

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté de Technologie

Département d'Aéronautique

MEMOIRE DE MAGISTERE

en Aéronautique

ECOULEMENT SUBSONIQUE AUTOUR D'UN PROFIL
D'AILE A PROXIMITE D'UNE PAROI PLANE HORIZONTALE
UTILISATION DE LA METHODE DES IMAGES

Par

Mounira BELGROUNE

Devant le jury composé de :

BENAOUDA ZOUAOUI BRAHAM	Professeur, U. de Blida	Président
T. ZEBBICHE	Professeur, U. de Blida	Rapporteur
B. SALAH	Professeur, E.N.S.H	Examineur
A. ALLALI	M. C. A, U. de Blida	Examineur

Blida, Septembre 2013

ملخص

غرض هذا المشروع هو دراسة تأثير وجود حاجز مستوي أفقي على الخصائص الديناميكية الهوائية بالنسبة للمقطع الجانبي للجناح؛ مثل معامل الرفع ومعامل الضغط من خلال المقطع الجانبي للجناح باستخدام طريقة صور المرايا.

هذه المشكلة تنحصر في أول الأمر على تعيين كمون السرعة بالنسبة لكل من الميزات الديناميكية الهوائية (المنبع، البئر، الدوامة وثنائي القطب) عندما تكون قريبة إلى الحاجز الأفقي مع استخدام أسلوب صور المرايا.

بعد ذلك ووفقا لطريقة اللوحات و القطع للمنبع و الدوامة نستعمل هذه الأخيرة لتحصيل توزيع المنابع و الدوامات على طول المقطع الجانبي للجناح؛ هذا التوزيع استعمل لتحديد معامل الرفع.

النموذج الرياضي هو العثور على حل لنظام المعادلات الخطية التي تكون فيها المجاهيل إما شدة المنابع أو شدة الآبار أو شدة الدوامات. وسيتم الحصول على دقة في الحساب كلما كان عدد نقاط المراقبة عالية.

حل نظام المعادلات من خلال طريقة Khaletski الذي تكون فيه المصفوفة متناظرة بحيث يكون فيه تخزين القيم وفقا لشعاع بحيث نكون مهتمين فقط في الجزء العلوي لأن المصفوفة هو متناظرة في نهاية المطاف، في النهاية فإن الحساب يكون رقميا خالص.

SUMMARY

The purpose of this project is to study the effect of the existence of a horizontal plane wall on the aerodynamic characteristics of an airfoil as the lift coefficient and the coefficient of pressure through an airfoil in using the method of images.

First of all, we must determine the velocity potential of singularities (source, sink, vortex and dipole) when they are close to a horizontal wall and that using the method of mirror reflection.

Following the method of sources and vortices panels are used to determine the distribution of sources and vortices along the surface of the wing profile. Can be determined by following the pressure distribution: These distributions are used to determine the coefficient of lift

The mathematical model is to find a present to solve linear system of equations whose unknowns are either the intensity of sources, sinks, or whirlpools. The accuracy of calculation will be obtained as the number of control points is high.

Solving the system of equations by the method of Khaletski whose matrix is symmetric: The storage array is a vector which we are interested only in the upper part because the matrix is symmetric. In the end, the calculation is purely digital.

RESUME

Le but de ce projet consiste à étudier l'effet de l'existence d'une paroi plane horizontale sur les caractéristiques aérodynamiques d'un profil d'aile comme les coefficients de portance et le coefficient de pression à travers un profil d'aile en utilisant la méthode des images.

Le problème consiste à déterminer en premier lieu le potentiel des vitesses des singularités (source, puits, tourbillon et dipôle) lorsqu'elles se trouvent proches d'une paroi horizontale et cela en utilisant la méthode des images.

Par suite on utilise la méthode des panneaux sources et tourbillons pour déterminer la distribution des sources et des tourbillons le long de la surface du profil d'aile. On peut déterminer par la suite la distribution de la pression : Ces distributions sont utilisées pour déterminer le coefficient de portance

Le modèle mathématique à trouver consiste à présenter un système d'équations linéaires à résoudre dont les inconnues sont soit l'intensité des sources, puits, ou de tourbillons. La précision de calcul sera obtenue plus le nombre de points de contrôles est élevé.

La résolution du système d'équations se fait par la méthode de *Khaletski* dont la matrice est symétrique : Le stockage de la matrice se fait dans un vecteur dont on s'intéresse uniquement à la partie supérieure vu que la matrice est symétrique. En fin, le calcul est purement numérique.

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu de m'avoir permis de mener à bien mon entreprise....

Que son nom soit glorifié

*Mes remerciements vont ensuite à mon promoteur Monsieur **ZEBBICHE** qui a placé en moi et en mes capacités une confiance aveugle et ce, jusqu'au bout sans jamais avoir manifesté le moindre rechignement devant le retard mis par rapport à l'évolution de ce mémoire....Qu'il retrouve ici l'expression de ma gratitude la plus profonde.*

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du jury pour m'avoir honorée de leur présence et pour tous les conseils et remarques oh combien précieux prodigués le long de la soutenance, à savoir :

*Monsieur **BENAOUDA Zouaoui Braham**, président du jury. Professeur à l'université de Blida.*

*Monsieur **ZEBBICHE Toufik**, professeur rapporteur Professeur à l'université de Blida.*

*Monsieur **SALAH Boualem**, examinateur Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Hydraulique E.N.S.H.*

*Monsieur **ALLALI Abderrazak**, examinateur. Maitre de Conférence A à l'université de Blida.*

Qu'ils retrouvent ici, à leur tour, l'expression de mes remerciements et reconnaissance les plus sincères.

*Une pensée très particulière pour Monsieur **TAHI Ali** qui a guidé mes premiers pas nonchalants avec une disponibilité...mais surtout...Une générosité sans égales....Qu'il soit récompensé là où il est avec toute la grâce et la miséricorde divine inchallah.....*

*Egalement va ma reconnaissance à Monsieur **AMTOUT Lounis**, Professeur à l'université de Blida, pour sa disponibilité et pour m'avoir conseillée de manière forte judicieuse...Je ne saurais le remercier pour sa modestie et simplicité.....*

Une gratitude très profonde pour tout le personnel de l'institut de génie mécanique qui fleure bon la joie de vivre et avec qui j'ai eu de forts moments de gaieté, d'émotion, et de complicité et qui ont toujours laissé et la bibliothèque et le centre de calculs en mon entière disposition....Je ne vous remercierai jamais assez pour tous les services que vous m'avez rendus mes chères amies.....

Enfin....Je ne pourrais terminer cette dédicace sans remercier mon alter ego pour toute son aide précieuse et pour m'avoir prêtée main forte dans la réalisation de ce mémoire....Allah idjazik Nouredine.....

DEDICACE

A la mémoire de Monsieur TAHI ALI qui a guidé mes premiers pas trébuchants dans la réalisation de ce mémoire....

Qu'il retrouve ici, l'expression de ma gratitude et de mes remerciements les plus sincères.....

Reposez en paix Monsieur TAHI....On ne vous oubliera jamais....

*A tous ceux sans qui ce travail n'aurait certainement
Jamais pu voir le jour et qui se reconnaîtront.....*

*Qu'ils retrouvent ici l'expression de ma Gratitude,
Reconnaissance, et de mes Remerciements les plus Forts.....*

À mes parents et à toute ma famille....

À tous ceux que j'aime.....

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	20
CHAPITRE 1 : EFFET DE SOL	22
1.1. HISTOIRE DE L'EFFET DE SOL	22
1.2. DESCRIPTION ET EXPLICATION PRATIQUE DE L'EFFET DE SOL	25
1.3. LES ECONOMIES DE CARBURANT	26
1.1. Les calculs	26
1.2. En pratique	29
CHAPITRE 2 : NOTIONS AERODYNAMIQUES ET METHODES DES PANNEAUX	32
2.1. INTRODUCTION	32
2.2. DEFINITION ET OBJECTIF DE L'AERODYNAMIQUE	33
2.3. METHODES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES EN AERODYNAMIQUE	35
2.4. CONCEPTS DE BASE	37
2.1. Ecoulement irrotationnel plan	37
2.2. Potentiel des vitesses	37
2.3. Fonction de courant	37
2.4. Les différents types d'écoulement	38
2.5. Méthode de superposition des écoulements	45
2.5. PROFILS AERODYNAMIQUES EN REGIME SUBSONIQUE	52
2.1. Caractéristiques géométriques des profils	52
2.2. Coefficient de pression	57
2.3. Coefficient de moment de tangage	58
2.4. Condition de <i>Kutta</i>	59
2.6. PRESENTATION DES METHODES DES PANNEAUX	61
2.1. Méthode de Hess & Smith	61
2.2. Fondements théoriques des méthodes de panneaux (Identité de Green)	63
2.3. Méthode des panneaux avec tourbillon par formulation de vitesse	

	66
2.4.Méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de ligne de courant	70
2.5.Méthode de panneaux avec doublets constants par formulation du potentiel	72
2.6.Méthode de panneaux avec doublets linéaires par formulation du potentiel	74
2.7.Avantages et inconvénients des méthodes de panneaux	78
CHAPITRE 3 : METHODES DES IMAGES	80
3.1. CONSEQUENCE D'UNE PROPRIETE DE SYMETRIE	80
3.2. METHODE DES IMAGES	80
3.3. EXEMPLE	82
3.3.1. Écoulement engendré par une source située à proximité d'une paroi	82
3.3.2. Une aile à proximité d'une paroi	83
3.3.3. Une aile placée entre deux parois (soufflerie)	84
CHAPITRE 4 : PROCESSUS DE LA METHODE DE <i>HESS & SMITH</i>	85
4.1. PREAMBULE	85
4.2. METHODE DES PANNEAUX	85
4.2.1. Choix de la méthode de résolution : méthode de <i>Hess et Smith</i>	85
4.2.2. Présentation théorique de la méthode de <i>Hess & Smith</i>	86
4.3. METHODE DES IMAGES	95
4.3.1. Cas du profil a proximité d'une paroi	95
CHAPITRE 5 : RESULTATS & INTERPRETATION	97
5.1. RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE PRESSION C_p	96
5.1.Cas profil a air libre	96
5.2.Cas profil a proximité d'une paroi	108
5.3.Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi pour $M=0.1$, $N=100$ panneaux et pour $Alpha = 0^\circ, 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$	117
5.4.Conclusion	120

5.2. RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE PORTANCE C_l	121
5.1. Cas profil a air libre	121
5.2. Cas profil a proximité d'une paroi	128
5.3. Conclusion	134
5.3. RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE MOMENT DE TANGAGE C_m	135
5.1. Cas profil a air libre	136
5.2. Cas profil a proximité d'une paroi	142
5.3. Conclusion	148
5.4. RESULTATS SUR LES VARIATIONS DE LA HAUTEUR H	149
5.1. Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de pression C_p	149
5.2. Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de portance C_l	157
5.3. Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de moment de tangage C_m	161
5.4. Conclusion finale	166
CONCLUSION GENERALE	168
APPENDICES	171
A. LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	
B. REFERENCES	
ANNEXES	
Annexe A	
Annexe B : caractéristiques géométriques des profils	
Annexe C : rappels sur les systèmes d'équations linéaires – inversion de matrices	
Annexe D : grandeur physique et unités de mesure	
Annexe E : formules utilisées en aéronautique	

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Le H-4 Hercules dit « Spruce Goose » projet aéronautique d'hydravion transatlantique de Hughes	22
Figure 1.2	L'un des ekranoplanes russes : le LUN, utilisé comme lance-missiles	23
Figure 1.3	L'avion à effet de sol selon Boeing : Le Pélican	24
Figure 1.4	Avec effet de sol	26
Figure 1.5	Sans effet de sol	26
Figure 1.6	Vitesse minimum de décollage en fonction de la masse de l'aéronef	27
Figure 1.7	Consommation de carburant en fonction de la vitesse	28
Figure 1.8	Evolution de la force de traînée en fonction de la vitesse	29
Figure 2.9	Consommation au décollage d'un aéronef en fonction de sa masse	30
Figure 2.1	Source plane avec ses lignes de courant et de potentiel constants	41
Figure 2.2	Source située au point $x = a, y = b$	42
Figure 2.3	Fil tourbillonnaire : $\nabla \times v \neq 0$ uniquement pour $x = y = 0$. A l'exception de ce point $\nabla \times v = 0$	43
Figure 2.4	Ecoulement déterminé par un doublet	45
Figure 2.5	Source plane en écoulement uniforme	46
Figure 2.6	Source et puits plans	47
Figure 2.7	Ecoulement autour d'un cylindre ovale	48
Figure 2.8	Tourbillon en écoulement uniforme	48
Figure 2.9	Ecoulement autour d'un cylindre dans un courant uniforme.	50
Figure 2.10	Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre	51
Figure 2.11	Caractéristiques géométriques d'un profil.	53

Figure 2.12	le coefficient C_d en fonction de l'épaisseur relative pour les profils symétriques de la famille de profils à quatre chiffres.	54
Figure 2.13	caractéristiques géométriques d'un profil cambré.	55
Figure 2.14	distribution de la vitesse sur un profil symétrique NACA0012.	56
Figure 2.15	Condition de Kutta	60
Figure 2.16	Notation des panneaux sur le profil.	62
Figure 2.17	Surface représentative à l'intérieur de laquelle l'identité de Green est applicable	64
Figure 2.18	Interprétation du second terme comme une distribution de doublets	65
Figure 2.19	Notation des domaines pour l'identité de Green	65
Figure 2.20	Notation sur un panneau	68
Figure 2.21	Panneaux adjacents	74
Figure 2.22	Nœuds au bord de fuite.	77
Figure 3.1	Image de la source	81
Figure 3.2	Image du tourbillon et du doublet.	81
Figure 3.3	Ecoulement engendré par une source à proximité d'une paroi.	82
Figure 3.4	Profil d'aile à proximité d'une paroi.	83
Figure 3.5	Profil d'aile placé entre deux parois.	84
Figure 4.1	Définition de s , de r et de θ .	87
Figure 4.2	Notation des panneaux sur le profil.	88
Figure 4.3	Notation sur le panneau i .	89
Figure 4.4	système de coordonnées liées au panneau j .	91
Figure 4.5	Réduction de l'équation par la géométrie.	91
Figure 4.6	Profil à proximité d'une paroi.	96

Figure 4.7	Procédure de calcul de r_{ij}	96
Figure 5.1	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	98
Figure 5.2	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 Air libre pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	99
Figure 5.3	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	100
Figure 5.4	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=3^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	100
Figure 5.5	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	101
Figure 5.6	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de α et pour $N=100$ et $M=0.1$	102
Figure 5.7	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	103
Figure 5.8	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=60$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	103
Figure 5.9	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=80$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	104
Figure 5.10	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	104
Figure 5.11	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	105
Figure 5.12	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	106
Figure 5.13	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.2$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	106
Figure 5.14	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.25$ $\alpha=1^\circ$,et $N=100$	106
Figure 5.15	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de M et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux	107
Figure 5.16	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	108
Figure 5.17	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	109
Figure 5.18	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	110
Figure 5.19	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=3^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	110
Figure 5.20	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	111
Figure 5.21	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de α et pour $N=100$ et $M=0.1$	111
Figure 5.22	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$,et $M=0.1$	112
Figure 5.23	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=60$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	113

Figure 5.24	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=80$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	113
Figure 5.25	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$	114
Figure 5.26	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	115
Figure 5.27	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	115
Figure 5.28	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.2$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	116
Figure 5.29	$C_p=f(x/c)$ NACA0018 une paroi pour $M=0.25$ $\alpha=1^\circ$, et $N=100$	116
Figure 5.30	$C_p=f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de M et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux	117
Figure 5.31	Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA0018 pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	118
Figure 5.32	Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA0018 pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	118
Figure 5.33	Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA0018 pour $\alpha=3^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	118
Figure 5.34	Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA0018 pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	119
Figure 5.35	Comparaison entre C_p air libre et une paroi profil NACA0018 pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$	120
Figure 5.36	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 Air libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$	121
Figure 5.37	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N=60$ et $M=0.1$	123
Figure 5.38	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N = 80$ et $M = 0.1$	123
Figure 5.39	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$ et $M=0.1$	123
Figure 5.40	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de N	124
Figure 5.41	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$ et $N=100$	125
Figure 5.42	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$ et $N=100$	126
Figure 5.43	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.2$ et $N=100$	126
Figure 5.44	$C_l= f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.25$ et $N=100$	126
Figure 5.45	$C_l=f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de M	127

Figure 5.46	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$	128
Figure 5.47	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=60$ et $M=0.1$	129
Figure 5.48	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=80$ et $M=0.1$	129
Figure 5.49	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$	130
Figure 5.50	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de N	130
Figure 5.51	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$ et $N=100$	131
Figure 5.52	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$ et $N=100$	132
Figure 5.53	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.2$ et $N=100$	132
Figure 5.54	$Cl=f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.25$ et $N=100$	132
Figure 5.55	$Cl=f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour différentes valeurs de M	133
Figure 5.56	Comparaison entre Cl air libre et une paroi profil NACA0018 pour $N=100$ et $M=0.1$	134
Figure 5.57	$C_m = f(\alpha)$, NACA 0018, Air Libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$	136
Figure 5.58	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 60$ et $M = 0.1$	137
Figure 5.59	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 80$ et $M = 0.1$	137
Figure 5.60	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$	138
Figure 5.61	$C_m=f(\alpha)$ NACA0018 Air Libre pour différentes valeurs de N	138
Figure 5.62	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$	139
Figure 5.63	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$	140
Figure 5.64	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.2$ et $N = 100$	140
Figure 5.65	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.25$ et $N = 100$	140
Figure 5.66	$C_m=f(\alpha)$ NACA0018 Air Libre pour différentes valeurs de M	141
Figure 5.67	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 pour $N = 100$ et $M = 0.1$	142
Figure 5.68	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 60$ et $M = 0.1$	143
Figure 5.69	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 80$ et $M = 0.1$	143
Figure 5.70	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$	144
Figure 5.71	$C_m=f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour différentes valeurs de N	144

Figure 5.72	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.1$ et $N = 100$	145
Figure 5.73	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.1$ et $N = 100$	146
Figure 5.74	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.2$ et $N = 100$	146
Figure 5.75	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.25$ et $N = 100$	146
Figure 5.76	$C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de M	147
Figure 5.77	Comparaison entre C_m Air Libre et C_m une paroi pour un profil NACA 0018, $N = 100$ et $M = 0.1$	148
Figure 5.78	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	150
Figure 5.79	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	150
Figure 5.80	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 8m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	151
Figure 5.81	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	151
Figure 5.82	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	151
Figure 5.83	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$ et pour différentes valeurs de H	152
Figure 5.84	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	153
Figure 5.85	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	154
Figure 5.86	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 8m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	154
Figure 5.87	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	155
Figure 5.88	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$	155

Figure 5.89	$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$ et pour différentes valeurs de H	156
Figure 5.90	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=6m, M=0.1 et N=100	157
Figure 5.91	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=6m, M=0.1 et N=100	158
Figure 5.92	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=8m, M=0.1 et N=100	158
Figure 5.93	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=10m, M=0.1 et N=100	158
Figure 5.94	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=12m, M=0.1 et N=100	159
Figure 5.95	$C_l = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour différentes valeurs de H	159
Figure 5.96	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=6m, M=0.1 et N=100	161
Figure 5.97	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=6m, M=0.1 et N=100	162
Figure 5.98	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=8m, M=0.1 et N=100	162
Figure 5.99	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=10m, M=0.1 et N=100	163
Figure 5.100	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour H=12m, M=0.1 et N=100	163
Figure 5.101	$C_m = f(\alpha)$ NACA0018 une paroi pour différentes valeurs de H	164
Figure 5.102	Convergence C_p une paroi vers C_p air libre $\alpha = 0$, N = 100	166
Figure 5.103	Convergence C_p une paroi vers C_p air libre $\alpha = 3$, N = 100	167
Figure 5.104	Convergence C_m une paroi vers C_m air libre	167
Figure 5.105	Convergence C_l une paroi vers C_l air libre	167

INTRODUCTION GENERALE

Les avions à effet de sol (désignés par l'appellation « **WIG pour Wing In Ground effect** ») sont actuellement très peu connus du grand public. Pourtant, le principe de l'effet de sol a servi à la conception de bien des appareils. Ces derniers sont d'ailleurs regroupés sous le terme général de WISES (navires à effet de surface). Derrière ce terme se cachent de nombreux engins volant ou navigant au ras des flots ou du sol. En effet, l'effet de sol n'est pas l'apanage du monde aéronautique mais c'est dans le transport maritime qu'il est d'abord apparu et qu'il est le plus utilisé (pour l'instant). Pour les bateaux, le but est d'accroître la vitesse limite en diminuant la résistance de vague ; un des moyens d'y parvenir est d'utiliser des coques dites à 'effet de sol', afin de se déplacer partiellement ou totalement hors de l'eau. C'est le cas des « catamarans » pontés (la coque prend 'appui' sur l'air), des aéroglisseurs (principe du coussin d'air). Remarquons toutefois que si les ailes à effet de sol et les aéroglisseurs sont classés dans la même famille, leur principe diffère quelque peu. En effet, l'aile à effet de sol glisse sur un coussin d'air dynamique créé par son propre mouvement avant, et sa portance est engendrée par sa vitesse de déplacement, alors que l'aéroglisseur possède des propulseurs qui injectent continuellement un coussin d'air statique en dessous de lui (voir section aérodynamique).

Nous essaierons à travers ce mémoire de mettre en évidence ces notions, ainsi que les principes de base sur lesquels repose le phénomène « Effet de Sol ».

Pour cela, nous avons établi une étude générale de l'effet de sol, ou bien alors, pour être plus précis, une numérisation du phénomène, qui permettra de :

- Faciliter la tâche aux utilisateurs ;
- Etudier les caractéristiques aérodynamiques ;
- Voir l'influence de l'effet de sol à une certaine hauteur ;
- Donner une idée générale sur l'effet de sol dans le cas de deux parois ;

Nous avons à cet effet jugé utile de « segmenter » le travail en plusieurs chapitres qui obéissent à l'ordre suivant :

- **CHAPITRE 1 : Effet de sol** : Il s'agit ici d'une présentation générale de quoi mettre en évidence l'effet de sol.
- **CHAPITRE 2 : Notions aérodynamiques et méthodes des panneaux** : Où il est question d'une introduction aux notions de base de l'aérodynamique, suivie par une exposition détaillée de toutes les méthodes des panneaux hormis la méthode de Hess et Smith.
- **CHAPITRE 3 : Méthode des images** : Il est question dans ce chapitre de faire une étude préliminaire de l'effet de sol par la méthode des images.
- **CHAPITRE 4 : Processus de la méthode de Hess et Smith** : Où il est exposé d'une façon claire et détaillée toute la procédure à suivre dans la résolution du problème par la méthode de Hess et Smith.
- **CHAPITRE 5 : Résultats et interprétations** : Dans lequel sont exposés tous les résultats obtenus à partir de l'application sur la méthode de Hess et Smith avec tous les commentaires et interprétations correspondant à chaque cas de figure.

CHAPITRE 1 EFFET DE SOL

1.1. HISTOIRE DE L'EFFET DE SOL

On peut penser que cela est absurde mais le premier utilisateur de l'effet de sol est la nature! En effet, certains canards marins, tels *la Macreuse noire* mettent à profit l'effet de sol pour économiser de l'énergie quand ils volent à proximité de l'eau. L'effet de sol a été découvert dans les années **1920**, mais on suppose que le premier avion des frères Wright qui s'est révélé incapable de voler au delà de quelques mètres d'altitude, profitait de l'effet de sol. Un autre exemple est l'hydravion construit par le milliardaire américain **Howard Hughes**, le **H4 Hercules**, l'un des plus grands avions jamais construits, qui ne fut capable de dépasser **21 mètres** d'altitude au dessus de la mer lors de son unique vol en **1947**, et on suppose donc que c'est également l'effet de sol qui lui a permis ce court vol.



Figure 1.1 Le H-4 Hercules dit « **Spruce Goose** » projet aéronautique
d'hydravion transatlantique de Hughes

Durant la guerre, plusieurs aviateurs s'en servirent après la perte d'un moteur ou de carburant, car ils savaient que cela permettait de substantielles économies de carburant, ou de se maintenir en vol malgré une perte de puissance sur un ou

plusieurs moteurs et l'effet de sol leur permis parfois de rentrer sains et saufs malgré une autonomie ou une puissance moteur très réduite ! L'effet de sol fut ensuite exploité par les Russes durant la guerre froide. Il permet en effet un transport de matériels lourds tout en étant plus économique que l'avion (portance égale à vitesse plus faible, comme nous le verrons plus bas) et plus rapide que le bateau (les frottements aérodynamiques étant moins importants que les frottements hydrodynamiques). Les avions à effet de sol créés par les Russes, couramment dénommés « **ékranoplanes** » (notez qu'on trouve également le nom **WIG**, pour « **Wing In Ground-effect** » utilisé plutôt de l'autre coté de l'atlantique, mais également parfois chez nous) étaient des avions gigantesques. Le plus grand, terminé par les Russes en **1966**, et nommé par les américains **Le Monstre de la Caspienne** était gigantesque, **100 mètres** de long pour **550 tonnes** (pour comparaison l'**A380** mesure « à peine » **73 mètres** de long pour **560 tonnes**).



Figure 1.2 L'un des ékranoplanes russes : le LUN, utilisé comme lance-missiles

Les Russes ont construit cet avion car ils disposaient de grandes étendues d'eau (lacs et océans). En effet, ces avions pour décoller, malgré la présence de l'effet de sol, doivent atteindre une vitesse de quelques centaines de km/h (classiquement, de **200 à 300 km/h**), et il leur faut donc des étendues suffisamment grandes et planes pour voler en toute sécurité. Les avions à effet de sol russes avaient par contre un gros désavantage : ils n'étaient pas faits pour voler au delà de quelques mètres de la mer, car au delà de cette altitude, l'effet de sol disparaît brutalement et l'avion « **décroche** » (Il n'y a plus assez de portance pour compenser la masse de l'avion, et l'avion se met réellement à tomber). Sur un avion classique, on remet les gaz lors d'un décrochage afin de reprendre de la

vitesse puis de l'altitude. Or, ce défaut causa la perte de cet avion gigantesque, car il fut un jour déséquilibré par une vague et le pilote peu expérimenté sur ce type d'appareil remit les gaz, l'avion prit de l'altitude, décrocha soudainement et fut englouti par les flots de la mer rouge sur laquelle il se déplaçait. Cette impossibilité de voler en altitude contraignait donc les Russes à voler uniquement par mer calme. Le règne des ekranoplanes prit fin avec celui de l'Union Soviétique, car l'économie de l'armée russe, ruinée par les recherches pour ; montrer sa supériorité face aux américains ne put bientôt plus assumer de nouvelles recherches sur les ekranoplanes.



*Figure 1.3 L'avion à effet de sol selon Boeing :
Le Pélican*

Aujourd'hui, après une longue période de désintérêt pour cette technologie, les avions à effet de sol ont à nouveau la côte. En effet, avec l'épuisement de nos ressources naturelles, et plus encore avec l'augmentation du prix du pétrole qui y est lié, nous avons besoin de développer des moyens de transport rapides mais économiques et surtout écologiques. L'avion à effet de sol peut s'inscrire dans cet objectif, comme nous le verrons dans les parties suivantes. Aujourd'hui des grandes firmes comme **Boeing** relancent des projets ayant pour but de développer des avions exploitant l'effet de sol, avec par exemple **le projet Pélican** lancé en **2003**, ayant pour objectif la conception d'un avion qui mesurerait **200 mètres** de longueur, **150 m** d'envergure pour **1400 tonnes**. D'autres projets à taille plus humaine sont également en cours de développement de part le monde. Ces avions seraient capables également de combiner les avantages de l'effet de

sol sans conserver son principal inconvénient, à savoir son incapacité à voler là où il n'y a plus d'effet de sol et loin d'étendues planes et calmes. L'avion Pélican pourrait en effet voler à plus de **6 000 mètres** afin de rejoindre des contrées plus calmes en cas de mer trop grosse pour voler en toute sécurité, ou encore dans l'objectif de rejoindre des aérodromes plus enfoncés dans les terres. Bien sur, ces vols en altitude poseraient par contre le problème de consommer infiniment plus de carburant du fait de l'absence d'effet de sol (et ce phénomène serait d'autant plus accentué que l'avion ne serait pas « optimisé » pour ce type de vol). C'est pour cette raison que ce projet du **Pélican** met un peu de temps à démarrer, car il est important pour Boeing de bien étudier le marché potentiel pour ce type de transport avant-gardiste. D'autres entreprises conçoivent et vendent également des avions à effet de sol à des particuliers... et certains particuliers se sont également lancés seuls dans l'aventure de la construction de ce type d'avion !^[11]

1.2. DESCRIPTION ET EXPLICATION PRATIQUE DE L'EFFET DE SOL

L'effet de sol est un phénomène qui s'observe sur la plupart des avions plus ou moins longtemps durant les phases d'atterrissage notamment. Il se traduit au pilote par le refus de l'avion de se poser, l'avion ayant tendance à refuser de descendre arrivé à quelques mètres du sol, alors que les commandes sont toujours en position « descente » et que l'avion conserve une assiette en piquée. Au contraire, l'effet de sol favorise le décollage car il diminue la vitesse à laquelle suffisamment de portance est créée pour soulever l'avion. L'effet de sol est d'autant plus ressenti que l'aile est proche du sol et sa surface importante.

Cela se produit en fait dès que l'aile se situe à une altitude égale à la moitié de la corde de profil de l'aile (on en déduit donc que sur certains avions, notamment ceux à ailes hautes, ce phénomène n'est pas perceptible). L'air est en fait pris entre l'aile et la piste d'atterrissage, ce qui crée un goulot d'étranglement et une surpression entre les 2 surfaces. L'effet de sol peut donc s'apparenter au coussin d'air d'un aéroglisseur à la différence que sur l'avion, l'air est comprimé entre l'aile et le sol au lieu d'être pris entre la jupe et le sol.



Figure 1.4 Avec effet de sol

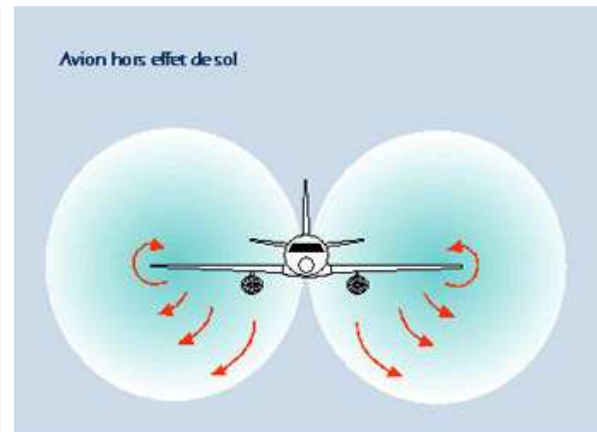


Figure 1.5 Sans effet de sol

Avec ces illustrations, on constate que grâce à l'effet de sol la zone de surpression est beaucoup plus restreinte, ce qui permet une plus grande augmentation de la valeur de la surpression présente en vol sur l'intrados. D'autre part, cette zone de surpression s'étend sous tout l'avion et non plus seulement sous les ailes.

1.3. LES ECONOMIES DE CARBURANT

Dans cette partie, nous allons aborder la partie économie de carburant. Nous avons décidé d'y répondre sans expérimentation, en vous présentant uniquement des résultats théoriques obtenus par calculs.

1.3.1 Les calculs

1.3.1.1 Augmentation du coefficient de portance ^[20]

Nous allons essayer de percevoir les économies de carburant possibles grâce à l'effet de sol. Pour cela, on part du fait que grâce à l'effet de sol, on obtiendrait une portance égale à celle obtenue hors effet de sol à seulement **50%** de la vitesse sans effet de sol. C'est donc que si l'on transporte une masse « **x** » à **200 km/h**, avec l'effet de sol, on pourra transporter une masse de **2x** sans augmenter la vitesse, ou encore de diviser par deux la vitesse nécessaire pour soulever cette même masse. Dans cette partie, nous allons donc essayer de chiffrer les économies de carburant possibles. On sait que l'équation de sustentation est donnée par $mg = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_l$, or, pendant les essais, on ne

modifie ni la surface de l'aile, ni la densité de l'air, ni la vitesse, on en déduit donc que l'effet de sol modifie le C_l , coefficient de portance, en l'augmentant. On en déduit que pour soulever une même masse, comme le C_l a augmenté, une vitesse moindre est nécessaire. Dans les expériences, il a été constaté une augmentation de la sustentation de l'ordre de **1,5**. Le profil le plus efficace en effet de sol, le Clark Y a un C_l à 4° d'environ **0,7**. On a donc multiplié ce C_l par **1,5**, le nouveau C_l avec effet de sol est donc de 1,05 (Voir Figure 1.6).

Grâce à ces courbes, nous pouvons constater que pour soulever une même masse, nous pouvons diviser la vitesse par environ **1,25** (en fait, on la divise exactement par $\sqrt{1.5}$ car dans le calcul de la portance, on a la vitesse au carré. Dans le calcul, le paramètre C_l intervient donc en racine par rapport à la vitesse).

L'augmentation du C_l dans ce cas n'est pas associée à l'augmentation de la traînée, le C_x , qui reste donc stable, que l'on soit avec ou sans effet de sol (mais en fait ce paramètre varie, comme nous le verrons plus bas).

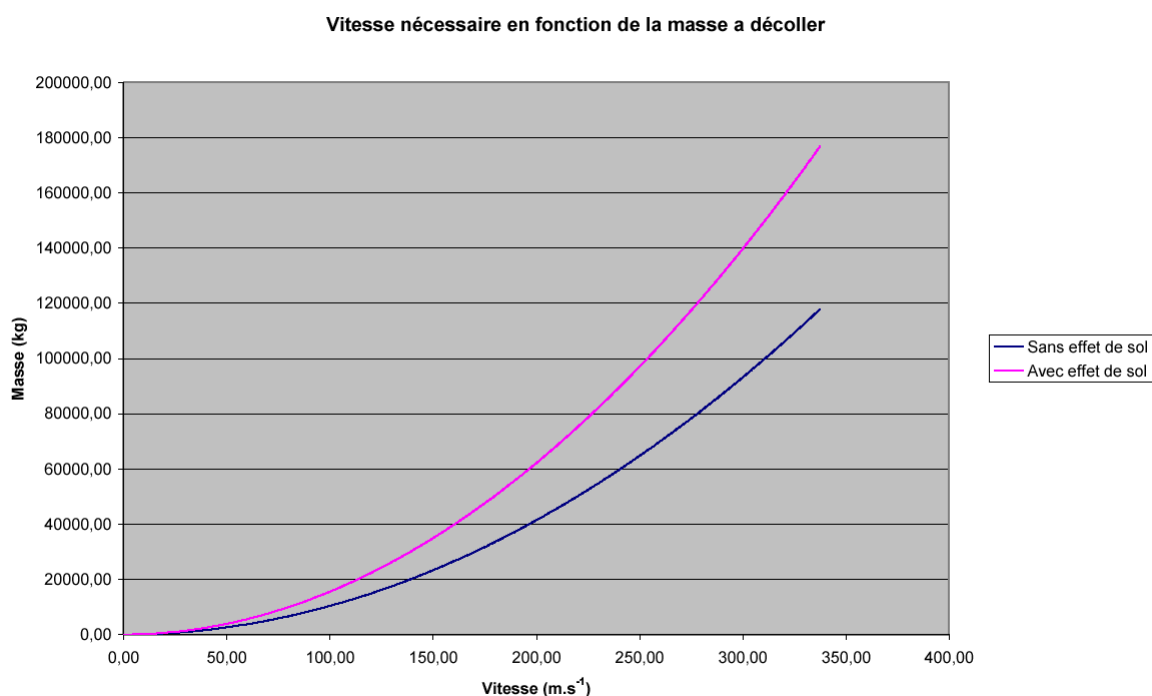


Figure 1.6 Vitesse minimum de décollage en fonction de la masse de l'aéronef

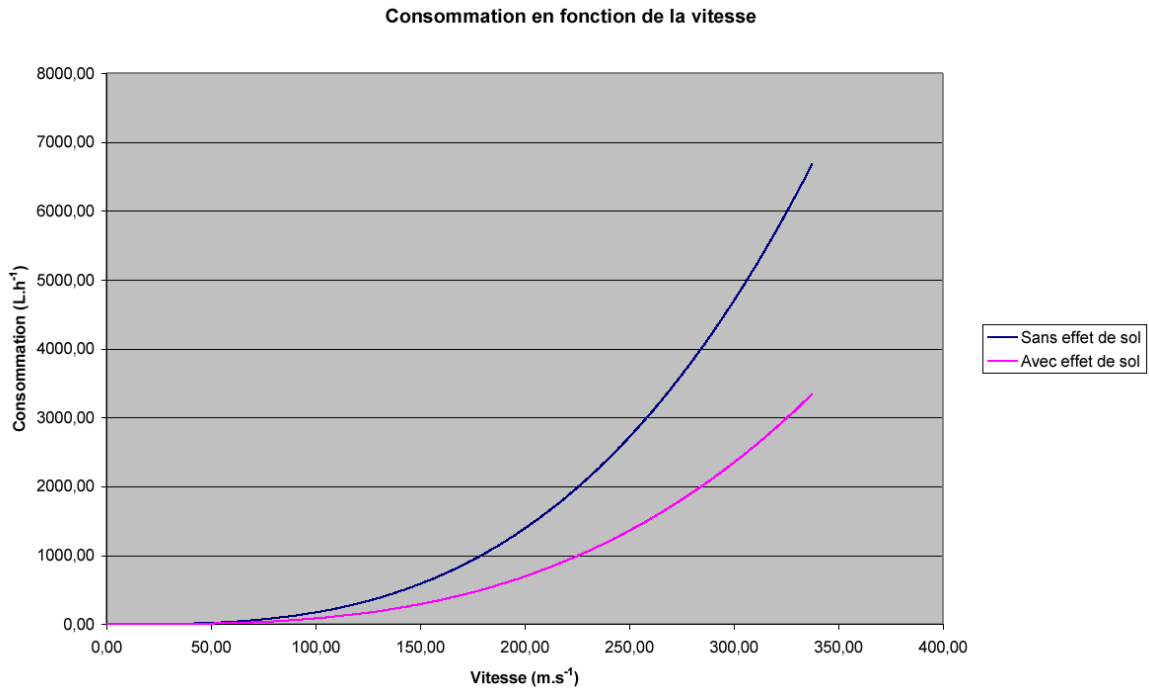


Figure 1.7 Consommation de carburant en fonction de la vitesse ^[20]

On en déduit donc que pour soulever une même masse, avec de l'effet de sol il faudra une vitesse moindre que sans effet de sol. Voyons maintenant comment cela va permettre des économies de carburant. La consommation d'un aéronef, voire plus généralement d'un mobile quelconque, est relative à l'énergie nécessaire pour vaincre les forces de frottements entre le mobile en question et les différents fluides et solides avec lequel il est en contact. Dans le cas d'un avion, celui-ci est uniquement en contact avec l'air une fois décollé. La seule force qu'il sera nécessaire de vaincre pour avancer est donc une force opposée au mouvement et due aux frottements de l'appareil avec l'air : la traînée. On sait que cette dernière est donnée par l'équation $T = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x$. Cette valeur, en **N** donne juste la valeur de la résistance à l'avancement. Pour connaître l'énergie nécessaire pour vaincre cette traînée, il faut la multiplier par la vitesse. On a donc la consommation qui est égale à : $\frac{1}{2} \rho S V^3 C_x$ Comme toute puissance, ce paramètre est exprimé en Watts (W). On considérera aussi que la puissance délivrée par un moteur, qu'il soit à explosion ou à réaction, est directement proportionnelle à sa consommation de carburant. On en déduit donc le graphique suivant (Voir Figure 1.7)

1.3.1.2 Diminution de la traînée ^[20]

L'effet de sol est accompagné d'une réduction de la traînée (tourbillons marginaux), qui réduit donc encore la consommation de carburant. En effet, les tourbillons marginaux, également nommés vortex sont des tourbillons qui sont créés au bout des ailes. L'intrados est le siège d'une surpression tandis que l'extrados est le siège d'une dépression, or, l'air en bout d'aile a tendance à être aspiré de l'intrados vers l'extrados (car l'air va toujours des zones de hautes pressions vers celles de basses pressions), ce qui crée les vortex, qui sont des tourbillons qui sont situés en bout d'aile et qui tournent sur eux mêmes. Or, à proximité du sol, ces tourbillons n'ont pas la place de se créer, ce qui réduit la traînée et réduit encore la consommation. Or, ces tourbillons sont responsables de **50%** de la traînée totale d'une aile ! Nous devons donc chercher à calculer les économies de carburant réalisées sans ces tourbillons.

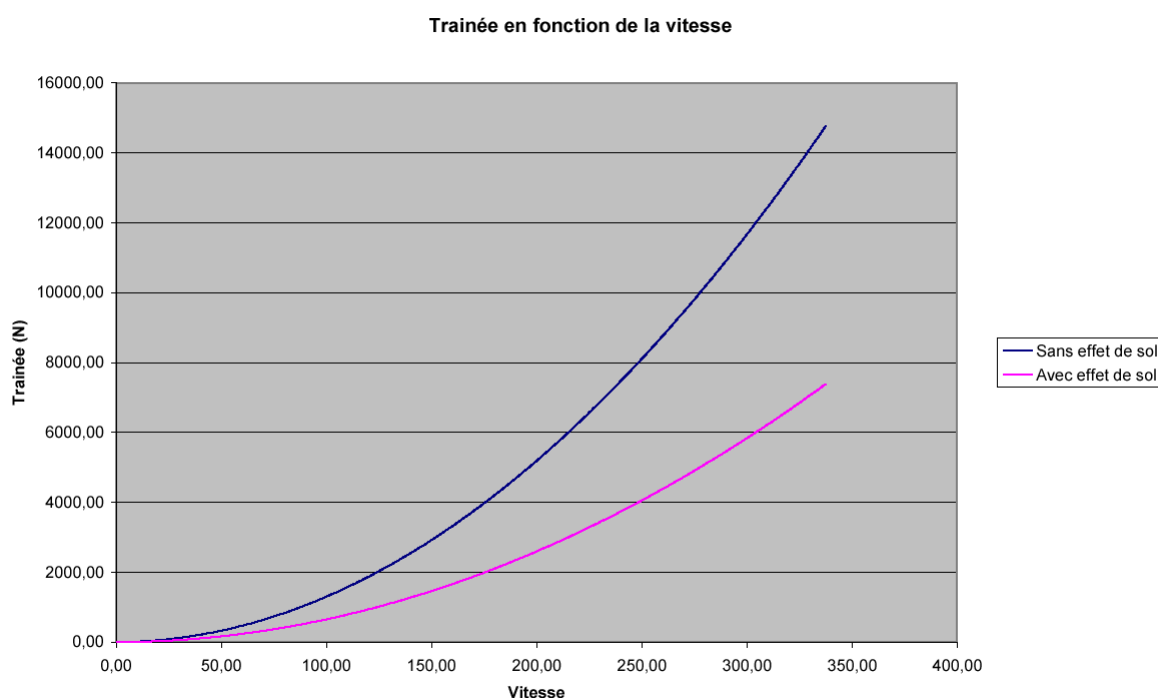


Figure 1.8 Evolution de la force de traînée en fonction de la vitesse

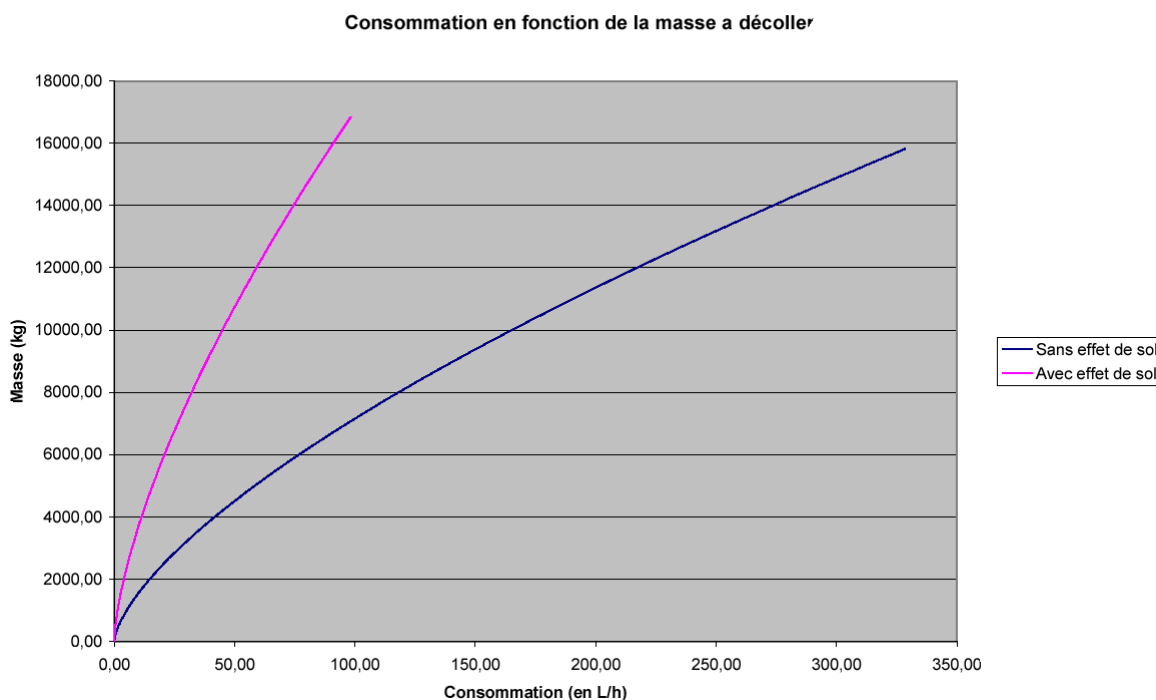


Figure 1.9 Consommation au décollage d'un aéronef en fonction de sa masse,

Pour cela deux séries de calculs ont été menées, à savoir une avec une traînée deux fois supérieure à celle de la seconde série (C_x de **0,108** pour la première et **0,0054** pour la seconde). (Voir Figure 1.8)

Les effets des deux précédents points s'ajoutent, on peut donc en déduire ce graphique (Voir Figure 1.9)

1.3.2 En pratique

Grâce à ces calculs, on peut constater que l'effet de sol réduit considérablement la consommation de carburant. Selon les calculs, l'effet de sol permet de réduire la consommation dans un facteur d'environ **2,5**. Dans la pratique, si un avion consomme **2700 L/h** de carburant hors effet de sol (consommation horaire d'un A320), alors le même avion exploitant l'effet de sol ne consommerait plus que **1100 L/h** environ pour soulever la même masse. ^[20]

Finalemnt ; L'effet de sol est donc une technologie qui est capable de faire diminuer énormément la quantité de carburant consommée par un avion. De plus, il permet de transporter de lourdes charges tout en réduisant la pollution. Aussi, l'effet de sol permettrait de conjuguer les avantages du bateau tout en se défaisant de ses inconvénients, à savoir, permettre le transport de lourdes

charges à grande vitesse, tout en restant beaucoup plus abordable que le transport par avion.

Selon ces calculs, on peut donc emporter une charge double à une même vitesse tout en consommant 2 à 3 fois moins de carburant grâce à l'effet de sol. Un des freins au développement de cette technologie est le fait que ces appareils ne sont exploitables que sur des surfaces très planes telles que les océans et à faible altitude (le projet Pélican de Boeing parle d'exploiter ces avions à une altitude de **20 à 50 pieds**, soit environ **7 à 20 m**), mais que leurs vitesses d'exploitation les rend incompatibles avec la navigation maritime, parfois plusieurs dizaines de fois plus lente. Si cette technologie était amenée à se développer, on devrait probablement mettre en place un système de couloirs aérien de basses altitudes réservées aux "écranoplans". De plus l'avion à effet de sol est beaucoup plus sensible aux conditions climatiques que n'importe quel autre moyen de transport. D'autre part, si la plupart des grands ports seraient à même d'accueillir des appareils gigantesques de type Pélican, il n'en est pas de même pour les aéroports, ou la présence d'un A380, appareil plus de deux fois plus petit se révèle déjà parfois problématique.

CHAPITRE 2

NOTIONS AERODYNAMIQUES ET METHODES DES PANNEAUX

2.1. INTRODUCTION

Il n'y a guère plus de cent ans qu'**Orville** et **Wilbur Wright** ont réussi le premier vol d'un véhicule propulsé plus lourd que l'air. Depuis ce *17 Décembre 1905*, les progrès n'ont pas cessé ; voici qu'aujourd'hui l'on arrive à transporter des passagers à des vitesses doubles ou triples de celle du son. Sans doute, le simple fait d'y penser relevait de « l'inconcevable » il y a peine 50 ans mais aujourd'hui cela fait partie des banalités les plus « normales » grâce aux techniciens de l'Aéronautique qui ont eu à résoudre de nombreux problèmes. ^[13]

Quelle est la forme de l'aile la mieux adaptée ? Quel type de moteur faut-il choisir ? Quelles sont les modifications à apporter aux procédés de navigation pour tenir compte des nouvelles conditions d'exploitation...etc. Telles sont les questions que se pose l'homme avide de progrès technique et auxquelles il s'acharne à donner de nouvelles réponses aussi longtemps que la recherche progresse... Et l'aérodynamique y est pour beaucoup dans ce cas de figure même. ^[13]

Aujourd'hui, les études de marché indiquent un besoin croissant en avions supersoniques long-courriers (dont la vitesse atteint le double ou le triple de la vitesse du son) et de transporteurs « *Superjumbo* ». Un bon exemple des travaux entrepris dans ce domaine est sans doute le projet *Alliance*, qui part de l'expérience du Concorde ^[2.1]. Son objectif est la réalisation d'un nouvel avion supersonique capable de transporter deux fois plus de passagers que le Concorde sur des distances beaucoup plus longues (on parle d'un rayon d'action d'environ 9000km comparativement à 6500km pour le Concorde). Un autre projet important à cet égard est celui des appareils « *Superjumbo* » de Boeing et d'Airbus, pouvant transporter de 600 à 800 passagers. Ces projets, ainsi que le développement d'engins spatiaux, dont certains atteignent des vitesses qui se chiffrent à plusieurs milliers de kilomètres à l'heure, et de véhicules spatiaux, qui nécessitent une étude approfondie en ce qui concerne l'entrée dans l'atmosphère, posent de nouveaux problèmes de nature aérodynamique et requièrent des moyens de plus en plus compliqués. Parmi les contraintes auxquelles sont soumis les projets

actuels, il semble que les plus importantes concernent la manoeuvrabilité (ou l'extension du domaine du vol) et l'économie d'énergie. Dans cette optique, les immenses progrès qu'on a connu dans de nombreux domaines, de la dynamique des fluides qui a pour objet l'étude des mouvements de l'air autour des corps, à l'électronique, en passant par les différents modes de propulsions, ont permis de qualifier l'industrie aéronautique d'industrie pilote.

2.2. DEFINITION ET OBJECTIF DE L'AERODYNAMIQUE ^[1]

L'aérodynamique dont l'étymologie évoque immédiatement l'action de l'air en mouvement, est la science qui étudie les différents aspects de cette action, notamment les forces, pressions et moments qui résultent du déplacement des corps dans l'atmosphère. L'aérodynamique intervient essentiellement dans la conception des avions et des missiles, dont elle définit les formes optimales, mais joue également un rôle d'importance variable dans le dessin de bateaux, voitures rapides, véhicules à coussins d'air, ainsi que dans la construction d'ouvrages fixes comme les ponts, tours, ou grands immeubles, dont elle détermine les réactions au vent.

Sa naissance, comme science, peut être située au **18^{ème}** siècle en Europe, où furent développées les théories (**D. Bernoulli** 1738 ; **Euler** 1755) qui faisaient suite à un empirisme séculaire.

Mais ce n'est qu'un siècle plus tard que les lois fondamentales tenant compte des contraintes intérieures d'un milieu continu ont été formulées (**M. Navier** 1827 ; **S.D. Poisson** 1831 ; **D. de Saint-Venant** 1843 ; **G.G. Stokes** 1845). Devant l'impossibilité de résoudre ces équations extrêmement compliquées, les connaissances aérodynamiques n'ont pu se développer que grâce à l'introduction d'hypothèses simplificatrices, appuyées sur l'expérience. Les étapes les plus importantes de ces travaux théoriques expérimentaux sont marquées, entre autres, par l'introduction des coefficients de similitude (**E. Mach** 1889 ; **O. Reynolds** 1883), des notions de fluide parfait et de couche limite (**L. Prandtl** **1904**) dans le cas des écoulements à des vitesses modérées.

C'est également à la fin du **19^{ème}** siècle et au début du **20^{ème}** que l'aérodynamique expérimentale a découvert les lois physiques que les théoriciens ont eu à expliquer, concernant les phénomènes de portance (**N.I. Joukovski**

1904), de la traînée (**W. Blasius** 1907), de la stabilité et du contrôle des avions subsoniques. L'accroissement de la vitesse, jusqu'à des valeurs supersoniques, a réussi les progrès de la technique, favorisés par le développement des connaissances aérodynamiques grâce d'abord aux balisticiens (**Mach** 1887 ; **P.H. Hugoniot** 1883).

D'une manière générale on pourrait dire que l'Aérodynamique a deux objectifs :

- Le premier objectif de l'aérodynamique est de déterminer les forces et les moments, en considérant aussi les effets thermiques (transfert de chaleur), sur un corps se déplaçant dans un fluide, généralement de l'air (par exemple, la génération de la portance, de la traînée, et des moments sur les profils, les ailes, le fuselage, les nacelles et les hélices). On veut aussi estimer la force du vent sur des bâtiments ou la résistance à l'avancement de bateaux ou sous-marins. On peut également calculer les forces qui s'exercent sur les pâles d'hélicoptères ou sur les éoliennes (machines à vent) à axe horizontal ou à axe vertical. On pourrait aussi s'intéresser, par exemple, aux détails de l'écoulement dans le sillage d'un corps en mouvement, de l'écoulement associé aux tourbillons libres qui se détachent aux bouts des ailes d'un avion subsonique comme le **Boeing 747**, de la propagation des ondes de choc ou encore de l'écoulement autour des avions supersoniques comme le Concorde. On doit aussi être en mesure de calculer les effets thermiques sur un véhicule interplanétaire. Tous ces problèmes appartiennent à l'*aérodynamique externe*, qui traite de l'écoulement autour des corps en mouvement, en général, ou fixes, dans les cas particuliers de l'action du vent sur des bâtiments, des ponts ou des poteaux (par exemple, les lignes de transmission électriques).
- Le second objectif se résume à la détermination des écoulements internes des gaz dans les tuyaux, les moteurs, les turbines, les compresseurs et les ventilateurs. L'aérodynamique doit permettre de calculer et de mesurer les propriétés de l'écoulement dans un propulseur de missiles (ou de fusées), de connaître les détails liés à l'écoulement d'un gaz dans une conduite ainsi que son débit...etc. ces problèmes appartiennent au domaine de l'*aérodynamique interne*.

2.3. METHODES THEORIQUES ET EXPERIMENTALES EN AERODYNAMIQUE

Les méthodes théoriques et expérimentales en aérodynamique reposent essentiellement sur les notions de base régissant le mouvement d'un corps dans un fluide réel ^[13]. Plusieurs chercheurs célèbres ont contribué à l'établissement de ces notions: **Bernoulli** auteur du théorème qui régit l'écoulement des fluides incompressibles, **Euler** avec ses travaux sur l'aérodynamique, **Laplace** qui a donné la formule exacte de la propagation du son dans l'air, **Mach** qui a découvert les ondes de choc, **Navier** et **Stokes** qui ont généralisé les lois qui gouvernent le mouvement d'un fluide visqueux (équations de **Navier** et **Stokes** publiées en 1823 et 1843) ; **Prandtl** (1875-1953) qui a établi le concept de la couche limite et la théorie de l'aile d'envergure finie ; **Reynolds** (1842-1912) qui a trouvé une des lois fondamentales de la similitude en dynamique des fluides, **Von Karman** (1881-1963) qui a développé le concept de la couche limite, **Ackeret** qui a développé la première théorie de l'écoulement supersonique autour d'une aile en 1925, enfin **Busemann** qui, en 1935, a pu améliorer les résultats en utilisant une méthode encore plus perfectionnée. C'est au cours de la deuxième guerre mondiale qu'on a entrepris les premières études sur le régime transonique ; par la suite, on a mis sur pied un vaste programme de recherche sur l'aérodynamique des avions (subsoniques/supersoniques, civils/militaires), des hélicoptères et des véhicules spatiaux. ^[1]

Parallèlement aux recherches théoriques, les premiers travaux relatifs à l'aérodynamique expérimentale datent de 1866, alors que **Lilienthal** a pu mesurer la composante de sustentation d'éléments plans et déterminer, dans un vent naturel, la portance, la traînée et le moment d'ailes dont la forme s'apparentait à celle d'ailes d'oiseaux. Depuis, plusieurs souffleries aérodynamiques ont vu le jour, grâce à **Wenham** (1871) puis à **Phillips** (1891) en Angleterre, grâce à **Lacour** (1890) au Danemark, à **Joukowski** (1903) en Russie, à **Rateau** (1909) et **Eiffel** (1909) en France ; on doit d'ailleurs à **Eiffel** la mise au point de techniques d'essai en soufflerie qui sont encore en usage de nos jours. Au cours du 20^{ème} siècle, les études de l'aérodynamique expérimentale vont aller de pair avec, d'une part, le développement de l'aérodynamique théorique et, d'autre part, la

construction des différents types d'avions. Actuellement, on dispose de grandes souffleries qui sont indispensables autant pour valider et améliorer les méthodes de calcul, que pour effectuer des études de configuration en aérodynamique externe et interne. On effectue également des essais en vol afin de compléter les mesures prises en soufflerie, notamment les mesures relatives à la prévention de la transition, à la contamination (présence de glace, par exemple), au contrôle de la couche limite et, finalement, à la certification des avions. ^[1]

Depuis trois décennies environ, on dispose d'un autre moyen de résoudre les équations complexes qui régissent le mouvement des corps dans un fluide réel : Il s'agit de l'utilisation des méthodes numériques avec l'informatique qui, toujours en développement, produit des appareils de plus en plus puissants ; on évalue que le coût des simulations numériques a été divisé par 1000 en l'espace de 30 ans. L'utilisation des méthodes numériques dans les études d'aérodynamique sert à fournir un moyen rapide et bon marché de simuler les écoulements des fluides ainsi qu'à mettre au point des outils complémentaires aux données obtenues dans les tunnels aérodynamiques en vue de la conception des véhicules spatiaux. Les méthodes numériques mènent aussi à des modèles hybrides (théorie-expérience) qui favorisent la compréhension de phénomènes très complexes comme la turbulence et le décrochage dynamique. La simulation numérique, qui est en relation directe avec la physique (problèmes posés par la turbulence et le transfert de chaleur), les mathématiques (développement d'Algorithmes toujours plus efficaces) et l'informatique (développement de langage, de compilateurs et d'ordinateurs toujours plus efficaces), représente un moyen de recherche courant dont l'évolution et les performances des moyens de calcul ont permis l'essor de l'industrie aérospatiale. On reconnaît aujourd'hui la simulation numérique comme un moyen de conception efficace et indispensable à l'élargissement du champ d'application de l'aérodynamique. Dans la phase de conception d'un nouveau design d'avion, par exemple, la simulation numérique donne l'occasion :

- De simuler des phénomènes physiques complexes.
- D'étudier les interactions de plusieurs disciplines (thermodynamique, aéroélasticité...etc.).

- D'améliore les models théoriques en passant des fluides parfaits (Equation d'Euler) aux fluides réels (Equations de Navier- Stokes).
- De mieux optimiser l'appareil en tenant compte d'un plus grand nombre de paramètre, donc en se rapprochant de plus en plus de l'écoulement réel.
- De raccourcir la durée de mise au point du prototype final [2.2].

2.4. CONCEPTS DE BASE ^{[1] [21]}

2.4.1 Écoulement irrotationnel plan

Un écoulement est dit irrotationnel dans un plan si ^[2.1 à 2.6] :

$$\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

2.4.2 Potentiel des vitesses

Dans le cas d'un écoulement irrotationnel plan il existe une fonction ϕ appelée potentiel de la vitesse telle que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

En coordonnées polaires on aura :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.4.3 Fonction de courant ^[16]

Dans le cas même de l'écoulement irrotationnel plan il existe une fonction Ψ appelée fonction de courant telle que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\Psi}{dy} \\ v &= -\frac{d\Psi}{dx} \end{aligned} \quad (2.4)$$

En coordonnées polaires on aura :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\theta}. \quad (2.5)$$

$$v_\theta = -\frac{d\Psi}{dr}.$$

Ces deux fonctions satisfont les équations de Laplace, c'est-à-dire :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

Pour les déterminer, on utilise la méthode de superposition des singularités. On commencera d'abord par examiner quelques exemples de mouvements plans simples : Ecoulement uniforme, écoulement déterminé par une source, par doublets ou par tourbillons, qui sont d'un usage fréquent lors de l'application de la méthode de superposition ; on peut ainsi additionner les fonctions caractéristiques des écoulements plans d'un fluide.

2.4.4 Les différents types d'écoulement ^[1]

2.4.4.1 Écoulement uniforme

Considérons un écoulement uniforme et parallèle de vitesse V_∞ selon l'axe x . Pour déterminer la fonction de courant Ψ et le potentiel de vitesse Φ de cet écoulement par rapport aux variables x et y (écoulement bidimensionnel), on peut écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = V_\infty = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y = 0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.9)$$

D'où :

$$\Phi = V_\infty x \quad (2.10)$$

$$\Psi = V_\infty y \quad (2.11)$$

En fonction des variables : x, r (écoulement axisymétrique) on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = V_\infty = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.13)$$

D'où :

$$\Phi = V_\infty x \quad (2.14)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \quad (2.15)$$

De même, en fonction des variables R, θ , on aura :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = v_R = V_\infty \cos \theta = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{R} = v_R = V_\infty \cos \theta = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.17)$$

D'où :

$$\Phi = V_\infty R \cos \theta \quad (2.18)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2 \theta \quad (2.19)$$

2.4.4.2 Source plane ou puits

En un point du plan x, y , un écoulement radial, soit sortant soit entrant, correspond à un écoulement engendré soit par une source soit par un puits.

