction (ondelette mère).

Avec la contribution de A. Grossman [25], une formulation mathématique de la transformée en ondelettes continue a été développée en rapport avec la théorie des groupes affines et les états cohérents de la mécanique quantique, permettant de décomposer un signal à la fois en temps et en fréquence. Dans le cas de la transformée en ondelettes continues, les informations données par les coefficients d'ondelettes sont redondantes puisque les paramètres de dilatation-translation varient continûment dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Il peut paraître numériquement satisfaisant de stocker les coefficients d'ondelettes qui contiennent de l'information superflue.

Comme il est connu, les ondelettes sont des fonctions générées à partir d'une fonction  $\psi$  par translations et dilatations sur l'axe des temps

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $\psi$  est appelée ondelette mère ou ondelette analysante.  $b$  est un paramètre de translation et  $a$  un paramètre de dilatation, le terme  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  est un facteur de normalisation.  $b$  est aussi le centre de l'ondelette et  $a$  sa largeur. Les coefficients d'ondelettes du signal sont alors, les nombres

$$C_f(a, b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle$$

où le symbole  $\langle, \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$ . La transformée est dite continue car les paramètres  $a$  et  $b$  varient continûment dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Dans l'espace spectral, les paramètres  $a$  et  $b$  ont pour rôles respectifs de dilater et de moduler l'échelle des fréquences,

$$\hat{\psi}_{ab}(\omega) = \sqrt{a} e^{-i\omega b} \hat{\psi}(a\omega).$$

Notons que, pour des raisons numériques, les fonctions  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  sont bien localisées, et que la fonction  $\psi$  est une fonction oscillante, autrement dit,

d'intégrale nulle.

I. Daubechies en collaboration avec A. Grossman et Y. Meyer [20] ont discrétisé la transformation précédente en se ramenant à un sous ensemble discret pour le choix des paramètres de dilatation-translation, conduisant ainsi à obtenir des formules de reconstructions approchées, sous formes de séries doubles (théorie de "frames").

Dans le but d'inscrire la construction de bases orthonormées d'ondelettes dans le cadre général, S. Mallat [33] et Y. Meyer [34] ont introduit en 1987 le concept d'analyse multirésolution. Ce fut alors la découverte de P.G. Lemarié [32] des bases d'ondelettes calculées à partir des fonctions splines, ainsi que, la construction par S. Jaffard [27] des bases d'ondelettes dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans tout le travail que nous présentons ici, on utilise les ondelettes d'Ingrid Daubechies [17] à  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ . Cette base généralise la base de Haar, et qui est bien adaptée aux calculs numériques. De plus, pour tout opérateur intégral vérifiant certaines estimations et avec une précision donnée, admet une forme diagonale-bande, que l'on peut appliquer à n'importe quelle fonction et d'une façon rapide, avec un nombre d'opérations de l'ordre  $O(N)$ .

On trouve deux arrangements pour l'évaluation numérique des opérateurs intégraux. Le premier est une réalisation directe de la matrice de l'opérateur dans la base d'ondelettes que l'on appelle "forme standard" et qui est de l'ordre de  $O(N \log N)$  procédures. Le deuxième arrangement que l'on appelle "forme non-standard" est décrit en détail dans ce travail, il est de l'ordre de  $O(N)$  procédures. Cette forme réduit plusieurs opérateurs, à résoudre un système d'équations algébrique.

Il y'a aussi un exposé sur les ondelettes sur un intervalle, comme il est clair que, tout signal est restreint à un intervalle borné ( ou à un carré s'il s'agit d'une image). Le problème comment s'adapter à une telle situation tout en conservant les propriétés intéressantes des ondelettes (régularité, cancellation et localisation). Il est à rappeler qu'il y'a plusieurs constructions d'ondelettes sur un intervalle, celle qui est utilisée dans ce travail est la plus perfectionnée pour le calcul numérique, elle maintient les bonnes propriétés à l'exception de la relation " $\hat{\phi}(0) = 1$ ". De plus elle réalise des algorithmes rapides, bien entendu, avec un traitement particulier aux extrémités de l'intervalle; pour plus de détail voir [14].

On trouve aussi une application directe de cette construction d'ondelettes, à plusieurs opérateurs, (opérateur de Hilbert [43][44], de dérivation [43][45], ...),

dont l'idée est de construire une analyse multirésolution  $\mathcal{V}_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  à partir des carrés  $I_r \times I_s$ , où  $I_s$  désigne l'intervalle d'extrémités entières  $I_s = [s, s + 1[$ . L'opérateur de Hilbert  $T$  est représenté dans  $\mathcal{V}_j$  par la matrice  $\langle T\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_l \rangle$ . Due à la construction des ondelettes sur un intervalle, cette matrice contient neuf sous matrices blocs, dont tous les éléments dépendent des éléments de la matrice bloc interne, de plus, elle est antisymétrique pour le cas où  $r = s$ . Ainsi que l'opérateur de dérivation  $T = \frac{d}{dx}$  est représenté dans  $\mathcal{V}_j$  par la matrice  $\langle T\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_l \rangle$ , composée de neuf sous matrices blocs. Dûe aux supports compacts et disjoints des fonctions échelles, cette matrice est bande de largeur " $2N - 1$ ".

Une approximation d'intégrale singulière [42] apparait dans ce travail, pour les intégrales du "type Cauchy"  $F(t_0)$  sur des courbes régulières par morceaux, définie par

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt,$$

où  $\phi(t)$  est une fonction Hölderienne définie sur  $\Gamma$ ,  $t_0$  un point quelconque de la courbe, l'équation paramétrique de  $\Gamma$  est donnée par  $t(s) = x(s) + iy(s)$  où  $a \leq s \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

# PARTIE I ANALYSES MULTIRÉSOLUTIONS DE $L^2(\mathbb{R})$ ET BASES D'ONDELETTES

## I Introduction

Le cadre algébrique des analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  a été introduit par S. Mallat [33] et Y. Meyer [35] pour la construction des bases orthonormées des ondelettes. L'idée est d'approcher toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  par une suite de fonctions  $f_j, j \in \mathbb{Z}$ , où  $f_j$  étant l'approximation de  $f$  à l'échelle  $2^j$ , et se pencher plus sur les changements entre l'approximation  $f_j$  de  $f$  à l'échelle  $2^j$  et l'approximation  $f_{j+1}$  de  $f$  à l'échelle  $2^{j+1}$ .

### Rappels

Bien entendu, la meilleure approximation de la fonction  $f$  à l'échelle  $2^j$  est bien  $f_j$ , obtenue à partir de  $f_{j-1}$  en ajoutant quelques informations bien localisées. Ces informations sont appelées "ondelettes".

$$f(x) = f_0(x) + (f_1(x) - f_0(x)) + (f_2(x) - f_1(x)) + \dots + (f_{j+1}(x) - f_j(x)) + \dots$$

où

$$f_{j+1}(x) - f_j(x) = 2^{-j} \sum \alpha_{jk} \psi(2^j x - k)$$

avec

$$\alpha_{jk} = \langle f(x), \psi_k \rangle \quad \text{et} \quad \psi_k = 2^{-j} \psi(2^j x - k).$$

Notons que, S. Mallat [33] et Y. Meyer [34] ont montré que ce programme peut être réalisé de la façon suivante.

**Définition 1:** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , que l'on note M.R.A., est la donnée d'une suite croissante  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes:

$$(1) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

$$(2) \quad \forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, \text{ on a } f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$$

(3) Il existe une fonction  $g(x) \in V_0$  telle que la suite  $g(x-k), k \in \mathbb{Z}$  soit une base de Riesz de l'espace  $V_0$ .

**Définition d'une base de Riesz:**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments de  $H$ , on dit que la suite  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz si et seulement si





# ANALYSES MULTIRÉSOLUTIONS DE $L^2(\mathbb{R})$ ET BASES D'ONDELETTES

## 1 Introduction

Le cadre algébrique des analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  a été introduit par S.Mallat [33] et Y.Meyer [35] pour la construction des bases orthonormées des ondelettes. L'idée est d'approcher toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  par une suite de fonctions  $f_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , où  $f_j$  étant l'approximation de  $f$  à l'échelle  $2^j$ , et de savoir plus sur les changements entre l'approximation  $f_j$  de  $f$  à l'échelle  $2^j$  et l'approximation  $f_{j+1}$  de  $f$  à l'échelle  $2^{j+1}$ .

Bien entendu, la meilleure approximation de la fonction  $f$  à l'échelle  $2^j$  est bien  $f_j$ , obtenue à partir de  $f_{j-1}$  en ajoutant quelques informations bien localisées. Ces informations sont appelées "ondelettes"

$$f(x) = f_0(x) + (f_1(x) - f_0(x)) + (f_2(x) - f_1(x)) + \dots + (f_{j+1}(x) - f_j(x)) + \dots$$

où

$$f_{j+1}(x) - f_j(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_k \alpha_{jk} \psi(2^j x - k)$$

avec

$$\alpha_{jk} = \langle f(x), \psi_{jk} \rangle \quad \text{et} \quad \psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k).$$

Notons que, S.Mallat [33] et Y.Meyer [34] ont montré que ce programme peut être réalisé de la façon suivante.

**Définition 1:** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , que l'on note M.R.A, est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes:

- (1)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (2)  $\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}$  on a  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) il existe une fonction  $g(x) \in V_0$  telle que la suite  $g(x - k), k \in \mathbb{Z}$

soit une base de Riesz de l'espace  $V_0$ .

**Définition d'une base de Riesz:**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments de  $H$ , on dit que la suite  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz si et seulement si

il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$ , telles que, pour tout scalaire  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , on ait

$$(4) \quad C_1 \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_k \alpha_k e_k \right\|_H \leq C_2 \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec l'espace des sommes finies  $\sum_k \alpha_k e_k$  est dense dans  $H$ .

**Remarques:**

(i) La famille  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  intervenant dans (3) est appelée aussi base inconditionnelle, puisque,  $\forall \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , la somme  $\sum_k \alpha_k g(x - k)$  existe dans  $V_0$  et ne dépend pas du mode de la sommation.

(ii) La propriété (1) peut aussi s'exprimer à l'aide des projecteurs orthogonaux  $P_j$  sur les espaces  $V_j$ . En effet,  $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$(5) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j f - f\| = 0$$

(iii) Une conséquence de la propriété (3)

$$(6) \quad f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0$$

(iv) La combinaison linéaire  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k g(x - k)$ , s'exprime dans le domaine spectral par

$$(7) \quad \hat{f}(\omega) = m(\omega) \hat{g}(\omega) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega} \right) \hat{g}(\omega)$$

où  $m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega}$  est une fonction  $2\pi$ -périodique,  $\hat{f}$  la transformée de Fourier de la fonction  $f$

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

**Théorème:** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une M.R.A de  $L^2(\mathbb{R})$ , il existe une constante  $C$  strictement positive telle que, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$(8) \quad \frac{1}{C} \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

En effet, l'existence d'une base de Riesz  $g(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  de  $V_0$ , signifie qu'il existe un isomorphisme non nécessairement isométrique de  $V_0$  dans  $l^2(\mathbb{Z})$ , autrement dit, la norme hilbertienne de la fonction  $m(\omega)$  sur  $L^2([0, 2\pi])$  est

équivalente à la norme de  $\hat{f}(\omega)$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ , i.e

$$\frac{1}{C} \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_k \alpha_k g(x-k) \right\|_{V_0}^2 \leq C \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right)$$

ce qui est équivalent à écrire

$$\frac{1}{C} \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega \leq \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 \left( \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \right) d\omega \leq C \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega$$

cette expression est vérifiée si et seulement si

$$\frac{1}{C} \leq \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \leq C.$$

## 1.1 Base orthonormale du M.R.A

Grâce au théorème précédent, on peut construire une fonction  $\phi$  telle que, la famille  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de l'espace  $V_0$ . Cette fonction est définie par

$$(9) \quad \hat{\phi}(\omega) = \left( \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{g}(\omega)$$

où il est facile de voir que  $\phi \in V_0$

$$\hat{\phi} \in \hat{V}_0 \iff \phi \in V_0$$

où

$$\hat{V}_0 = \{ \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_0 \}$$

l'orthonormalisation de la famille  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vient du fait que,

$$(10) \quad \sum_k |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2 = 1$$

soit

$$(11) \quad \langle \phi(x), \phi(x-k) \rangle = \int \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx = \delta_{0k}$$

la fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle ou parfois "père des ondelettes".

**Définition 2:** Une M.R.A est dite  $r$ -régulière,  $r \in \mathbb{N}$  si l'on peut choisir la fonction  $g(x)$  intervenant dans (3), de sorte que l'on ait

$$(12) \quad |g^\alpha(x)| \leq C_m (1+|x|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha \leq r$$

équivalente à la norme de  $\hat{f}(\omega)$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ , i.e

$$\frac{1}{C} \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right) \leq \left\| \sum_k \alpha_k g(x-k) \right\|_{V_0}^2 \leq C \left( \sum_k |\alpha_k|^2 \right)$$

ce qui est équivalent à écrire

$$\frac{1}{C} \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega \leq \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 \left( \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \right) d\omega \leq C \int_0^{2\pi} |m(\omega)|^2 d\omega$$

cette expression est vérifiée si et seulement si

$$\frac{1}{C} \leq \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \leq C.$$

### 1.1 Base orthonormale du M.R.A

Grâce au théorème précédent, on peut construire une fonction  $\phi$  telle que, la famille  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de l'espace  $V_0$ . Cette fonction est définie par

$$(9) \quad \hat{\phi}(\omega) = \left( \sum_k |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{g}(\omega)$$

où il est facile de voir que  $\phi \in V_0$

$$\hat{\phi} \in \hat{V}_0 \iff \phi \in V_0$$

où

$$\hat{V}_0 = \{ \hat{f}(x) \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_0 \}$$

l'orthonormalisation de la famille  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vient du fait que,

$$(10) \quad \sum_k |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2 = 1$$

soit

$$(11) \quad \langle \phi(x), \phi(x-k) \rangle = \int \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx = \delta_{0k}$$

la fonction  $\phi$  est appelée fonction d'échelle ou parfois "père des ondelettes".

**Définition 2:** Une M.R.A est dite  $r$ -régulière,  $r \in \mathbb{N}$  si l'on peut choisir la fonction  $g(x)$  intervenant dans (3), de sorte que l'on ait

$$(12) \quad |g^\alpha(x)| \leq C_m (1+|x|)^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha \leq r$$

on dit aussi que  $g^\alpha$  est à décroissance rapide à l'infini.

**Propriétés:**

(i) Soit  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une base orthonormée de  $V_0$  alors,  $\{2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est aussi une base orthonormée de  $V_j$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Si la famille  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base inconditionnelle,  $r$ -régulière de  $V_0$  et  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une base orthonormée de  $V_0$ , alors la base  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est aussi  $r$ -régulière et  $\forall f \in V_0$ , on a

$$f(x) = \sum_k \alpha_k g(x-k) = \sum_k \beta_k \phi(x-k)$$

d'où

$$\|f(x)\| = \left(\sum_k |\beta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\sum_k |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.2 Introduction des bases d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$

Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une M.R.A  $r$ -régulière de  $L^2(\mathbb{R})$ , notons par  $W_j$  le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ ,

$$(13) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

celui ci représente l'information additive pour passer de l'approximation de l'échelle  $2^j$  à l'échelle  $2^{j+1}$ .

D'après les propriétés (1) et (2) de la définition de l'analyse multirésolution, les espaces  $W_j$  vérifient

$$(14) \quad f(x) \in W_0 \iff f(2^j x) \in W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$(15) \quad f(x) \in W_0 \iff f(x-k) \in W_0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(16) \quad W_j \text{ est orthogonal à } W_{j'} \text{ pour } j \neq j'$$

$$(17) \quad \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{somme hilbertienne}).$$

Soit  $\{2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  une base orthonormée de  $V_1$  contenant  $V_0$ , alors, on a la relation d'échelle suivante

$$(18) \quad \phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k).$$

En passant dans le domaine spectral, on obtient

$$(19) \quad \hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

avec

$$(20) \quad m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega}$$

où  $m_0(\omega)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, à décroissance rapide à l'infini, de plus, elle vérifie l'équation

$$(21) \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

et

$$m_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad m_0(\pi) = 0$$

$m_0$  est appelée filtre basse-fréquence.

La fonction  $\hat{\phi}$  a la propriété de normalisation

$$(22) \quad \hat{\phi}(0) = \int \phi(x) dx = 1$$

d'où

$$(23) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega).$$

Pour que l'on ait une base orthonormée d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$ , de la relation (17), il suffit de trouver pour chaque  $j$  une base orthonormée de  $W_j$ , cela revient à chercher une fonction  $\psi$  de  $W_0$ , telle que, le système  $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée de  $W_0$ .

De l'inclusion  $W_0 \subset V_1$ , il existe une fonction  $\psi$  de  $W_0$ , prenant dans le domaine spectral la forme suivante

$$(24) \quad \hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

où  $m_1$  est une fonction  $2\pi$ -périodique, vérifiant l'équation suivante

$$(25) \quad |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

Due à l'orthogonalité des espaces  $V_0$  et  $W_0$ , les fonctions  $m_0$  et  $m_1$  vérifient

$$(26) \quad m_0(\omega)\overline{m_1(\omega)} + m_0(\omega + \pi)\overline{m_1(\omega + \pi)} = 0.$$

Les conditions (21), (25) et (26) se résument comme suit  
Trouver une fonction  $m_1$  de  $L^2([0, 2\pi])$  telle que, la matrice

Exemple 1: Soit la matrice 
$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$
 un escalier, autrement dit

soit unitaire pour tout  $\omega$  de  $\mathbb{R}$ . Un choix possible de  $m_1$  est

$$(27) \quad m_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)},$$

$m_1$  est appelé filtre haute-fréquence,  $m_0$  et  $m_1$  ensemble sont dits filtres miroirs en quadrature (QMF).

Il est facile de montrer que les formules (24) et (27) fournissent la relation d'échelle de la fonction  $\psi$  dans l'espace physique

$$(28) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2x - k)$$

avec

$$(29) \quad g_k = (-1)^{1-k} h_{1-k}.$$

On dispose ainsi d'une fonction  $\psi$  telle que, le système  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $W_0$ , par dilatation et translation entières, on obtient une base de  $W_j$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et par conséquent, une base ortonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . D'où

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x),$$

où  $\langle, \rangle$ , désigne le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx \quad \forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ainsi les fonctions  $\psi_{jk}$  permettent de donner l'information sur les détails nécessaires pour passer d'un niveau d'approximation  $V_j$  à un niveau deux fois plus fin  $V_{j+1}$ .

Notons qu'il existe d'autres décompositions couramment fréquentées

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j$$

où la série d'ondelettes de  $f$  s'écrit

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{0k} \rangle \phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(x).$$

**Exemple 1:**

Soit  $V_0$  le sous espace de  $L^2(\mathbb{R})$  formé des fonctions en escalier, autrement dit  $f(x) = a_k$ , si  $k \leq x \leq k+1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$V_0 = \{f(x) \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = a_k, \forall x \in [k, k+1], k \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors  $g(x)$  est la fonction caractéristique de  $[0, 1]$  et la base  $g(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est orthonormée, dans ce cas on prend la fonction échelle  $\phi = g$ .

De la relation (18), on obtient  $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et les autres  $h_k$  sont nuls

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1),$$

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}).$$

Les formules (28) et (29) fournissent pour l'ondelette  $\psi$  la fonction portée sur  $[0, 1[$ , égale à  $-1$  sur  $[0, \frac{1}{2}[$  et  $1$  sur  $[\frac{1}{2}, 1[$ .

$$\psi(x) = -\phi(2x) + \phi(2x - 1),$$

$$m_1(\omega) = \frac{1}{2}e^{-i\omega}(1 - e^{i\omega}).$$

La collection de ces ondelettes constitue le système de Haar de régularité nulle.

**Exemple 2:**

Soit  $V_0$  le sous espace de  $L^2(\mathbb{R})$  composé des fonctions affines, continues  $f(x) = a_k x + b_k$  sur chaque intervalle  $[k, k+1[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f(x) = a_k x + b_k, \forall x \in [k, k+1[, k \in \mathbb{Z}\}.$$

On prend  $g(x)$  la fonction triangle  $\Delta(x) = \sup\{0, 1 - |x|\}$ .

$$\hat{g}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$$

de la formule (9), la fonction  $\phi$  est définie par sa transformée de Fourier

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{(\sum_k |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2)^{\frac{1}{2}}}$$



avec

$$\left(\sum_k |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sin^2 \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\sum_k (\frac{\omega}{2} + k\pi)^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

où il est connu que

$$(30) \quad \sum_k \frac{1}{\frac{\omega}{2} + k\pi} = \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

Dérivons trois fois membre à membre (30), on obtient

$$\sum_k \frac{1}{(\frac{\omega}{2} + k\pi)^4} = \frac{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}.$$

Ainsi, on a

$$\left(\sum_k |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$(31) \quad \hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

de la relation (19), on a

$$(32) \quad m_0(\omega) = \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \cos^2 \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \omega\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et de (27)

$$m_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)} = e^{-i\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \omega\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \sin^2 \frac{\omega}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 \frac{\omega}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\omega}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

(35)

## 2 ONDELETTES A SUPPORT COMPACT

Dans le procédé de la construction d'une base orthonormée d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R})$  à partir d'une analyse multirésolution, l'élément le plus important est la fonction échelle  $\phi$  de  $V_0$ , telle que, le système  $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormale de  $V_0$ , cette fonction nous permet de construire l'ondelette dite analysante  $\psi$ .

Inversement, peut-on construire une analyse multirésolution  $V_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que, les fonctions associées  $\phi$  et  $\psi$  soient à support compact? la réponse est affirmative. L'élément essentiel de cette construction est la fonction  $m_0$ .

Le rapport ondelettes et filtre d'échelle ont donné l'idée à I. Daubechies [17] de généraliser le système de Haar, en construisant des bases d'ondelettes à support compact ayant un nombre de moments nuls dépassant 1.

L'idée de base est de construire une fonction  $m_0(\omega)$  de  $L^2([0, 2\pi])$ , dont la réponse impulsionnelle  $h_k$  est de longueur finie, vérifiant les conditions suivantes

$$(31) \quad \sum_k h_k = \sqrt{2},$$

$$(32) \quad \sum_k h_k h_{k-2m} = \delta_{0m},$$

$$(33) \quad \sum_k k^m g_k = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Où  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ .

La condition (32) sur les  $h_k$  est la condition d'orthogonalité des fonctions échelles, elle se traduit sur  $m_0$  par l'équation (21), quant à la condition (33), elle nous informe que la fonction  $\psi$  a  $N$  moments nuls

$$(34) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Il est facile de choisir  $m_0$  de sorte que, la fonction échelle  $\phi$  soit à support compact et réciproquement, si  $\phi$  est à support compact  $m_0$  est une somme trigonométrique finie. Si l'on veut que le système  $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_0$  soit orthonormé, il suffit de choisir la fonction  $m_0(\omega) \neq 0$  sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**lemme:** Tout polynôme trigonométrique  $m_0$  solution de (21) est de la forme

$$(35) \quad m_0(\omega) = \left[ \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) \right]^N Q(e^{-i\omega})$$

où  $N \geq 1$  est le nombre de moments nuls et  $Q$  un polynome tel que,

$$|Q(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1-k}{k} (\sin^2 \frac{\omega}{2})^k + (\sin^2 \frac{\omega}{2})^N R(\frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2})$$

où  $R$  est un polynome impair tel que,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-k-1}{k} y^k + y^N R(\frac{1}{2} - y) \geq 0, \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1$$

et

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} [\sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-k-1}{k} y^k + y^N R(\frac{1}{2} - y)] < 2^{2(N-1)}, \quad \text{si } N \geq 2.$$

Si la suite  $h_k$  est de taille finie, alors, la fonction  $\phi$  est à support compact et par conséquent  $\psi$  est aussi à support compact. Le cas où  $N = 1$ , on a  $m_0(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega})$ , la fonction  $\phi$  est la fonction indicatrice sur  $[0, 1[$  et l'ondelette associée est l'ondelette de Haar.

