

UNIVERSITÉ BLIDA 1
Faculté de Technologie
Département de Mécanique

THÈSE DE DOCTORAT
En Génie Mécanique
Spécialité : Énergétique

CONVECTION DE RAYLEIGH-BÉNARD D'UN FLUIDE
RHÉOFLUIDIFIANT CONFINÉ DANS UNE CONDUITE
RECTANGULAIRE

Par

Ouahiba BENOUARED

devant le Jury composé par :

Y. Benkhedda	Professeur, U. de Blida1	Président
A. Mataoui	Professeur, USTHB	Examinateur
A. Abdellah El-Hadj	Professeur, U. de Médéa	Examinateur
D. Semmar	Professeur, U. de Blida1	Examinateur
N. Ait Messaoudene	Professeur, U. de Hail (Arabie Saoudite)	Directeur de thèse
M. Mamou	Professeur- Chercheur NRC, (Canada)	Co-Directeur de thèse

Blida, février 2016

À ma mère

À mon père Allah yarhmou

REMERCIEMENTS

Bien que la Réalisation d'une thèse ait toute l'apparence d'un long parcours académique solitaire, diverses personnes ont contribué à différents degrés à mener à bien ce projet parfois périlleux, avec ses hauts et ses bas.

Je tiens d'abord à remercier mes deux directeurs de thèse :

Mr. Ait Messaoudene Nouredine, d'avoir accepté sans la moindre hésitation de me diriger dans le cadre de cette étude et de m'avoir guidé dans mes recherches. Ses commentaires éclairés et ses judicieux conseils m'ont considérablement aidé à mener ce travail.

Mr. Mamou Mahmoud m'a permis de mettre le pied dans l'étrier avec l'intéressant sujet qui m'a proposé, les discussions avec lui étaient intéressantes et fructueuses tout au long de ma thèse. Sa disponibilité permanente, son encouragement, ses orientations et sa vigueur scientifique m'ont permis de progresser et de travailler avec joie et persévérance et d'achever à terme ce travail .

J'adresse mes vifs remerciements et j'exprime ma profonde gratitude à Mr Benkhedda, qui m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je souhaiterai témoigner toute ma reconnaissance à Mme Mataoui, Mr Abdellah Hadj et Mr Semmar qui ont accepté sans hésiter de prendre le temps d'examiner ce travail et de participer à mon jury de thèse.

Toute mon amitié à mes collègues du département du tronc commun de l'université de Blida 1 et mes amies, de longue date trouvent ici mes sincères remerciements

*Ces remerciements ne pourraient être complets sans témoigner ma reconnaissance à mes proches qui m'ont supporté (et ont su me supporter) tout au long de cette aventure. Tout au long de mon parcours, le soutien de ma **famille** m'a été précieux. Merci en particulier à **ma très chère mère** pour sa motivation, sa fierté et qui a su m'encourager à sa façon tout au long de mon cursus, mais surtout pour m'avoir laissé suivre ma voie. Pour cela je ne la remercierai jamais assez.*

A tous ce qui m'ont soutenu d'une manière ou d'une autre, je leurs dirai que leur apport n'a pas été vain, à tous, j'adresse ma profonde reconnaissance et toute ma gratitude.

Que ceux que j'ai omis de nommer me pardonnent...

ملخص

تناول هذا البحث دراسة عددية حول الحمل الحراري الطبيعي للسوائل الغير النيوتونية في اطار خصائص رايلي- بينارد (Rayleigh-Bénard) ، وتم اختيار نموذج كارو- ياسودا (Carreau-Yasuda) لنمذجة السلوك الريولوجي للسوائل الغير النيوتونية. تدفق الحمل الحراري يعتبر محصورا في تجويف مستطيل بنسب محدودة/ غير محدودة، والذي يخضع لتدرج حراري عمودي. تم تدفئة والتبريد الجدران العلوية والسفلية (الجدران النشيطة) إما بواسطة تطبيق تدفق حراري ثابت (حالة نوع نيومان Type Neumann) أو عن طريق فرض درجات حرارة ثابتة (حالة ديريتشليت Type Dirichlet). و قد تم حل معادلات النقل لهذا التدفق عدديا باستخدام طريقة الفروق المنتهية.

تم التحقق من صحة النتائج العددية في حالة وجود تجويف مربع لقيم معتدلة للعدد رايلي (Rayleigh).

في حالة وجود تجويف بنسب كبيرة معرضة لتدفق حراري ثابت، اشتق حل مقارب مبني على أساس تقريبي لتدفق موازي، من أجل مقارنته مع ما تم الحصول عليه في الحل العددي . وأظهرت هذه المقارنة انسجام جيد بين الحلين.

في حالة وجود تجويف بنسب كبيرة وبجدران عمودية معرضة لتدفق حراري ثابت أو لدرجات حرارة ثابتة، تم دراسة آثار إعدادات السيطرة، وهي أرقام رايلي (Rayleigh) و برا دتل (Prandtl) والإعدادات الريولوجية للسائل على بداية الحمل الحراري. أظهرت النتائج العددية أن عتبة انطلاق الحمل الحراري وجد اقل من عتبة الحمل الحراري النيوتوني ويتناقص بشكل كبير (مع تغيير الإعدادات الريولوجية) عندما يصبح السائل أكثر لزوجا (rhéofluidifiant)، ووفقا لإعدادات السيطرة، تكون حلول مستقرة وغير مستقرة دوريا ممكنة.

في حالة وجود تجويف مربع، وعندما نُخضع الجدران النشيطة لتدفق حراري ثابت أو لدرجات حرارة ثابتة يصبح السلوك الريولوجي في بداية الحمل الحراري مطابقا نوعيا لحالة التجويف بنسب كبيرة في حين تكون عتبات الحمل الحراري مختلفة.

RESUMÉ

Ce travail porte sur une étude numérique de la convection naturelle des fluides non-Newtoniens dans la configuration de Rayleigh-Bénard (RB). Le modèle de Carreau-Yasuda (CY) a été retenu pour modéliser le comportement rhéologique du fluide non-Newtonien. L'écoulement convectif considéré est confiné dans une cavité de rapport de forme fini/infini, laquelle est soumise à un gradient de température vertical. Le chauffage et le refroidissement de ses parois inférieures et supérieures (parois actives) a été effectué soit en appliquant un flux de chaleur constant (condition type Neumann) soit en imposant des températures constantes (condition type Dirichlet). Les équations de transport, relatives à cet écoulement, ont été résolues numériquement en utilisant la méthode des différences finies.

Les résultats numériques ont été validés dans le cas d'une cavité carrée pour des valeurs modérées du nombre de Rayleigh.

Dans le cas d'une cavité de grand rapport de forme exposée à un flux de chaleur constant, une solution asymptotique a été dérivée, en se basant sur l'approximation de l'écoulement parallèle, dans le but de la comparer à celle trouvée dans la solution numérique. Cette comparaison a révélé une bonne concordance entre les deux solutions.

Dans le cas d'une cavité de grand rapport de forme avec des parois verticales soumises soit à un flux chaleur constant ou à des températures constantes, les effets des paramètres de contrôle, à savoir les nombres de Rayleigh et de Prandtl et les paramètres rhéologiques du fluide sur l'apparition de la convection sous-critique ont été étudiés. Les résultats numériques ont montré que le seuil du déclenchement de la convection sous-critique a été trouvé bien en dessous du seuil de la convection stationnaire et décroît considérablement (avec la variation des paramètres rhéologiques) quand le fluide devient de plus en plus rhéofluidifiant. Selon les paramètres de contrôle, des solutions stables et instables périodiques sont possibles.

Dans le cas d'une cavité carrée, lorsqu'on maintient les parois actives sous un flux de chaleur constant ou à des températures constantes, le comportement rhéologique sur l'apparition de la convection sous-critique demeure qualitativement identique que celui du cas d'une cavité ayant un grand rapport de forme, alors que les seuils de la convection sous-critique sont différents.

ABSTRACT

In this study, we investigated numerically the natural convection of non-Newtonian fluids in the configuration of Rayleigh-Bénard (RB). The non-Newtonian fluid rheological behavior was modeled using the Carreau-Yasuda model. The convective flow was confined in a cavity of finite/infinite aspect ratio which was subject to a vertical temperature gradient. The lower and the upper walls were heated and cooled by either a constant heat flux (Neumann type) or by applying constant temperatures (Dirichlet type). The transport equations for this flow were solved numerically by using the finite difference method.

The numerical results were validated in the case of a square cavity for moderate values of the Rayleigh number.

In the case of a cavity of large aspect ratio exposed to constant heat flux, an asymptotic solution was derived, based on the approximation of the parallel flow, in order to compare it with that found in numerical solution. This comparison showed good matches between the numerical and asymptotic solutions.