En utilisant les coordonnées polaires r, θ , centrées en un tel point, l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (2.20)$$

La nature radiale de l'écoulement implique que $v_\theta = 0$; par conséquent l'équation précédente se réduit à : $r v_r = cte$.

Ainsi la fonction de courant associée vérifie :

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (2.21)$$

$$r v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = cte = C$$

Avec pour résultat :

$$\Psi = C\theta \quad (2.22)$$

La constante C exprimée en fonction du débit Q de la source devient :

$$Q = 2\pi r v_r = 2\pi C.$$

Où Q est donnée par unité de longueur dans la direction \mathbf{k} ; ainsi Q s'exprime en m^2s^{-1} .

Le potentiel de la source est obtenu à l'aide de : $\vec{V} = \nabla \Phi$.

D'où :

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad (2.23)$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{C}{r}. \quad (2.24)$$

En résumé nous obtenons :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

(2.25)

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = 0$$

Les lignes de courant sont donc les rayons à $\theta = \text{constant}$, et les lignes équipotentielles les cercles $r = \text{constant}$.

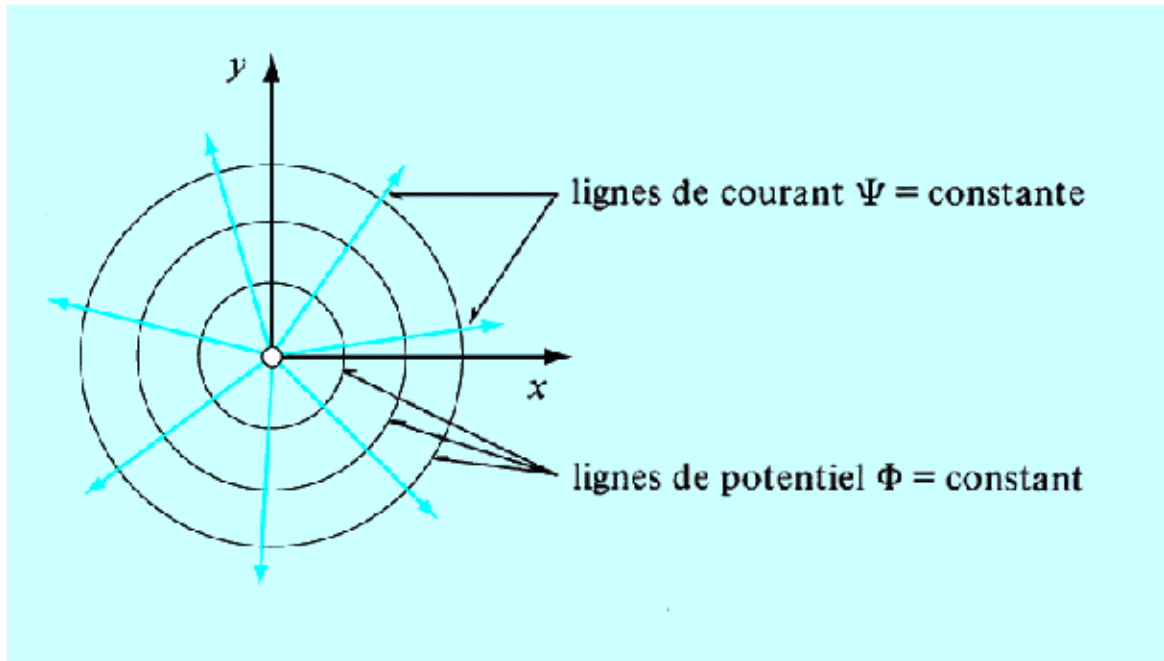


Figure 2.1. Source plane avec ses lignes de courant et de potentiel constants.

Si la source est située en un point $Q(a, b)$ dans le plan xy , r est alors la distance entre la source et un point $P(x, y)$ quelconque considéré, et l'angle θ défini l'angle entre r et l'axe des x .

On obtient dans ce cas :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a}$$

$$v_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$v_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(2.26)

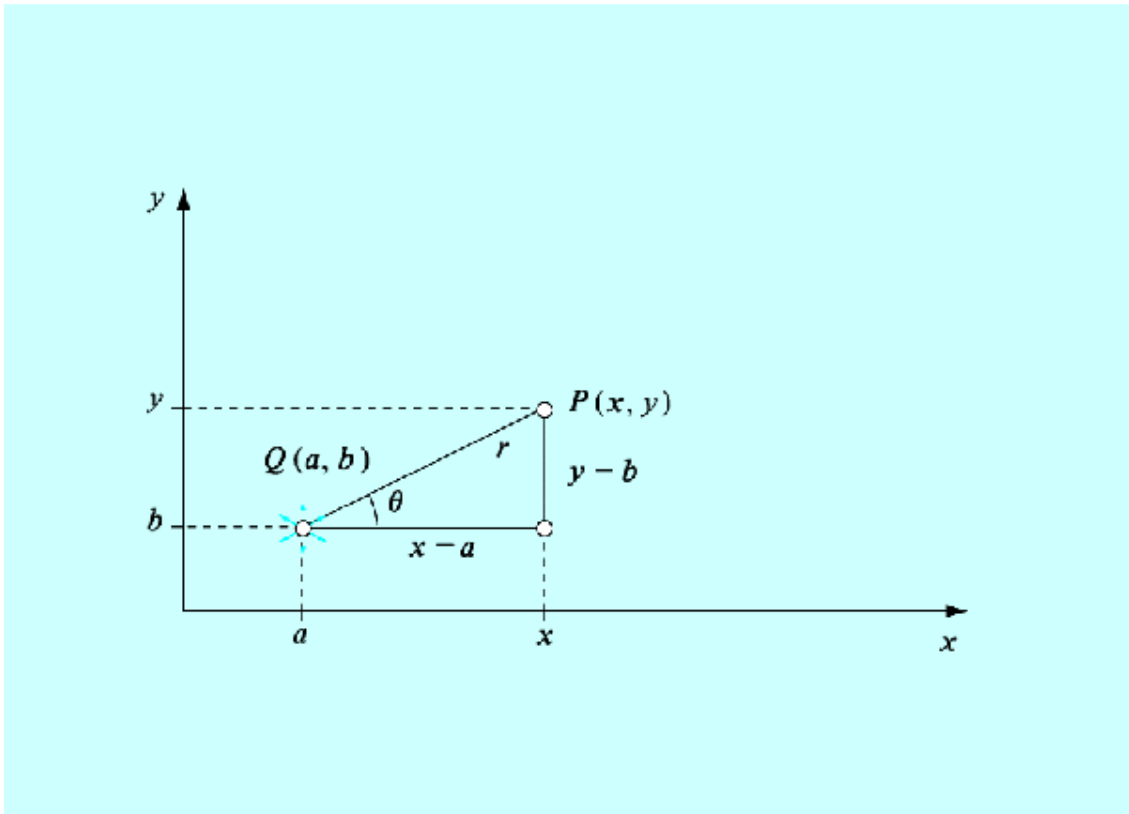


Figure 2.2. Source située au point $x = a, y = b$

2.4.4.3 Tourbillon ponctuel

Un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe z engendre un écoulement irrotationnel dans le plan (x, y) .

En utilisant les coordonnées polaires r, θ centrées au noyau du fil, nous pouvons donc écrire :

$$(\nabla \times v)_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = 0 \quad (2.27)$$

Où :

$$v_r = 0 \text{ et } r v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (2.28)$$

La fonction de courant et le potentiel de vitesse vérifient ainsi :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (2.29)$$

En résumé nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ v_r &= 0 \\ v_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Observons que Γ peut être positive ou négative : Si $\Gamma < 0$ et $v_\theta < 0$: Le tourbillon tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre. Par contre, si $\Gamma > 0$ et $v_\theta > 0$: Le tourbillon tourne en sens inverse.

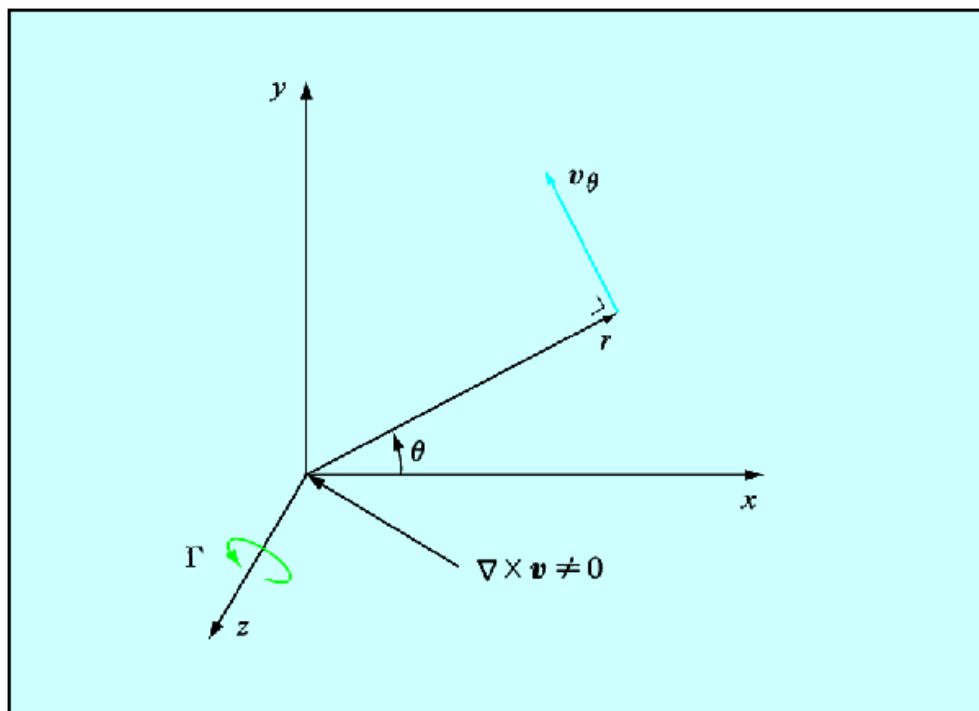


Figure 2.3. Fil tourbillonnaire:

$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ uniquement pour $x = y = 0$. A l'exception de ce point $\nabla \times \mathbf{v} = 0$

2.4.4.4 Doublet ou dipôle

Il s'agit ici d'une superposition d'une source d'intensité $+Q$ située au point (x', y') et d'un puits d'intensité $-Q$ situé au point $(x' - \Delta x', y')$.

Le potentiel Φ par rapport au point $P(x, y)$ devient alors :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \ln \left[(x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.31)$$

Le dipôle se définit par un passage aux limites tel que $\Delta x' \rightarrow 0$ et $Q \rightarrow \infty$ avec la condition :

$$Q\Delta x' \rightarrow \mu$$

Où μ est l'*intensité du dipôle* ; μ s'exprime donc en $\mathbf{m^3s^{-1}}$.

On obtient ainsi :

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \ln \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x-x'}{r^2} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.32)$$

Les composantes du vecteur vitesse deviennent :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (2.33)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2.34)$$

Et la fonction Ψ :

$$\Psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (2.35)$$

Un dipôle est donc caractérisé par sa direction et son orientation positive définie par les points consécutifs puits-sources.

Par conséquent en utilisant la notation vectorielle on écrit :

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_{axe}$$

Où \mathbf{e}_{axe} représente le vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe du dipôle.

Il s'en suit que le potentiel d'un dipôle devient :

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (2.36)$$

En résumé, pour un dipôle dirigé dans la direction de la figure ci-dessous on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \\ \Psi &= \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \\ v_r &= \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} \\ v_\theta &= \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2}\end{aligned}\quad (2.37)$$

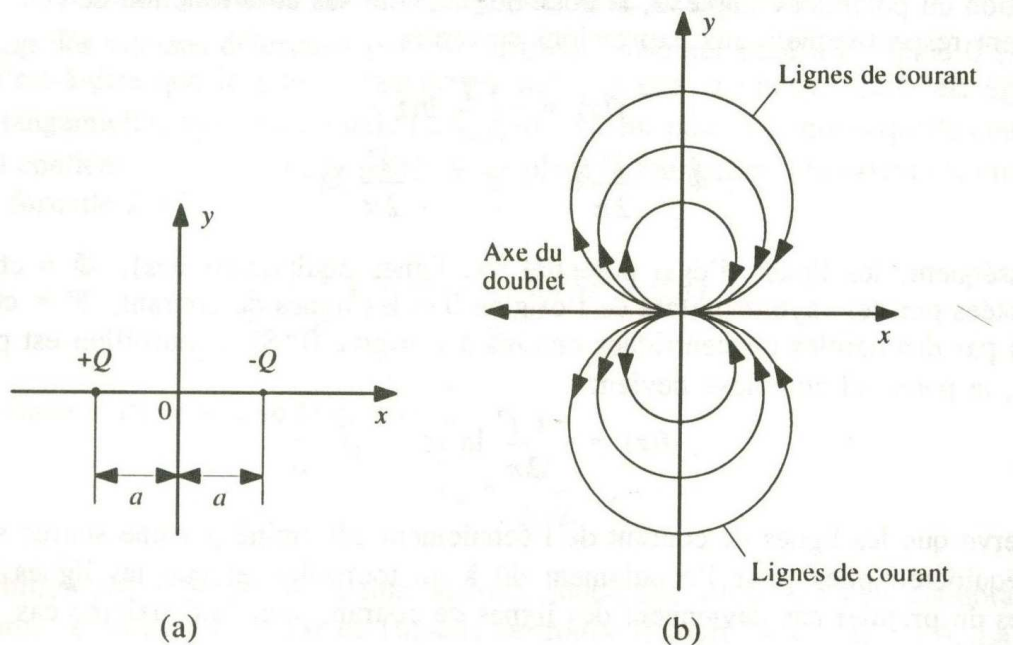


Figure 2.4. *Ecoulement déterminé par un doublet*

a) *Position des singularités*

b) *Ligne de courant et axe du doublet*

2.4.5 Méthode de superposition des écoulements ^[1]

2.4.5.1 Superposition d'une source plane et d'un écoulement uniforme

Considérons un écoulement uniforme de vitesse V_∞ et une source de débit Q placée à l'origine du système d'axes xOy . Conformément au principe de superposition de plusieurs singularités, ou écoulements simples.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_{\infty}x + \frac{Q}{2\pi} \ln r = V_{\infty}r \cos \theta + \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (2.38)$$

$$\Psi = V_{\infty}y + \frac{Q}{2\pi} \theta = V_{\infty}r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (2.39)$$

Cet écoulement correspond à l'écoulement autour d'un corps qui n'est pas un corps fermé. A l'infini ($\theta = 0$), les valeurs de y sur la partie supérieure et la partie inférieure sont :

$$y = \pm \frac{Q}{2V_{\infty}} \quad (2.40)$$

La vitesse totale est nulle au point d'arrêt $A(x_A, y_A)$ placé sur l'axe OX .

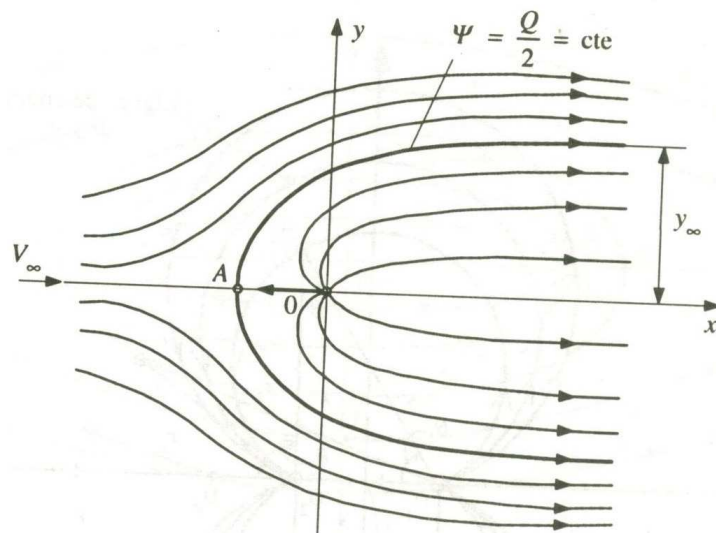


Figure 2.5. Source plane en écoulement uniforme

2.4.5.2 Superposition d'une source et d'un puits plans

Soit une source et un puits de même intensité, situés sur l'axe des x en des points symétriques : $x = -a$ pour la source et $x = +a$ pour le puits.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (2.41)$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

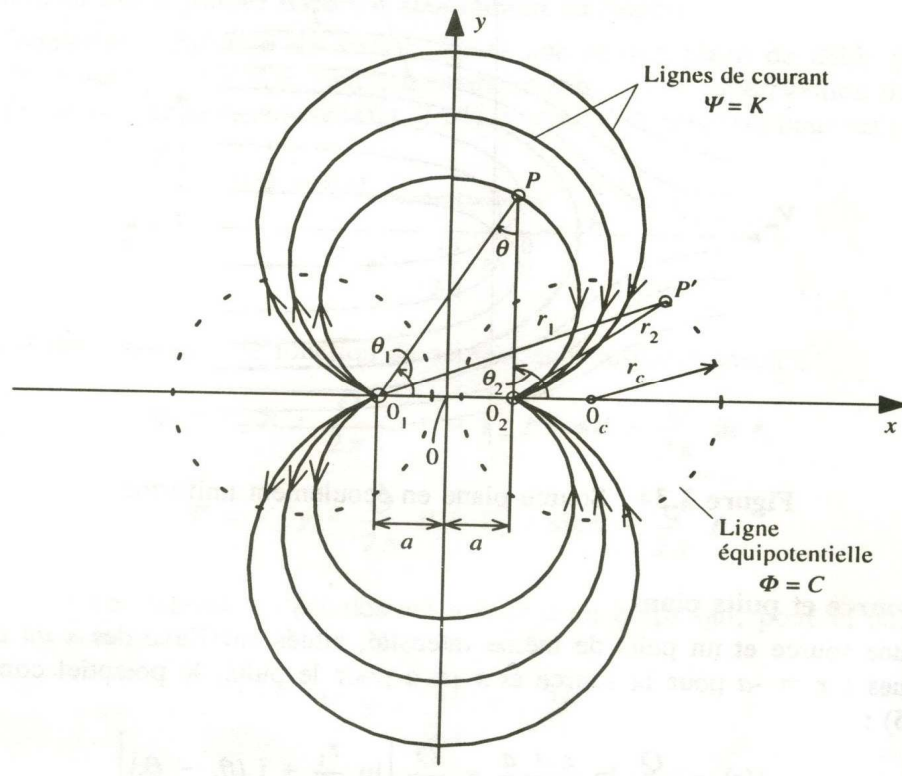


Figure 2.6. Source et puits plans

2.4.5.3 Superposition d'une source, d'un puits, et d'un écoulement uniforme

Soient une source d'intensité $+Q$ et un puits d'intensité $-Q$ situés sur l'axe des x en des points symétriques : $x = -a$ pour la source et $x = +a$ pour le puits, sur cet ensemble on superpose un courant uniforme de vitesse V_∞ .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty x + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (2.42)$$

$$\Psi = V_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Telle que : $\theta = \theta_2 - \theta_1$

La ligne de courant obtenue pour $\Psi = 0$ correspond au contour d'un cylindre ovale :

$$\theta = \frac{2\pi V_\infty y}{Q} \quad (2.43)$$

La vitesse est nulle aux points d'arrêt $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$.

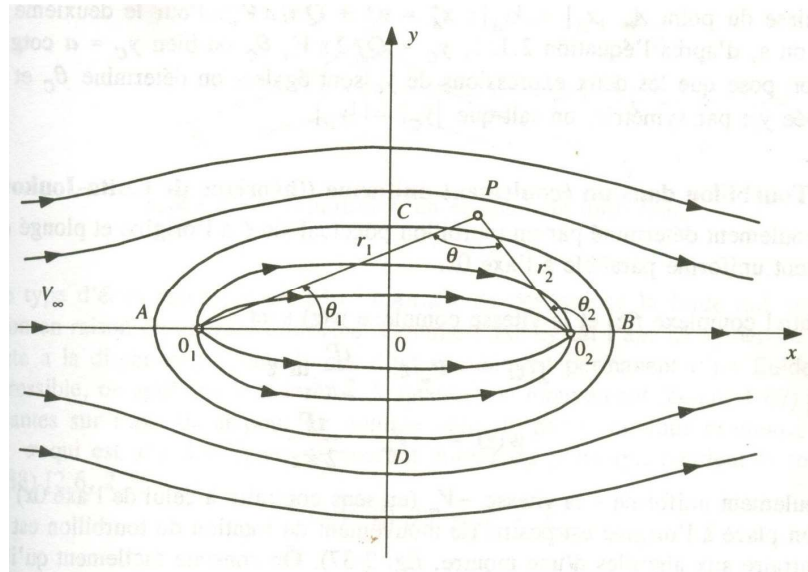


Figure 2.7. *Ecoulement autour d'un cylindre ovale*

2.4.5.4 Superposition d'un tourbillon et d'un écoulement uniforme

Considérons l'écoulement déterminé par un tourbillon ponctuel situé à l'origine et plongé dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle à l'axe Ox .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\begin{aligned}\Phi &= V_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \Psi &= V_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\end{aligned}\tag{2.44}$$

La vitesse est nulle au point d'arrêt $A(X_A, Y_A)$.

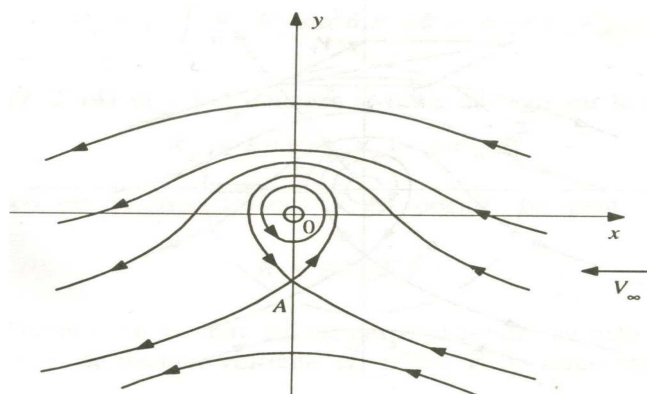


Figure 2.8. *Tourbillon en écoulement uniforme*

2.4.5.5 Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme (écoulement sans circulation autour d'un cylindre)

Soit un doublet positif m placé dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle a l'axe **Ox**.

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (2.45)$$

$$\Psi = V_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

A partir de la on peut tirer en coordonnées polaires la vitesse radiale et la vitesse tangentielle qui sont respectivement :

$$v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (2.46)$$

$$v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Lorsque $\Psi = 0$, on obtient le cercle de rayon a . L'écoulement extérieur correspond à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon a , qui se trouve dans un courant uniforme. Sur le cercle de rayon $r = a$, la vitesse radiale est nulle et la vitesse totale est égale à la vitesse tangentielle.

$$V = v_\theta = -2 V_\infty \sin \theta \quad (2.47)$$

Aux points d'arrêt ou $\theta = \pi$ et $\theta = 0$ la vitesse est nulle, elle est maximale aux ponts $A(\theta = \frac{\pi}{2})$ et $B(\theta = \frac{3\pi}{2})$.

On calcule ainsi le coefficient de pression :

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (2.48)$$

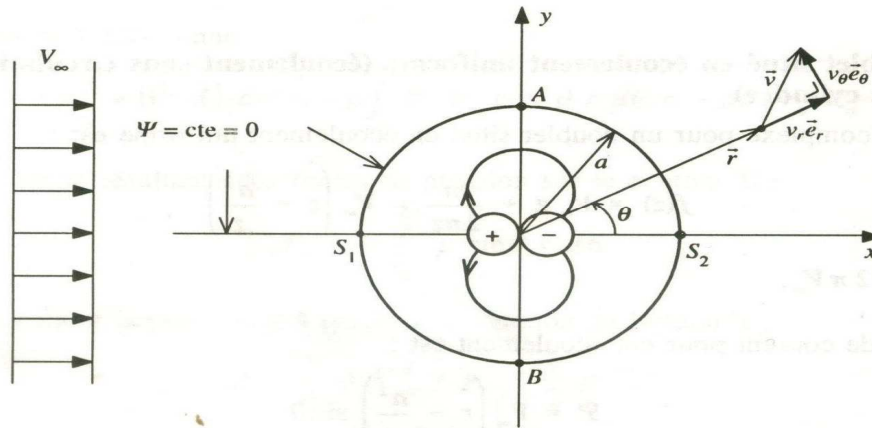


Figure 2.9. *Écoulement autour d'un cylindre dans un courant uniforme.*

2.4.5.6 Superposition d'un doublet, d'un écoulement uniforme et d'un tourbillon (écoulement avec circulation autour d'un cylindre)

Soient un doublet positif m et un tourbillon négatif $-\Gamma$ situés à l'origine (le mouvement de rotation du tourbillon se fait dans le sens des aiguilles d'une montre) placés dans un écoulement uniforme V_∞ parallèle à l'axe Ox .

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont respectivement :

$$\Phi = V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (2.49)$$

$$\Psi = V_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (2.50)$$

Pour $\Psi = \ln a$, on obtient un cercle de rayon a comme ligne de courant et l'écoulement correspond à l'écoulement autour du cylindre circulaire de rayon a avec la circulation Γ , on a d'autre part $\Psi = 0$ sur le cercle.

Les vitesses radiale et tangentielle sont respectivement :

$$v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (2.51)$$

$$v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.52)$$

Si $r = a$. On obtient :

$$v_r = 0 \quad (2.53)$$

$$v_\theta = -2 V_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (2.54)$$

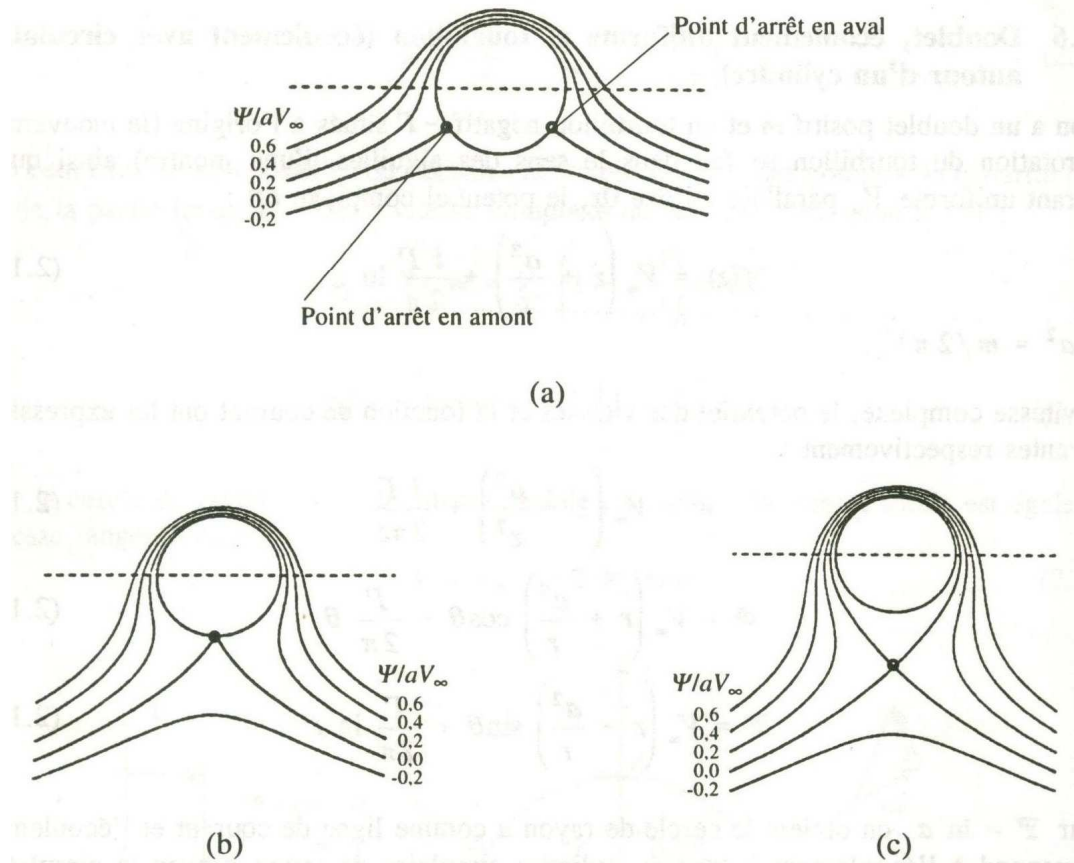


Figure 2.10. *Ecoulement avec circulation autour d'un cylindre*

a) $\Gamma/(aV_\infty) = 2.4\pi$

b) $\Gamma/(aV_\infty) = 4\pi$

c) $\Gamma = k4\pi aV_\infty$ avec $k = 1.225$

La vitesse totale est nulle aux points qui correspondent à :

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty a} \quad (2.55)$$

Pour $\Gamma < 4\pi V_\infty a$: On obtient deux points d'arrêt sur le cylindre.

Pour $\Gamma = 4\pi V_\infty a$: Les deux points coïncident et sont situés sur le cercle

en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Pour $\Gamma > 4\pi V_\infty a$: L'unique point d'arrêt se trouve dans le champ de l'écoulement extérieur au cylindre.

Le coefficient de pression sur le cylindre est :

$$C_{p,l} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty a}\right)^2 \quad (2.56)$$

2.5 PROFILS AERODYNAMIQUES EN REGIME SUBSONIQUE

2.5.1 Caractéristiques géométriques des profils ^[1]

On définit un profil aérodynamique comme étant le contour géométrique qu'on obtient par la coupe verticale d'une aile d'avion, d'une pale d'hélicoptère et d'une pale de turbine à gaz ou de turbine à vent.

La forme du profil est une caractéristique essentielle d'une aile et influe grandement sur les caractéristiques aérodynamiques et les performances d'un avion.

On définit les grandeurs géométriques suivantes d'un profil aérodynamique :

A	Bord d'attaque	c :	Longueur de la corde de référence
:			
B	Bord de fuite	d :	Position de la cambrure maximale du profil.
:			
AB	: Corde de référence du profil	f :	Cambrure maximale
AMB	: Extradados.	r :	Rayon du bord d'attaque
ANB	: Intrados	α :	Angle d'attaque (ou d'incidence géométrique par rapport à la vitesse de l'écoulement V_∞).
APB	: Ligne de cambrure du profil	τ :	Angle du bord de fuite

Le milieu des segments perpendiculaires à la corde de référence, tel MN , est appelé squelette du profil ou *ligne de cambrure moyenne*. On note f la plus grande ordonnée de la ligne de cambrure moyenne par rapport à AB . Le rapport f/c est dit *cambrure relative* et la valeur maximale du segment MN représente l'épaisseur maximale du profil, e_{max} . L'expression $e_{max}/c = t$ correspond à *l'épaisseur relative maximale*. Les profils classiques ont une épaisseur relative de 6 à 20 % située environ à $c/3$, la cambrure relative est de l'ordre de 6 à 8 % et d/e_{max} varie de 15 à 50 %. Sur la même figure apparaissent les forces aérodynamiques : L (la portance) et D (la traînée).

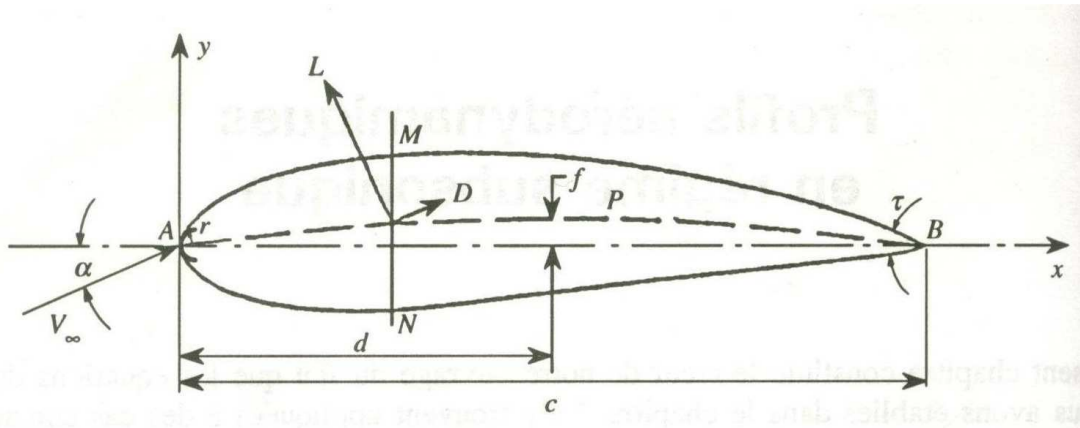


Figure 2.11. Caractéristiques géométriques d'un profil.

Différents types de profils aérodynamiques sont catalogués dans le monde. On notera, par exemple, les profils **Joukowski**, **Eppler**, **Wortmann**, **NACA**, **RAE**, **Gottingen**, **NLR**, **NASA/LRC** et **SANDIA**. Parmi ces derniers, les profils de type **NACA** sont connus, et on utilise certains couramment tant en pratique que pour la validation des méthodes numériques.

2.5.1.1 Profils de type NACA ^{[1][16][17]}

Le prédécesseur de la NASA était la **NACA** (*National Advisory Committee for Aeronautics*). Cet organisme a étudié différentes familles de profils répondant à diverses applications. Parmi ces dernières, il faut distinguer la famille de profils à **quatre chiffres**, celle à **cinq chiffres** et les profils **laminaires** portant la désignation **NLF**.

- **Famille de profils à quatre chiffres:** Dans cette famille, on identifie un profil par quatre chiffres : Le premier spécifiant la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indiquant la position de cette cambrure relative en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres représentent l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde.

Par exemple, dans le profil **NACA 2415**:

- Le 2 représente la cambrure relative maximale (2 %).
- Le 4 représente la position de la cambrure maximale (40 %).
- Le 15 représente l'épaisseur relative maximale (15 %).

Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante pour calculer la forme géométrique :

$$\pm y_t = \frac{t}{0,2} (0,2969\sqrt{x} - 01260x - 03537x^2 + 02843x^3 - 01015x^4) \quad (2.57)$$

Le rayon de courbure au bord d'attaque correspond à :

$$r = 1,1019t^2 \quad (2.58)$$

Où t représente l'épaisseur relative maximale du profil. à titre indicatif, on donne la variation du coefficient de traînée C_d en fonction de l'épaisseur relative pour un profil symétrie.

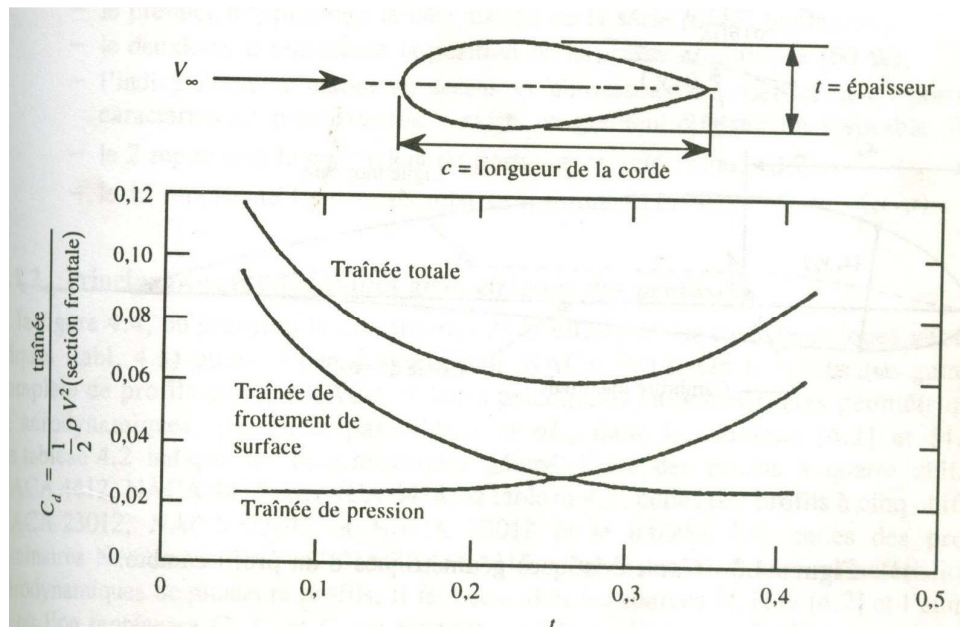


Figure 2.12. le coefficient C_d en fonction de l'épaisseur relative pour les profils symétriques de la famille de profils à quatre chiffres.

Dans le cas du profil cambré, la forme géométrique de la cambrure moyenne est représentée par deux paraboles:

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{y_A}{x_A} x(2x_A - x) & 0 \leq x \leq x_A \\ &= \frac{y_A}{(c - x_A)^2} (c - x)(c + x - 2x_A) & x_A \leq x \leq c \end{aligned} \quad (2.59)$$

Où le point **A** (x_A, y_A) situé à la distance où la flèche est maximale, représente le point commun des deux paraboles. Notons que y_A représente la cambrure maximale et que x_A en donne l'emplacement. Par exemple, pour **NACA 4412**, la cambrure maximale est de 4 % ($y_A = 0,04$) et se trouve à 40 % ($x_A = 0,4$). Les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur relative maximale, ici 12 %.

L'équation de la forme géométrique d'un profil cambré est donc :

- Partie de l'extrados :

$$\begin{aligned} x_e &= x - y_t \sin \theta \\ y_e &= y_c + y_t \cos \theta \end{aligned} \quad (2.60)$$

- Partie de l'intrados :

$$\begin{aligned} x_i &= x + y_t \sin \theta \\ y_i &= y_c - y_t \cos \theta \end{aligned} \quad (2.61)$$

On obtient y_t de l'équation du profil symétrique et θ présente l'angle de la pente de l'équation de y_c soit $\theta = dy_c / dx$.

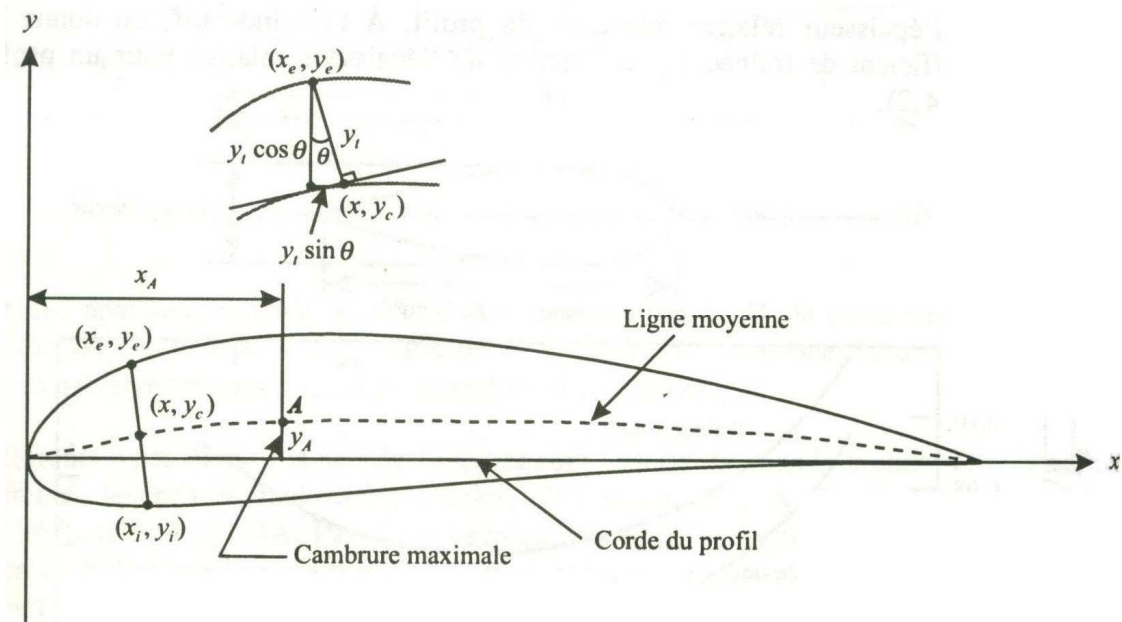


Figure 2.13. caractéristiques géométriques d'un profil cambré.

- **Famille de profils à cinq chiffres** : Dans cette famille, cinq chiffres caractérisent chaque profil.

Par exemple, dans le cas de **NACA 23015**:

- Le **2** représente le coefficient de portance caractéristique ($3/2 \times 0,2 = 0,3$).
- Le **30** représente la position de la cambrure maximale ($1/2 \times 30 = 15\%$).
- Le **15** représente l'épaisseur relative maximale (**15%**).

- **Famille de profils laminaires** : Le **NACA** a également étudié une série de profils dont l'écoulement est laminaire sur une majeure partie de sa surface et les a désignés par un ensemble de chiffres significatifs.

Par exemple, pour **NACA 66₂– 215** :

- Le premier **6** représente la désignation de la série (profil laminaire).
- Le deuxième **6** représente la position de la pression minimale (**60%**).
- L'indice **2** est la marge au-dessus et au-dessous du coefficient de portance caractéristique pour laquelle il existe un gradient de pression favorable **0,2**
- Le **2** représente le coefficient de portance caractéristique (**0,2**).
- Le **15** représente l'épaisseur relative maximale (**15%**).

2.5.1.2 Principales caractéristiques géométriques des profils [2.5]

A la *Figure 2.14*, on présente la distribution de la vitesse et les caractéristiques géométriques. ^{[16] [17]}

Pour un profil symétrique **NACA 0012**, on trouvera une gamme complète de profils de type NACA et leurs principales caractéristiques géométriques et aérodynamiques, présentées par **Abott** et **AI** (ANNEX B).

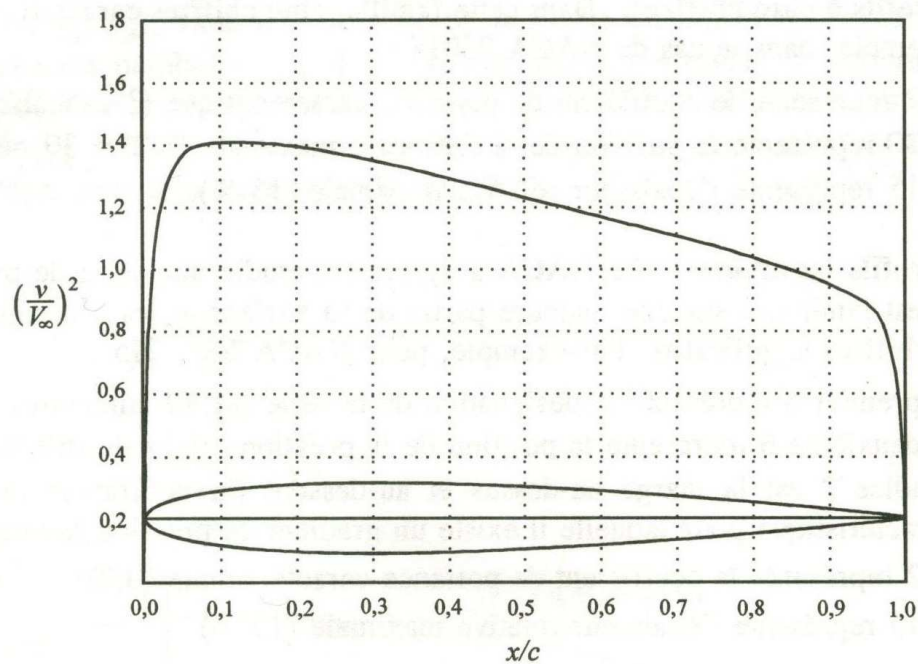


Figure 2.14. distribution de la vitesse sur un profil symétrique NACA0012.

2.5.2 Coefficient de pression ^[1]

On définit le coefficient de pression pour un profil aérodynamique à l'aide de la relation vue précédemment :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{(1/2) \rho V_\infty^2} \quad (2.62)$$

Où:

P = pression statique locale.

P_∞ = pression statique de l'écoulement non perturbé.

Avec un écoulement subsonique incompressible, si on utilise l'équation de Bernoulli, on peut écrire le coefficient de pression par rapport à la vitesse locale v sous la forme :

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.63)$$

La valeur maximale de v correspond à une valeur minimale de C_p .

En général, la distribution de la vitesse sur un profil aérodynamique provient de trois composantes :

- a) la distribution de la vitesse due à l'épaisseur, \mathbf{v} ;
- b) La distribution de la vitesse sur la ligne de cambrure $\Delta\mathbf{v}$.
- c) La distribution de la vitesse due à l'angle d'attaque $\Delta\mathbf{v}_\alpha$.

Par conséquent, dans le cas d'un profil dont l'épaisseur et la cambrure sont à un certain angle d'attaque, on obtient le coefficient de pression à l'aide de la formule plus complète :

$$C_p = 1 - \left(\frac{v}{V_\infty} \pm \frac{\Delta v}{V_\infty} \pm C_l \frac{\Delta v_\alpha}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.64)$$

Notons qu'en général, les valeurs $\Delta v_\alpha / V_\infty$, sont tabulées pour $C_l = 1.0$ et que les signes positifs et négatifs correspondent respectivement aux valeurs sur l'extrados et sur l'intrados du profil. Evidemment, pour les profils symétriques, $\Delta\mathbf{v}$ est égal à 0 et l'équation (2.64) s'en trouve simplifiée.

2.5.3 Coefficient de moment de tangage ^{[1] [9] [15]}

Il est donné par l'expression suivante :

$$C_M(\alpha) = C_{M0} + x/c C_l(\alpha)$$

Où:

C_{m0} : Coefficient de moment de tangage à portance nulle

x : Bras de levier de la portance

C : Corde du profil

$C_l(\alpha)$: Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence

Il est clair à partir de ce qui vient d'être dit sur le coefficient de moment de tangage à portance nulle, que pour un profil symétrique le C_{M0} est nul. Notons cependant que ce dernier prend une valeur négative lorsqu'il s'agit d'un profil cambré.

Il faut noter aussi que le centre aérodynamique se situe généralement au quart de la corde à partir du bord d'attaque pour les écoulements subsoniques. Le coefficient de moment de tangage prend alors la forme suivante :

$$C_M(\alpha) = C_{M0} + 0.25 C_l(\alpha)$$

2.5.4 Condition de Kutta ^[1]

Une analyse approfondie montre qu'on peut avoir une infinité de solutions pour l'intensité de la circulation γ , de sorte que le potentiel total de l'écoulement, Φ , satisfait aux conditions de continuité, d'irrotationnalité et de l'écoulement tangent pour un profil en écoulement stationnaire à un angle d'attaque donné. De toute évidence, ces conditions sont insuffisantes pour déterminer une solution unique de la circulation, ce qui permettrait de calculer ensuite la portance et le moment (dans le cas précis d'un fluide parfait incompressible). Il devient nécessaire de poser une condition supplémentaire pour obtenir une valeur unique de Γ qui corresponde à un profil donné et à un angle d'attaque donné. Cette condition provient de l'étude de l'écoulement autour du bord de fuite observé pour la première fois par le mathématicien allemand **Wilhelm Kutta** en 1902 et qui permet de trouver une valeur unique de la circulation au bord de fuite du profil.

Afin d'examiner l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, nous tiendrons compte de deux formes différentes pour la géométrie du bord de fuite du profil et nous exprimerons la condition de **Kutta** comme suit :

- a) Pour un profil se terminant par un dièdre (*Figure 2.15.a*) : Le bord de fuite lui-même est un point d'arrêt. Soient les vitesses de l'écoulement au bord de fuite, **BF** : \mathbf{v}_e tangente à l'extrados et \mathbf{v}_i tangente à l'intrados ; on a deux vitesses de directions différentes en un même point **BF**, ce qui n'est possible que si les deux vitesses sont nulles et que le point **BF** est un point d'arrêt : C'est-à-dire : $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.
- b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement (*Figure 2.14.a*) : La vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie. Dans ce cas, les vitesses \mathbf{v}_e et \mathbf{v}_i ont la même direction au point **BF** et ont toutes deux une valeur finie.

Cependant, la pression au bord de fuite a une valeur unique P_{BF} et l'équation de **Bernoulli**, appliquée à l'extrados du profil à proximité du bord fuite, conduit à :

$$P_{BF} + \frac{1}{2} \rho v_e^2 = P_{BF} + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (2.65)$$

Il en résulte que $v_e = v_i$.

De l'étude de l'écoulement au bord de fuite d'un profil, on peut tirer deux remarques importantes :

- a) La vitesse doit prendre des valeurs finies au bord de fuite ;
- b) L'écoulement quitte le profil au bord de fuite, et ce selon la bissectrice de l'angle du bord de fuite.

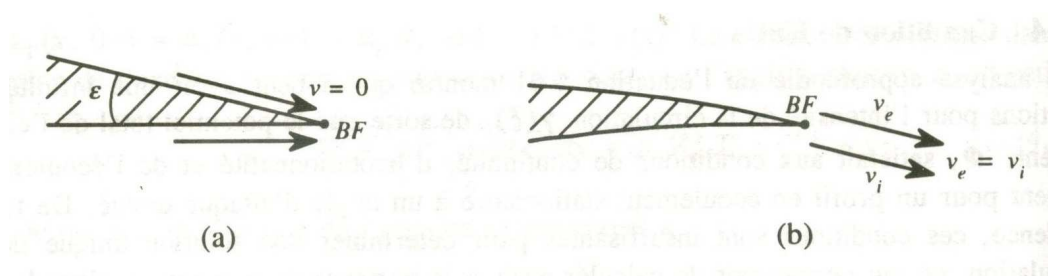


Figure 2.15. Condition de Kutta

a) Pour un profil se terminant par un dièdre.

b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement.

Dans le cas d'un profil mince, la condition de Kutta se traduit par le fait que l'intensité tourbillonnaire doit prendre une valeur nulle au bord de fuite $\gamma(BF) = \gamma(c) = 0$, quelle que soit la géométrie du profil à cet endroit.

2.6 PRESENTATION DES METHODES DES PANNEAUX ^{[1] [6] [12]}

La théorie du profil mince donne des résultats acceptables pour les coefficients de portance et de moment, mais elle ne tient pas compte de l'effet de l'épaisseur du profil sur les coefficients aérodynamiques. Suivant cette théorie, la pression aux points d'arrêt n'est pas valable, c'est pour cette raison qu'on a établi des méthodes plus exactes, basées sur une distribution de singularités (sources, tourbillons, doublets) non pas sur la corde, mais sur la surface du profil. Ce sont les méthodes des panneaux. ^[2.3]

2.6.1 Méthode de Hess & Smith

Cette méthode élaborée par Hess et Smith en 1966 consiste tout d'abord à diviser le profil en un certain nombre de panneaux afin d'en approcher le mieux possible le contour réel. On modélise ensuite l'écoulement à l'aide de sources et de tourbillons distribués sur chaque panneau. Ensuite, les conditions de tangence et de *Kutta*, nous permettent de déterminer l'intensité de ces singularités. Puis, une fois celles-ci connues, on peut calculer la vitesse, et, par conséquent, le coefficient de pression en tout point de la surface, ainsi que la distribution de l'angle d'attaque en fonction de l'angle d'incidence du profil.

Pour un écoulement irrotationnel, le potentiel total autour du profil correspond à l'équation suivante :

$$\Phi = \Phi_{\infty} + \Phi_s + \Phi_v \quad (2.66)$$

Avec :

Φ_{∞} = Potentiel de l'écoulement uniforme.

Φ_s = Potentiel d'une distribution de source $q(s)$ par unité de longueur.

Φ_v = potentiel d'une distribution de tourbillon d'intensité $\gamma(s)$.

Hess et Smith ont posé les conditions suivantes : l'intensité des sources est constante sur chacun des panneaux mais varie d'un panneau à l'autre, tandis que l'intensité des tourbillons est la même sur tous les panneaux. Donc sur un panneau i ,

$$q(s) = q_i \text{ tandis que } \gamma(s) = \gamma$$

La discrétisation se fait de la façon suivante:

- On remplace le profil par un polygone a N cotés en divisant la surface du profil en un certain nombre de panneaux en commençant par le bord de fuite, le choix d'une soixantaine de panneaux donne une assez bonne précision, pour cela on choisit un grand nombre de panneaux au bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire la où la courbure est la plus importante et on utilise une distribution sinusoïdale des panneaux telle que :

$$x_i = c/2 * (1 - \cos \theta_i), \quad \theta_i = i \Delta\theta.$$

L'incrément $\Delta\theta$ est fonction du nombre de panneaux tel que $\Delta\theta = 2\pi/N$.

De telle sorte que le potentiel résultant devient:

$$\Phi = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{i=1}^N \int_{\text{panneau } i} \left[\frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds \quad (2.67)$$

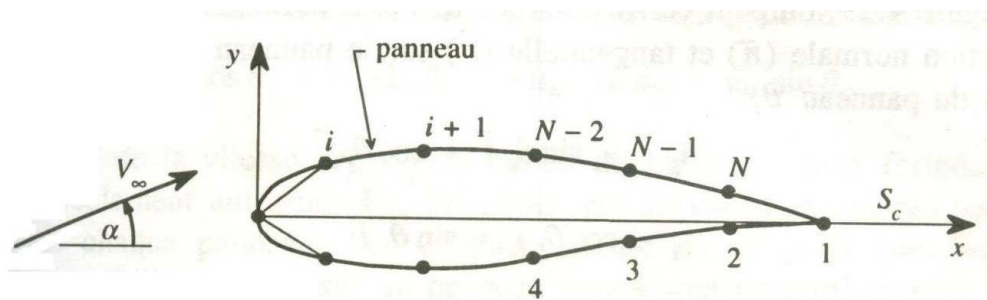


Figure 2.16. Notation des panneaux sur le profil.

Il y a donc $N+1$ inconnues dans ce problème :

- Les N valeurs de q_i aux points de contrôle
- La valeur de γ pour le tourbillon au point de contrôle.

Avant d'effectuer les calculs, on doit préciser les conditions aux frontières :

Tout d'abord, on considère que les points de contrôle sont situés au centre des panneaux. Puis on impose la condition de tangence entre les panneaux, ce qui donne une vitesse normale à la surface des panneaux nulle. Ensuite, la condition

de Kutta établit que les vitesses tangentielles du premier et du dernier panneau sont égales.

L'ensemble de ces conditions permet de déterminer les inconnues de départ, c'est-à-dire l'intensité des sources et des tourbillons.

Une fois le champ de vitesse connu, on peut en déduire le coefficient de pression sur chaque panneau. Puis le coefficient de portance est calculé à l'aide de la relation de ***Kutta-Joukowski***.

La méthode de Hess et Smith présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de Kutta génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des contributions individuelles de chaque panneau. La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, à déterminer les vitesses tangentielles, cependant c'est une méthode qui fournit de bons résultats en 2 dimensions comme en 3 dimensions.

2.6.2 Fondements théoriques des méthodes de panneaux (Identité de Green)

Bien que les méthodes de panneaux aient été découvertes par le biais d'une approche intuitive, les fondements mathématiques de ces méthodes reposent sur *l'identité de Green*.

Cette identité permet de calculer la valeur du potentiel en tout point du champ concerné, en autant qu'on connaisse les conditions aux limites. La surface en question ne doit cependant contenir aucune singularité. Etant donné que les singularités sont distribuées à la surface du profil, examinons le champ décrit à la figure 1.6.

L'identité de Green s'exprime comme suit :

$$\Phi_p = \int_S [(\vec{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s - \Phi (\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s)] dS \quad (2.68)$$

Où Φ_s est le potentiel créé par une source unitaire en deux dimensions :

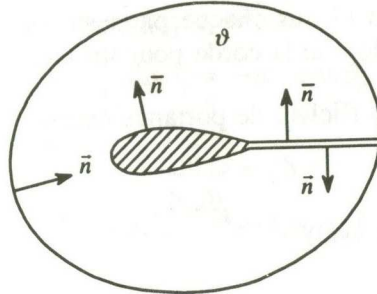


Figure 2.17. Surface représentative à l'intérieur de laquelle l'identité de Green est applicable

La première intégrale de cette équation, $\int_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) \Phi_s dS$, correspond à l'influence au point P d'une distribution de sources sur la surface S et $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi)$ représente la vitesse normale à la paroi. Dans le cas présent cette vitesse est nulle, car il faut satisfaire à la condition de tangence des vitesses.

Par conséquent, ce premier terme est nul, dans la seconde partie, $-\int_S \Phi (\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS$, on peut montrer que le terme $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s)$ correspond l'influence d'un doublet (fig. 2.17).

Ce terme représente le taux de changement de Φ_s selon la direction \vec{n} .

Si Φ_1 et Φ_2 sont les valeurs de potentiel à Q_1 et Q_2 alors :

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta} \quad (2.69)$$

Dans la présente situation, on peut interpréter Φ_1 et Φ_2 comme une source et un puits d'intensité élémentaire. La limite indiquée dans l'équation (2.69) correspond donc, par définition, à l'influence d'un doublet. **Moran** propose une relation pour la contribution de la surface S_∞ au point P :

$$\Phi_\infty = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha)$$

Où α représente l'angle d'attaque (l'incidence) du profil. Dès lors, on peut réécrire l'identité de Green comme suit :

$$\phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B + S_C} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS \quad (2.70)$$

Equation qu'on peut discrétiser en utilisant la méthode de panneaux de la même façon que dans l'équation (2.67).

Les paramètres S_B et S_C représentent les surfaces du corps (ou du profil) et la surface du sillage respectivement.

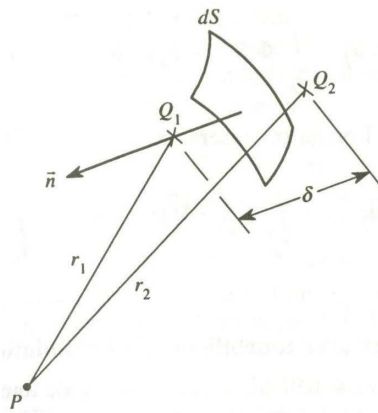


Figure 2.18. Interprétation du second terme comme une distribution de doublets

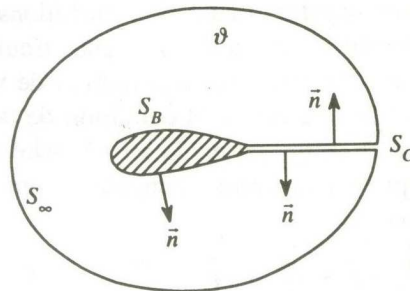


Figure 2.19. Notation des domaines pour l'identité de Green

Remarque : il existe deux manières différentes de calculer le champ des vitesses à l'aide des méthodes de panneaux : on peut, soit utiliser le potentiel total, soit avoir recours à Φ , qui représente le potentiel de perturbation.

Dans la deuxième méthode, on aurait : $V = V_\infty + \nabla \phi$ et la contribution de S_∞ serait nulle : On aurait alors : $\vec{n} \cdot \nabla \Phi = -\vec{n} \cdot V_\infty$.

En ce qui concerne la surface du sillage, S_C , on peut l'interpréter comme une surface simple, après avoir posé :

$$\Delta\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$$

Où : Φ^+ = valeur de Φ du côté de S_C (\vec{n} pointe vers le fluide)

Φ^- = valeur du côté opposé.

On obtient alors :

$$\Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS - \int_{S_C} \Delta\Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS \quad (2.71)$$

Où : Φ est le potentiel total.

Lorsqu'on insère la circulation Γ dans l'équation, cette dernière devient :

$$\Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS - \Gamma \int_{S_C} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s dS \quad (2.72)$$

2.6.3 Méthode des panneaux avec tourbillon par formulation de vitesse

Fondements mathématiques : la méthode des panneaux avec tourbillon par formulation de vitesse vient de **Mavriplis**, qui l'a présentée en **1971**. Elle est basée sur le principe de superposition de solutions élémentaires consistant à distribuer des tourbillons sur la surface du corps à analyser. Comme avec la méthode de **Hess** et **Smith**, on fait une approximation du profil à l'aide d'un ensemble de lignes droites que l'on nomme panneaux. On détermine la solution en distribuant des tourbillons sur la surface du corps plongé dans un écoulement uniforme avec un écoulement circulaire. Pour ce type de représentation, **Martensen** a démontré que la condition de vitesse tangentielle nulle sur la surface interne du corps, est équivalente à la condition de tangence, et que la vitesse tangentielle sur la surface externe du corps est égale à l'intensité des tourbillons. A partir de ces observations, on peut exprimer la vitesse tangentielle en un point intérieur de la surface du corps de la façon suivante :

$$V_{tP} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{t} + \frac{\omega}{2} + \int_{SB} \gamma \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v dS \quad (2.73)$$

Où :

$\omega/2$ = vitesse induite par l'écoulement circulaire

γ = intensité des tourbillons sur la surface.

\vec{t} = tangente au point P

$(\vec{t} \cdot \nabla \phi_v)$ = taux de changement de Φ_v selon la direction \vec{t} .

Puisque le point P est un point de la surface interne du corps, la vitesse tangentielle est égale à zéro et l'équation (2.73) devient :

$$0 = \vec{V}_\infty \vec{t} + \frac{\omega}{2} + \int_{SB} \gamma \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v dS \quad (2.74)$$

On cherche donc la distribution γ et l'écoulement circulaire $\omega/2$ qui satisfont à l'équation (2.74) pour tous les points de la surface du corps. Une fois qu'on a déterminé la distribution γ , on sait que la vitesse tangentielle en un point P de la surface externe du corps est égale à l'intensité du tourbillon à cet endroit.

Discrétisation : la discrétisation de la surface du corps se fait de la même façon qu'avec la méthode de **Hess** et **Smith** : On pose que la distribution du tourbillon est constante sur chaque panneau, mais varie d'un panneau à un autre. Si on a N panneaux, on obtient ainsi $(N+1)$ inconnues, soit les N valeurs de γ_j et la valeur de ω . Pour obtenir le nombre d'équations nécessaires, on doit appliquer l'équation (2.74) aux N points de contrôle qui sont situés au centre de chaque panneau.