Pour  $N \geq 2$ , on prend  $R \equiv 0$ , le polynome identiquement nul [17] d'où le calcul de  $Q(e^{-i\omega})$  se fait à partir de  $|Q(e^{-i\omega})|^2$  par le biais du lemme de Riesz, qui donne

$$Q(e^{-i\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{-ik\omega}$$

en remplaçant dans (35), on aura pour chaque  $N \geq 2$ , une fonction  $m_0$  définie par

$$(36) \quad m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\omega}.$$

Notons que, pour chaque fonction  $m_0$  ainsi définie, est associée une base d'ondelettes à support compact.

$$(37) \quad \phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(2x - k),$$

$$(38) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_{2N-1-k} \phi(2x - k).$$

on montre que,

$$\text{supp} \phi = \text{supp} \psi = [0, 2N - 1].$$

### 3 ALGORITHMES

#### 3.1 Algorithme en arbre

C'est un algorithme de S.Mallat fait en 1989, permettant de calculer les détails, en connaissant l'approximation de la fonction sur  $V_j$ .

Supposons que l'on connaisse pour  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $j$  fixé la projection de la fonction  $f$  sur  $V_j$  autrement dit, les  $\alpha_{jk}$  tels que,

$$(39) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_{jk} \phi_{jk}(x)$$

de la relation  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ , on peut écrire

$$(40) \quad f(x) = \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_{j-1,l} \phi_{j-1,l}(x) + \sum_{l=0}^{2N-1} \beta_{j-1,l} \psi_{j-1,l}(x)$$

avec

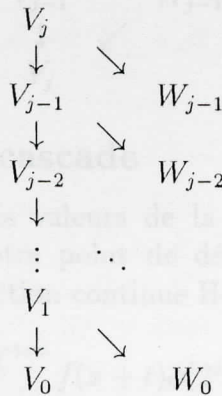
$$\alpha_{j-1,l} = \langle f, \phi_{j-1,l} \rangle \quad \text{et} \quad \beta_{j-1,l} = \langle f, \psi_{j-1,l} \rangle .$$

En remplaçant  $f$  dans le produit scalaire par l'équation (39), on obtient

$$\alpha_{j-1,l} = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_{jk} h_{k-2l} \quad \text{et} \quad \beta_{j-1,l} = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_{jk} g_{k-2l}$$

où les  $h_k$  et  $g_k$  ayant été définies au dessus.

Réitérant ce processus  $j$  fois, on obtient l'algorithme en arbre



Une fois que l'on connait les coefficients dans les espaces  $W_j$ , on approxime la fonction  $f$  par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_{0k} \phi_{0k}(x) + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_{ik} \psi_{ik}(x)$$

Cette décomposition est très rapide, en effet, l'algorithme est de l'ordre  $O(N)$  opérations.

### 3.2 Algorithme de reconstruction

Cet algorithme est l'inverse du précédent, il permet de calculer la projection de la fonction sur  $V_j$ , en connaissant les détails et l'approximation grossière, autrement dit, à partir de la relation  $f = P_{V_0}(f) + \sum_{i=0}^{j-1} P_{W_i}(f)$ , on calcule  $P_{V_j}(f)$ . En effet, de la relation

$$\alpha_{jk} = \langle f, \phi_{jk} \rangle$$

on obtient

$$\alpha_{jk} = \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_{j-1,l} h_{k-2l} + \sum_{l=0}^{2N-1} \beta_{j-1,l} g_{k-2l}$$

Bien entendu, on a utilisé l'équation (40) dans le produit scalaire  $\langle f, \phi_{jk} \rangle$ . Soit

$$\begin{array}{ccc} V_{j-2} & & W_{j-2} \\ \downarrow & \swarrow & \\ V_{j-1} & & W_{j-1} \\ \downarrow & \swarrow & \\ V_j & & \end{array}$$

### 3.3 Algorithme de cascade

Cet algorithme approche les valeurs de la fonction échelle  $\phi$  aux points dyadiques  $\frac{k}{2^j}$ ,  $k, j \in \mathbb{Z}$ . Notre point de départ sera la théorème suivant

**Théorème:** Pour toute fonction continue Hölderienne d'exposant  $\alpha$  on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \phi(2^j x) dx = f(t).$$

Appliquons ce théorème, en remplaçant  $f$  par  $\phi$  et  $t$  par  $\frac{k}{2^j}$ , on obtient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^{\frac{j}{2}} \langle \phi, \phi_{jk} \rangle = \phi\left(\frac{k}{2^j}\right).$$

Les valeurs de  $\phi$  aux points dyadiques se calculent en fonction des produits scalaires par le biais de l'algorithme de reconstruction, en commençant par l'échelle  $j = 0$ , puisque la famille  $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée

$$\langle \phi, \phi_{0k} \rangle = \delta_{0k}$$

et puis on calcule les produits scalaires  $\langle \phi, \phi_{pk} \rangle$  en appliquant  $p$  fois l'algorithme de reconstruction, pour avoir les approximations de  $\phi\left(\frac{k}{2^p}\right)$  avec  $k = 0, 1, \dots, 2^p(2N - 1)$ .

### 3.4 Algorithme de la valeur propre

C'est un algorithme qui approche les valeurs de la fonction  $\phi$  aux points dyadiques, connaissant les valeurs de  $\phi$  aux entiers, puis aux demi-entiers, grâce à la relation d'échelle

$$\phi\left(\frac{l}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(l - k), \quad l = 1, 3, 5, \dots, 4N - 3.$$

Itérant ce procédé, on obtient les valeurs de  $\phi$  aux quart d'entiers, puis à tous les points dyadiques.

Reste à calculer les valeurs de  $\phi$  aux points entiers, appliquons la relation d'échelle pour  $x$  entier

$$\phi(l) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(2l - k)$$

soit matricielement

$$\Phi = H\Phi$$

où  $\Phi$  représente le vecteur propre de composantes  $\phi(l)$ ,  $l = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , et  $H$  la matrice  $2N \times 2N$  de coefficients  $H_{ij} = \sqrt{2}h_{2i-j}$ .

Calculer le vecteur propre de la matrice  $H$  associé à la valeur propre  $\lambda = 1$  est pratiquement difficile par le calcul direct, mais le fait que  $\lambda = 1$  est la plus grande valeur propre [52], on peut appliquer la méthode de la puissance itérée, qui donne le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre, soit  $\phi(l)$ ,  $l = 0, 1, \dots, 2N - 1$ .

## 4 Bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$

On peut facilement étendre la construction d'une base orthonormée d'ondelettes à  $L^2(\mathbb{R}^2)$  grâce à la notion d'analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Une M.R.A de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est la donnée d'une suite croissante  $\mathcal{V}_j, j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , vérifiant les propriétés de la définition 1 de la première section étendues en dimension deux.

On part d'une analyse multirésolution  $r$ -régulière,  $V_j, j \in \mathbb{Z}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  que nous lui associons les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  par le procédé de la première section. On définit alors le sous espace  $\mathcal{V}_j$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  comme la fermeture pour la norme de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  du produit tensoriel algébrique  $V_j \otimes V_j$ , la suite de sous espace  $\mathcal{V}_j, j \in \mathbb{Z}$  ainsi définie forme une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , dite M.R.A séparable. Une base orthonormée  $\Phi_{jkl}(x, y), j, k, l \in \mathbb{Z}$  de  $\mathcal{V}_j$  est donc composée des produits  $\phi_{jk}(x)\phi_{jl}(y), j, k, l \in \mathbb{Z}$ . On désigne par  $\mathcal{W}_j$  le complément orthogonal de  $\mathcal{V}_j$  dans  $\mathcal{V}_{j+1}$ , on a

$$\mathcal{W}_j = V_j \otimes W_j \oplus W_j \otimes V_j \oplus W_j \otimes W_j.$$

Une base orthonormée de  $\mathcal{W}_j$  s'obtient en réunissant les bases orthonormées suivantes

$$\phi_{jkl}(x)\psi_{jkl}(y), \psi_{jkl}(x)\phi_{jkl}(y), \psi_{jkl}(x)\psi_{jkl}(y), j, k, l \in \mathbb{Z}$$

d'où les coefficients d'ondelettes de toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sont donnés par les trois coefficients d'ondelettes élémentaires

$$\alpha_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) dx dy,$$

$$\beta_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) dx dy,$$

$$\gamma_{jkl} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) dx dy.$$

Ainsi, on a la formule de la conservation de l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (|\alpha_{jkl}|^2 + |\beta_{jkl}|^2 + |\gamma_{jkl}|^2)$$

et celle de la reconstruction de la fonction  $f$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{jkl} \psi_{jkl}(x) \psi_{jkl}(y) + \beta_{jkl} \psi_{jkl}(x) \phi_{jkl}(y) + \gamma_{jkl} \phi_{jkl}(x) \psi_{jkl}(y)$$

## 5 Transformations rapides en ondelettes

On introduit une généralisation radicale des algorithmes de [1][10] et [24], en décrivant une méthode rapide [7] de calcul numérique pour tout vecteur arbitraire appliqué à une large classe d'opérateurs. La méthode nécessite  $O(N)$  opérations et elle est directement applicable à tous les opérateurs de Calderon-Zygmund et pseudo-différentiel. Pour cette méthode, on utilise une base d'ondelettes à support compact qui généralise la base de Haar et qui est bien adaptée aux calculs numériques.

### 5.1 Algorithme du système de Haar

Les fonctions de Haar  $h_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  sont définies par

$$h_{jk}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } 2^{-j}k < x < 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \leq x < 2^{-j}(k + 1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que, le support de la fonction  $h_{jk}(x)$  est l'intervalle dyadique  $I_{jk}$  où

$$I_{jk} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k + 1)[.$$

On utilisera par la suite la notation  $h_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}h(2^jx - k)$ , où il est facile de voir que, le système  $\{h_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base de  $L^2(\mathbb{R})$  avec

$$h(x) = h_{00}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On introduit aussi, la fonction caractéristique normalisée  $\chi_{jk}(x)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  définie par

$$\chi_{jk}(x) = \begin{cases} |I_{jk}|^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x \in I_{jk} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $|I_{jk}|$  désigne la mesure de l'intervalle dyadique  $I_{jk}$ , bien entendu

$$\chi(x) = \chi_{00}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



Soit la donnée d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on définit les coefficients de Haar  $d_{jk}$  de la fonction  $f$  par

$$d_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) h_{jk}(x) dx$$

et les moyennes  $s_{jk}$  de  $f$  par

$$s_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{jk}(x) dx$$

d'où la relation

$$(41) \quad d_{jk} = 2^{-\frac{1}{2}} (s'_{jk} - s''_{jk})$$

où  $s'_{jk}$  et  $s''_{jk}$  sont les moyennes sur les demi-intervalles à gauche et à droite respectivement de  $I_{jk}$

$$s'_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+\frac{1}{2})]}(x) dx,$$

$$s''_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{[2^{-j}(k+\frac{1}{2}), 2^{-j}(k+1)]}(x) dx.$$

Pour obtenir une méthode numérique, pour le calcul des coefficients de Haar d'une fonction  $f$ , on procède de la façon suivante.

Supposons que l'on a  $N = 2^n$  échantillons d'une fonction sur l'intervalle  $[0, N[$ , on obtient alors, les moyennes  $s_k^j$  sur les intervalles dyadiques  $I_{jk}$

$$I_{jk} = [2^{-j+n}k, 2^{-j+n}(k+1)[, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

par

$$s_k^0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{0k}(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \int_{2^n k}^{2^n(k+1)} f(x) dx,$$

$$s_k^1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{1k}(x) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \int_{2^{n-1}k}^{2^{n-1}(k+1)} f(x) dx$$

d'où le calcul de la moyenne  $s_k^j$ , pour  $j = 0, 1, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$  est donné par

$$s_k^j = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{jk}(x) = 2^{-\frac{n+j}{2}} \int_{2^{n-j}k}^{2^{n-j}(k+1)} f(x) dx.$$

En répétant cette procédure, on obtient la relation suivante

$$(42) \quad s_k^j = 2^{-\frac{1}{2}} (s_{2k}^{j+1} + s_{2k+1}^{j+1})$$

et d'une façon analogue, après plusieurs opérations, on trouve la relation entre les coefficients de Haar  $d_k^j$  et les moyennes  $s_k^j$

$$(43) \quad d_k^j = 2^{\frac{j-1}{2}} (s_{2k}^{j+1} - s_{2k+1}^{j+1}).$$

Et enfin, pour  $j = 0, 1, \dots, n$  et  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ , on a la représentation des coefficients en pyramide

$$(44) \quad \begin{array}{ccccccc} s_k^n & \rightarrow & s_k^{n-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & s_k^1 & \rightarrow & s_k^0 \\ & \searrow & & & & & & \searrow & \\ & & d_k^{n-1} & & \dots & & d_k^1 & & d_k^0 \end{array}.$$

Il est facile de voir que l'évaluation de tout l'ensemble des coefficients  $s_k^j, d_k^j$  dans (4) nécessite  $2(2N - 1)$  opérations.

Dans le cas de deux dimensions, on a deux méthodes de construction pour le système de Haar, la première est directe, le produit tensoriel  $h_{jk,j'l}(x, y) = h_{jk} \otimes h_{j'l}$ , où la fonction  $h_{jk,j'l}(x, y)$  est supportée sur le rectangle  $I_{jk} \times I_{j'l}$ . La deuxième méthode est définie par une association de trois bases de fonctions  $h_{jk}(x)h_{jl}(y)$ ,  $h_{jk}(x)\chi_{jk}(y)$ , et  $\chi_{jk}(x)h_{jl}(y)$   $j, k, l \in \mathbb{Z}$  toutes définies sur le carré  $I_{jk} \times I_{jl}$ . Il est aisé de voir que ce système constitue bien une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Considérons l'opérateur intégral

$$(45) \quad T(f)(x) = \int K(x, y)f(y)dy$$

et exprimons le noyau  $K(x, y)$  comme fonction de deux variables dans la base de Haar, on obtient

$$(46) \quad K(x, y) = \sum_{j,k,l} \alpha_{kl}^j h_{jk}(x)h_{jl}(y) + \sum_{j,k,l} \beta_{kl}^j h_{jk}(x)\chi_{jl}(y) + \sum_{j,k,l} \gamma_{kl}^j \chi_{jk}(x)h_{jl}(y)$$

où

$$(47) \quad \alpha_{kl}^j = \int \int k(x, y)h_{jk}(x)h_{jl}(y)dx dy,$$

$$(48) \quad \beta_{kl}^j = \int \int k(x, y)h_{jk}(x)\chi_{jl}(y)dx dy,$$

et

$$(49) \quad \gamma_{kl}^j = \int \int k(x, y)\chi_{jk}(x)h_{jl}(y)dx dy.$$

Substituons (46) dans (45), on obtient

$$(50) \quad T(f)(x) = \sum_{j,k} h_{jk}(x) \sum_{j,l} \alpha_{kl}^j d_l^j + \sum_{j,k} h_{jk}(x) \sum_{j,l} \beta_{kl}^j s_l^j + \sum_{j,k} \chi_{jk}(x) \sum_{j,l} \gamma_{kl}^j d_l^j$$

L'expression (50) correspond numériquement à une approximation de  $T$  par,

$$(51) \quad T_n = P_n T P_n$$

avec

$$P_j f(x) = \sum_k \langle f, \chi_{jk} \rangle \chi_{jk}(x).$$

L'opérateur  $T_n$  peut s'écrire comme somme de contributions de différentes échelles,

$$(52) \quad T_n = \sum_{j=0}^{n-1} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j) + P_0 T P_0$$

où

$$Q_j = P_{j+1} - P_j.$$

Il est évident, que l'expression (50) peut être considérée numériquement comme une application de l'opérateur  $T$  à une fonction  $f$  arbitrairement choisie, que l'on peut discrétiser et la convertir dans un vecteur  $\tilde{f} \in \mathbb{R}^{4N-2}$  constituant les coefficients  $d_k^j$  et  $s_k^j$ ,

$$\tilde{f} = (d_0^0, s_0^0, d_0^1, d_1^1, s_0^1, s_1^1, \dots, d_0^n, d_1^n, \dots, d_{N-1}^n, s_0^n, s_1^n, \dots, s_{N-1}^n).$$

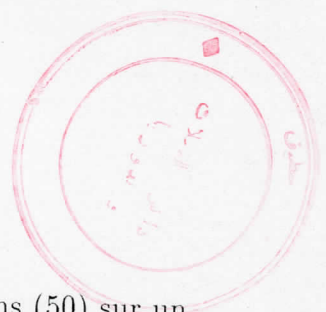
Après avoir calculer les matrices  $\alpha_{k,l}^j$ ,  $\beta_{k,l}^j$  et  $\gamma_{k,l}^j$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$  qui déterminent l'opérateur  $T$ , évaluons les vecteurs  $\tilde{d}_k^j$  et  $\tilde{s}_k^j$  via les formules

$$\tilde{d}_k^j = \sum_{j,l} \alpha_{k,l}^j d_l^j + \sum_{j,l} \beta_{k,l}^j s_l^j$$

$$\tilde{s}_k^j = \sum_{j,l} \gamma_{k,l}^j d_l^j.$$

Finalement, on définit une approximation  $T_n^0$  de  $T_n$  par la formule,

$$T_n^0(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (\tilde{d}_k^j h_{jk}(x) + \tilde{s}_k^j \chi_{jk}(x))$$



il est clair que,  $T_n^0(f)$  est la restriction de l'opérateur  $T_n(f)$  dans (50) sur un sous espace de dimension finie de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Il convient maintenant d'organiser les matrices citées au dessus, dans une seule matrice comme le montre la figure 1.

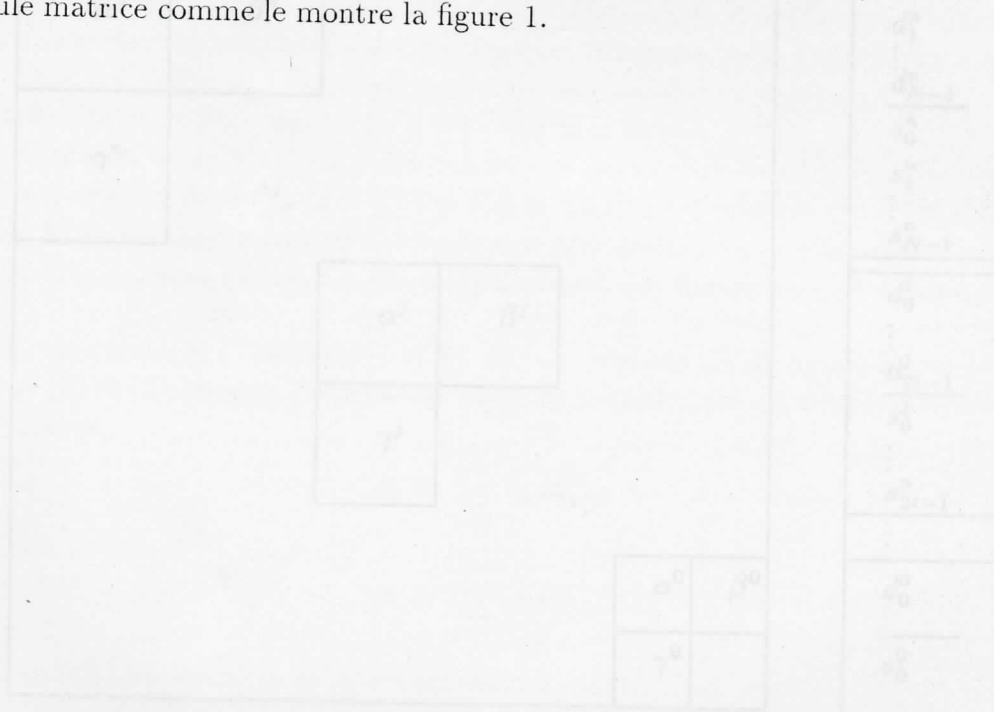


Figure 1

La représentation matricielle de l'opérateur  $T_n^0$  pour des différentes échelles  $j = 0, 1, \dots, n$

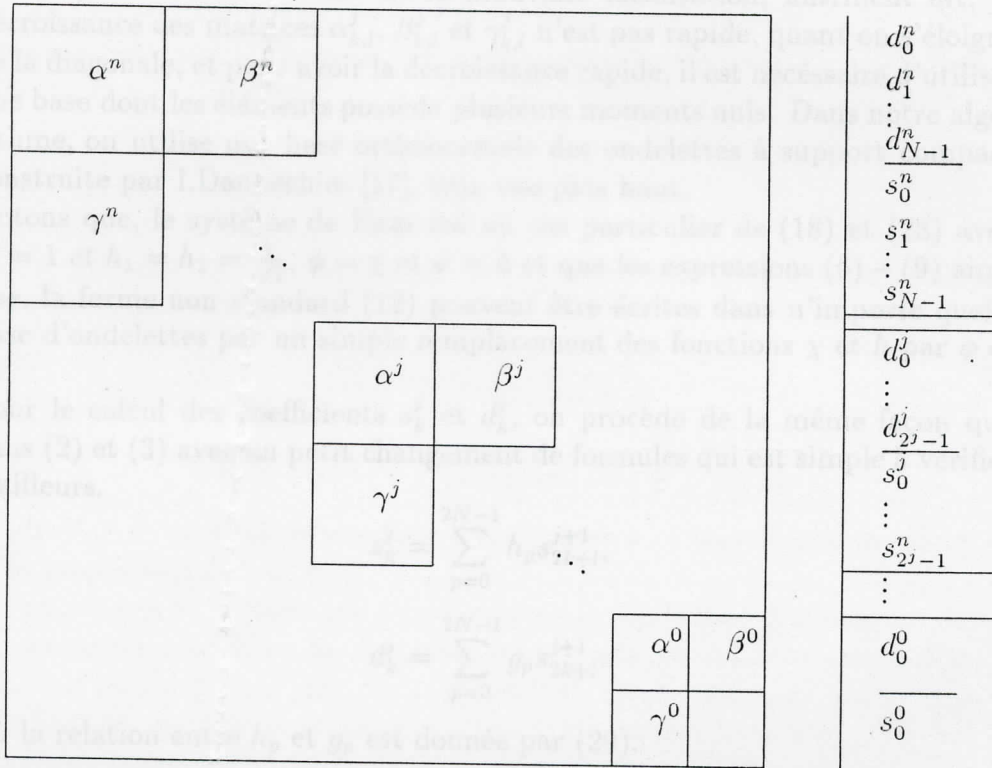
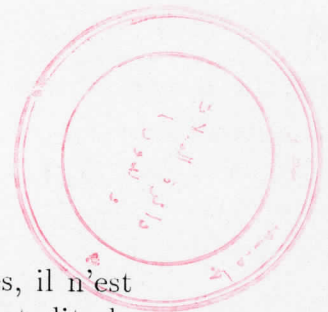


figure 1

La représentation matricielle de l'opérateur  $T_n^0$  pour des différentes échelles  $j = 0, 1, \dots, n$



Bien que, le système de Haar mène à des algorithmes simples, il n'est pas toujours utilisé à cause de la mauvaise localisation, autrement dit, la décroissance des matrices  $\alpha_{k,l}^j$ ,  $\beta_{k,l}^j$  et  $\gamma_{k,l}^j$  n'est pas rapide, quant on s'éloigne de la diagonale, et pour avoir la décroissance rapide, il est nécessaire d'utiliser une base dont les éléments possèdent plusieurs moments nuls. Dans notre algorithme, on utilise une base orthonormale des ondelettes à support compact construite par I. Daubechies [17], déjà vue plus haut.