In the case of a cavity of a large aspect ratio with vertical walls which were subjected to a constant heat flux or constant temperatures, the effects of control parameters, namely the Rayleigh, Prandtl numbers and the rheological parameters of the fluid on the onset of subcritical convection were studied. Numerical results showed that the threshold for the onset of subcritical convection was found to be well below the threshold of stationary convection and decreased significantly (with the fluid rheological parameters variation) as the fluid became more and more rheofluidifying. Depending on the governing parameters, steady and unsteady-periodic flow solutions were possible.

In the case of a square cavity, when the walls were held under constant heat flux or constant temperatures, the rheological behavior on the onset of subcritical convection remained qualitatively the same as that of the case of a cavity having a large aspect ratio, while the thresholds of subcritical convection were different.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

RESUMÉ

TABLES DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES & DES TABLEAUX

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1. GÉNÉRALITES ET ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE	4
1.1. Introduction	4
1.2. La convection de Rayleigh-Bénard (RB)	6
1.2.1. Mécanisme fondamental de la convection de Rayleigh-Bénard	7
1.3. Lois de comportement des fluides	10
1.3.1. La loi de Newton	10
1.3.2. Fluides non-Newtoniens	13
1.4. Modèles rhéologiques pour les fluides rhéofluidifiants	19
1.4.1. Le modèle d'Oswald-de-Weale ou loi de puissance	19
1.4.2. Le modèle de Sisko [14]	20
1.4.3. Le modèle de Cross [15]	21
1.4.4. Le modèle de Ellis	22
1.4.5. Le modèle de Carreau-Bird	23
1.4.6. Le modèle de Carreau-Yasuda	23
1.5. Revue bibliographique sur le phénomène de Rayleigh-Bénard	26
1.6. Positionnement de notre travail par rapport à la littérature	31
2. FORMULATION MATHÉMATIQUE	34
2.1. Introduction	34
2.2. Description du modèle physique	35

2.3.	Équations gouvernant le problème	36
2.3.1.	Équation de conservation de la masse	36
2.3.2.	Équation de conservation de la quantité de mouvement	36
2.3.3.	Équation de conservation de l'énergie.....	37
2.3.4.	Équation constitutive (comportement rhéologique).....	38
2.4.	Hypothèses simplificatrices.....	39
2.5.	Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes.....	40
2.6.	Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques	41
2.6.1.	Conditions aux limites hydrodynamiques	41
2.6.2.	Conditions aux limites thermiques	42
2.7.	Mise sous forme adimensionnelle	43
2.7.1.	Équation de transport adimensionnelles en formulation (ψ, Ω)	45
2.7.2.	Conditions aux limites adimensionnelles	47
2.8.	La vortécité sur les frontières	48
2.9.	Transfert thermique.....	48
3.	RÉSOLUTION NUMÉRIQUE ET VALIDATION.....	50
3.1.	Discrétisation des équations de conservation	52
3.1.1.	Les termes diffusifs et non diffusifs.....	52
3.1.2.	Les termes convectifs.....	52
3.1.3.	Les termes temporels	53
3.1.4.	Discrétisation de l'équation de mouvement :	53
3.1.5.	Discrétisation de l'équation d'énergie :	55
3.2.	Résolution de l'équation de la fonction de courant.....	56
3.3.	Discrétisation des conditions aux limites.....	58

3.4.	Algorithme de résolution	61
3.5.	Validation du code numérique.....	61
3.6.	Effet de la sensibilité du maillage	63
3.7.	Approximation de l'écoulement parallèle.....	64
3.7.1.	Équations gouvernantes simplifiées	65
3.7.2.	Détermination du gradient de température horizontale C_T	67
3.8.	Résolution numérique de l'approximation de l'écoulement parallèle.....	69
3.8.1.	Discrétisation de l'équation de mouvement :	70
3.8.2.	Discrétisation de l'équation d'énergie	72
3.9.	Résolution analytique de l'approximation de l'écoulement parallèle.....	
	(cas Newtonien).....	73
3.10.	Validation de l'approximation de l'écoulement parallèle.....	75
3.11.	Le seuil supercritique	77
3.12.	Conclusion	84
4.	RÉSULTATS & DISCUSSIONS	85
4.1.	Effet du nombre Prandtl Pr sur la structure de l'écoulement.....	85
4.2.	Effet du nombre de Rayleigh Ra_T sur la structure de de l'écoulement.....	
	et les isothermes.....	87
4.3.	Effet de l'indice de puissance n sur la structure de l'écoulement et.....	
	le transfert de chaleur	88
4.4.	Effet des paramètres rhéologiques sur les profils de la fonction.....	
	courant, la composante de la vitesse horizontale et la température	91
4.4.1.	Effet de l'indice de puissance n	92
4.4.2.	Effet du paramètre rhéologique E	97
4.4.3.	Effet des paramètres rhéologiques s et a	97

4.5. Convection à amplitude finie pour un grand rapport de forme ($A=10$).....	98
4.5.1. Effet de l'indice de la loi de puissance n sur l'apparition de la convection.....	98
4.5.2. Effet de la constante de temps adimensionnelle E sur l'apparition..... de la convection.....	106
4.5.3. Effet des paramètres s et a sur l'apparition de la convection.....	109
4.6. La convection à amplitude finie pour un faible rapport de forme ($A= 1$)	110
4.6.1. Effet de l'indice de la loi de puissance n sur l'apparition..... de la convection.....	110
4.6.2. Effet de la constant de temps adimensionnelle E sur l'apparition..... de la convection.....	116
4.7. Conclusion	120
5. CONCLUSIONS GÉNÉRALES	121
APPENDICE A : LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS.....	124
RÉFÉRENCES.....	127

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Système de chauffage central par convection d'air chaud dans les villas romaines.....	5
Figure 1.2 : Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de Bénard observées par Koschmiedder et al. [6]	7
Figure 1.3 : Schéma de principe de la convection de Rayleigh-Bénard. Les flèches vertes montrent les poussées d'Archimède différentielles, moteur du mouvement et les flèches noires les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction [7].	8
Figure 1.4 : Comparaison des modes de transfert de chaleur : (a) par conduction (b) par convection.....	9
Figure 1.5 : Mouvement laminaire de cisaillement entre deux plans parallèles	11
Figure 1.6: Rhéogramme des fluides non-Newtoniens indépendants du..... temps [10]	15
Figure 1.7: Rhéogramme des fluides non-Newtoniens dépendants du..... temps [10]	18
Figure 1.8: Évolution de la viscosité apparente avec le taux cisaillement pour une solution aqueuse de polyacrylamide, du sang, une suspension de particules de polymère (latex) dans l'eau. [14].....	21
Figure 1.9 :Évolution de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement en utilisant les modèles de Cross et Sisko [15].....	22
Figure 1.10 : Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à 25°C. les traits plein sont ajustés par le model de Carreau Yasuda [16].	25

Figure 2.1 : Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées...	35
Figure 2.2 : Évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les points correspondent au modèle de Carreau-Yasuda, le trait continu au modèle de Carreau-Bird avec $n = 0.66$, $E' = 45.8 \text{ s}$, $\mu_0 = 4.22 \text{ Pa s}$ et $\mu_\infty = 0.00372 \text{ Pa s}$. Les pointillés correspondent au modèle de Carreau-Bird mais avec $\mu_\infty = 0$ [43]	38
Figure 3.1: Présentation du maillage du domaine de calcul.....	51
Figure 3.2 : Lignes de courant et isothermes pour $Ra_T = 2000$, $E = 0.2$, $s = 0.01$, $n = 0.4$ (a) $A = 10$, (b) $A = 1$	66
Figure 3.3 : Représentation de la cavité munie du volume de contrôle.....	69
Figure 3. 4 : Schéma de discrétisation selon la direction y	70
Figure 3. 5 : Effet du rapport de forme de la cavité pour $Ra_T = 2000$, $Pr = 10$, $E = 0.2$, $s = 0.01$ et $n = 0.4$ sur: (a) intensité de l'écoulement, (b) le nombre de Nusselt local, Nu , et le nombre de Nusselt moyen, Nu_m	76
Figure 4.1 : Effet de Pr sur les lignes de courant et les isothermes pour $Ra_T = 2000$, $E = 0.2$, $s = 0.01$, $n = 0.4$ et $A = 10$, (a) $Pr = 1$ ($\psi_0 = 7.747$, $Nu_{x=0} = 3.573$, $Nu_m = 3.095$), (b) $Pr = 5$ ($\psi_0 = 6.558$, $Nu_{x=0} = 3.203$, $Nu_m = 3.131$), (c) $Pr = 10$ ($\psi_0 = 6.568$, $Nu_{x=0} = 3.219$, $Nu_m = 3.150$) et (d) $Pr = 1000$ ($\psi_0 = 6.562$, $Nu_{x=0} = 3.210$, $Nu_m = 3.153$).....	86
Figure 4.2 : Effet de Ra_T sur les lignes de courant et les isothermes pour $Pr = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$, $n = 0.8$ et $A = 10$, (a) $Ra_T = 640$ ($\psi_0 = 0.741$, $Nu_{x=0} = 1.150$, $Nu_m = 1.104$), (b) $Ra_T = 5000$ ($\psi_0 = 5.787$, $Nu_{x=0} = 2.953$, $Nu_m = 2.878$).....	88