L'équation (2.74) devient alors :

$$0 = \vec{V}_\infty \vec{t} + \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \vec{t} \cdot \nabla \phi_v dS \quad (2.75)$$

Après qu'on a trouvé la valeur de l'intégrale on obtient (Figure 2.20):

$$0 = \vec{V}_\infty \vec{t} + \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \gamma_j A_{P,j} \quad (2.76)$$

Où :

$$A_{P,j} = \frac{1}{2\pi} \left[\begin{array}{l} \beta_{P,j} (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \\ + \ln \frac{r_{P,j+1}}{r_{P,j}} (\sin \theta_p \cos \theta_j - \cos \theta_p \sin \theta_j) \end{array} \right] \quad (2.77)$$

$$r_{P,j} = \sqrt{(x_p - x_j)^2 + (y_p - y_j)^2} \quad (2.78)$$

$$\beta_{P,j} = \arctg \left[\frac{(y_p - y_j)(x_{j+1} - x_p) - (y_p - y_{j+1})(x_j - x_p)}{(y_p - y_j)(y_p - y_{j-1}) + (x_j - x_p)(x_{j+1} - x_p)} \right] \quad (2.79)$$

L'équation 2.76 devient un système d'équations algébriques linéaires lorsqu'on l'applique aux points de contrôle i situés au centre des panneaux. On obtient un système de N équations à $(N+1)$ inconnues que l'on peut noter de la façon suivante :

$$-\bar{t} V_\infty = \frac{\omega}{2} + \sum_{j=1}^N \gamma_j A_{i,j} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.80)$$

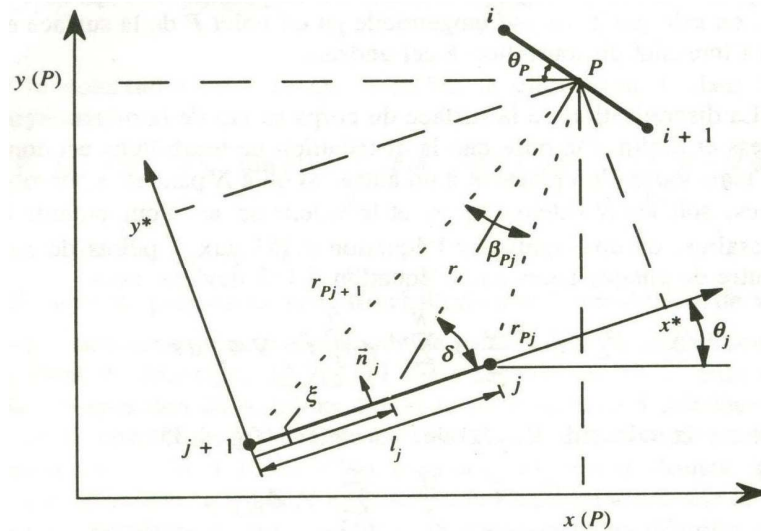


Figure 2.20. Notation sur un panneau :

Méthode de panneaux avec tourbillon par formulation de vitesses et de ligne de courant.

Il est important de noter que lorsque $i = j$, l'expression (2.77) n'est plus valable. Dans ce cas, le coefficient $A_{i,i}$ est égale à $-1/2$. Il manque une seule équation et elle provient encore une fois de l'application de la condition de **Kutta** au bord de fuite. Comme dans le cas de la méthode de **Hess** et **Smith**, on applique numériquement cette condition en posant que les vitesses tangentielles sont égales aux points de contrôle adjacents au bord de fuite, c'est-à-dire aux points $i = 1$ et $i = N$. Comme ces vitesses tangentielles sont égales à l'intensité des tourbillons en ces points, l'équation de la condition de **Kutta** est très simple et exprimée comme suit :

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (2.81)$$

L'équation (2.80) et l'équation (2.81) forment un système de $(N+1)$ équations et $(N+1)$ inconnues que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.82)$$

Où **[A]** est la matrice des coefficients d'influence de dimension **(N+1)** sur **(N+1)**.

On peut trouver les coefficients de **[A]** à l'aide de la relation (2.77).

Les autres coefficients sont :

$$A_{i,i} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{2}$$

et

$$A_{N+1,j} = 0 \quad \text{sauf} \quad A_{N+1,1} = A_{N+1,N} = 1$$

Le vecteur **{x}** est le vecteur inconnu de dimension **(N+1)** et formé de:

$$x_i = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.83)$$

$$x_{N+1} = \omega \quad (2.84)$$

Le vecteur **{b}** est le vecteur constant qu'on détermine ainsi:

$$b_i = -V_\infty \cos(\alpha - \theta_j) \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.85)$$

$$b_{N+1} = 0 \quad (2.86)$$

Alors qu'on résout le système 2.82, il est possible de déterminer directement les vitesses tangentielles aux points de contrôle, exprimées de la façon suivante:

$$V_{t,i} = \gamma_i \quad (2.87)$$

Les coefficients de pressions aux points de contrôles ont comme expression la relation 2.63.

Le coefficient de portance s'exprime d'une façon tout à fait similaire à l'équation 2.67 La seule différence est que l'intensité des tourbillons varie d'un panneau à un autre.

Le coefficient de portance devient donc :

$$C_l = \frac{2}{V_\infty c} \sum_{j=1}^N \gamma_j l_j \quad (2.88)$$

2.6.4 Méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de ligne de courant

Fondements mathématiques : la formulation de ligne de courant se base également sur le principe de superposition des solutions élémentaires et utilise encore le tourbillon. La différence réside dans l'équation intégrale, qui n'exprime pas la vitesse tangentielle comme dans l'article 6.3, mais plutôt la ligne de courant. Cette formulation utilise toutefois le fait que la vitesse tangentielle en un point du corps est égale à l'intensité des tourbillons, ce qui équivaut à appliquer la condition de tangence puisqu'on spécifie que la vitesse tangentielle sur la surface interne est égale à zéro. Cette hypothèse est très avantageuse car elle permet d'obtenir facilement les caractéristiques de l'écoulement. La fonction de courant générée par une distribution de tourbillons sur la surface d'un corps plongé dans un écoulement uniforme est la suivante :

$$\Psi_P = \Psi_\infty + \int_{S_B} \gamma \Psi_v dS \quad (2.89)$$

La fonction de courant d'un écoulement uniforme prend la forme :

$$\Psi_\infty = V_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad (2.90)$$

Et celle d'un tourbillon unitaire correspond à :

$$\Psi_v = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (2.91)$$

On obtient l'équation :

$$\Psi_P = V_\infty (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \gamma \ln r dS \quad (2.92)$$

Qui exprime la fonction de courant en un point **Q** quelconque. Or, la fonction de courant est constante tout le long du corps et on a donc, pour tout point **P** sur le corps :

$$\Psi_P = \Psi_B \quad (2.93)$$

Comme avec la formulation des vitesses (art. 6.3), on cherche une distribution γ telle que la fonction de courant sera constante tout le long de la surface du corps.

Discrétisation: la discrétisation de l'intégrale de surface de l'équation 2.92 se fait de façon similaire aux méthodes précédentes. On procède d'abord à une

approximation du corps des panneaux sur lesquels on pose que la distribution de tourbillons est constante mais qu'elle varie d'un panneau à un autre.

L'équation 2.92 devient, en conséquence :

$$\Psi_B = V_\infty (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \ln r \, dS \quad (2.94)$$

Avec la division de la surface en N panneaux, on obtient $(N+1)$ inconnues, soit les N valeurs de γ , que l'on note γ_i , et la valeur de Ψ_B .

Après avoir trouvé la valeur de l'intégrale, l'équation 2.94 devient (fig. 2.20) :

$$\Psi_B = V_\infty (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N A_{P,j} \gamma_j \quad (2.95)$$

Où:

$$A_{P,j} = \frac{l_j}{2\pi} [\ln r_{P,j+1} - 1] + \frac{x^*}{2\pi} \ln \frac{r_{P,j}}{r_{P,j+1}} + \frac{y^*}{2\pi} \beta_{P,j} \quad (2.96)$$

$$x^* = (x_P - x_j) \cos \theta_j + (y_P - y_j) \sin \theta_j \quad (2.97)$$

$$y^* = -(x_P - x_j) \sin \theta_j + (y_P - y_j) \cos \theta_j \quad (2.98)$$

On détermine les paramètres $r_{P,j}$ et $\beta_{P,j}$ aux moyens des équations 2.78 et 2.79.

Lorsque le point P est situé au centre du panneau j , alors :

$$A_{P,j} = \frac{l_j}{2\pi} \left[\ln \frac{l_j}{2} - 1 \right] \quad (2.99)$$

On obtient un système de N équations linéaires lorsqu'on applique l'équation 2.95 au centre de chaque panneau c'est-à-dire lorsque le point P devient le point de contrôle i pour $i=1, 2, \dots, N$. la $(N+1)$ équation nécessaire provient encore une fois de l'application de la condition du **Kutta** au bord de fuite. Elle s'exprime sous la même forme qu'a l'article 6.3. Le système d'équations ainsi obtenu peut prendre la forme matricielle suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.100)$$

Où $[A]$ est la matrice des coefficients d'influences. On trouve les coefficients $A_{i,j}$ à l'aide des équations 2.96 et 2.99 selon le cas, pour $j < N+1$ et $A_{i,N+1} = -1$. Les coefficients de la $(N+1)$ équation sont tous nuls sauf $A_{N+1,1} = A_{N+1,N} = 1$. Le vecteur inconnu $\{x\}$ est le suivant :

$$x_i = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.101)$$

$$x_{N+1} = \Psi_c \quad (2.102)$$

Le vecteur constant $\{b\}$ est :

$$b_i = -V_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad (2.103)$$

$$b_{N+1} = 0 \quad (2.104)$$

Lorsqu'on résout le système de l'équation 2.100 on utilise l'équation 2.87 pour obtenir directement les vitesses tangentielles. L'équation 2.63 permet d'obtenir les coefficients de pression et la relation 2.77 donne la valeur du coefficient de portance.

2.6.5 Méthode de panneaux avec doublets constants par formulation du potentiel

Fondements mathématiques : la méthode des panneaux avec doublets constants par formulation du potentiel utilise la théorie des fonctions de Green pour obtenir l'équation intégrale. Elle résulte du travail de *Morino* et *Kuo* et se base sur la solution de l'équation intégrale 1.23.

Discrétisation : le profil est, comme avec les méthodes précédentes, représenté par un ensemble de panneaux. De plus, le potentiel, correspondant à l'intensité des doublets, est constant sur chaque panneau et varie d'un panneau à un autre. On obtient donc N inconnues correspondant aux potentiels Φ_i ; $i = 1, 2, \dots, N-1, N$. On peut exprimer la circulation de la façon suivante :

$$\Gamma = \Phi_N - \Phi_1 \quad (2.105)$$

Où : Φ_N = potentiel sur le panneau N .

Φ_1 = potentiel sur le panneau 1.

A la suite de cette discrétisation, l'équation 1.23 devient :

$$\begin{aligned} \Phi_p = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_0^{l_j} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s \, dS \\ - (\Phi_N - \Phi_1) \int_c^\infty \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s \, dS \end{aligned} \quad (2.106)$$

On retrouve dans cette équation linéaire algébrique N inconnues, soit les potentiels Φ_j sur tous les panneaux. Il est important de remarquer qu'on a une inconnue de moins que dans toutes les méthodes précédentes. On n'a donc besoin que de N équations, qui proviennent de l'application de l'équation 2.106 au centre de tous les panneaux.

On obtient ainsi un système de N équations linéaires et N inconnues :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.107)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,1} - \delta_{i,1} - \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N+1} & \text{si } j=1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N} - \delta_{i,N} - \frac{1}{2\pi} \beta_{i,N+1} & \text{si } j=N \\ &= \frac{1}{2\pi} \beta_{i,j} - \delta_{i,j} & \text{autrement} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$b_{i,j} = -\vec{V}_\infty (\bar{x}_i \cos \alpha + \bar{y}_i \sin \alpha) \quad (2.109)$$

Le vecteur inconnu de dimension N contenant les Φ_i est $\{x\}$, le symbole de **Kronecker** est $\delta_{i,j}$ et le paramètre $\beta_{i,j}$ est défini par l'équation 2.79.

De plus, on a :

$$\beta_{i,N+1} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{y}_i}{c - \bar{x}_i} \right] \quad (2.110)$$

Où \bar{x}_i et \bar{y}_i sont les coordonnées du point de contrôle i situé au centre du panneau i . En raison de la discontinuité du potentiel d'un panneau à l'autre, les panneaux voisins contribuent à créer des tourbillons en chacun des nœuds dont l'intensité, par exemple au nœud i , correspond à la différence $\Phi_1 - \Phi_{i-1}$. Cependant, le panneau 1 et le panneau N font naître des tourbillons dont l'intensité est respectivement Φ_1 et Φ_N , de telle sorte que le tourbillon au nœud du bord de fuite

s'annule avec celui du panneau ($N+1$) se trouvant sur la surface du sillage S_c . Cette remarque permet d'affirmer que la vitesse est continue au bord de fuite et, par conséquent, la condition de **Kutta** trouve une solution implicite dans cette formulation. On peut résoudre le système d'équations 2.63 directement : On obtient ainsi les potentiels au centre de tous les panneaux. Pour en déduire les vitesses tangentielles, on doit dériver les potentiels.

On obtient ainsi l'équation suivante, qui exprime la vitesse tangentielle aux nœuds du profil (fig. 2.21):

$$V_{t,i} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{d} \quad (2.111)$$

Avec d comme il est défini dans la figure 2.21.

L'expression 2.107 permet d'obtenir les coefficients de pression. Toutefois, il s'agit des coefficients de pression aux nœuds du profil et non au centre des panneaux.

À partir des équations 2.84 et 2.101, on trouve que:

$$C_i = \left(\frac{\Phi_N - \Phi_1}{V_\infty c} \right) \quad (2.112)$$

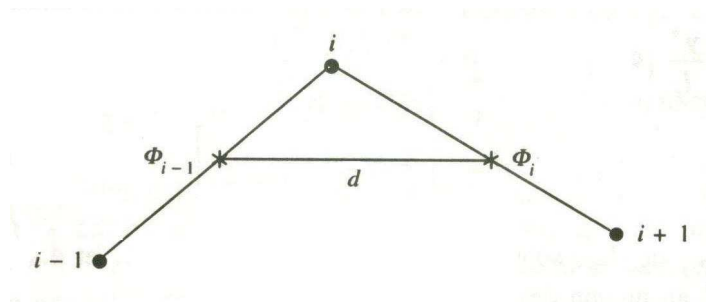


Figure 2.21. Panneaux adjacents

2.6.6 Méthode de panneaux avec doublets linéaires par formulation du potentiel

Fondements mathématiques : On peut obtenir la solution discrète du problème envisagé au moyen d'une méthode de panneaux développée par **Moran**, basée sur la solution de l'équation 2.71. On a obtenu cette dernière équation par la technique des fonctions de **Green**. La grande différence avec la méthode décrite à l'article 6.5 se situe sur le plan de la discrétisation de la distribution de doublets. **Moran** utilise une distribution linéaire de doublets.

Discrétisation : on doit d'abord discrétiser les intégrales de surface de l'équation 2.71 suivant la démarche de l'article 6.5. Toutefois, au lieu de poser que la distribution de doublets est constante sur chaque panneau, on utilise la distribution suivante :

$$\Phi = \Phi_j + \xi \frac{(\Phi_{j+1} - \Phi_j)}{l_j} \quad (2.113)$$

Où Φ_j est le potentiel au nœud j et ξ varie entre 0 et l_j .

On remarque de plus que :

$$\Gamma = \Phi_{N+1} - \Phi_1 \quad (2.114)$$

Après cette discrétisation, l'équation 2.71 devient :

$$\begin{aligned} \Phi_P = V_\infty (x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \Phi \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s dS \\ - (\Phi_{N+1} - \Phi_1) \int_{S_C} \vec{n} \cdot \nabla \Phi_s dS \end{aligned} \quad (2.115)$$

Après avoir trouvé la valeur des intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_P = V_\infty (x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\Phi_j + \frac{x^*}{l_j} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) \right] \beta_{P,j} \\ + \frac{y^*}{l_j} (\Phi_{j+1} - \Phi_j) \ln \frac{r_{P,j+1}}{r_{P,j}} + \frac{1}{2\pi} (\Phi_{N+1} - \Phi_1) \beta_{P,N+1} \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\beta_{i,N+1} = \arctg \left[\frac{y_P}{c - x_P} \right] \quad (2.117)$$

Où les termes $r_{P,j}$ et $\beta_{P,j}$ sont donnés par les équations 2.78 et 2.79. On définit les termes x^* et y^* au moyen des équations 2.97 et 2.99.

Si le point P tend vers le i^e nœud du corps, l'équation 2.116 possède alors $(N+1)$ inconnues, soit les Φ_i , pour $i=1, 2, 3, \dots, N+1$. Cette équation peut devenir un système d'équations algébriques si on l'applique à tous les nœuds (soit $N+1$ nœuds). Il reste que ce n'est pas si simple, en effet, on doit faire attention lorsque

$j = i$ ou $j = i - 1$ (équation 2.116 où \mathbf{P} devient \mathbf{i}). En effet, ces termes de la sommation contiennent des singularités logarithmiques, car $r_{i,j} = 0$. De plus, $\beta_{i,j}$ est indéterminé lorsque $j = i$ ou $j = i - 1$. Il faut donc faire tendre le point \mathbf{P} vers le i^{e} nœud et tenir compte des effets sur l'équation 2.116. Comme on l'a vu précédemment, les termes importants sont les i^{e} et $(i - 1)^{\text{e}}$ de la sommation de l'équation 2.116.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \left\{ \left[\Phi_{i-1} + \frac{x_{i-1}^*}{l_{i-1}} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) \right] \beta_{i,i-1} \frac{y_{i-1}^*}{l_{i-1}} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) \ln \frac{r_{i,i}}{r_{i,i-1}} \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[\Phi_i + \frac{x_i^*}{l_i} (\Phi_{i+1} + \Phi_i) \right] \beta_{i,i} + \frac{y_i^*}{l_j} (\Phi_{i+1} + \Phi_i) \ln \frac{r_{i,i+1}}{r_{i,i}} \right\} \\ & + \text{termes réguliers} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Dans l'équation précédente, x_{i-1}^*, y_{i-1}^* est la position du point \mathbf{P} par rapport au panneau $(i - 1)$. Une remarque semblable s'applique pour x_i^*, y_i^* . Les termes réguliers sont tous les termes de la sommation de l'équation 2.116 sauf les termes $j=i$ et $j = i - 1$.

Comme \mathbf{P} tend vers le nœud \mathbf{i} , on a :

$$x_i^* = 0 \quad y_i^* = 0 \quad y_{i-1}^* = 0 \quad x_{i-1}^* = l_{i-1} \quad (2.119)$$

De là, l'équation 2.118 devient :

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \Phi_i (\beta_{i,i-1} + \beta_{i,i}) + \text{termes réguliers} \quad (2.120)$$

Où $\beta_{i,i-1}$ et $\beta_{i,i}$ sont indéterminés. Par contre, il est possible de calculer leur somme, qui représente l'angle entre les panneaux $i - 1$ et i .

Lorsque i est égal à 1 , le résultat est différent, l'équation 2.118 devient (fig. 2.22):

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi_1 (\delta - 2\pi) \Phi_{N+1} \lambda \right] + \text{termes réguliers} \quad (2.121)$$

L'application de l'équation 1.72 aux nœuds 1 et $N+1$ donne un résultat identique. On se retrouve avec N équations linéairement indépendantes, qui ne

suffisent pas pour déterminer les $(N+1)$ inconnues Φ_i . La dernière équation nécessaire provient de l'application de la condition de **Kutta** au bord de fuite. Elle consiste à égaliser les vitesses tangentielles au centre des deux panneaux adjacents au bord de fuite :

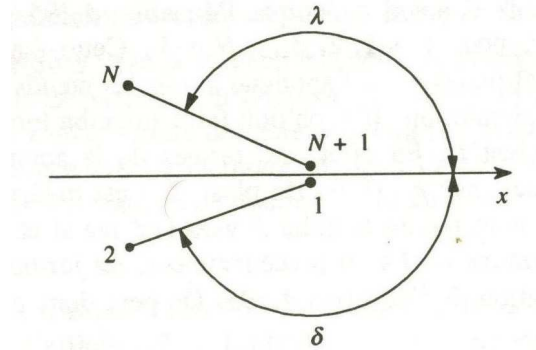


Figure 2.22. Nœuds au bord de fuite.

$$\frac{\Phi_{N+1} - \Phi_N}{l_N} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{l_1} \quad (2.122)$$

On peut exprimer ce système d'équations sous la forme matricielle suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.123)$$

Où $[A]$ est une matrice carrée $(N+1)$ sur $(N+1)$, appelée matrice des coefficients d'influence. Elle ne dépend que de la géométrie du corps. Le vecteur $\{x\}$ est un vecteur de dimension $(N+1)$ et contient les inconnues Φ_i .

Le vecteur $\{b\}$ est également un vecteur de dimension $(N+1)$. On le calcule de la façon suivante :

$$b_i = -V_\infty (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) \quad (2.124)$$

Lorsqu'on résout le système d'équations 2.118, il est possible de déterminer directement les $(N+1)$ inconnues. La solution de l'équation 2.116, permet de connaître les valeurs du potentiel Φ à chaque nœud. Etant donné que la vitesse représente le gradient du potentiel, la procédure la plus simple pour l'obtenir consiste à dériver l'équation 2.113, la formule supposant une variation linéaire du potentiel sur chaque panneau, et de poser que le résultat constitue la vitesse tangentielle au centre du panneau :

$$V_{t,i} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{l_j} \quad (2.125)$$

L'expression du coefficient de pression au centre du panneau i provient de l'équation 2.63. Pour ce qui est du coefficient de portance, on le trouve, à partir des équations 2.64 et 2.114, que :

$$C_l = 2 \left(\frac{\Phi_{N+1} - \Phi_1}{V_\infty c} \right) \quad (2.126)$$

2.6.7 Avantages et inconvénients des méthodes de panneaux

Les principales différences que l'on peut noter entre les cinq méthodes de panneaux présentées précédemment se situent sur les plans de la complexité des coefficients d'influence, de la forme de la condition de Kutta et du type d'inconnues.

La méthode de Hess et Smith présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de Kutta génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des contributions individuelles de chaque panneau. La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, de déterminer les vitesses tangentielles. Un dernier point intéressant au sujet de cette méthode concerne la position des points de contrôle. Ces derniers sont situés au centre des panneaux, ce qui signifie que l'équation intégrale exprimant la condition d'imperméabilité du corps ne s'applique pas directement au corps réel.

De son côté, la méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de vitesse possède une condition de Kutta extrêmement simple et nécessite

l'évaluation d'une seule matrice puisqu'une fois la distribution de tourbillons connue, le calcul des vitesses tangentielles devient automatique. En effet, comme on l'a vu précédemment, l'intensité tourbillonnaire en un point est égale à la vitesse tangentielle. On peut donc aisément prévoir que cette méthode sera plus rapide que la méthode de Hess et Smith. Toutefois, le degré de précision qu'on peut en attendre devrait être à peu près le même qu'avec l'autre méthode, puisque les points de contrôle se trouvent au centre des panneaux.

On peut reprendre les mêmes commentaires en ce qui concerne la méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de ligne de courant. Toutefois, on doit restreindre cette méthode à la solution d'écoulement en deux dimensions.

C'est avec la méthode avec doublets constants que les coefficients d'influence sont les plus simples à déterminer ; La solution du système matriciel permet de calculer le potentiel de vitesse aux points de contrôle, et, par conséquent, de calculer facilement les vitesses tangentielles par une simple dérivée numérique. Cette méthode ne nécessite qu'une seule matrice, mais les points de contrôle sont encore une fois situés au centre des panneaux. A remarquer que c'est la seule méthode qui ne possède pas de condition de **Kutta** explicite.

Enfin, la méthode avec doublets linéaires est la seule méthode dans laquelle les points de contrôle se trouvent aux extrémités des panneaux. La détermination des coefficients d'influence est extrêmement complexe et fait donc intervenir de longs et laborieux calculs.

La principale différence qu'on note entre elle et la méthode avec doublets constants est la présence d'une condition de Kutta explicite. Il est également important de noter que le champ de vitesse induit par la représentation linéaire n'est pas singulier aux extrémités des panneaux, comme c'est le cas dans la méthode avec doublets constants.

CHAPITRE III

Méthodes des Images

3.1. CONSEQUENCE D'UNE PROPRIETE DE SYMETRIE

Pour résoudre certains problèmes d'écoulements potentiels la méthode des images est souvent utile. Il s'agit de problèmes où une propriété de symétrie peut être exploitée pour reformuler le problème original. Par conséquent, une simplification est obtenue dans l'analyse. La méthode est démontrée ici au moyen d'exemples.

3.2. METHODE DES IMAGES ^[1]

Puisqu'on peut représenter l'écoulement autour d'un corps par une distribution appropriée de singularités vérifiant l'équation de Laplace, il est important d'étudier ces représentations en présence d'autres conditions limites telle que le sol et les parois des souffleries. Par exemple, prenons une source bidimensionnelle d'intensité Q à une distance h d'un mur (voir fig.). Posons que l'origine du système de coordonnées cartésien est la source et que l'axe x est parallèle au mur. S'il n'y avait pas de mur, le potentiel des vitesses de la source s'exprimerait ainsi :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.1)$$

Toutefois, étant donné qu'on veut une ligne de courant sur le mur et que la seule singularité dans l'écoulement est due à la source, la solution recherchée pour le potentiel total, Φ_T est de la forme :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \Phi_I \quad (3.2)$$

Où la potentielle « image », Φ_I , satisfaisant à l'équation de Laplace, n'a aucune discontinuité pour $y > -h$. le potentiel des vitesses diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de mur et annule la composante normale de la vitesse au mur due à la source. On écrit donc la condition limites au mur sur Φ_I ainsi :

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(x, -h) = \frac{Qh}{2\pi} \frac{1}{x^2 + h^2} \quad (3.3)$$

Comme solution possible, on considère une source « image » situé à $(0, -2h)$.
Son potentiel des vitesses est :

$$\Phi_I = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y^2 + h^2)} \quad (3.4)$$

Et lorsqu'on substitue cette équation dans l'équation des conditions limites, on montre que les conditions aux limites sont satisfaites.

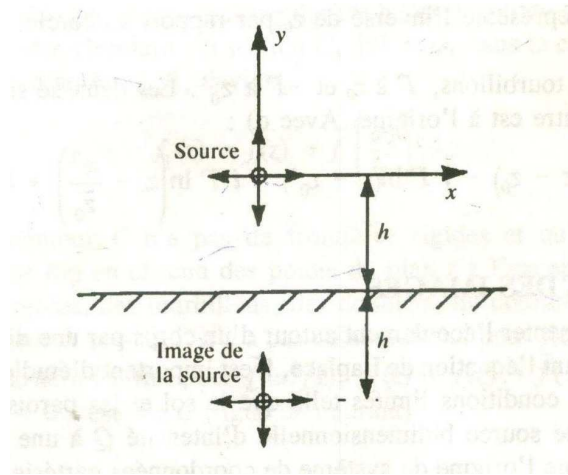


Figure 3.1. Image de la source

La Figure 3.2 présente les images pour un tourbillon et un doublet. On exprime le potentiel complexe pour les singularités initiales, plus leurs images, par :

$$\begin{aligned} \text{source : } f(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + 2ih) \\ \text{tourbillon : (sens horaire) } f(z) &= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + 2ih) \\ \text{doublet : (} m = 2aQ \text{) } f(z) &= -\frac{m}{2\pi z} e^{i\alpha} - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + 2ih)} e^{i(2\pi - \alpha)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(l'axe du doublet est incliné suivant l'angle α par rapport à Ox)

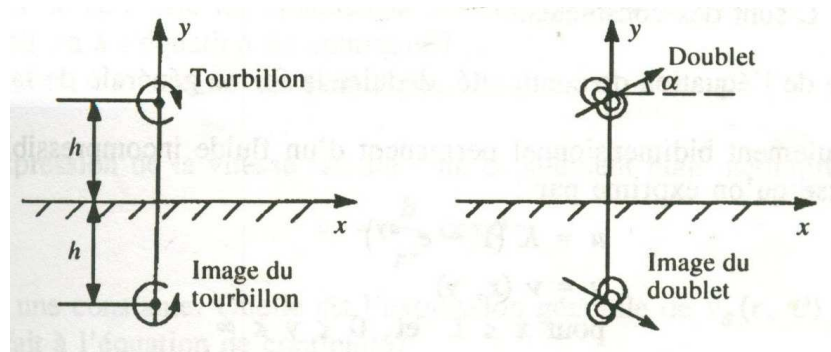


Figure 3.2 Image du tourbillon et du doublet.

3.3. EXEMPLE ^[22]

3.3.1 Écoulement engendré par une source située à proximité d'une paroi

Considérons un écoulement engendré par deux sources placées symétriquement par rapport à la paroi selon la fig. Pour vérifier que la paroi devienne une ligne de courant $\Psi = \text{constant}$, on étudie l'écoulement qui résulte de la juxtaposition des deux sources d'intensité égale. Donc on obtient pour la fonction de courant

$$\frac{2\pi}{Q} \Psi = \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y+b}{x} = \operatorname{arctg} \frac{2yx}{x^2 + b^2 - y^2} \quad (3.6)$$

Où $(2b)$ est la distance entre les sources. Il découle de l'expression (3.6) que $\Psi = 0$ pour $y = 0$ et pour $x = 0$. Par conséquent la paroi $y = 0$ est une ligne de courant et l'expression (3.6) représente la solution cherchée (Figure 3.3).

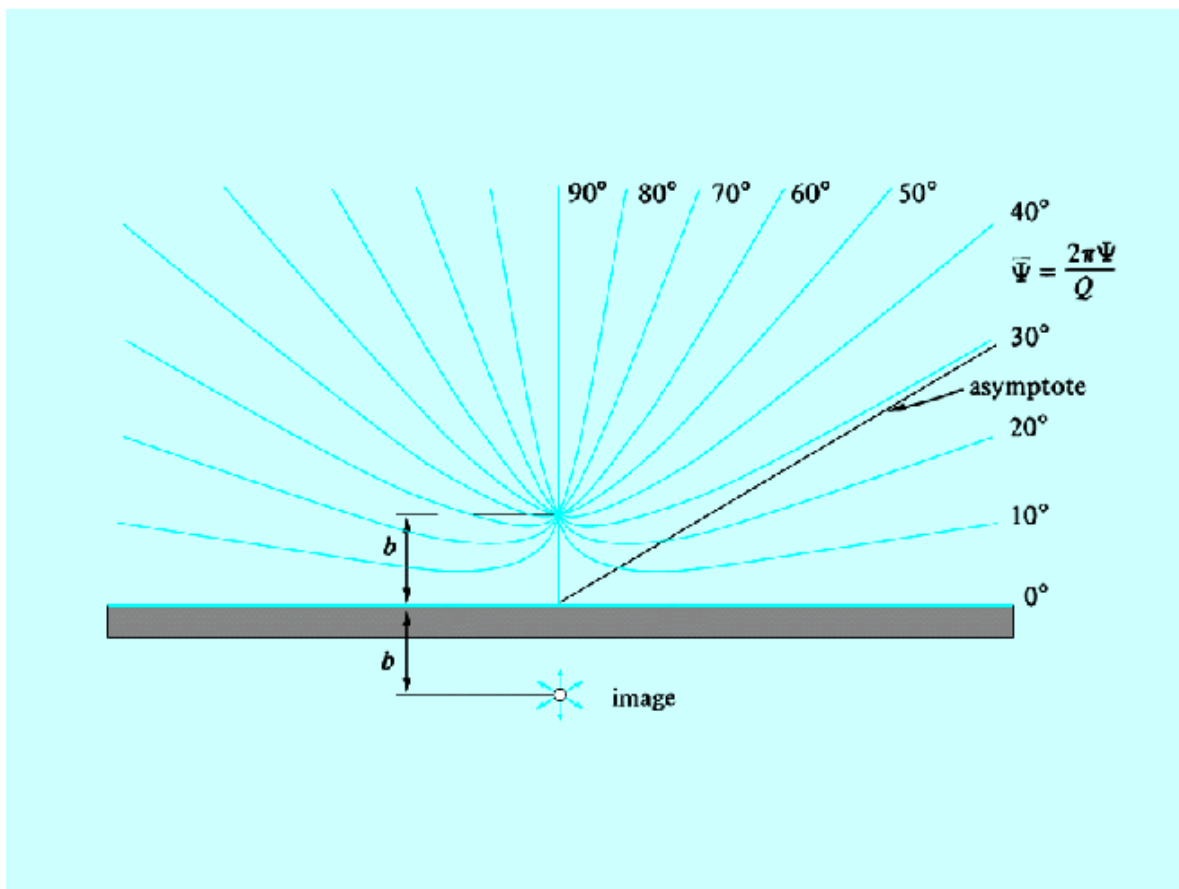


Figure 3.3. Ecoulement engendré par une source à proximité d'une paroi.

3.3.2 Une aile à proximité d'une paroi

La solution pour ce cas est obtenue en introduisant deux ailes placées symétriquement par rapport à la paroi de telle façon que chacune d'elles représente une image parfaite de l'autre (Figure 3.4).

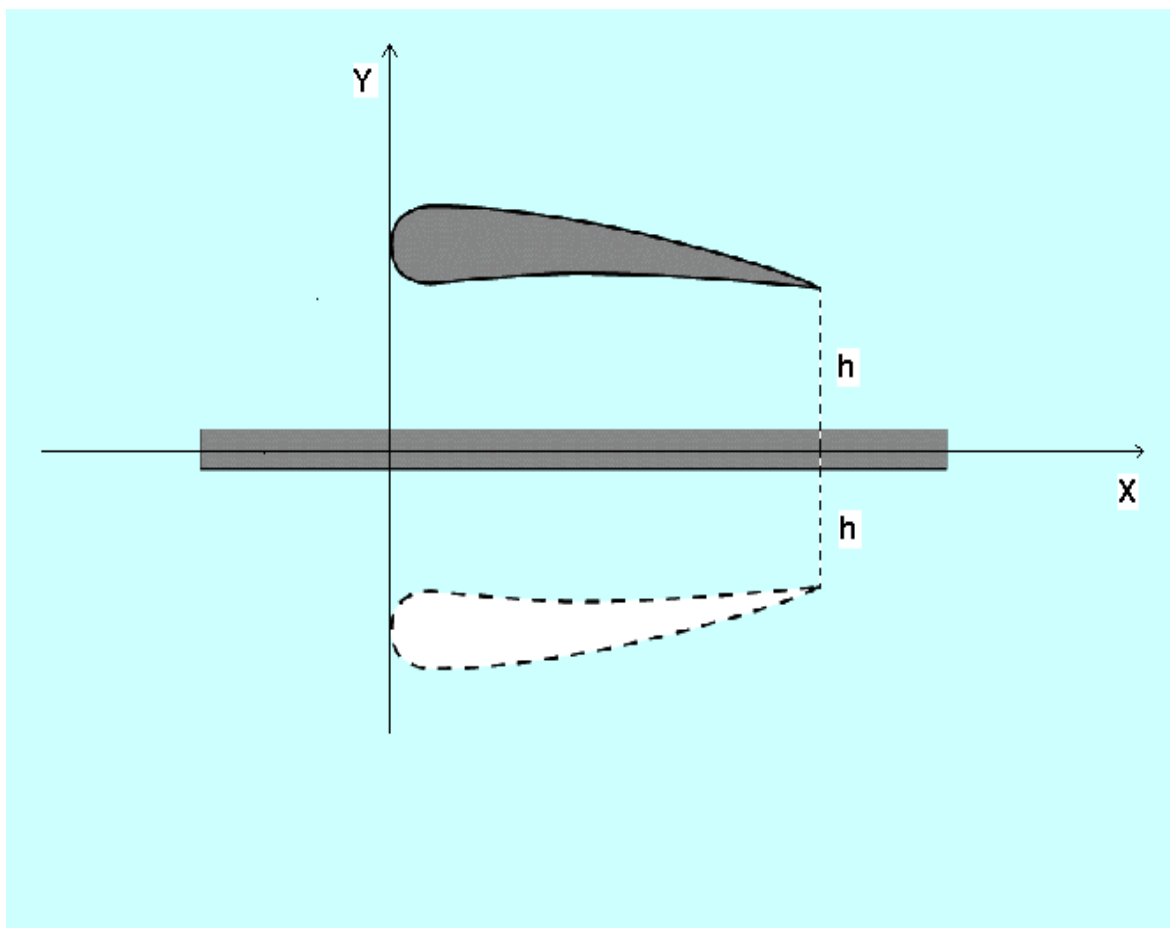


Figure 3.4. Profil d'aile à proximité d'une paroi.

3.3.3 Une aile placée entre deux parois (soufflerie)

L'aile originale et son image I engendrent la paroi A tandis que l'aile originale et son image 1 engendrent la paroi a (Figure 3.5). Mais l'image 1 donne une perturbation sur la paroi A et par conséquent il faut corriger l'écoulement en ajoutant l'image II, etc. On obtient ainsi une série infinie d'images pour la description de l'écoulement original.

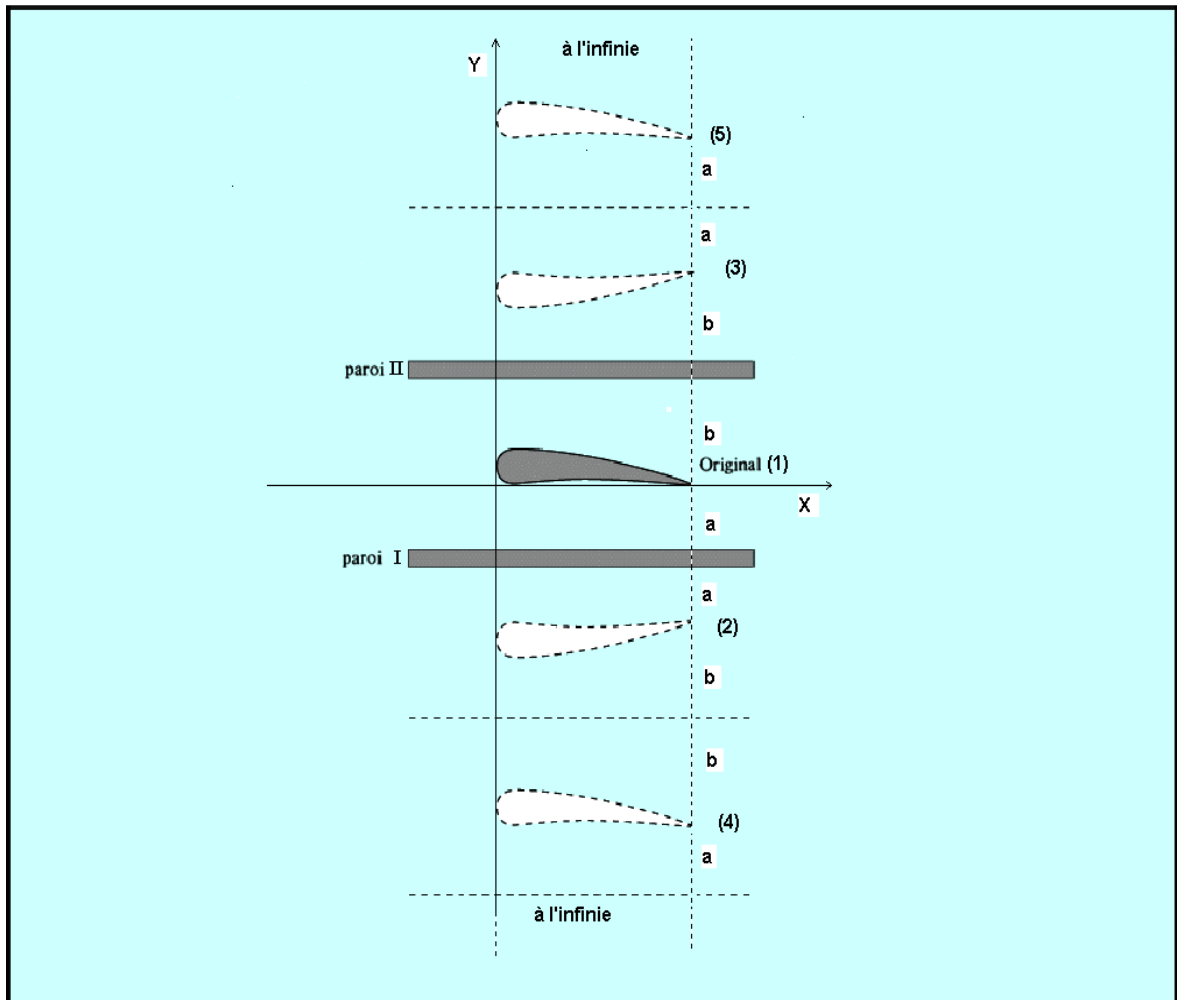


Figure 3.5. Profil d'aile placé entre deux parois.

CHAPITRE IV

PROCESSUS DE LA METHODE DE HESS & SMITH

4.1. PREAMBULE

Il s'agit dans ce chapitre de présenter ce qui a été exposé dans les chapitres 1, 2 et 3 d'une manière pratique. Le processus à suivre est, par conséquent, le même que celui de la partie théorique :

- 1) Cas du profil à air libre : Méthode des panneaux.
- 2) Cas du profil en présence d'une paroi : Méthode des images.

Aussi, avant de commencer, il est très important de préciser qu'il s'agit dans notre étude d'un profil symétrique de type NACA à quatre chiffres et que les résultats obtenus ne sont en aucun cas extensibles à un profil asymétrique car l'application de la méthode des images fait qu'on obtient des coordonnées des points de panneaux images autres que ceux qu'on obtiendrait pour un profil asymétrique .

4.2. METHODE DES PANNEAUX

Il s'agit donc de faire une répartition des panneaux sur le profil telle que l'équation des abscisses obéit à la loi $x(i) = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta_i)$, sachant que $\theta_i = 2\pi i/N$

Cette dernière présente l'avantage de faire une répartition des points telle, qu'ils sont concentrés au bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits qui présentent la plus grande courbure.

4.2.1 Choix de la méthode de résolution : méthode de Hess et Smith

Notre choix s'est porté sur la méthode de **Hess & Smith**, or comme nous l'avons vu lors de la présentation des différentes méthodes des panneaux, la méthode de **Hess & Smith** est l'une des méthodes les plus compliquées qui soient parmi les méthodes des panneaux, du fait - comme nous l'avons dit auparavant - qu'elle présente des coefficients d'influence assez complexes à évaluer et qui nécessitent des calculs plutôt longs à effectuer. De plus, la condition de **Kutta** génère une équation complexe qui exige qu'on trouve les valeurs des

contributions individuelles de chaque panneau : La détermination des valeurs de la matrice des coefficients est donc une lourde tâche avec cette méthode. L'inversion de cette matrice permet de calculer l'intensité des distributions de sources et de tourbillons. Pour obtenir les caractéristiques aérodynamiques recherchées, on doit déterminer la valeur d'une autre matrice qui, elle, permettra de calculer les vitesses tangentielles au centre de chaque panneau. Ainsi le principal inconvénient que présente cette méthode est qu'elle exige la résolution de deux matrices des coefficients d'influence : La première sert à calculer l'intensité des singularités, et la seconde, à déterminer les vitesses tangentielles. Malgré cela, elle se distingue par le fait qu'elle présente des résultats parmi les plus précis de toutes les méthodes des panneaux, de plus elle est valable en deux dimensions comme en trois.

4.2.2 Présentation théorique de la méthode de Hess & Smith

4.2.2.1 Fondements mathématiques

La méthode élaborée par Hess et Smith en 1966 consiste tout d'abord à diviser le profil en un certain nombre de panneaux afin d'en approcher le mieux possible le contour réel. Ensuite, on fait une distribution de sources et de tourbillons sur chaque panneau pour modéliser l'écoulement. On détermine l'intensité de ces singularités grâce aux conditions de Tangence et du Kutta. Une fois les singularités connues, on peut calculer la vitesse et, par conséquent, le coefficient de pression C_p , en tout point de la surface de même que la distribution du coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque.

4.2.2.2 Conditions limites

Pour un écoulement irrotationnel, le potentiel total autour du profil correspond à l'équation :

$$\Phi = \Phi_{\infty} + \Phi_s + \Phi_v \quad (4.1)$$

Où :

Φ_{∞} = Potentiel de l'écoulement uniforme.

Φ_s = Potentiel d'une distribution de source $q(s)$ par unité de longueur.

Φ_v = potentiel d'une distribution de tourbillon d'intensité $\gamma(s)$.

D'après les relations d'aérodynamique précédentes et à partir de la figure 4.1 on peut écrire les trois relations suivantes:

$$\begin{aligned}\Phi_{\infty} &= V_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \Phi_s &= \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r ds \\ \Phi_v &= -\int \frac{\gamma(s)}{2\pi} \theta ds\end{aligned}\quad (4.2)$$

On doit intégrer ces deux dernières équations sur toute la surface du corps.

En raison du principe de la superposition des écoulements, le potentiel total Φ satisfait automatiquement à l'équation de **Laplace** :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

De plus, il satisfait à la condition limite à l'infini, $r \rightarrow \infty$, $\Phi \rightarrow \Phi_{\infty}$. Il reste à déterminer les valeurs des intensités $q(s)$ et $\gamma(s)$ qui satisferont à la condition de l'écoulement tangent et celle du **Kutta**. La distribution des sources remplira la condition de tangence de l'écoulement sur la surface et l'intensité tourbillonnaire, la condition du Kutta au bord de fuite.

4.2.2.3 Discrétisation du profil

La discrétisation consiste à remplacer le profil par un polygone à N cotés. Il faut donc diviser la surface du profil en un certain nombre de panneaux, en commençant par le bord de fuite. Avec une soixantaine de panneaux tourbillonnaires, on obtient une assez bonne précision.

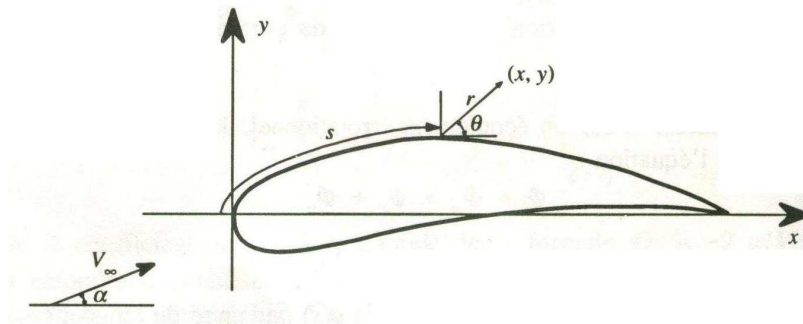


Figure 4.1. Définition de s , de r et de θ .

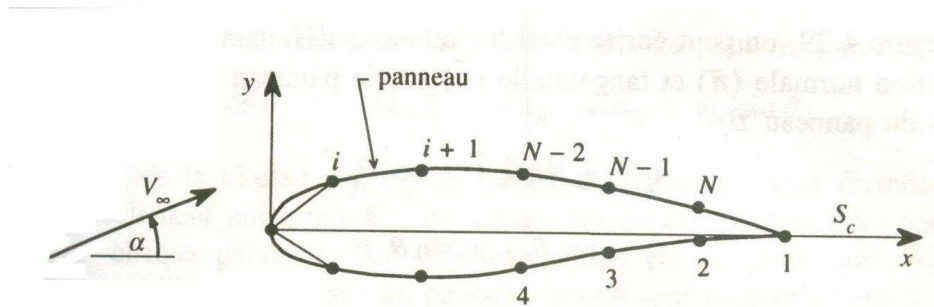


Figure 4.2. Notation des panneaux sur le profil.

Afin de bien représenter le profil aérodynamique, on doit utiliser un grand nombre de panneaux au bord d'attaque et au bord de fuite, c'est-à-dire aux endroits où la courbure est importante. Pour ce faire, on utilise une distribution cosinusoidale des panneaux où :

$$x_i = c/2 (1 - \cos\theta_i),$$

$\theta_i = i \Delta\theta$. L'incrément $\Delta\theta$ est fonction du nombre de panneaux ($\Delta\theta = 2\pi/N$).

Sur chaque panneau, on distribue des sources et des tourbillons. Si on utilise les équations 1.1 et 1.2 le potentiel résultant en un point (x, y) devient :

$$\Phi = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{i=1}^N \int_{\text{panneau } i} \left[\frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds \quad (4.4)$$

Il s'agit donc de récupérer un système de N équations à N inconnues, ce qui laisse la possibilité de choisir arbitrairement les distributions de sources et de tourbillons ; c'est pourquoi on dispose de différentes méthodes des panneaux, que nous avons vu auparavant . D'après **Hess** et **Smith**, l'intensité de la source est constante sur chaque panneau, mais elle varie d'un panneau à l'autre, ainsi $q(s)=q_i$ sur le panneau i , $i=1,2,\dots, N$. Par contre, l'intensité tourbillonnaire est constante sur tous les panneaux : $\gamma(s) = \gamma$ sur tout le profil. Cette méthode constitue un bon choix lorsqu'on veut limiter le nombre d'inconnues.

Les inconnues du problème sont les suivantes :

$q_i = N$ valeurs pour les sources aux points de contrôle.

$\gamma =$ une valeur pour le tourbillon aux points de contrôle.

Les points de contrôles se trouvent au milieu de chaque panneau. Il faut déterminer l'expression pour ces points en regard du panneau i . pour la condition de **Kutta**, on va poser que les valeurs des vitesses sur les panneaux N et i sont égales.

D'après la *Figure 4.3*, on peut écrire ainsi les relations définissant les vecteurs unitaires dans la direction normale (\vec{n}) et tangentielle (\vec{t}) sur le panneau i en fonction de l'angle d'inclinaison du panneau θ_i .

$$\begin{aligned}\vec{n}_i &= -\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{j} \\ \vec{t}_i &= \cos \theta_i \vec{i} + \sin \theta_i \vec{j}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Où:

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} \quad \cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} \quad (4.6)$$

Le paramètre l_i correspond à la longueur du panneau i . les expressions suivantes définissent les coordonnées du point de contrôle situé au milieu du panneau i .

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad (4.7)$$

Pour désigner les composantes de vitesse au milieu du $i^{\text{ème}}$ panneau, on écrit:

$$u_i = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad v_i = v(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad (4.8)$$

Avec la condition de tangence, on pose que la vitesse normale sur chaque panneau est nulle. Ainsi, en se référant à la figure 4.3, on a pour le panneau i :

$$-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

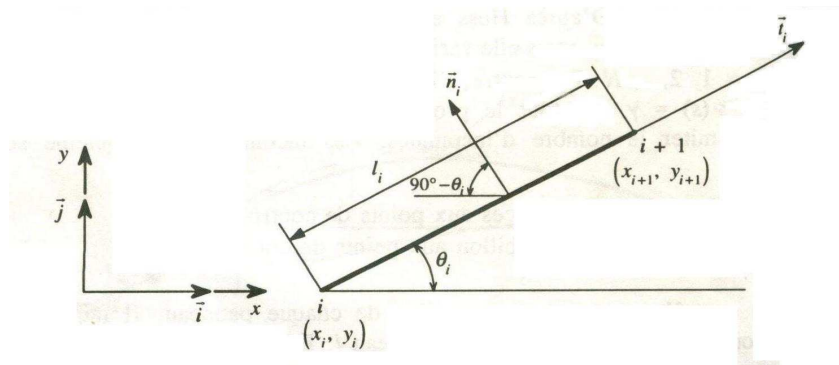


Figure 4.3. Notation sur le panneau i .

Avec la condition de **Kutta**, on obtient la relation suivante pour les panneaux **1** et **N** (au bord de fuite) :

$$u_1 \cos \theta_1 + v_1 \sin \theta_1 = -u_N \cos \theta_N - v_N \sin \theta_N$$

Les composantes de la vitesse (u_i, v_i) au milieu du panneau i sont formées de contribution de l'écoulement uniforme V_∞ , de même que les composantes des sources et des tourbillons sur chaque panneau. Les vitesses induites en un point quelconque par les sources et tourbillons situés sur un panneau donné sont proportionnelles à l'intensité de la source ou du tourbillon sur ce panneau ; dès lors, on peut écrire, pour le panneau i :

$$\begin{aligned} u_i &= V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij} \\ v_i &= V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où :

u_{sij} = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à une source unitaire située sur le panneau j .

u_{vij} = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à un tourbillon unitaire situé sur le panneau j .

Pour évaluer u_{sij} , v_{sij} , u_{vij} et v_{vij} , il est préférable de travailler dans les coordonnées (x^*, y^*) liées au panneau j (Figure 4.4).

Système de coordonnées lié au panneau j : Si on connaît les composantes locales (u^*, v^*) , on peut évaluer les composantes de la vitesse totale à l'aide des expressions :

$$\begin{aligned} u &= u^* \cos \theta_i - v^* \sin \theta_i \\ v &= u^* \sin \theta_i + v^* \cos \theta_i \end{aligned} \quad (4.10)$$

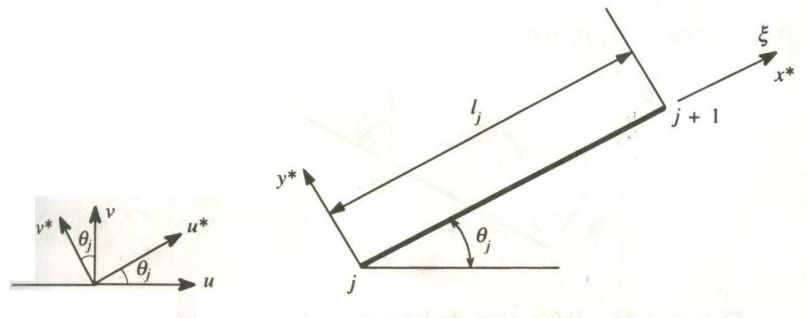


Figure 4.4. système de coordonnées liées au panneau j .

On peut écrire ainsi les composantes de la vitesse au point (x_i, y_i) due à la distribution d'une source unitaire sur le panneau j :

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi) d\xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} = -\frac{1}{2\pi} \ln[(x^* - \xi)^2 + y^{*2}]^{1/2} \Big|_{\xi=0}^{\xi=l_j} \quad (4.11)$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=l_j}$$

Où (x^*, y^*) sont les coordonnées locales qui correspondent à (x_i, y_i) .

On peut réduire l'équation (4.11) par la géométrie (Figure 4.5):

$$u_{sij}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \quad (4.12)$$

$$v_{sij}^* = \frac{v_l - v_0}{2\pi} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}$$

Où :

r_{ij} = distance du nœud j au milieu du panneau i

β_{ij} = angle sous lequel on voit le panneau j du milieu du panneau i .

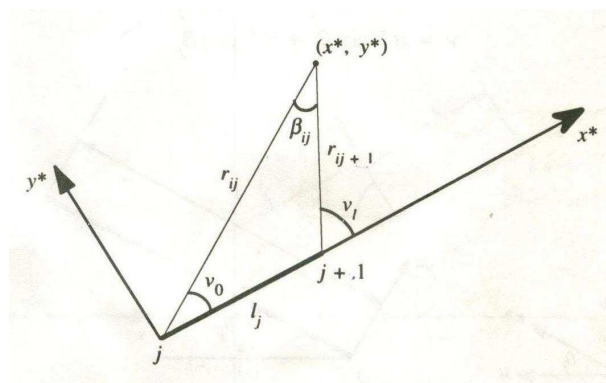


Figure 4.5. Réduction de l'équation par la géométrie.

A partir de l'équation (4.12), on se rend compte que $u_{sii}^* = 0$ (c'est-à-dire quand $i=j$) représente la vitesse induite par la source sur le milieu du panneau lui même, mais que $v_{sij}^* \neq 0$. Si les points (x^*, y^*) s'approchent du panneau ($y^* \rightarrow 0$ pour $0 < x^* < l_j$), alors $\beta_{ij} \rightarrow \pi$. On conclura β_{ij} comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \arctg \left(\frac{(\bar{y}_i - y_{i+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)}{(\bar{x}_i - x_{i+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)} \right) \quad \text{si } (i \neq j) \\ &= \pi \quad \text{si } (i = j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

De la même façon que pour u_{sij}^* et v_{sij}^* , on calcule la vitesse induite au point (x^*, y^*) par le tourbillon d'intensité unitaire situé sur le panneau j :

$$\begin{aligned} u_{vij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi)d\xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \\ v_{vij}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ainsi, les conditions de tangences, $-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0$, prennent la forme :

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} q_j + A_{iN+1} \gamma = b_i \quad (4.15)$$

Où:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -u_{sij} \sin \theta_i + v_{sij} \cos \theta_i \\ &= -u_{sij}^* (\cos \theta_j \sin \theta_i - \sin \theta_j \cos \theta_i) + v_{sij}^* (\sin \theta_j \sin \theta_i - \cos \theta_j \cos \theta_i) \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} 2\pi A_{ij} &= \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \\ 2\pi A_{iN+1} &= \sum_{j=1}^N \left[\cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \end{aligned}$$

et

$$b_i = V_\infty \sin(\theta_i - \alpha)$$

La condition du Kutta (au bord de fuite) :

$$u_i \cos \theta_i + v_i \sin \theta_i = -u_N \cos \theta_i - v_N \sin \theta_i$$

Peut également s'exprimer ainsi :

$$\sum_{j=1}^N A_{N+1,j} q_j + A_{N+1,N+1} \gamma = b_{N+1} \quad (4.16)$$

$$2\pi A_{N+1,j} = \sum_{k=1,N} \left[\sin(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} - \cos(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}} \right]$$

$$2\pi A_{N+1,N+1} = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{kj+1}}{r_{kj}} - \cos(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} \right]$$

$$b_{N+1} = -V_\infty \cos(\theta_1 - \alpha) + V_\infty \cos(\theta_N - \alpha)$$

Les équations 4.15 et 4.16 forment un system de **(N+1)** équation à **(N+1)** inconnues, soit:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N+1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Où

$$q_{N+1} = \gamma$$

La résolution du système $[A] \{Q\} = \{B\}$ se fait par la méthode de Gauss-Seidel (Voir ANNEXE C) ^{[10] [19]}.

Pour connaître la vitesse tangentielle au point de contrôle pour chaque panneau, on doit résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} V_{ii} = V_\infty \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} \right] \\ + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.2.2.4 Coefficient de pression

Avec la vitesse tangentielle sur chaque panneau, on peut calculer le coefficient de pression C_p ; ainsi, on peut déterminer le coefficient de pression au point (\bar{x}_i, \bar{y}_i) à l'aide de l'expression :

$$C_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - \left(\frac{V_{ti}}{V_\infty} \right)^2 \quad (4.19)$$

Lorsqu'on connaît les valeurs de C_p sur chaque panneau, on peut tracer les courbes de distribution de pression en fonction de la corde pour un angle d'attaque α donné.

4.2.2.5 Coefficient de portance

Le coefficient de portance correspond à la relation suivante :

$$C_l = \frac{L}{q_\infty c}$$

Où:

$$L = \rho V_\infty \Gamma \quad (\text{kutta - Joukowski})$$

$$q_\infty = (1/2) \rho V_\infty^2$$

Ainsi:

$$C_l = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{1/2 \rho V_\infty^2 c} = \frac{2\Gamma}{V_\infty c} \quad (4.20)$$

On peut exprimer la circulation, Γ , en fonction de l'intensité tourbillonnaire, γ , et conséquemment en fonction de la longueur de tous les panneaux :

$$\Gamma = \oint \gamma \cdot ds = \gamma \oint ds \quad (4.21)$$

Par contre, $\oint ds$ représente le contour du profil ou bien la longueur approximative

de tous les panneaux, soit $\sum_{i=1}^N l_i$. On a donc :

$$\Gamma = \gamma \sum_{i=1}^N l_i \quad (4.22)$$

Finalement le coefficient de portance équivaut à :

$$C_l = \frac{2 \gamma}{V_\infty c} \sum_{i=1}^N l_i \quad (4.23)$$

4.3 METHODE DES IMAGES

Dans cette partie, nous allons essayer de présenter les différentes étapes de travail par la méthode des images, ce qui est - à juste titre - le but même de cette étude : L'étude de l'effet de sol par la méthode des panneaux dans le cas d'un profil d'aile à proximité d'une paroi.

Pour ce faire, on distingue deux cas de figure :

- **profil à proximité d'une paroi** : Cas du vol proche d'une surface, sol, mer...etc.
- **profil placé entre deux parois** : Théoriquement ; cas du vol dans une soufflerie, dans la pratique, vol à l'intérieur d'une grotte...etc.

Pour cela, on doit d'abord commencer par présenter le principe de base de la méthode des images, puis faire un couplage entre cette dernière et la méthode des panneaux que nous avons choisi (*Hess & Smith*) pour avoir au bout du compte ce qu'on pourrait appeler notre « méthode des panneaux-images »j .

Principe de base : Le principe de base de cette méthode consiste à supposer que pour un profil placé devant une ou plusieurs parois, chaque paroi joue le rôle d'un miroir (méthode de l'image miroir), et crée ainsi une image inverse du profil d'origine.

Ensuite, il faudra faire un couplage entre la méthode des panneaux et la méthode des images pour trouver C_p et C_l .