Notons que, le système de Haar est un cas particulier de (18) et (28) avec  $N = 1$  et  $h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\phi = \chi$  et  $\psi = h$  et que les expressions (6) – (9) ainsi que, la forme non standard (12) peuvent être écrites dans n'importe quelle base d'ondelettes par un simple remplacement des fonctions  $\chi$  et  $h$  par  $\phi$  et  $\psi$ .

Pour le calcul des coefficients  $s_k^j$  et  $d_k^j$ , on procède de la même façon que dans (2) et (3) avec un petit changement de formules qui est simple à vérifier d'ailleurs.

$$s_k^j = \sum_{p=0}^{2N-1} h_p s_{2k+l}^{j+1},$$

$$d_k^j = \sum_{p=0}^{2N-1} g_p s_{2k+l}^{j+1}.$$

Où la relation entre  $h_p$  et  $g_p$  est donnée par (29).

## 5.2 Compression des opérateurs

Avant de décrire la méthode de compression des opérateurs intégraux, on attire l'attention sur cette méthode, qui s'adapte particulièrement à une classe d'opérateurs fréquemment utilisés en analyse harmonique, opérateurs de Calderón-Zygmund et pseudo-différentiel. La forme non standard du noyau  $K(x, y)$  est obtenue en calculant les expressions

$$(53) \quad \alpha_{kl} = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} g_p g_q \theta_{2k+p, 2l+q},$$

$$(54) \quad \beta_{kl} = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} g_p h_q \theta_{2k+p, 2l+q},$$

$$(55) \quad \gamma_{kl} = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p g_q \theta_{2k+p, 2l+q}.$$

On remarque que, les trois systèmes dépendent des éléments  $\theta_{2k+p, 2l+q}$  donnés par,

$$(56) \quad \theta_{kl} = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p h_q \theta_{2k+p, 2l+q}.$$

Natutellement, la fonction  $K(x, y)$  est régulière pour  $x \neq y$  et satisfait aux conditions dites standard

$$(57) \quad |K(x, y)| \leq \frac{1}{|x - y|},$$

$$(58) \quad |\partial_x^N K(x, y)| + |\partial_y^N K(x, y)| \leq \frac{1}{|x - y|^{1+N}}.$$

Pour  $N \geq 1$ , choisissant une base d'ondelettes à  $N$  moments nuls, alors, on a la proposition suivante

**Proposition** Supposons que dans l'expression (6), la base d'ondelettes admet  $N$  moments nuls, (*i.e* : les fonctions  $h$  et  $\chi$  sont remplacées par  $\phi$  et  $\psi$ ) et satisfait les conditions (18), (22), (28) et (34), alors, pour tout noyau  $K(x, y)$  vérifiant les conditions standard (17) et (18), les coefficients  $\alpha_{k,l}^j$ ,  $\beta_{k,l}^j$  et  $\gamma_{k,l}^j$  de forme la non-standard (voir (7) – (9) et figure 1) vérifient les estimations

$$|\alpha_{kl}^j| + |\beta_{kl}^j| + |\gamma_{kl}^j| \leq \frac{1}{1 + |l - k|^{1+N}}$$

pour

$$|l - k| \geq 2N.$$

Supposons maintenant que l'on approxime l'opérateur  $T_n^0$  par  $T_n^{0,B}$  obtenu de l'opérateur  $T_n^0$ , en éliminant tous les coefficients en dehors d'une bande  $B$  de largeur  $\geq 2N$ , il est simple de voir que l'on a l'estimation suivante

$$\|T_n^{0,B} - T_n^0\| \leq \frac{C}{B^N} \log_2 N$$

où  $C$  est la constante déterminée par le noyau  $K(x, y)$ .

Autrement dit, que les matrices  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  peuvent être approximés par des matrices bandes  $\alpha^B$ ,  $\beta^B$  et  $\gamma^B$  respectivement, avec une précision

$$\epsilon = \frac{C}{B^N} \log_2 N$$

les paramètres  $B$  et  $N$  de l'algorithme changent en fonction de la précision choisie  $\epsilon$ , mais pour  $N$  fixé la bande  $B$  est choisie de telle sorte que,

## 6 Introduction

$$\|T_n^{0,B} - T_n^0\| \leq \frac{C}{B^N} \log_2 N \leq \epsilon,$$

$$B \geq \left(\frac{C}{\epsilon} \log_2 N\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Qui peut être remplacée par

$$B \geq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

L'idée de base était de Y. Meyer [35] qui parlait d'une base d'ondelettes à support compact d'Ingrid Daubechies [1] ayant  $N$  moments nuls et dont le père  $\phi$  et le mère  $\psi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N-1]$ . Il définit une  $V_j^N$  que l'on note  $V_j^N$ , comme étant l'ensemble des restrictions à  $[0, 1]$  des fonctions de  $V_j^N$  d'où il obtient pour  $j \geq j_0 > 0$  et  $k = -2N+2, \dots, 2N-1$  les fonctions  $\psi_k(x) \chi_{[k, k+1]}(x)$  engendrant  $V_j^N$ . Ces fonctions sont réparties comme suit :  
 $2N-2$  fonctions  $\psi_{2k}$  telles que l'intérieur de leurs supports contient "0".  
 $2N-2$  fonctions  $\psi_{2k+1}$  telles que leurs supports soient inclus dans  $[0, 1]$ .  
 $2N-2$  fonctions  $\psi_{2k}$  telles que l'intérieur de leurs supports contient "1".  
 Ces trois ensembles sont orthogonaux entre eux, reste à orthonormaliser les fonctions de bord. Malheureusement cette approche fait intervenir des matrices mal conditionnées, conduisant à des algorithmes peu stables, des espaces de dimension variable, ce qui implique peut d'intérêt numérique [14].  
 La nouvelle construction de A. Cohen, I. Daubechies et P. Vial [14], utilise un algorithme de construction plus stable, où ils partent du même point de départ, la famille d'ondelettes à  $N$  moments nuls tout en modifiant les dimensions  $\dim V_j^N = \dim W_j^N = 2^j$  et conservant les bonnes propriétés des ondelettes: régularité, localisation et moments nuls.  
 Ils conservent au centre de l'intervalle  $[0, 1]$ , les fonctions  $\psi_{2k}$  et  $\psi_{2k+1}$  classiques et ajoutent sur le bord certaines fonctions spécifiques, de telle façon que leur réunion engendre tout polynôme sur  $[0, 1]$  jusqu'à un certain degré.

## 7 Construction

Le point essentiel de la construction est celui des oscillations des ondelettes.  
 Si l'on veut que les ondelettes aient  $N$  moments nuls, il faut que les espaces  $V_j^N$  contiennent les polynômes de degré inférieur à  $N$ . Autrement dit, les fonctions de bases que l'on rajoute aux bases de l'intervalle  $[0, 1]$  pour définir  $V_j^N$  devront être telles que cette propriété soit réalisée.





## 6 Introduction

L'idée de base était de Y.Meyer [38], il partait d'une base d'ondelettes à support compact d'Ingrid Daubechies [17], possédant  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ . Il définit une analyse multirésolution sur  $L^2[0, 1]$  que l'on note  $V_j^I$ , comme étant l'ensemble des restrictions à  $[0, 1]$  des fonctions de  $V_j$ , d'où il obtient pour  $j \geq j_0 > 0$  et  $k = -2N + 2, \dots, 2^j - 1$  les fonctions  $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)1_{[0,1]}(x)$  engendrant  $V_j^I$ . Ces fonctions sont réparties comme suit:

$2N - 2$  fonctions  $\tilde{\phi}_{jk}$  telles que l'intérieur de leurs supports contient "0".

$2^j - 2N + 2$  fonctions  $\tilde{\phi}_{jk}$  telles que leurs supports soient inclus dans  $[0, 1]$ .

$2N - 2$  fonctions  $\tilde{\phi}_{jk}$  telles que l'intérieur de leurs supports contient "1".

Ces trois ensembles sont orthogonaux entre eux, reste à orthonormaliser les fonctions de bords. Malheureusement cette approche fait intervenir des matrices mal conditionnées, conduisant à des algorithmes peu stables, des espaces de dimension variable, ce qui implique peu d'intérêt numérique [14].

La nouvelle construction de A.Cohen, I.Daubechies et P.Vial [14], utilise un algorithme de construction plus stable, où ils partent du même point de départ, la famille d'ondelettes à  $N$  moments nuls tout en modifiant les dimensions  $\dim V_j^I = \dim W_j^I = 2^j$  et conservant les bonnes propriétés des ondelettes: régularité, localisation et moments nuls.

Ils conservent au centre de l'intervalle  $[0, 1]$ , les fonctions  $\phi_{jk}$  et  $\psi_{jk}$  classiques et ajoutent sur le bord certaines fonctions spécifiques, de telle façon que leur réunion engendre tout polynôme sur  $[0, 1]$  jusqu'à un certain degré.

## 7 Construction

Le point essentiel de la construction est celui des oscillations des ondelettes. Si l'on veut que les ondelettes aient  $N$  moments nuls, il faut que les espaces  $V_j^I$  contiennent les polynômes de degré inférieur à  $N$ . Autrement dit, les fonctions de bases que l'on rajoute aux bords de l'intervalle  $[0, 1]$  pour définir  $V_j^I$  devront être telles que cette propriété soit réalisée.

Pour  $N$  donné, on définit les  $N$  fonctions  $\tilde{\phi}^k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , sur  $[0, \infty[$  par

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^k(x) &= \sum_{n=0}^{2N-2} C_n^k \phi(x+n-N+1) \\ &= \sum_{n=k}^{2N-2} C_n^k \phi(x+n-N+1)\end{aligned}$$

où

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

On remarque que toutes les fonctions sont de supports compacts, et de plus emboîtés, i.e:  $\text{support } \tilde{\phi}^k = [0, 2N-1-k]$ .

**Proposition 1:** Les  $N$  fonctions  $\tilde{\phi}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  sont indépendantes, et orthogonales aux fonctions  $\phi_{0,m}$ ,  $m \geq N$ , et leur réunion avec  $\phi_{0,m}$ ,  $m \geq N$ , engendre tout polynôme de degré  $\leq N-1$  sur  $[0, \infty[$ , de plus il existe des constantes  $a_{k,l}$  et  $b_{k,m}$  telles que

$$(59) \quad \tilde{\phi}^k(x) = \sum_{l=0}^k a_{k,l} \tilde{\phi}^l(2x) + \sum_{m=N}^{3N-2-2k} b_{k,m} \phi(2x-m)$$

Pour la démonstration de cette proposition voir [17].

L'expression (59) traduit le fait que l'espace  $V_0^I$  engendré par les fonctions de bord plus les fonctions intérieures est inclus dans  $V_1^I$  l'espace engendré par une dilatation de rapport 2 de ces fonctions. On est donc dans le cadre classique d'une suite d'espace  $V_j^I$  emboîtés.

Les fonctions  $\tilde{\phi}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  sont orthogonales aux fonctions du centre de l'intervalle, mais malheureusement pas entre elles. il faut donc orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmith, en commençant par la fonction  $\tilde{\phi}^{N-1}$ , puis pour  $k$  décroissant jusqu'à  $k = 0$ . On obtient une famille orthonormée  $\phi_k^L$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  dont les supports sont emboîtés support  $\phi_k^L = [0, N+k]$ .

On connaîtra ces fonctions par une relation d'échelle, soient les coefficients  $H_{k,l}^L$  et  $h_{k,m}^L$  calculés à partir des  $a_{k,l}$  et  $b_{k,m}$ , tels que

$$(60) \quad \phi_k^L(x) = \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \phi(2x-m).$$

En faisant le même calcul sur l'intervalle  $[-\infty, 1]$ , on obtient  $N$  fonctions pour le bord 1,  $\phi_k^R$ ,  $k = 2^j - N, \dots, 2^j - 1$ , on se ramène ensuite par dilatation

à l'intervalle  $[0, 1]$ .

On définit alors  $V_j^I$ ,  $j \geq j_0$ ,  $j, j_0 \in \mathbb{Z}$  comme étant le sous espace engendré par la famille orthonormée

$$\{\phi_{jk}^L \mid k = 0, 1, \dots, N-1\} \cup \{\phi_{jk} \mid k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^R \mid k = 2^j - N, \dots, 2^j - 1\}.$$

Venons-en à la construction des ondelettes, comme  $\dim V_j^I = 2^j$  pour tout  $j$ , alors  $\dim W_j^I = 2^j$  où  $W_j^I$  est introduit comme le complément orthogonal de  $V_j^I$  dans  $V_{j+1}^I$ . Comme d'habitude, les fonctions  $\psi_{jk}$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  du centre dont le support est contenu dans  $[0, 1]$  sont conservées dans  $W_j^I$  et sont orthonormées. Reste à rajouter  $N$  fonctions pour chaque bord afin d'obtenir une base de  $W_j^I$ .

On définit les fonctions  $\tilde{\psi}^k$  par

$$\tilde{\psi}^k = \phi_{1,k}^L - \sum_{m=0}^{N-1} \langle \phi_{1,k}^L, \phi_{0,m}^L \rangle \phi_{0,m}^L.$$

**Proposition 2:** Les fonctions  $\tilde{\psi}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , définies au dessus sont indépendantes et orthogonales aux fonctions du centre  $\psi_{0,m}$ ,  $m \geq N$ , de plus les fonctions  $\tilde{\psi}^k$  peuvent s'écrire comme,

$$\tilde{\psi}^k = \sum_{l=0}^{N-1} c_{k,l} \phi_{1,l}^L + \sum_{m=N}^{3N-2} d_{k,m} \phi_{1,m}.$$

Le support de ces fonctions est à priori  $[0, 2N-1]$ , on peut donc le réduire par une méthode de pivot à  $[0, N+k]$ . reste à orthonormaliser les fonctions  $\tilde{\psi}^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  par le procédé de Gram-Schmidt pour avoir les coefficients  $G_{k,l}^L$  et  $g_{k,m}^L$  dépendant des coefficients  $c_{k,l}$  et  $d_{k,m}$  et caractérisant les fonctions  $\psi_k^L$ .

$$(61) \quad \psi_k^L(x) = \sum_{l=0}^{N-1} G_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sum_{m=N}^{N+2k} g_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

On procède de la même façon pour le calcul des  $N$  ondelettes du bord 1. En fin l'espace des détails  $W_j^I$  sera par conséquent le sous espace de dimension  $2^j$  engendré par la base orthonormées

$$\{\psi_{jk}^L \mid k = 0, 1, \dots, N-1\} \cup \{\psi_{jk} \mid k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\psi_{jk}^R \mid k = 2^j - N, \dots, 2^j - 1\}.$$

## 7.1 Analyse multirésolution de $L^2[0, 1]$

**Définition:** Une analyse multirésolution de  $L^2[0, 1]$  est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \geq j_0}$ ,  $j_0, j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2[0, 1]$  ayant de plus les propriétés suivantes:

$$(62) \quad \bigcup_{j=j_0}^{\infty} V_j \text{ est dense dans } L^2[0, 1]$$

$$(63) \quad \forall f(x) \in L^2[0, 1], \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0 \text{ on a } f(x) \in V_j \implies f(2x) \in V_{j+1}$$

(64) Le système,  $\{\Phi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\phi_{jk}^L, k = 0, 1, \dots, N-1\} \cup \{\phi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

où

$$\phi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^L(2^j x), \quad \phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad \phi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^R(2^j x)$$

sont respectivement les fonctions échelles du bord 0, internes et du bord 1 dont leurs relations d'échelles sont données par:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k^L(x)$ ,

$$(65) \quad \phi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k(x)$ ,

$$(66) \quad \phi_k(x) = \phi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N h_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k^R(x)$ ,

$$(67) \quad \phi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} H_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la même façon on définit le sous espace supplémentaire  $W_j$  de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  comme étant le sous espace engendré par la base orthonormée,

$$\{\Psi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\psi_{jk}^R, k = 0, \dots, N-1\} \cup$$

$$\{\psi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\psi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\},$$



PARTIE II

où

$$\psi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^L(2^j x), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad \psi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^R(2^j x),$$

sont respectivement les ondelettes du bord 0, internes et du bord 1, vérifiant les systèmes algébriques suivants:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k^L(x)$ ,

$$(68) \quad \psi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} G_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} g_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k(x)$ ,

$$(69) \quad \psi_k(x) = \psi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N g_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k^R(x)$ ,

$$(70) \quad \psi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} G_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} g_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la relation  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  et de (1) on a:

$$V_J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W_j = L^2[0, 1], \quad J \geq j_0, 2^{j_0} \geq 2N,$$

d'où toute fonction  $f$  de  $L^2[0, 1]$ , peut s'écrire comme,

$$f(x) = P_J f(x) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f(x)$$

où  $P_J$  est la projection orthogonale de la fonction  $f$  sur  $V_J$  et  $Q_j$  sa projection orthogonale sur  $W_j$ .

# OPÉRATEUR PARTIE II X ET BASES D'ONDELETTES

## 1 Introduction

Pour l'évaluation numérique des opérateurs intégraux, on a deux approches. Suivant [7] l'une est directe appelée forme standard qui fait associer à l'opérateur  $T$  la matrice  $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{l,l} \rangle$ ,  $j, l, k \in \mathbb{Z}$ , exprimée dans la base d'ondelettes  $\{\phi_{j,k}(x)\phi_{l,l}(y), j, l, k \in \mathbb{Z}\}$ , cette matrice est dite la représentation standard de l'opérateur  $T$ .

### "Opérateurs intégraux et bases d'ondelettes"

L'opérateur  $T$  est une matrice  $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{l,l} \rangle$ ,  $j, l, k \in \mathbb{Z}$ , exprimées dans la base  $\{\phi_{j,k}(x)\phi_{l,l}(y), \phi_{j,k}(x)\phi_{l,l}(y), \phi_{j,k}(x)\phi_{l,l}(y), j, k, l \in \mathbb{Z}\}$ , et qui reflète l'accroissement entre les échelles. Bien entendu, le système  $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  est la base d'ondelettes construite par I. Daubechies dans [17] bien adaptées aux calculs numériques et généralisent les fonctions de Haar.

## 2 Analyse multirésolution

**Définition.** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , que l'on note M.R.A., est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes:

- (1)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (2)  $\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}), V_j \in \mathbb{Z}$  on a  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) il existe une fonction  $\phi(x) \in V_0$  telle que la suite  $\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}$  soit une base orthonormée de l'espace  $V_0$ .

La construction des  $V_j$  assure l'existence d'une fonction  $\phi$  de  $V_0$ , telle que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $\phi(x-k)$  et  $\phi(x+k)$  constituent une base orthonormée de  $V_0$ .

Désignons par  $W_j$  le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j$$

# OPERATEURS INTEGRAUX ET BASES D'ONDELETTES

## 1 Introduction

Pour l'évaluation numérique des opérateurs intégraux, on a deux approches. Suivant [7] l'une est directe appelée **forme standard** qui fait associer à l'opérateur  $T$  la matrice  $\langle T\psi_{jk}, \psi_{j'l} \rangle$ , exprimée dans la base d'ondelettes  $\{\psi_{jk}(x)\psi_{j'l}(y), j, j', k, l \in \mathbb{Z}\}$ , cette matrice est dite la représentation standard de l'opérateur  $T$ .

L'autre approche est appelée **forme non standard**, qui fait associer à l'opérateur  $T$  les trois matrices  $\langle T\psi_{jk}, \psi_{jl} \rangle, \langle T\psi_{jk}, \phi_{jl} \rangle, \langle T\phi_{jk}, \psi_{jl} \rangle$ , exprimées dans la base  $\{\psi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), \psi_{jk}(x)\phi_{jl}(y), \phi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), j, k, l \in \mathbb{Z}\}$ , et qui reflète l'accouplement entre les échelles. Bien entendu, le système  $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$  est la base d'ondelettes construite par I. Daubechies dans [17] bien adaptées aux calculs numériques et généralisent les fonctions de Haar.

## 2 Analyse multirésolution

**Définition:** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , que l'on note M.R.A, est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes:

- (1) 
$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \text{ et } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$
- (2)  $\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z} \text{ on a } f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) il existe une fonction  $\phi(x) \in V_0$  telle que la suite  $\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}$

soit une base orthonormée de l'espace  $V_0$ .

La construction des  $V_j$  assure l'existence d'une fonction  $\psi$  de  $V_1$ , telle que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $\phi(x-k)$  et  $\psi(x-k)$  constituent une base orthonormée de  $V_1$ .

Désignons par  $W_j$  le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j$$

d'où les fonctions  $\psi(x - k), \forall k \in \mathbb{Z}$  constituent une base orthonormée de  $W_0$ , et on a la représentation de  $L^2(\mathbb{R})$  comme une somme directe

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

## 2.1 Ondelettes à supports compacts:

Une base d'ondelettes à supports compacts de  $L^2(\mathbb{R})$  est formée par la translation et dilatation de la fonction  $\psi$

$$(4) \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

où  $\psi$  est l'ondelette dépendante de la fonction échelle  $\phi$  [17], supportées par  $[0, 2N - 1]$ ,  $N$  est le nombre de moments nuls de la fonction  $\psi$ , de plus, les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont solutions des équations suivantes:

$$(5) \quad \phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi(2x - k)$$

$$(6) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} g_k \phi(2x - k)$$

où

$$(7) \quad g_k = h_{2N-1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

et

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Pour chaque  $j$ , on a deux bases orthonormées des sous espaces  $W_j$  et  $V_j$  formées respectivement par les familles  $\{\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

L'équation (5) s'écrit dans le domaine spectral comme

$$(10) \quad \hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$





où (10), on obtient

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-i\omega x} dx$$

et  $m_0(\omega)$ , la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ik\omega}.$$

L'orthonormalité de la fonction  $\phi$  et la périodicité de la fonction  $m_0$ , nous donne l'équation suivante

$$(11) \quad |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

avec

$$(12) \quad m_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad m_0(\pi) = 0.$$

**Lemme:** Tout polynôme trigonométrique,  $m_0(\omega)$  solution de (11) est de la forme

$$(13) \quad m_0(\omega) = \left[ \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) \right]^N Q(e^{-i\omega})$$

où  $N \geq 1$  est le nombre de moments nuls et  $Q$  est le polynôme tel que:

$$|Q(e^{-i\omega})|^2 = P(\sin^2 \frac{1}{2}\omega) + \sin^{2N} \frac{1}{2}\omega R(\frac{1}{2}\cos\omega)$$

où

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k$$

et  $R$  est un polynôme impair tel que

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} [P(y) + y^N R(\frac{1}{2} - y)] < 2^{2(N-1)}.$$

## 2.2 Calculs des moments des fonctions échelles:

Notons par  $M_m$  le moment d'ordre  $m$  de la fonction échelle  $\phi$

$$M_m = \int x^m \phi(x) dx$$

utilisons (5), on obtient

$$\begin{aligned}
 M_m &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \int x^m \phi(2x - k) dx, \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \int (x+k)^m \phi(x) dx
 \end{aligned}$$

d'où

$$(14) \quad M_m = \frac{\sqrt{2}}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \sum_{j=0}^m \binom{j}{m} k^{m-j} M_j$$

avec

$$\binom{j}{m} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad \text{et} \quad M_j = \int x^j \phi(x) dx$$

après l'utilisation de la relation  $\sum_{k=0}^{2N-1} h_k = \sqrt{2}$ , on a

$$M_m = \frac{1}{2^m - 1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j}{m} M_j \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k k^{m-j} \right)$$

d'où l'expression récurrente du moment  $M_m$

$$M_m = \frac{1}{2^m - 1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j}{m} M_j \mu_{m-j}$$

avec

$$\mu_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k k^l$$

$i$	$\mu_i$	$M_i$
0	1.000000000	1.000000000
1	0.633974671	0.633974671
2	0.401923835	0.401923835
3	-0.611216545	0.131091475
4	-4.28461266	-0.302193522

Les moments des fonctions échelles  
pour  $(N = 2, D4 \text{ daubechies})$  jusqu'à l'ordre 4.