Figure 4.3 : Effet de n sur les lignes de courant et les isothermes pour $Ra_T=2000, E=0.4, s=0.01, Pr=10$ et $A=10$, (a) $n=0.4$ ($\psi_0=8.679, Nu_{x=0}=3.393, Nu_m=3.337$), (b) $n=0.6$ ($\psi_0=5.119, Nu_{x=0}=2.904, Nu_m=2.836$), (c) $n=1$ ($\psi_0=2.103, Nu_{x=0}=1.828, Nu_m=1.768$)..... 89

Figure 4.4 : Effet de n sur les lignes de courant et les isothermes (Solution multicellulaire) pour $Ra_T = 2000, E = 0.4, s = 0.01, Pr = 10$ et $A = 10$, (a) $n = 0.4$ ($\psi_{max} = 8.460, \psi_{min} = -8.460, Nu_m = 3.275$), (b) $n = 0.6$ ($\psi_{max} = 5.189, \psi_{min} = -5.188, Nu_m = 2.678$), (c) $n = 1$ ($\psi_{max} = 2.222, \psi_{min} = -2.222, Nu_m = 1.641$).....90

Figure 4.5 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $n=1, n=0.8, n=0.6$ et $n=0.4$ avec $Ra_T = 2000, E = 0.4, s = 0.01, Pr = 10$ et $A = 10$ 93

Figure 4.6 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $E = 0, E = 0.2$ et $E = 0.8$ avec $Ra_T = 2000, n = 0.6, s = 0.01, a = 2, Pr = 10$ et $A = 10$ 94

Figure 4.7 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $s = 0.0001, s = 0.1$ et $s = 1$ avec $Ra_T = 2000, n = 0.6, a = 2, E = 0.2, Pr = 10$ et $A = 10$ 95

- Figure 4.8 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique:
 (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T ,
 les profils sont obtenus pour un indice de puissance $a=0.2$, $a=0.5$ et $a=2$ avec $Ra_T=2000$, $n=0.6$, $s=0.01$, $E=0.2$, $Pr=10$ et $A=10$96
- Figure 4.9 : Le diagramme de bifurcation : (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et
 (b) Nu versus Ra_T pour différentes valeurs n avec $A=10$, $E=0.4$,
 $s=0.01$ et $Pr=10$ (type Neumann).....99
- Figure 4.10 : Lignes de courant et les isothermes pour $Pr=10$, $E=0.4$, $s=0.01$, $n=0.4$,
 $A=10$ et $Ra_T=3500$101
- Figure 4.11 : Profil de la viscosité apparente dans la partie centrale de la cavité pour
 différentes valeur de n avec $Ra_T=2000$, $A=10$, $E=0.4$, $s=0.01$ et
 $Pr=10$ 102
- Figure 4.12 : L'effet des grandes valeurs du nombre de Rayleigh sur le nombre de
 Nusselt pour différentes valeurs de n avec $A=10$, $Pr=10$ et $E=0.4$
102
- Figure 4.13 : Le Diagramme de bifurcation (a) de l'intensité de l'écoulement via Ra_T ,
 et (b) Nu via Ra_T pour différentes valeurs n avec $A=10$, $E=0.4$,
 $s=0.01$ et $Pr=10$ (type Dirichlet).104
- Figure 4.14 : Lignes de courant et isothermes pour les conditions thermiques type
 Dirichlet avec : $Ra_T=2000$, $A=10$, $E=0.4$, $s=0.01$, $n=0.6$ et $Pr=10$
 ($\psi_{max}=9.523$, $\psi_{min}=-9.523$, $Nu_m=2.711$).....105
- Figure 4.15 : Vue d'ensemble et de près de l'écoulement convectif pour différentes
 valeurs de E avec $A=10$, $Pr=10$ et $n=0.4$: a) intensité de
 l'écoulement versus Ra_T , et b) Nu versus Ra_T 107

- Figure 4.16 : Profil de la viscosité apparente dans la partie centrale de la cavité pour différentes valeurs de E avec $Ra_T = 2000$, $A = 10$, $n = 0.6$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ 108
- Figure 4.17 : L'effet des grandes valeurs du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs de E avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $n = 0.4$ 108
- Figure 4.18 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$, pour les conditions thermiques de type Neumann.....111
- Figure 4.19 : Le diagramme de bifurcation : (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions thermiques de type Dirichlet.112
- Figure 4.20 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions frontières thermiques de type Dirichlet et parois verticales avec glissement (convection de Rayleigh-Bénard)..... 115
- Figure 4.21 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de E avec $A = 1$, $n = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour des conditions thermiques de type Neumann..... 118

Figure 4.22 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T ,
et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de E avec $A = 1$,
 $n = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions thermiques de type
Dirichlet..... 119

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Les paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda pour les solutions de tylose et CMC [16]	25
Tableau 3.1 : Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité carrée rempli d'air.	62
Tableau 3.2 : Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité rectangulaire	62
Tableau 3.3 : Sensibilité de la solution numérique au maillage en termes de nombre de Nusselt, Nu , et de l'intensité de l'écoulement, ψ_0 , au centre de la cavité pour les valeurs de $A = 10$, $Pr = 10$, $Ra_T = 4000$ et $n = 1$	64
Tableau 3.4 : Conditions critiques pour différentes valeurs de Nny	84
Tableau 4.1 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de l'indice, n , avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $E = 0.4$	105
Tableau 4.2 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de la constante de temps sans adimensionnée E avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $n = 0.4$	109
Tableau 4.3 : Nombre de Rayleigh sous-critique donnant naissance à la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs du paramètre, s , pour $Pr = 10$, $A = 10$ et $E = 0.4$	109
Tableau 4.4 : Nombre de Rayleigh sous-critique donnant naissance à la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs du paramètre, a , pour $Pr = 10$, $A = 10$ et $E = 0.4$	110

Tableau 4.5 : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection à amplitude finie obtenu pour une cavité carrée avec différentes conditions aux frontières thermiques à différentes valeurs de l'indice de loi de puissance, n , pour $Pr = 10$, $s = 0.01$, $a = 2$ et $E = 0.4$114

Tableau 4.6 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de la constante de temps adimensionnelle E avec $A = 1$, $Pr = 10$, $n = 0.4$ et $s = 0.01$117

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La convection thermique naturelle dans la configuration de Rayleigh-Bénard semble être bien maîtrisée dans les fluides Newtoniens en raison d'énormes travaux de recherche entrepris dans ce domaine [1-4]. Les travaux consacrés à la convection thermique des fluides non-Newtoniens demeurent peu nombreux à cause des facteurs suivants :

- La complexité de l'écoulement qui dépend fortement de la viscosité qui est fonction du taux de cisaillement pour certains fluides, et de la température pour d'autres ;
- Le manque de connaissance du comportement de bifurcation de l'état de repos qui reste toujours en cours de recherches expérimentales et numériques.

L'intérêt porté à la compréhension et la maîtrise du comportement rhéologique des fluides, dans les écoulements convectifs, est indispensable afin d'apporter des solutions aux problèmes rencontrés dans les diverses branches d'activité telle que : les processus industriels, chimiques, pétrochimiques, pharmaceutiques et particulièrement dans l'industrie agro-alimentaires.

Originalité du travail de thèse

Les travaux antérieurs menés sur les aspects fondamentaux relatifs à la convection thermique naturelle ont été réalisés par des modèles rhéologiques simples et idéals. Nous citons, dans ce cas, le modèle Ostwald-de Waele (la loi de puissance) lequel a été largement utilisé pour représenter les fluides non-Newtoniens rhéofluidifiants dont la viscosité diminue avec le taux de cisaillement.

L'originalité de notre travail réside dans le choix d'un autre modèle, à savoir **le modèle rhéologique de Carreau-Yasuda (CY)**. Ce modèle est certainement le plus

représentatif du comportement physique des écoulements des fluides non-Newtoniens car, d'une part, il permet de décrire avec précision le profil de viscosité des fluides rhéofluidifiants allant de zéro à l'infini, chose qui était absente dans le modèle de la loi de puissance, et d'autre part, il donne une meilleure interpolation des données expérimentales dérivantes des essais rhéométriques.

Objectif de la thèse

Notre objectif est de mener une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien rhéofluidifiant confiné dans une cavité rectangulaire ayant un rapport de forme fini/infini. Cette cavité est soumise à un gradient de température verticale. Ce gradient de température verticale est obtenu soit en imposant des flux de chaleur constant (type de Neumann) ou des températures constantes (type Dirichlet) sur les parois actives horizontales, tout en maintenant isolées les parois verticales (adiabatiques). Ce travail a été mené en prenant en considération les conditions aux limites hydrodynamiques expérimentales.