4.3.1 Cas du profil a proximité d'une paroi

Dans ce cas, le profil est placé devant une paroi distante de « H » (voir Figure 4.6). Il se crée alors, comme il a été dit précédemment, un autre profil, image inverse du profil d'origine et dont les coordonnées sont les suivantes :

$$X(i)_{image} = X(i)$$

$$Y(i)_{image} = - Y(i)$$

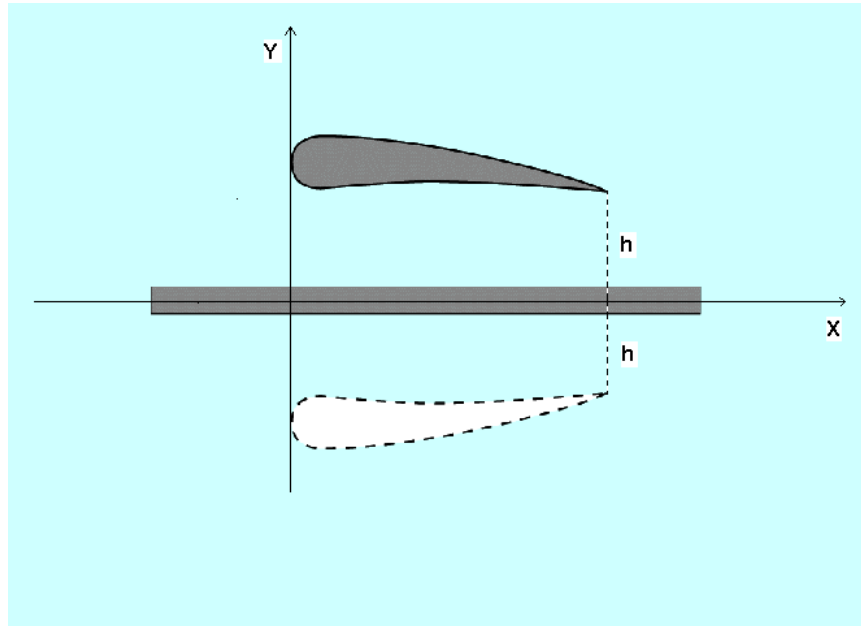


Figure 4.6 Profil à proximité d'une paroi.

Principe de base : dans ce cas « profil à proximité d'une paroi », on utilise les mêmes étapes que pour la méthode des panneaux dans le cas « air libre », on prenant en considération que $i = 1 \dots N$ et $j = 1 \dots 2N$ (voir fig4.7).

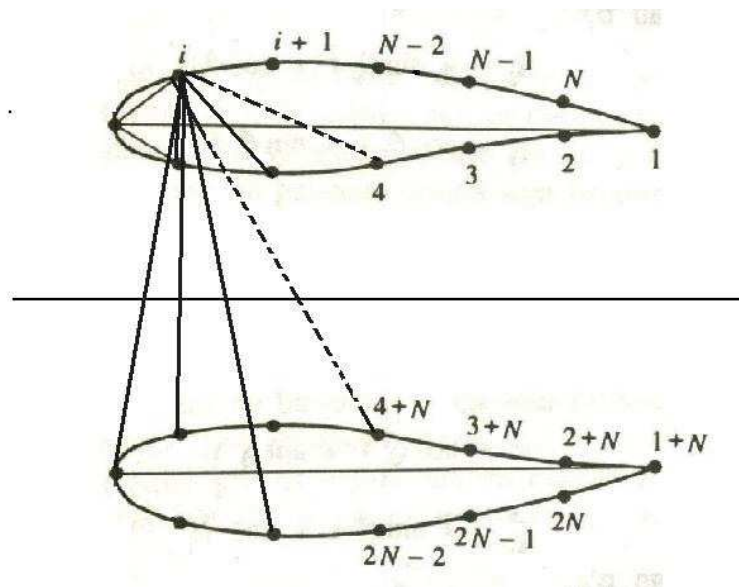


Figure 4.7. Procédure de calcul de r_{ij}

CHAPITRE V

RESULTATS & INTERPRETATION

L'outil informatique est d'une importance incontestée, il permet de réaliser les tâches, de les concrétiser, et de leur donner « l'âme d'une réalité », sans lui nul calcul numérique et nul graphique ne seraient aussi précis que s'ils sont exécutés par un ordinateur. Il permet en outre de gagner en temps et en argent.

Il existe différents types de langages de programmation qui facilitent le contact entre l'homme et la machine, chacun de ces langages a sa propre caractéristique quant à la programmation, la manipulation, la présentation, le domaine d'utilisation et d'application, et surtout, la précision de calcul.

Notre choix s'est porté sur le Fortran : Il permet de réaliser rapidement, simplement, et surtout avec précision des applications Windows.

Notre application se compose, comme déjà vu, des deux parties qui sont les suivantes :

- Cas Air libre ;
- Cas 1 Paroi ;

5.1. RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE PRESSION C_p

Nous allons à présent exposer d'une façon pratique les graphiques obtenus à partir de l'application sur le coefficient de pression C_p pour un profil **NACA 0018** en faisant varier les paramètres M (**Nombre de Mach**) et N (**Nombre de panneaux**) tout en analysant et expliquant à chaque fois les résultats obtenus d'une façon claire et nette.

Pour ce faire, on doit tenir compte des deux cas de figures, qui sont les suivants :

- Cas profil à air libre
- Cas profil à proximité d'une paroi

5.1.1 Cas profil à air libre

Ici, nous allons exposer les résultats obtenus pour le C_p d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à air libre.

5.1.1.1 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha = 0^\circ$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $\alpha = 0^\circ$ pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N=100$ et $M = 0.1$

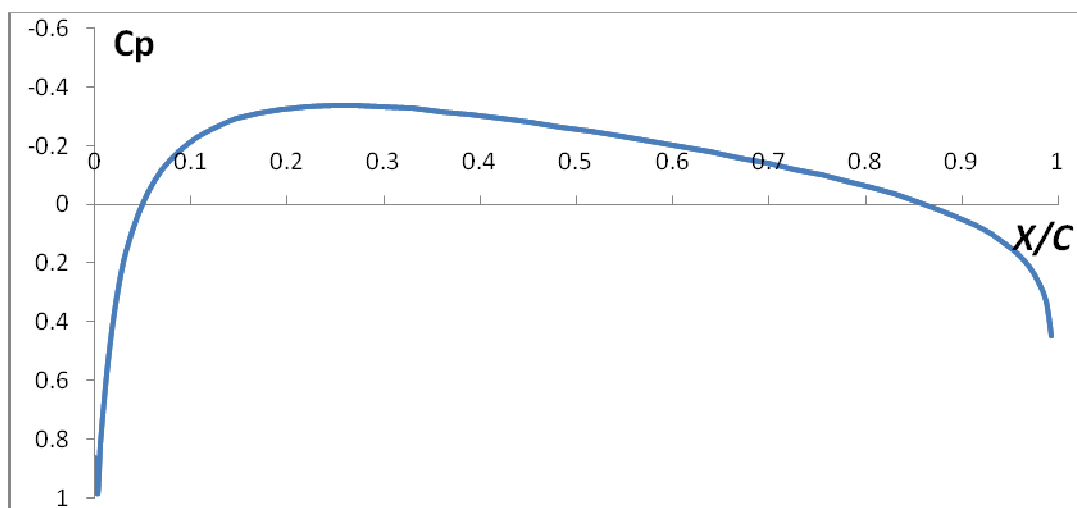


Figure 5.1 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que l'allure du graphe $C_p = f(x/c)$ ne présente qu'une seule courbe ce qui est logique en soit puisqu'on sait qu'à $\alpha = 0^\circ$ les filets d'air présentent les mêmes étranglements à l'extrados et à l'intrados à cause de la

symétrie du profil ce qui fait que les particules d'air les parcourent avec une même vitesse à l'extrados et à l'intrados du profil. D'où il en résulte une même pression de part et d'autre de l'aile d'après le théorème de Bernoulli, ce qui fait que les courbes du C_p vont coïncider à l'extrados et à l'intrados du profil et c'est ce qui explique le fait que le graphe $C_p = f(x/c)$ ne présente qu'une seule courbe comme nous venons de le dire.

5.1.1.2 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha \neq 0$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $\alpha \neq 0^\circ$ pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$

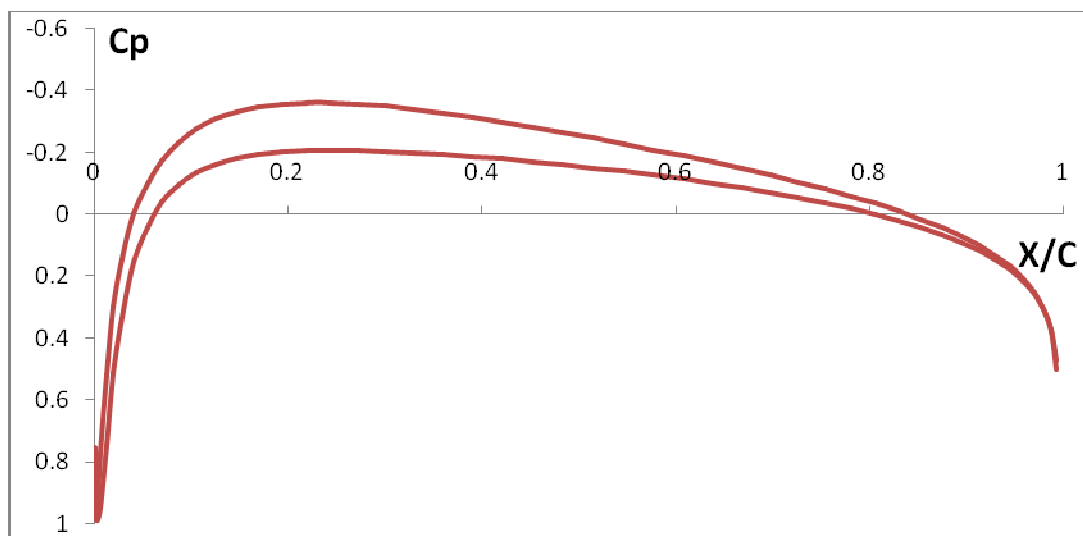


Figure 5.2 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 Air libre pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que contrairement au cas où le profil est à incidence nulle, l'allure du graphe $C_p = f(x/c)$ ne présente plus une seule courbe mais deux courbes distinctes ce qui est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que lorsqu'on augmente l'angle d'incidence les filets d'air sont déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression au niveau de l'extrados, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée vers le bas aux filets d'air provoque une surpression moins importante que la dépression de l'extrados ce qui fait que les courbes du C_p ne vont plus coïncider à cause de cette différence de pression de part et d'autre de l'aile et c'est ce qui explique le fait que le graphe $C_p = f(x/c)$ ne présente plus une seule courbe mais deux courbes distinctes comme nous venons de le dire.

5.1.1.3 $C_p = f(x/c)$ en fonction de Alpha

5.1.1.3.1 $C_p = f(x/c)$ pour Alpha = 1°, 3°, 5°, N = 100 et M = 0.1

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à Air libre pour $\alpha = 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ et pour $N = 100$ panneaux et $M = 0.1$.

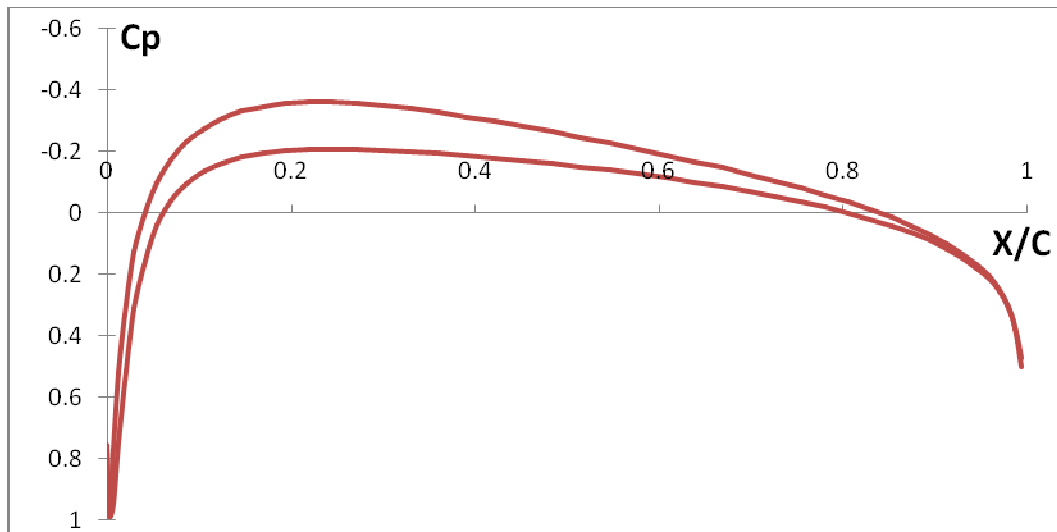


Figure 5.3 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

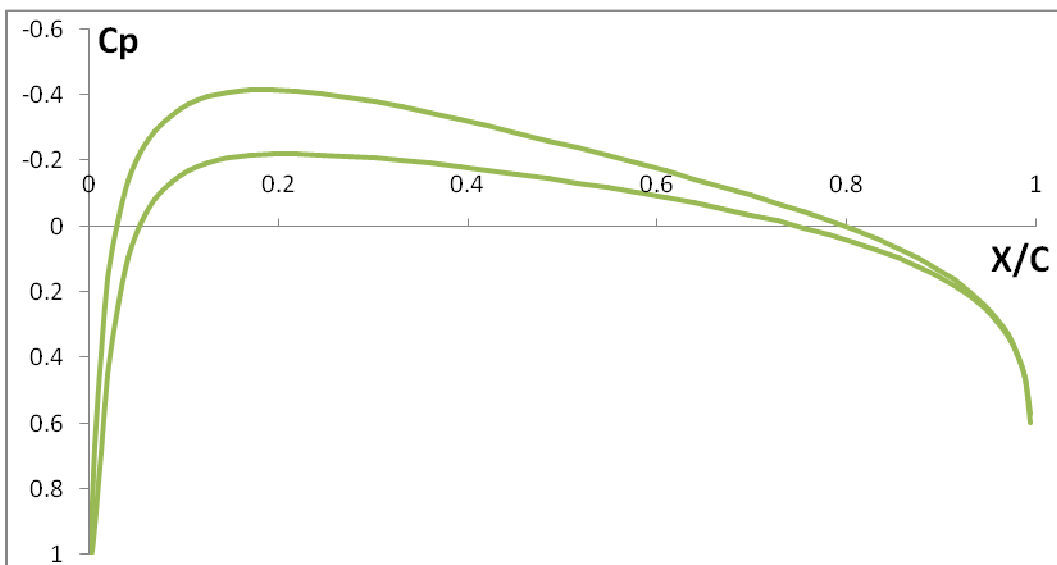


Figure 5.4 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=3^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

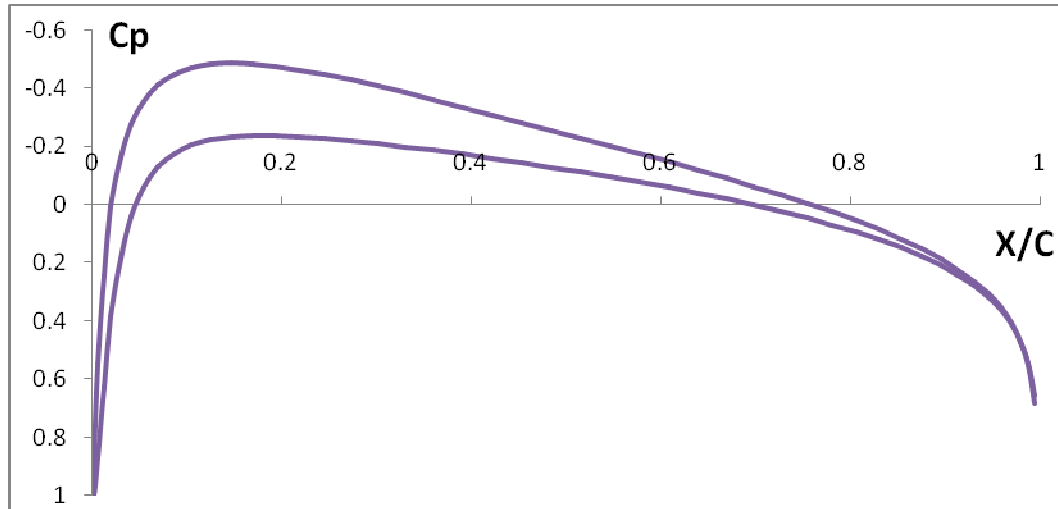


Figure 5.5 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que les graphes $C_p = f(x/c)$ présentent-à première vue-la même allure générale que celle pour $\alpha = 1^\circ$, ceci est logique puisqu'on est toujours dans le cas de l'incidence non nulle où on s'attend à avoir une différence de pression entre l'extrados et l'intrados du profil contrairement au cas où le profil est à incidence nulle. Par contre, en regardant d'un peu plus près, on se rend compte que ces derniers présentent de légères déviations les uns par rapport aux autres ce qu'on expliquera ultérieurement.

5.1.1.3.2 $C_p = f(x/c)$ pour différentes valeurs de Alpha, $N=100$ et $M=0.1$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour différentes valeurs de α pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$.

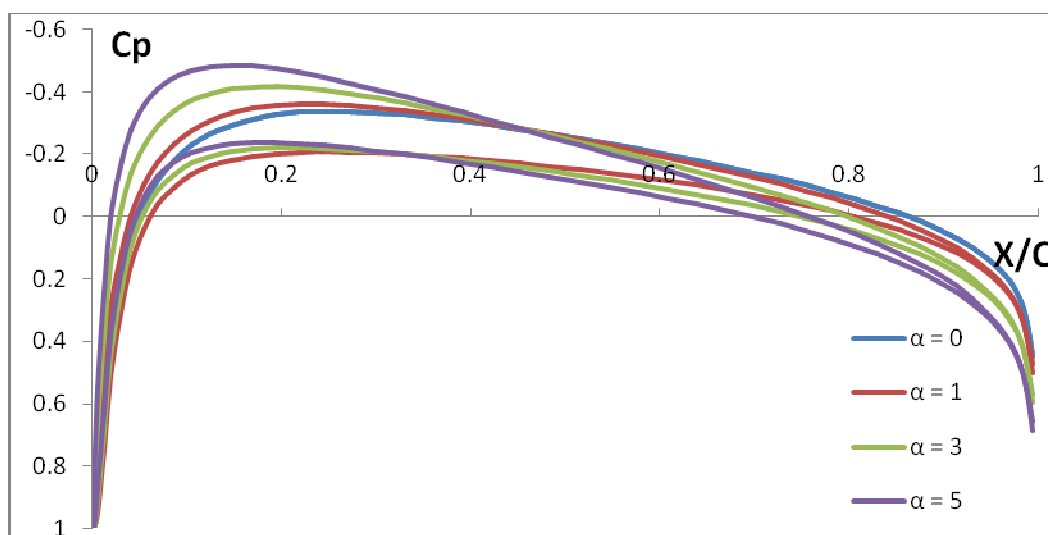


Figure 5.6 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de α et pour $N=100$ et $M=0.1$

On remarque qu'au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence il y a une déviation de plus en plus vers le bas sous l'intrados du profil et de plus en plus vers le haut sur l'extrados. Ceci est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait qu'au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence les filets d'air sont de plus en plus déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression de plus en plus importante au niveau de l'extrados, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée de plus en plus vers le bas aux filets d'air provoque une surpression de plus en plus importante sachant que cette surpression sera toujours moins importante que la dépression de l'extrados. D'où, il en résulte une surpression et une dépression en augmentation continue avec l'angle d'incidence

5.1.1.4 $C_p = f(x/c)$ en fonction de N

5.1.1.4.1 $C_p = f(x/c)$ pour $N = 100$ et $\alpha = 1^\circ$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $N=100$ panneaux pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $\alpha = 1^\circ$ et $M=0.1$

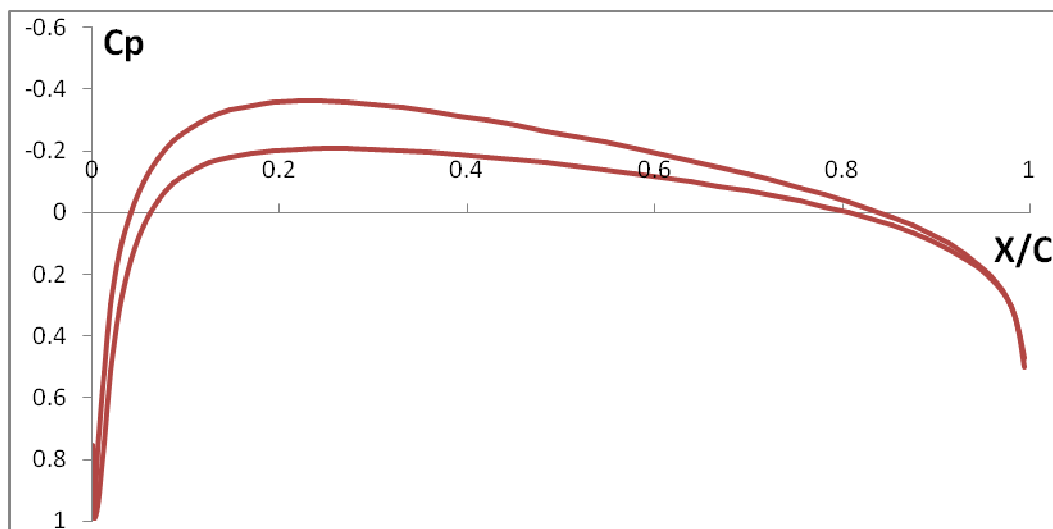


Figure 5.7 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à air libre pour $\alpha = 1^\circ$ $N=100$ et $M=0,1$; Les commentaires sont donc les mêmes.

5.1.1.4.2 $C_p = f(x/c)$ pour $N=60, 80, 100$ panneaux, $\text{Alpha} = 1^\circ$ et $M=0.1$

Ici nous avons ces trois graphiques qui représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N=60, 80$, et 100 panneaux et pour $\alpha = 1^\circ$ et $M=0.1$

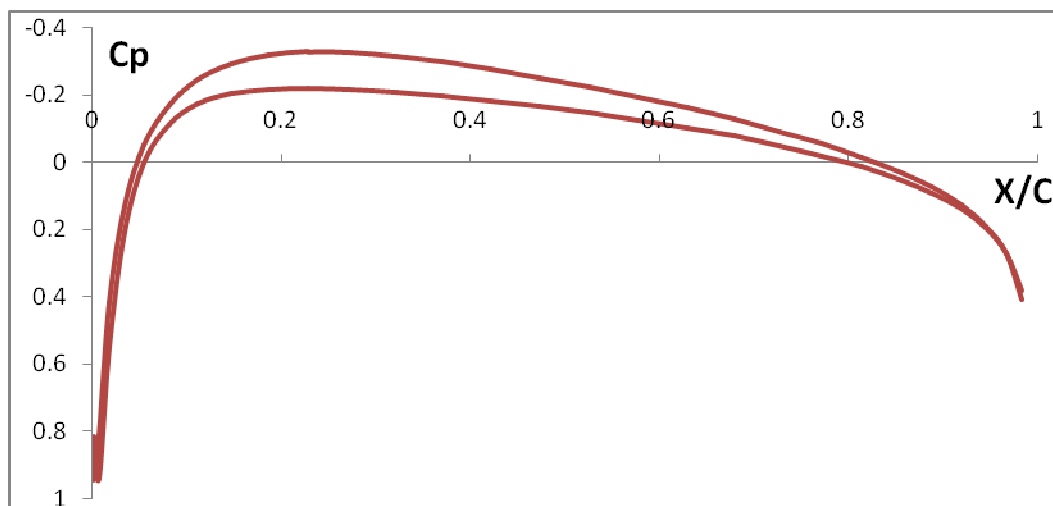


Figure 5.8 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=60$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

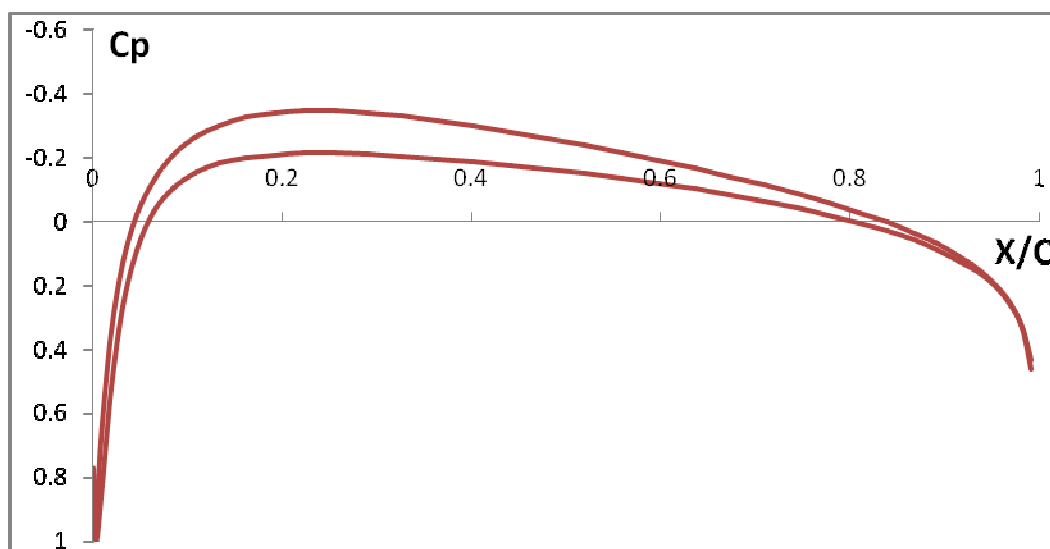


Figure 5.9 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=80$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

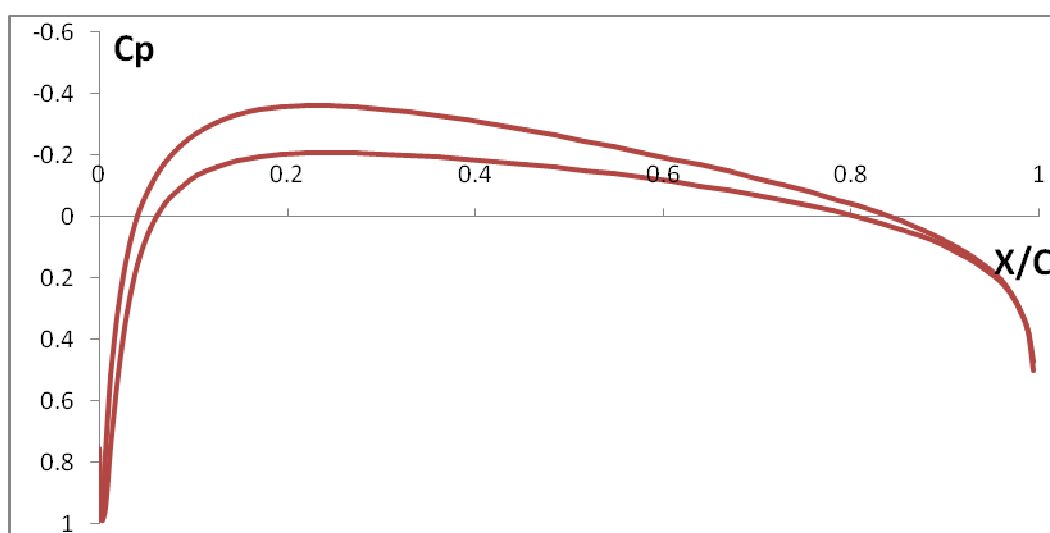


Figure 5.10 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

On remarque que les trois courbes $C_p=f(x/c)$ présentent exactement la même allure, ce qui veut dire que le fait de choisir $N=60$, 80 , ou 100 panneaux permet d'avoir une seule et même courbe pour le C_p : Ceci est en concordance parfaite avec la méthode des panneaux, plus exactement, avec la méthode de Hess et Smith qui stipule qu'avec une soixantaine de panneaux on arrive à avoir une assez bonne approximation. Ces trois courbes montrent donc qu'effectivement, avec une soixantaine de panneaux on obtient non pas une assez bonne mais une excellente approximation : Ce qui veut dire que le choix d'une soixantaine de panneaux est très largement suffisant pour avoir une parfaite exactitude en ce qui concerne le calcul du coefficient de pression C_p et que, de ce

fait, le fait d'aller au-delà de soixante panneaux s'avère être d'une inutilité qu'il serait préférable de « sauter » en ce sens qu'il s'agit d'une corvée en plus pour ainsi dire.

5.1.1.5 $C_p = f(x/c)$ en fonction de M

5.1.1.5.1 $C_p = f(x/c)$ pour $M=0.1$ et $\alpha = 1^\circ$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $M=0.1$ pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $\alpha = 1^\circ$ et $N=100$ panneaux

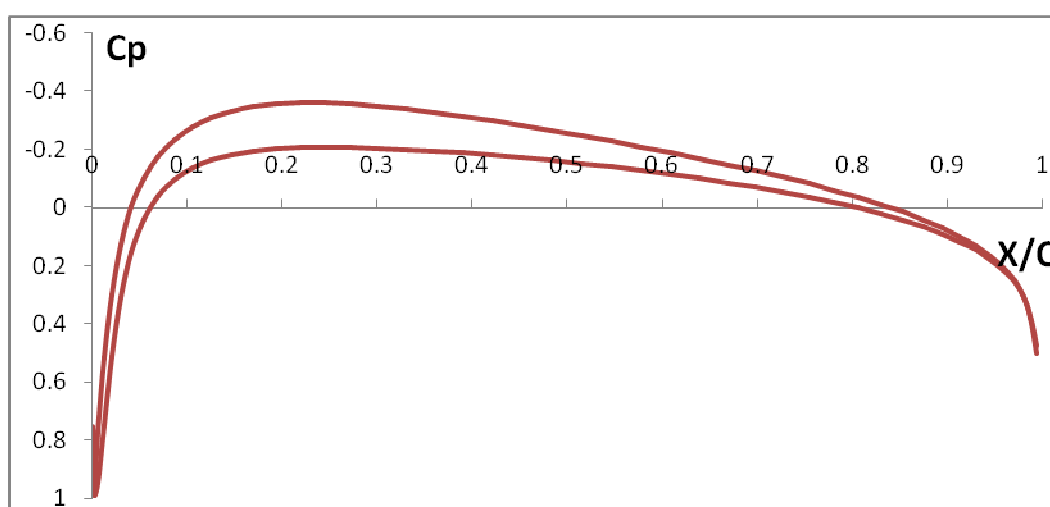


Figure 5.11 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à air libre pour $\alpha = 1^\circ$ $N=100$ et $M=0,1$: Les commentaires sont donc les mêmes.

5.1.1.5.2 $C_p = f(x/c)$ pour $M=0.1, 0.2, 0.25$, $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux

Ici nous avons ces trois graphiques qui représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $M=0.1, 0.2$, et 0.25 et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux.

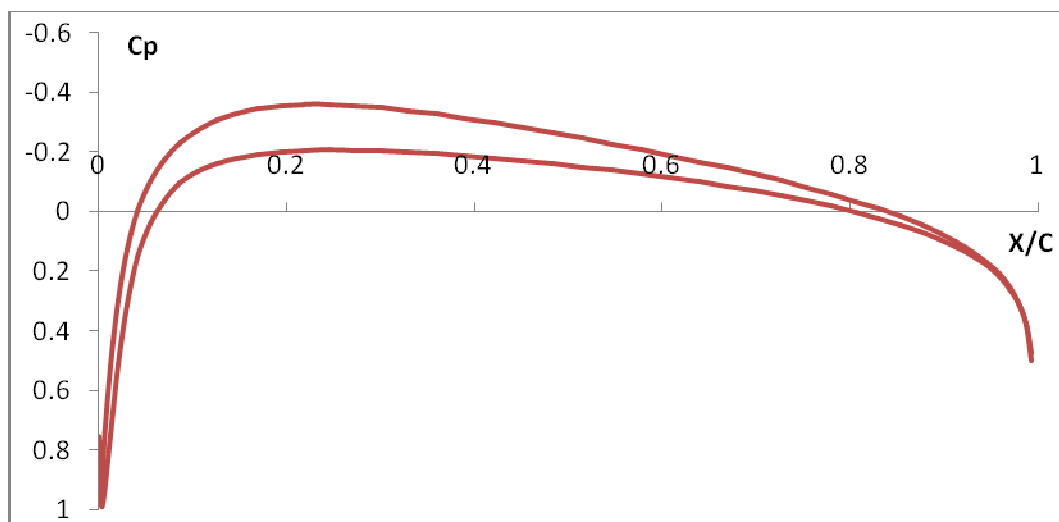


Figure 5.12 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

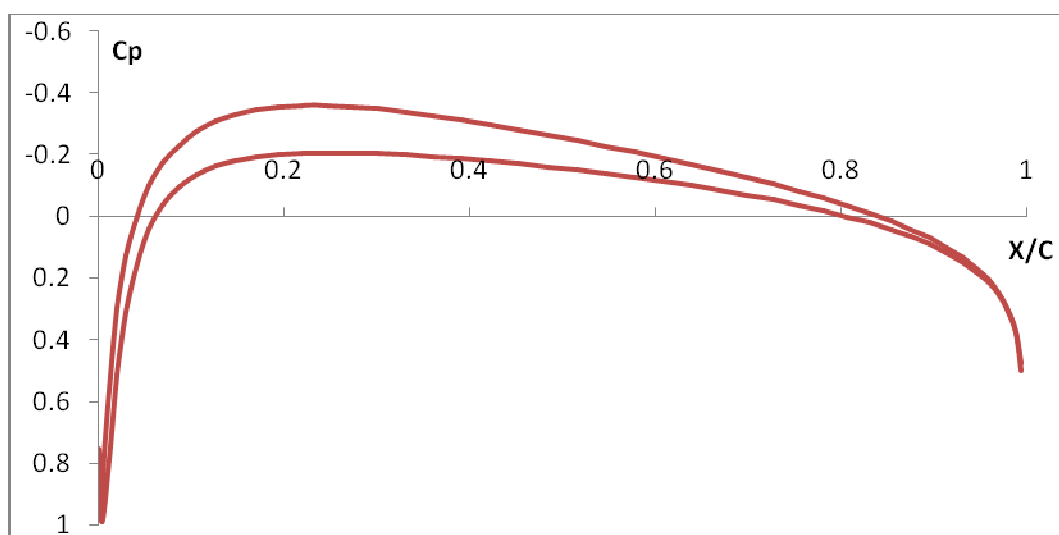


Figure 5.13 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.2$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

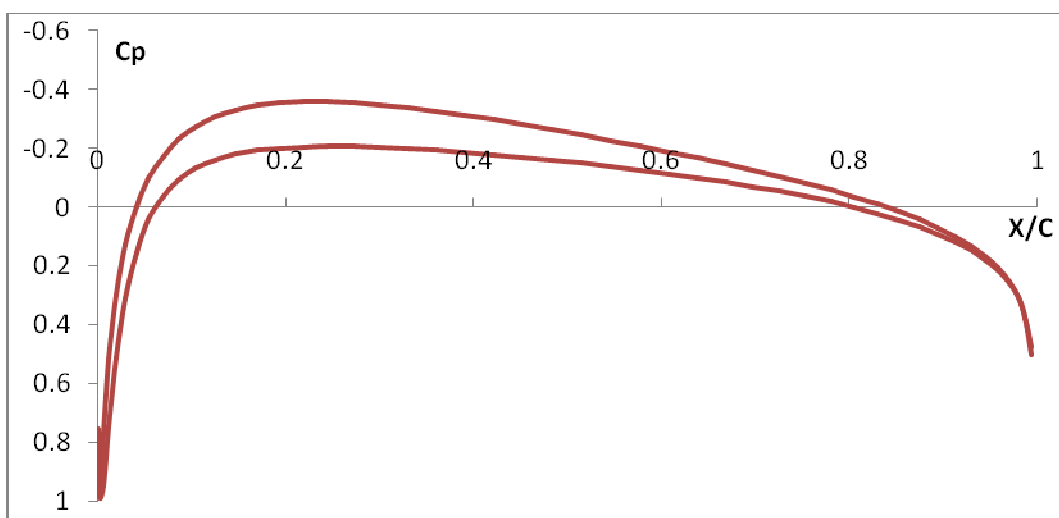


Figure 5.14 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.25$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

On remarque que les trois courbes $C_p=f(x/c)$ présentent exactement la même allure : On expliquera cela d'une façon détaillée par la suite.

5.1.1.5.3 $C_p = f(x/c)$ pour différentes valeurs de M , $\alpha = 1^\circ$ et $N = 100$ panneaux

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour différentes valeurs de M pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $\alpha = 1^\circ$ et $N=100$ panneaux.

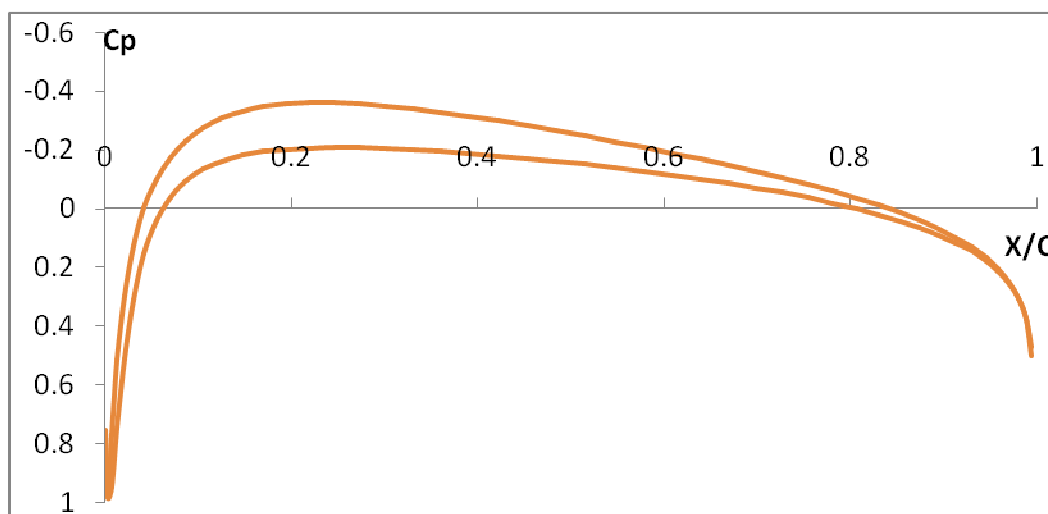


Figure 5.15 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de M et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux

On remarque que les trois courbes coïncident parfaitement les unes aux autres ce qui veut dire que le fait de choisir $M=0.1$, 0.2 ou 0.25 permet d'avoir une seule et même courbe pour le C_p : Ceci était prévisible en soit : En effet, on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influe très peu sur les variations du coefficient de pression: Ces graphiques le confirment donc bien puisque les trois courbes $C_p = f(x/c)$ présentent exactement une seule et même allure.

Il faut cependant signaler que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de pression devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.1.2 Cas profil a proximité d'une paroi

Là, il est question d'exposer les résultats obtenus pour le C_p d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à proximité d'une paroi.

5.1.2.1 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha = 0$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $\alpha=0^\circ$ pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$

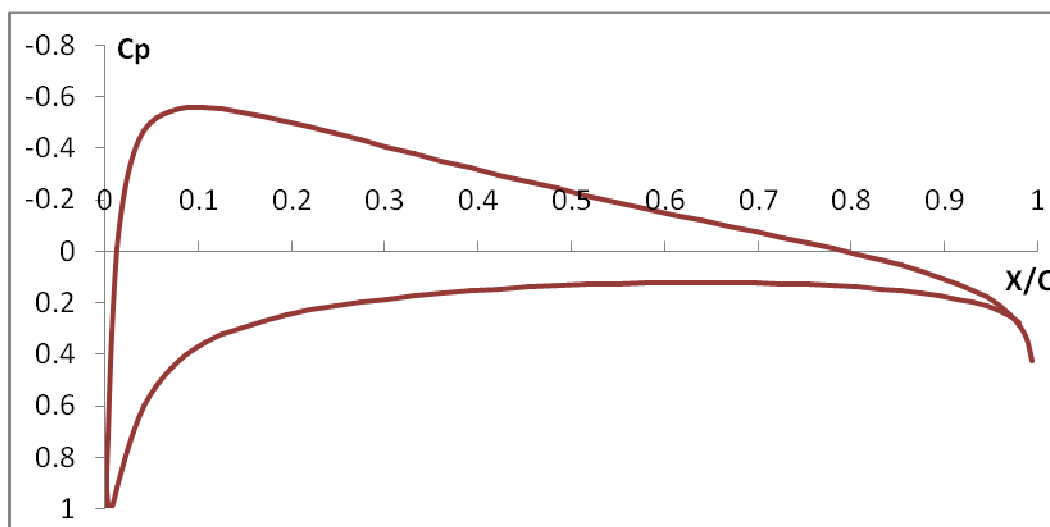


Figure 5.16 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que contrairement au cas où le profil est à air libre, l'allure de la courbe $C_p=f(x/c)$ ne présente plus une seule courbe mais deux courbes distinctes. Ceci est logique en soit puisqu'on sait que lorsque le profil est à proximité d'une paroi, l'air est pris entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage, ce qui fait qu'il se crée un goulot d'étranglement de l'air et par conséquent une surpression au dessous de l'aile-comme nous l'avons vu précédemment- il n'en demeure pas moins que cette surpression sera toujours moins importante que la dépression de l'extrados, et c'est ce qui explique le fait que le graphe $C_p=f(x/c)$ ne présente plus une seule courbe mais deux courbes distinctes comme nous venons de le dire.

5.1.2.2 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha \neq 0$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $\alpha \neq 0^\circ$ pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$

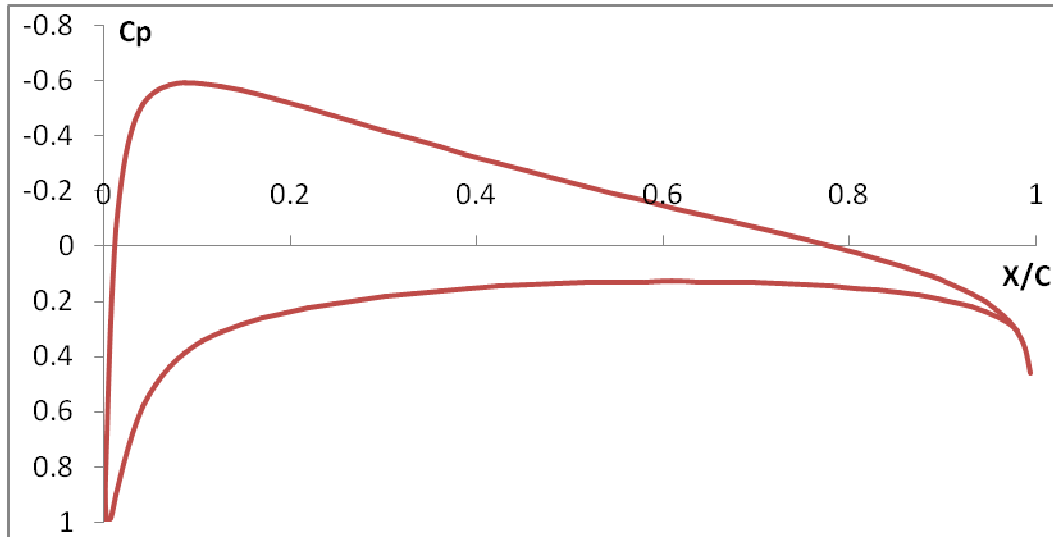


Figure 5.17 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que tout comme dans le cas où le profil est à incidence nulle, (toujours dans le cas du profil à proximité d'une paroi bien sûr), l'allure du graphe $C_p=f(x/c)$ présente deux courbes distinctes. Par contre, on remarque qu'il y a de légères déviations vers le bas sous l'intrados du profil et vers le haut sur l'extrados : Ceci est dû au fait que lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, les filets d'air sont déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression au niveau de l'extrados alors qu'ils sont déviés vers le bas sous l'intrados ce qui provoque une surpression à son niveau comme nous l'avons vu précédemment, or, l'extrados et l'intrados présentent déjà des pressions différentes lorsque l'incidence est nulle (contrairement au cas où le profil est à air libre), et donc, ces surpression et dépression de part et d'autre de l'aile vont s'ajouter aux nouvelles surpressions et dépressions engendrées par l'augmentation de l'angle d'incidence. D'où il en résulte une augmentation de la surpression et de la dépression de part et d'autre du profil.

5.1.2.3 $C_p = f(x/c)$ en fonction de Alpha

5.1.2.3.1 $C_p = f(x/c)$ pour Alpha = 1°, 3°, 5°, N=100 et M=0.1

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha = 1^\circ, 3^\circ$ et 5° et pour $N=100$ panneaux et $M=0.1$.

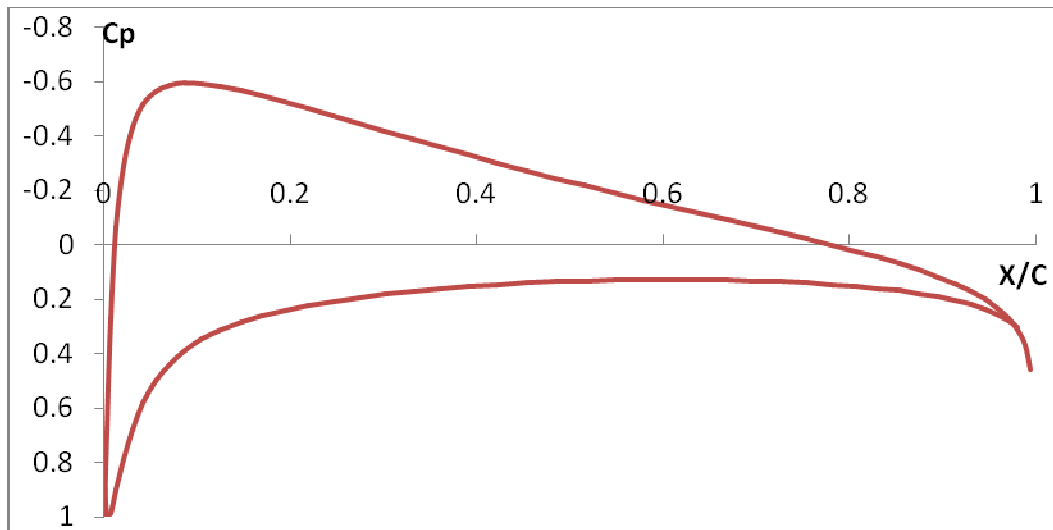


Figure 5.18 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=1^\circ$, N=100 et M=0.1

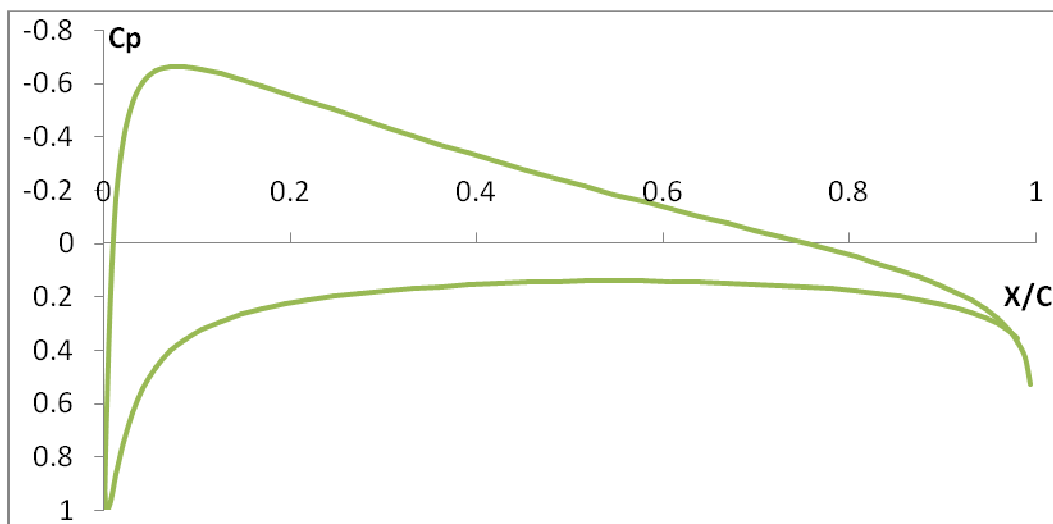


Figure 5.19 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=3^\circ$, N=100 et M=0.1

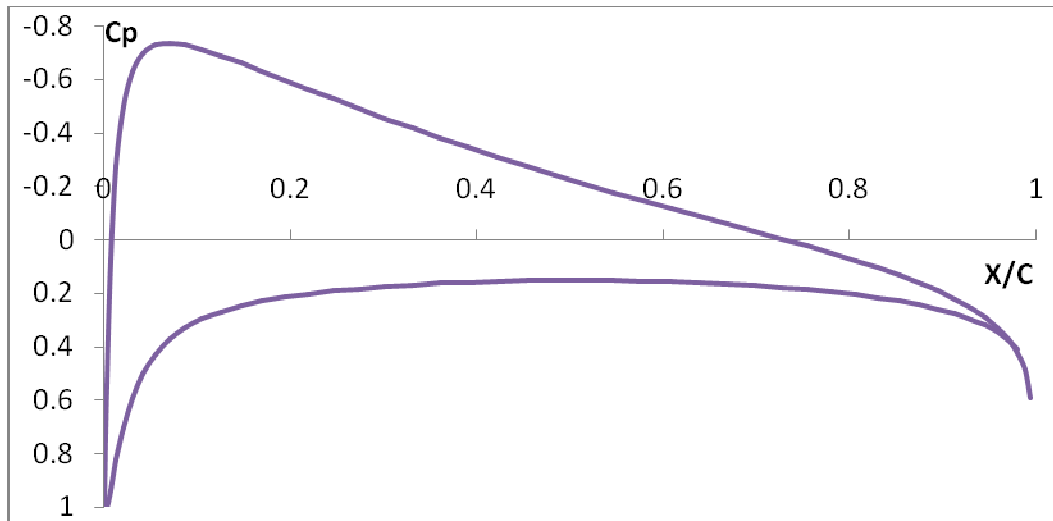


Figure 5.20 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que les graphes $C_p=f(x/c)$ présentent -à première vue- la même allure générale que celle pour $\alpha=1$. Par contre, en regardant d'un peu plus près, on se rend compte que ces derniers présentent de légères déviations les uns par rapport au autres ce qu'on expliquera ultérieurement.

5.1.2.3.2 $C_p = f(x/c)$ pour différentes valeurs de Alpha

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour différentes valeurs de α pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$.

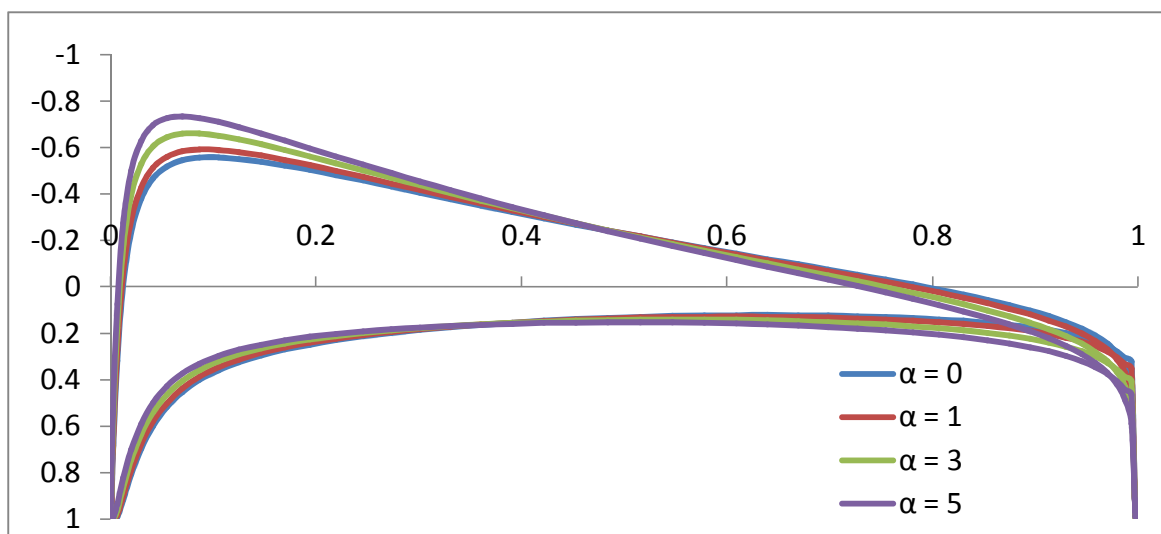


Figure 5.21 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de α et pour $N=100$ et $M=0.1$

On remarque qu'au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence il y a une déviation de plus en plus vers le bas sous l'intrados du profil et de plus en plus vers le haut sur l'extrados. Ceci est logique puisqu'on sait qu'au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence les filets d'air sont de plus en plus déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression de plus en plus importante au niveau de l'extrados, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée de plus en plus vers le bas aux filets d'air provoque une surpression de plus en plus importante sachant que cette surpression sera toujours moins importante que la dépression de l'extrados. D'où, il en résulte une surpression et une dépression en augmentation continue avec l'angle d'incidence.

5.1.2.4 $C_p = f(x/c)$ en fonction de N

5.1.2.4.1 $C_p = f(x/c)$ pour $N=100$ et $\alpha = 1^\circ$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour $N=100$ panneaux pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha = 1^\circ$ et $M=0.1$

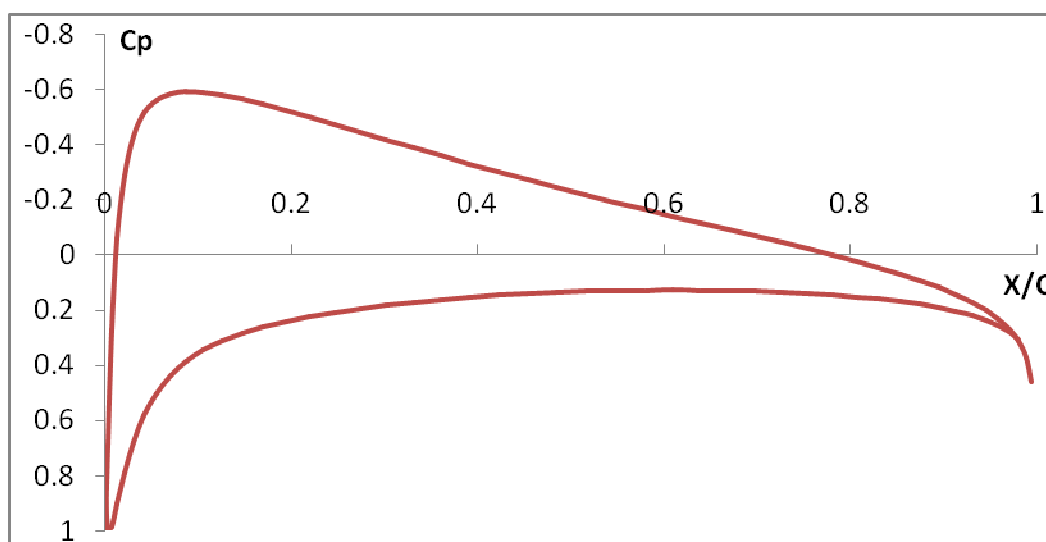


Figure 5.22 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à proximité d'une paroi pour le cas $\alpha = 1^\circ$ $N=100$ et $M=0,1$: Les commentaires sont donc les mêmes.

5.1.2.4.2 $C_p = f(x/c)$ pour $N=60, 80, 100$ panneaux, $\alpha = 1^\circ$ et $M=0.1$

Ici nous avons ces trois graphiques qui représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $N=60, 80$, et 100 panneaux et pour $\alpha=1^\circ$ et $M=0.1$

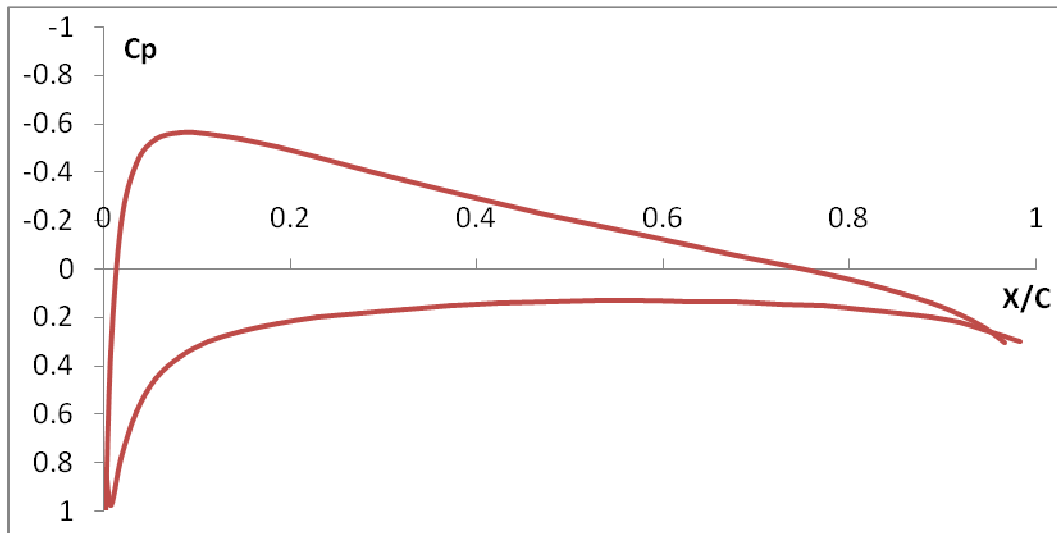


Figure 5.23 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=60$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

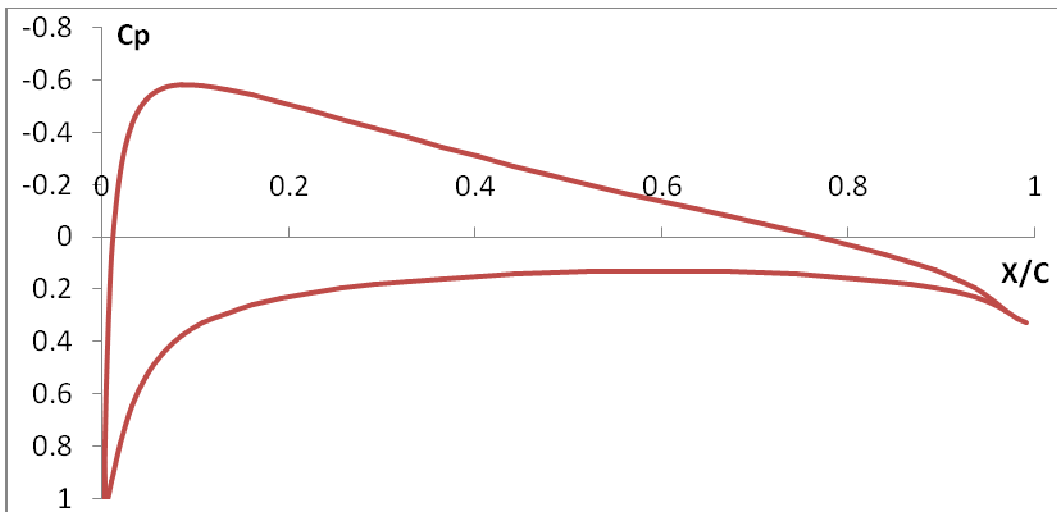


Figure 5.24 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=80$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

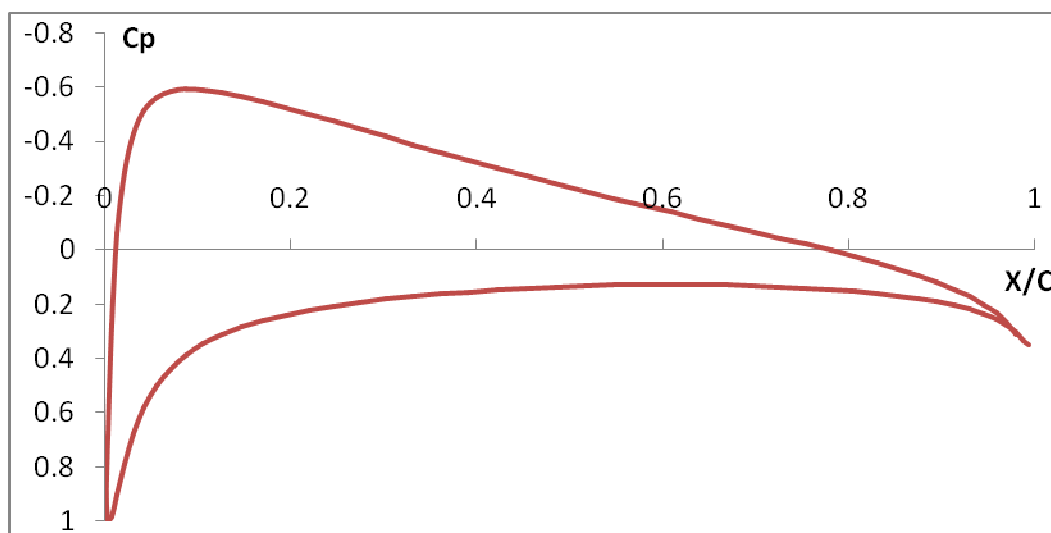


Figure 5.25 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$, $\alpha=1^\circ$, et $M=0.1$

On remarque que les trois courbes $C_p=f(x/c)$ présentent à première vue la même allure ce qui veut dire que le fait de choisir **60**, **80**, ou **100** panneaux permet d'avoir pratiquement la même courbe pour les variations du C_p puisqu'à partir de **$N=60$** les résultats tendent à converger : Ceci est, une fois de plus, en concordance parfaite avec la méthode des panneaux, plus exactement, avec la méthode de Hess et Smith qui stipule qu'avec une soixantaine de panneaux on arrive à avoir une assez bonne approximation. Ces trois courbes montrent donc qu'avec une soixantaine de panneaux on obtient non pas une assez bonne mais une très bonne approximation : Ce qui veut dire que le choix d'une soixantaine de panneaux est très largement suffisant pour avoir une bonne exactitude en ce qui concerne le calcul du coefficient de pression C_p et que, de ce fait, le fait d'aller au-delà de soixante panneaux s'avère être d'une inutilité qu'il serait préférable de « sauter » en ce sens qu'il s'agit d'une corvée en plus pour ainsi dire.