**Lemme 1:** Pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et  $m = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ , on a la relation

$$(15) \quad \int \int (ax - y)^m \phi(x) \phi(y) dx dy = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{j}{m} a^{m-j} M_{m-j} M_j$$

si  $a = 1$  alors, l'expression (15) est identiquement nulle pour tout entier  $m = 1, 2, \dots, 2N - 1$ .

**Preuve:** En effet, pour  $m \geq 1$

$$\int \int (x - y)^m \phi(x) \phi(y) dx dy = \int \int z^m \phi(x) \phi(x - z) dx dz = \int z^m \Phi(z) dz$$

où

$$\Phi(z) = \int \phi(x) \phi(x - z) dx$$

de la relation (10), (11), (12) et (13), on a

$$\int z^m \Phi(z) dz = \left( \left( -\frac{d}{idw} \right)^m | \hat{\phi}(w) |^2 \right)_{w=0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 2N - 1.$$

### 3 La forme non standard

Soit  $T$  un opérateur défini sur  $L^2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $L^2(\mathbb{R})$

$$T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

dont le noyau est  $K(x, y)$

$$K(x, y) = \frac{1}{y - ax - b} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Définissons la projection orthogonale sur le sous espace  $V_j, j \in \mathbb{Z}$

$$P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$$

par

$$(16) \quad P_j f(x) = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}(x)$$

et exprimons  $T$  en séries "télescopique"

$$(17) \quad T = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} (P_{j+1} T P_{j+1} - P_j T P_j),$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} ((P_{j+1} - P_j) + P_j T (P_{j+1} - P_j) + P_j - P_j T P_j)$$

ainsi, on a

$$(18) \quad T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j)$$

où

$$(19) \quad Q_j = P_{j+1} - P_j$$

est la projection de l'opérateur sur le sous espace  $W_j$ . La relation (18) peut aussi s'écrire de la façon suivante:

$$(20) \quad T = \sum_{j=0}^{+\infty} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j) + P_0 T P_0$$

pour  $j = n$ , un entier assez grand, on a

$$(21) \quad T_n = \sum_{j=0}^n (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j) + P_0 T P_0$$

où  $T \sim T_n = P_n T P_n$  est une discrétisation de l'opérateur  $T$  à l'échelle  $j = n$ . La forme non standard, introduite par Beylkin [7] présente l'opérateur  $T$  comme étant une chaîne de triplets

$$T = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

où

$$A_j : W_j \rightarrow W_j,$$

$$B_j : V_j \rightarrow W_j,$$

$$\Gamma_j : W_j \rightarrow V_j$$

les opérateurs  $\{A_j, B_j, \Gamma_j\}$  sont définis comme suit:

$A_j = Q_j T Q_j$ ,  $B_j = Q_j T P_j$  et  $\Gamma_j = P_j T Q_j$ , et donnent une forme matricielle à l'opérateur  $T_{j+1}$  via la relation

$$T_{j+1} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ \Gamma_j & T_j \end{pmatrix}$$

où  $T_j = P_j T P_j$ .

$$T_j = V_j \rightarrow V_j.$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} ((P_{j+1} - P_j) + P_j T (P_{j+1} - P_j) + P_j - P_j T P_j)$$

ainsi, on a

$$(18) \quad T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j)$$

où

$$(19) \quad Q_j = P_{j+1} - P_j$$

est la projection de l'opérateur sur le sous espace  $W_j$ . La relation (18) peut aussi s'écrire de la façon suivante:

$$(20) \quad T = \sum_{j=0}^{+\infty} (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j) + P_0 T P_0$$

pour  $j = n$ , un entier assez grand, on a

$$(21) \quad T_n = \sum_{j=0}^n (Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j) + P_0 T P_0$$

où  $T \sim T_n = P_n T P_n$  est une discrétisation de l'opérateur  $T$  à l'échelle  $j = n$ . La forme non standard, introduite par Beylkin [7] présente l'opérateur  $T$  comme étant une chaîne de triplets

$$T = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

où

$$A_j : W_j \rightarrow W_j,$$

$$B_j : V_j \rightarrow W_j,$$

$$\Gamma_j : W_j \rightarrow V_j$$

les opérateurs  $\{A_j, B_j, \Gamma_j\}$  sont définis comme suit:

$A_j = Q_j T Q_j$ ,  $B_j = Q_j T P_j$  et  $\Gamma_j = P_j T Q_j$ , et donnent une forme matricielle à l'opérateur  $T_{j+1}$  via la relation

$$T_{j+1} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ \Gamma_j & T_j \end{pmatrix}$$

où  $T_j = P_j T P_j$ .

$$T_j = V_j \rightarrow V_j.$$

Les opérateurs  $A_j, B_j$  et  $\Gamma_j$  peuvent être représentés par les matrices  $\alpha^j, \beta^j$  et  $\gamma^j$ , dont les éléments  $\alpha_{jkl}, \beta_{jkl}$  et  $\gamma_{jkl}$  sont donnés par les produits scalaires suivants:

$$\alpha_{jkl}(b) = 2^j \iint \frac{1}{y - ax - b} \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) dx dy,$$

$$= \iint \frac{1}{y - ax - 2^j b} \psi(x - k) \psi(y - l) dx dy = \alpha_{kl}(2^j b)$$

$$\beta_{jkl}(b) = 2^j \iint \frac{1}{y - ax - b} \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) dx dy,$$

$$= \iint \frac{1}{y - ax - 2^j b} \phi(x - k) \phi(y - l) dx dy = \beta_{kl}(2^j b)$$

et

$$\gamma_{jkl}(b) = 2^j \iint \frac{1}{y - ax - b} \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) dx dy,$$

$$= \iint \frac{1}{y - ax - 2^j b} \phi(x - k) \psi(y - l) dx dy = \gamma_{kl}(2^j b).$$

L'opérateur  $T_j$  est représenté par la matrice  $\theta^j$  où

$$\theta_{jkl}(b) = 2^j \iint \frac{1}{y - ax - b} \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) dx dy,$$

$$= \iint \frac{1}{y - ax - 2^j b} \phi(x - k) \phi(y - l) dx dy = \theta_{kl}(2^j b).$$

Utilisons les relations d'échelles (5) et (6) des fonctions  $\phi$  et  $\psi$  dans les équations aux dessus, on obtient les systèmes suivants:

$$(22) \quad \alpha_{kl}(2^j b) = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} g_p g_q \theta_{2k+p, 2l+q}(2^{j+1} b),$$

$$(23) \quad \beta_{kl}(2^j b) = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} g_p h_q \theta_{2k+p, 2l+q}(2^{j+1} b),$$

$$(24) \quad \gamma_{kl}(2^j b) = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p g_q \theta_{2k+p, 2l+q}(2^{j+1} b).$$

On remarque que les trois systèmes dépendent des éléments  $\theta_{2k+p,2l+q}(2^{j+1}b)$  de la matrice  $\theta^{j+1}$  où

$$(25) \quad \theta_{kl}(2^j b) = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p h_q \theta_{2k+p,2l+q}(2^{j+1}b).$$

**Proposition 1:** Si les intégrales  $\theta_{jkl}(b)$  existent, alors les coefficients  $\theta_{kl}(2^{j+1}b)$  vérifient le système algébrique suivant:

$$\theta_{kl}(2^j b) = \sum_{i=0}^{2N-1} h_i^2 \theta_{2k+i,2l+i}(2^{j+1}b) + \sum_{r=1}^{2N-1} \left( \sum_{i=0}^{2N-1-r} h_i h_{i+r} (\theta_{2k+i,2l+i+r} + \theta_{2k+i+r,2l+i}) \right).$$

**Preuve:** La démonstration de cette proposition se fait d'une façon directe en utilisant la décomposition de la somme double de l'équation (25)

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_i b_j = \sum_{p=0}^N a_p b_p + \sum_{r=1}^N \sum_{p=0}^{N-r} a_p b_{p+r} + \sum_{r=1}^N \sum_{p=0}^{N-r} a_{p+r} b_p$$

de plus, grâce au lemme 1, on a l'équation asymptotique des éléments  $\theta_{jkl}(2^j b)$  pour  $|l - ak - 2^j b|$  assez large

$$\theta_{kl}(2^j b) = \frac{1}{l - ak - 2^j b} \sum_{m=0}^{2N-2} \frac{\sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{j}{m} a^{m-j} M_{m-j} M_j}{(l - ak - 2^j b)^m} + o\left(\frac{1}{|l - ak - 2^j b|^{2N}}\right).$$

**Cas où  $a = 1$  et  $b \in \mathbf{R}$  :**

L'opérateur devient celui de Hilbert généralisé dont le noyau

$$K(x, y) = \frac{1}{y - x - b}$$

et on aura la proposition suivante:

**Proposition 2:** Si les intégrales  $\theta_{jkl}(b)$  existent, alors les coefficients  $\theta_{kl}(2^{j+1}b)$  vérifient le système algébrique suivant

$$(i) \quad \theta_{kl}(2^j b) = \theta_{2k,2l}(2^{j+1}b) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2k,2l+2r-1} + \theta_{2k+2r-1,2l})$$

où

$$d_r = 2 \sum_{i=0}^{2N-1-r} h_i h_{i+r}, \quad r = 1, 2, \dots, 2N - 1$$

de plus

$$(ii) \quad \theta_{kl}(2^j b) = -\theta_{lk}(-2^j b), \quad \forall j, k, l \in \mathbb{Z}$$

et

$$(iii) \quad \sum_{kl} \theta_{kl}(2^j b) = 2 \sum_{kl} \theta_{kl}(2^{j+1} b), \quad \forall j, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Avant de procéder à la démonstration de cette proposition, citons les deux lemmes suivants:

**Lemme 2:** Les éléments  $\theta_{kl}(b)$  sont invariables par translations entières, i.e

$$\theta_{kl}(b) = \theta_{k+i, l+i}(b), \quad \forall k, l, i \in \mathbb{Z}.$$

**Preuve:**

$$\theta_{k+i, l+i}(b) = \iint \frac{1}{y-x-b} \phi(x-k-i) \phi(y-l-i) dx dy$$

effectuons le changement de variable  $X = x+i, Y = y+i$ , l'intégrale devient

$$\iint \frac{1}{y-x-b} \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy = \theta_{kl}(b).$$

**Lemme 3:** De la relation  $d_r = 2 \sum_{i=0}^{2N-1-r} h_i h_{i+r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2N-1$ , on a

$$(26) \quad d_{2r} = 0, \quad \sum_{r=1}^{2N-1} d_{2r+1} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, N-1.$$

**Preuve:**

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-ikw}$$

d'où

$$\begin{aligned} |m_0(w)|^2 &= m_0(w) \overline{m_0(w)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{l=0}^{2N-1} h_k e^{-ikw} h_l e^{ilw}, \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \sum_{p=1}^{2N-1} \sum_{i=0}^{2N-1-p} h_i h_{i+p} \cos pw \right), \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2N-1} d_p \cos pw \end{aligned}$$



où

$$d_p = 2 \sum_{i=0}^{2N-1-p} h_i h_{i+p}$$

$$|m_0(w + \pi)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2N-1} d_p \cos p(w + \pi)$$

de la relation (11) et (12), on obtient (26).

**Preuve de la proposition 2:**(i)/ Récrivons le système de la proposition 1, qui est vrai pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , en particulier pour  $a = 1$  et utilisant le lemme 2 et le lemme 3, avec la relation  $\sum_{i=0}^{2N-1} h_i^2 = 1$ , on obtient le système algébrique voulu.

$$\theta_{kl}(2^j b) = \theta_{2k, 2l}(2^{j+1} b) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2k, 2l+2r-1} + \theta_{2k+2r-1, 2l})$$

de plus, pour des valeurs de  $|l - k - 2^j b|$  assez grandes, on a l'équation asymptotique des  $\theta_{kl}(2^j b)$

$$\theta_{kl}(2^j b) = \frac{1}{l - k - 2^j b} + o\left(\frac{1}{|l - k - 2^j b|^{2N}}\right).$$

$$(ii)/ \theta_{jkl}(b) = \theta_{kl}(2^j b) = \iint \frac{1}{y - x - 2^j b} \phi(x - k) \phi(y - l) dx dy,$$

$$= - \iint \frac{1}{y - x + 2^j b} \phi(x - l) \phi(y - k) dx dy = -\theta_{lk}(-2^j b) = -\theta_{jlk}(-b).$$

(iii)/ Procédons par une double somme de Fourier sur les deux membres de l'équation (25) et sommons sur  $k$  et  $l$

$$\theta_{kl}(2^j b) = \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p h_q \theta_{2k+p, 2l+q}(2^{j+1} b)$$

d'où

$$\sum_{kl} \theta_{kl}(2^j b) e^{ikw_1} e^{ilw_2} = \sum_{kl} \sum_{p=0}^{2N-1} \sum_{q=0}^{2N-1} h_p h_q \theta_{2k+p, 2l+q}(2^{j+1} b) e^{ikw_1} e^{ilw_2}.$$

Faisons le changement de variable  $K = 2k + p, L = 2l + q$ , on obtient

$$\sum_{kl} \theta_{kl}(2^j b) e^{ikw_1} e^{ilw_2} = \sum_{p=0}^{2N-1} h_p e^{-ip \frac{w_1}{2}} \sum_{q=0}^{2N-1} h_q e^{-iq \frac{w_2}{2}} \sum_{kl} \theta_{kl}(2^{j+1} b) e^{ik \frac{w_1}{2}} e^{il \frac{w_2}{2}}$$

$$= 2m_0\left(\frac{w_1}{2}\right) \cdot m_0\left(\frac{w_2}{2}\right) \sum_{kl} \theta_{kl}(2^{j+1}b) e^{ik\frac{w_1}{2}} e^{il\frac{w_2}{2}}.$$

Posons  $w_1 = w_2 = 0$ , on obtient le résultat

$$\sum_{kl} \theta_{kl}(2^j b) = 2 \sum_{kl} \theta_{kl}(2^{j+1} b).$$

**Cas où  $a = 1$  et  $b \in \mathbf{Z}$**

L'opérateur  $T$  devient moins général que le cas précédent, mais il nous mène directement à l'opérateur de Hilbert.

**Proposition 3 :** Si les intégrales  $\theta_{jkl}(b)$  existent, alors les coefficients  $\theta_{kl}(2^{j+1}b)$  vérifient le système algébrique suivant

$$\theta_{k+2^j b, l} = \theta_{2(k+2^j b), 2l} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2(k+2^j b), 2l+2r-1} + \theta_{2(k+2^j b)+2r-1, 2l})$$

où

$$\theta_{kl} = \iint \frac{1}{y-x} \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy$$

de plus

$$\theta_{k+2^j b, l} = -\theta_{l, k+2^j b}, \quad \forall j, k, l \in \mathbf{Z}$$

et

$$\sum_{kl} \theta_{k+2^j b, l} = 2 \sum_{kl} \theta_{k+2^j b, l}, \quad \forall j, k, l \in \mathbf{Z}.$$

**Preuve:** La démonstration de cette proposition est un cas particulier de la proposition 2, en effet

$$\begin{aligned} \theta_{kl}(2^j b) &= \iint \frac{1}{y-x-2^j b} \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy, \\ &= \iint \frac{1}{y-x} \phi(x-k-2^j b) \phi(y-l) dx dy = \theta_{k+2^j b, l} \end{aligned}$$

le système algébrique de la proposition 3 est le même que celui de la proposition 2, avec un petit changement de notations.

La relation  $\theta_{k+2^j b, l} = -\theta_{l, k+2^j b} \quad \forall j, k, l \in \mathbf{Z}$  vient du fait que

$$\begin{aligned} \theta_{k+2^j b, l} &= \iint \frac{1}{y-x} \phi(x-k-2^j b) \phi(y-l) dx dy, \\ &= - \iint \frac{1}{y-x} \phi(x-l) \phi(y-k-2^j b) dx dy = -\theta_{l, k+2^j b} \end{aligned}$$

reste à démontrer la relation

$$\sum_{kl} \theta_{k+2^j b, l} = 2 \sum_{kl} \theta_{k+2^j b, l}, \quad \forall j, k, l, \in \mathbb{Z}$$

on procède de la même façon que la proposition 2.

Pour  $b = 0$ , l'opérateur devient celui de Hilbert et le système algébrique prend une forme beaucoup plus simple, trouvé par Beylkin [9].

$$\theta_{kl} = \theta_{2k, 2l} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2k, 2l+2r-1} + \theta_{2k+2r-1, 2l})$$

c'est exactement le système des propositions précédentes, en remplaçant la valeur de  $b$  par 0, de plus,

$$\theta_{kl} = -\theta_{lk} \quad \text{d'où} \quad \theta_{kk} = 0$$

et

$$\sum_{kl} \theta_{kl} = 2 \sum_{kl} \theta_{kl} \quad \text{d'où} \quad \sum_{kl} \theta_{kl} = 0.$$

**Cas où  $a, b \in \mathbb{C}$ :**

Soit le noyau

$$K(x, y) = \frac{1}{y - ax - b} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

il n'y a pas de différence entre cet opérateur et celui que l'on a étudié dans le cas réel, même système algébrique, même équation asymptotique, etc...

Mais si  $b = 0$  et  $|a| = 1$ , alors on a le lemme suivant:

**Lemme 4:** Pour  $b = 0$  et  $|a| = 1$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , on a la relation suivante:

$$\theta_{kl} = -\bar{a} \cdot \overline{\theta_{lk}}$$

où  $\bar{a}$  désigne le conjugué de  $a$ .

**Preuve:**

$$\begin{aligned} \theta_{kl} &= \int \int \frac{1}{y - ax} \phi(x - k) \phi(y - l) dx dy \\ &= -\bar{a} \int \int \frac{1}{y - \bar{a}x} \phi(x - l) \phi(y - k) dx dy = \bar{a} \cdot \overline{\theta_{lk}}. \end{aligned}$$

**Exemple 1:** Le tableau1 calcule les coefficients  $\theta_{kl}$  de la transformée de Hilbert, dont le noyau  $k(x, y) = \frac{1}{y-x}$  pour les ondelettes à deux moments nuls  $D_4$  Daubechies, calculés avec une précision de  $10^{-5}$ . Les coefficients  $\theta_{kl}$  pour  $l - k > 17$ , sont obtenus en utilisant l'équation asymptotique.

tableau1

$l - k$	$\theta_{kl}$
0	0.000000000E+00
1	2.40307617
2	-0.116354465
3	0.100307941
4	0.553091355E-01
5	0.494720899E-01
6	0.412569307E-01
7	0.353344157E-01
8	0.308020636E-01
9	0.303513482E-01
10	0.282010995E-01
11	0.255134106E-01
12	0.233884826E-01
13	0.215902068E-01
14	0.200486556E-01
15	0.187125280E-01
16	0.175433382E-01
17	0.165116414E-01
18	0.176838823E-01
19	0.167531483E-01
20	0.159154944E-01

Les coefficients  $\theta_{kl}, l - k = 0, \dots, 20$  de la transformée de Hilbert pour  $D_4$  Daubechies avec une précision de  $10^{-5}$ .



**Exemple 2:** Le tableau2 calcule les coefficients  $\theta_{jkl}$  pour  $j = 3$  de la transformée de Hilbert généralisée, dont le noyau  $k(x, y) = \frac{1}{y - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y}$ , pour les ondelettes à deux moments nuls  $D_4$  Daubechies, calculés avec une précision de  $10^{-5}$ . Les coefficients  $\theta_{jkl}$  pour tout  $k, l = 0, \dots, 2^j - 1$  et  $j = 5$  sont obtenus en utilisant l'équation asymptotique.

tableau2

j	k	l	$\theta_{jkl}$	j	k	l	$\theta_{jkl}$
3	0	0	-0.269993618E-01	3	3	0	-0.248885714E-01
3	0	1	-0.295012593E-01	3	3	1	-0.269993730E-01
3	0	2	-0.324684605E-01	3	3	2	-0.295012593E-01
3	0	3	-0.365339406E-01	3	3	3	-0.324684717E-01
3	0	4	-0.414174087E-01	3	3	4	-0.365339443E-01
3	0	5	-0.476064645E-01	3	3	5	-0.414174087E-01
3	1	0	-0.262570865E-01	3	4	0	-0.242564455E-01
3	1	1	-0.286173262E-01	3	4	1	-0.262570903E-01
3	1	2	-0.314300209E-01	3	4	2	-0.286173411E-01
3	1	3	-0.350032970E-01	3	4	3	-0.314300358E-01
3	1	4	-0.396967568E-01	3	4	4	-0.350033157E-01
3	1	5	-0.453479737E-01	3	4	5	-0.396967568E-01
3	2	0	-0.255545229E-01	3	5	0	-0.236556195E-01
3	2	1	-0.277848206E-01	3	5	1	-0.255545229E-01
3	2	2	-0.304415077E-01	3	5	2	-0.277848206E-01
3	2	3	-0.336795449E-01	3	5	3	-0.304415077E-01
3	2	4	-0.381032005E-01	3	5	4	-0.336795449E-01
3	2	5	-0.432937704E-01	3	5	5	-0.381032005E-01

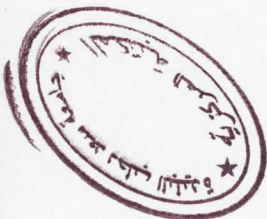
Les coefficients  $\theta_{jkl}, j = 3, k, l = 0, \dots, 2^j - N - 1$  de la transformée de Hilbert généralisée pour  $D_4$  Daubechies.