En général, les écoulements de convection naturelle sont régis par un système d'équations différentielles non-linéaires et fortement couplées. Dans la majorité des cas, la solution du système par voie analytique semble être difficile à entreprendre, voire impossible parfois. Toutefois, dans certaines situations idéales, la solution analytique peut être possible. Cette dernière aide énormément à mieux appréhender les phénomènes physiques impliqués dans ce type de problème. Ainsi, pour mener à bien cette étude, la méthode des différences finies a été choisie pour résoudre les équations du problème envisagé. Dans le cas d'une cavité de grand rapport de forme, exposée à un flux de chaleur constant, une solution semi-analytique a été développée sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle.

Notre investigation porte essentiellement sur l'effet du comportement rhéologique du fluide et des paramètres de contrôle du problème sur l'apparition de la

convection sous-critique et supercritique, la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur.

Structure de la thèse

La présente thèse comporte quatre chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre présentera une étude bibliographique axée essentiellement sur la contribution scientifique relative à la convection naturelle des fluides non-Newtoniens, suivi d'une présentation des différents modèles rhéologiques de quelques fluides. Par ailleurs, une exposition détaillée du modèle Carreau-Yasuda (C.Y.) est retenue.

Le second chapitre donnera une présentation physique et mathématique détaillée du problème considéré. Les équations dimensionnelles régissantes et les paramètres caractéristiques seront dérivés.

Le troisième chapitre portera sur la description de la méthode numérique utilisée et de la validation du code de calcul. Dans le cas d'une cavité de rapport de forme infini (cavité allongée), un développement d'une solution semi-analytique basée sur le concept de l'écoulement parallèle sera aussi présenté.

Quant au quatrième chapitre, on examinera les effets des paramètres de contrôles sur les champs d'écoulement et de température, sur l'apparition de la convection sous-critique et sur le transfert de chaleur résultant. Dans le cas d'une cavité allongée, les résultats relatifs à l'approximation de l'écoulement parallèle seront confrontés à ceux obtenus numériquement en utilisant le code numérique qui a été développé dans ce projet.

En dernier lieu, cette thèse sera sanctionnée par une conclusion générale rappelant les principaux résultats obtenus tout en mettant l'accent sur les perspectives envisagées.

CHAPITRE 1

1. GÉNÉRALITES ET ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Introduction

Le mouvement d'un fluide induit par la présence d'un gradient de température sous l'effet de la pesanteur, dans des espaces confinés et semi-confinés, est un phénomène naturel qui fascine toujours les scientifiques, vu son intérêt important tant sur le plan fondamental que pratique.

Le mode convectif, qui représente l'un des modes de transfert de chaleur, est historiquement le premier à être utilisé à des fins pratiques. On le trouve dans les premiers systèmes de chauffage antique (maisons romaines) (voir figure 1.1).

Ce mode de convection est aussi omniprésent dans la nature. On le rencontre dans les océans avec les courants océaniques. Il est également étudié dans le manteau terrestre car il est supposé être à l'origine du déplacement des plaques tectoniques. On le retrouve, également, dans l'atmosphère car il est à l'origine de nombreuses manifestations météorologiques parfois violentes comme les orages et les tornades ou inoffensives comme les brises thermiques.

L'industrie n'échappe pas à la règle, on le trouve dans le stockage des fluides, dans le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires, dans les différents procédés de croissance cristalline, dans le séchage des produits agro-alimentaires, dans les serres et enfin dans les échangeurs de chaleur.

Sa présence se manifeste également dans notre vie ménagère, la connaissance des profils de température et de vitesse d'air, qui sont engendrés par la convection naturelle au sein d'un réfrigérateur, est importante afin d'assurer une bonne conservation des aliments. Ainsi, pour un emplacement optimum des aliments, il est indispensable de connaître l'épaisseur des couches limites thermiques et

hydrodynamiques à proximité des parois. Si le produit est placé trop près de la paroi de l'évaporateur, on favorise les risques de congélation alors que leurs emplacements également, trop près, des parois latérales, accentue les risques sanitaires[5]

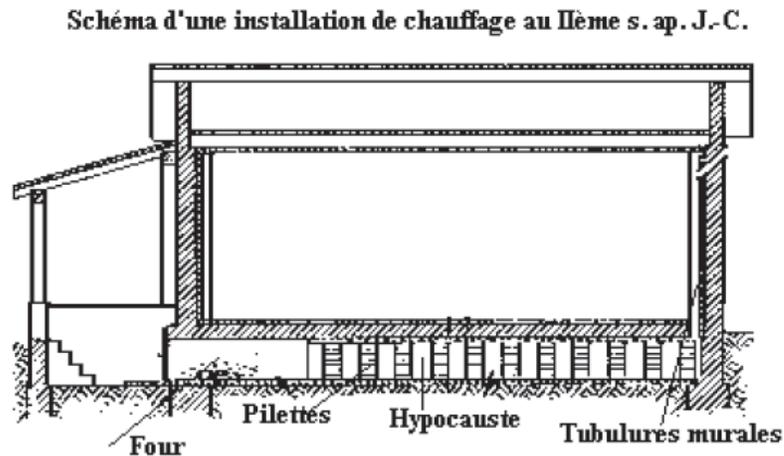


Figure 1.1: Système de chauffage central par convection d'air chaud dans les villas romaines.

Cette diversité de présence et ses importantes applications nous ont conduit à prêter une attention particulière à ce domaine de recherche en vue d'apporter une contribution dans le domaine de la convection thermique, en prenant comme analyse un cas particulier à savoir : ***la convection de Rayleigh-Bénard (RB) relatif aux fluides non-Newtoniens.***

Mais avant de procéder à l'étude bibliographique relative à la convection de Rayleigh-Bénard (RB) des fluides non-Newtoniens, il nous a paru utile de présenter

de manière succincte l'historique, le mécanisme de la convection RB dans les fluides Newtoniens et de présenter les lois de comportement des fluides.

1.2. La convection de Rayleigh-Bénard (RB)

En 1900, Henri Bénard a mis en évidence expérimentalement les mouvements convectifs en mettant dans un récipient une couche de fluide mince de blanc de baleine liquide (1mm) chauffé par le bas alors que la surface supérieure était libre. Bénard s'est intéressé seulement à la structure des cellules convectives obtenues en motif hexagonale (Figure 1.2), sans pour autant, chercher à comprendre l'effet de la température sur la mise en mouvement du fluide.

Bénard a commenté le résultat de son travail en ces termes : *« Je n'ai pas la prétention d'avoir épuisé un sujet aussi nouveau : bien que des points restent à éclaircir, même sans sortir du point de vue expérimental ; mais je serais heureux si mon travail, tout incomplet qu'il est, contribuait à attirer l'attention des expérimentateurs sur les domaines inexplorés de la Physique moléculaire et de la Mécanique des fluides. »*.

Des années plus tard, et plus précisément en 1916, le souhait de Bénard semble être réalisé. Un physicien Anglais, du nom de Lord Rayleigh, a formulé mathématiquement ce processus physique expliquant le déclenchement des mouvements convectifs. Ce dernier, partant des équations de Navier Stokes et en se plaçant dans l'approximation de Boussinesq, propose un calcul de la différence de température ainsi que la longueur d'onde critique pour un mouvement de convection, au sein d'une couche infinie de fluide contenue entre deux interfaces planes horizontales infinies sujettes à des températures imposées et le long desquelles le fluide peut glisser librement. Lors de son calcul du seuil d'instabilité, l'auteur a introduit une quantité adimensionnelle qui deviendra par la suite le nombre de Rayleigh.

Dans la première phrase de son article, Rayleigh place lui-même son travail dans la continuité de celui de Bénard en disant : « *The present is an attempt to examine how far the interesting results obtained by Bénard in his careful and skilful experiments can be explained theoretically* »

Et depuis les travaux suscités, tout phénomène relatif à un fluide chauffé par le bas est nommé par : la convection de Rayleigh-Bénard. Mais malgré, la simplicité dans la géométrie et le peu de paramètres de contrôle, des zones d'ombre persistent, dans la compréhension du mécanisme de transport de la chaleur ayant trait aux fluides non-Newtoniens.