5.1.2.5 $C_p = f(x/c)$ en fonction de M

5.1.2.5.1 $C_p = f(x/c)$ pour $M=0.1$ et $\alpha = 1^\circ$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour **$M=0.1$** pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour **$\alpha = 1^\circ$** et **$N=100$** panneaux

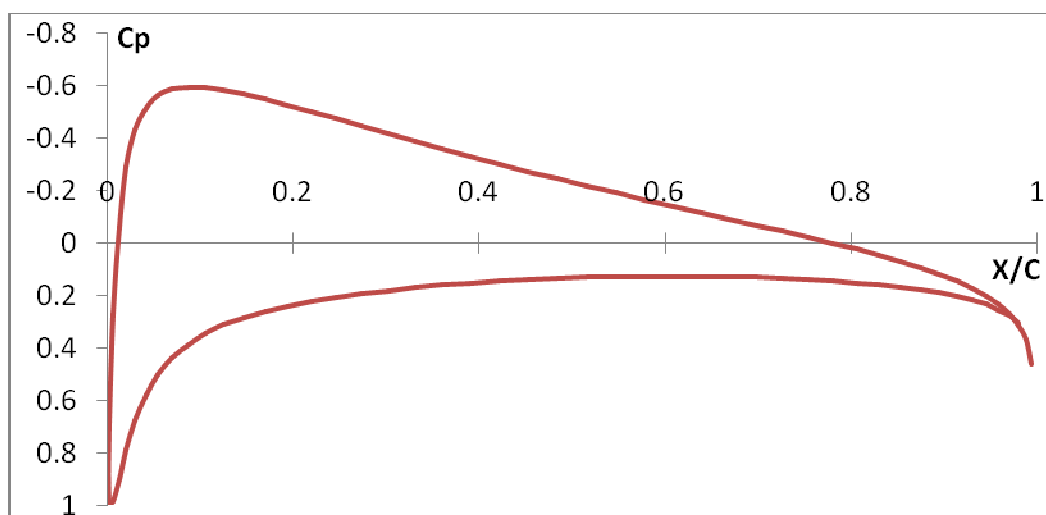


Figure 5.26 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à proximité d'une paroi pour le cas $\alpha = 1^\circ$ $N=100$ et $M=0,1$: Les commentaires sont donc les mêmes.

5.1.2.5.2 $C_p = f(x/c)$ pour $M=0.1, 0.2, 0.25$, $\text{Alpha}=1^\circ$ et $N=100$ panneaux

Ici nous avons ces trois graphiques qui représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $M=0.1, 0.2$, et 0.25 et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux.

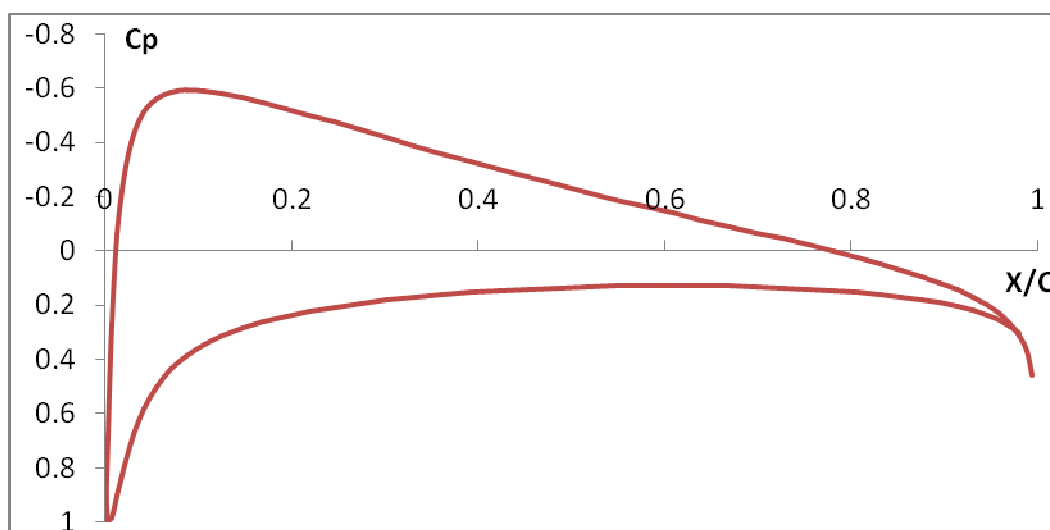


Figure 5.27 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

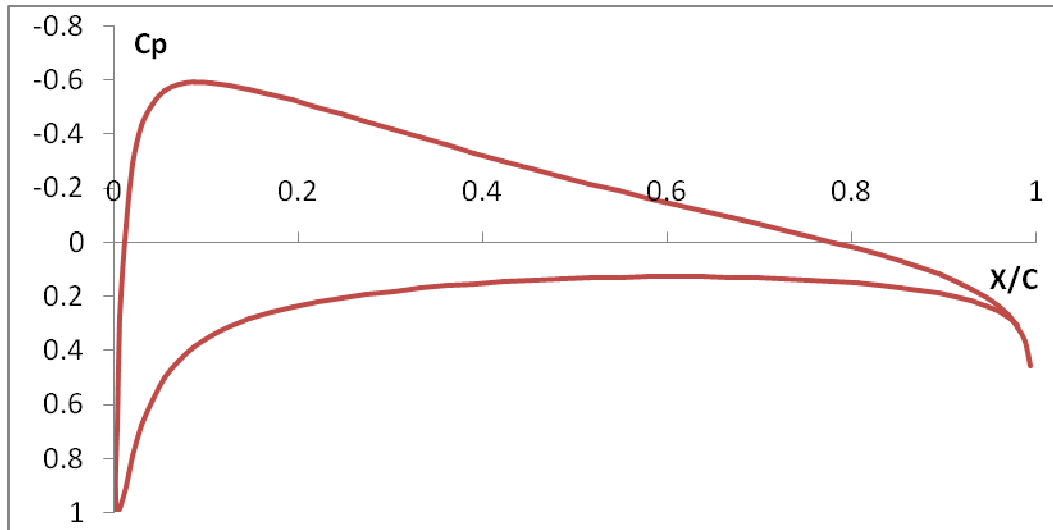


Figure 5.28 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.2$, $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

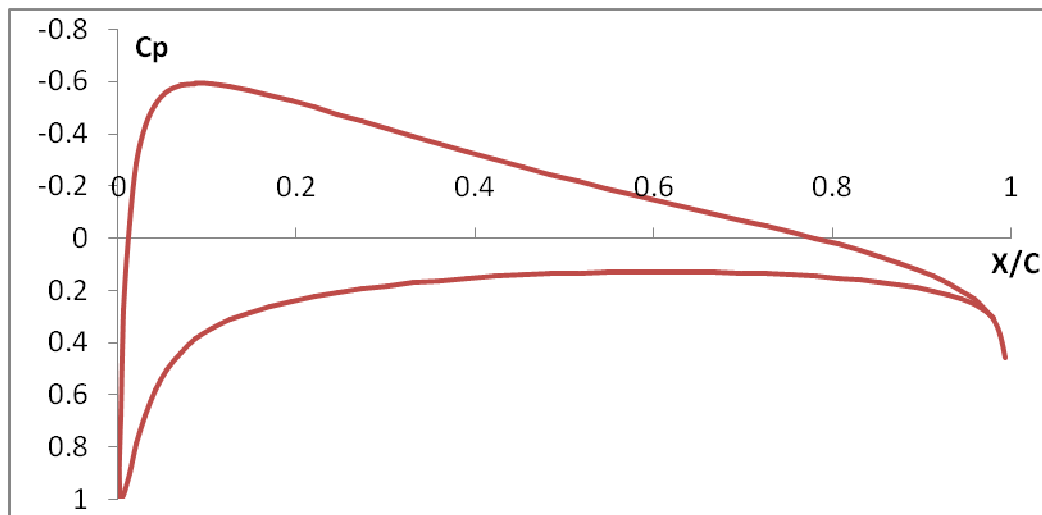


Figure 5.29 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.25$ $\alpha=1^\circ$, et $N=100$

On remarque que les trois courbes $C_p = f(x/c)$ présentent exactement la même allure : On expliquera cela d'une façon détaillée par la suite.

5.1.2.5.3 $C_p = f(x/c)$ différentes valeurs de M , $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour différentes valeurs de M pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour le cas $\alpha = 1^\circ$ et $N=100$ panneaux.

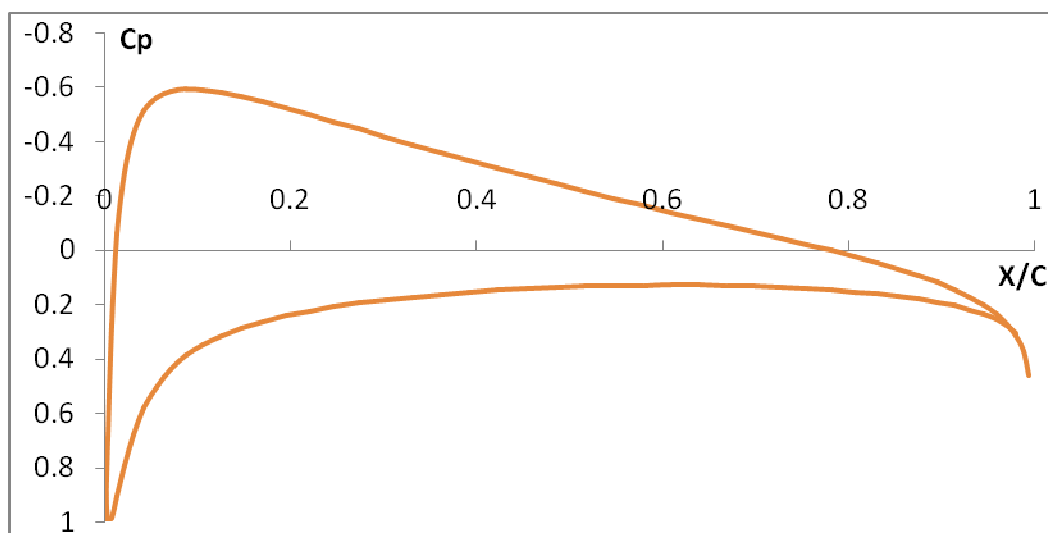


Figure 5.30 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de M et pour $\alpha=1^\circ$ et $N=100$ panneaux

On remarque que les trois courbes coïncident parfaitement les unes aux autres ce qui veut dire que le fait de choisir $M=0.1$, 0.2 ou 0.25 permet d'avoir une seule et même courbe pour le C_p : Ceci était, une fois de plus, prévisible en soit puisqu'on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influe très peu sur les variations du coefficient de pression: Ces graphiques le confirment donc bien puisque les trois courbes $C_p = f(x/c)$ présentent exactement une seule et même allure.

Il faut, une fois de plus, signaler que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de pression devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.1.3 Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi pour $M=0.1$, $N=100$ panneaux et pour $\alpha = 0^\circ, 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$

Ces graphiques représentent une comparaison entre les coefficients de pression C_p pour un profil **NACA 0018** dans le cas où il est à air libre et à proximité d'une paroi pour $M=0.1$, $N=100$ panneaux et pour $\alpha = 0^\circ, 1^\circ, 3^\circ$ et 5° respectivement.

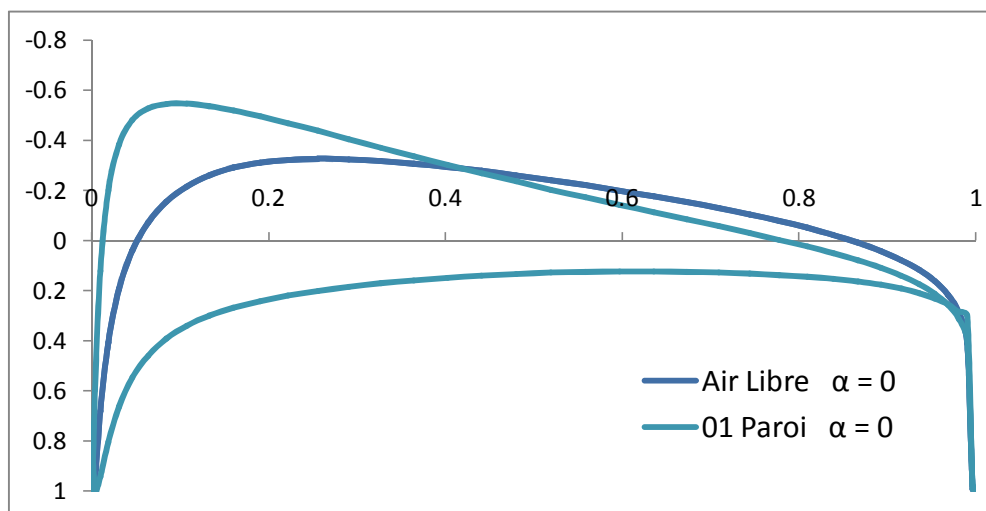


Figure 5.31 : Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA 0018 pour $\alpha=0^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

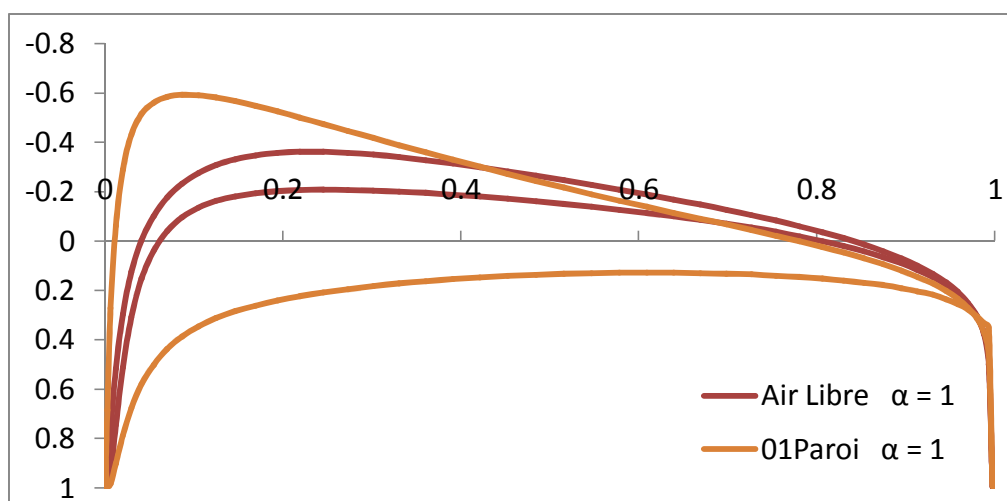


Figure 5.32 : Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA 0018 pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

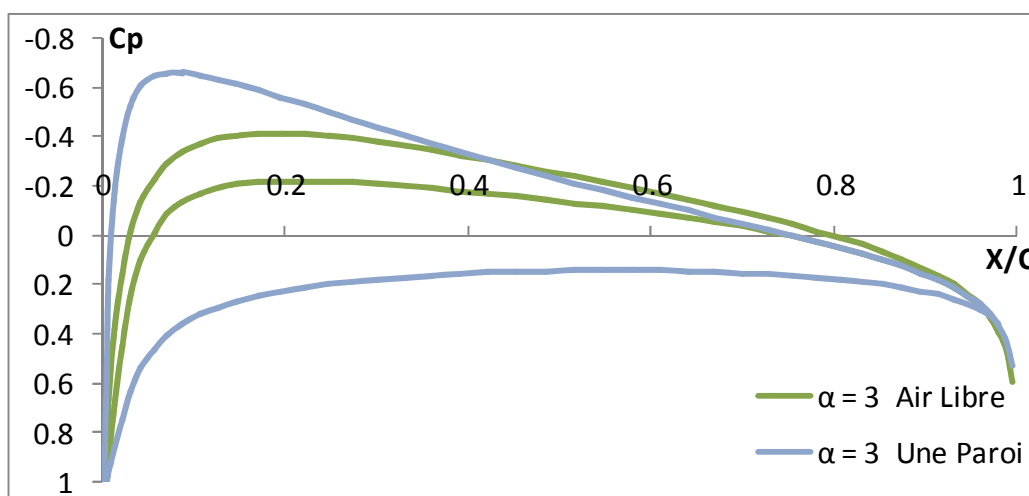


Figure 5.33 : Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA 0018 pour $\alpha=3^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

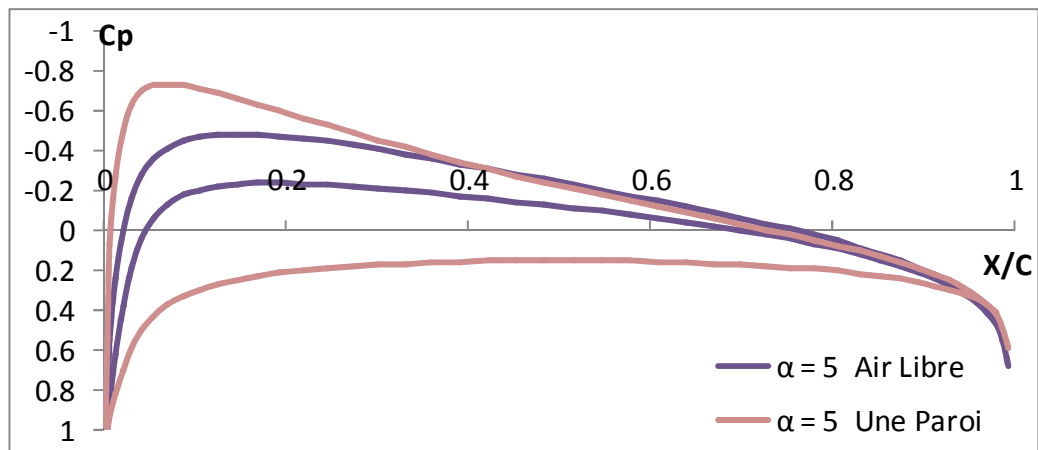


Figure 5.34 : Comparaison entre C_p air libre et C_p une paroi profil NACA 0018 pour $\alpha=5^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

On remarque qu'il y a toujours une augmentation du coefficient de pression C_p dans le cas où le profil est à proximité d'une paroi par rapport au cas où il est à air libre et ce pour toutes les valeurs de $\alpha = 0^\circ, 1^\circ, 3^\circ$ et 5° respectivement.

5.1.4 Conclusion

Ces graphiques nous permettent de constater qu'effectivement l'effet de sol augmente bel et bien le coefficient de Pression C_p : Par exemple, si on prend pour titre de comparaison les coefficients C_p du profil **NACA 0018** dans le cas du profil à air libre et à proximité d'une paroi pour $\alpha = 1^\circ$ et pour $N=100$ panneaux et $M=0.1$, comme le montre la Figure 5.ci-dessous, on voit alors clairement qu'il y a augmentation du coefficient de pression dans le cas du profil à proximité d'une paroi par rapport au cas où il est à air libre : D'où tout l'intérêt qui lui revient quant au transport des charges d'une façon beaucoup plus économique car diminution de la vitesse d'où économie de carburant.

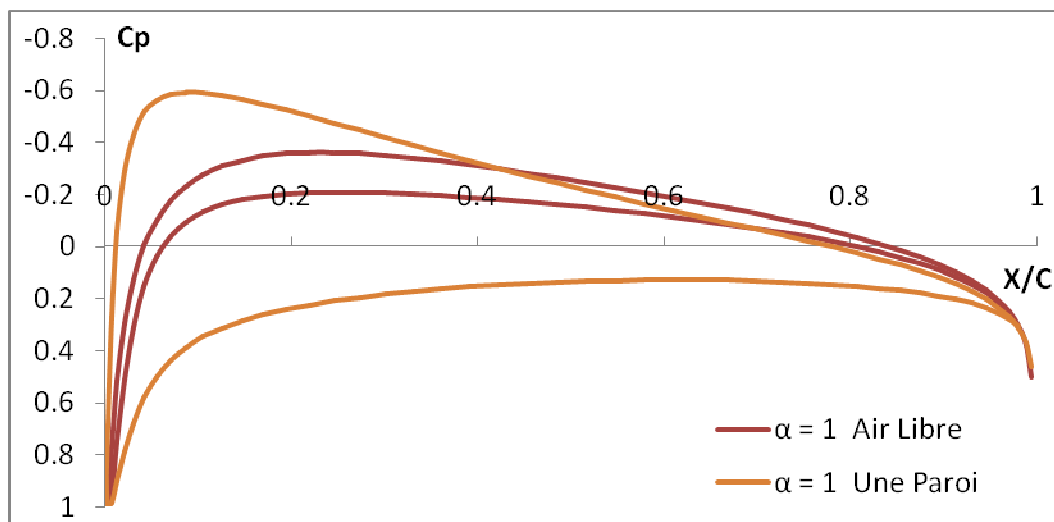


Figure 5.35 : Comparaison entre C_p air libre et une paroi profil NACA 0018 pour $\alpha=1^\circ$, $N=100$ et $M=0.1$

5.2 RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE PORTANCE C_l

Ici il est question d'exposer d'une façon pratique les graphiques obtenus à partir de l'application sur le coefficient de portance C_l pour un profil **NACA 0018** en faisant varier les paramètres M et N tout en analysant et expliquant à chaque fois les résultats obtenus d'une façon Claire et nette.

Pour ce faire, on doit tenir compte des deux cas de figures, qui sont les suivants :

- Cas profil à air libre
- Cas profil à proximité d'une paroi

5.2.1 Cas profil à air libre

Ici, nous allons exposer les résultats obtenus pour le C_l d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à air libre:

5.2.1.1 $C_l = f(\alpha)$ air libre pour différentes valeurs de N

5.2.1.1.1 $C_l = f(\alpha)$ pour $N = 100$ et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de portance C_l en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$.

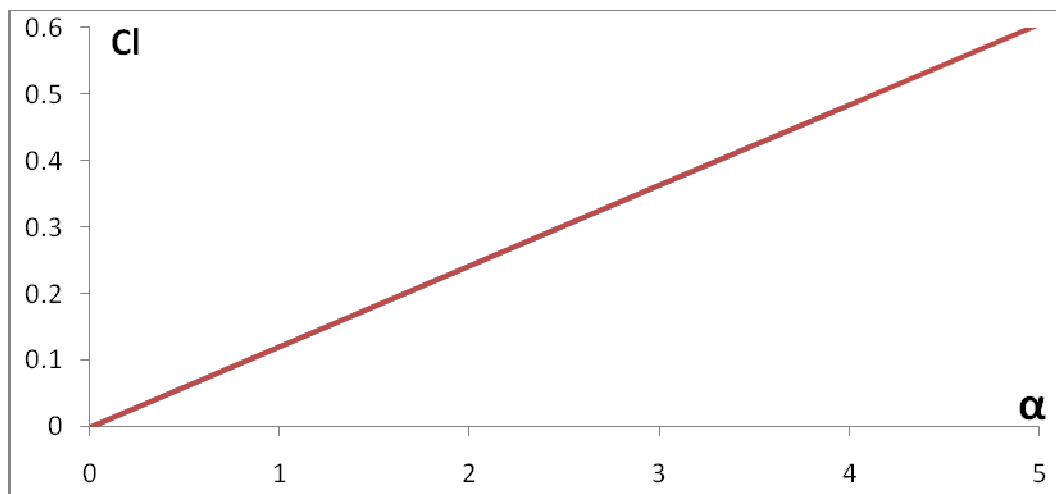


Figure 5.36 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 Air libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$

On remarque que la courbe $C_l = f(\alpha)$ est une droite passant par l'origine d'équation $C_l = 0.1209\alpha$ ce qui est logique en soit puisqu'on s'attendait à avoir

une portance nulle pour $\alpha = 0^\circ$, étant donné qu'à $\alpha=0^\circ$ les filets d'air présentent les mêmes étranglements à l'extrados et à l'intrados à cause de la symétrie du profil ce qui fait que les particules d'air les parcourent avec une même vitesse à l'extrados et à l'intrados du profil : D'où il en résulte une même pression à l'extrados et à l'intrados d'après le théorème de Bernoulli.

Or, on sait que la portance d'un avion est engendrée par la différence de pression de part et d'autre de l'aile : D'où, il en résulte une portance, et par conséquent, un coefficient de portance (**CI**) nuls pour $\alpha = 0^\circ$.

Lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, les filets d'air sont déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression au niveau de l'extrados, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée vers le bas aux filets d'air provoque une surpression moins importante que la dépression de l'extrados : On s'attend donc à ce que au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence à avoir une dépression de plus en plus importante sur l'extrados puisque les filets d'air vont être de plus en plus déviés vers le haut et une surpression de plus en plus importante sous l'intrados à cause de la déviation imposée de plus en plus vers le bas aux filets d'air .D'où, il en résulte une portance et par conséquent un coefficient de portance en augmentation continue avec l'angle d'incidence

5.2.1.1.2 $CI = f(\alpha)$ pour $N=60, 80, 100$ panneaux et pour $M = 0.1$

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de portance **CI** en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour **$N=60, 80$** , et **100** panneaux et pour **$M=0.1$** .

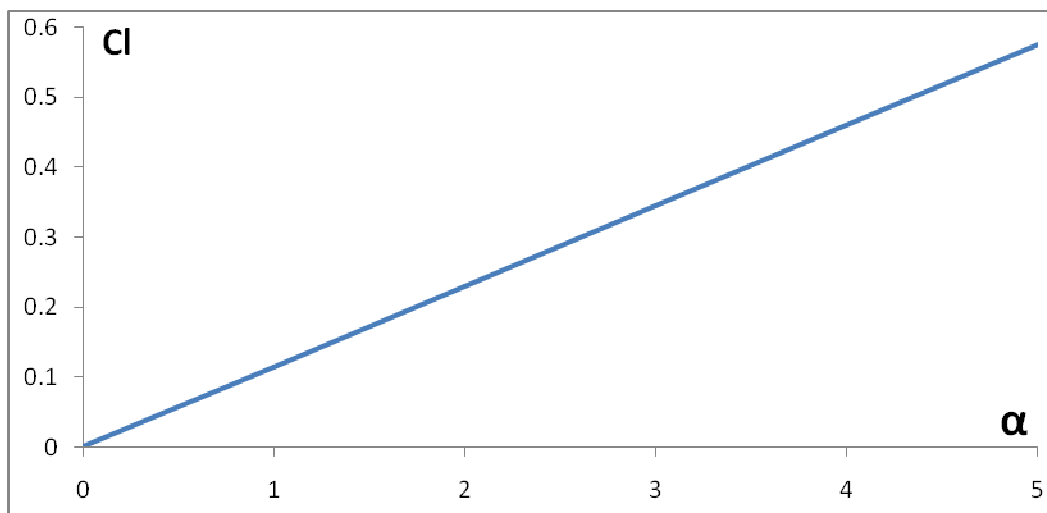


Figure 5.37 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N=60$ et $M=0.1$

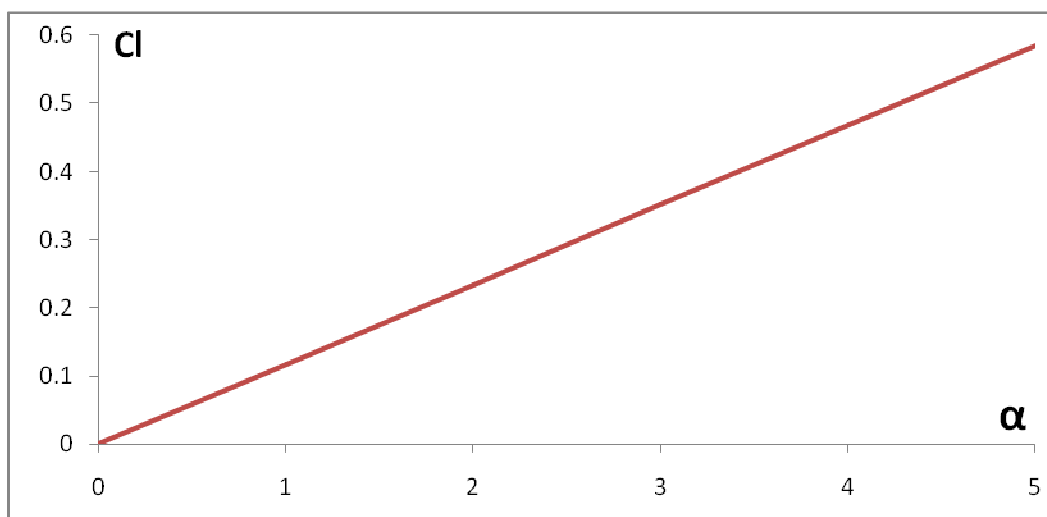


Figure 5.38 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N = 80$ et $M = 0.1$

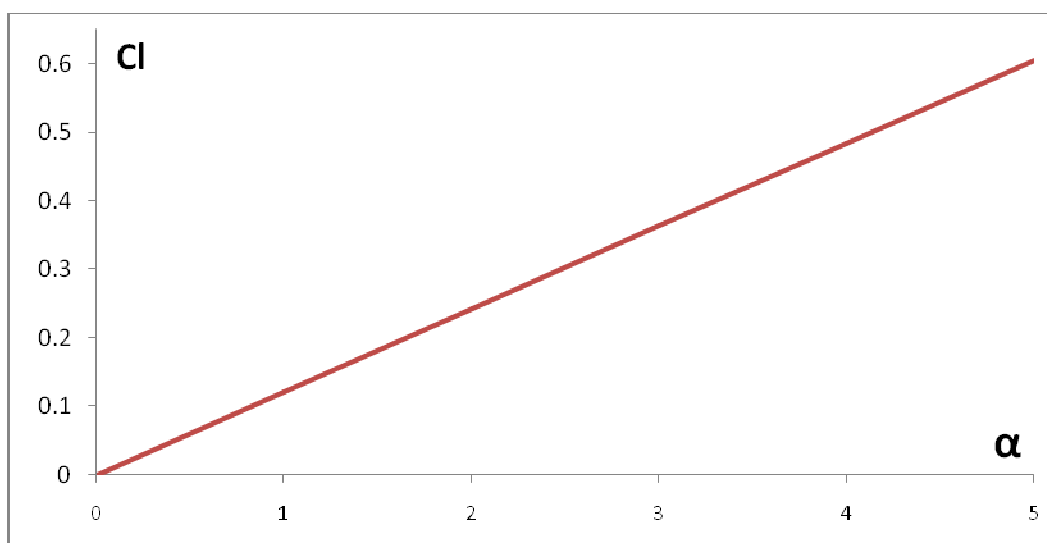


Figure 5.39 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que l'allure des courbes de $Cl = f(\alpha)$ est toujours une droite passant par l'origine d'équation $Cl = (a \alpha)$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil à air libre pour $N=100$ et $M=0.1$, il ne change donc que le nombre de panneaux. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $N=60, 80$ et 100 panneaux, on trouve $a = 0.118, 0.119$ et 0.1209 respectivement.

5.2.1.1.3 $Cl = f(\alpha)$ air libre pour différentes valeurs de N et pour $M=0.1$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $M = 0.1$ et pour différentes valeurs de N .

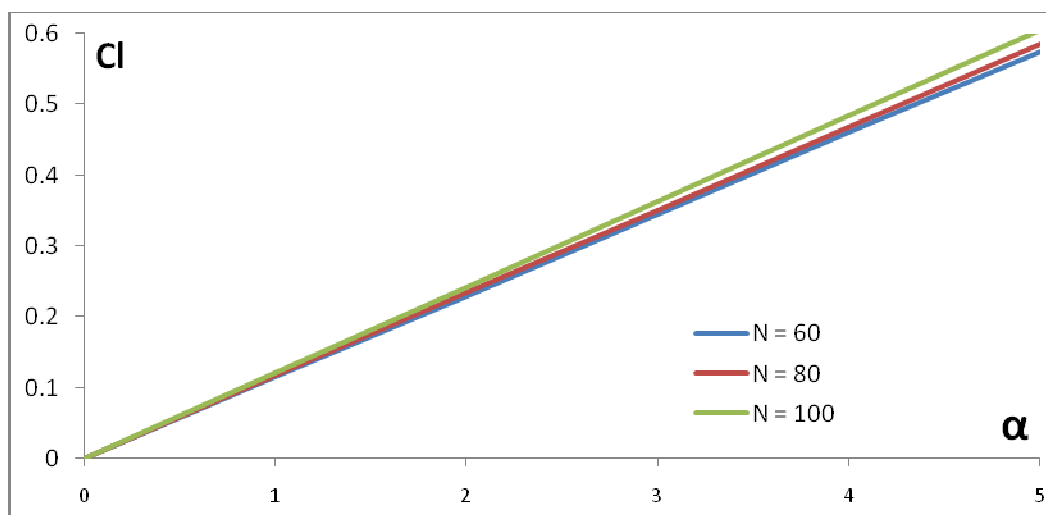


Figure 5.40 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de N

On remarque que les trois droites sont presque confondues les unes aux autres : En effet, la méthode des panneaux nous apprend qu'avec une soixantaine de panneaux on obtient une assez bonne approximation : Ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $Cl = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à $0.118, 0.119$ et 0.1209 pour $N=60, 80$, et 100 panneaux respectivement.

5.2.1.2 $Cl = f(\alpha)$ air libre pour différentes valeurs de M

5.2.1.2.1 $Cl = f(\alpha)$ air libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$

Ce graphique représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $M = 0.1$ et $N=100$

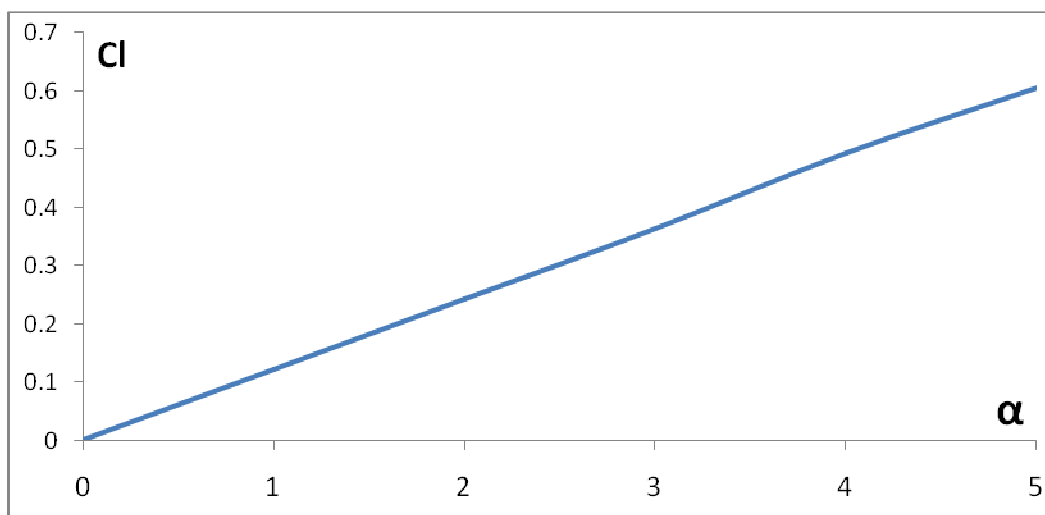


Figure 5.41 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$ et $N=100$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à air libre pour $N=100$ et $M=0,1$: Les commentaires sont donc les mêmes.

5.2.1.2.2 $Cl = f(\alpha)$ air libre pour $M=0.1, 0.2, 0.25$ et pour $N=100$ panneaux

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $M=0.1, 0.2$ et 0.25 respectivement et pour $N=100$ panneaux

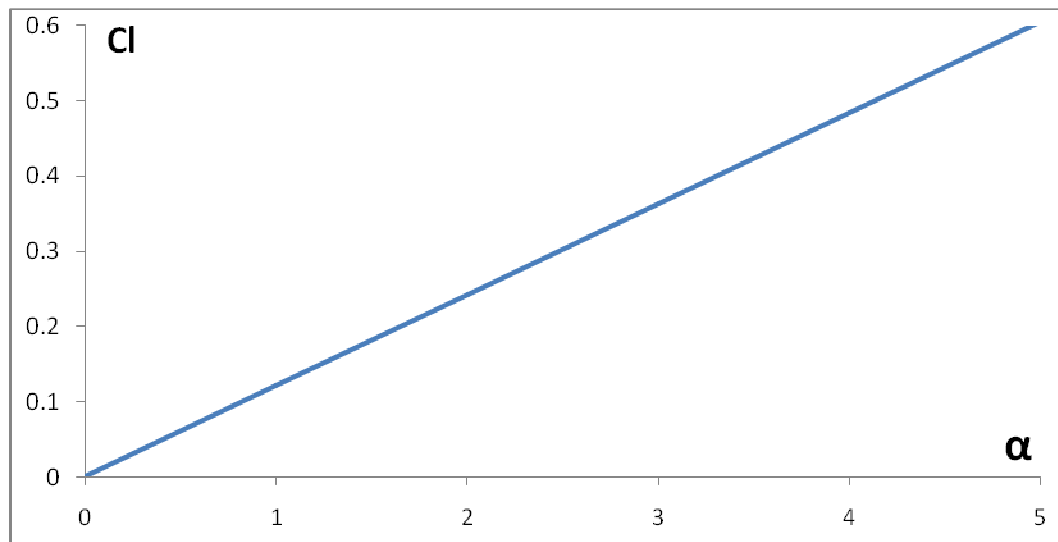


Figure 5.42 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.1$ et $N=100$

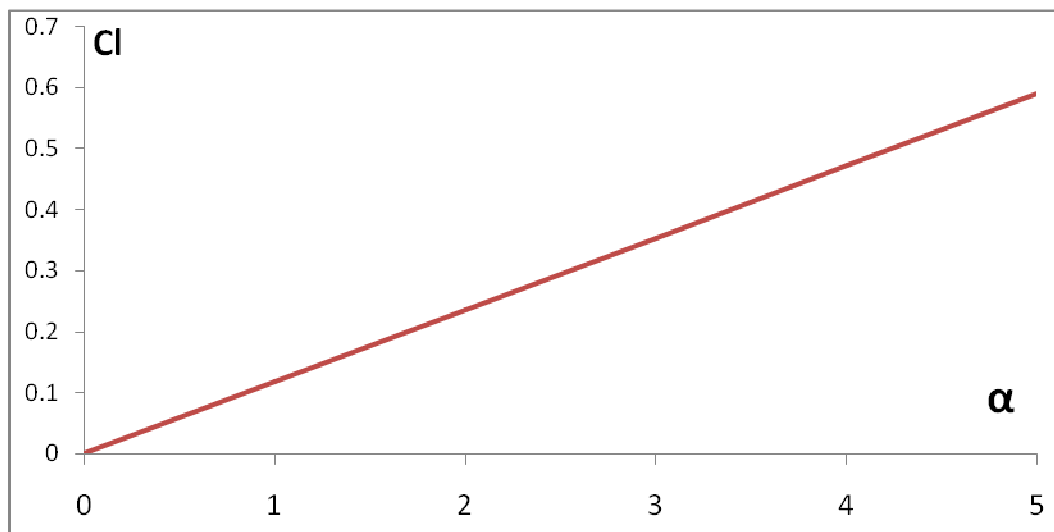


Figure 5.43 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.2$ et $N=100$

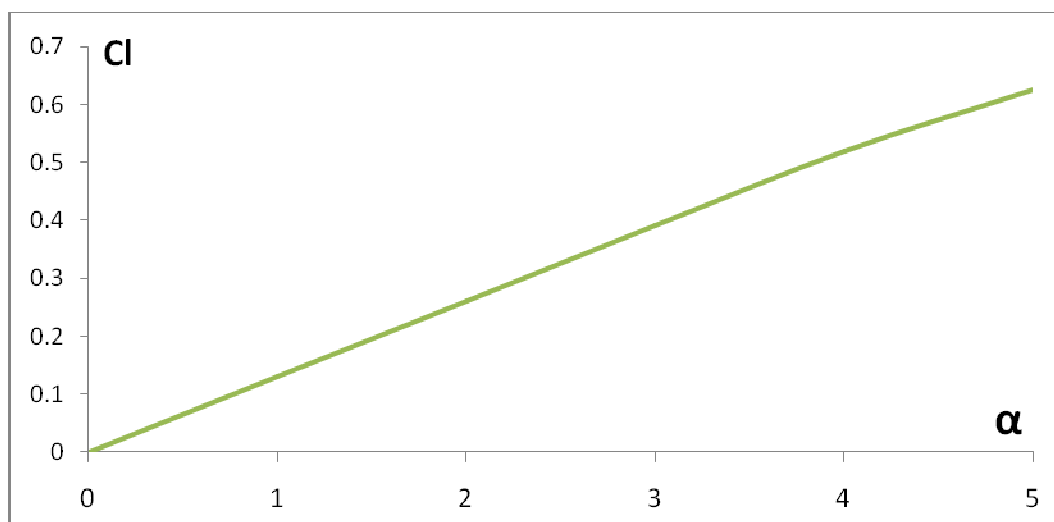


Figure 5.44 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour $M=0.25$ et $N=100$

On remarque que l'allure des courbes de $CI = f(\alpha)$ est toujours une droite passant par l'origine d'équation $CI = a \cdot \alpha$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil à air libre pour $M=0.1$ et $N=100$, il ne change donc que le nombre de Mach. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $M=0.1, 0.2$ et 0.25 , on trouve $a= 0.1185, 0.11998$ et 0.1209 respectivement.

5.2.1.2.3 $CI = f(\alpha)$ air libre pour différentes valeurs de M et pour $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de portance CI en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à air libre pour $N=100$ et pour différentes valeurs de M .

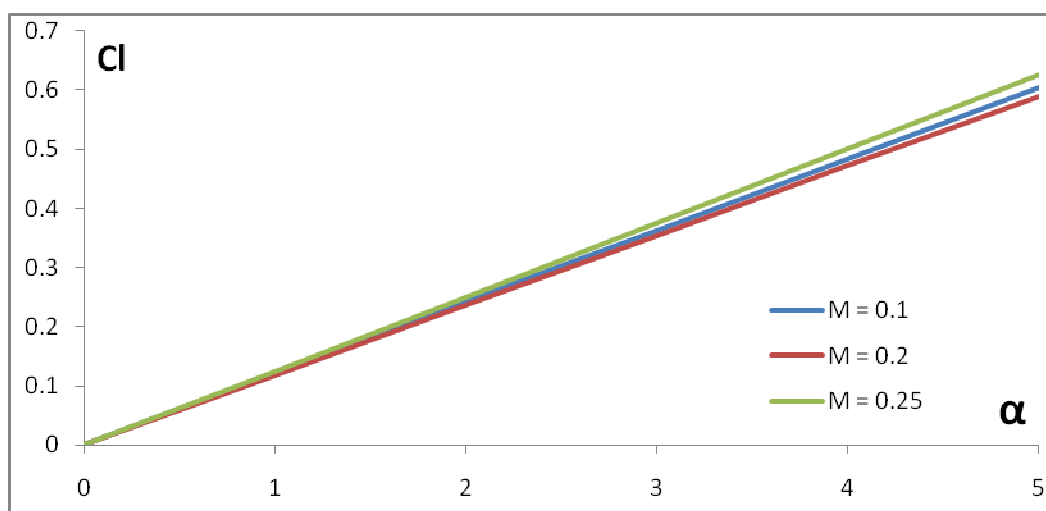


Figure 5.45 : $CI = f(\alpha)$ NACA 0018 air libre pour différentes valeurs de M

On remarque que les trois droites $CI = f(\alpha)$ sont presque confondues les unes aux autres : En effet, on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influe très peu sur les variations du coefficient de portance : Ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $CI=f(\alpha)$ présentent des pentes égales à $0.1185, 0.998$ et 0.1209 pour $M=0.1, 0.2$, et 0.25 respectivement.

Il faut aussi signaler dans ce cas que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de portance devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.2.2 Cas profil a proximité d'une paroi

Là, il est question d'exposer les résultats obtenus pour le CI d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à proximité d'une paroi:

5.2.2.1 $CI = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de N

5.2.2.1.1 $CI = f(\alpha)$ une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de portance CI en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$.

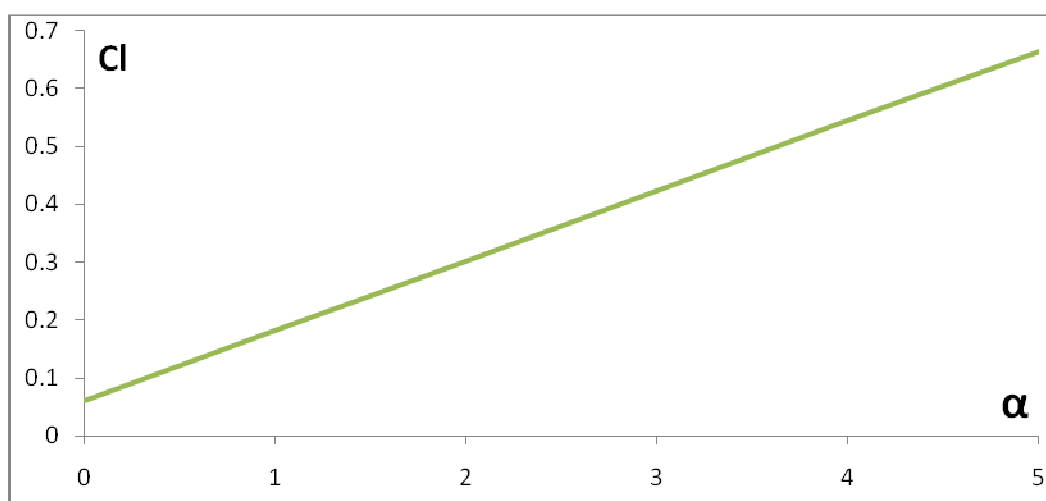


Figure 5.46 : $CI = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que l'allure de la courbe $CI=f(\alpha)$ est une droite ne passant pas par l'origine d'équation $CI = a \cdot \alpha + b$ telle que $a=0.118$, ce qui est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que lorsque le profil est à proximité d'une paroi, l'air est pris entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage, ce qui fait qu'il se crée un goulot d'étranglement de l'air et par conséquent une surpression au dessous de l'aile-comme- nous l'avons vu précédemment- ce qui fait que cette différence de pression de part et d'autre de l'aile va engendrer une portance, et par conséquent, un coefficient de portance non nuls contrairement au cas où le profil est à air libre.

Au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence, les filets d'air vont être de plus en plus déviés vers le haut sur l'extrados ce qui provoque une dépression de

plus en plus importante sur ce dernier, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée de plus en plus bas aux filets d'air provoque une surpression de plus en plus importante. , D'où, il en résulte une portance, et par conséquent un coefficient de portances en augmentation continue avec l'angle d'incidence

5.2.2.1.2 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour $N = 60, 80$ et 100 panneaux et pour $M = 0.1$

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N = 60, 80$, et 100 panneaux et pour $M = 0.1$.

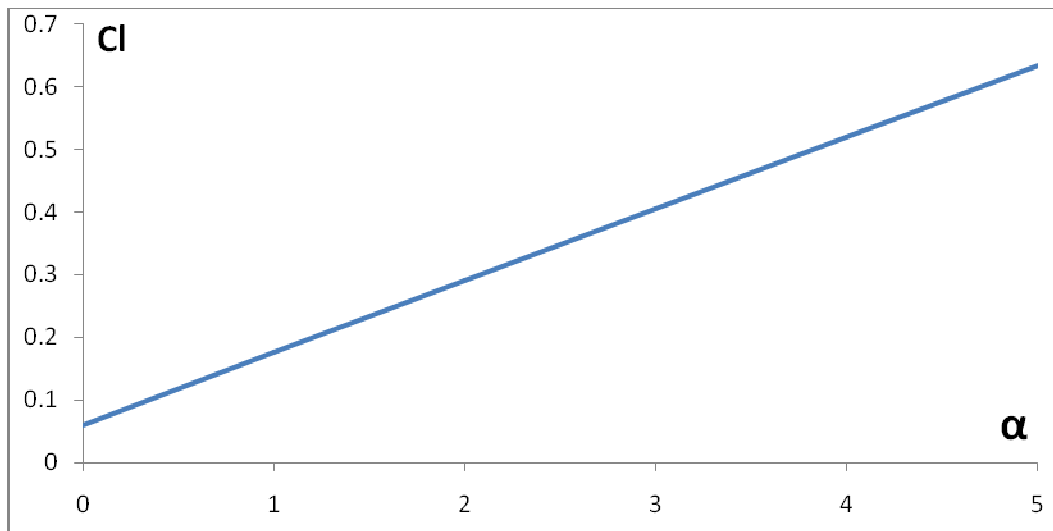


Figure 5.47 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=60$ et $M=0.1$

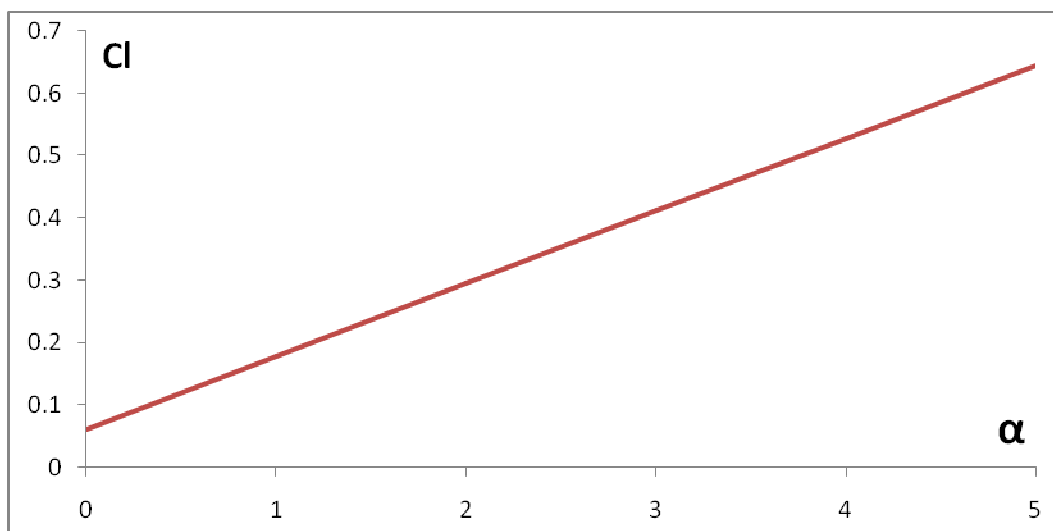


Figure 5.48 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=80$ et $M=0.1$

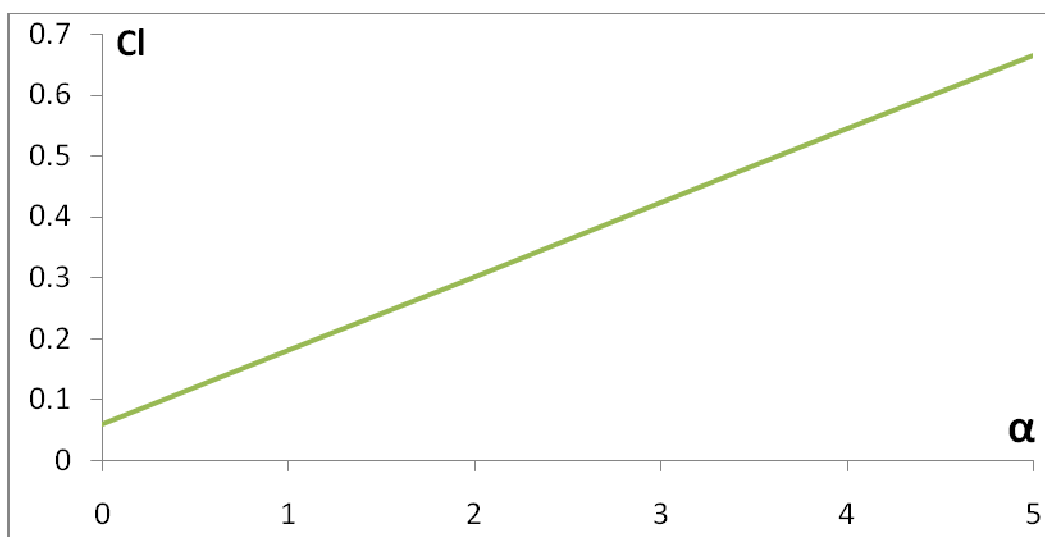


Figure 5.49 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N=100$ et $M=0.1$

On remarque que l'allure des courbes de $Cl=f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $Cl = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$, il ne change donc que le nombre de panneaux. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $N=60$, 80 et 100 panneaux, on trouve $a = 0.115$, 0.117 et 0.118 respectivement

5.2.2.1.3 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de N et pour $M=0.1$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $M=0.1$ et pour différentes valeurs de N

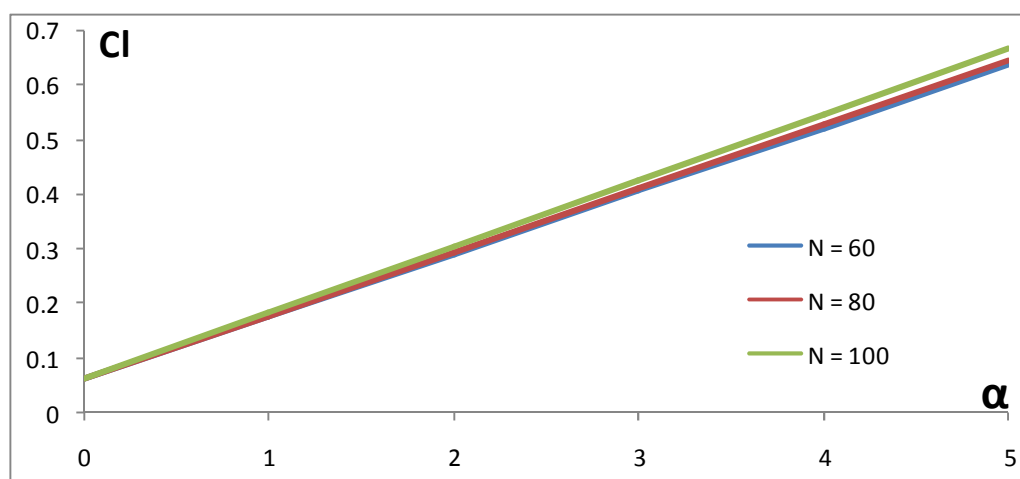


Figure 5.50 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de N

On remarque que les trois droites sont presque confondues les unes aux autres, ceci était prévisible puisque la méthode des panneaux nous apprend qu'avec une soixantaine de panneaux on obtient une assez bonne approximation : Ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $Cl = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à **0.115**, **0.117** et **0.122** pour **N=60**, **80**, et **100** panneaux respectivement.

5.2.2.2 Cl = f(α) une paroi pour différentes valeurs de M

5.2.2.2.1 Cl = f(α) une paroi pour M=0.1 et N=100

Ce graphique représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour **M=0.1** et **N=100** pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi

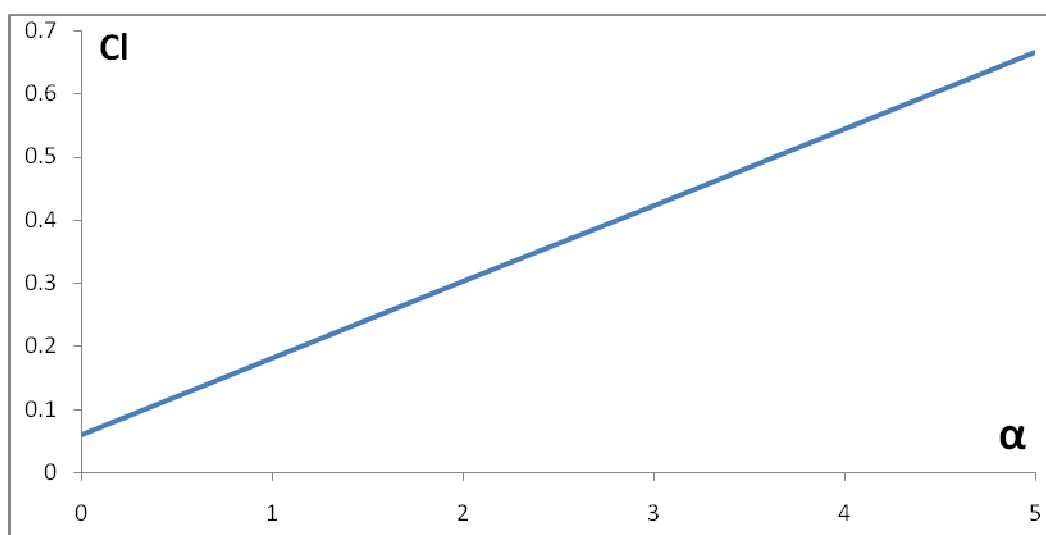


Figure 5.51 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$ et $N=100$

Cette courbe est la même que celle décrite dans le cas du profil placé à proximité d'une paroi pour **N=100** et **M=0,1** : Les commentaires sont donc les mêmes

5.2.2.2.2 Cl = f(α) une paroi pour M=0.1, 0.2 et 0.25 et pour N=100 panneaux

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour **N=100** et pour **M=0.1**, **0.2** et **0.25** respectivement.

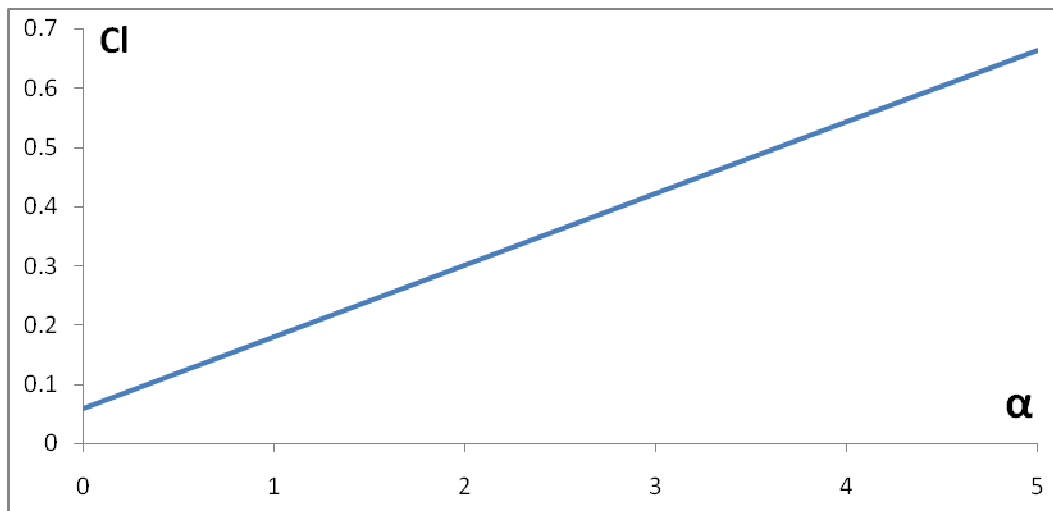


Figure 5.52 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.1$ et $N=100$

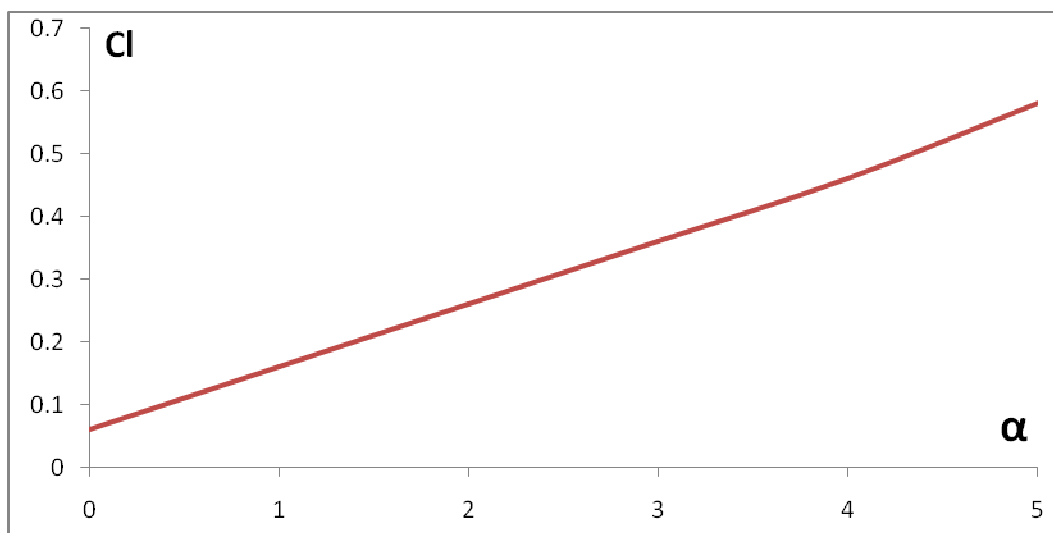


Figure 5.53 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.2$ et $N=100$

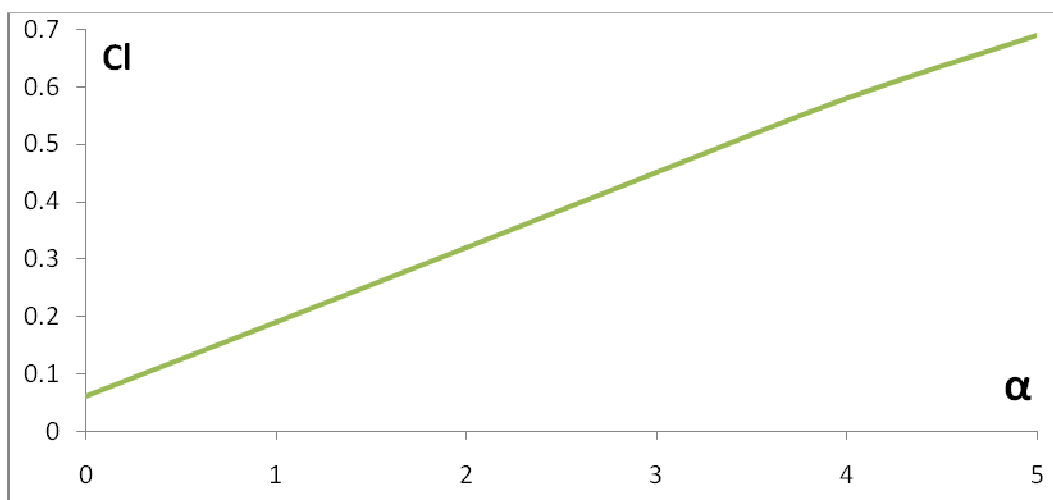


Figure 5.54 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M=0.25$ et $N=100$

On remarque que l'allure des courbes $Cl=f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $Cl=a, \alpha+b$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit pour le ca du profil placé à proximité d'une paroi pour $M=0.1$ et $N=100$, il ne change donc que le nombre de Mach. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $M=0.1, 0.2$ et 0.3 , on trouve $a = 0.116, 0.117$ et 0.118 respectivement

5.2.2.2.3 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de M et pour N=100 panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N=100$ et pour différentes valeurs de M .