3 3 3 (0.617823483E-05, 0.281211105E-01)  
 3 3 4 (0.241023302E-02, 0.374031706E-01)  
 3 3 5 (0.482251505E-05, 0.572641911E-01)  
 3 4 0 (-0.728881494E-02, 0.293802982E-01)  
 3 4 1 (-0.383785197E-02, 0.329476633E-01)  
 3 4 2 (-0.408373401E-02, 0.251797173E-01)  
 3 4 3 (-0.207950657E-02, 0.236724455E-01)

**Exemple 3:** Le tableau3 calcule les coefficients  $\theta_{jkl}$  pour  $j = 3$  de la transformée de Hilbert généralisée, dont le noyau  $k(x, y) = \frac{1}{y - (1+i)x - ib}$  pour les ondelettes à deux moments nuls  $D_4$  Daubechies, calculés avec une précision de  $10^{-5}$ . Les coefficients  $\theta_{jkl}$  pour tout  $k, l = 0, \dots, 2^j - 1$  et  $j = 5$  sont obtenus en utilisant l'équation asymptotique.

tableau3

j	k	l	$\theta_{jkl}$
3	0	0	(0.192905718E-04, 0.375914313E-01)
3	0	1	(0.439264998E-02, 0.370669775E-01)
3	0	2	(0.839605182E-02, 0.355689153E-01)
3	0	3	(0.119933598E-01, 0.335887782E-01)
3	0	4	(0.149383172E-01, 0.310701206E-01)
3	0	5	(0.168884099E-01, 0.281056203E-01)
3	1	0	(-0.361027638E-02, 0.337738656E-01)
3	1	1	(0.133251015E-04, 0.341568366E-01)
3	1	2	(0.363405934E-02, 0.337631926E-01)
3	1	3	(0.701386854E-02, 0.326456390E-01)
3	1	4	(0.996506959E-02, 0.309423618E-01)
3	1	5	(0.123789571E-01, 0.288376883E-01)
3	2	0	(-0.575513393E-02, 0.297376625E-01)
3	2	1	(-0.295271748E-02, 0.305643640E-01)
3	2	2	(0.890762021E-05, 0.308478251E-01)
3	2	3	(0.296895043E-02, 0.305578411E-01)
3	2	4	(0.576718152E-02, 0.297262706E-01)
3	2	5	(0.827145204E-02, 0.284386985E-01)
3	3	0	(-0.696104392E-02, 0.262828954E-01)
3	3	1	(-0.481357053E-02, 0.272759274E-01)
3	3	2	(-0.245920010E-02, 0.279075392E-01)
3	3	3	(0.617625483E-05, 0.281231105E-01)
3	3	4	(0.247063302E-02, 0.279033706E-01)
3	3	5	(0.482251868E-02, 0.272684991E-01)
3	4	0	(-0.758881494E-02, 0.233802982E-01)
3	4	1	(-0.593785197E-02, 0.243976638E-01)
3	4	2	(-0.408373401E-02, 0.251797475E-01)
3	4	3	(-0.207950687E-02, 0.256728455E-01)



3	4	4	(0.441489101E-05, 0.258405395E-01)
3	4	5	(0.208777771E-02, 0.256700926E-01)
3	5	0	(-0.786379725E-02, 0.209514983E-01)
3	5	1	(-0.658284873E-02, 0.219262913E-01)
3	5	2	(-0.512140617E-02, 0.227491930E-01)
3	5	3	(-0.350702368E-02, 0.233754702E-01)
3	5	4	(-0.178122055E-02, 0.237676203E-01)
3	5	5	(0.323852873E-05, 0.239006095E-01)

Les coefficients complexes  $\theta_{jkl}$ ,  $j = 3, k, l = 0, \dots, 2^j - N - 1$  de la transformée de Hilbert généralisée pour  $D_4$  Daubechies.

"Opérateurs de Hilbert et bases d'ondelettes sur un intervalle"



# OPÉRATEUR DE HILBERT ET BASES D'ONDELETTES SUR UN INTERVALLE

## PARTIE III

### 1 Introduction

On part d'une base d'ondelettes  $(\phi_k, j, k \in \mathbb{Z})$  à support compact d'après Daubechies [17] possédant  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ .

La construction d'une analyse multirésolution sur  $L^2[0, 1]$  exige que les  $V_j$  soient engendrés par des fonctions  $\phi_{jk}$  dont le support est strictement inclus

### "Opérateurs de Hilbert et bases d'ondelettes sur un intervalle"

et l'intervalle  $[0, 2^j]$  pour  $j \geq j_0, 2^j \geq 2N$  et la dimension de chaque  $V_j$  est  $2^j$  [14].

L'idée est de construire une analyse multirésolution  $V_j, j \in \mathbb{Z}$  à partir des carrés  $I_r \times I_s$ , où  $I_r$  désigne l'intervalle d'extrémités entières  $I_r = [r, r + 1]$ .

L'opérateur de Hilbert  $T$  est représenté dans  $V_j$  par la matrice  $\langle T\phi_k, \phi_l \rangle$ .

Dû à la construction des ondelettes sur un intervalle, cette matrice contient nous sous matrices blocs, dont tous les éléments dépendent des éléments de la matrice bloc interne, de plus elle est antisymétrique pour le cas où  $r = s$ .

**Définition:** Une analyse multirésolution de  $L^2[0, 1]$  est la donnée d'une suite croissante  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}, j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2[0, 1]$  ayant les propriétés suivantes:

- (1)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2[0, 1]$
- (2)  $\forall f(x) \in L^2[0, 1], \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0$  on a  $f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) Le système  $(\phi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1) \cup \{\phi_{jk}^0, k = 0, 1, \dots, N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^1, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^2, k = -N, \dots, -1\}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

$$\phi_{jk}^0(x) = 2^j \phi_k^0(2^j x), \quad \phi_{jk}^1(x) = 2^j \phi_k^1(2^j x - k), \quad \phi_{jk}^2(x) = 2^j \phi_k^2(2^j x)$$

sont respectivement les fonctions échelles du bord 0, interne et du bord 1 dont leurs relations d'échelles sont données par



# OPERATEURS DE HILBERT ET BASES D'ONDELETTES SUR UN INTERVALLE

## 1 Introduction

On part d'une base d'ondelettes  $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  à support compact d'Ingrid Daubechies [17], possédant  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ .

La construction d'une analyse multirésolution sur  $L^2[0, 1]$  exige que les  $V_j$  seront engendrés par des fonctions  $\phi_{jk}$  dont le support est strictement inclus dans  $]0, 1[$  et par deux ensembles de  $N$  fonctions chacun, l'un sur le bord 0 et l'autre sur le bord 1. Bien entendu, on se restreint à des valeurs de  $j$  telles que, l'intervalle  $[0, \frac{2N-1}{2^j}]$  soit inclus dans  $[0, 1]$  avec  $j \geq j_0, 2^{j_0} \geq 2N$  et la dimension de chaque  $V_j$  est  $2^j$  [14].

L'idée est de construire une analyse multirésolution  $\mathcal{V}_j, j \in \mathbb{Z}$  à partir des carrés  $I_r \times I_s$ , où  $I_s$  désigne l'intervalle d'extrémités entières  $I_s = [s, s + 1[$ . L'opérateur de Hilbert  $T$  est représenté dans  $\mathcal{V}_j$  par la matrice  $\langle T\tilde{\Phi}_k, \tilde{\Phi}_l \rangle$ . Dûe à la construction des ondelettes sur un intervalle, cette matrice contient neuf sous matrices blocs, dont tous les éléments dépendent des éléments de la matrice bloc interne, de plus elle est antisymétrique pour le cas où  $r = s$ .

**Définition:** Une analyse multirésolution de  $L^2[0, 1]$  est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \geq j_0}, j_0, j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2[0, 1]$  ayant les propriétés suivantes:

$$(1) \quad \bigcup_{j=j_0}^{\infty} V_j \text{ est dense dans } L^2[0, 1]$$

$$(2) \quad \forall f(x) \in L^2[0, 1], \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0 \text{ on a } f(x) \in V_j \implies f(2x) \in V_{j+1}$$

$$(3) \text{ Le système, } \{\Phi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\phi_{jk}^L, k = 0, 1, \dots, N - 1\} \cup \{\phi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\} \text{ est une base orthonormée de } V_j.$$

où

$$\phi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^L(2^j x), \quad \phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad \phi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^R(2^j x)$$

sont respectivement, les fonctions échelles du bord 0, internes et du bord 1 dont leurs relations d'échelles sont données par:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k^L(x)$ ,

$$(4) \quad \phi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k(x)$ ,

$$(5) \quad \phi_k(x) = \phi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N h_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k^R(x)$ ,

$$(6) \quad \phi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} H_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la même façon, on définit le sous espace supplémentaire  $W_j$  de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  comme étant, le sous espace engendré par la base orthonormée,

$$\{\Psi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\psi_{jk}^R, k = 0, \dots, N - 1\} \cup \\ \{\psi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\psi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\},$$

où

$$\psi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^L(2^j x), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad \psi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^R(2^j x),$$

sont respectivement, les ondelettes du bord 0, internes et du bord 1, vérifiant les systèmes algébriques suivants:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k^L(x)$ ,

$$(7) \quad \psi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} G_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} g_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k(x)$ ,

$$(8) \quad \psi_k(x) = \psi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N g_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $\Psi_k(x) = \psi_k^R(x)$ ,

$$(9) \quad \psi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} G_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} g_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la relation  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  et de (1) on a :

$$V_J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W_j = L^2[0, 1], \quad J \geq j_0, 2^{j_0} \geq 2N,$$

d'où toute fonction  $f$  de  $L^2[0, 1]$ , peut s'écrire comme,

$$f(x) = P_J f(x) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f(x)$$

où  $P_J$  est la projection orthogonale de la fonction  $f$  sur  $V_J$  et  $Q_j$  sa projection orthogonale sur  $W_j$ .

### 1.1 Calculs des moments sur un intervalle

Notons par  $m_k^{L,i}$  le moment d'ordre  $i$  de la fonction  $\phi_k^L$  défini par

$$m_k^{L,i} = \int_0^{\infty} x^i \phi_k^L(x) dx,$$

de la relation d'échelle (4), on obtient pour  $i = 0$ , le système algébrique suivant

$$m_k^{L,0} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{h,l}^L \frac{m_k^{L,0}}{2} + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \frac{M_0}{2},$$

avec  $M_0 = 1$ , en effet, on a  $m \geq N$  d'où

$$\int_0^{\infty} \phi(x-m) dx = \int_{-m}^{\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$$

pour différentes valeurs de  $i$ , on a le système algébrique,

$$2^i \sqrt{2} m_k^{L,i} = \sum_{l=0}^{N-1} H_{h,l}^L m_k^{L,i} + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \left( \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} m^j M_{i-j} \right)$$

où  $M_p$  est le moment d'ordre  $p$  de la fonction échelle sur  $\mathbb{R}$  et  $\binom{j}{i} = \frac{j!}{j!(i-j)!}$ .  
De la même façon, on calcule les moments  $m_k^{R,i}$  des fonctions échelles  $\phi_k^R$ ,

$$2^i \sqrt{2} m_k^{R,i} = \sum_{l=-N}^{-1} H_{h,l}^R m_k^{R,i} + \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \left( \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} m^j M_{i-j} \right).$$

**Exemple:** On calcule les moments des fonctions échelles  $\phi^L, \phi^R$  et  $\phi$  pour les ondelettes  $D_4$  Daubechies à deux moments nuls, avec  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

$i$	$m_0^{L,i}$	$m_1^{L,i}$	$m_{-2}^{R,i}$	$m_{-1}^{R,i}$	$M_i$
0	0.362050474	1.00144482	1.08984184	1.29547977	1.00000000
1	-0.150936842	1.03242779	-1.99576855	-0.721715391	0.633974671
2	-0.387385130	1.16627026	3.49914837	0.587401211	0.401923835
3	-0.596109390	1.22301579	-6.40151978	-0.561518848	0.131091475
4	-0.817372501	0.855941355	12.1954231	0.586434484	-0.302193522

**Les moments des fonctions échelles sur un intervalle,  
pour  $N = 2$  ( $D_4$ , Daubechies).**

Notons par,  $V_j^{r,s} = V_j \times V_j$  le sous espace de  $L^2(I_r \times I_s)$ , engendré par la base orthonormée  $\{\Phi_{jk}(x-r)\Phi_{jl}(y-s), j \geq j_0, r, s, j, j_0 \in \mathbb{Z}, l, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\}$ , où  $I_s$  désigne l'intervalle de longueur 1 et d'extrémités entières  $I_s = [s, s+1[$  et  $\Phi$  la fonction échelle de l'intervalle  $[0, 1]$ . on a:

$$(10) \quad V_{j+1}^{r,s} = V_{j+1} \times V_{j+1} = V_j \times V_j \oplus W_j \times W_j \oplus V_j \times W_j \oplus W_j \times V_j.$$

Soit  $W_j^{r,s}$  le sous espace supplémentaire de  $V_j^{r,s}$  dans  $V_{j+1}^{r,s}$ ,

$$V_{j+1}^{r,s} = V_j^{r,s} \oplus W_j^{r,s}.$$

De la relation (10) on tire,

$$W_j^{r,s} = W_j \times W_j \oplus V_j \times W_j \oplus W_j \times V_j.$$

De plus, par construction on a

$$L^2(I_r \times I_s) = V_{j_0}^{r,s} \bigoplus_{j=j_0}^{\infty} W_j^{r,s}.$$

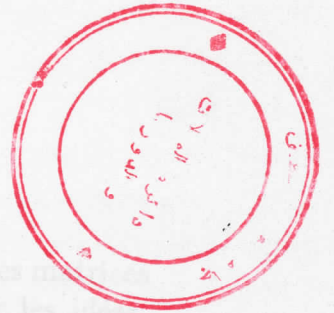
Il est facile de voir que pour  $k, l = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ , le système

$$\bigcup_{j \geq j_0} [\{\Psi_{jk}(x-r)\Psi_{jl}(y-s)\} \cup \{\Phi_{jk}(x-r)\Psi_{jl}(y-s)\} \\ \cup \{\Psi_{jk}(x-r)\Phi_{jl}(y-s)\} \cup \{\Phi_{jk}(x-r)\Phi_{jl}(y-s)\}]$$

forme une base orthonormale de  $L^2(I_r \times I_s)$ .

Soit  $k(x, y)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et soit

$$(11) \quad \mathbb{R} = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} I_s = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} [s, s+1[$$



une décomposition de l'axe réel, alors  $k(x, y)$  peut s'écrire

$$k(x, y) = \sum_{r, s \in \mathbb{Z}} k_{r, s}(x, y),$$

où  $k_{r, s}(x, y)$  est la restriction de  $k(x, y)$  sur le carré  $I_r \times I_s$ ,

$$k_{r, s}(x, y) = k(x, y) \cdot 1_{I_r \times I_s}.$$

Désignons par  $\mathcal{V}_j$  le sous espace de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , tel que

$$\mathcal{V}_j = \{k(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2), k_{r, s}(x, y) \in V_j^{r, s}, j \geq j_0, j, j_0, r, s \in \mathbb{Z}\},$$

d'où la réunion des bases de  $V_j^{r, s}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$  constitue une base de  $\mathcal{V}_j$  et la projection de  $k(x, y)$  sur  $\mathcal{V}_j$  n'est autre que la somme des projections des fonctions  $k_{r, s}(x, y)$  sur  $V_j^{r, s}$ ,  $j \geq j_0, j, j_0, r, s \in \mathbb{Z}$ .

Pour  $r$  et  $s$  fixés on a

$$\begin{aligned} k_{r, s}(x, y) &= \sum_{k, l} \theta_{j_0 k l} \Phi_{j_0 k}(x - r) \Phi_{j_0 l}(y - s) + \sum_{j, k, l} \alpha_{j k l} \Psi_{j k}(x - r) \Psi_{j l}(y - s) \\ &+ \sum_{j, k, l} \beta_{j k l} \Psi_{j k}(x - r) \Phi_{j l}(y - s) + \sum_{j, k, l} \gamma_{j k l} \Phi_{j k}(x - r) \Psi_{j l}(y - s) \end{aligned}$$

où la matrice  $\theta_{j_0 k l}$  que l'on note  $\theta_{j_0}$  tout court, est donnée par

$$\begin{aligned} \theta_{j_0} = \theta_{j_0 k l} &= \int_r^{r+1} \int_s^{s+1} k_{r, s}(x, y) \Phi_{j_0 k}(x - r) \Phi_{j_0 l}(y - s) dx dy, \\ &= \int_0^1 \int_0^1 k_{r, s}(x + r, y + s) \Phi_{j_0 k}(x) \Phi_{j_0 l}(y) dx dy, \\ &= 2^{-j_0} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r, s}(2^{-j_0} x + r, 2^{-j_0} y + s) \Phi_k(x) \Phi_l(y) dx dy. \end{aligned}$$

De même pour les matrices  $\alpha_{j k l}$ ,  $\beta_{j k l}$  et  $\gamma_{j k l}$  on a

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \alpha_{j k l} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r, s}(2^{-j} x + r, 2^{-j} y + s) \Psi_k(x) \Psi_l(y) dx dy, \\ \beta_j &= \beta_{j k l} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r, s}(2^{-j} x + r, 2^{-j} y + s) \Psi_k(x) \Phi_l(y) dx dy, \\ \gamma_j &= \gamma_{j k l} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r, s}(2^{-j} x + r, 2^{-j} y + s) \Phi_k(x) \Psi_l(y) dx dy, \end{aligned}$$

où d'ûe à la construction des ondelettes sur un intervalle, chacune des matrices  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  et  $\theta_j$  dépend de neuf sous matrices blocs. Pour fixer les idées, prenons la matrice  $\alpha_j$  :

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{LL} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s) \psi_k^L(x) \psi_l^L(y) dx dy,$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{LI} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s) \psi_k^L(x) \psi_l(y) dx dy,$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\alpha_{jkl}^{LR} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s + 1) \psi_k^L(x) \psi_l^R(y) dx dy,$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{IL} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s) \psi_k(x) \psi_l^L(y) dx dy,$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{II} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_0^\infty k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s) \psi_k(x) \psi_l(y) dx dy,$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$(12) \quad \alpha_{jkl}^{IR} = 2^{-j} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 k_{r,s}(2^{-j}x + r, 2^{-j}y + s + 1) \psi_k(x) \psi_l^R(y) dx dy,$$

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{RL} = 2^{-j} \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty k_{r,s}(2^{-j}x + r + 1, 2^{-j}y + s) \psi_k^R(x) \psi_l^L(y) dx dy,$$

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\alpha_{jkl}^{RI} = 2^{-j} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} k_{r,s}(2^{-j}x + r + 1, 2^{-j}y + s) \psi_k^R(x) \psi_l(y) dx dy,$$

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\alpha_{jkl}^{RR} = 2^{-j} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 k_{r,s}(2^{-j}x + r + 1, 2^{-j}y + s + 1) \psi_k^R(x) \psi_l^R(y) dx dy,$$

ainsi on a la représentation matricielle des matrices  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  et  $\theta_j$ ,

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^{LL} & \alpha_j^{LI} & \alpha_j^{LR} \\ \alpha_j^{IL} & \alpha_j^{II} & \alpha_j^{IR} \\ \alpha_j^{RL} & \alpha_j^{RI} & \alpha_j^{RR} \end{pmatrix}, \beta_j = \begin{pmatrix} \beta_j^{LL} & \beta_j^{LI} & \beta_j^{LR} \\ \beta_j^{IL} & \beta_j^{II} & \beta_j^{IR} \\ \beta_j^{RL} & \beta_j^{RI} & \beta_j^{RR} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_j^{LL} & \gamma_j^{LI} & \gamma_j^{LR} \\ \gamma_j^{IL} & \gamma_j^{II} & \gamma_j^{IR} \\ \gamma_j^{RL} & \gamma_j^{RI} & \gamma_j^{RR} \end{pmatrix}, \theta_j = \begin{pmatrix} \theta_j^{LL} & \theta_j^{LI} & \theta_j^{LR} \\ \theta_j^{IL} & \theta_j^{II} & \theta_j^{IR} \\ \theta_j^{RL} & \theta_j^{RI} & \theta_j^{RR} \end{pmatrix}$$

D'après les relations d'échelles des fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$ , (de (4) à (9)), on constate que le calcul des matrices  $\alpha_j, \beta_j$  et  $\gamma_j$  dépend des éléments de la matrice bloc interne  $\theta_j^{II}$ .

## 2 Etude de l'opérateur de Hilbert

Soit  $T$  l'opérateur intégral défini par:

$$(12) \quad Tf(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

où  $p.v.$  dénote la valeur principale de l'intégrale au point  $y = x$ .

La représentation de  $T$  sur  $\mathcal{V}_j$  est définie par les coefficients de la matrice,

$$\langle T \tilde{\Phi}_{jk}, \tilde{\Phi}_{jl} \rangle = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} \tilde{\Phi}_{jk}(x) \tilde{\Phi}_{jl}(y) dx dy,$$

où  $\tilde{\Phi}$  est la fonction échelle de  $\mathcal{V}_j$ , de la décomposition (11) on obtient

$$\begin{aligned} \langle T\tilde{\Phi}_{jk}, \tilde{\Phi}_{jl} \rangle &= \frac{1}{\pi} v.p. \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \int_r^{r+1} \int_s^{s+1} \frac{1}{y-x} \Phi_{jk}(x-r) \Phi_{jl}(y-s) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y-x-r+s} \Phi_{jk}(x) \Phi_{jl}(y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} v.p. \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \Phi_k(x) \Phi_l(y) dx dy. \end{aligned}$$

Soit  $\theta_j = \theta_{jkl}$ , la matrice définie par,

$$\theta_j = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \Phi_k(x) \Phi_l(y) dx dy.$$

Cas où  $r = s$  :

Calcul de la matrice  $\theta_j^{II}$ :

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{II} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y-x} \phi_{jk}(x) \phi_{jk}(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy = \theta_{kl}^{II} \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y-x} \phi(x) \phi(y+k-l) dx dy = \theta_{l-k}^{II}, \end{aligned}$$

la relation d'échelle (5) de la fonction interne  $\phi$ , appliquée à l'équation au dessus, nous mène directement au système trouvé par Beylkin [9].

$$\theta_{kl} = \theta_{2k,2l} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2k,2l+2r-1} + \theta_{2k+2r-1,2l}),$$

de plus

$$\theta_{jkl}^{II} = -\theta_{jlk}^{II} \quad \text{pour tout } j \geq j_0.$$

En effet,

$$\theta_{kl}^{II} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy$$



$$= - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi(x-l) \phi(y-k) dx dy = -\theta_{lk}^{II},$$

ce qui implique que tous les éléments  $\theta_{kk}^{II}$  sont nuls pour  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$ , d'où les matrices  $\theta_j^{II}$  sont antisymétriques.