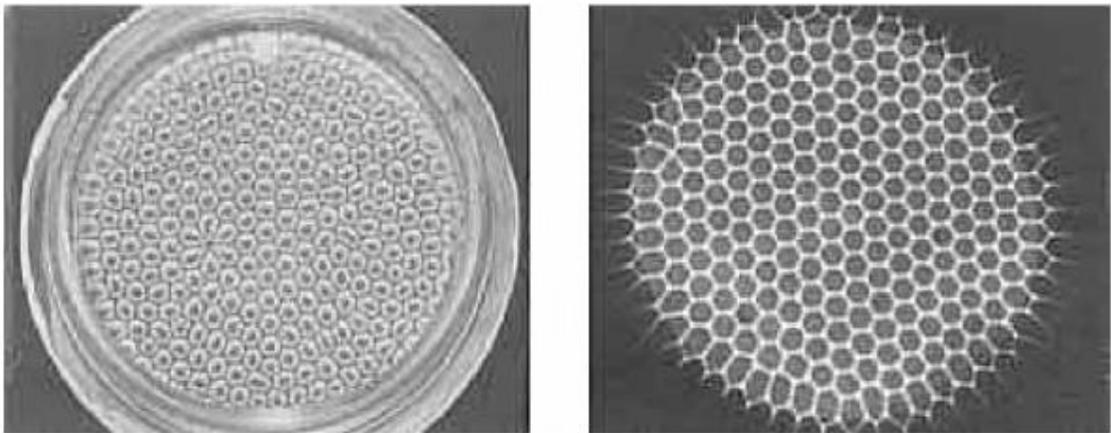


Figure 1.2 : Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de Bénard observées par Koschmiedder et al. [6]

1.2.1. Mécanisme fondamental de la convection de Rayleigh-Bénard

Le problème de la convection de RB, est un problème d'instabilité dans un fluide confiné entre deux plaques horizontales de hauteur H' et portées à deux températures différentes T'_H et T'_C ($T'_C < T'_H$).

Une stratification verticale de température se produit, induisant une stratification de densité. La poussée d'Archimède induite par cette différence de densité tend à faire monter le fluide le plus léger vers le haut et à faire descendre le plus lourd vers le bas. Un tel phénomène se produit dans le cas d'un fluide ou sa masse volumique diminue avec la température (voir figure 1.3).

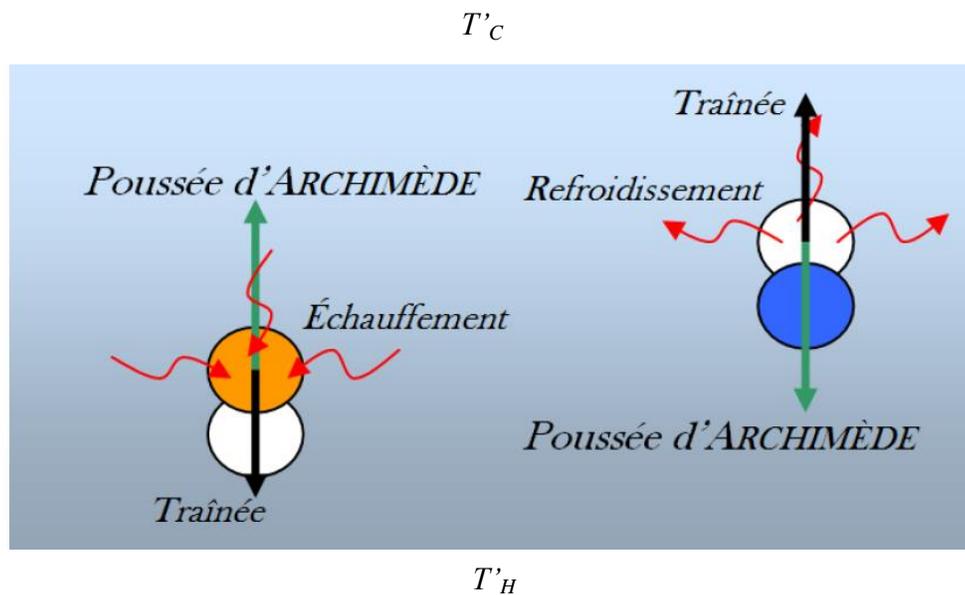


Figure 1.3 : Schéma de principe de la convection de Rayleigh-Bénard. Les flèches vertes montrent les poussées d'Archimède différentielles, moteur du mouvement et les flèches noires les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction [7].

Par ailleurs, lorsque la différence de température $\Delta T' (T'_H - T'_C)$ entre les deux plaques est suffisamment faible, les forces de poussée n'arrivent pas à vaincre les forces visqueuses et la diffusion thermique, le fluide reste au repos et se comporte comme un solide en train de diffuser la chaleur qui lui est fournie par conduction (c'est l'état purement conducteur). Lorsque la différence de température $\Delta T'$ atteint un

seuil critique, les forces de poussées vaincront les forces visqueuses, le fluide se met en mouvement et on parle d'instabilité de Rayleigh-Bénard (voir figure 1.4).

L'apparition de l'instabilité est en fait gouvernée par un nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh, Ra , qui est le paramètre de contrôle de cette instabilité ; ce nombre représente le rapport entre deux phénomènes, l'un résistant (la diffusion thermique et les frottements visqueux) et l'autre moteur (la poussée d'Archimède).

Ce nombre est défini comme suit :

$$Ra = \frac{\text{poussée d'Archimède}}{\text{force visqueuse} \times \text{dissipation thermique}}$$

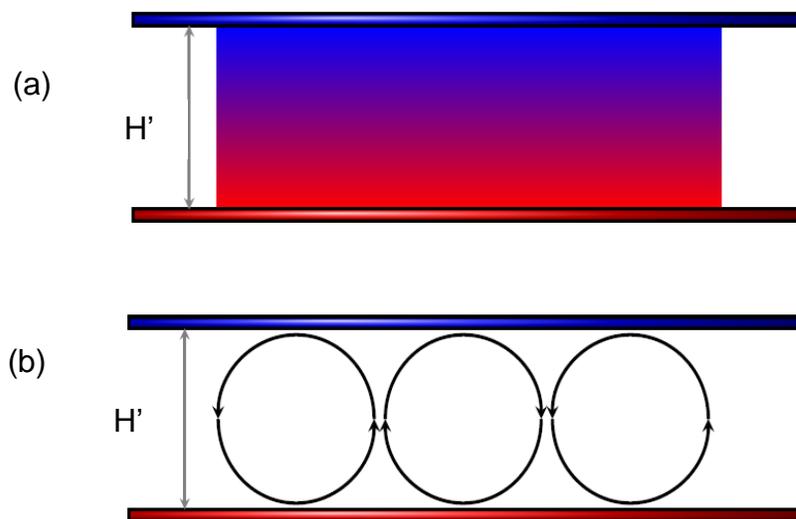


Figure 1.4 : Comparaison des modes de transfert de chaleur : (a) par conduction (b) par convection.

1.3. Lois de comportement des fluides

1.3.1. La loi de Newton

Le comportement Newtonien est le plus simple que l'on connaît. Il est caractérisé par la relation linéaire suivante :

$$\overline{\tau}' = \mu \overline{\dot{\gamma}}' \quad (1.1)$$

entre le tenseur déviateur des contraintes (noté $\overline{\tau}'$) et tenseur du taux de déformation (noté $\overline{\dot{\gamma}}'$) une constante μ est présente. Elle est appelée la viscosité dynamique du fluide qui ne dépend que de la température et de la pression.

- Notion de viscosité

Pour définir la viscosité, on peut considérer un écoulement laminaire à cisaillement simple entre deux couches de fluide, séparée par une distance d' remplie d'une substance homogène (figure 1.5). On suppose que les couches, d'une surface S' , sont étendues, de sorte que l'on puisse ignorer les effets au contact de parois. La plaque inférieure est fixée, et on applique une force tangentielle F' sur la plaque supérieure. Si cette force fait que la substance entre les couches se déplace à une vitesse v' , alors la substance est appelée fluide.

On a alors :

$$F' = \mu S' \frac{v'}{d'} \quad (1.2)$$

où μ est le coefficient de proportionnalité appelé viscosité dynamique. C'est une caractéristique du fluide considéré.

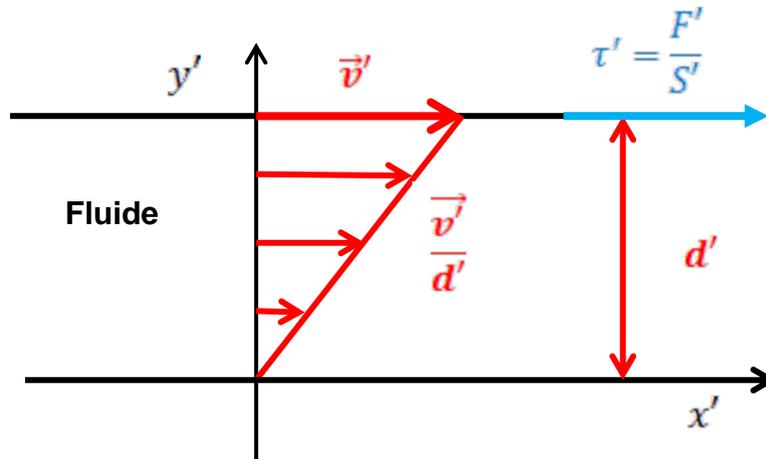


Figure 1.5 : Mouvement laminaire de cisaillement entre deux plans parallèles

On pose :

$$\tau' = \frac{F'}{S'} \quad (1.3)$$

où : τ' représente la contrainte par unité de surface appliquée sur la couche supérieure, appelée contrainte de cisaillement ; son unité est le Pascal.