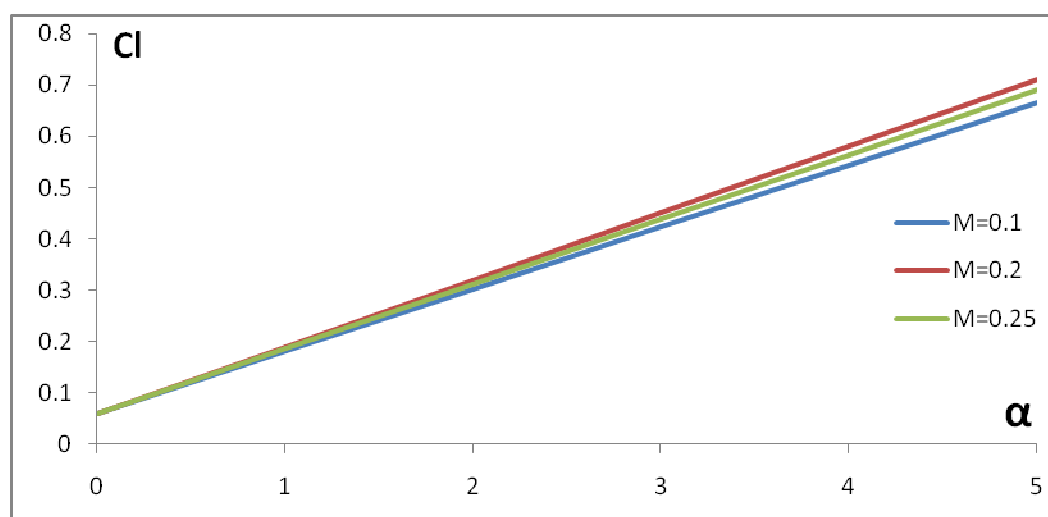


Figure 5. 55 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de M

On remarque que les trois droites $Cl = f(\alpha)$ sont presque confondues les unes aux autres Ceci est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influence très peu sur les variations du coefficient de portance : Ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $Cl=f(\alpha)$ présentent des pentes égales à $a = 0.116, 0.117$ et 0.118 pour $M = 0.1, 0.2$ et 0.25 respectivement.

Il faut cependant noter que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de portance devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.2.3 Conclusion

Ces graphiques nous permettent de constater qu'effectivement l'effet de sol augmente bel et bien le coefficient de portance C_l : Par exemple, si on prend pour titre de comparaison les coefficients C_l du profil **NACA 0018** dans le cas du profil à air libre et à proximité d'une paroi pour $N=100$ panneaux et $M=0.1$, comme le montre la Figure 5.ci-dessous, on voit alors Clairement qu'il y a augmentation du coefficient de portance dans le cas du profil à proximité d'une paroi par rapport au cas où il est à air libre : D'où tout l'intérêt qui lui revient quant au transport de plus grandes charges d'une façon beaucoup plus économique.

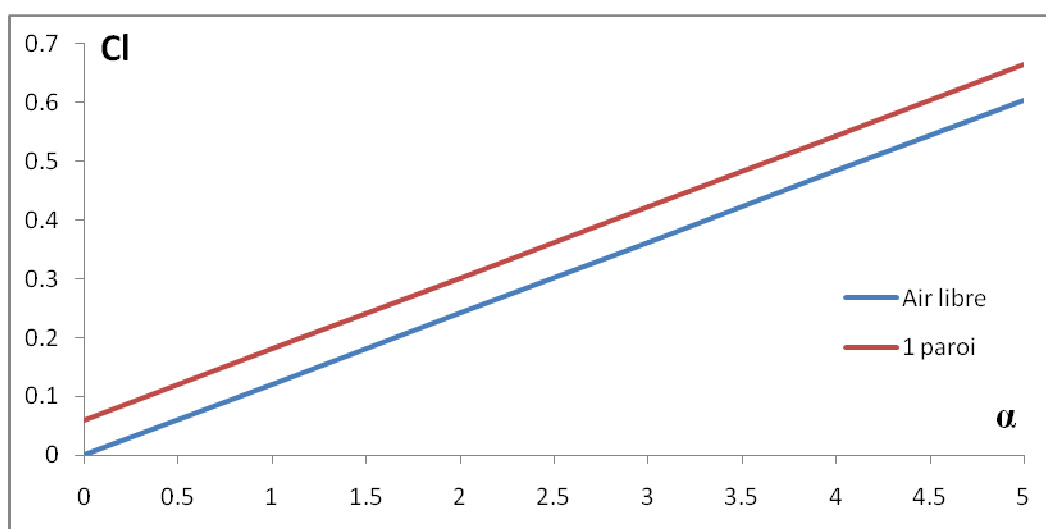


Figure 5.56 : Comparaison entre C_l air libre et une paroi profil NACA 0018 pour $N=100$ et $M=0.1$

5.3 RESULTATS SUR LE COEFFICIENT DE MOMENT DE TANGAGE C_m

Il est question d'exposer dans cette partie les graphiques obtenus à partir de l'application sur le coefficient de Moment de Tangage C_m pour un profil **NACA 0018** en faisant varier les paramètres M et N et tout en tenant toujours compte des deux cas de figures qui sont les suivants :

- Cas profil à Air Libre
- Cas profil à proximité d'une paroi

Or, nous avons vu dans la partie théorique de ce mémoire que le coefficient de Moment de Tangage C_m dans le cas d'un écoulement subsonique est donné par l'expression suivante :

$$C_m(\alpha) = C_{m0} + 0.25 C_l(\alpha)$$

Où C_{m0} est le coefficient de Moment de Tangage à portance nulle.

Nous avons vu aussi que le coefficient de Moment de Tangage à portance nulle C_{m0} prend une valeur nulle pour un profil symétrique. Ce qui fait que dans ce cas (qui est le cas même de notre étude) ce dernier va prendre la forme suivante :

$$C_m(\alpha) = 0.25 C_l(\alpha)$$

On remarque que cette expression est la même que celle du coefficient de portance multipliée par 0.25, ce qui veut dire que les valeurs du coefficient de Moment de Tangage C_m sont exactement celles obtenues pour $C_l = f(\alpha)$ multipliées par **0.25** : Il suffit donc de prendre les valeurs obtenues dans l'étude du coefficient de portance et de les diviser par 4.

Par conséquent, nous allons exposer les résultats obtenus sans toutefois trop s'atteler sur les commentaires puisque ces derniers sont les mêmes que ceux concernant le C_l : il suffira alors de retourner à chaque fois au chapitre « **résultats sur le coefficient de portance C_l** » pour voir le commentaire correspondant à chaque cas de figure.

Pour ce faire nous allons suivre exactement les mêmes étapes que celles pour le calcul du C_l .

5.3.1 Cas profil a air libre

Ici, nous allons exposer les résultats obtenus pour le C_m d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à Air Libre

5.3.1.1 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de N

5.3.1.1.1 $C_m = f(\alpha)$ pour N = 100 panneaux et M = 0.1

Ce graphique représente les variations du coefficient de Moment de Tangage $C_m = f(\alpha)$ pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour **N = 100** et **M = 0.1**.

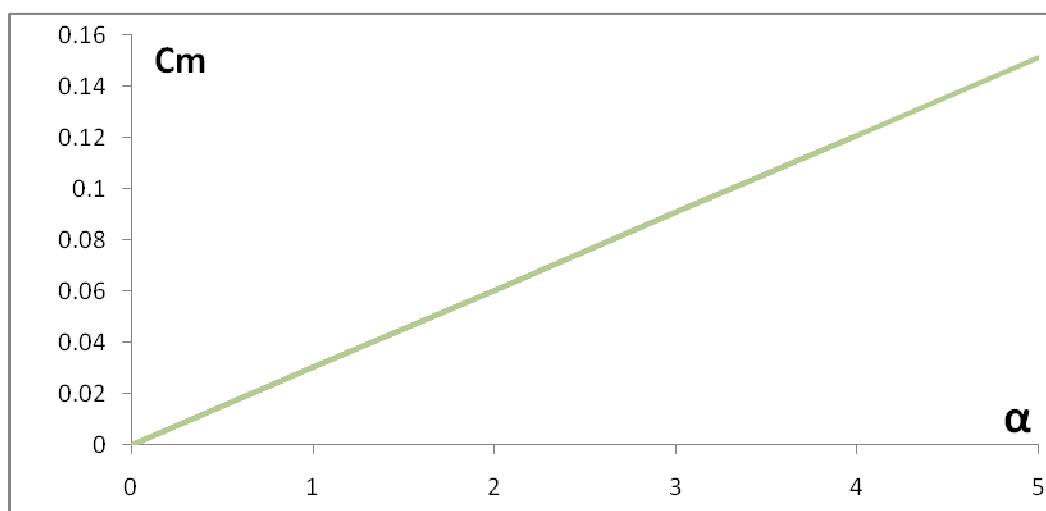


Figure 5.57 : $C_m = f(\alpha)$, NACA 0018, Air Libre pour N = 100 et M = 0.1

On remarque que la courbe $C_m = f(\alpha)$ est une droite passant par l'origine d'équation $C_m = 0.0302 \alpha$ ce qui est logique en soit puisqu'on s'attendait à avoir un coefficient de Moment de Tangage nul pour $\alpha = 0^\circ$ étant donné qu'à $\alpha = 0^\circ$ le coefficient de portance est nul à cause de la symétrie du profil comme nous l'avons vu auparavant.

Lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, les filets d'air sont déviés vers le haut sur la partie extrados ce qui provoque une dépression au niveau de l'extrados, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée vers le bas aux filets d'air provoque une surpression moins importante que la dépression de l'extrados : on s'attend donc à ce que au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence à avoir une dépression de plus en plus importante sur l'extrados puisque les filets

d'air vont être de plus en plus déviés vers le haut et une surpression de plus en plus importante sous l'intrados à cause de la déviation imposée de plus en plus vers le bas aux filets d'air. D'où, il en résulte une portance, un coefficient de portance, et par conséquent, un coefficient de Moment de Tangage en augmentation continue avec l'angle d'incidence.

5.3.1.1.2 $C_m = f(\alpha)$ pour $N = 60, 80$ et 100 panneaux et $M = 0.1$

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour $N = 60, 80$, et 100 panneaux et pour $M = 0.1$.

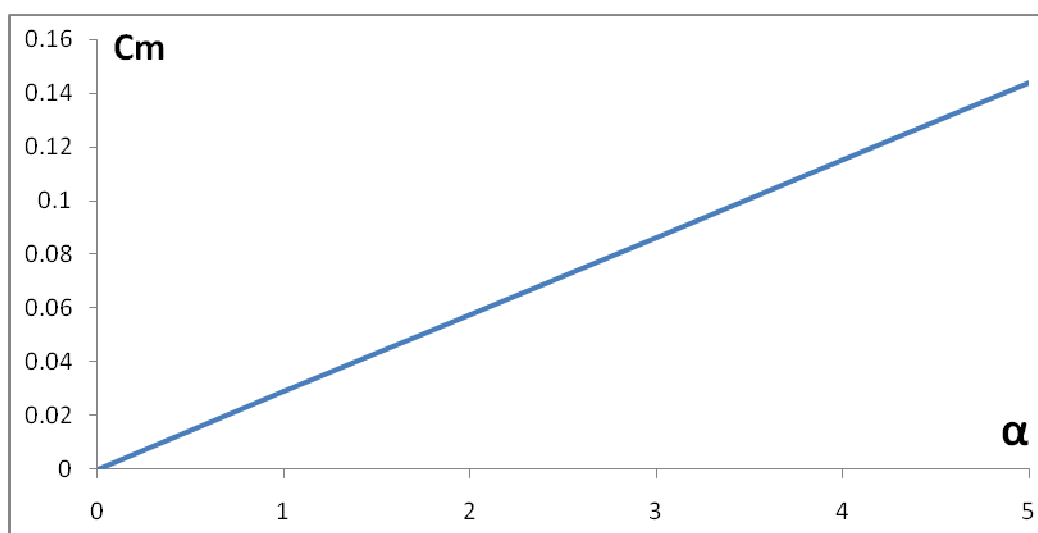


Figure 5.58 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 60$ et $M = 0.1$

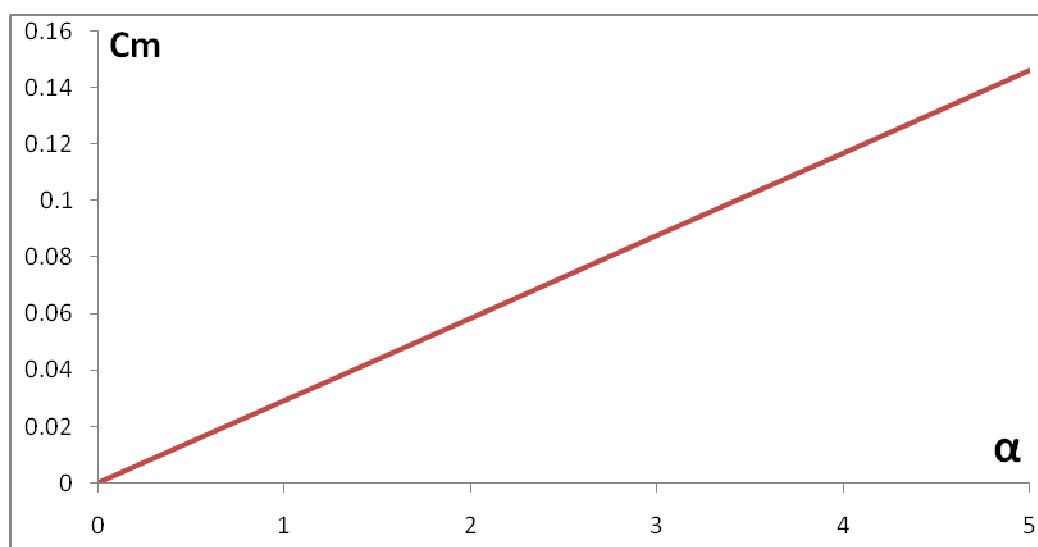


Figure 5.59 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 80$ et $M = 0.1$

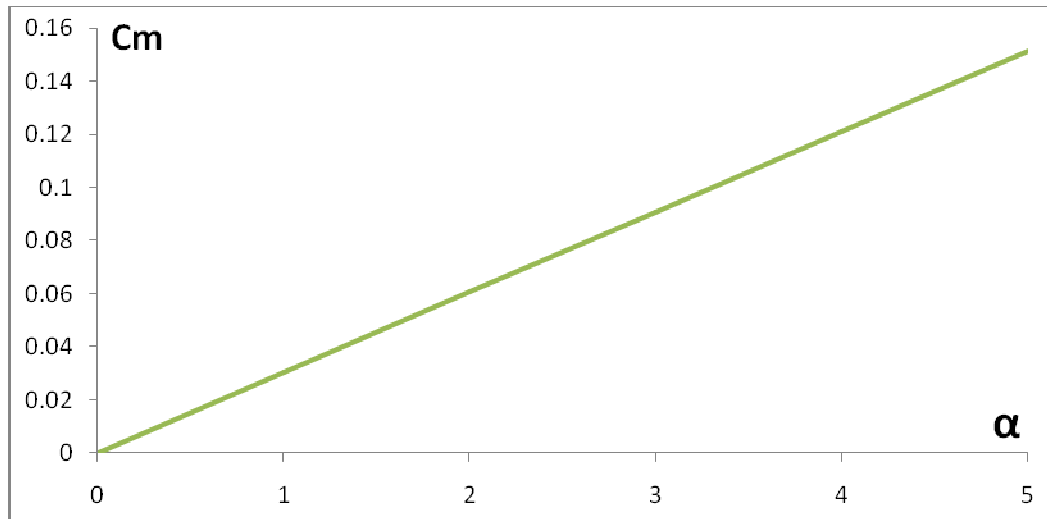


Figure 5.60 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$

On remarque que l'allure des courbes de $C_m = f(\alpha)$ est toujours une droite passant par l'origine d'équation $C_m = a \cdot \alpha$, puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil à Air Libre pour $N = 100$ et $M = 0.1$, il ne change donc que le nombre de panneaux. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : effectivement, pour $N = 60, 80$ et 100 , on trouve $a = 0.0295, 0.0297$ et 0.03022 respectivement.

5.3.1.1.3 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de N et pour $M = 0.1$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour $M = 0.1$ et pour différentes valeurs de N .

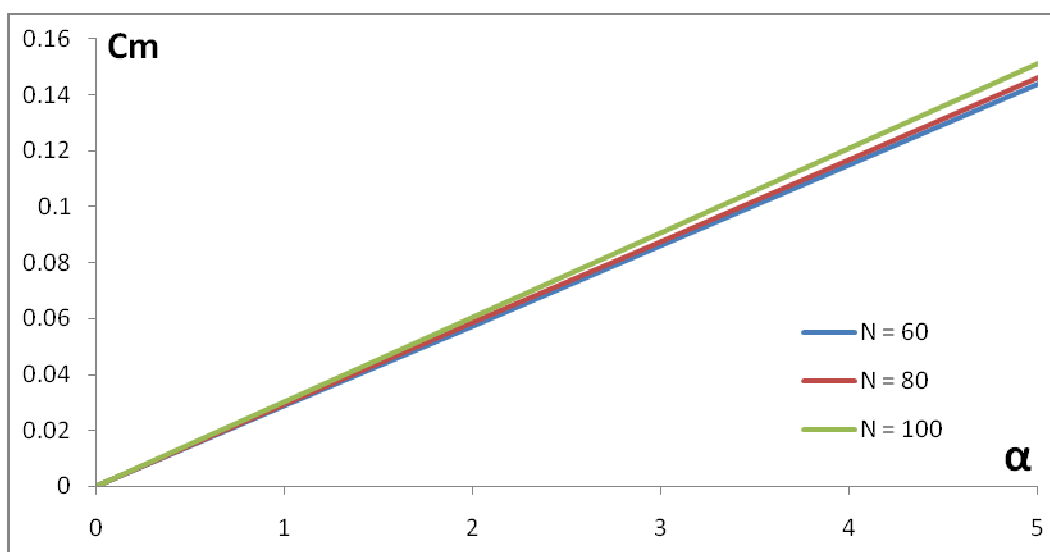


Figure 5. 61 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour différentes valeurs de N

On remarque que les trois droites sont presque confondues les unes aux autres : Ce résultat était prévisible en soit : En effet, la méthode des panneaux nous apprend qu'avec une soixantaine de panneaux on obtient une assez bonne approximation : ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $C_m = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à **0.0295**, **0.0497** et **0.03022** pour $N = 60$, 80 , et **100** panneaux respectivement.

5.3.1.2 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de M

5.3.1.2.1 $C_m = f(\alpha)$ Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$

Ce graphique représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$

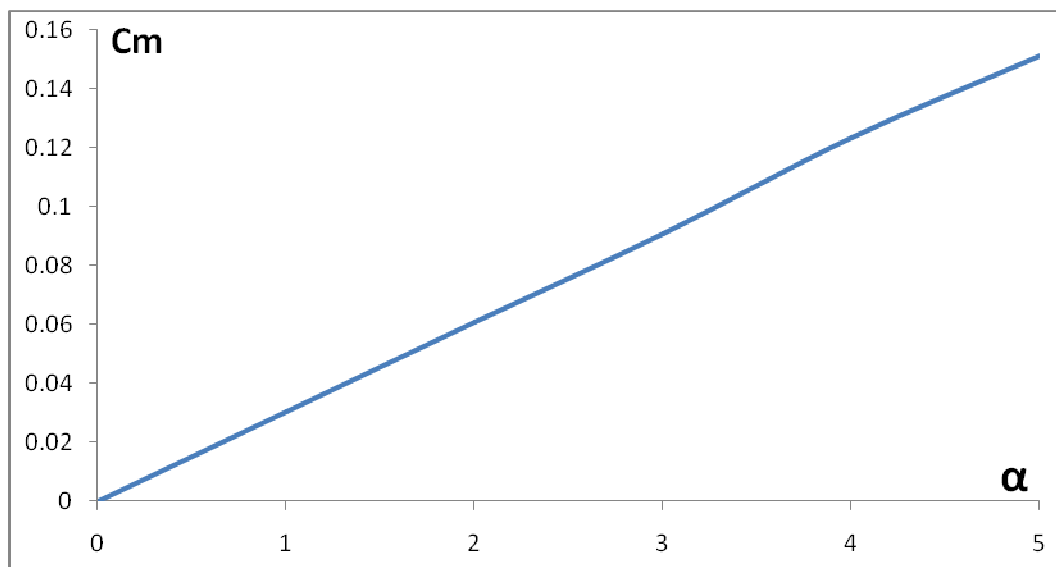


Figure 5.62 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$

Cette courbe est la même que celle déjà décrite dans le cas du profil à Air Libre pour $N = 100$ et $M = 0,1$: les commentaires sont donc les mêmes.

5.3.1.2.2 $C_m = f(\alpha)$ pour $M = 0.1, 0.2$ et 0.25 et $N = 100$ panneaux

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour $M = 0.1, 0.2$ et **0.25** respectivement et pour $N = 100$ panneaux .

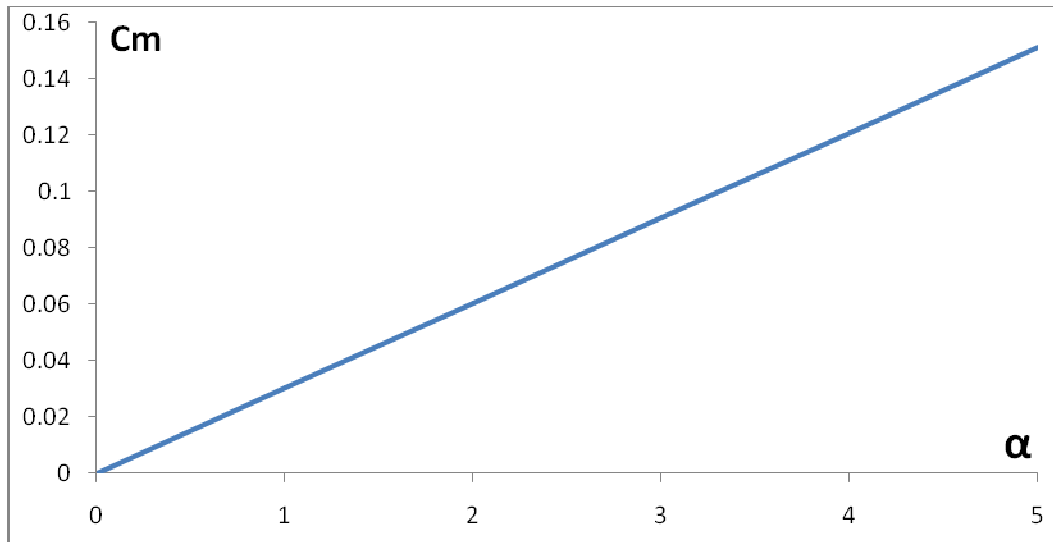


Figure 5.63 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$

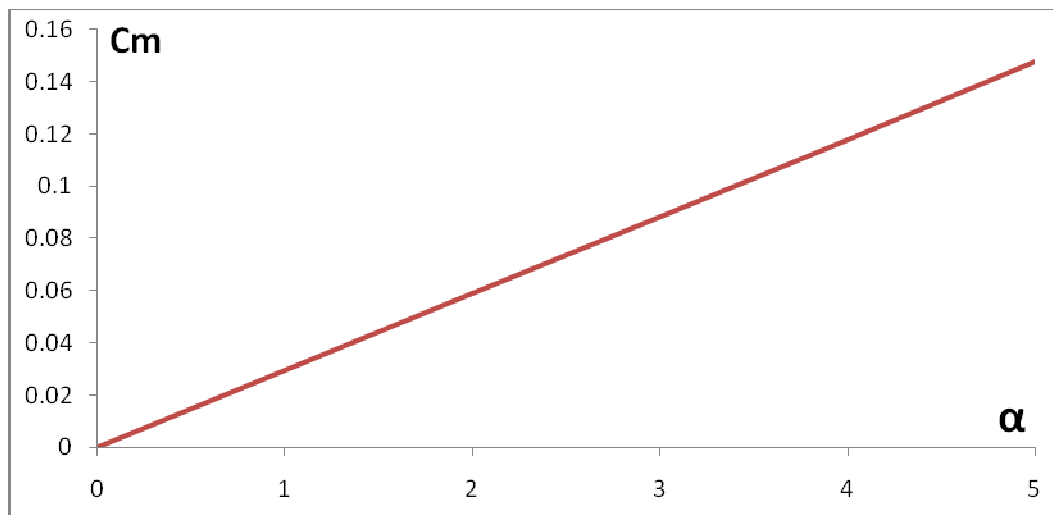


Figure 5.64 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.2$ et $N = 100$

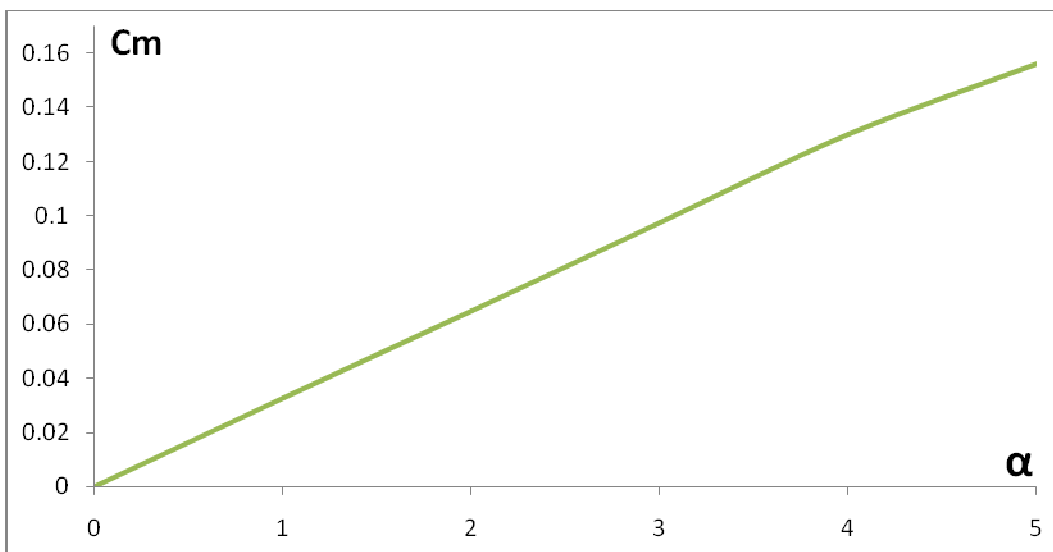


Figure 5.65 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour $M = 0.25$ et $N = 100$

On remarque que l'allure des courbes de $C_m = f(\alpha)$ est toujours une droite passant par l'origine d'équation $C_m = a \cdot \alpha$, puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil à Air Libre pour $M = 0.1$ et $N = 100$, il ne change donc que le nombre de Mach. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : effectivement, pour $M = 0.1, 0.2$ et 0.25 , on trouve $a = 0.0296, 0.0499$ et 0.03022 respectivement.

5.3.1.2.3 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de M et $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à Air Libre pour $N = 100$ et pour différentes valeurs de M .

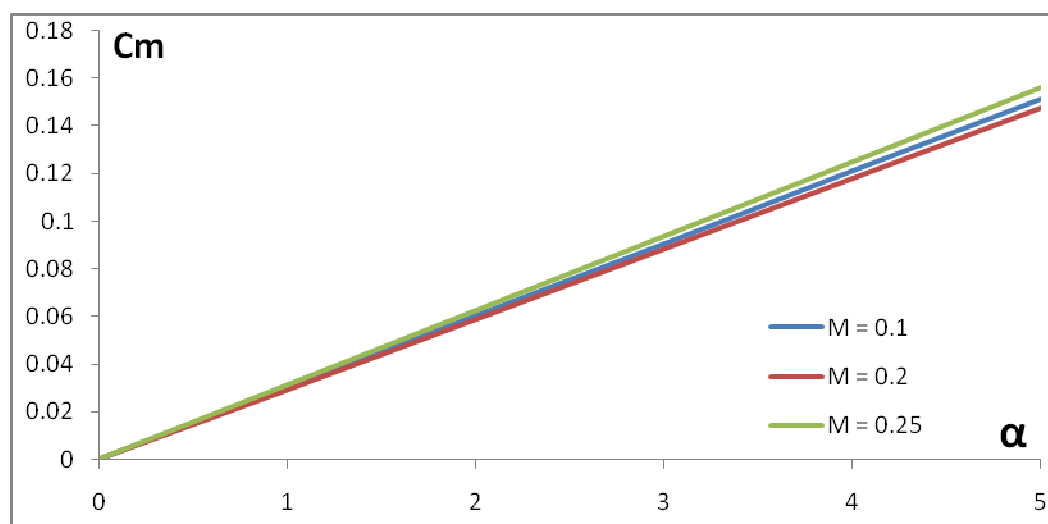


Figure 5.66 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 Air Libre pour différentes valeurs de M

On remarque que les trois droites $C_m = f(\alpha)$ sont presque confondues les unes aux autres : en effet, on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influe très peu sur les variations du coefficient de portance et par conséquent sur celles du coefficient de Moment de Tangage : ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $C_m = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à $0.0296, 0.0499$ et 0.03022 pour $M = 0.1, 0.2$, et 0.25 respectivement.

Il faut aussi signaler dans ce cas que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de Moment de Tangage devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.3.2 Cas profil a proximité d'une paroi

Dans cette partie, il est question d'exposer les résultats obtenus pour le C_m d'un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à proximité d'une paroi :

5.3.2.1 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de N

5.3.2.1.1 $C_m = f(\alpha)$ pour $N = 100$ et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$.

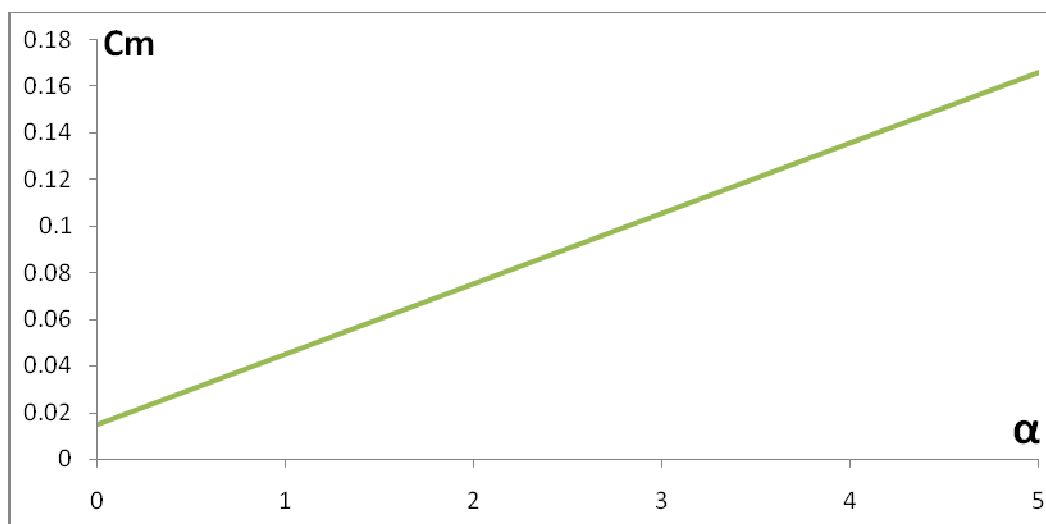


Figure 5.67 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 pour $N = 100$ et $M = 0.1$

On remarque que l'allure de la courbe $C_m = f(\alpha)$ est une droite ne passant pas par l'origine d'équation $C_m = (a \cdot \alpha + b)$ telle que $a = 0.0295$, ce qui est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que lorsque le profil est à proximité d'une paroi l'air est pris entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage, ce qui fait qu'il se crée un goulot d'étranglement de l'air et par conséquent une surpression au dessous de l'aile-comme- nous l'avons vu précédemment-ce qui fait que cette différence de pression de part et d'autre de l'aile va engendrer une portance, un coefficient de portance, et par conséquent, un coefficient de Moment de Tangage non nuls contrairement au cas où le profil est à Air Libre.

Au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence, les filets d'air vont être de plus en plus déviés vers le haut sur l'extrados ce qui provoque une dépression de plus en plus importante sur ce dernier, par contre, sous l'intrados, la déviation imposée de plus en plus vers le bas aux filets d'air provoque une surpression de plus en plus importante. D'où, il en résulte une portance, un coefficient de portance, et par conséquent un coefficient de Moment de Tangage en augmentation continue avec l'angle d'incidence

5.3.2.1.2 $C_m = f(\alpha)$ pour $N = 60, 80$ et 100 panneaux et pour $M = 0.1$

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N = 60, 80$, et 100 panneaux et pour $M = 0.1$.

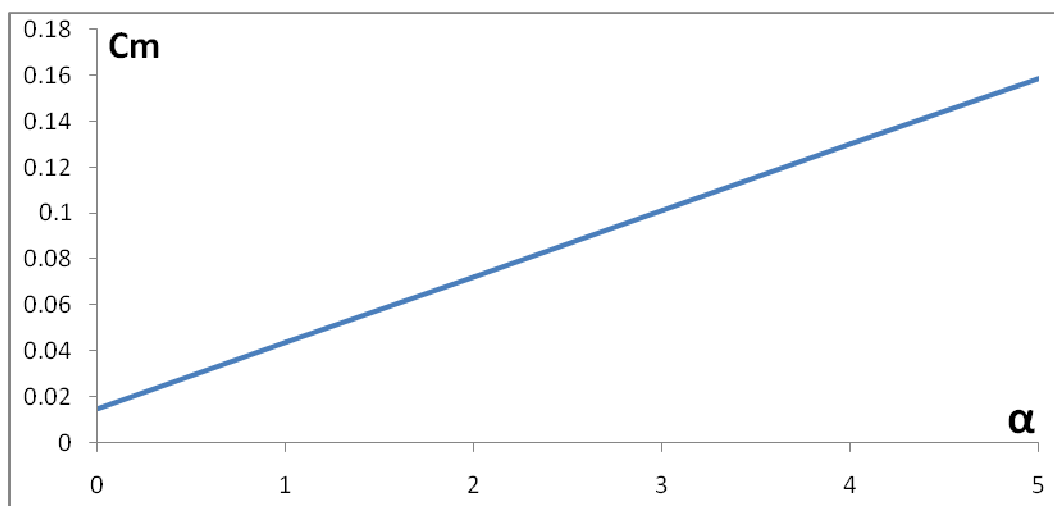


Figure 5.68 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 60$ et $M = 0.1$

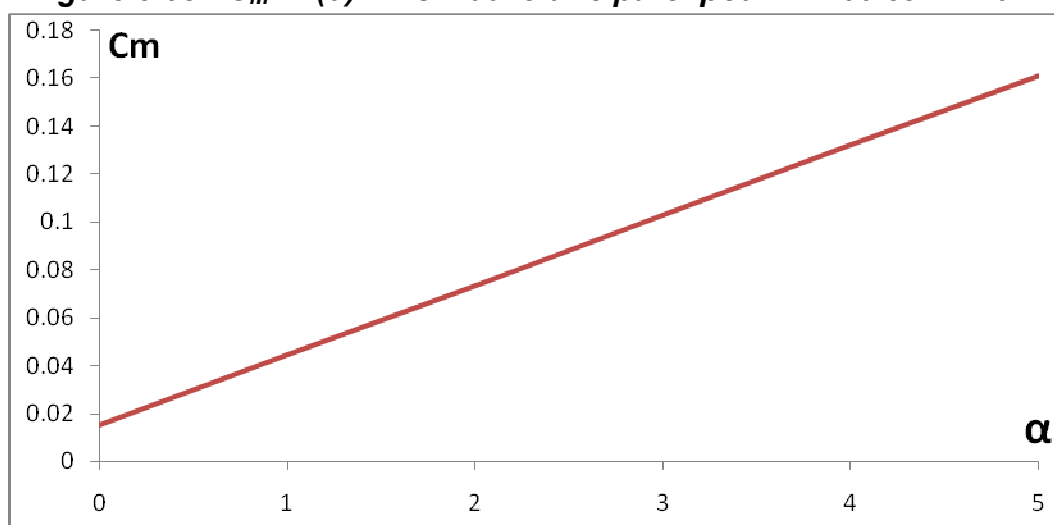


Figure 5.69 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 80$ et $M = 0.1$

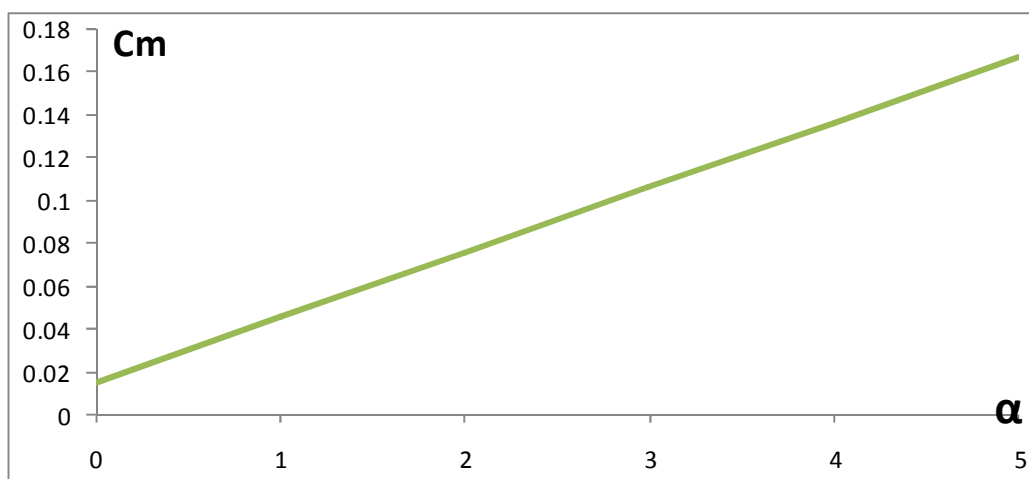


Figure 5.70 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$

On remarque que l'allure des courbes de $C_m = f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $C_m = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit dans le cas du profil placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$, il ne change donc que le nombre de panneaux. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : effectivement, pour $N = 60, 80$ et 100 , on trouve $a = 0.02875, 0.02925$ et 0.0295 respectivement

5.3.2.1.3 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de N et pour $M = 0.1$

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $M = 0.1$ et pour différentes valeurs de N

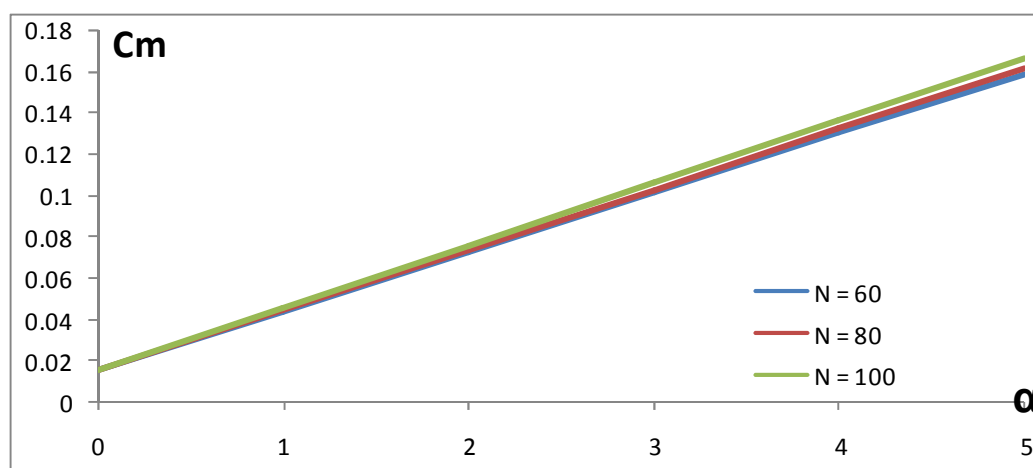


Figure 5.71 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de N

On remarque que les trois droites sont presque confondues les unes aux autres : Ceci était prévisible puisque la méthode des panneaux nous apprend qu'avec une soixantaine de panneaux on obtient une assez bonne approximation : ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $C_m = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à **0.02875**, **0.02925** et **0.0295** pour **N = 60**, **80**, et **100** respectivement.

5.3.2.2 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de M

5.3.2.2.1 $C_m = f(\alpha)$ pour M = 0.1 et N = 100

Ce graphique représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour $M = 0.1$ et $N = 100$ pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi

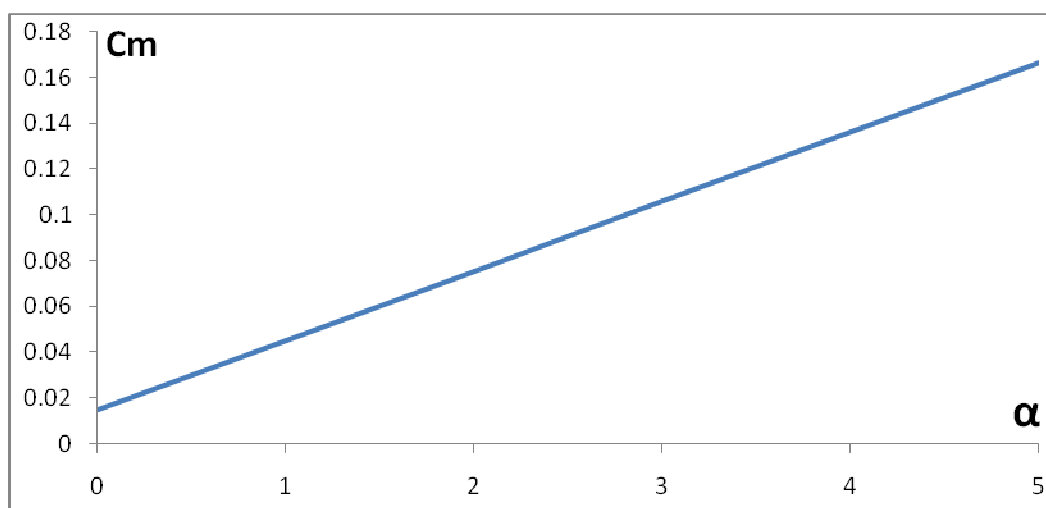


Figure 5.72 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour M = 0.1 et N = 100

Cette courbe est la même que celle décrite dans le cas du profil placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et $M = 0,1$: les commentaires sont donc les mêmes

5.3.2.2.2 $C_m = f(\alpha)$ pour M = 0.1, 0.2, 0.25 et N = 100 panneaux

Ces trois graphiques représentent les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et pour $M = 0.1$, 0.2 et 0.25 respectivement..

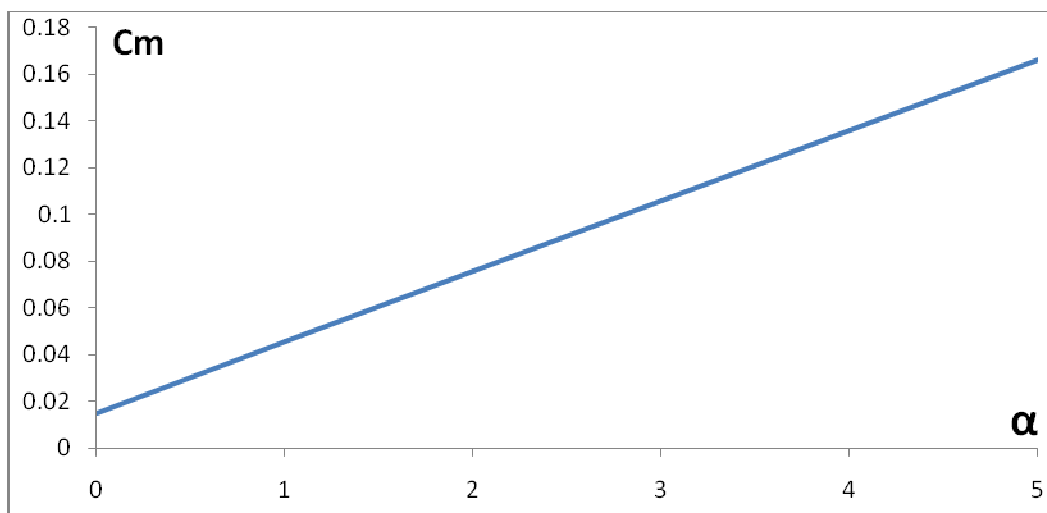


Figure 5.73 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.1$ et $N = 100$

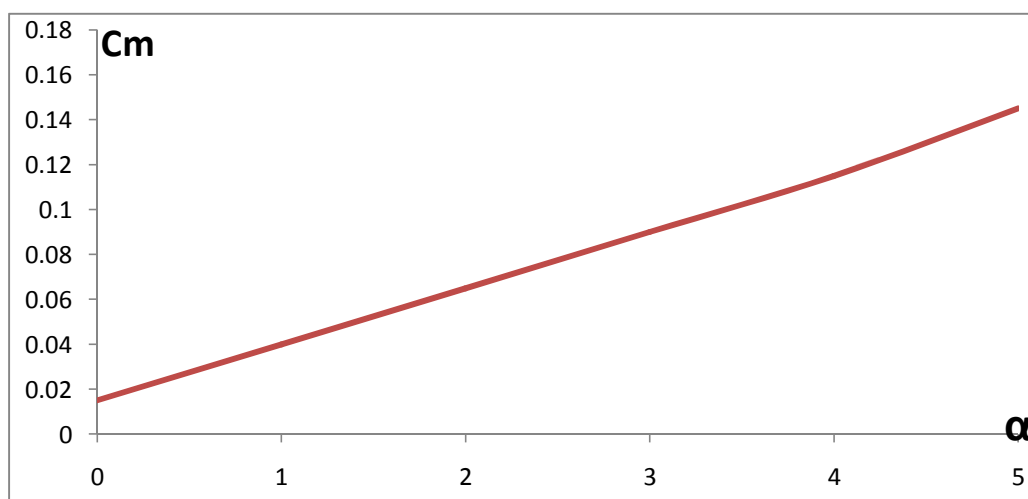


Figure 5.74 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.2$ et $N = 100$

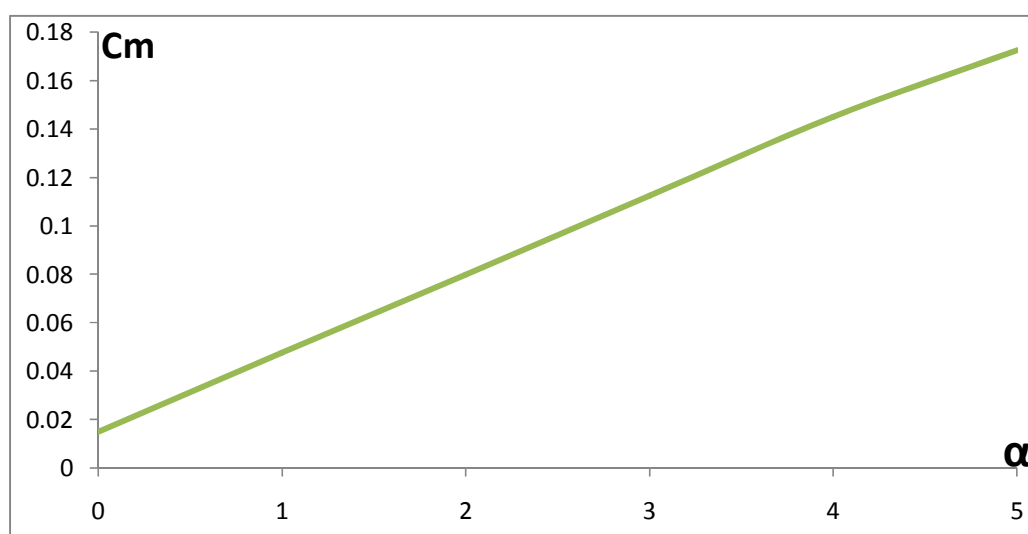


Figure 5.75 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $M = 0.25$ et $N = 100$

On remarque que l'allure des courbes $C_m = f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $C_m = a \cdot \alpha + b$ puisqu'il s'agit toujours du même profil que celui décrit pour le ca du profil placé à proximité d'une paroi pour $M = 0.1$ et $N = 100$, il ne change donc que le nombre de Mach. par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une très légère déviation les unes par rapport aux autres : effectivement, pour $M = 0.1, 0.2$ et 0.3 , on trouve $a = 0.029, 0.02925$ et 0.0295 respectivement

5.3.2.2.3 $C_m = f(\alpha)$ pour différentes valeurs de M et N = 100 panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de Moment de Tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** placé à proximité d'une paroi pour $N = 100$ et pour différentes valeurs de M .

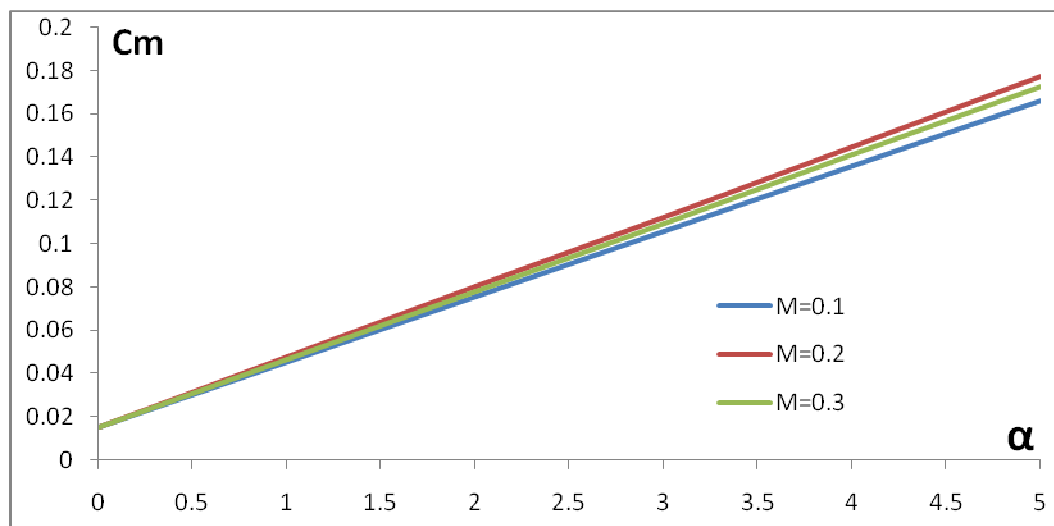


Figure 5.76 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de M

On remarque que les trois droites $C_m = f(\alpha)$ sont presque confondues les unes aux autres : Ceci est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que dans le cas d'un écoulement subsonique la variation du nombre de Mach influence très peu sur les variations du coefficient de portance et par conséquent sur celles du coefficient de Moment de Tangage : Ces trois courbes le confirment donc bien puisque les droites $C_m = f(\alpha)$ présentent des pentes égales à $0.029, 0.02925$ et 0.0295 pour $M = 0.1, 0.2$ et 0.25 respectivement.

Il faut cependant noter que l'influence du nombre de Mach sur les variations du coefficient de Moment de Tangage devient significative lorsque l'écoulement n'est plus subsonique.

5.3.3 Conclusion

Ces graphiques nous permettent de constater qu'effectivement l'effet de sol augmente le coefficient de Moment de Tangage C_m : par exemple, si on prend pour titre de comparaison les coefficients C_m du profil **NACA 0018** dans le cas du profil à Air Libre et à proximité d'une paroi pour $N = 100$ panneaux et $M = 0.1$, comme le montre la Figure 5.ci-dessous, on voit alors clairement qu'il y a une augmentation du coefficient de Moment de Tangage dans le cas du profil à proximité d'une paroi par rapport au cas où il est à Air Libre.

On conclue donc et à partir de tout ce qui vient d'être dit que l'effet de sol augmente le Moment de Tangage de l'avion c'est-à-dire, sa tendance à cambrer. Pour remédier à ce problème, il suffit de placer au niveau de l'empennage des stabilisateurs horizontaux plus puissants pour assurer la stabilité horizontale de l'avion.

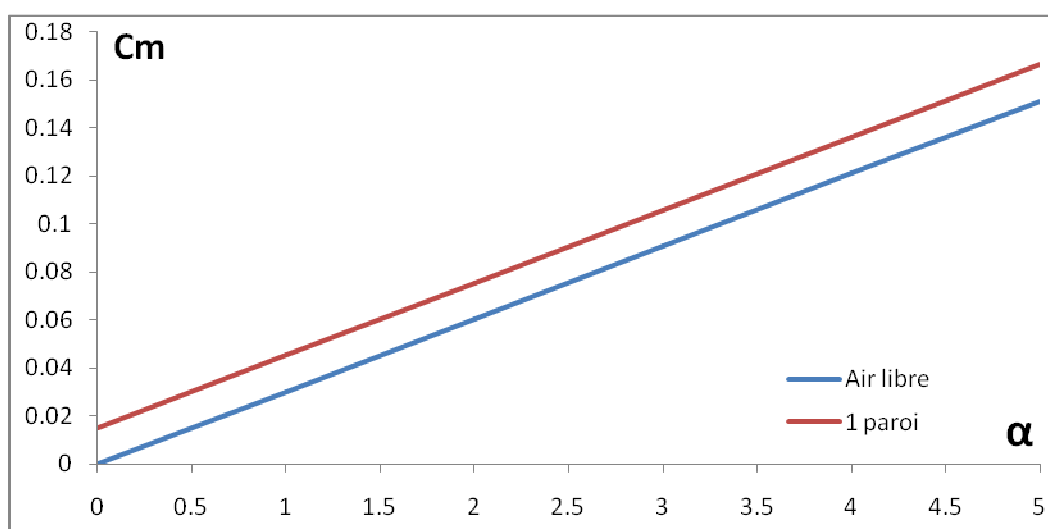


Figure 5.77 : Comparaison entre C_m Air Libre et C_m une paroi pour un profil NACA 0018, $N = 100$ et $M = 0.1$

5.4 RESULTATS SUR LES VARIATIONS DE LA HAUTEUR H

Enfin, nous ne terminerons pas notre étude sans exposer les graphiques obtenus à partir de l'application sur la hauteur H et de l'influence de ses variations sur les coefficients aérodynamiques C_p , C_l , et C_m toujours pour un profil **NACA 0018**.

Pour ce faire nous allons donner à H les valeurs: **6m**, **8m**, **10m** et **12m** respectivement et analyser par la suite les résultats obtenus sur les coefficients **C_p** , **C_l** , et **C_m** au cas par cas.

5.4.1 Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de pression C_p

Nous allons donc commencer notre étude par exposer les résultats obtenus par rapport à l'influence de la variation de la hauteur H sur le coefficient de pression **C_p** pour un profil **NACA 0018** et ce dans le cas du profil à proximité d'une paroi bien sûr.

Pour ce faire nous allons traiter les deux cas de Figure 5.s qui sont les suivants :

- $\alpha = 0^\circ$
- $\alpha \neq 0^\circ$

5.4.1.1 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha = 0^\circ$

Il est question d'analyser dans cette première partie les résultats obtenus sur les variations du coefficient de pression **C_p** en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux.

5.4.1.1.1 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour $H = 6m$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 100$, et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression **C_p** en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et pour $N = 100$ panneaux.

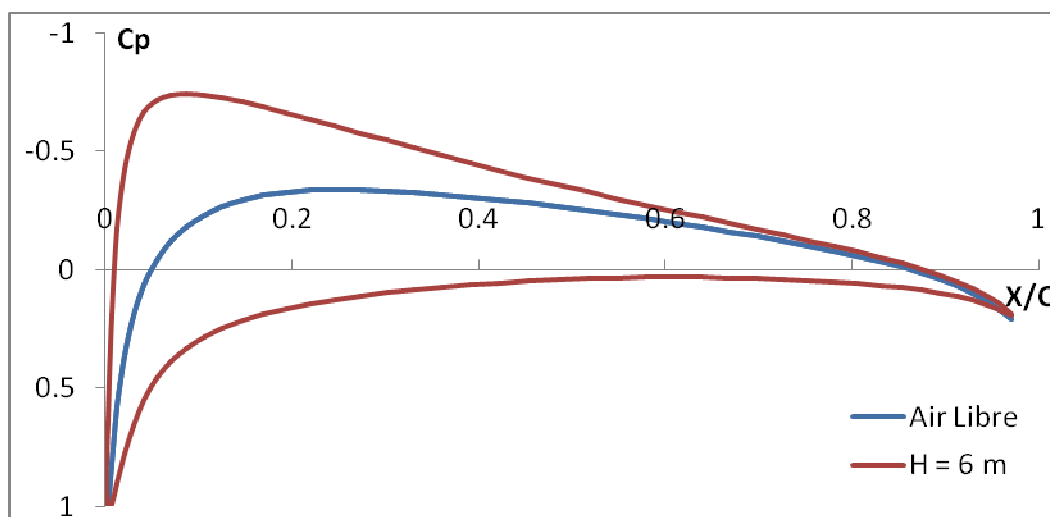


Figure 5.78 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

Ce graphique est le même que celui déjà décrit dans le chapitre « Résultats sur le coefficient de pression C_p » dans le cas « $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $N = 100$ et $M = 0.1$ » : Les commentaires sont donc les mêmes.

5.4.1.1.2 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$ et pour $\alpha = 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ces quatre graphiques représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$ respectivement et pour $\alpha = 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux.

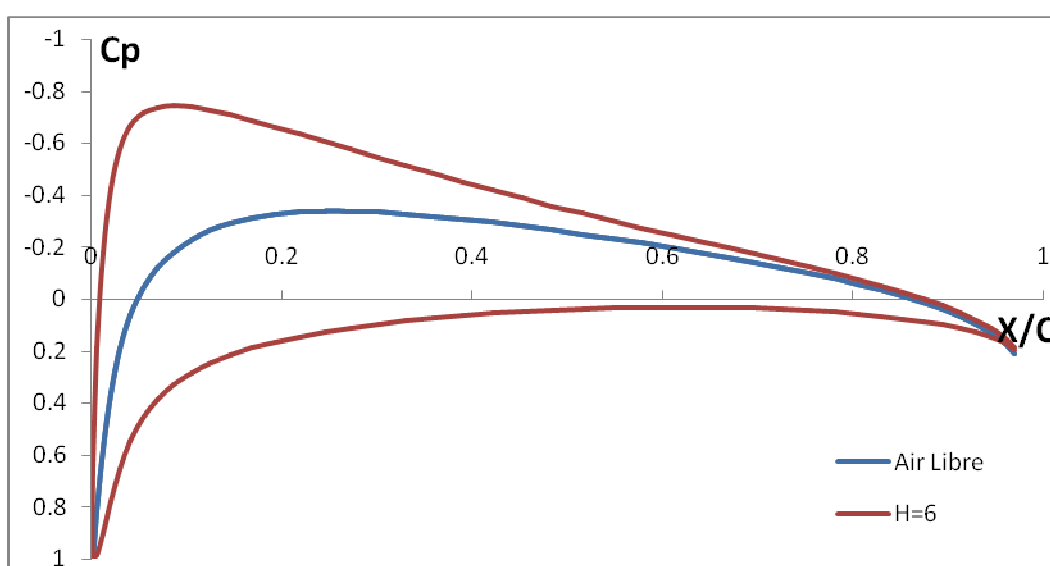


Figure 5.79 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

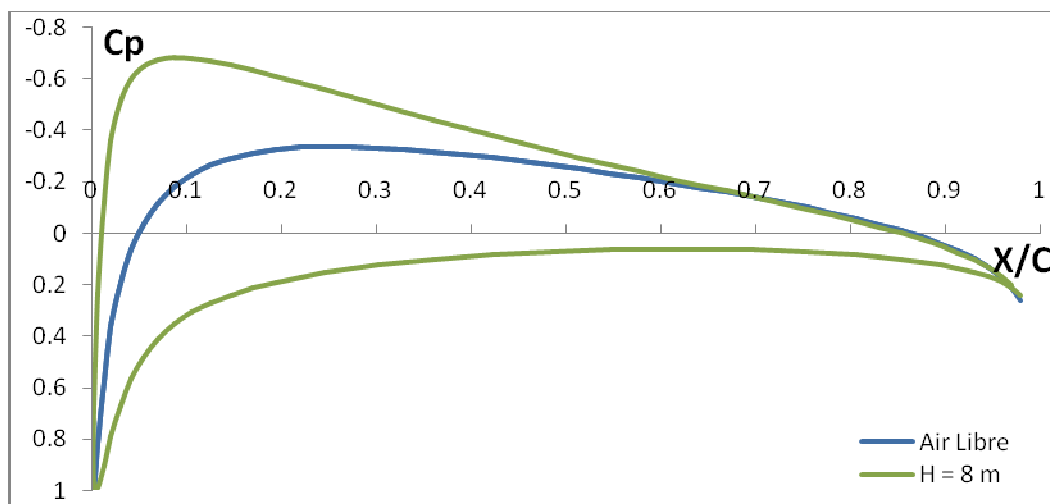


Figure 5.80 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 8m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

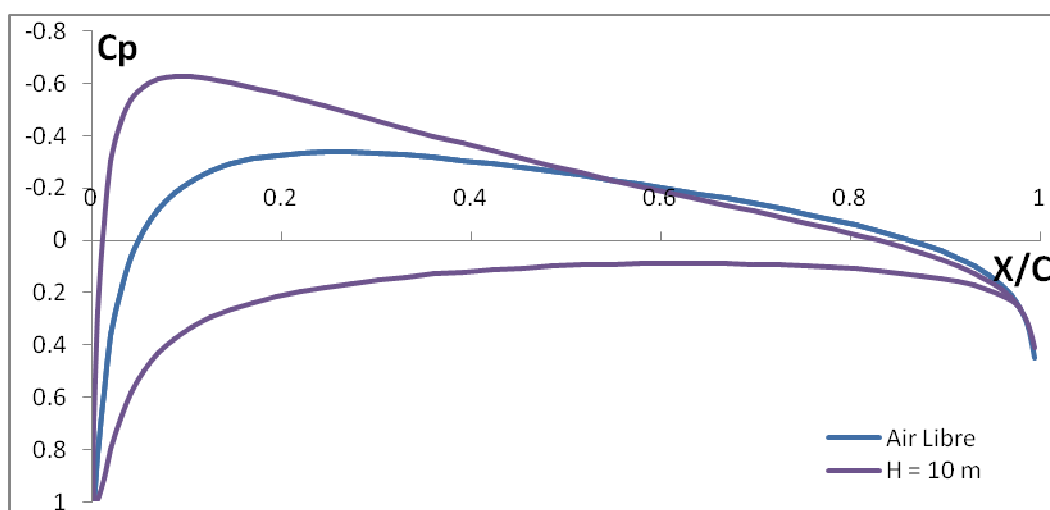


Figure 5.81 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

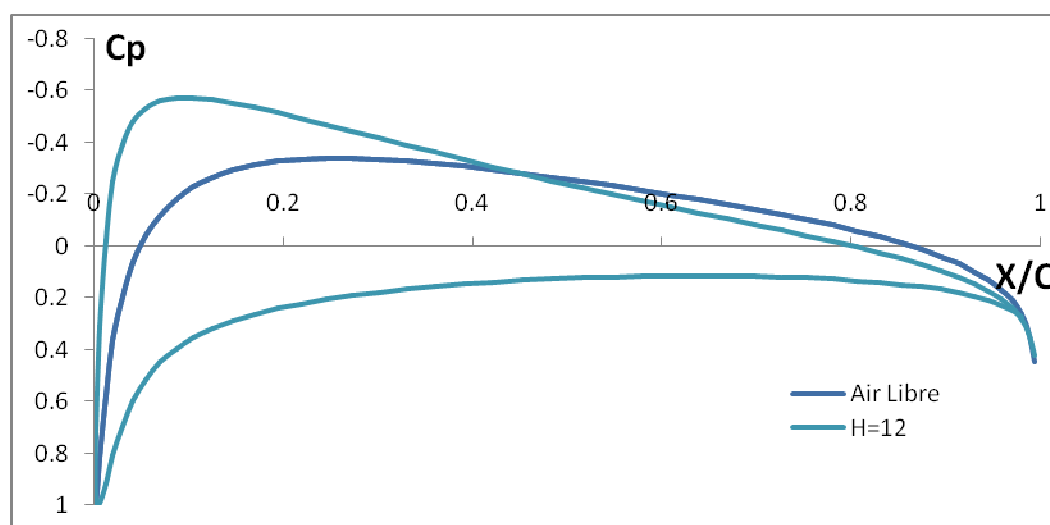


Figure 5.82 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$, $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

On remarque que les graphes $C_p = f(x/c)$ présentent- à première vue-la même allure générale que celle pour $H = 6m$, ce qui est logique en soit puisqu'on est toujours dans le cas du profil à proximité d'une paroi où on s'attend à avoir non pas une seule courbe pour le C_p comme dans le cas du profil à air libre mais deux courbes distinctes comme nous l'avons vu auparavant. Par contre, on remarque facilement que ces derniers présentent des déviations les uns par rapport au autres ce qu'on expliquera ultérieurement.