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{LI}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{jkl}^{LI} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y-x} \phi_{jk}^L(x) \phi_{jl}(y) dx dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi_k^L(x) \phi(y-l) dx dy = \theta_{kl}^{LI}$$

après l'utilisation des relations d'échelles (4) et (5) respectivement des fonctions  $\phi^L$  et  $\phi$ , on obtient le système algébrique, itératif suivant

$$\theta_{kl}^{LI} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=-N+1}^N H_{k,p}^L h_q \theta_{p,2l+q}^{LI} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=-N+1}^N h_{k,m}^L h_q \theta_{m,2l+q}^{II},$$

où le calcul des éléments de la matrice  $\theta_j^{LI}$  est direct, bien entendu, on utilise l'équation asymptotique de l'élément  $\theta_{kl}^{LI}$ ,

$$\theta_{kl}^{LI} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y+l-x} \phi_k^L(x) \phi(y) dx dy.$$

Et pour  $|l|$  assez large

$$\theta_{kl}^{LI} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{l^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{L,p-i} M_i + 0\left(\frac{1}{|l|^{2N}}\right).$$

De plus, les éléments  $\theta_{jkl}^{LI}$  et  $\theta_{jlk}^{II}$  sont de signes contraires. En effet

$$\begin{aligned} \theta_{kl}^{LI} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi_k^L(x) \phi(y-l) dx dy \\ &= - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x} \phi(x-l) \phi_k^L(y) dx dy = -\theta_{lk}^{II}. \end{aligned}$$

Appliquons les relations d'échelles (6) et (5) respectivement des fonctions  $\phi^R$  et  $\phi$ , à l'équation au dessus, on obtient le système itératif suivant

$$\theta_{jkl}^{RI} = \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{q=-N+1}^N H_{k,p}^R h_q \theta_{j+1,p,2l+q}^{RI} + \sum_{m=2k-N-1}^{-N-1} \sum_{q=-N+1}^N h_{k,m}^R h_q \theta_{m+2j+1,2l+q}^{II}.$$

Comme le cas précédent de la matrice  $\theta_j^{LI}$ , le calcul des éléments de la matrice  $\theta_j^{RL}$  est direct et l'équation asymptotique de  $\theta_{jkl}^{RI}$  est comme suit

$$\theta_{jkl}^{RI} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+l-x-2^j} \phi_k^R(x) \phi(y) dx dy.$$

Et pour  $|l-2^j|$  assez large

$$\theta_{jkl}^{RI} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(l-2^j)^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{R,p-i} M_i + 0\left(\frac{1}{|l-2^j|^{2N}}\right).$$

De plus, on a

$$\theta_{jkl}^{RI} = -\theta_{jlk}^{IR}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{RI} &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x} \phi_k^R(x) \phi(y+2^j-l) \\ &- \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x} \phi(x+2^j-l) \phi_k^R(y) dx dy = -\theta_{jlk}^{IR}. \end{aligned}$$

Pour le calcul de la matrice antisymétrique  $\theta_j^{RR}$ , il suffit de suivre le même raisonnement que l'on a fait pour la matrice  $\theta_j^{LL}$ , avec  $k, l = -N, \dots, -1$ , on obtient un système algébrique, itératif de la forme,

$$\begin{aligned} \theta_{kl}^{RR} &= \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{q=-N}^{-1} H_{k,p}^R H_{l,q}^R \theta_{pq}^{RR} + \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} H_{k,p}^R h_{l,n}^R \theta_{j+1,p,n+2j+1}^{RI} \\ &+ \sum_{m=2k-N-1}^{-N-1} \sum_{q=-N}^{-1} h_{k,m}^R H_{l,q}^R \theta_{j+1,m+2j+1,q}^{IR} + \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R h_{l,n}^R \theta_{m+2j+1,n+2j+1}^{II}. \end{aligned}$$

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{LR}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\theta_{jkl}^{LR} = \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{1}{y-x} \phi_{jk}^L(x) \phi_{jl}^R(y) dx dy$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x+2^j} \phi_k^L(x) \phi_l^R(y) dx dy.$$

Les relations d'échelles (4) et (6) respectivement des fonctions  $\phi^L$  et  $\phi^R$ , appliquées à l'équation au dessus, donnent le système algébrique

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{LR} &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=-N}^{-1} H_{k,p}^L H_{l,q}^R \theta_{j+1,p,q}^{LR} + \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} H_{k,p}^L h_{l,n}^R \theta_{j+1,p,n+2^j+1}^{LI} \\ &+ \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=-N}^{-1} h_{k,m}^L H_{l,q}^R \theta_{j+1,m,q}^{IR} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^L h_{l,n}^R \theta_{m,n+2^j+1}^{II}. \end{aligned}$$

L'équation asymptotique de l'élément  $\theta_{jkl}^{LR}$  est

$$\theta_{jkl}^{LR} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x+2^j} \phi_k^L(x) \phi_l^R(y) dx dy.$$

Et pour  $2^j$  assez grand, est donnée par

$$\theta_{kl}^{LR} = \sum_{p=0}^{2N-2} \left(\frac{1}{2^j}\right)^{p+1} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{L,p-i} m_l^{R,i} + 0 \left(\frac{1}{2^j}\right)^{2N}.$$

De plus, on a

$$\theta_{jkl}^{LR} = -\theta_{jlk}^{RL}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{LR} &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x+2^j} \phi_k^L(x) \phi_l^R(y) dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j} \phi_l^R(x) \phi_k^L(y) dx dy = \theta_{jlk}^{RL}. \end{aligned}$$

**Exemple 1:** On calcule les coefficients de la matrice  $\theta_j, j = 3$  pour  $D_4$  Daubechies avec deux moments nuls et avec une précision de  $10^{-5}$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & .8727 & -.4595 & -.0475 & -.0303 & -.0100 & .0226 & .0190 \\ -.8727 & 0 & 1.4686 & -.0075 & .0844 & .0658 & .0642 & .0565 \\ .4595 & -1.4686 & 0 & 2.4031 & -.1163 & .1003 & .0721 & .0590 \\ .0475 & .0075 & -2.4031 & 0 & 2.4031 & -.1163 & .0899 & .0671 \\ .0303 & -.0844 & .1163 & -2.4031 & 0 & 2.4031 & .0077 & .0925 \\ .0100 & -.0658 & -.1003 & .1163 & -2.4031 & 0 & 1.3008 & .0623 \\ -.0226 & -.0642 & -.0721 & -.0899 & -.0077 & -1.3008 & 0 & -.5913 \\ -.0190 & -.0565 & -.0590 & -.0671 & -.0925 & -.0623 & .5913 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\theta_j$  calculée avec une précision de  $10^{-5}$   
pour  $(N = 2, D_4, \text{Daubechies}), j = 3$ .

Soit maintenant qu'on approxime l'opérateur  $T$  par l'opérateur  $T_\epsilon$ , obtenu de  $T$ , en mettant zéro à la place de tout éléments des matrices  $\theta_j, \alpha_j, \beta_j$  et  $\gamma_j$  dont la valeur absolue est inférieure à  $\epsilon$ .

**Exemple 2:** On reprend la matrice  $\theta_j$  calculée au dessus, en mettant zéro à la place des éléments dont la valeur absolue est inférieure à 0.08

$$\begin{pmatrix} 0 & .8727 & -.4595 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.8727 & 0 & 1.4686 & 0 & .0844 & 0 & 0 & 0 \\ .4595 & -1.4686 & 0 & 2.4031 & -.1163 & .1003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.4031 & 0 & 2.4031 & -.1163 & .0899 & 0 \\ 0 & -.0844 & .1163 & -2.4031 & 0 & 2.4031 & 0 & .0925 \\ 0 & 0 & -.1003 & .1163 & -2.4031 & 0 & 1.3008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.0899 & 0 & -1.3008 & 0 & -.5913 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.0925 & 0 & .5913 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\theta_j$  calculée avec une précision de  $10^{-5}$   
pour  $(N = 2, D_4, \text{Daubechies}), j = 3$  et  $\epsilon = 0.08$ .

Cas où  $r \neq s$ :

Calcul de la matrice  $\theta_j^{II}$ :

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{jkl}^{II} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \phi(x-k)\phi(y-l) dx dy$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \phi(x)\phi(y+k-l) dx dy.$$

Et pour  $|l-k-2^j(r-s)|$  assez large, l'équation asymptotique des éléments  $\theta_{jkl}^{II}$  est

$$\theta_{jkl}^{II} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+l-k-x-2^j(r-s)} \phi(x)\phi(y) dx dy$$

à grande échelle est donnée par,

$$\theta_{jkl}^{II} = \frac{1}{l-k-2^j(r-s)} + 0\left(\frac{1}{|l-k-2^j(r-s)|^{2N}}\right),$$

les autres éléments de la matrice aux différentes échelles, se calculent par le biais du système linéaire, itératif suivant:

$$\theta_{jkl}^{II} = \theta_{j+1,2k,2l}^{II} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{j+1,2k,2l+2r-1}^{II} + \theta_{j+1,2k+2r-1,2l}^{II}).$$

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{LI}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{jkl}^{LI} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \phi_k^L(x)\phi(y-l) dx dy,$$

si la valeur  $|l-2^j(r-s)|$  est grande, alors l'équation asymptotique des éléments  $\theta_{jkl}^{LI}$ , pour tout  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,

$$\theta_{jkl}^{LI} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+l-x-2^j(r-s)} \phi_k^L(x)\phi(y) dx dy,$$

est donnée par,

$$\theta_{jkl}^{LI} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(l-2^j(r-s))^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{L,p-i} M_i + 0\left(\frac{1}{|l-2^j(r-s)|^{2N}}\right).$$

Le reste des éléments de la matrice sont solution du système linéaire, itératif suivant:

$$\theta_{jkl}^{LI} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=-N+1}^N H_{k,p}^L h_q \theta_{j+1,p,2l+q}^{LI} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=-N+1}^N h_{k,m}^L h_q \theta_{j+1,m,2l+q}^{LI}.$$

Le calcul de la matrice  $\theta_j^{IL}$  se fait d'une façon analogue.

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{LL}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\theta_{jkl}^{LL} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \phi_k^L(x) \phi_l^L(y) dx dy,$$

pour les valeurs  $|2^j(r-s)|$  assez grandes, alors tous les éléments de la matrice  $\theta_j^{LL}$  pour un  $j$  donné, vérifient l'équation asymptotique suivante:

$$\theta_{jkl}^{LL} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(-2^j(r-s))^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{L,p-i} m_l^{L,i} + O\left(\frac{1}{|2^j(r-s)|}\right)^{2N}$$

le calcul des autres éléments de la matrice, pour différentes échelles se fait par la résolution du système linéaire, itératif suivant:

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{LL} &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} H_{k,p}^L H_{l,q}^L \theta_{j+1,p,q}^{LL} + \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{n=N}^{N+2l} H_{k,p}^L h_{l,n}^L \theta_{j+1,p,n}^{LI} \\ &+ \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=0}^{N-1} h_{k,m}^L H_{l,q}^L \theta_{j+1,m,q}^{IL} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{n=N}^{N+2l} h_{k,m}^L h_{l,n}^L \theta_{j+1,m,n}^{II}. \end{aligned}$$

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{RI}$ :**

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{jkl}^{RI} = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \frac{1}{y-x-2^j(r-s+1)} \phi_k^R(x) \phi(y-l) dx dy,$$

l'équation asymptotique des éléments  $\theta_{jkl}^{RI}$  est

$$\theta_{jkl}^{RI} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y+l-x-2^j(r-s+1)} \phi_k^R(x) \phi(y) dx dy,$$

pour  $k = -N, \dots, -1$  et  $|l-2^j(r-s+1)|$  très large

$$\theta_{jkl}^{RI} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(l-2^j(r-s+1))^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{R,p-i} M_i + O\left(\frac{1}{|l-2^j(r-s+1)|}\right)^{2N}.$$

Bien entendu, le reste des éléments de la matrice est solution du système linéaire suivant,

$$\theta_{jkl}^{RI} = \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{q=-N+1}^N H_{k,p}^R h_q \theta_{j+1,p,2l+q}^{RI} + \sum_{m=2k-N-1}^{-N-1} \sum_{q=-N+1}^N h_{k,m}^R h_q \theta_{j+1,m+2j+1,2l+q}^{II}.$$

On procède de la même façon pour le calcul de la matrice  $\theta_j^{IR}$ .

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{RR}$ :**

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\theta_{jkl}^{RR} = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x-2^j(r-s)} \phi_k^R(x) \phi_l^R(y) dx dy,$$

pour des valeurs  $|2^j(r-s)|$  très grandes, les éléments de la matrice  $\theta_j^{RR}$ , à l'échelle  $j$ , pour  $k, l = -N, \dots, -1$ , vérifient l'équation asymptotique suivante:

$$\theta_{jkl}^{RR} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(-2^j(r-s))^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{R,p-i} m_l^{R,i} + 0 \left( \frac{1}{|2^j(r-s)|} \right)^{2N},$$

le reste des éléments de la matrice pour différentes échelles, se calcule par la résolution du système linéaire, itteratif suivant:

$$\begin{aligned} \theta_{jkl}^{RR} &= \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{q=-N}^{-1} H_{k,p}^R H_{l,q}^R \theta_{j+1,p,q}^{RR} + \sum_{p=-N}^{-1} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} H_{k,p}^R h_{l,n}^R \theta_{j+1,p,n+2j+1}^{RI} \\ &+ \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} \sum_{q=-N}^{-1} h_{k,m}^R H_{l,q}^R \theta_{j+1,m+2j+1,q}^{II} + \sum_{m=2k-N-1}^{-N-1} \sum_{n=2l-N-1}^{-N-1} h_{k,m}^R h_{l,n}^R \theta_{j+1,m+2j+1,n+2j+1}^{II}, \end{aligned}$$

**Calcul de la matrice  $\theta_j^{LR}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\theta_{jkl}^{LR} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-x-2^j(r-s-1)} \phi_k^L(x) \phi_l^R(y) dx dy,$$

pour  $|2^j(r-s-1)|$  assez large, on a l'équation asymptotique de tous les éléments  $\theta_{jkl}^{LR}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $l = -N, \dots, -1$  à l'échelle  $j$ , donnée par,

$$\theta_{jkl}^{LR} = \sum_{p=0}^{2N-2} \frac{1}{(-2^j(r-s+1))^{p+1}} \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{i}{p} m_k^{L,p-i} m_l^{R,i} + 0 \left( \frac{1}{|2^j(r-s-1)|} \right)^{2N},$$

le reste des éléments de la matrice aux différentes échelles, vérifie le système linéaire, itératif suivant,

$$\theta_{jkl}^{LR} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=-N}^{-1} H_{k,p}^L H_{l,q}^R \theta_{j+1,p,q}^{LR} + \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} H_{k,p}^L h_{l,n}^R \theta_{j+1,p,n+2j+1}^{LI}$$

$$+ \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=-N}^{-1} h_{k,m}^L H_{l,q}^R \theta_{j+1,m,q}^{IR} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{n=2l-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^L h_{l,n}^R \theta_{j+1,m,n+2j+1}^{II}$$

on procède d'une façon analogue, pour obtenir la matrice  $\theta_j^{RL}$ .

**Exemple 3:** On calcule les coefficients de la matrice  $\theta_j$ ,  $j = 3$ ,  $r - s = 15$  pour  $D_4$  Daubechies, avec deux moments nuls et une précision de  $10^{-5}$

$$\left( \begin{array}{cccccccc} -0.00035 & -0.00097 & -0.00098 & -0.00099 & -0.00100 & -0.00101 & -0.00111 & -0.00133 \\ -0.00095 & -0.00266 & -0.00269 & -0.00271 & -0.00274 & -0.00276 & -0.00302 & -0.00364 \\ -0.00094 & -0.00262 & -0.00265 & -0.00267 & -0.00270 & -0.00272 & -0.00298 & -0.00358 \\ -0.00093 & -0.00260 & -0.00263 & -0.00265 & -0.00267 & -0.00270 & -0.00295 & -0.00355 \\ -0.00092 & -0.00258 & -0.00261 & -0.00263 & -0.00265 & -0.00267 & -0.00293 & -0.00352 \\ -0.00091 & -0.00256 & -0.00259 & -0.00261 & -0.00263 & -0.00265 & -0.00290 & -0.00349 \\ -0.00099 & -0.00278 & -0.00281 & -0.00283 & -0.00285 & -0.00288 & -0.00315 & -0.00378 \\ -0.00117 & -0.00327 & -0.00330 & -0.00333 & -0.00336 & -0.00338 & -0.00371 & -0.00445 \end{array} \right)$$

La matrice  $\theta_j$  calculée avec une précision de  $10^{-5}$   
pour  $(N = 2, D_4, \text{Daubechies}), j = 3, (r - s) = 15$ .





OPERATEUR DE DERIVATION ET BASES D'ONDELETES  
D'ONDELETES SUR UN INTERVALLE

PARTIE IV

1 Introduction

On part d'une base d'ondelettes  $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  à support compact d'ordre  $2^j$  Daubechies [17] possédant  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ .

La construction d'une analyse multirésolution sur  $L^2[0, 1]$  exige que les  $V_j$  soient engendrés par des fonctions  $\phi_{j,k}$  dont le support est strictement inclus dans  $[0, 1]$  et par deux fonctions  $\psi_{j,0}$  et  $\psi_{j,1}$  dont le support est strictement inclus dans  $[0, 1]$ .

**Opérateur de dérivation et bases d'ondelettes sur un intervalle**

On suppose que  $j \geq j_0, 2^j \geq 2N$  et la dimension de chaque  $V_j$  est  $2^j - 1$ .

L'opérateur de dérivation  $T = \frac{d}{dx}$  est représenté dans  $V_j$  par la matrice  $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle$ , composée de trois sous matrices blocs.

Dûe aux supports compacts et disjointes des fonctions échelles, cette matrice est bande de largeur  $2N - 1$ .

Définition: Une analyse multirésolution de  $L^2[0, 1]$  est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \geq j_0}, j_0 \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2[0, 1]$  ayant les propriétés suivantes:

- (1)  $\bigcup_{j \geq j_0} V_j$  est dense dans  $L^2[0, 1]$
- (2)  $\forall f(x) \in L^2[0, 1], \forall j \geq j_0$  on a  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$
- (3) Le système  $\{\phi_{j,k}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\phi_{j_0,k}^0, k = 0, 1, \dots, N - 1\} \cup \{\phi_{j_0,k}^1, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{j_0,k}^2, k = -N, \dots, -1\}$  est une base orthonormée de  $V_{j_0}$  où

$$\phi_{j_0,k}^0(x) = 2^{j_0} \phi_0(2^{j_0}x), \quad \phi_{j_0,k}^1(x) = 2^{j_0} \phi(2^{j_0}x - k), \quad \phi_{j_0,k}^2(x) = 2^{j_0} \phi_1(2^{j_0}x)$$

sont respectivement les fonctions échelles du bord 0, internes et du bord 1 dont leurs relations d'échelles sont données par:

Pour  $x \geq 0, k = 0, 1, \dots, N - 1$ , on a  $\phi_{j_0,k}^0(x) = \phi_0^0(x)$ ,

$$(4) \quad \phi_{j_0,k}^1(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^1 \phi_1^0(2x) + \sqrt{2} \sum_{l=N}^{2N-1} H_{k,l}^1 \phi_1^0(2x - m)$$

# OPERATEUR DE DERIVATION ET BASES D'ONDELETTES SUR UN INTERVALLE

## 1 Introduction

On part d'une base d'ondelettes  $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  à support compact d'Ingrid Daubechies [17] possédant  $N$  moments nuls et dont la mère  $\psi$  et le père  $\phi$  sont supportés sur l'intervalle  $[0, 2N - 1]$ .

La construction d'une analyse multirésolution sur  $L^2[0, 1]$  exige que les  $V_j$  seront engendrés par des fonctions  $\phi_{jk}$  dont le support est strictement inclus dans  $]0, 1[$  et par deux ensembles de  $N$  fonctions chacun, l'un sur le bord 0 et l'autre sur le bord 1. Bien entendu, on se restreint à des valeurs de  $j$  telles que, l'intervalle  $[0, \frac{2N-1}{2^j}]$  soit inclus dans  $[0, 1]$  avec  $j \geq j_0$ ,  $2^{j_0} \geq 2N$  et la dimension de chaque  $V_j$  est  $2^j$  [14].

L'opérateur de dérivation  $T = \frac{d}{dx}$  est représenté dans  $V_j$  par la matrice  $\langle T\Phi_k, \Phi_l \rangle$ , composée de neuf sous matrices blocs.

Dûe aux supports compacts et disjoints des fonctions échelles, cette matrice est bande de largeur  $2N - 1$ .

**Définition:** Une analyse multirésolution de  $L^2[0, 1]$  est la donnée d'une suite croissante  $\{V_j\}_{j \geq j_0}$ ,  $j_0, j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces fermés de  $L^2[0, 1]$  ayant les propriétés suivantes:

$$(1) \quad \bigcup_{j=j_0}^{\infty} V_j \text{ est dense dans } L^2[0, 1]$$

$$(2) \quad \forall f(x) \in L^2[0, 1], \forall j \in \mathbb{Z}, j \geq j_0 \text{ on a } f(x) \in V_j \implies f(2x) \in V_{j+1}$$

$$(3) \text{ Le système, } \{\Phi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\phi_{jk}^L, k = 0, 1, \dots, N - 1\} \cup \{\phi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\phi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\} \text{ est une base orthonormée de } V_j.$$

où

$$\phi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^L(2^j x), \quad \phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad \phi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_k^R(2^j x)$$

sont respectivement les fonctions échelles du bord 0, internes et du bord 1 dont leurs relations d'échelles sont données par:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , on a  $\Phi_k(x) = \phi_k^L(x)$ ,

$$(4) \quad \phi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k(x)$ ,

$$(5) \quad \phi_k(x) = \phi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N h_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $\Phi_k(x) = \phi_k^R(x)$ ,

$$(6) \quad \phi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} H_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la même façon on définit le sous espace supplémentaire  $W_j$  de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  comme étant le sous espace engendré par la base orthonormée

$$\{\Psi_{jk}, j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} = \{\psi_{jk}^R, k = 0, \dots, N - 1\} \cup \\ \{\psi_{jk}, k = N, \dots, 2^j - N - 1\} \cup \{\psi_{jk}^R, k = -N, \dots, -1\},$$

où

$$\psi_{jk}^L(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^L(2^j x), \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad \psi_{jk}^R(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_k^R(2^j x),$$

sont respectivement les ondelettes du bord 0, internes et du bord 1, vérifiant les systèmes algébriques suivants:

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , on a  $\Psi_k(x) = \psi_k^L(x)$ ,

$$(7) \quad \psi_k^L(x) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} G_{k,l}^L \phi_l^L(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} g_{k,m}^L \phi(2x - m).$$

Pour  $x \geq 0$ ,  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$ , on a  $\Psi_k(x) = \psi_k(x)$ ,

$$(8) \quad \psi_k(x) = \psi(x - k) = \sqrt{2} \sum_{q=-N+1}^N g_q \phi(2x - 2k - q).$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $k = -N, \dots, -1$ , on a  $\Psi_k(x) = \psi_k^R(x)$ ,

$$(9) \quad \psi_k^R(x) = \sqrt{2} \sum_{l=-N}^{-1} G_{k,l}^R \phi_l^R(2x) + \sqrt{2} \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} g_{k,m}^R \phi(2x - m).$$

De la relation  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  et de (1) on a:

$$V_J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W_j = L^2[0, 1], \quad J \geq j_0, 2^{j_0} \geq 2N.$$

D'où toute fonction  $f$  de  $L^2[0, 1]$  peut s'écrire comme

$$f(x) = P_J f(x) + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f(x)$$

où  $P_J$  est la projection orthogonale de la fonction  $f$  sur  $V_J$  et  $Q_j$  sa projection orthogonale sur  $W_j$ .