La déformation γ' est le rapport entre la longueur $l'(t)$ parcourue par un élément de liquide du plan supérieur et l'épaisseur d entre les deux plaques :

$\gamma' = \frac{l'(t)}{d'}$. La déformation est fonction du temps t .

À la place de la déformation, on va plutôt s'intéresser à une grandeur physique plus pertinente : la déformation par unité de temps notée : $\frac{d\gamma'}{dt}$, appelée taux de

déformation ou taux de cisaillement, son unité en S.I est le s^{-1} . Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est donc la variation de la vitesse du plan supérieur en fonction de l'épaisseur d : il s'agit donc également du gradient de vitesse. On a :

$$\dot{\gamma}' = \frac{v'}{d'} \quad (1.4)$$

On obtient en introduisant (1.3) et (1.4) dans (1.2), on obtient :

$$\tau' = \mu \dot{\gamma}' \quad (1.5)$$

La viscosité est donc une grandeur qui traduit la résistance d'un liquide au cisaillement, c'est-à-dire au glissement des couches du fluide les unes par rapport aux autres (caractérisé par la variation de la vitesse v' dans une direction transverse à l'écoulement). Les forces F' par unité de surface correspondantes (les contraintes de cisaillement τ'), sont proportionnelles au gradient de vitesse v'/d' qui correspond aux taux de cisaillement et sont nulles dans un écoulement uniforme.

C'est ainsi qu'Isaac Newton (1726) exprime de façon intuitive l'idée de viscosité pour un liquide visqueux [8]. Les vérifications expérimentales n'arrivent que bien plus tard, avec les travaux de Poiseuille en 1856 et de Couette en 1890.

De l'équation de proportionnalité (1.5), il en ressort que les principaux critères des fluides Newtoniens sont:

- La viscosité dynamique μ est indépendante des paramètres de l'écoulement et du temps;
- La viscosité dynamique ne varie qu'en fonction des paramètres étrangers à l'écoulement, comme la température ou la pression;
- Les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est en repos.

Éventuellement, ces critères, décrivent le comportement d'un fluide idéal. A l'exception de certains fluides comme les gaz et quelques liquides composés de molécules simples (eau, certaines huiles).

Toutes déviations à ces règles est le signe d'un comportement non-Newtonien.

1.3.2. Fluides non-Newtoniens

Pratiquement, un bon nombre de fluides d'usage très courant présentent un comportement qui s'écarte plus ou moins de la loi de Newton. Ce type de fluides est appelé : fluides non-Newtoniens.

Ces derniers possèdent un comportement non-linéaire dans le sens où leur viscosité dite apparente est influencée par l'écoulement et dépend considérablement du taux de déformation. Cet état de fait peut être expliqué par la complexité observée dans la structure interne de ces fluides.

La compréhension des caractéristiques d'écoulement de ces fluides constitue une discipline appelée la rhéologie: c'est la science des déformations et des écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et des efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir [9].

Cette science date seulement des années 20, Bingham (1878-1945) est considéré comme son fondateur. C'est une nouvelle branche de la physique, elle s'occupe des substances dont les propriétés physiques se situent entre les corps idéalement élastique (le solide de Hooke) et les liquides idéalement visqueux (le fluide de Newton).

Son domaine d'application est très vaste, il couvre l'ensemble des fluides complexes, tels que les polymères, les pâtes alimentaires, les liquides physiologiques, (sang, bile, liquides lymphatiques, etc..), les vernis, les peintures, les boues de forage, les plastiques à l'état fondu... bref, pratiquement tous les matériaux

susceptibles d'être mis en écoulement et dont le comportement ne révèle manifestement pas des lois de la mécanique des fluides classiques.

Selon Chhabra et Richardson [10], on peut classer ces fluides en trois grandes catégories:

- Fluides à viscosité indépendantes du temps ;
- Fluides à viscosité dépendantes du temps ;
- Fluides viscoplastiques

1.3.2.1. Fluides aux viscosités indépendantes du temps

Le comportement des fluides non-Newtoniens indépendants du temps ne peut plus être représenté par la formule simple (1.1). Du fait que la relation entre la contrainte de cisaillement τ' et le taux de déformation $\dot{\gamma}'$ est plus complexe et peut prendre plusieurs formes. Dans ce type de fluide, la viscosité dite apparente μ dépend toujours de la température et de la pression mais aussi du taux de déformation ou de la contrainte de cisaillement. Cette catégorie comporte à son tour les trois types de fluides suivants (voir figure 1.6) :

- Les fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques) ;
- Les fluides rhéoépaississants (dilatants) ;
- Les fluides à seuil (viscoplastiques).

1.3.2.1.1. Fluides rhéofluidifiants (pseudo-plastiques)

Il s'agit du comportement rhéologique le plus répandu. Dans un tel fluide, la viscosité apparente diminue avec l'augmentation de la contrainte de cisaillement. Plus l'agitation est importante, plus la viscosité est faible. Ce phénomène peut être expliqué par les modifications de la structure interne du fluide entre les états de repos et d'écoulement :

- Au repos, l'ordre interne irrégulier de ces fluides provoque une résistance interne importante ce qui implique une viscosité élevée.
- À la suite de l'augmentation de la contrainte de cisaillement, la structure moléculaire du fluide devient régulière, par conséquent un meilleur glissement et donc une baisse de la viscosité.

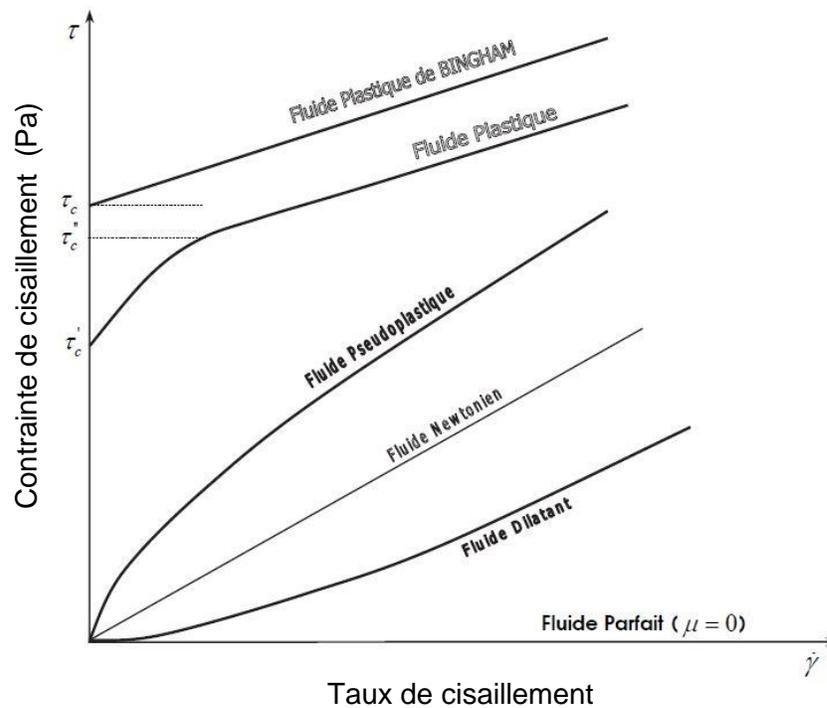


Figure 1.6: Rhéogramme des fluides non-Newtoniens indépendants du temps [10]

Cependant, toute augmentation du cisaillement entraîne une modification de la structure interne du fluide, causant ainsi une réduction de la dissipation visqueuse laquelle par la suite facilite l'écoulement du fluide.

À titre d'exemple, on peut citer les suspensions diluées de particules solides, les suspensions de vésicules déformables (le sang) et les solutions diluées de polymères. De même, les jus de fruits concentrés, les encres d'imprimerie, shampoing et pâte à papier.

1.3.2.1.2. Fluides rhéoépaississants (dilatants)

À l'inverse des fluides rhéofluidifiants, les fluides rhéoépaississants possèdent une viscosité apparente qui croît avec l'augmentation du cisaillement. Ce comportement est moins fréquent que celui des rhéofluidifiants. On le rencontre dans les suspensions fortement concentrées, dans lesquelles la phase liquide n'occupe pratiquement que les espaces entre les particules solides. Dans ce cas, quand le taux de cisaillement augmente, les particules solides tendent à freiner le déplacement d'une couche par rapport à l'autre, à cause de la disparition du liquide interstitiel [11]. L'accroissement des frottements, entraîne une augmentation considérable de la viscosité dynamique apparente. On observe ce type de comportement dans les solutions aqueuses d'amidon ou dans l'eau avec du sable et du quartz.