5.4.1.1.3 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour différentes valeurs de H et pour $\alpha = 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour différentes valeurs de H et pour $\alpha = 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

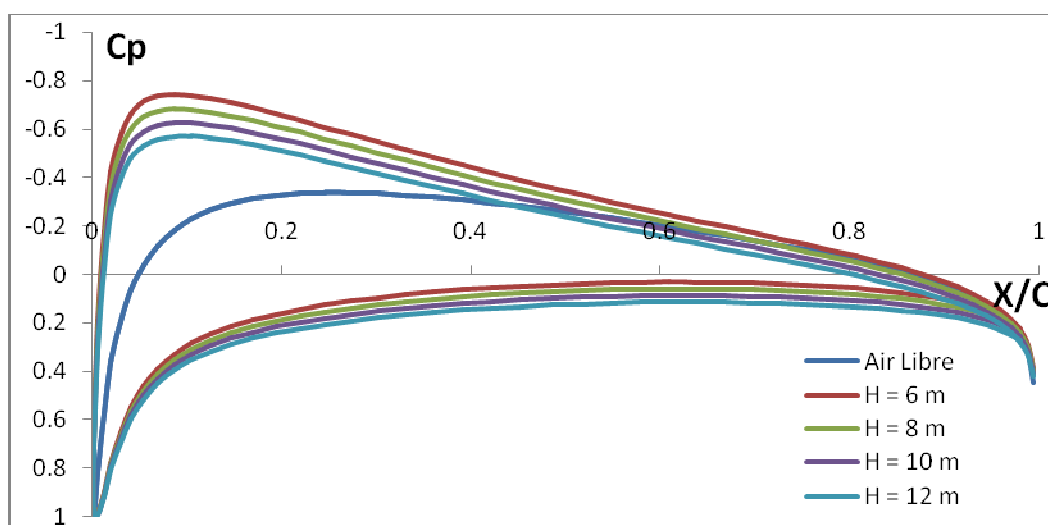


Figure 5.83 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 0^\circ$ et pour différentes valeurs de H

On remarque, comme nous venons de le dire, que les graphes $C_p = f(x/c)$ présentent des déviations les uns par rapport aux autres, plus exactement, que plus la hauteur H diminue, plus le C_p augmente et vice versa, ce qui veut dire que l'effet de sol augmente le coefficient de pression C_p , ceci est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que lorsque le profil est à proximité d'une paroi l'air est pris entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage ce qui fait qu'il se crée un goulot d'étranglement de l'air et par conséquent une zone de surpression ente les

deux surfaces et qui tend à soulever l'avion vers le *haut* de telle sorte que plus on s'*approche* du sol plus cette surpression aura tendance à augmenter puisque l'air va se retrouver de plus en plus emprisonné entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage : D'où, il en résulte une augmentation continue du coefficient de pression C_p avec la diminution de la hauteur H .

5.4.1.2 $C_p = f(x/c)$ pour $\alpha \neq 0^\circ$

Il est question d'analyser dans cette deuxième partie les résultats obtenus sur les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha \neq 0^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux : On *choisira* comme angle d'incidence $\alpha = 3^\circ$.

5.4.1.2.1 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour $H = 6m$, $\alpha = 3^\circ$, $N = 100$, et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et pour $N = 100$ panneaux.

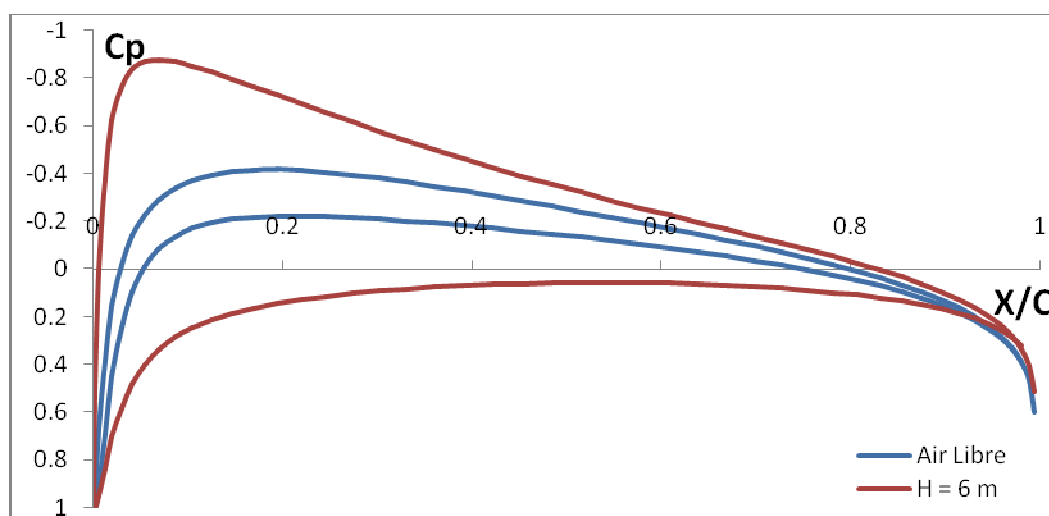
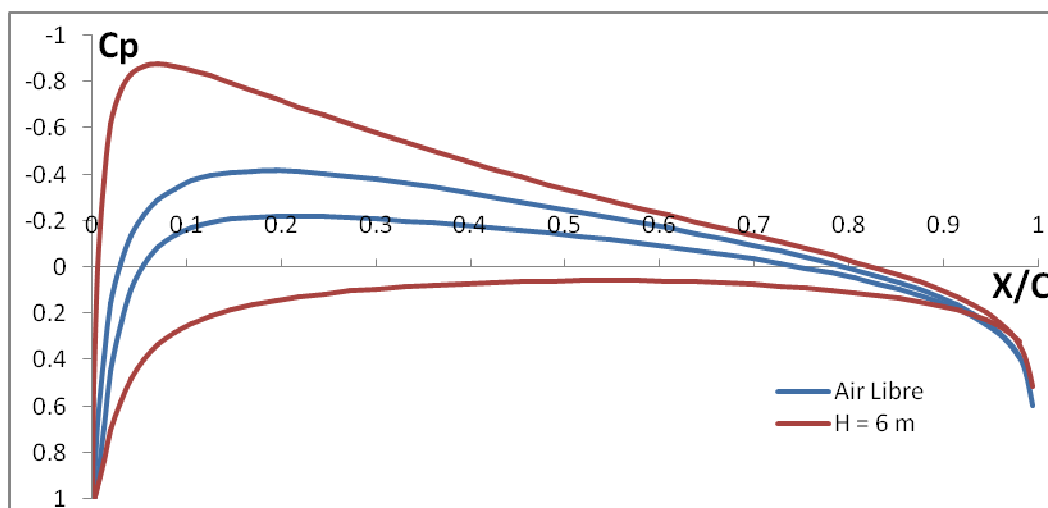


Figure 5.84 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

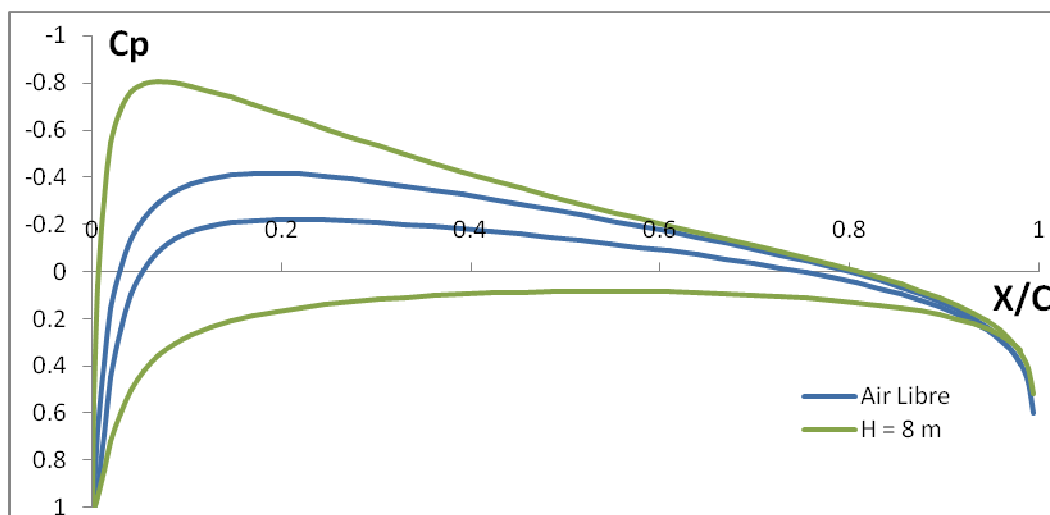
Ce graphique est le même que celui déjà décrit dans le *chapitre* «**Résultats sur le coefficient de pression C_p** » dans le cas « **$C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $N = 100$ et $M = 0.1$** » : Les commentaires sont donc les mêmes.

5.4.1.2.2 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour $H = 6m, 8m, 10m,$ et $12m$ et pour $\alpha = 3^\circ,$
 $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ces quatre graphiques représentent les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m, 8m, 10m,$ et $12m$ respectivement et pour $\alpha = 3^\circ, M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux.



**Figure 5.85 $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ, H = 6m, M = 0.1$ et
 $N = 100$**



**Figure 5.86 $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ, H = 8m, M = 0.1$ et
 $N = 100$**

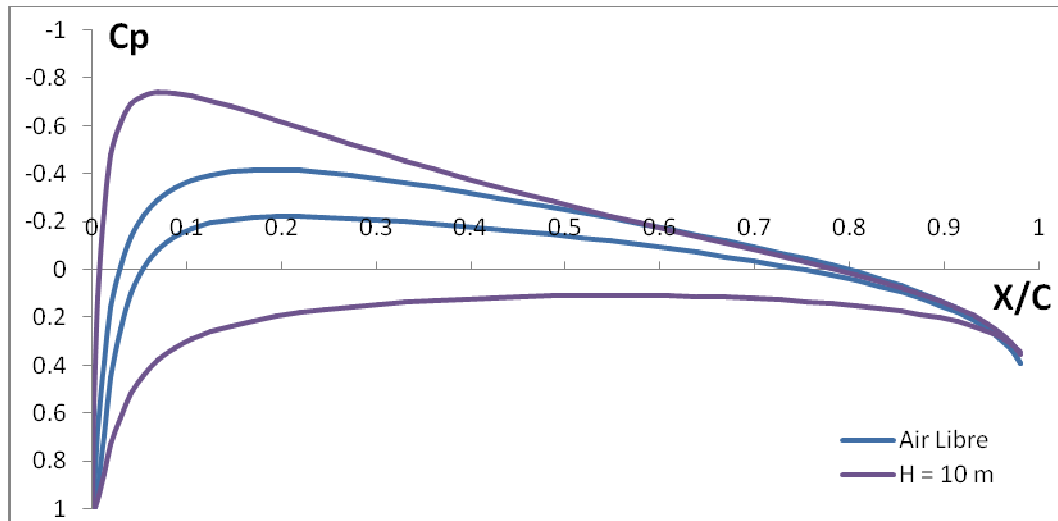


Figure 5.87 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

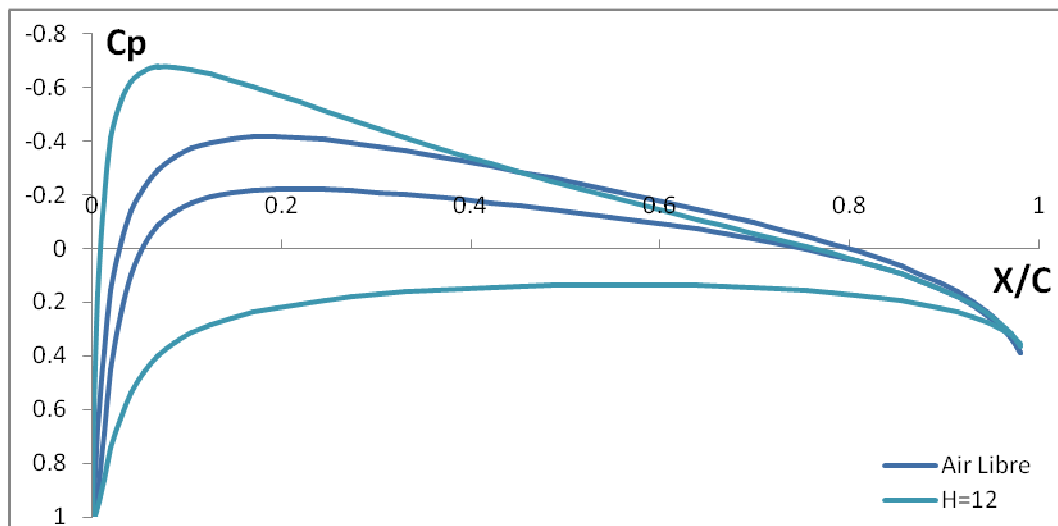


Figure 5.88 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$, $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

On remarque que tout comme pour le cas où $\alpha = 0^\circ$, les graphes $C_p = f(x/c)$ présentent- à première vue- la même allure générale que celle pour $H = 6m$ et $\alpha = 3^\circ$. Par contre, on remarque facilement que ces derniers présentent des déviations les uns par rapport aux autres ce qu'on expliquera ultérieurement.

5.4.1.2.3 $C_p = f(x/c)$ une paroi pour différentes valeurs de h et pour $\alpha = 3^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de pression C_p en fonction de la corde du profil pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour différentes valeurs de H et pour $\alpha = 3^\circ$, $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

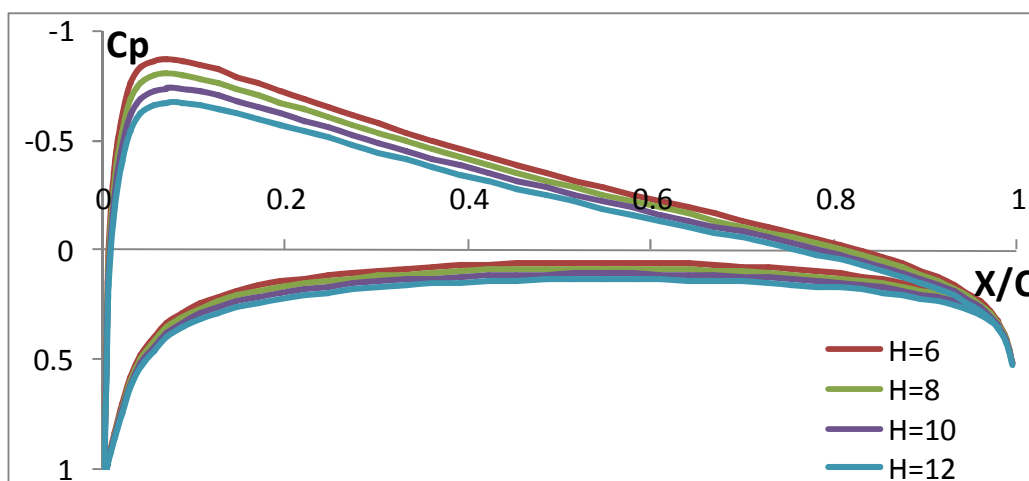


Figure 5.89 : $C_p = f(x/c)$ NACA 0018 une paroi pour $\alpha = 3^\circ$ et pour différentes valeurs de H

On remarque, comme nous venons de le dire, que les graphes $C_p = f(x/c)$ présentent des déviations les uns par rapport aux autres, plus exactement, que plus la hauteur H diminue, plus le C_p augmente et vice versa, ce qui veut dire que l'effet de sol augmente le coefficient de pression C_p , ceci est, une fois de plus, logique en soit puisqu'on sait que lorsque le profil est à proximité d'une paroi l'air est pris entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage ce qui fait qu'il se crée un goulot d'étranglement de l'air et par conséquent une zone de surpression ente les deux surfaces et qui tend à soulever l'avion vers le haut de telle sorte que plus on s'approche du sol plus cette surpression aura tendance à augmenter puisque l'air va se retrouver de plus en plus emprisonné entre l'intrados de l'aile et la piste d'atterrissage : D'où, il en résulte une augmentation continue du coefficient de pression C_p avec la diminution de la hauteur H .

A noter que le coefficient de pression C_p aura de plus en plus tendance à augmenter au fur et à mesure qu'on augmente l'angle d'incidence puisque nous avons vu auparavant que le C_p augmente avec l'angle d'incidence, ce qui fait que cette augmentation va s'ajouter à celle causée par la diminution de la hauteur H et que, par conséquent, si on prend par exemple le C_p pour $\alpha = 3^\circ$ et $H = 6m$, on sera sûrs que ce dernier présentera un C_p plus important que celui obtenu pour $\alpha = 2^\circ$ et $H = 6m$.

5.4.1.3 Conclusion

L'effet de sol augmente le coefficient de pression de l'avion.

5.4.2 Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de portance Cl

Il est question ici d'exposer les résultats obtenus sur l'influence de la variation de la hauteur H sur le coefficient de portance Cl pour un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à proximité d'une paroi cela va sans dire.

5.4.2.1 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de H

5.4.2.1.1 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour $H = 6m$, $N = 100$, et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m$, $M = 0.1$ et pour $N = 100$ panneaux.

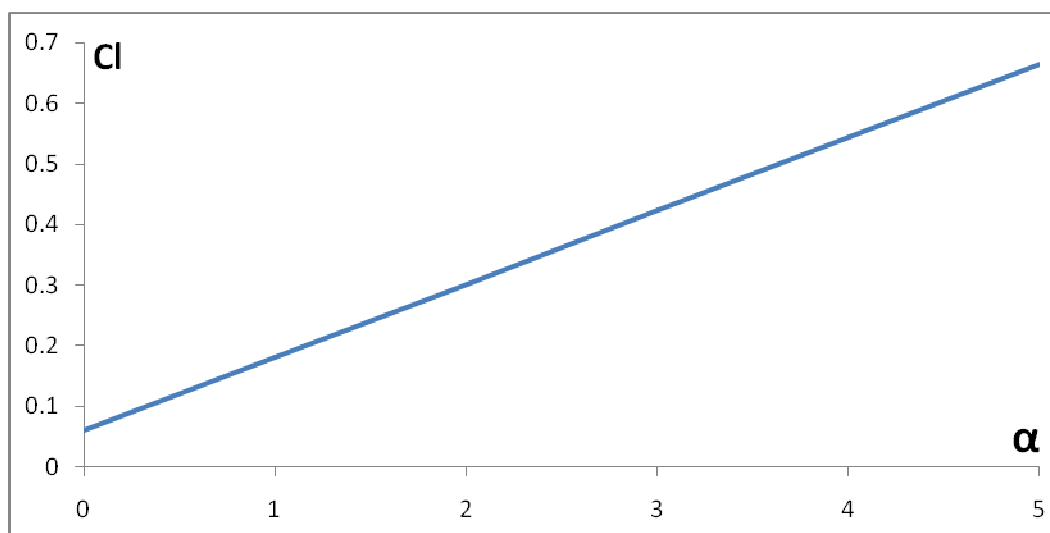


Figure 5.90 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

Ce graphique est le même que celui déjà décrit dans le cas « $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$ » dans le chapitre « Résultats sur le coefficient de portance Cl » : Les commentaires sont donc les mêmes.

Il faut cependant noter que dans ce cas la courbe $Cl = f(\alpha)$ est une droite ne passant pas par l'origine d'équation : $Cl = (a \cdot \alpha + b)$ telle que $a = 0.118$.

5.4.2.1.2 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$ et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ces quatre graphiques représentent les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$ respectivement et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux.

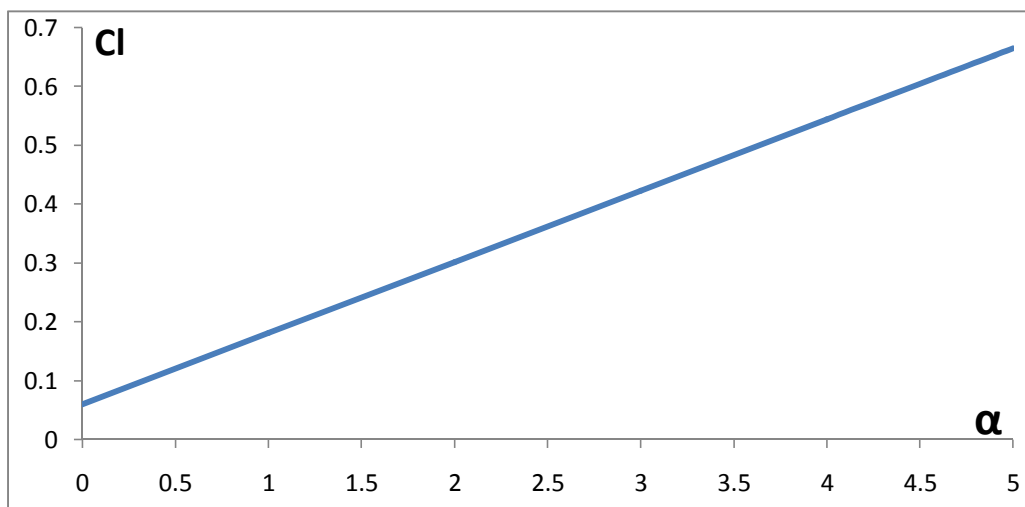


Figure 5.91 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

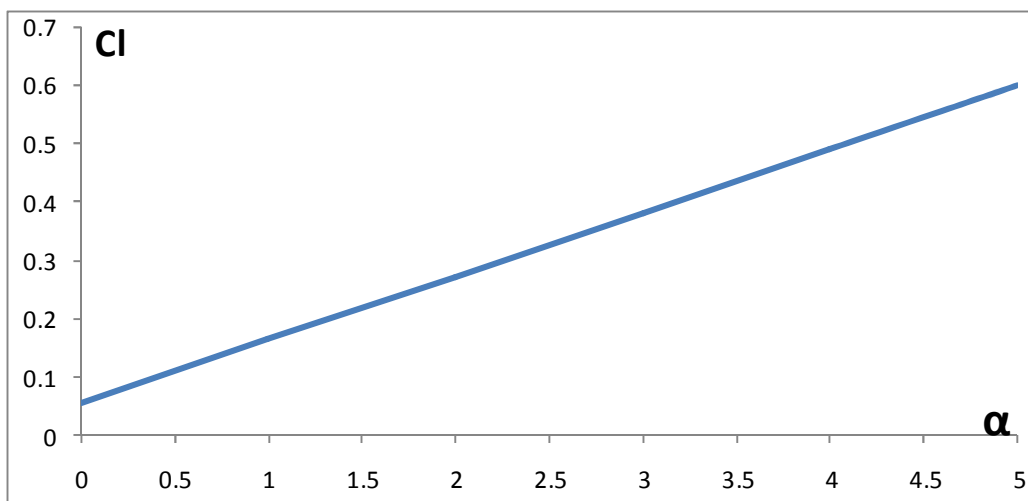


Figure 5.92 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 8m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

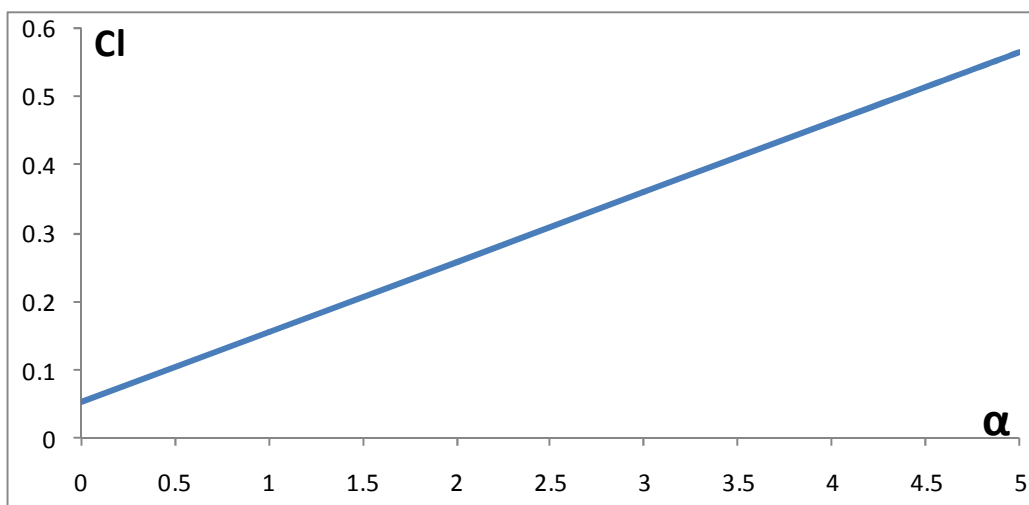


Figure 5.93 : $C_l = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

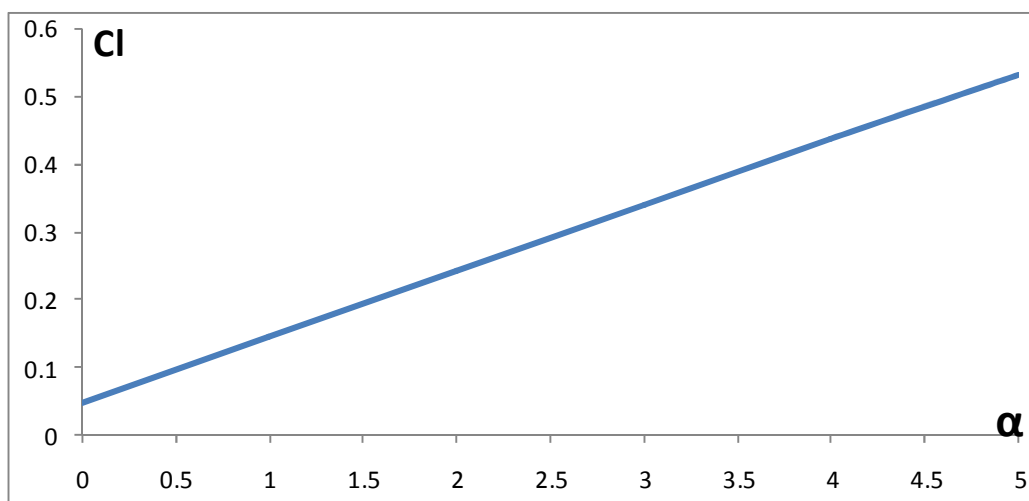


Figure 5.94 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

On remarque que l'allure des courbes $Cl = f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $Cl = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours d'un profil à proximité d'une paroi, il ne *change* donc que la *hauteur*. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$, on trouve $a = 0.118$, 0.1062 , 0.1001 , et 0.0944 respectivement.

5.4.2.1.3 $Cl = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de H et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de portance Cl en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour différentes valeurs de H et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

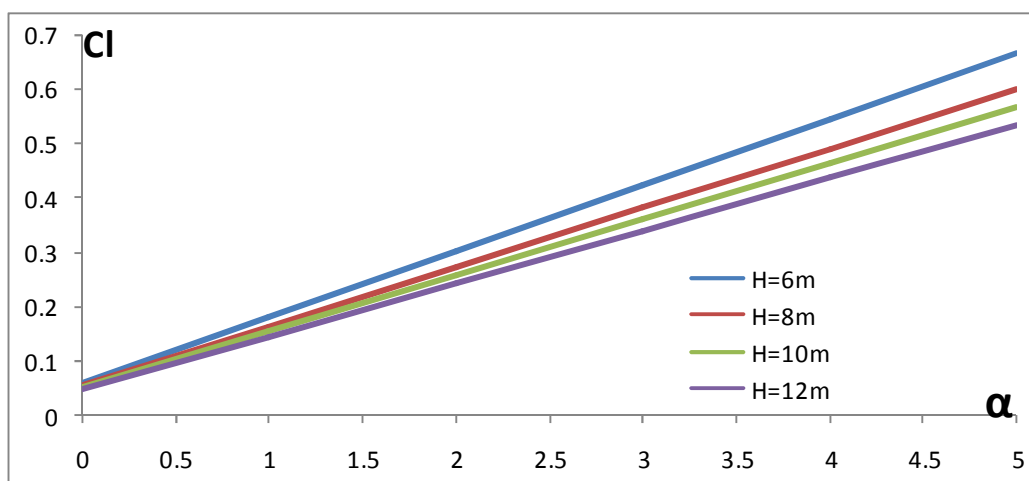


Figure 5.95 : $Cl = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de H

On remarque que les courbes $CI = f(\alpha)$ sont toujours des droites ne passant pas par l'origine d'équations $CI = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours d'un profil à proximité d'une paroi comme nous venons de le dire, par contre, on remarque que les pentes de ces droites diminuent au fur et à mesure que la hauteur H augmente : En effet, pour $H = 6m, 8m, 10m$ et $12m$ respectivement on trouve $a = 0.118, 0.1062, 0.1001$, et 0.0944 . Il est clair que cette diminution des pentes des droites $CI = f(\alpha)$ s'accompagne automatiquement par une diminution du coefficient de portance CI comme le montre la figure ci-dessous.

5.4.2.2 Conclusion

Ce graphique nous permet de constater qu'effectivement l'effet de sol augmente bel et bien le coefficient de portance CI : Par exemple, si on prend pour titre de comparaison les coefficients de portance du profil **NACA 0018** à $\alpha = 3^\circ$ pour $H = 6m$ et $H = 12m$ respectivement comme le montre la figure ci-dessus, on voit alors **clairement** qu'il y a une augmentation significative du coefficient de portance lorsque la hauteur H diminue: En effet, pour $H = 6m$ on trouve que le $CI = 0.423$ alors que pour $H = 12m$ ce dernier prend la valeur $CI = 0.3384$, ce qui veut dire que la portance de l'avion augmente avec un facteur égal à **1,25** lorsqu'on passe de $H = 12m$ à $H = 6m$, ou alors, pour mieux dire, que si on veut transporter une certaine charge m à une altitude $H = 12m$, alors, grâce à l'effet de sol, on arrive à transporter une charge égale à $1.25m$ à une altitude égale à $H = 6m$ en bénéficiant de l'effet de sol ce qui n'est sûrement pas négligeable : D'où tout l'intérêt qui revient à l'effet de sol quant au transport de plus grandes charges d'une façon beaucoup plus économique.

5.4.3 Influence de la hauteur H sur les variations du coefficient de moment de tangage C_m

Finalement, il est question dans la dernière partie de ce chapitre d'exposer les résultats obtenus sur l'influence de la variation de la hauteur H sur le coefficient de moment de tangage C_m pour un profil **NACA 0018** dans le cas du profil à proximité d'une paroi, cela va sans dire bien évidemment.

5.4.3.1 $C_m = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de H

5.4.3.1.1 $C_m = f(\alpha)$ une paroi pour $H = 6m$, $N = 100$, et $M = 0.1$

Ce graphique représente les variations du coefficient de moment de tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m$, $M = 0.1$ et pour $N = 100$ panneaux.

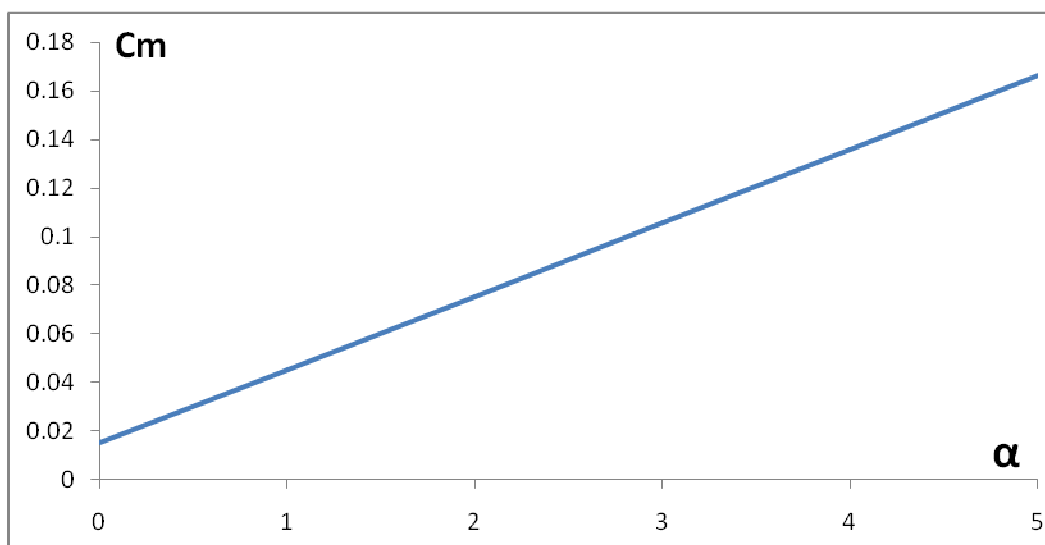


Figure 5.96 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 6m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

Ce graphique est le même que celui déjà décrit dans le cas « $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $N = 100$ et $M = 0.1$ » dans le chapitre « Résultats sur le coefficient de moment de tangage C_m » : Les commentaires sont donc les mêmes.

Il faut cependant noter que dans ce cas la courbe $C_m = f(\alpha)$ est une droite ne passant pas par l'origine d'équation : $C_m = (a \cdot \alpha + b)$ telle que $a = 0.0295$.

5.4.3.1.2 $C_m = f(\alpha)$ une paroi pour $H = 6m, 8m, 10m,$ et $12m$ et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ces quatre graphiques représentent les variations du coefficient de moment de tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour $H = 6m, 8m, 10m,$ et $12m$ respectivement et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux.

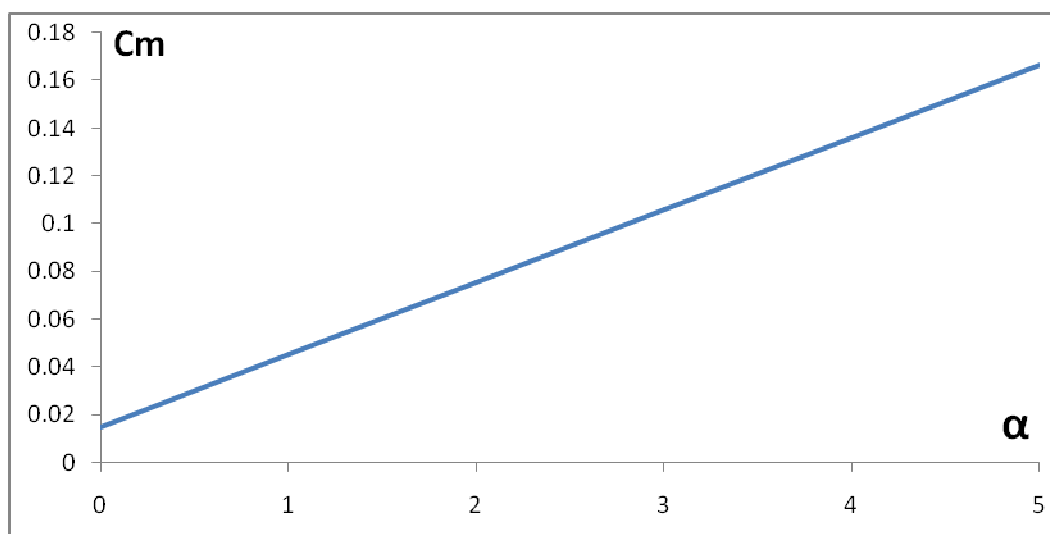


Figure 5.97 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 6m, M = 0.1$ et $N = 100$

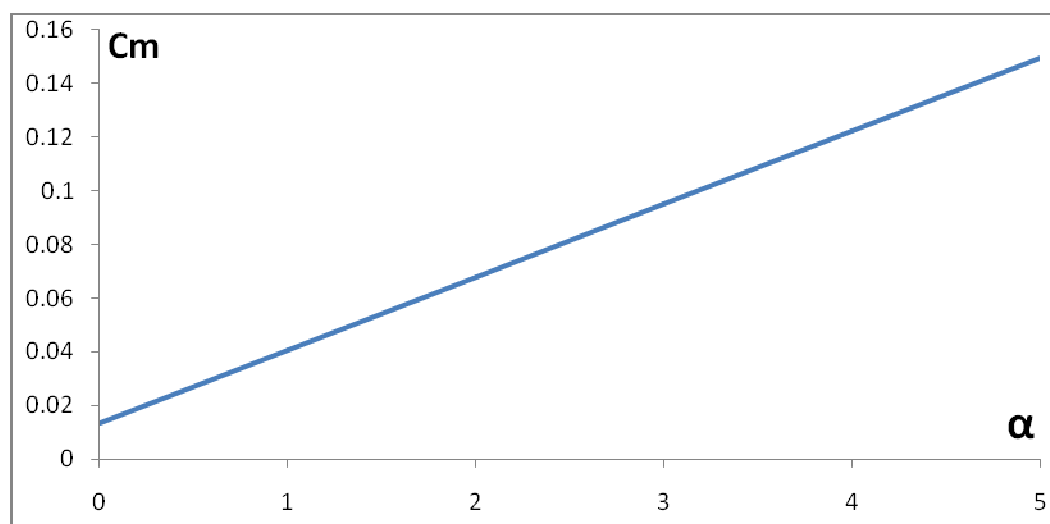


Figure 5.98 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 8m, M = 0.1$ et $N = 100$

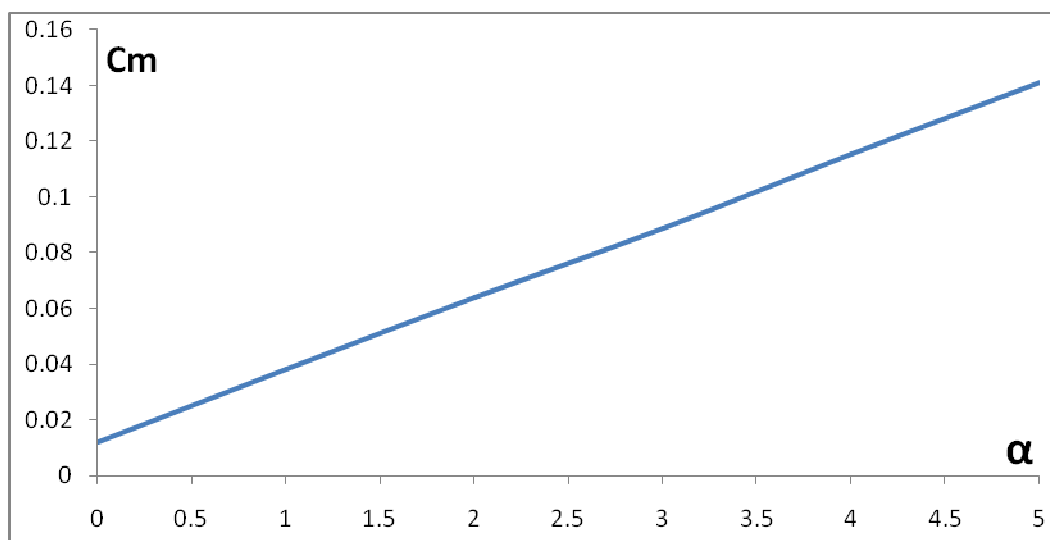


Figure 5.99 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 10m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

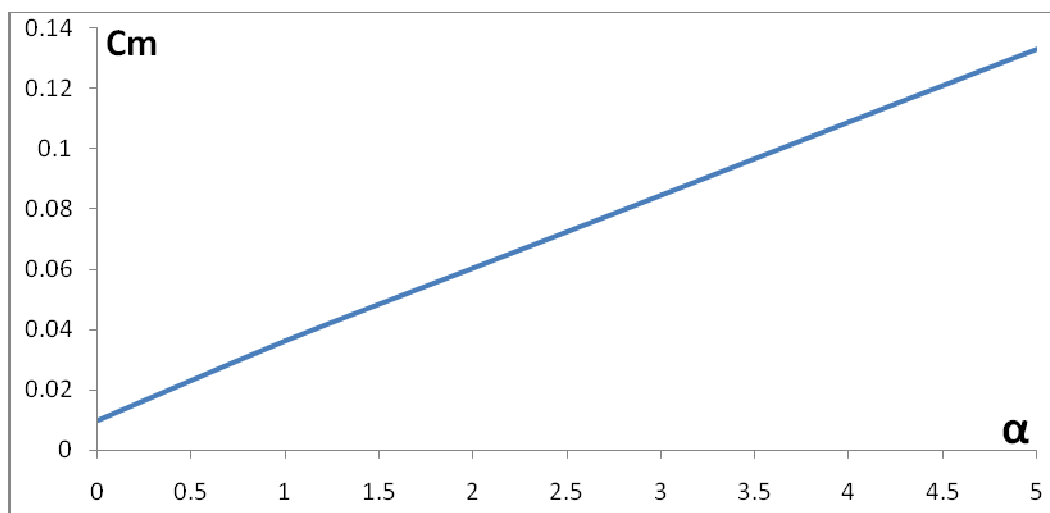


Figure 5.100 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour $H = 12m$, $M = 0.1$ et $N = 100$

On remarque que l'allure des courbes $C_m = f(\alpha)$ est toujours une droite ne passant pas par l'origine d'équation $C_m = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours d'un profil à proximité d'une paroi, il ne change donc que la hauteur. Par contre, on remarque que les pentes de ces droites présentent une légère déviation les unes par rapport aux autres : Effectivement, pour $H = 6m$, $8m$, $10m$, et $12m$, on trouve $a = 0.0295$, 0.0265 , 0.0250 , et 0.0236 respectivement.

5.4.3.1.3 $C_m = f(\alpha)$ une paroi pour différentes valeurs de H et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

Ici nous avons ce graphique qui représente les variations du coefficient de moment de tangage C_m en fonction de l'angle d'incidence pour des angles d'incidence variant entre 0° et 5° pour un profil **NACA 0018** à proximité d'une paroi pour différentes valeurs de H et pour $M = 0.1$ et $N = 100$ panneaux

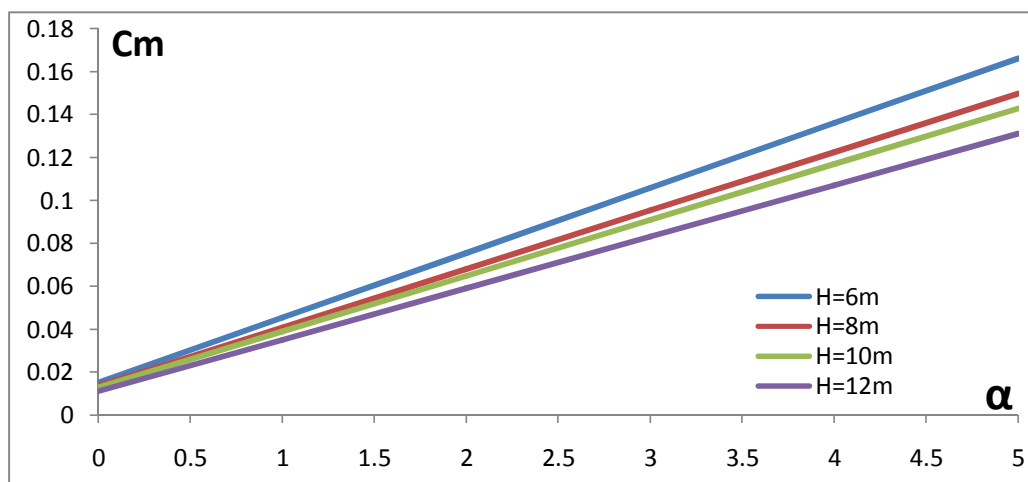


Figure 5.101 : $C_m = f(\alpha)$ NACA 0018 une paroi pour différentes valeurs de H

On remarque que les courbes $C_m = f(\alpha)$ sont toujours des droites ne passant pas par l'origine d'équations $C_m = (a \cdot \alpha + b)$ puisqu'il s'agit toujours d'un profil à proximité d'une paroi comme nous venons de le dire, par contre, on remarque que les pentes de ces droites diminuent au fur et à mesure que la hauteur H augmente : En effet, pour $H = 6m, 8m, 10m$ et $12m$ respectivement on trouve $a = 0.0295, 0.0265, 0.0250$, et 0.0236 . Il est clair que cette diminution des pentes des droites $C_m = f(\alpha)$ s'accompagne automatiquement par une diminution du coefficient de moment de tangage comme le montre la figure ci-dessous.

5.4.3.2 Conclusion

Ce graphique nous permet de constater que l'effet de sol augmente le coefficient de moment de tangage C_m : Par exemple, si on prend pour titre de comparaison les coefficients de moment de tangage du profil **NACA 0018** à $\alpha = 3^\circ$ pour $H = 6m$ et $H = 12m$ respectivement comme le montre la Figure 5.ci-dessus, on voit alors **clairement** qu'il y a une augmentation significative du coefficient de moment de tangage C_m lorsque la hauteur H diminue: En effet, pour $H = 6m$ on trouve que le $C_m = 0.1057$ alors que pour $H = 12m$ ce dernier prend la valeur $C_m = 0.0845$, ce qui veut dire que la tendance de l'avion à cabrer augmente avec un facteur égal à **1,25** lorsqu'on passe de $H = 12m$ à $H = 6m$, ce qui n'est sûrement pas négligeable pour ce qui est de l'instabilité de l'avion., Pour remédier à ce problème, il suffit – comme nous l'avons vu précédemment – de placer au niveau de l'empennage des stabilisateurs **horizontaux** plus puissants pour assurer la stabilité horizontale de l'avion.

5.4.4 Conclusion finale

A partir de tout ce qui vient d'être dit par rapport à l'influence de la hauteur H sur les coefficients aérodynamiques C_p , C_l , et C_m , on conclue donc que plus la hauteur H diminue plus l'influence de l'effet de sol sur les coefficients aérodynamiques devient significative, et que, par conséquent, plus on s'éloigne du sol, plus celle-ci devient de plus en plus négligeable, et que, de ce fait, l'avion aura de plus en plus tendance à se comporter comme s'il était à air libre. Effectivement, les trois graphiques ci-dessous pour le C_p , C_l , et C_m respectivement, nous montrent *clairement* que plus on augmente la hauteur H , plus les courbes correspondantes à *chacun* de ces coefficients aérodynamiques s'approchent de plus en plus de celle correspondant au cas où le profil est à air libre : Ces courbes résument donc merveilleusement bien tout ce qui a été dit depuis le début de ce mémoire quant à l'influence de l'effet de sol sur les caractéristiques aérodynamiques de l'avion, à savoir, l'augmentation des coefficients aérodynamiques C_p , C_l , et le C_m . Nous n'avons malheureusement pas pu étudier l'influence de ce dernier sur le coefficient de traînée C_d à cause de la restriction des méthodes des panneaux aux écoulements subsoniques, mais il n'en demeure pas moins que l'effet de sol reste, jusqu'à ce jour, l'un des meilleurs moyens existants pour diminuer la traînée de l'avion, et nul n'est sans savoir de l'intérêt certain que cela représente quant au gain considérable d'accélération, de temps, et d'argent que cela représente.

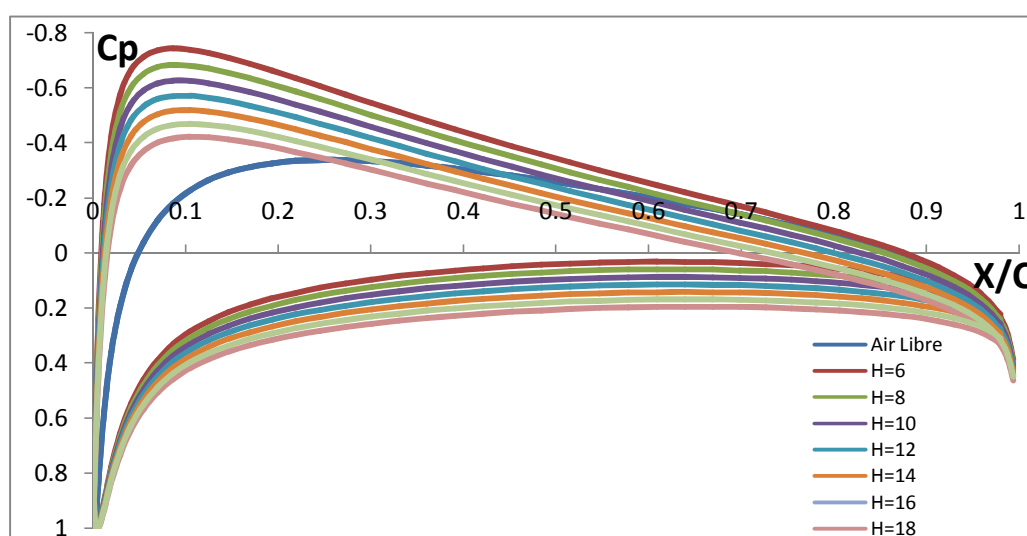


Figure 5.102 : Convergence C_p une paroi vers C_p air libre $\alpha = 0^\circ$, $N = 100$

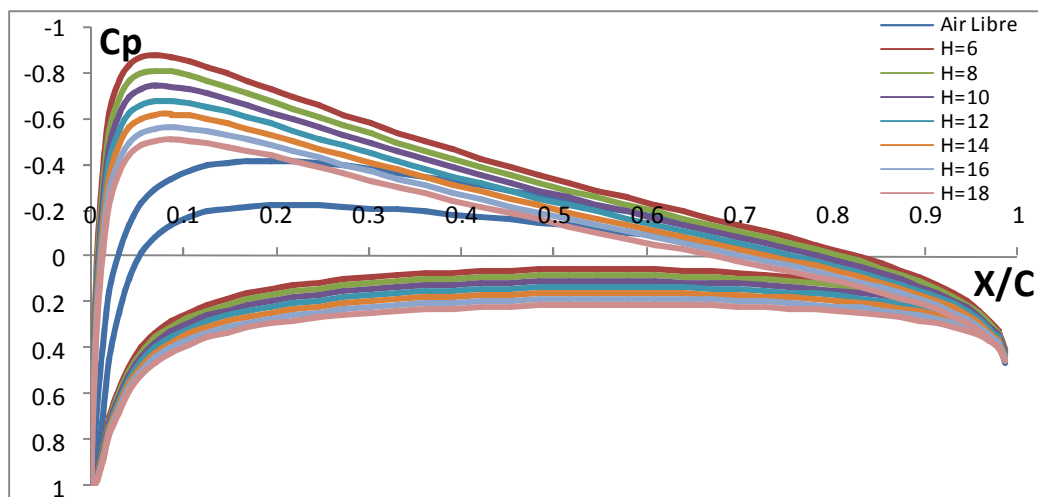


Figure 5.103 : Convergence C_p une paroi vers C_p air libre $\alpha = 3$, $N = 100$

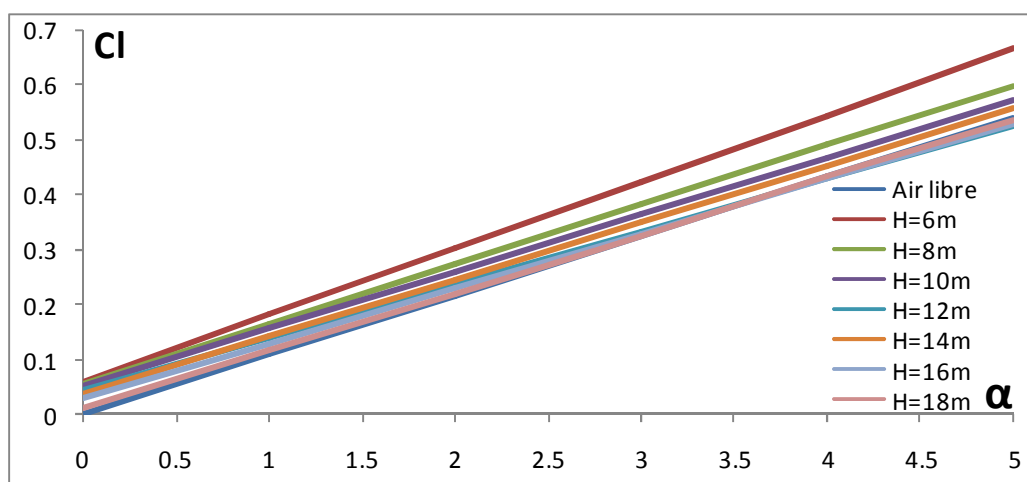


Figure 5.104 : Convergence C_l une paroi vers C_l air libre

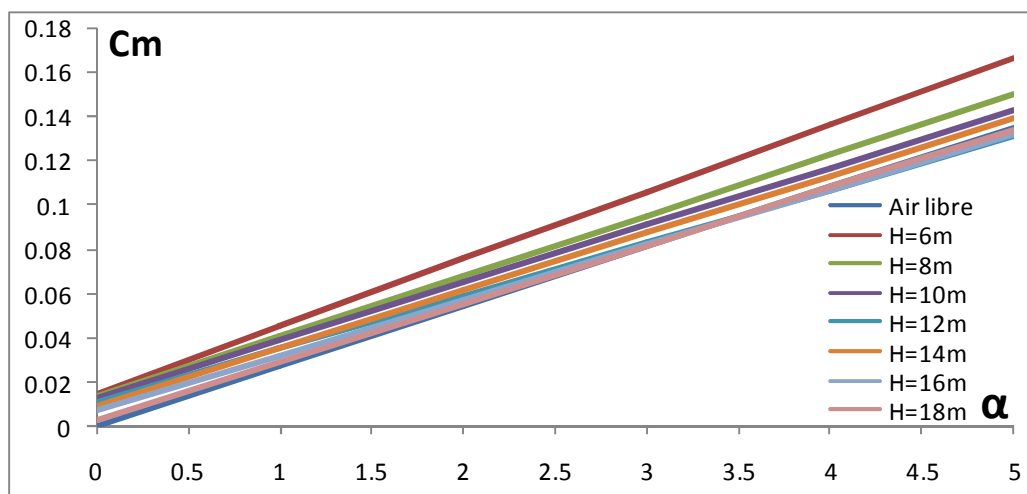


Figure 5.105 : Convergence C_m une paroi vers C_m air libre

CONCLUSION GENERALE

Nous avons essayé à travers ce mémoire de présenter l'effet de sol, aussi bien sous ses aspects théoriques, pratiques que numériques ... Nous espérons y être arrivé.

L'effet de sol est donc une technologie qui est capable de faire diminuer énormément la quantité de carburant consommée par un avion : Dans la pratique, si un avion consomme **2700 L/h** de carburant hors effet de sol (consommation horaire d'un A320), alors le même avion exploitant l'effet de sol ne consommerait plus que **1100 L/h** environ pour soulever la même masse.

De plus, il permet de transporter de lourdes charges tout en réduisant la pollution. Aussi, l'effet de sol permettrait de conjuguer les avantages du bateau tout en se défaisant de ses inconvénients, à savoir, permettre le transport de lourdes charges à grande vitesse, tout en restant beaucoup plus abordable que le transport par avion.

Selon les calculs, on peut emporter une charge double à une même vitesse tout en consommant 2 à 3 fois moins de carburant grâce à l'effet de sol. Un des freins au développement de cette technologie est le fait que ces appareils ne sont exploitables que sur des surfaces très planes telles que les océans et à faible altitude (le projet Pélican de Boeing parle d'exploiter ces avions à une altitude de **20 à 50 pieds**, soit environ 7 à 20 m), mais que leurs vitesses d'exploitation les rend incompatibles avec la navigation maritime, parfois plusieurs dizaines de fois plus lente.

Si cette technologie était amenée à se développer, on devrait probablement mettre en place un système de couloirs aériens de basses altitudes réservés aux "écranoplans". De plus l'avion à effet de sol est beaucoup plus sensible aux conditions climatiques que n'importe quel autre moyen de transport. D'autre part, si la plupart des grands ports seraient à même d'accueillir des appareils gigantesques de type Pélican, il n'en est pas de même pour les aéroports, où la présence d'un **A380**, appareil plus de deux fois plus petit se révèle déjà parfois problématique.

Nous nous sommes limités dans notre travail à étudier l'écoulement subsonique autour des profils NACA symétriques à quatre chiffres pour le calcul des coefficients aérodynamiques C_p , C_l et C_m , il serait intéressant d'étudier ces derniers (les coefficients aérodynamiques) dans des conditions limites autres que celles présentées dans ce mémoire : Par exemple, au lieu d'être incompressible, on pourrait songer à travailler avec un fluide compressible et voir l'influence de l'incompressibilité sur les caractéristiques aérodynamiques de l'avion : En effet, nous avons vu à travers ce mémoire que la variation du nombre de Mach influe très peu sur les variations de C_p , C_l , et C_m lorsqu'il s'agit des fluides incompressibles, il serait donc plus qu'intéressant d'étudier l'influence du nombre de Mach sur ces coefficients dans le cas des fluides compressibles et faire ainsi une comparaison englobant tous les aspects aérodynamiques correspondants aux deux cas de figure.

On pourrait aussi songer à choisir non pas un profil Naca symétrique mais cambré, ou alors choisir carrément un profil autre que le profil Naca pour le calcul des coefficients aérodynamiques tout en jouant sur les différents paramètres qui caractérisent les profils en question : Cela ouvre le champ sur une multitude de combinaisons possibles quant au calcul des coefficients aérodynamiques.

Une autre étude qui s'avère être parmi les plus intéressantes consiste à choisir une autre méthode des panneaux, autre que la méthode de Hess et Smith dont il est question dans ce mémoire pour le calcul des coefficients C_p , C_l , et C_m : Une fois de plus, l'analyse et la comparaison des résultats obtenus s'avèrent être des plus intéressantes.