L'analyse multirésolution en théorie de l'approximation, consiste à approcher toute fonction  $f$  par sa projection orthogonale  $P_j$  sur  $V_j$ , quand  $j$  est suffisamment grand

$$P_j f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{j,k} \Phi_{jk}, \quad j \geq j_0,$$

où grâce à l'orthonormalité des fonctions échelles on a

$$s_{jk} = \int_0^1 f(x) \Phi_{jk}(x) dx.$$

Dûe à la construction des ondelettes sur un intervalle, le vecteur  $s_{jk}$  est composé de trois sous vecteurs qu'on les note,  $s_{jk}^L$ ,  $s_{jk}^I$  et  $s_{jk}^R$  donnés par, pour  $k = 0, 1, \dots, N-1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^L$

$$(10) \quad s_{jk}^L = \int_0^1 f(x) \phi_{jk}^L(x) dx,$$

pour  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^I$

$$(11) \quad s_{jk}^I = \int_0^1 f(x) \phi_{jk}(x) dx,$$

pour  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^R$

$$(12) \quad s_{jk}^R = \int_0^1 f(x) \phi_{jk}^R(x) dx,$$

avec les relations de décompositions suivantes

$$s_{jk}^I = \sum_{p=-N+1}^N h_p s_{j+1, 2k+p}^I$$

$$s_{jk}^L = \sum_{p=0}^{N-1} H_{k,p}^L s_{j+1,p}^L + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L s_{j+1,m}^I$$

$$s_{jk}^R = \sum_{p=-N}^{-1} H_{k,p}^R s_{j+1,p}^R + \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R s_{j+1,m+2j+1}^I.$$

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  à variable réelle et soit  $\mathcal{V}_j$  le sous espace défini par

$$\mathcal{V}_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}), f_s \in V_j^s, j \geq j_0, \quad j, j_0, s \in \mathbb{Z}\}$$

où  $V_j^s$  désigne le sous espace de  $L^2[s, s+1[$  et  $f_s$  la restriction de  $f$  sur  $[s, s+1[$ ,

$$f_s(x) = f \cdot 1_{[s, s+1[}(x).$$

La fonction  $f$  peut s'écrire

$$f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} f_s(x),$$

la réunion des bases des  $V_j^s, s \in \mathbb{Z}$  constitue une base de  $\mathcal{V}_j$ , d'où la projection de  $f$  sur  $\mathcal{V}_j$  n'est autre que la somme des projections des fonctions  $f_s$  sur les sous espaces  $V_j^s, s \in \mathbb{Z}$

$$P_j f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} P_j f_s(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} P_j^s f_s(x)$$

où  $P_j^s$  désigne la projection orthogonale sur  $V_j^s$ .

## 2 Opérateur de dérivation $T = \frac{d}{dx}$

Soit  $f$  une fonction de  $L^2[s, s+1[$ , pour  $s$  fixé, on définit la projection de  $f$  sur  $V_j^s$  par,

$$P_j^s f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{jk} \Phi_{jk}(x-s)$$

où due à l'orthonormalité de la base  $\Phi_{jk}$ ,

$$s_{jk} = \int_s^{s+1} f(x) \Phi_{jk}(x-s) dx.$$

Dérivons l'approximation  $P_j^s f(x)$ ,

$$\frac{d}{dx}(P_j^s f(x)) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{jk} \frac{d}{dx} \Phi_{jk}(x-s).$$

On remarque que l'opérateur de dérivation  $\frac{d}{dx}$  ne se conserve pas dans  $V_j^s$ , d'où la raison de le reprojeter une deuxième fois sur le même espace,

$$P_j^s\left(\frac{d}{dx}P_j^s f(x)\right) = \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{jk} P_j^s \Phi'_{jk}(x-s)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^j-1} s_{jk} \sum_{l=0}^{2^j-1} \langle \Phi'_{jk}, \Phi_{jl} \rangle \Phi_{jl}(x-s)$$

$$(13) \quad P_j^s\left(\frac{d}{dx}P_j^s f(x)\right) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} s_{jk} \langle \Phi'_{jk}, \Phi_{jl} \rangle \Phi_{jl}(x-s)$$

## 2.1 Approximation du vecteur $s_{jk}$ :

Comme on l'a vu dans (10), (11) et (12), le vecteur  $s_{jk}$  que l'on note  $\vec{s}$  est composé de trois sous vecteurs, d'où l'approximation de ce dernier, revient à approximer ses trois sous vecteurs  $s_{jk}^L, s_{jk}^I$  et  $s_{jk}^R$ , qui donne pour chaque  $k$  pour  $k = 0, 1, \dots, N-1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^L$

$$s_{jk}^L = \int_0^1 f(x+s) \phi_{jk}^L(x) dx$$

$$= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^\infty f(2^{-j}x+s) \phi_k^L(x) dx.$$

Pour  $k = N, \dots, 2^j - N - 1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^I$

$$s_{jk}^I = \int_0^1 f(x+s) \phi_{jk}^I(x) dx$$

$$= 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^\infty f(2^{-j}x+s) \phi(x-k) dx.$$

Pour  $k = -N, \dots, -1$  on a,  $s_{jk} = s_{jk}^R$

$$s_{jk}^R = \int_0^1 f(x+s) \phi_{jk}^R(x-1) dx$$

$$= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^0 f(2^{-j}x+s+1) \phi_k^R(x) dx.$$

Soit la formule de quadrature,

$$s_{jk} = 2^{-\frac{j}{2}} \int_0^\infty f(2^{-j}x + s)\Phi_k(x)dx = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{l=0}^{2^j-1} c_{kl}f(2^{-j}x_l + s) + 0(2^{-(N+\frac{1}{2})j}),$$

i.e,

$$s_{jk} = \sigma_{jk} + 0(2^{-(N+\frac{1}{2})j})$$

où,  $\sigma_{jk}$  désigne les éléments du vecteur  $\vec{\sigma}$ , donnés comme suit,

$$\sigma_{jk} = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{l=0}^{2^j-1} c_{kl}f(2^{-j}x_l + s).$$

La formule de quadrature approchée  $s_{jk} = \sigma_{jk}$

$$\int_0^\infty f(2^{-j}x + s)\Phi_k(x)dx = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_{kl}f(2^{-j}x_l + s)$$

est exacte, pour tout polynome  $f$  de degré inférieur ou égal à  $N - 1$ , en particulier pour  $f(x) = x^m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  qui donne pour chaque  $k$  un système linéaire de  $N$  équations dont le nombre d'inconnus est  $\geq N$ . La solution de chaque système permet de définir les coefficients  $\{c_{kl}\}$  pour  $l = 0, \dots, 2^j - 1$  qui représentent les éléments de la  $k^{ieme}$  ligne de la matrice  $C = \{c_{kl}\}$ ,  $k, l = 0, \dots, 2^j - 1$ .

#### Remarques:

Les noeuds  $x_l, l = 0, \dots, 2^j - 1$  se sont les points d'une grille choisie sur l'intervalle  $[0, 2^j]$ .

La matrice  $C$  est toujours mal conditionnée, sauf si on ajuste le nombre d'inconnus avec le nombre d'équations de chaque système.

Pour  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ , soit le système ajusté suivant:

$$(14) \quad \int_0^\infty x^m \Phi_k(x)dx = \sum_{l=0}^{N-1} c_{kl}x_l^m, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

La résolution du système (14) dont le déterminant est de Vandermonde, nécessite le calcul des moments des fonctions échelles sur un intervalle jusqu'à l'ordre  $N - 1$ , qui constituent le vecteur second membre du système.

#### Calculs des moments des fonctions échelles sur un intervalle:

Notons par  $m_k^{L,i}$  le moment d'ordre  $i$  de la fonction  $\phi_k^L$  défini par,

$$m_k^{L,i} = \int_0^\infty x^i \phi_k^L(x)dx,$$



de la relation d'échelle (4), on obtient, pour  $i = 0$  le système algébrique suivant,

$$m_k^{L,0} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{N-1} H_{h,l}^L \frac{m_k^{L,0}}{2} + \sqrt{2} \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \frac{M_0}{2},$$

où  $M_0 = 1$ , en effet on a,  $m \geq N$  d'où,

$$\int_0^\infty \phi(x-m)dx = \int_{-m}^\infty \phi(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \phi(x)dx = 1$$

pour différentes valeurs de  $i$ , on a, le système algébrique,

$$2^i \sqrt{2} m_k^{L,i} = \sum_{l=0}^{N-1} H_{h,l}^L m_k^{L,i} + \sum_{m=N}^{N+2k} h_{k,m}^L \left( \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} m^j M_{i-j} \right)$$

où  $M_p$  est le moment d'ordre  $p$  de la fonction échelle sur  $\mathbb{R}$  et  $\binom{j}{i} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ . De la même façon, on calcule les moments  $m_k^{R,i}$  des fonctions échelles  $\phi_k^R$ ,

$$2^i \sqrt{2} m_k^{R,i} = \sum_{l=-N}^{-1} H_{h,l}^R m_k^{R,i} + \sum_{m=2k-N+1}^{-N-1} h_{k,m}^R \left( \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} m^j M_{i-j} \right)$$

**Exemple:** On calcule les moments des fonctions échelles  $\phi^L, \phi^R$  et  $\phi$  pour les ondelettes  $D_4$  Daubechies à deux moments nuls, avec  $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$i$	$m_0^{L,i}$	$m_1^{L,i}$	$m_{-2}^{R,i}$	$m_{-1}^{R,i}$	$M_i$
0	0.362050474	1.00144482	1.08984184	1.29547977	1.00000000
1	-0.150936842	1.03242779	-1.99576855	-0.721715391	0.633974671
2	-0.387385130	1.16627026	3.49914837	0.587401211	0.401923835
3	-0.596109390	1.22301579	-6.40151978	-0.561518848	0.131091475
4	-0.817372501	0.855941355	12.1954231	0.586434484	-0.302193522

les moments des fonctions échelles sur un intervalle,  
pour  $N = 2$  ( $D_4$ , daubechies)

**Exemple:** On calcule la matrice  $C$  pour les ondelettes  $D_4$  Daubechies à deux moments nuls, pour la grille

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 8)$$



$$\begin{pmatrix} .69401 & -.33196 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .46974 & .53171 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .86602 & .13397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .86602 & .13397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .86602 & .13397 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .86602 & .13397 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.14300 & -6.05316 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.39036 & -6.09488 \end{pmatrix}$$

le conditionnement de la matrice  $C$ ,  $K(c) = 15.59685$

Ainsi, le vecteur  $\vec{\sigma}$  qui approxime le vecteur  $\vec{s}$  est donné par

$$\vec{s} \simeq \vec{\sigma} = 2^{\frac{-j}{2}} \cdot C \cdot \vec{f}$$

où les éléments du vecteur  $\vec{f}$  sont les valeurs de la fonction  $f$  aux points  $(2^{-j}x_l + s)_{l=0 \dots 2^j-1}$ ,

$$\vec{f} = \{f(2^{-j}x_l + s), \quad l = 0, \dots, 2^j - 1\}$$

### 3 Calcul de la matrice $\langle \Phi'_{jk}, \Phi_{jl} \rangle$

Notons par  $\theta_{jkl}$  la matrice  $\langle \Phi'_{jk}, \Phi_{jl} \rangle$  donnée par,

$$\begin{aligned} \theta_{jkl} &= \int_0^1 \Phi'_{jk}(x) \Phi_{jl}(x) dx = 2^j \int_0^{2^j} \Phi'_k(x) \Phi_l(x) dx, \\ &= 2^j \int_0^\infty \Phi'_k(x) \Phi_l(x) dx, \end{aligned}$$

soit  $\Theta = \theta_{kl}$  la matrice définie par,

$$\theta_{kl} = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle = \int_0^\infty \Phi'_k(x) \Phi_l(x) dx,$$

d'où la relation,

$$\theta_{jkl} = 2^j \theta_{kl},$$

dû à la construction des ondelettes sur un intervalle, la matrice  $\theta_{kl}$  dépend de neuf sous matrices, réparties comme suit,

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\theta_{kl}^{LL} = \int_0^\infty \phi'_k(x) \phi_l(x) dx$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{kl}^{LI} = \int_0^\infty \phi'_k(x) \phi(x - l) dx$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$\theta_{kl}^{IL} = \int_0^\infty \phi'(x - k) \phi_l(x) dx$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{kl}^{II} = \int_0^\infty \phi'(x - k) \phi(x - l) dx$$

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\theta_{kl}^{IR} = \int_{-\infty}^0 \phi'(x - k + 2^j) \phi_l^R(x) dx$$

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{kl}^{RI} = \int_{-\infty}^0 \phi'^R(x) \phi(x - l + 2^j) dx$$

$$k = -N, \dots, -1$$

$$l = -N, \dots, -1$$

$$\theta_{kl}^{RR} = \int_{-\infty}^0 \phi'^R(x) \phi_l^R(x) dx$$

d'où la représentation matricielle de  $\theta_{kl} = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle$ ,

$$\theta_{kl} = \begin{pmatrix} \theta^{LL} & \theta^{LI} & \theta^{LR} \\ \theta^{IL} & \theta^{II} & \theta^{IR} \\ \theta^{RL} & \theta^{RI} & \theta^{RR} \end{pmatrix}$$

De la relation (4), (5) et (6) des fonctions échelles, tous les éléments des sous matrices  $\theta^{LL}, \theta^{LI}, \dots, \theta^{RR}$  dépendent des éléments de la matrice bloc interne

$\theta^{II}$ , de plus, la matrice  $\theta_{kl}$  est une matrice bande de demi largeur  $2N - 1$ , bien entendu, dûe aux supports compacts et disjoints des fonctions de bords  $\phi_k^L$  et  $\phi_k^R$ , les matrices  $\theta^{LR}$  et  $\theta^{RL}$  sont nulles.

**Calcul de la matrice  $\theta^{II}$ :**

$$k = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\begin{aligned}\theta_{kl}^{II} &= \int_0^\infty \phi'(x - k)\phi(x - l)dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \phi'(x)\phi(x + k - l)dx\end{aligned}$$

la relation d'échelle (5) appliquée à l'équation au dessus, nous mène directement au système trouvé par beylkin [9].

$$\theta_{kl} = \theta_{2k, 2l} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N d_{2r-1} (\theta_{2k, 2l+2r-1} + \theta_{2k+2r-1, 2l}),$$

de plus, on a,

$$\theta_{kl}^{II} = -\theta_{lk}^{II},$$

en effet,

$$\theta_{kl}^{II} = \int_0^\infty \phi'(x - k)\phi(x - l)dx,$$

effectuons une intégration par partie, on obtient,

$$\theta_{kl}^{II} = \phi(x - k)\phi(x - l) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(x - l)\phi(x - k)dx = -\theta_{lk}^{II}$$

le premier terme de l'équation est nul, d'où,

$$\theta_{kl}^{II} = -\theta_{lk}^{II}.$$

**Calcul de la matrice  $\theta^{LI}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$l = N, \dots, 2^j - N - 1$$

$$\theta_{kl}^{LI} = \int_0^\infty \phi_k^L(x)\phi(x - l)dx$$

après l'utilisation des relations d'échelles (4) et (5) respectivement des fonctions  $\phi^L$  et  $\phi$ , on obtient le système algébrique suivant

$$\theta_{kl}^{LI} = 2 \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=-N+1}^N H_{k,p}^L h_q \theta_{p,2l+q}^{LI} + 2 \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=-N+1}^N h_{k,m}^L h_q \theta_{m,2l+q}^{II}$$

de plus

$$\theta_{kl}^{II} = -\theta_{lk}^{II}$$

en effet

$$\theta_{kl}^{LI} = \int_0^\infty \phi_k^L(x) \phi(x-l) dx$$

après une intégration par partie, on a

$$\theta_{kl}^{LI} = \phi_k^L(x) \phi(x-l) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(x-l) \phi_k^L(x) dx = -\theta_{lk}^{II}$$

le premier terme de l'équation est nul, d'où la relation

$$\theta_{kl}^{LI} + \theta_{lk}^{II} = 0.$$

Le calcul des éléments de la matrice  $\theta^{LI}$  se fait d'une façon simple et directe, en commençant par les éléments  $\theta_{kl}^{LI}$  tels que,  $2l+q > 3N-3$  pour tout  $k=0, 1, \dots, N-1$ , et d'une façon analogue on calcule les matrices  $\theta^{RI}$  et  $\theta^{IR}$ .

**Calcul de la matrice  $\theta^{LL}$ :**

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\theta_{kl}^{LL} = \int_0^\infty \phi_k^L(x) \phi_l^L(x) dx$$

la relation d'échelle (4) de la fonction de bord  $\theta^{LL}$ , appliquée à l'équation au dessus, donne un système algébrique de  $N \times N$  équations, dont le second membre dépend des éléments des matrices  $\theta^{LI}$ ,  $\theta^{IL}$  et  $\theta^{II}$

$$(15) \quad \frac{1}{2} \theta_{kl}^{LL} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} H_{k,p}^L H_{l,q}^L \theta_{p,q}^{LL} + \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{n=N}^{N+2l} H_{k,p}^L h_{l,n}^L \theta_{p,n}^{LI} \\ + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{q=0}^{N-1} h_{k,m}^L H_{l,q}^L \theta_{m,q}^{IL} + \sum_{m=N}^{N+2k} \sum_{n=N}^{N+2l} h_{k,m}^L h_{l,n}^L \theta_{m,n}^{II}$$

de plus,

$$\theta_{kk}^{LL} = -\frac{(\phi_k^L(0))^2}{2}$$

en effet,

$$\theta_{kl}^{LL} = \int_0^\infty \phi_k^L(x) \phi_l^L(x) dx,$$

après une intégration par parties, on obtient,

$$\theta_{kl}^{LL} = \phi_k^L(x) \phi_l^L(x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi_l^L(x) \phi_k^L(x) dx,$$

$$\theta_{kl}^{LL} = -\phi_k^L(0) \phi_l^L(0) - \theta_{lk}^{LL},$$

d'où l'équation,

$$\theta_{kl}^{LL} + \theta_{lk}^{LL} = -\phi_k^L(0) \phi_l^L(0).$$

Pour  $k = l$ , on la relation,

$$(16) \quad \theta_{kk}^{LL} = -\frac{(\phi_k^L(0))^2}{2},$$

on suit le même raisonnement, pour avoir la matrice  $\theta^{RR}$ .

Le calcul de la valeur de  $\phi_k^L$  au point 0, en utilisant la relation d'échelle (4) est pratiquement impossible, due au système homogène, mais on peut calculer cette valeur par le moyen de l'équation (16) après avoir résolu le système algébrique au dessus (15) et trouver les éléments  $\theta_{kl}^{LL}$ .

La matrice de dérivation  $\Theta = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle$  est de la forme,

$$\begin{pmatrix} \theta_{0,0}^{LL} & \dots & \dots & \theta_{0,2N-2}^{LI} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & \\ \theta_{N-1,0}^{LL} & \dots & \dots & \dots & \theta_{N-1,3N-3}^{LI} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & \\ \theta_{2N-2,0}^{IL} & \dots & \dots & \dots & \dots & \theta_{2N-2,2^j-N-1}^{II} & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 \dots & 0 & \theta_{3N-3,N-1}^{IL} & \dots & \dots & \dots & \dots & \theta_{3N-3,2^j-1}^{IR} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 \dots & & 0 & \theta_{2^j-N-1,2N-2}^{II} & \dots & \dots & \dots & \theta_{2^j-N-1,2^j-1}^{IR} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 \dots & & 0 & 0 & \theta_{2^j-1,3N-3}^{RI} & \dots & \dots & \theta_{2^j-1,2^j-1}^{RR} \end{pmatrix}$$

bien entendu, on a utilisé les supports des fonctions échelles pour localiser la bande de la matrice.

$$\text{supp}\phi_k^L = [0, N+k], \quad \text{supp}\phi_k = [k-N+1, N+k], \quad \text{supp}\phi_k^R = [-N+1+k, 0]$$

**Exemple:** On calcule la matrice de dérivation  $\theta_{kl} = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle$  pour les ondelettes  $D_4$  Daubechies à deux moments nuls, avec  $j = 3$  et la dimension de  $V_j$  est  $2^j = 8$

$$\begin{pmatrix} -1.96344 & -1.52529 & .25649 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .93546 & -.04429 & -.67522 & .08321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.25649 & .67522 & 0 & .66666 & -.08321 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.08321 & -.66666 & 0 & 0.66666 & -.08321 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .08321 & -.66666 & 0 & .66666 & .07646 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .08321 & -.66666 & 0 & -.58249 & .03975 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.07646 & .58249 & .26978 & -1.37441 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.03975 & -.06164 & 1.91105 \end{pmatrix}$$

la matrice de dérivation  $\theta_{kl} = \langle \Phi'_k, \Phi_l \rangle$   
pour  $N = 2$   $D_4$  (Daubechies) et  $j = 3$ ,  $\dim V_j = 8$

### 3.1 Calcul de la matrice $\Phi$

Les éléments de la matrice  $\Phi$  sont les valeurs de la fonction  $\Phi_{jkl}$  aux points de la grille.

$$\Phi_{jkl}(x_l - s) = 2^{\frac{j}{2}} \Phi_{kl}(2^j(x_l - s)), \quad k, l = 0, \dots, 2^j - 1, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

En fin de la relation (13), on a l'approximation du vecteur dérivé  $\vec{f}'$ , aux points d'une grille donnée.

$$\vec{f}' = 2^j \cdot \Phi \cdot \Theta \cdot C \cdot \vec{f}$$



# SUR L'APPROXIMATION DES INTÉGRALES SINGULIÈRES PARTIE V

## 1. Introduction

L'intégrale de Cauchy

$$C(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - z_0} dt$$

représente une fonction analytique à l'intérieur du contour fermé  $\Gamma$  au moyen de ses valeurs sur la frontière. Si  $\Gamma$  était une courbe régulière par morceaux non

## Sur L'approximation des intégrales singulières

$\phi(t)$  continue, seul peut être en un nombre fini de points où lesquels elle possède des discontinuités des intégrales. L'intégrale

$$P(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - z_0} dt$$

construite de la même manière que l'intégrale précédente, est dite intégrale du type Cauchy, qui représente aussi une fonction analytique en tout points  $z_0 \notin \Gamma$ . Si  $z_0 \in \Gamma$ , l'intégrale diverge cependant, pour certaines suppositions complémentaires imposées à  $\phi(t)$  on peut donner un sens bien défini à cette intégrale.

- (i)  $\phi(t) \in L^1(\Gamma)$
- (ii)  $\phi(t) \in W^1(\Gamma)$

La : il existe une constante  $M$  telle que, pour tous les points  $t$  de la courbe  $\Gamma$  avec valeur de  $z_0$ , on ait l'inégalité:

$$|\phi(t) - \phi(z_0)| \leq M |t - z_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

si la condition (ii) de Hölder est remplie, l'intégrale du type Cauchy existe en  $z_0$  comme une intégrale singulière et sa valeur principale s'exprime à l'aide d'une intégrale ordinaire par la formule:

$$P(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - z_0} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t) - \phi(z_0)}{t - z_0} dt + \frac{1}{2} \phi(z_0) + \frac{1}{2} \phi(z_0) \ln \frac{b - z_0}{a - z_0}$$



## SUR L'APPROXIMATION DES INTEGRALES SINGULIERES

### 1 Introduction

L'intégrale de Cauchy

$$\phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt$$

représente une fonction analytique à l'intérieur du contour fermé  $\Gamma$  au moyen de ces valeurs sur la frontière. Si  $\Gamma$  était une courbe régulière par morceau non obligatoirement fermée et soit donnée sur cette courbe une fonction arbitraire  $\phi(t)$  continue, sauf peut être en un nombre fini de points en lesquels elle possède des discontinuités intégrables. L'intégrale

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt$$

construite de la même manière que l'intégrale précédente, est dite intégrale du type Cauchy, qui représente aussi une fonction analytique en tout points  $t_0 \notin \Gamma$ . Si  $t_0 \in \Gamma$ , l'intégrale diverge cependant, pour certaines suppositions complémentaires imposées à  $\phi(t)$  on peut donner un sens bien défini à cette intégrale.