1.3.2.1.3. Fluides à seuil (viscoplastiques).

Pour ces fluides, aucun écoulement ne se produit tant que la contrainte appliquée ne dépasse pas une valeur critique appelée contrainte seuil. Au-delà de cette valeur seuil, on peut retrouver, suivant le fluide, les comportements Newtoniens, pseudo-plastiques ou dilatants.

Dans cette catégorie de fluides, on peut citer par exemple : les pâtes de fruits et de chocolat, les peintures à l'huile, les pommades, le dentifrice, la pâte à papier, les boues de forage et le ciment frais.

1.3.2.2. Fluides à viscosité dépendants du temps

Certains fluides non-Newtoniens possèdent un comportement qui varie en fonction du temps et du taux de cisaillement. Ces fluides se caractérisent par une

viscosité apparente qui dépend de la durée d'application de la contrainte sans interruption. Cette catégorie de fluide peut se subdiviser en deux classes (voir la figure 1.7) :

- Les fluides thixotropes
- Les fluides rhéopectine (antithixotropes)

1.3.2.2.1. Fluides thixotropes

Les fluides thixotropes ont une viscosité apparente qui diminue avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante. L'application d'une contrainte constante détruit certaines parties du fluide, conduisant ainsi, à une diminution de la viscosité apparente dans le temps. Après la suppression de cette contrainte, le fluide retrouve sa viscosité initiale.

Ces fluides admettent une contrainte seuil comme les fluides rhéoplastiques. Ce seuil augmente avec le temps lorsque le fluide est au repos et s'abaisse après agitation. Comme la caractéristique du fluide dépend de son histoire, les mesures rhéologiques deviennent complexes car il existe des effets d'hystérésis (effets de mémoire). Parmi ces fluides, on cite le cas de la moutarde, du ketchup, du yaourt, des peintures, des boues de forage, du béton et certains polymères.

1.3.2.2.2. Fluides rhéopectine (antithixotropes)

L'antithixotropie est le phénomène inverse de la thixotropie, c'est un comportement rare auquel le fluide durcit par agitation, par exemple : les suspensions aqueuses de gypse et le ciment.

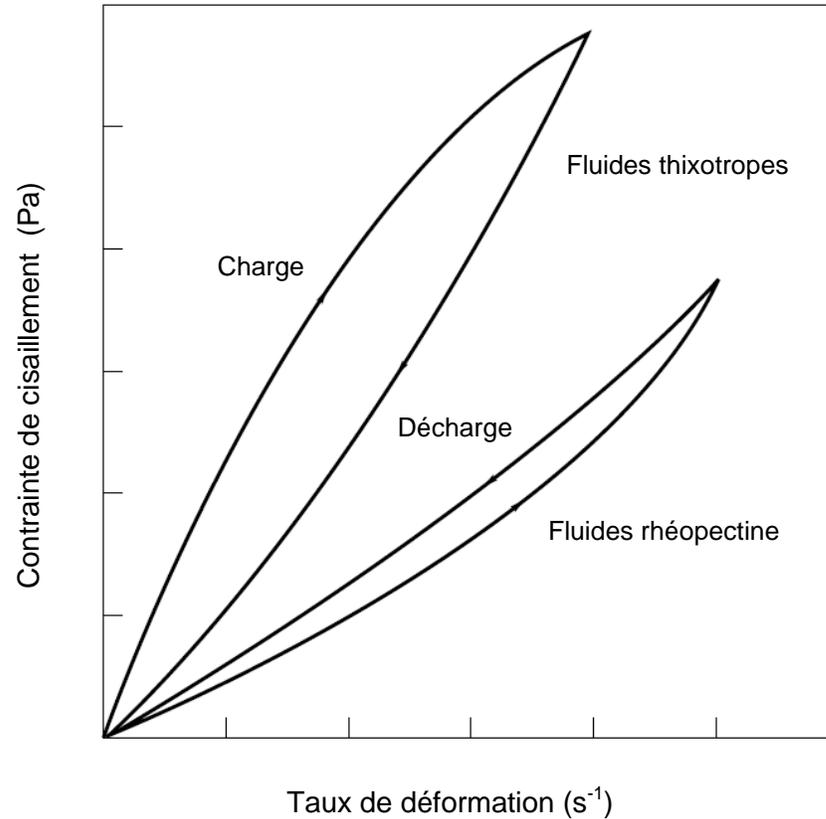


Figure 1.7: Rhéogramme des fluides non-Newtoniens dépendants du temps [10]

1.3.2.3. Les fluides viscoélastiques (rhéoplastiques)

Les fluides viscoélastiques possèdent à la fois des propriétés de viscosité et d'élasticité. Ils se manifestent sous l'effet d'une contrainte. Leur comportement dépend à la fois de la déformation, du taux de cisaillement et du temps. Ainsi, après la suppression des contraintes, ces fluides peuvent récupérer une partie de leurs déformations.

L'importance du caractère solide pour ces fluides dépend de la manière dont la contrainte est appliquée. Si cette contrainte est brutale alors ces fluides se

comportent comme des solides, par contre si elle est régulière, ils se comportent comme des fluides.

Si on prend en guise d'exemple le silli-putti (élastomère à base de silicone), on le posant sur une table, il s'étale en forme de boule, si on le jette, il rebondit. Si on le frappe avec un marteau, il se brise comme du verre (à la température ambiante).

1.4. Modèles rhéologiques pour les fluides rhéofluidifiants

Différentes lois permettant de modéliser les fluides non-Newtoniens peuvent être trouvées dans la littérature (Bird et al. [12], Baird et al. [13]), y compris certaines recommandations et les limitations d'emplois.

Dans la présente étude, on s'est intéressé au cas des fluides non-Newtoniens les plus répandus dans les procédés industriels et dont la viscosité diminue avec le taux de cisaillement. Il s'agit éventuellement du comportement rhéofluidifiant. Dans ce paragraphe, on s'est limité à citer les modèles rhéologiques les plus utilisés à savoir :

- Le modèle d'Oswald-de-Weale ou de la loi de puissance [10];
- Le modèle de Sisko [14];
- Le modèle de Cross [15] ;
- Le modèle d'Ellis [10];
- Le modèle de Carreau-Bird [12];
- Le modèle de Carreau-Yasuda [12].

1.4.1. Le modèle d'Oswald-de-Weale ou loi de puissance

C'est un modèle mathématique simple permettant de modéliser facilement un fluide non-Newtonien sans seuil par la relation :

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.6)$$

où :

μ : la viscosité apparente ;

K : l'indice de consistance ;

et n : l'indice rhéologique.

si :

- $0 < n < 1$, le fluide est rhéofluidifiant ou pseudoplastique ;
- $n = 1$, il est Newtonien ;
- $n > 1$, il est rhéoépaississant ou dilatant.

Bien que ce modèle permet de résoudre un bon nombre de problème d'écoulement de fluide non-Newtonien, il faut garder à l'esprit qu'il décrit mal le comportement à très faible ou très fort taux de cisaillement et que les paramètres n et K n'ont pas une signification physique claire.

En réalité, un fluide rhéofluidifiant ne l'est que pour une certaine gamme de taux de cisaillement, comme on peut l'observer sur la figure 1.8. Pour les faibles taux de cisaillement, on observe le plateau Newtonien, avec une éventuelle viscosité μ_0 appelée viscosité à cisaillement nul. Pour les cisaillements élevés, on constate aussi le plateau Newtonien avec une viscosité μ_∞ appelée viscosité à cisaillement infini.

1.4.2. Le modèle de Sisko [14]

$$\mu = \mu_\infty + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.7)$$

où :

μ : la viscosité apparente,

K : l'indice de consistance ;

n : l'indice rhéologique ;

et μ_∞ : la viscosité à taux de cisaillement élevé.

1.4.3. Le modèle de Cross [15]

Le modèle de Cross a l'avantage de présenter le plateau Newtonien à faible taux de cisaillement :

$$\mu - \mu_{\infty} = \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (E' \dot{\gamma})^n} \quad (1.8)$$

où E' : représente le temps caractéristique de l'enchevêtrement ;

μ_0 : la viscosité du premier plateau Newtonien à faible taux de cisaillement ;

et μ_{∞} : la viscosité du deuxième plateau Newtonien à taux de cisaillement élevé.