Finalement, une des meilleures perspectives qu'on pourrait envisager de faire, c'est qu'au lieu d'étudier l'écoulement du fluide en question à proximité d'une paroi on le ferait pour ce même fluide placé entre deux parois (par exemple dans une soufflerie) et faire, une fois de plus, une étude détaillée sur les coefficients aérodynamiques correspondant à ce cas précis, encore une fois, les possibilités offertes nous permettent de faire une multitude de combinaisons : On pourrait par exemple passer de la compressibilité à l'incompressibilité, ou alors choisir différents types de profils aérodynamiques pour le calcul des coefficients de pression, de portance, et de moment de tangage, à moins de n'opter pour jouer

sur les différentes méthodes des panneaux pour faire une comparaison aussi bien quantitative que qualitative par rapport aux variations des coefficients aérodynamiques correspondants à chaque cas de figure : Là encore, les combinaisons possibles s'avèrent être des plus multiples, des plus tangibles, mais par-dessus tout, des plus intéressantes qui soient

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$\mathfrak{R}(O, x, y, z)$	Repère lié au bateau dans sa position moyenne
$(x, y, z) = (x_M, y_M, z_M)$	Coordonnées du point M
D	Domaine fluide
S_B	Surface instantanée de la carène
S_0	Surface de la carène dans sa position moyenne
S	Frontière entre τ_i et τ_e
S_j	Facette du corps épais
S_{ji}	Facette du squelette
SL	Surface libre
SL_i	Surface libre intérieure
SL_e	Surface libre extérieure
Σ_B	Sillage
Σ	Sillage dans la position moyenne de la carène
S_1	Squelette des parties portantes
S_2	Prolongation à $z=0$ de $S_1 \cup \Sigma$
S_∞	Surface de D à l'infini
C_B	Contour de flottaison instantané
C_j	Segment du contour de flottaison
C	Contour de flottaison dans la position moyenne de la carène
C_∞	Contour de la surface libre à l'infini
U_∞	Vitesse du bateau
a	Amplitude de la houle incidente
β	Direction de la houle par rapport à la vitesse du navire
$\vec{V}(M, t)$	Vitesse du fluide au point M à l'instant t
$\vec{V}_E(M, t)$	Vitesse d'entraînement d'un point M de la carène, à l'instant t
$E(x, y, t)$	Equation de la surface libre dans \mathfrak{R}
p	Pression statique dans le fluide
p_a	Pression atmosphérique
p^+, p^-	Pression de part et d'autre du bord de fuite et du sillage
p_s	Pression stationnaire
p_t	Pression instationnaire
\tilde{p}_D	Pression de diffraction
$\tilde{p}_{j,j=1,6}$	Pression de radiation élémentaire
$\tilde{p}'_{j,j=1,6}$	Pression de radiation élémentaire dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme

g	Accélération de la pesanteur
ρ	Masse volumique de l'eau
ε	Viscosité artificielle
$\bar{n}(M, t)$	Normale extérieure à la carène au point M
$\bar{n}_0(M)$	Normale extérieure à la carène dans sa position moyenne
$n_{j,j=1,6}$	Normale généralisée à la carène dans sa position moyenne
\bar{n}_K	Normale extérieure à la facette d'où est issu le point de Joukowski
$\Phi(M, t)$	Potentiel total des vitesses
$\Phi_I(M, t)$	Potentiel de la houle incidente
$\Phi_s(M)$	Potentiel total stationnaire
$\Phi_t(M, t)$	Potentiel des perturbations instationnaire
$\varphi(M)$	Potentiel des perturbations stationnaire
$\tilde{\varphi}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique
$\tilde{\Phi}_I(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de la houle incidente
$\tilde{\Phi}_D(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de diffraction
$\tilde{\Phi}_i(M)$	Potentiel intérieur
$\tilde{\Phi}_e(M)$	Potentiel extérieur
$\tilde{G}(M, M')$	Fonction de Green
$\tilde{\phi}_{j,j=1,6}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de radiation élémentaire
$\tilde{\phi}'_{j,j=1,6}(M)$	Potentiel instationnaire harmonique de radiation élémentaire dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
ω_h	Pulsation de la houle incidente
ω	Pulsation de rencontre
k_0	Nombre d'onde
$\dot{\tau}$	Translation de la carène dans \mathfrak{R}
$\dot{\theta}$	Rotation de la carène dans \mathfrak{R}
$\dot{\tau}$	Vitesse de translation dans \mathfrak{R}
$\dot{\theta}$	Vitesse de rotation dans \mathfrak{R}
$\xi_{j,j=1,6}$	Mouvements de la carène dans \mathfrak{R}
$\tilde{\xi}_{j,j=1,6}$	Mouvements harmonique de la carène dans \mathfrak{R}
$\beta_{j,j=1,6}$	Vecteur unitaire généralisé
$m_{j,j=1,6}$	Termes correctifs pour la prise en compte de l'écoulement stationnaire dans la condition de glissement instationnaire
$\tilde{F}_{I,i=1,6}^i$	Efforts de Froude-Krilov
$\tilde{F}_{D,i=1,6}^i$	Efforts de diffraction
$\tilde{F}_{R,i=1,6}^i$	Efforts de radiation
$\bar{F}_{hs}(t)$	Efforts hydrostatiques et de pesanteur

$\bar{F}_M(t)$	Efforts d'inertie
$\tilde{M}_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Matrice des efforts de radiation
$\tilde{M}'_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Matrice des efforts de radiation dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$A_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Coefficients dimensionnels de masse ajoutée
$B_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Coefficients dimensionnels d'amortissement
$A'_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Coefficients dimensionnels de masse ajoutée dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$B'_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Coefficients dimensionnels d'amortissement dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
$M_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Matrice des efforts d'inertie
$S_{ij, (i,i) \in \{[1,6] \times [1,6]\}}$	Matrice des efforts hydrostatiques et de pesanteur
m	Masse du navire
G	Centre de gravité du navire
SF_0	Surface de flottaison de la carène dans sa position moyenne
C	Centre de carène
\forall	Déplacement en kg
ζ	Élévation de la surface libre
ζ_s	Élévation de la surface libre linéarisée stationnaire
ζ_t	Élévation de la surface libre linéarisée instationnaire
$\tilde{\zeta}_D$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de diffraction
$\tilde{\zeta}_j$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de radiation élémentaire
$\tilde{\zeta}'_j$	Élévation de la surface libre instationnaire harmonique de radiation élémentaire, dans le cas de la linéarisation autour de l'écoulement uniforme
τ_i	Domaine intérieur
τ_e	Domaine extérieur
I_l	Intégrale de ligne
\hat{t}	Vecteur tangent à la ligne de flottaison
\bar{s}	$\bar{s} = \bar{n} \wedge \hat{t}$
BF	Bord de fuite
BA	Bord d'attaque
α	Angle d'attaque des parties portantes
$\tilde{f}(M, \omega)$	Fonction de circulation dans le squelette
$\tilde{\gamma}(M, \omega)$	Fonction de circulation dans le sillage
$\tilde{\sigma}(M')$	Intensité surfacique de sources
$\tilde{\mu}(M')$	Intensité surfacique de doublets
Γ	Intensité surfacique généralisée
\mathcal{A}	Matrice d'influence

\mathcal{B}	Vecteur second membre
G	Fonction de green de diffraction-radiation
G_0	Terme de Rankine
G_1	1 ^{ière} composante du terme de vagues de la fonction de green de diffraction radiation
G_2	2 ^{ième} composante du terme de vagues de la fonction de green de diffraction radiation
G_s	Fonction de green de résistance de vagues
Gw	Terme de vagues de la fonction de green de résistance de vagues
(X, Y, Z)	Coordonnées adimensionnées du point de calcul
(X', Y', Z')	Coordonnées adimensionnées du point source
L_0	Longueur de référence
F	Nombre de Froude
$\overline{\omega}$	Pulsation réduite (adimensionnée)
τ	Paramètre de Brard
$K_s, K_c, K_{i,i=1,4}, Z_{i,i=3,4}$	Pôles de la fonction de Green
g_1, g_2, g_3	Fonctions exponentielles intégrales complexes modifiées
C_k, C'_k	Coefficients de forme dans le calcul de l'intégrale surfacique de la fonction de Green
(p, q, r)	Coordonnées de la normale extérieure
$\theta_c, \theta'_c, \alpha_c$	Angles de Fourier
$\mathcal{E}_{rel}, \mathcal{E}_{abs}$	Erreur relative, erreur absolue
k	Fréquence réduite
A	Longueur d'onde du sillage
A_{BF}, B_{BF}	Points du bord de fuite, origine du sillage
L	Longueur du bateau
B	Largeur
T	Tirant d'eau
c	Corde
λ	Allongement
Sm	Surface mouillée
Cb	Coefficient de bloc
Cw	Coefficient de résistance de vagues
Cx	Coefficients de traînée
Cy	Coefficients de force latérale
Cz	Coefficients de portance
Cp	Coefficients de pression
Re	Nombre de Reynolds

APPENDICE B
REFERENCES

- [1] PARASCHVOIU, I., *Aérodynamique Subsonique*, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1998, 572 p.
- [2] Th. FAURE., *Aérodynamique Appliquée*, Master Science de l'ingénieur 1^{er} années, Parcours Mécanique et Ingénierie des Système – Module d'option MS 154, Université de Pierre et Marie Curie – paris 6, Ecole Normale Supérieure de Cachan
- [3] REBUFFET, P., *Aérodynamique expérimentale*, vol. 1, paris, Dunod, 1969.
- [4] BONNET, A. et LUNEAU, J., *Aérodynamique, Théories de la dynamique des fluides*, Toulouse, Editions CEPADUES, 1989, 544 p.
- [5] RYHMING, I. L., *Dynamique des fluides*, Presse polytechniques romandes, 1985, 400 p.
- [6] MASSON, C., PARASCHVOIU, I. *Description et comparaison de cinq méthodes de panneaux en deux dimensions*, Rapport technique EPM/RT-90/17, Montréal, Ecole Polytechnique de Montréal, 1990.
- [7] Alexandre de SIEVERS., « *Étude en soufflerie de l'effet de sol* », 1965, « *Détermination de l'effet de sol sur les caractéristiques de l'avion A 320* », 1988.
- [8] ANDERSON, J. D. Jr, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1984, 536 p.
- [9] KIRCHHOFF, Robert H., *Potential Flows*
- [10] ABRAMOWITZ, A. et STEGUN, I., *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications Inc., 1972.
- [11] Science & Vie Junior, n°161 de Février 2003 :« *L'avion Géant qui vole au ras des flots* »
- [12] KATZ, J. et PLOTKIN, A., *Low-speed Aerodynamics, From Wing Theory to Panel methods*, New York, McGraw-Hill, 1991, 632 p.
- [13] LACHNITT, J. *L'aviation d'aujourd'hui*, Paris, Librairie Larousse, 1968, 430p.

- [14] FÉDIAEVSKI, C., VOÏTKOUNSKI, I et FADÉEV, Y., *Mécanique des fluides*, Moscou, Edition Mir, 1974, 600 p.
- [15] ROY, J.-F., *Fluides parfaits incompressibles*, Edition Marketing, Ellipses, 1988.
- [16] ABBOTT, IRA H., Von DONHOFF, Albert E., et STIVERS, Louis S. *Summary of Air foil Data*, NACA Rept. No. 824, 1945.
- [17] ABBOTT, A. C. et VON DOENHOFF, A. E., *Theory of Wing Sections*, New York, Dover Publications Inc., 1959, 693 p.
- [18] Aérodynamique et mécanique du vol-V4P
- [19] Manfred GILLI ; *METHODES NUMERIQUES* ; Département d'économetrie U. de Genève ; Version : 25 mars 2006
- [20] <http://www.mit.jyu.fi/mweber/consommation/>: Informations sur la consommation en fonction de la vitesse,
- [21] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/doc5.html :
- [22] http://linpc3.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents_published/doc5/node130.html:
- [23] KAFYEKE, F., *Multi-Block Euler Method for the Complete Challenger Configuration*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal, 1993, 245 p

ANNEXE A**A.1 INTEGRALES SE RAPPORTANT AUX PROFILS**

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x-\xi} d\xi = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (\text{A. 1})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{x-\xi} d\xi = x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \quad (\text{A. 2})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{x-\xi} d\xi = x \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) \quad (\text{A. 3})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{x-\xi} d\xi = x^2 \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) - \frac{2}{3} \quad (\text{A. 4})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{x-\xi} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{x-\xi} d\xi - \frac{1-(-1)^n}{n} \quad (\text{A. 5})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = 0 \quad (\text{A. 6})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A. 7})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \quad (\text{A. 8})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 9})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 10})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^5}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A. 11})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8} \right) \quad (\text{A. 12})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi - \frac{\pi}{2} [1-(-1)^n] \frac{1(3)\dots(n-2)}{2(4)\dots(n-1)} \quad (\text{A. 13})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \quad (\text{A. 14})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 15})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A. 16})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi = \pi \left(x^4 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} \right) \quad (\text{A. 17})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi}(x-\xi)} d\xi = -\pi \quad (\text{A. 18})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A. 19})$$

$$\oint_{-1}^1 \frac{\xi \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) \quad (\text{A. 20})$$

$$\oint_{-1}^1 \frac{\xi^2 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2 \quad (\text{A. 21})$$

$$\oint_{-1}^1 \frac{\xi^3 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^3 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x \quad (\text{A. 22})$$

$$\oint_{-1}^1 \frac{\xi^4 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{2} x^4 \left(\ln^2 \frac{1+x}{1-x} - \pi^2 \right) - 2x^2 - \frac{4}{3} \quad (\text{A. 23})$$

$$\oint_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi = x \oint_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{x-\xi} d\xi - \frac{2}{n} \left[1 - (-1)^{n-1} \right] \sum_{v=0}^{n/2-1} \frac{1}{n-1-2v} \quad (\text{A. 24})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+\xi}(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} \quad (\text{A. 25})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+\xi}}{x-\xi} d\xi = \sqrt{1+x} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}} - 2\sqrt{2} \quad (\text{A. 26})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\frac{\pi^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A. 27})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A. 28})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^2 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 29})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^3 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi x \left(2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 30})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^4 \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = -\pi \left(\frac{5}{3} + 2x^2 + \pi \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (\text{A. 31})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^n \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi = x \int_{-1}^1 \frac{\xi^{n-1} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}(x-\xi)} d\xi - \quad (\text{A. 32})$$

$$\pi \left[1 - (-1)^{n-1} \right] \binom{n-1}{2} ! \sum_0^{n/2-1} \frac{(-1)^v (1)(3)\dots(v)}{2^v (2v+1)(v!)^2 \binom{n-1-v}{2} !}$$

A.2 METHODE DE PANNEAUX

A.2.1 Identité de green :

Dans cette section, nous allons évaluer les intégrales de surface présentes dans les équations 1.28 et 1.11. La première intégrale à évaluer, après la discrétisation du profil, est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 33})$$

Où

\vec{n}_p = Le vecteur unitaire normal par rapport au panneau en P

Φ_s = Le potentiel créé par une source unitaire en deux dimensions

Puisque :

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 34})$$

$$\bar{n}_p \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \bar{n}_p \cdot \bar{r} = \frac{-(x^* - \xi) \sin(\theta_p - \theta_j) + y^* \cos(\theta_p - \theta_j)}{r^2} \quad (\text{A. 35})$$

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 36})$$

On a :

$$2\pi \int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = -\sin(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 37})$$

$$+ \cos(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{\sin(\theta_p - \theta_j)}{2} (\ln r^2)_0^{l_j} + \cos(\theta_p - \theta_j) \left[\arctg\left(\frac{y^*}{x^* - \xi}\right) \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 38})$$

$$\int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(\theta_p - \theta_j) \ln\left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}}\right) + \cos(\theta_p - \theta_j) \beta_{p,j} \right] \quad (\text{A. 39})$$

La seconde intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \theta ds \quad (\text{A. 40})$$

Où Φ_v représente le potentiel d'un tourbillon ponctuel unitaire en deux dimensions.

Etant donné que :

$$\nabla \theta = -\frac{1}{r} \bar{\theta} \quad (\text{A. 41})$$

$$\bar{n}_p \cdot \bar{\theta} = \sin \theta_p \sin(\theta_j + \delta) + \cos \theta_p \cos(\theta_j + \delta) \quad (\text{A. 42})$$

$$\bar{n}_p \cdot \bar{\theta} = \sin \theta_p (\sin \theta_j \cos \delta + \cos \theta_j \sin \delta) + \cos \theta_p (\cos \theta_j \cos \delta - \sin \theta_j \sin \delta) \quad (\text{A. 43})$$

$$\bar{n}_p \cdot \bar{\theta} = (\sin \theta_p \sin \theta_j + \cos \theta_p \cos \theta_j) \cos \delta + (\sin \theta_p \cos \theta_j - \cos \theta_p \sin \theta_j) \sin \delta \quad (\text{A. 44})$$

$$r \bar{n}_p \cdot \bar{\theta} = \cos(\theta_p - \theta_j) (x^* - \xi) + \sin(\theta_p - \theta_j) y^* \quad (\text{A. 45})$$

On obtient :

$$2\pi \int_0^{l_j} \bar{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = -\cos(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi - \sin(\theta_p - \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 46})$$

$$2\pi \int_0^{I_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{\cos(\theta_p - \theta_j)}{2} (\ln r^2)_0^{I_j} + \sin(\theta_p - \theta_j) \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \right]_0^{I_j} \quad (\text{A. 47})$$

$$\int_0^{I_j} \vec{n}_p \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\theta_p - \theta_j) \ln \left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right) - \sin(\theta_p - \theta_j) \beta_{p,j} \right] \quad (\text{A. 48})$$

A.2.2 Méthode de panneaux avec tourbillons : formulation de vitesse

Cette annexe décrit l'évaluation de l'intégrale de surface que l'on retrouve dans l'équation A.31. L'intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{I_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = \int_0^{I_j} \vec{t} \cdot \vec{V}_v ds \quad (\text{A. 49})$$

Où \vec{V}_v est la vitesse induite par un tourbillon, soit :

$$\frac{1}{2} \pi r (\sin(\delta + \theta_j) \vec{i} - \cos(\delta + \theta_j) \vec{j})$$

On a :

$$\vec{t} \cdot \vec{V}_v ds = \frac{1}{2\pi r} [\cos \theta_p \sin(\delta + \theta_j) - \sin \theta_p \cos(\delta + \theta_j)] \quad (\text{A. 50})$$

Alors :

$$\int_0^{I_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_j} \frac{\cos \theta_p \sin(\delta + \theta_j) - \sin \theta_p \cos(\delta + \theta_j)}{r} d\xi \quad (\text{A. 51})$$

$$\int_0^{I_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = \frac{1}{2\pi} \left[\cos \theta_p \int_0^{I_j} \frac{\sin(\delta + \theta_j)}{r} d\xi - \sin \theta_p \int_0^{I_j} \frac{\cos(\delta + \theta_j)}{r} d\xi \right] \quad (\text{A. 52})$$

Toutefois, puisqu'on a :

$$\sin(\delta + \theta_j) = \sin \theta_j \cos \delta + \cos \theta_j \sin \delta \quad (\text{A. 53})$$

$$\cos(\delta + \theta_j) = \cos \theta_j \cos \delta - \sin \theta_j \sin \delta \quad (\text{A. 54})$$

Il en résulte que :

$$2\pi \int_0^{I_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \int_0^{I_j} \frac{\cos \delta}{r} d\xi + (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \int_0^{I_j} \frac{\sin \delta}{r} d\xi \quad (\text{A. 55})$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{x^* - \xi}{r^2} d\xi \quad (\text{A. 56})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \int_0^{l_j} \frac{y^*}{r^2} d\xi$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) (\ln r)_0^{l_j} \quad (\text{A. 57})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \left[\text{arctg} \left(\frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \right]_0^{l_j}$$

$$2\pi \int_0^{l_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = (\cos \theta_p \sin \theta_j - \sin \theta_p \cos \theta_j) \ln \left(\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right) \quad (\text{A. 58})$$

$$+ (\cos \theta_p \cos \theta_j + \sin \theta_p \sin \theta_j) \beta_{p,j}.$$

Cette intégration est valable pour un point p qui n'est pas situé sur le panneau j.

Pour un point j situé au centre du panneau, $r_{p,j+1}$ et $r_{p,j}$ sont égaux. Le terme

logarithmique devient donc zéro. De plus, on sait que

$\beta_{p,j} = -\pi$ et $\theta_p = \theta_j$. L'intégrale devient donc :

$$\int_0^{l_j} \vec{t} \cdot \nabla \Phi_v ds = -\frac{1}{2} \quad (\text{A. 59})$$

D.2.3 Méthode de panneau avec tourbillons : formulation de ligne de courant :

Cette annexe décrit l'évaluation de l'intégrale que l'on retrouve dans l'équation A.

50.

L'intégrale à évaluer est la suivante :

$$\int_0^{l_j} \ln r ds \quad (\text{A. 60})$$

De plus, puisqu'on a :

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 61})$$

Alors :

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \ln \left[(\xi - x^*)^2 + y^{*2} \right] d\xi \quad (\text{A. 62})$$

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = \frac{1}{2} \left[(\xi - x^*) \ln r^2 - 2\xi + 2y^* \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi - x^*}{y^*} \right) \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 63})$$

$$\int_0^{l_j} \ln r ds = l_j (\ln r_{P,j+1} - 1) + x^* \ln \left(\frac{r_{P,j}}{r_{P,j+1}} \right) + y^* \beta_{P,j} \quad (\text{A. 64})$$

D.2.4 Méthode de panneaux avec doublets constants : formulation

potentielle :

Cette annexe décrit l'évaluation des intégrales que l'on retrouve dans l'équation

1.62 .La première intégrale à évaluer est la suivante:

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 65})$$

Etant donné que :

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 66})$$

$$\vec{n}_j \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \vec{n}_j \cdot \vec{r} = -\frac{y^*}{r^2} \quad (\text{A. 67})$$

$$r^2 = (\xi - x^*)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 68})$$

Il en résulte que :

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(\xi - x^*)^2 + y^{*2}} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{y^*}{x^* - \xi} \right]_0^{l_j} \quad (\text{A. 69})$$

$$\int_0^{l_j} \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = -\frac{\beta_{P,j}}{2\pi} \quad (\text{A. 70})$$

La seconde intégrale est :

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 71})$$

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = -\frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{y}{(\xi - x^*)^2 + y^2} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{y}{\xi - x^*} \right]_c^\infty \quad (\text{A. 72})$$

$$\int_c^\infty \vec{n}_j \cdot \nabla \Phi_S ds = -\frac{\beta_{P,N+1}}{2\pi} \quad (\text{A. 73})$$

D.2.5 Méthode de panneau avec doublets linéaires : formulation potentielle :

Cette annexe décrit l'évaluation des intégrales que l'on retrouve dans l'équation

L'intégrale à évaluer est la suivante:

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \ln r ds \quad (\text{A. 74})$$

Puisque :

$$\Phi = \Phi_j + \xi \frac{(\Phi_{j+1} - \Phi_j)}{I_j} \quad (\text{A. 75})$$

$$\nabla \ln r = \frac{1}{r} \nabla r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{A. 76})$$

$$\bar{n}_j \cdot \nabla \ln r = \frac{1}{r^2} \bar{n}_j \cdot \vec{r} = -\frac{y^*}{r^2} \quad (\text{A. 77})$$

$$r^2 = (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \quad (\text{A. 78})$$

Alors :

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{\Phi_j}{2\pi} \int_0^{I_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^* \xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \quad (\text{A. 79})$$

$$\begin{aligned} & \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = \\ & \int_0^{I_j} -\frac{\Phi_j(x^* - I_j) - \Phi_{j+1}x^*}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi + \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi I_j} \int_0^{I_j} \frac{y^*(x^* - \xi)}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi \end{aligned} \quad (\text{A. 80})$$

$$\begin{aligned} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = & -\frac{\Phi_j(x^* - I_j) - \Phi_{j+1}x^*}{2\pi I_j} \operatorname{arctg} \left[\frac{y^*}{(x^* - \xi)} \right]_0^{I_j} \\ & - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi} \left[\frac{y^*}{I_j} \ln[(x^* - \xi)^2 + y^{*2}] \right]_0^{I_j} \end{aligned} \quad (\text{A. 81})$$

$$\int_0^{I_j} \Phi \bar{n}_j \cdot \nabla \Phi_s ds = -\frac{1}{2\pi} \left[\Phi_j + \frac{x^*}{I_j} (\theta_{j+1} - \theta_j) \right] \beta_{p,j} - \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{2\pi} \frac{y^*}{I_j} \ln \left[\frac{r_{p,j+1}}{r_{p,j}} \right] \quad (\text{A. 82})$$

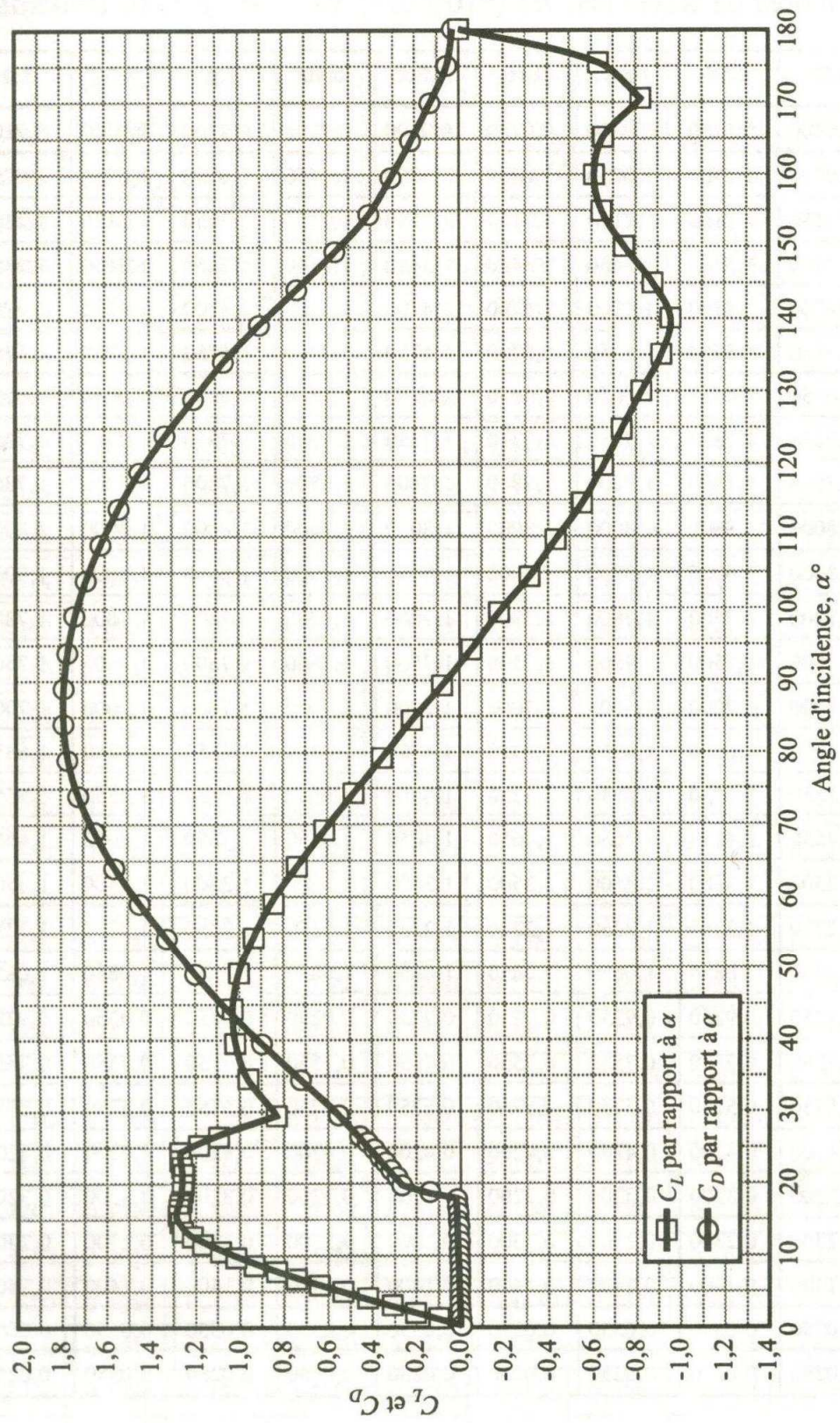


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0018, $Re(*10^6)$

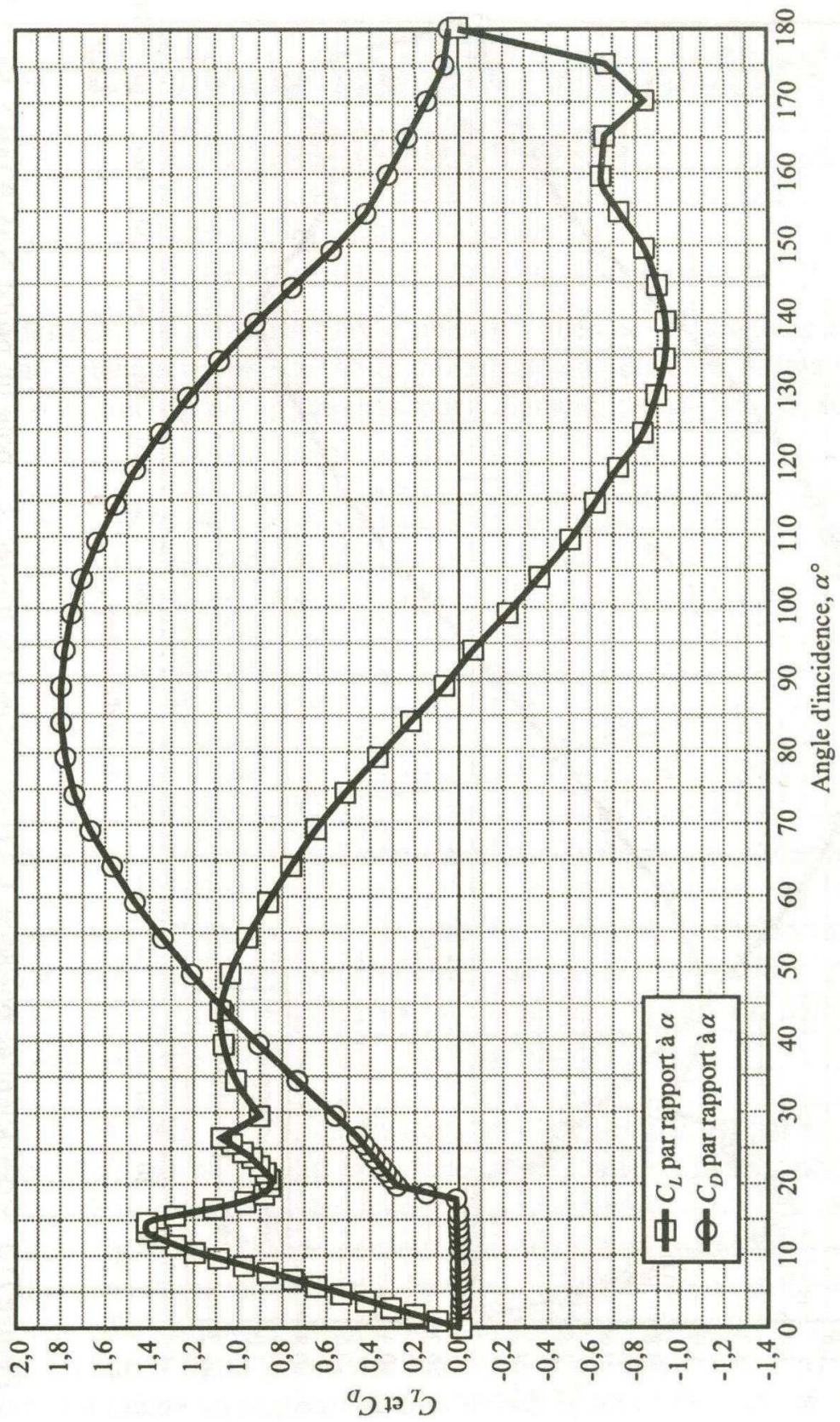


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L , et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0012, $Re(*10^6)$

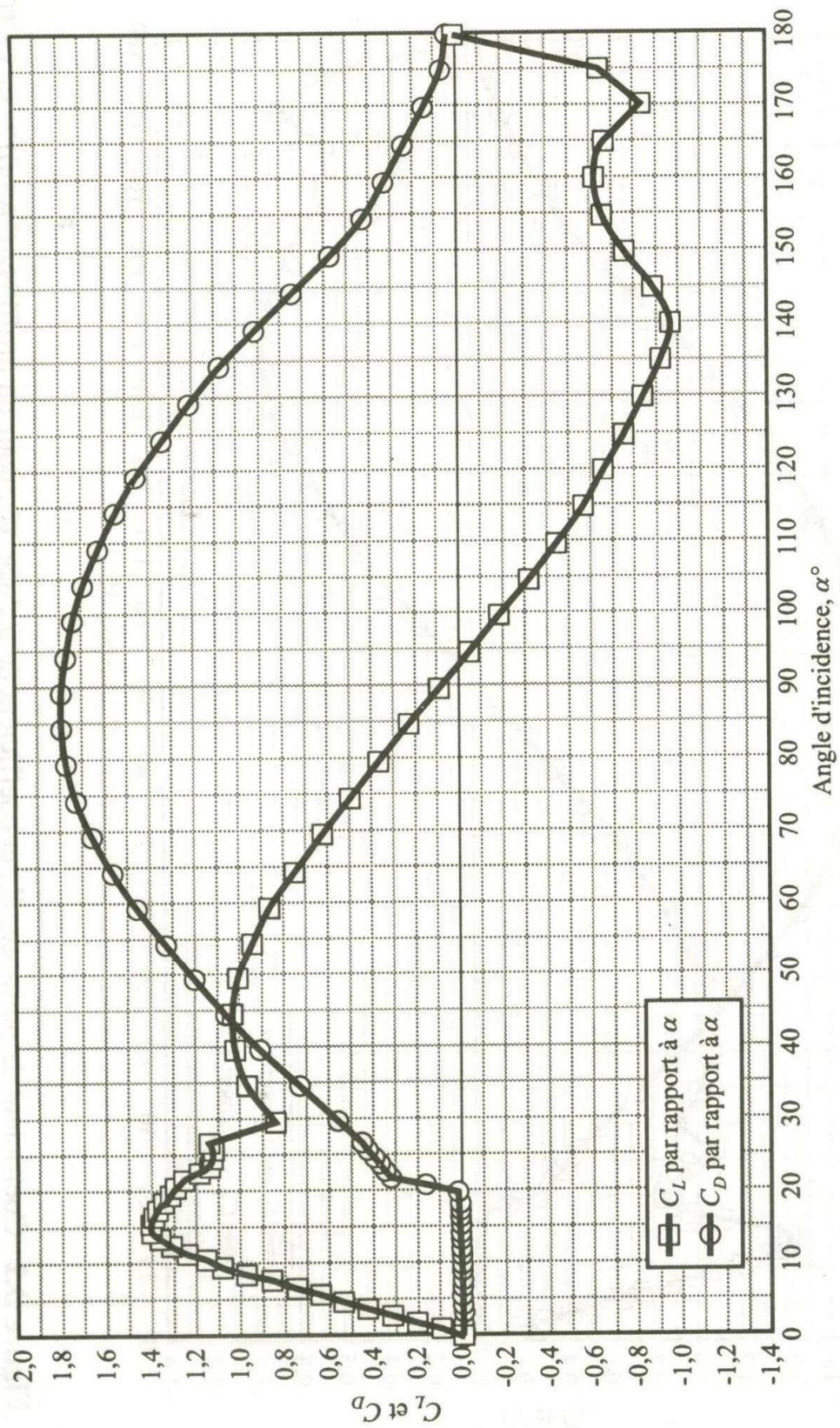


Fig. A.1 Coefficient de portance C_L , et coefficient de traînée C_D , pour un profil NACA 0015, $Re(*10^6)$

ANNEXE B

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS

B.1 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET DISTRIBUTION DE LA VITESSE D'UN PROFIL SYMETRIQUE NACA 0012 :

x (% de la corde)	y (% de la corde)	$(v/V_\infty)^2$	v/V_∞	$\Delta v_\alpha/V_\infty$
0	0	0	0	1,988
0,5	0,610	0,800	1,475
1,25	1,894	1,010	1,005	1,199
2,5	2,615	1,241	1,114	0,934
5,0	3,555	1,378	1,174	0,685
7,5	4,200	1,402	1,184	0,558
10	4,683	1,411	1,188	0,479
15	5,345	1,411	1,188	0,381
20	5,737	1,399	1,183	0,319
25	5,941	1,378	1,174	0,273
30	6,002	1,350	1,162	0,239
40	5,803	1,288	1,135	0,187
50	5,294	1,228	1,108	0,149
60	4,563	1,168	1,050	0,118
70	3,664	1,109	1,053	0,092
80	2,623	1,044	1,022	0,068
90	1,148	0,956	0,978	0,044
95	0,807	0,906	0,952	0,029
100	0,126	0	0	0

Rayon au bord d'attaque : 1,58 % de la corde

B.2 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS A QUATRE CHIFFRES*

NACA 4412				NACA 4415				NACA 4418			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	2,44	1,25	-1,43	1,25	3,07	1,25	-1,79	1,25	3,76	1,25	-2,11
2,5	3,39	2,5	-1,95	2,5	4,17	2,5	-2,48	2,5	5,00	2,5	-2,99
5,0	4,73	5,0	-2,49	5,0	5,74	5,0	-3,27	5,0	6,75	5,0	-4,06
7,5	5,76	7,5	-2,74	7,5	6,91	7,5	-3,71	7,5	8,06	7,5	-4,67
10	6,59	10	-2,86	10	7,84	10	-3,98	10	9,11	10	-5,06
15	7,89	15	-2,88	15	9,27	15	-4,18	15	10,66	15	-5,49
20	8,80	20	-2,74	20	10,25	20	-4,15	20	11,72	20	-5,56
25	9,41	25	-2,50	25	10,92	25	-3,98	25	12,40	25	-5,49
30	9,76	30	-2,26	30	11,25	30	-3,75	30	12,76	30	-5,26
40	9,80	40	-1,80	40	11,25	40	-3,25	40	12,70	40	-4,70
50	9,19	50	-1,40	50	10,53	50	-2,72	50	11,85	50	-4,02
60	8,14	60	-1,00	60	9,30	60	-2,14	60	10,44	60	-3,24
70	6,69	70	-0,65	70	7,63	70	-1,55	70	8,55	70	-2,45
80	4,89	80	-0,39	80	5,55	80	-1,03	80	6,22	80	-1,67
90	2,71	90	-0,22	90	3,08	90	-0,57	90	3,46	90	-0,93
95	1,47	95	-0,16	95	1,67	95	-0,36	95	1,89	95	-0,55
100	(0,13)	100	(-0,13)	100	(0,16)	100	(-0,16)	100	(0,19)	100	(-0,19)
100	100	0	100	100	0	100	100	0
Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,58 Pente au (B.A.) : 0,20				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 2,48 Pente au (B.A.) : 0,20				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 3,56 Pente au (B.A.) : 0,20			

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

B.3 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS A CINQ CHIFFRES*

NACA 23012				NACA 23015				NACA 23018			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	2,67	1,25	-1,23	1,25	3,34	1,25	-1,54	1,25	4,09	1,25	-1,83
2,5	3,61	2,5	-1,71	2,5	4,44	2,5	-2,25	2,5	5,29	2,5	-2,71
5,0	4,91	5,0	-2,26	5,0	5,89	5,0	-3,04	5,0	6,92	5,0	-3,80
7,5	5,80	7,5	-2,61	7,5	6,90	7,5	-3,61	7,5	8,01	7,5	-4,60
10	6,43	10	-2,92	10	7,64	10	-4,09	10	8,83	10	-5,22
15	7,19	15	-3,50	15	8,52	15	-4,84	15	9,86	15	-6,18
20	7,50	20	-3,97	20	8,92	20	-5,41	20	10,36	20	-6,86
25	7,60	25	-4,28	25	9,08	25	-5,78	25	10,56	25	-7,27
30	7,55	30	-4,46	30	9,05	30	-5,96	30	10,55	30	-7,47
40	7,14	40	-4,48	40	8,59	40	-5,92	40	10,04	40	-7,37
50	6,41	50	-4,17	50	7,74	50	-5,50	50	9,05	50	-6,81
60	5,47	60	-3,67	60	6,61	60	-4,81	60	7,75	60	-5,94
70	4,36	70	-3,00	70	5,25	70	-3,91	70	6,18	70	-4,82
80	3,08	80	-2,16	80	3,73	80	-2,83	80	4,40	80	-3,48
90	1,68	90	-1,23	90	2,04	90	-1,59	90	2,39	90	-1,94
95	0,92	95	-0,70	95	1,12	95	-0,90	95	1,32	95	-1,09
100	(0,13)	100	(-0,13)	100	(0,16)	100	(-0,16)	100	(0,19)	100	(-0,19)
100	100	0	100	100	0	100	100	0
Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,58 Pente au (B.A.) : 0,305				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 2,48 Pente au (B.A.) : 0,305				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 3,56 Pente au (B.A.) : 0,305			

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

B.4 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES PROFILS LAMINAIRES*

NACA 66 ₁ -212				NACA 66 ₂ -215			
Extrados		Intrados		Extrados		Intrados	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0	0	0
0,424	0,953	0,576	-0,853	0,406	1,168	0,594	-1,068
0,666	1,154	0,834	-1,014	0,646	1,409	0,854	-1,269
1,156	1,462	1,344	-1,248	1,134	1,778	1,366	-1,564
2,395	1,991	2,605	-1,619	2,370	2,417	2,630	-2,045
4,883	2,809	5,117	-2,177	4,855	3,413	5,145	-2,781
7,379	3,459	7,621	-2,611	7,349	4,202	7,651	-3,354
9,878	4,011	10,122	-2,977	9,848	4,872	10,152	-3,838
14,883	4,905	15,117	-3,559	14,854	5,957	15,146	-4,611
19,894	5,596	20,106	-4,004	19,868	6,790	20,132	-5,198
24,908	6,132	25,092	-4,342	24,886	7,437	25,114	-5,647
29,925	6,539	30,075	-4,595	29,906	7,927	30,094	-5,983
34,943	6,833	35,057	-4,773	34,929	8,280	35,071	-6,220
39,962	7,018	40,038	-4,876	39,952	8,501	40,048	-6,359
44,981	7,095	45,019	-4,905	44,976	8,590	45,024	-6,400
50,000	7,068	50,000	-4,862	50,000	8,553	50,000	-6,347
55,019	6,931	54,981	-4,741	55,023	8,378	54,977	-6,188
60,036	6,659	59,964	-4,517	60,045	8,030	59,955	-5,888
65,051	6,169	64,949	-4,109	65,063	7,402	64,937	-5,342
70,061	5,487	69,939	-3,543	70,075	6,547	69,925	-4,603
75,066	4,661	74,934	-2,871	75,081	5,526	74,919	-3,736
80,065	3,739	79,935	-2,147	80,079	4,393	79,921	-2,801
85,057	2,755	84,943	-1,409	85,070	3,202	84,030	-1,856
90,043	1,750	89,957	-0,716	90,052	2,005	89,948	-0,971
95,022	0,789	94,978	-0,157	95,026	0,881	94,974	-0,249
100,000	0	100,000	0	100,000	0	100,000	0
Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 0,952 Pente au (B.A.) : 0,084				Rayon du bord d'attaque (B.A.) : 1,435 Pente au (B.A.) : 0,084			

* Valeurs données en pourcentage de la corde.

ANNEXE C**RAPPELS SUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES - INVERSION
DES MATRICES****C.1 POSITION DU PROBLEME**

Considérons le système linéaire suivant de n équations à n inconnues:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = y_3 \\ a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + \dots + a_{4n} \cdot x_n = y_4 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme $A \cdot x = y$:

$$\text{si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]$$

i : représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne.

Une matrice est dite triangulaire si $a_{ij} = 0$ pour $j > i$ ou pour $i > j$. Une matrice bande est une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf sur une bande autour de la diagonale principale. Ces matrices se rencontrent dans la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies ou dans la méthode des éléments finis.

La résolution du système précédent peut s'effectuer par deux méthodes :

- la méthode directe (dite méthode du pivot) ;
- la méthode itérative ;

La méthode du pivot est commode pour les systèmes denses d'ordre supérieur, ainsi que pour les matrices bandes même d'ordre élevé. La méthode itérative est mieux adaptée aux autres matrices d'ordre élevé et comportant de nombreux éléments nuls.

C.2 METHODE DU PIVOT

2.1. Méthode de GAUSS-JORDAN

2.1.1. Description de la méthode

C'est la méthode la plus utilisée. Pour la présenter, nous allons prendre l'exemple d'un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

La méthode classique de Cramer qui repose sur les déterminants, donne :

$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ où Δ est le déterminant de la matrice, et Δ_j celui déduit de Δ en y remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne par la colonne second membre.

Pour résoudre le système, cette méthode nécessite n^4 opérations si n est le rang de la matrice. Dans la méthode du pivot, on choisit successivement chaque ligne comme ligne pivot ; le pivot étant le 1^{er} élément non nul de la ligne.

Ainsi, on divise la ligne n° 1 du système par a_{11} :

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

On annule le 1^{er} terme de chacun des autres lignes : à la 2^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a_{21} , à la 3^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a_{31} , à la 4^{ème} ligne, on retranche la 1^{ère} multipliée par a_{41} .

Le système devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}$$

a. La 2^{ème} ligne est considérée maintenant comme une ligne pivot, et a'_{22} comme un élément pivot. On répète sur cette 2^{ème} ligne les opérations précédentes, et on obtient après division de cette ligne par a'_{22} :

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y''_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}$$

On annule les autres termes de la seconde colonne ; c'est à dire : à la 1^{ère} ligne, on retranche la seconde multipliée par a'_{12} , à la 3^{ème} ligne, on retranche la 2^{ème} multipliée par a'_{32} , à la 4^{ème} ligne, on retranche la 2^{ème} multipliée par a'_{42} .

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix}$$

b. On considère ensuite la 3^{ème} ligne comme pivot, puis la 4^{ème} ligne ; ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{pmatrix} \text{ soit la solution du système : } \begin{cases} x_1 = y_1^{(4)} \\ x_2 = y_2^{(4)} \\ x_3 = y_3^{(4)} \\ x_4 = y_4^{(4)} \end{cases}$$

D'une manière générale, si on applique cette procédure au système $A \cdot x = y$ où A est une matrice d'ordre n ,

- on remarque qu'à l'issue de la 1^{ère} étape, on obtient la matrice A_1 comportant des 0 et un 1 dans sa 1^{ère} colonne,
- à l'issue de la 2^{ème} étape, on a une matrice A_2 comportant des 0 et des 1 dans ses 2 premières colonnes, etc.
- à l'issue de la k ^{ième} étape, on obtient un système de la forme : $A^{(k)} \cdot x = y^{(k)}$ avec $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ et $y^{(k)}$ = matrice colonne d'éléments $y_i^{(k)}$

Pour les k premiers éléments diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 1$ si $i = j \leq k$

Pour les colonnes 1 à k éléments non diagonaux, on a : $a_{ij}^{(k)} = 0$ si $i \neq j$ et $j \leq k$; $y_i^{(k)}$ étant les composantes du vecteur $y^{(k)}$.

L'étape suivante consiste à prendre $a_{k+1,k+1}^{(k)}$ comme élément pivot. On divise la $(k+1)$ ième ligne par cet élément, ce qui donne pour $j=k+1$ à n : $a'_{ij} = a_{ij}^{(k)}$ et $y'_{k+1} = y_{k+1}^{(k)}$ si $i \neq k+1$

$$a'_{k+1,j} = \frac{a_{k+1,j}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} \quad \text{et} \quad y'_{k+1} = \frac{y_{k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}$$

Pour chaque ligne $i \neq k+1$, la ligne $k+1$ multipliée par $a_{i,k+1}^{(k)}$ est retranchée.

On obtient alors le système $A^{(k+1)} \cdot X = Y^{(k+1)}$ avec
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} \cdot a_{k+1,j}^{(k)} & (i \neq k+1) \\ y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} \cdot y_{k+1}^{(k)} \end{cases}$$

RESUME DE LA PROCEDURE

1. Transformation de la matrice $[A, y]$ en une matrice $[I, y']$: $A^{(0)} = A$
et $a_{i,n+1}^{(0)} = y_i$

Pour k variant de 0 à $n-1$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} i = k+1 \\ j = k+1, \dots, j = n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{k+1,j}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,j}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, i = n \\ i \neq k+1 \\ j = k+1, \dots, j = n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} \cdot a_{k+1,j}^{(k+1)}$$

2. La solution x_i du système résultant s'écrit alors : $x_i = a_{i,n+1}^{(n)}$; avec $i = 1, 2, \dots, n$

Le nombre d'opérations nécessaires au passage de $[A, y]^{(k)}$ à $[A, y]^{(k+1)}$ est :

n . additions (= $n.a$) = n . multiplications (= $n.m$) = $(n-1) \cdot (n-k+1)$

n . divisions (= $n.d$) = $(n-k+1)$

Le passage de $[A, y]$ à $[A, y]^{(n)}$ nécessite environ $n^3 / 2$ opérations de calculs.

La méthode ainsi exposée, présente un certain nombre de défauts :

- lenteur compte tenu du nombre d'opérations si le rang n de la matrice A est grand,
- difficulté si le pivot est nul puisque la division n'est plus possible (dans ce cas, il faut permuter les colonnes tout en veillant à la cohérence des calculs qui suivent),
- précision si le pivot est faible ($\ll 1$), les erreurs d'arrondi deviennent très importantes et affectent toute la suite des calculs.

2.1.2. Exemple :

Soit le système à résoudre :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

On forme tout d'abord la matrice $[A, y]$:

$K=1$

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 11 \end{pmatrix} \quad k=1$

$K=2$

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad k=2$

$K=3$

Normalisation $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$ Réduction $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \quad k=3$

La solution est $x_i = a_{i,n+1}$; d'où : $x^* = (7/2 \quad -5/2 \quad 4/3)$

2.2. Méthode de GAUSS

On diagonalise la matrice A , et on ne fait apparaître les zéros qu'en dessous de la diagonale. La solution x_i du système nécessite 2 étapes :

- Une triangularisation de la matrice A ,
$$\begin{cases} A^{(0)} = A \\ a_{i,n+1}^{(0)} = y_i \\ A^{(n)} = R = \{r_{i,j}\} \\ z_i = a_{i,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

La matrice est connue par les $3n$ données : $\begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \\ c_1, c_2, \dots, c_n \end{cases}$ où $a_1 = c_n = 0$

Ainsi, le système décrit par ces $3n$ données peut être résolu par la méthode de triangularisation (méthode de Gauss).

3. Méthodes itératives

Nous allons décrire ces méthodes brièvement sans passer par des calculs ou des démonstrations mathématiques complexes, car cela nous éloignera des objectifs du cours.

3.1. Méthode de JACOBI :

Soit le système suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3 \end{cases}$$

On résout le système de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{y_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3)}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{y_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)}{a_{33}} \end{cases}$$

On donne aux inconnues les valeurs arbitraires initiales x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Si ces valeurs sont portées au second membre de la solution précédente, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1 - (a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{y_2 - (a_{21}x_1^0 + a_{23}x_3^0)}{a_{22}} \\ x_3 = \frac{y_3 - (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0)}{a_{33}} \end{cases}$$

Ce nouvel ensemble porté dans le second membre des équations précédentes donne un autre ensemble x_1^1, x_2^1, x_3^1 , et ainsi de suite.

3.2. Méthode de GAUSS-SEIDEL :

On reprend le calcul comme précédemment. Pour le système précédent par exemple, on choisit un ensemble de valeurs x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

On porte x_2^0 et x_3^0 dans la 1^{ère} équation et on obtient :
$$x_1^1 = \frac{y_1 - (a_{12} \cdot x_2^0 + a_{13} \cdot x_3^0)}{a_{11}}$$

C'est cette nouvelle valeur de x_1 , et non pas x_1^0 , qui est portée dans la 2^{ème} équation du système, donnant :

$$x_2^1 = \frac{y_2 - (a_{21} \cdot x_1^1 + a_{23} \cdot x_3^0)}{a_{22}}$$

De même dans la 3^{ème} équation, on porte x_1^1 et x_2^1 , et non x_1^0 et x_2^0 , et on obtient :

$$x_3^1 = \frac{y_3 - (a_{31} \cdot x_1^1 + a_{32} \cdot x_2^1)}{a_{33}}$$

Lorsqu'une inconnue est utilisée, c'est automatiquement la plus récente valeur calculée. Ceci assure une convergence des calculs bien plus rapide que la méthode de JACOBI.

On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de x_j sont suffisamment voisines.

Pour cela, on peut utiliser,

- soit le critère de **Convergence absolue** : $|x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \leq \varepsilon$
- soit le critère de **Convergence relative** : $\left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon$

Pour les systèmes où les matrices qui sont de rang élevé, il n'est pas commode de faire le test de convergence sur chaque inconnue x_j .

Dans ce cas, on fait le test soit seulement sur certaines inconnues que l'on choisit, soit les quantités suivantes :

$$\sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|^2 \right)^{1/2} \text{ ou } \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right| \text{ ou } \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k+1)}} \right|^2 \right)^{1/2}$$

La convergence du procédé ne dépend pas du choix des valeurs initiales x_j^0 , mais seulement des valeurs des coefficients.

On montre que la convergence est assurée si on a, pour chaque valeur de i (c'est

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

à dire pour chaque ligne), la relation est vérifiée.

Autrement dit, il y a convergence si chaque élément diagonal est supérieur ou égal, en module, à la somme des modules des autres éléments de sa ligne.

3.3. Facteur de relaxation

Si la convergence existe, sa rapidité dépend du choix de x_j^0 . En effet, plus les valeurs initiales sont proches des valeurs réelles, et plus la convergence est rapide.

L'utilisation d'un facteur de relaxation λ définie par $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda(x_j^{(1)} - x_j^{(k)})$ où $\lambda < 1$ permet d'accélérer la convergence.

λ est appelée " *facteur de relaxation* " (dans la pratique, il est compris entre 0 et 2).

Pour $\lambda > 2$, le processus diverge.

Pour s'approcher de la valeur recherchée rapidement, on prend $1 < \lambda < 2$ dans un processus itératif déjà convergent et $0 < \lambda < 1$ pour un processus divergent.

Les méthodes itératives jouent un rôle très important dans la résolution numérique de systèmes de grandes tailles et dans les systèmes (ou équations) non linéaires.

4. Inversion des matrices

Selon la méthode de Cramer, une matrice A de rang n n'est inversible que si son déterminant Δ est différent de zéro. Dans ce cas, le produit de A par la matrice inverse A^{-1} donne la matrice unitaire I .

$$A^{-1}A = A.A^{-1} = I \text{ où } AI = A$$

En appliquant la méthode de Cramer sur la matrice A , on peut déterminer A^{-1} .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient en utilisant la méthode de Cramer : $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^{-1}A = A.A^{-1} = I$ que :

L'algorithme de Gauss-Jordan présenté au début de ce cours (méthode du pivot) opère aussi le passage de la matrice $C=[A,y]$ à la matrice $D=[I,X]$ où X est la solution du système linéaire $A.X=y$; Soit $X=A^{-1}.y$.

Après les opérations de l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient :

$$D=A^{-1}.C=A^{-1}.[A,I]=[I,A^{-1}]$$

Cette méthode, de calcul de l'inverse d'une matrice qui est résumée ci-dessous, permet de calculer A^{-1} avec un nombre d'opérations nettement inférieur à celui de la méthode de Cramer.

Transformation $(A, I) \Rightarrow (I, A^{-1})$

Pour $k = 1, \dots, n$, on a :

$$\text{Pour } j = 2n, \dots, k \Rightarrow a_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \text{Pour } j = 2n, \dots, 1 \\ i \neq k \end{array} \right\} \Rightarrow a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} \cdot a_{k,j}$$

Exemple :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par la méthode de Jordan. $k=1$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k=2$$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 1/2 & -7/4 & 1 \end{pmatrix} \quad k=3$$

$$\text{Normalisation} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}; \text{Réduction} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

Finalement, on vérifie que : $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & -1 \\ 1/3 & -7/6 & 2/3 \end{pmatrix} A = I$

ANNEXE D
GRANDEURS PHYSIQUES ET UNITES DE MESURE

Tableau F.1 Unité et facteurs de conversion

	Symbole	Pour convertir des	En (unités du SI)	Multiplier par
Accélération	a	$\frac{\text{pi}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$3,048 \times 10^{-1}$
Aire	A, S	pi^2	m^2	$9,290 \times 10^{-2}$
Densité	ρ	$\frac{\text{lbm}}{\text{pi}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$1,602 \times 10$
Énergie	E	BTU $\text{pi} \cdot \text{lb}$	J J	$1,055 \times 10^3$ 1,356
Force	F	lb	N	4,448
Longueur	l	pi po	m m	$3,048 \times 10^{-1}$ $2,540 \times 10^{-2}$
Masse	m	lbm slug	kg kg	$4,536 \times 10^{-1}$ $1,459 \times 10$
Puissance	P	hp $\text{pi} \frac{\text{lb}}{\text{s}}$	W W	$7,457 \times 10^2$ 1,356
Pression	P, p	po Hg (60 °F) $\frac{\text{lb}}{\text{pi}^2}$ (psf) $\frac{\text{lb}}{\text{po}^2}$ (psi)	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$3,377 \times 10^3$ $4,788 \times 10$ $6,895 \times 10^3$
Poids spécifique	γ	$\frac{\text{lb}}{\text{pi}^3}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	$1,571 \times 10^2$

Tableau F.1 (suite)

	Symbole	Pour convertir des	En (unités du SI)	Multiplier par
Température	T	$^{\circ}\text{F}$	$^{\circ}\text{C}$	$T_{\text{C}} = \frac{5}{9}(T_{\text{F}} - 32)$
		$^{\circ}\text{R}$	$^{\circ}\text{K}$	$5,556 \times 10^{-1}$
Vitesse	V	$\frac{\text{pi}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3,048 \times 10^{-1}$
		$\frac{\text{mi}}{\text{h}}$ (mph)	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$4,470 \times 10^{-1}$
Viscosité dynamique	μ	$\frac{\text{lbs}}{\text{pi}^2}$	$\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$	$4,788 \times 10$
Viscosité cinématique	ν	$\frac{\text{pi}^2}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$9,290 \times 10^{-2}$
Débit volumique	Q	$\frac{\text{pi}^3}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$2,832 \times 10^{-2}$
		$\frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (gpm)	$\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$6,309 \times 10^{-5}$

Tableau F.2 Préfixes des multiples et sous-multiples des unités SI

Préfixe	Symbole	Valeurs
téra	T	10^{12}
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
déca	da	10
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

ANNEXE E

FORMULES UTILISEES EN AERONAUTIQUE

Unité

Nom	Définition	Formule / Exemple
Cheval Vapeur	Cette unité de puissance, introduite par James Watt alors qu'il travaillait dans une mine de charbon, correspond au travail que peut fournir un cheval en une minute.	$1 \text{ Cv} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}$ (W : Watt, unité SI pour la puissance)
Mille Nautique (NM, Nautical Mille)	Le NM correspond à une minute (un soixantième de degré) d'arc à l'équateur terrestre.	$1 \text{ NM} = 1852 \text{ m}$ $a/ \text{ NM} = \text{km} / 2 + 10\%$ ex : $150 \text{ km} / 2 = 75 + 7.5 = 82.5 \text{ NM}$ $b/ \text{ km} = \text{NM} * 2 - 10\%$ ex : $92 \text{ NM} * 2 = 184 - 18 = 166 \text{ km}$
Masse volumique	Rapport de la masse du corps par le volume occupé par celui-ci. La masse volumique de l'air est d'environ 1,204 kilogramme par mètre cube pris à 20° C sous une pression d'une atmosphère	$\rho \text{ (rô)} = m / v \text{ en kg.m}^{-3}$ kg.m^{-3} : kilogramme par mètre cube
Pression	La pression est la force appliquée à une surface ou répartie sur celle-ci.	$P = F / S$ P : pression en N/m^2 (1 Pa = 1 N/m^2) F : force en Newton S : surface en m^2 La pression est souvent exprimée en bar (1 bar = 10^5 Pa)
Température	La température représente le degré d'agitation des particules	$t/^{\circ}\text{C} = T/\text{K} - 273.15.$ $^{\circ}\text{C}$: degré Celsius, K : kelvin

Aérodynamique

Nom	Définition	Formule / Exemple
Résistance de l'air	Forces de frottements	$R = K\rho V^2 S$ R résistance de l'air (Newton) K coefficient qui tient compte de la forme du corps et de son état de surface p masse volumique de l'air (kg.m ⁻³) V vitesse (m.s ⁻¹) S surface alaire (m ²)
Trainée	Résistance à l'avancement	$\vec{R}_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 \vec{C}_x$ p masse volumique de l'air (kg m ⁻³) V vitesse de l'avion (ms ⁻¹) S superficie de la voilure (m ²) Cx coefficient sans unité appelée coefficient de trainée
Portance	Composante verticale de la résistance aérodynamique	$\vec{R}_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 \vec{C}_z$ p masse volumique de l'air (kg m ⁻³) V vitesse de l'avion (ms ⁻¹) S superficie de la voilure (m ²) Cz coefficient sans unité appelé coefficient de portance
Finesse	Distance que peut parcourir une aile en fonction de son altitude de départ	Portance / Trainée ou C_z / C_x

Mécanique du vol

Nom	Définition	Formule / Exemple
Facteur de charge	Rapport du poids apparent sur le poids. Plus le virage est prononcé et plus le facteur de charge augmente. A 45° d'inclinaison, le facteur de charge est égal à 1,4 et la vitesse de décrochage est majorée de 19%. A 60° d'inclinaison le facteur de charge est égal à 2 et la vitesse de décrochage est majorée de 40%	$n = 1 / \cos \text{inclinaison}$ Ex : lors d'un virage à 60° $n = 1 / \cos(60)$ $n = 1 / (1/2) = 2$ d'où $n = 2G$
Charge alaire	La charge alaire est le rapport ou Poids de l'avion/Surface alaire, si la portance est égale au poids de l'avion comme dans le cas du vol horizontal	Portance / Surface alaire ou

		Poids de l'avion (Newton) / Surface alaire (m ²) surface alaire : surface de la projection horizontale du contour des ailes
--	--	--

Navigation

Nom	Définition / Formule
Route vraie (Rv)	Route vraie mesurée sur la carte par rapport au nord vrai $Rv = Rm + Dm$ $Rv = Cv \text{ (cap vrai)} + \text{dérive}$
Route magnétique	Route magnétique = Route vraie - Déclinaison magnétique $Rm = Rv - D$
Temps sans vent	TSV = distance x Fb Fb : facteur de base
Temps avec vent	Temps avec vent = distance x Fb (Fb = 60 / Vs)
Facteur de base	Fb = 60 / Vp
Dérive maxi	Force du vent x Fb
a	angle au vent (angle que fait la route, et non pas le cap, avec le vent)
Vent de travers	Force du vent x Sin a
Vent effectif	Force du vent x Cos a
Cap vrai (Cv)	Cap vrai par rapport au nord vrai ou nord géographique $Rm = \text{Route magnétique} (Rv - D)$
Déclinaison magnétique (D)	Est /Ouest, +/- variation magnétique terrestre
Cap magnétique (Cm)	$Cv - D$