(i)  $\phi(t) \in L^2(\Gamma)$

(ii)  $\phi(t) \in H^\alpha(\Gamma)$

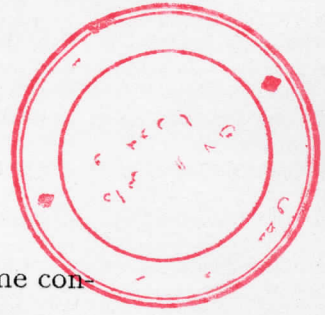
i.e : il existe une constante  $M$  telle que, pour tous les points  $t$  de la courbe  $\Gamma$  assez voisins de  $t_0$ , on ait l'inégalité:

$$|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq M |t - t_0|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$$

si la condition (ii) de Hölder est remplie, l'intégrale du type Cauchy existe en  $t_0$  comme une intégrale singulière et sa valeur principale s'exprime à l'aide d'une intégrale ordinaire par la formule:

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2} \phi(t_0) + \frac{1}{2} \phi(t_0) \ln \frac{b - t_0}{a - t_0} \end{aligned}$$





où  $a, b$  désigne les extrémités de la courbe  $\Gamma$ , si  $\Gamma$  était fermée le terme contenant le logarithme disparaît et  $F(t_0)$  prend une forme plus simple,

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2} \phi(t_0)$$

## 2 Calcul approché de l'intégrale singulière

Soit  $\Gamma$  une courbe régulière par morceau du plan complexe et soit  $F(t_0)$  l'intégrale singulière définie par:

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt,$$

où  $\phi(t)$  est une fonction Hölderienne définie sur  $\Gamma$ ,  $t_0$  un point quelconque de la courbe, l'équation paramétrique de  $\Gamma$  est donnée par  $t(s) = x(s) + iy(s)$  où  $a \leq s \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Décomposons l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales, par des points  $s_{\sigma} = a + \sigma \frac{b-a}{n}$ ,  $l = b - a$ ,  $\sigma = 0, 1, \dots, n$  et divisons chaque sous intervalle  $[s_{\sigma}, s_{\sigma+1}]$  en  $m$  parties par des points indépendants de  $n$  et de  $\sigma$ ,  $s_{\sigma k} = s_{\sigma} + h x_k$  où  $\{x_k\}$  est une suite croissante de l'intervalle  $]0, 1[$ ,  $h = \frac{l}{n}$  et  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Désignons par,  $t = t(s)$ ,  $t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k})$ ,  $\tau = t(s_{\sigma})$  et par  $\nu$ , le nombre positif arbitraire tel que,  $t_0 \in \tau_{\nu} \tau_{\nu+1}$  où  $\tau_{\nu} \tau_{\nu+1}$  désigne l'arc de longueur minimale,  $\nu = 0, 1, \dots, n$ ,

pour  $t_0 \neq t_{\sigma k}$  alors  $\sigma \neq \nu$ , on définit la fonction  $\beta_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi)$  dépendante de  $t, t_0, \phi$  par:

$$\beta_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi) = \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \phi(t_{\sigma k}) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} + \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) A_{\nu}(t_0) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}},$$

où  $A_{\nu}(t)$  désigne le polynôme de Lagrange de la fonction  $\phi(t)$ , sur l'arc  $\tau_{\nu} \tau_{\nu+1}$ .

$$A_{\nu}(t) = \sum_{j=0}^m \frac{\omega(t)}{(t_0 - t_{\nu j}) \omega'(t_{\nu j})} \phi(t_{\nu j}),$$

$$\omega(t) = \prod_{k=0}^m (t - t_{\sigma k}), l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'(t_{\sigma k})}$$

**lemme 1:** l'expression  $P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) = A_{\sigma}(t_0) - \phi(t_{\sigma k})$  contient  $t_0 - t_{\sigma k}$  comme multiplicateur,

i.e: il existe une fonction  $Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi)$ , telle que:

$$P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) = (t_0 - t_{\sigma k}) Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi)$$

**Preuve:** de la relation

$$\sum_{j=0}^m \frac{\omega(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma j})\omega'(t_{\sigma j})} = 1,$$

on a:

$$\begin{aligned} P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) &= A_{\sigma}(t_0) - \phi(t_{\sigma k}) \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{\omega(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma j})\omega'(t_{\sigma j})} \phi(t_{\sigma j}) - \phi(t_{\sigma k}) \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{\omega(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma j})\omega'(t_{\sigma j})} (\phi(t_{\sigma j}) - \phi(t_{\sigma k})) \end{aligned}$$

si  $j = k$ , alors le  $k^{\text{ième}}$  élément de  $P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi)$  est nul, d'où la relation,

$$P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) = (t_0 - t_{\sigma k})Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi).$$

**Remarque:** si  $\sigma = \nu$ , le cas où  $t_0 = t_{\sigma k}$  est possible et la fonction  $\beta_{\sigma\sigma} = \beta_{\nu\nu}$  aura un sens,

$$\begin{aligned} \beta_{\sigma\sigma}(t, t_0, \phi) &= \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \phi(t_{\sigma k}) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} + \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) A_{\sigma}(t_0) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}}, \\ &= \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) \\ &= \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) (t - t_0) Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi). \end{aligned}$$

Soit  $\psi_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi)$  la fonction définie par:

$$\psi_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi) = \phi(t_0) + \beta_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi), \quad \sigma, \nu = 0, 1, \dots, n, t_0 \in \tau_{\nu} \tau_{\nu+1}, t \in \tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1},$$

et soit  $S(t_0, \phi)$  l'intégrale,

$$S(t_0, \phi) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi)}{t - t_0} dt$$

**Théorème:** Soit  $\Gamma$  une courbe régulière par morceau du plan complexe et soit  $\phi(t)$  une fonction définie sur  $\Gamma$ , satisfait à la condition de Hölder d'exposant  $\alpha$  sur  $\Gamma$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , alors :  $\forall t_0 \in \Gamma$  on a:

$$|F(t_0) - S(t_0, \phi)| < \frac{c_m \ln n}{n^{\alpha}}, c_m \in \mathbb{R}^*$$

où  $F(t_0)$ , désigne l'intégrale singulière

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt,$$

pour la démonstration du théorème, utilisons le lemme suivant:

**lemme2:** pour tout  $t, t_0 \in \Gamma$ , on a l'égalité suivante:

$$\sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} = \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} - 1$$

preuve:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} &= \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t_0 - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{\omega(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'(t_{\sigma k})} \frac{t - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} - 1 \\ &= \omega(t) \sum_{k=0}^m \frac{1}{(t_0 - t_{\sigma k})\omega'(t_{\sigma k})} - 1 \\ &= \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} - 1 \end{aligned}$$

preuve du théorème: pour  $\sigma \neq \nu$  on a:

$$\begin{aligned} \phi(t) - \psi(t, t_0, \phi) &= \phi(t) - \phi(t_0) - \beta_{\sigma\nu}(t, t_0, \phi) \\ &= \phi(t) - \phi(t_0) - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} \phi(t_{\sigma k}) \\ &\quad - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) A_{\nu}(t_0) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} \\ &= \left( \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} - 1 \right) (\phi(t) - \phi(t_0)), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \phi(t) - \psi(t, t_0, \phi) &= \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} (\phi(t) - \phi(t_0)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} (\phi(t_{\sigma k}) - \phi(t)) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} P_{\nu}(t_0, t_0, \phi),$$

de la condition  $\phi(t) \in H^{\alpha}(\Gamma)$ ,  $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq M |t - t_0|^{\alpha}$  on a la relation  $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq M |s - s_0|^{\alpha}$  [41]. De plus,

$$\left| \frac{t - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| < 1, \forall k = 0, 1, \dots, m$$

ce qui implique:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} \right| &= \left| \frac{\prod_{k=0}^m (t - t_{\sigma k})}{\prod_{k=0}^m (t_0 - t_{\sigma k})} \right| \leq \left| \frac{t - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| \\ \left| \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} \right| \|\phi(t) - \phi(t_0)\| &\leq \left| \frac{t - t_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| \|\phi(t) - \phi(t_0)\| = |t - t_{\sigma k}| \left| \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t_{\sigma k} - t_0} \right| \\ &\leq |t - t_{\sigma k}| M |t - t_0|^{\alpha-1} = O(n^{-\alpha}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \max_{t_0 \in \tau_{\nu} \tau_{\nu+1}} \left| \sum_{\sigma=0}^n \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega(t)}{\omega(t_0)} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} dt \right| &= O\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) \\ \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} l_{\sigma k}(t) dt &= O(n^{-1}) \\ \left| \sum_{\sigma=0}^n \sum_{k=0}^m \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} l_{\sigma k}(t) \frac{\phi(t_{\sigma k}) - \phi(t)}{t_0 - t_{\sigma k}} dt \right| &\leq O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \sum_{k=0}^m \frac{1}{|t_0 - t_{\sigma k}|} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) \\ \left| \sum_{\sigma=0}^n \sum_{k=0}^m \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} l_{\sigma k}(t) \frac{P_{\nu}(t_0, t_0, \phi)}{t_{\sigma k} - t_0} dt \right| &\leq O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \sum_{k=0}^m \frac{1}{|t_{\sigma k} - t_0|} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

cas où  $\sigma = \nu$

$$\begin{aligned} \phi(t) - \psi(t, t_0, \phi) &= \phi(t) - \phi(t_0) - \beta_{\sigma\sigma}(t, t_0, \phi) \\ &= \phi(t) - \phi(t_0) - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \phi(t_{\sigma k}) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} + \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) A_{\sigma}(t_0) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}}, \\ &= \phi(t) - \phi(t_0) - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} P_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) \end{aligned}$$

$$= \phi(t) - \phi(t_0) - \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t)(t - t_0)Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi)$$

$$\left| \int_{\tau_{\nu}\tau_{\nu+1}} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq M \int_{s_{\nu}}^{s_{\nu+1}} |s - s_0|^{\alpha-1} ds = O(n^{-\alpha})$$

$$\left| \int_{\tau_{\nu}\tau_{\nu+1}} \sum_{k=0}^m l_{\sigma k}(t)Q_{\sigma}(t_0, t_{\sigma k}, \phi) dt \right| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

[1] B. ALPERT and V. ROKHLIN: A fast algorithm for the evaluation of Legendre polynomials. DCS/RR-671.

[2] ASKEROV, K. G. LAPEV: Les problèmes des oscillations d'un fluide visqueux et ses applications. 1968, 2, 2, pp. 21-32.

[3] PAUSCHER: Wavelets with boundary conditions on the interval pp.217-239 in Wavelets: a tutorial in theory and applications, ed C.K.Chui, Academic press.

[4] V.G.BABSKY, N.D.KOPATCHEVSKY, A.D.NYCHKI, L.A.SLOBOJANINE, A.D.TUPTSOV: Hydromécanique de la pesanteur (Moscou 1976,504 p).

[5] M.BERGER: Random affine iterated function systems, Curve generation and wavelets, SIAM Review 34, pp.361-385, 1992.

[6] G.BIRKHOFF, G.ROTA: Ordinary differential equations Ginn,comp. Boston 1968.

[7] G.BEYLKIN, R.R.COIFMAN, and V.ROKHLIN: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I Yale University Technical report, YALEU/DCS/RR-696, August 1989, Comm. Pure and Applied Math vol XLIV, 141-183, 1991.

[8] G.BEYLKIN, R.Coifman and V.Rokhlin: Wavelets in numerical analysis In wavelets and their applications,181-210 Jonesand Bartlett, 1992.

[9] G.BEYLKIN: On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, SIAM J.Numer. anal.29(6), 1716-1740, 1992.

[10] J.CARRIER, L.GREENGARD, and V.ROKHLIN: A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations, Yale University Technical report, YALEU/DCS/RR-476, 1986, Siam. J. Sci. Stat.Comp. 9, 1988, pp. 669-686.

[11] A.G.CHMIT: Les ondes de surfaces gravifiques et capillaires dans une couche sphérique de liquide visqueux gravitant Moscou, j. des math. comp. et physique.1964, 4, 1, pp. 183-189.

[12] A.COHN and I.Daubechies: A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding schemes, Duke math. Journal 63 pp 313-335, 1992.

[13] A.COHN, I.DAUBECHIES, B.JAWERTH and P.VIAL: Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval, C.R.Acad.

## BIBLIOGRAPHIES

- [1] **B.ALPERT**, and **V.ROKHLIN**: A fast algorithm for the evaluation of Legendre expansions, Yale University Technical report, YALEU/ DCS/ RR-671, 1989.
- [2] **ASKEROV.N.K**, **KREINE.S.G**, **LAPTEV.G.I**: Les problèmes des oscillations d'un fluide visqueux et des équations fonctionnelle et ses applications .1968, 2, 2, pp. 21-32.
- [3] **P.AUSCHER**: Wavelets with boundary conditions on the interval pp.217-236 in Wavelets a tutorial in theory and applications, ed C.K.Chui, Academic press.
- [4] **V.G.BABSKY**, **N.D.KOPATCHEVSKY**, **A.D.MYCHKI**, **L.A.SLOBOJANINE**, **A.D.TUPTSOV**: Hydromécanique de la pesanteur .Moscou 1976.504 p.
- [5] **M.BERGER**: Random affine iterated function systems, Curve generation and wavlets, SIAM Review 34, pp 361-365. 1992.
- [6] **G.BIRKHOF**, **G.ROTA** : Ordinary differential equations Ginn.comp. Boston 1968.
- [7] **G.BEYLKIN**, **R.R.COIFMAN**, and **V.ROKHLIN**: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I Yale University Technical report, YALEU/ DCS/ RR-696, August 1989, Comm. Pure and Applied Math.vol XLIV. 141-183, 1991.
- [8] **G.BEYLKIN**, **R.Coifman** and **V.Rokhlin**: Wavelets in numerical analysis In wavelets and their applications,181-210 Jonesand Bartlett. 1992.
- [9] **G.BEYLKIN**: On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. SIAM J.Numer.anal.29(6), 1716-1740, 1992.
- [10] **J.CARRIER**, **L.GREENGARD**, and **V.ROKHLIN**: A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations, Yale University Technical report, YALEU/ DCS/ RR-476, 1986, Siam. J. Sci. Stat.Comp. 9, 1988, pp. 669-686.
- [11] **A.G.CHMIT**: Les ondes de surfaces gravitiques et capillaires dans une couche sphérique de liquide visqueux gravitant Moscou.j.des math.comp.et phisique.1964, 4, 1, pp. 183-189.
- [12] **A.COHEN** and **I.Daubechies**: A stability creterion for biorthogonal wavelet bases and their related subband coding scheme, Duke math. Journal 68,pp 313-335. 1992.
- [13] **A.COHEN**, **I.DAUBECHIES**, **B.JAWERTH** and **P.VIAL**: Multiresolution analysis, wavelets and fast algorithms on an interval, C.R.Acad.

Sci. Paris. 1992.

- [14] **A.COHEN, I.DAUBECHIES and P.VIAL**: Wavelets on the interval and fast wavelet transforms, Appl and Comput. Harmonic. Analysis 1, pp. 54-81. 1993.
- [15] **A.COHEN**: Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroir en quadratures, Ann. Inst. Poincaré, Anal. non linéaire 7, pp.439-459. 1990.
- [16] **A.COHEN, I.DAUBECHIES and J.C.Feauveau**: Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, Comm. pure. Appl. Math. 45, pp. 485-560. 1992.
- [17] **I.DAUBECHIES**: Orthonormal Bases of compactly supported Wavelets, Comm. Pure and Applied Math; Vol. 41, pp. 909-996, Nov. 1988.
- [18] **I.DAUBECHIES**: Orthonormal bases of compactly supported wavelets. II. Variations on a theme, SIAM J. Math. Anal. 24.
- [19] **I.DAUBECHIES**: Ten Lectures on wavelets, CBMS-NSF Series in applied Mathematics, SIAM, (1991 in press).
- [20] **I.DAUBECHIES, A.GROSSMAN, Y.MEYER**: Painless nonorthogonal expansions, J Math.Phys, 27, pp. 1271-1283, 1986.
- [21] **B.EPSTEIN** : Partial differential equations New York. 1962.
- [22] **S.F. FESTCHENKO, H.I. CHKIL, N.I. NIKOLENKO**: Des méthodes asymptotiques dans la théorie des équations différentielles linéaires Kiev ed Naoukova, 1966, pp .267.
- [23] **G.FIX and STRANG**: Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory, Stud. Appl. Math. 48, pp 265-273. 1969.
- [24] **L.GREENGARD, and V.ROKHLIN**: A fast algorithm for particle simulations, J. Comp. phys. 73(1), 325, pp 325-348, 1987.
- [25] **A.GROSSMAN, J.MORLET**: Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape, SIAM.J.MATH Anal, Vol.15, pp. 723-736, 1984.
- [26] **D.HILBERT**: Rundzuge einer allgemeiren theorie der linearen integral gleichungen, Leipzig-Berlin 1912.
- [27] **S.JAFFARD, Y.MEYER**: Bases d'ondelettes dans des ouverts de  $R^n$ , J.Math.Pure et Appl; Vol 68, PP. 95-108, 1989.
- [28] **L.JAMESON**: On the wavelet based differentiation matrix, J. Sci. Comput, 1993.
- [29] **S.G.KREINE, NGO ZOUI CANE**: Les problèmes sur les petits mouvements d'un corps partiellement rempli de liquide visqueux Moscou PMM 1961,3,43.pp 456-464.
- [30] **H.LAMB**: Hydrodynamique traduit en russe. moscou 1947 pp 928.

- [31] **M.LAVRENTIEV** et **B.CHABAT**: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe; Editions Mir 1977.
- [32] **P.J.LEMARIE**, **Y.MEYER**: Ondelettes et bases hilbertiennes, Rev. Math.Iberoamericana Vol 2, 1986.
- [33] **S.MALLAT**: Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ , Transaction of the American Mathematical Society, vol. 315, n1, pp. 69-87, sept. 1989.
- [34] **Y.MEYER**: Ondelettes, fonctions splines et analyse graduée, Cahiers du Ceremade n 8703, Université Paris-Dauphine, 1987.
- [35] **Y.MEYER**: Ondelettes et opérateurs tome 1, Actualités mathématiques Hermann, 1990.
- [36] **Y.MEYER**: Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres des opérateurs, Seminaire Bourbaki, 985-1986, n 662.
- [37] **Y.MEYER**: Ondelettes et fonctions splines. Technical Report, Seminaire EDP, Ecole poly, Paris, 1986.
- [38] **Y.MEYER**: Ondelettes sur un intervalle, Rev.Math.Iberoamericana, Vol 7,pp. 115-133, 1992.
- [34] **S.G.MIKHLINE**: Les méthodes variationnelles en physique Math. Moscou. 1970.
- [40] **J.MORLET**: Sampling theory and wave propagation, Proc,51st,Annual meeting of the society of exploration geophysicists, Los Angeles, 1981.
- [41] **N.I.MOUSKELICHVILI**: Singular integral equations, 3rd ed, Nauka, Moscou,1968; English transl.of 1st ed, Noordhoff,1953;reprint,1972.
- [42] **M.NADIR**: Sur l'approximation des intégrales singulières, Far. East. Jour. Math. Sci, n 4, Vol 6, 1998.
- [43] **M.NADIR**: Opérateurs intégraux et bases d'ondelettes, Far. East. Jour. Math. Sci, 1998.
- [44] **M.NADIR**: Opérateur de Hilbert et bases d'ondelettes sur un intervalle, to appear in Magreb mathematical Review
- [45] **M.NADIR**: Opérateur de dérivation et bases d'ondelettes sur un intervalle, to appear in DEMONSTRATIO MATHEMATICA WARSZAWA POLAND .
- [46] **M.NADIR** et **ZADORVJSKI**: Sur l'autogravitation des planètes, Maghreb mathematical review, 1,1991.
- [47] **H.POINCARÉ**: Leçons de mécanique céleste tome 3, Paris 1910.
- [48] **W.H.REID**: The oscillations of a various liquid globe with a core Proc.London Math.Soc. 1959,9,35.pp.388-396.
- [49] **J.SANKIDZE**: On approximate calculation of singular line integrals,



seminar of institute of applied mathematics, 1970, Tbilisi.

[50] **G.SCHMIDT** and **S.PROSSDORF**: A finite element collocation method for singular integral equations *math, Nach*, 100, 1981, pp.

[51] **SMIRNOV**: Cours de mathématiques supérieures tome 3,4 ; Edition Mir 1975.

[52] **G.STRANG**: Wavelets and Dilatation Equation: A brief introduction, *Siam Review* vol 31 n 4, pp. 614-627, december 1989.

[53] **P.TCHAMITCHIAN**: Calcul symbolique sur les opérateurs de Caldéron-Zygmund et bases inconditionnelles de  $L^2(\mathbb{R})$ , *CRAS Paris*, 303, 1986, pp. 215-218.

[54] **P.TCHAMITCHIAN**: Wavelets, Functions, and Operators in Wavelets Theory and applications, Oxford University Press 1996, 83-181.

[55] **M.VETTERLI** and **C.HERLEY**: Wavelets and filter banks: relationships and new results, in *Proc. IEEE int. conf. Acoust. Speech, Signal proc.* Albuquerque (USA), pp. 1723-1726, apr. 3-6, 1990.

[56] **G.WAHBA**: Optimal convergence properties of variable knot, kernel and orthogonal series methods for density estimation, *Ann. Math. Statist.* 3, pp. 15-29, 1975.

[57] **S.YABLONSKI**: Introductions aux mathématiques discrètes, Edition Mir 1983.

[58] **A.I.ZADOROJNYI**: Oscillations propres à ondes longues d'une couche sphérique d'un fluide visqueux. *Mathématique, applications et méthodologie des enseignements.* Rostov-sur-le Don, ed.I.P.de Rostov. 1973, pp.89-92.



رقم الجرد: 19331  
 رقم الفاتورة: /  
 التاريخ: 20/05/2008  
 الاصل: DON

seminar of institute of applied mathematics,  
 [50] G. SCHMIDT and S. PROSDORF: A  
 for singular integral equations math. Nachr. 100  
 [51] SMIRNOV: Cours de mathématiques supérieures  
 1975.  
 [52] G. STRANG: Wavelets and Dilation Equation: A brief introduction,  
 SIAM Review vol 31 n. 4, pp. 614-627, december 1989.  
 [53] P. TCHAMITCHIAN: Calcul symbolique sur les opérateurs de Calderón-  
 Zygmund et bases inconditionnelles de  $L^2(\mathbb{R})$ , CRAS Paris, 303, 1986, pp.  
 215-218.  
 [54] P. TCHAMITCHIAN: Wavelets, Functions, and Operators in Wavelets  
 Theory and applications, Oxford University Press, 1994, 83-181.  
 [55] M. VETTERLI and C. HERLEY: Wavelets and filter banks: rela-  
 tionships and new results, in Proc. IEEE int. conf. Acoust. Speech, Signal  
 Proc. Albuquerque (USA), pp. 1733-1736, apr. 3-6, 1990.  
 [56] G. WAHBA: Optimal convergence properties of variable knot, bessel  
 and orthogonal series methods for density estimation, Ann. Math. Statist.  
 1, pp. 16-28, 1976.  
 [57] S. YABLONSKI: Introduction aux mathématiques discrètes, Edition  
 Mir, 1981.  
 [58] A. I. ZADOROLNYI: Oscillations propres à ondes longues d'une couche  
 sphérique d'un fluide visqueux. Mathématique, applications et méthodologie  
 des enseignements. Institut sur le Don, ed. I.P. de Krasov, 1973, pp. 89-92.