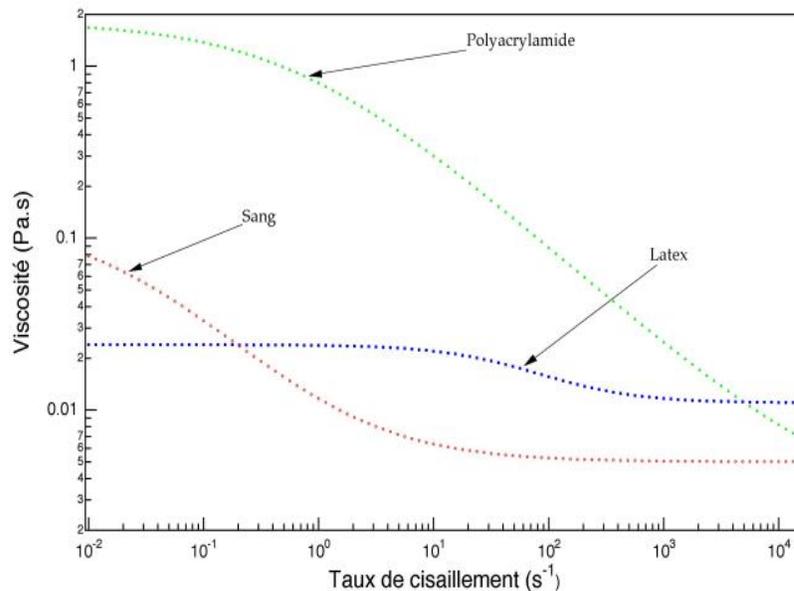


Figure 1.8: Évolution de la viscosité apparente avec le taux cisaillement pour une solution aqueuse de polyacrylamide, du sang, une suspension de particules de polymère (latex) dans l'eau. [16]

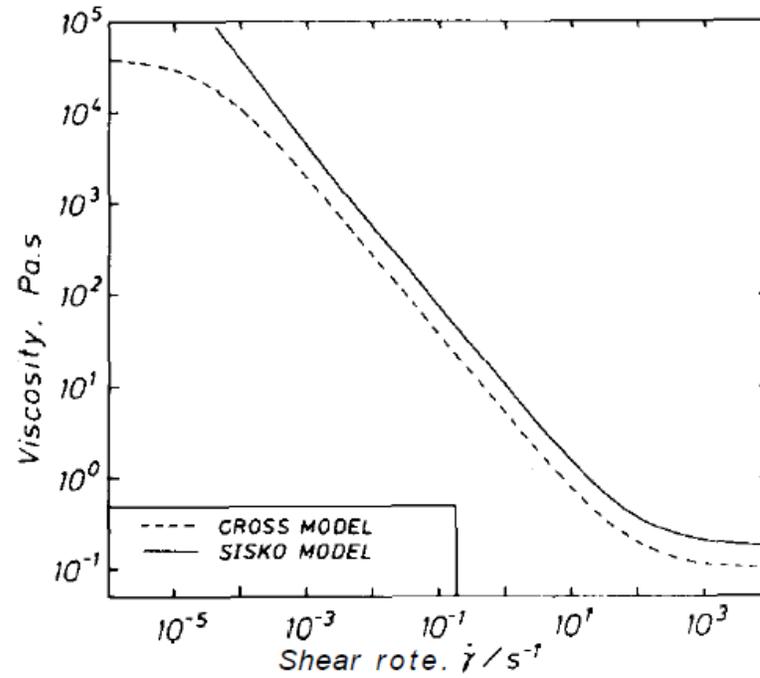


Figure 1.9 : Évolution de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement en utilisant les modèles de Cross et Sisko [14]

La figure 1.9 montre qu'avec le modèle de Cross, les plateaux Newtoniens à cisaillement faible et élevé sont bien respectés. Alors que dans le modèle de Sisko le plateau à faible cisaillement ne l'est pas.

1.4.4. Le modèle de Ellis

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\tau / \tau_{1/2})^{n-1}} \quad (1.9)$$

où :

μ_0 : représente la viscosité apparente à taux de cisaillement nul ;

$\tau_{1/2}$: la contrainte à laquelle $\mu = \frac{\mu_0}{2}$;

et n ($n > 1$) : représente le degré du comportement rhéofluidifiant du fluide.

1.4.5. Le modèle de Carreau-Bird

Généralement, pour un grand nombre de polymère, on choisit la valeur de $a=2$, on parle alors du modèle de Carreau-Bird à quatre paramètres [12], le paramètre a fut ajouté plus tard par Yasuda. On obtient :

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (E' \dot{\gamma}')^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (1.10)$$

où :

E' : le temps caractéristique de l'enchevêtrement ;

μ_0 : la viscosité du palier Newtonien à faible taux de cisaillement ;

μ_{∞} : la viscosité du deuxième plateau Newtonien à taux de cisaillement élevé ;

et n : représente l'indice de puissance.

1.4.6. Le modèle de Carreau-Yasuda

Ce modèle est largement utilisé pour décrire avec précision la viscosité des fluides rhéofluidifiants pour les faibles et fort taux de cisaillement. Il est donné par la relation suivante :

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (E' \dot{\gamma}')^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (1.11)$$

où :

μ_0 : la viscosité du fluide à cisaillement nul ou faible ;

μ_∞ : la viscosité du fluide à cisaillement infinie ou fort ;

E' : le temps caractéristique de relaxation du fluide ;

$\dot{\gamma}$: le second du tenseur de déformation ;

a : décrit la région de transition entre la viscosité à taux de cisaillement nul et la viscosité de la loi de puissance ;

et n : représente l'indice de puissance.

La figure 1.10 représente l'évolution de la viscosité apparente de différentes solutions de polymères en fonction du taux de cisaillement. Une excellente concordance est observée entre les valeurs de la viscosité apparente mesurées par le rhéomètre, représentées par des symboles, et celles calculées à partir de l'équation (1.11), lesquelles sont représentées par des traits pleins.

Le tableau 1.1 montre les valeurs expérimentales des paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda, pour les solutions de tylose et CMC (Carboxymethyl cellulose), qui sont représentées sur la figure 1.10.

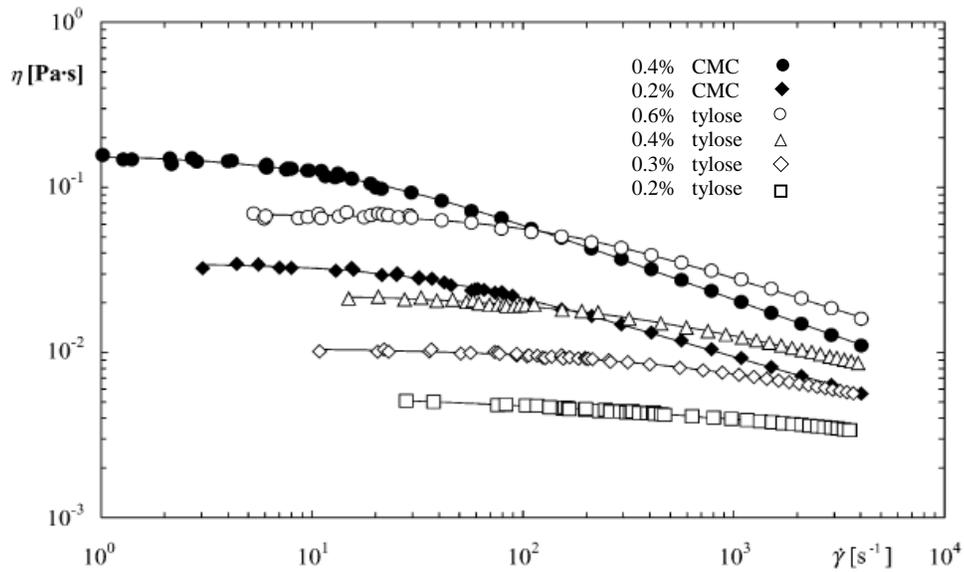


Figure 1. 10: Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement à 25°C. les traits plein sont ajustés par le modèle de Carreau Yasuda [17]

Tableau 1.1 : Les paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda pour les solutions de tylose et CMC [17]

Solution	μ_0 (Pa.s)	μ_∞ (Pa.s)	E' (s)	a	n	$\dot{\gamma}$ (s^{-1})
0.4% CMC	0.1598	0.0008	0.0681	0.991	0.513	1-4000
0.2% CMC	0.0358	0.0008	0.0271	1.043	0.581	30-4000
0.6% tylose	0.0705	0.0008	0.00720	1.006	0.558	5-4000
0.4% tylose	0.0227	0.0010	0.00304	0.741	0.608	10-4000
0.3% tylose	0.0107	0.0010	0.00095	0.653	0.594	10-4000
0.2% tylose	0.00614	0.0008	0.00011	0.290	0.631	20-4000

Généralement dans le modèle de CY, les fluides rhéofluidifiants ont un indice de puissance n ($0.1 < n < 1$) et une constante de temps E' ($0.1 < E' < 100$ s). Lorsque la valeur de la constante de temps E' est très grande, le modèle de CY tend vers le modèle de la loi de puissance. Également, si $n = 1$, $s = 1$ ou $E' = 0$, on retrouve le cas des fluides Newtoniens.

1.5. Revue bibliographique sur le phénomène de Rayleigh-Bénard

Dans cette section, nous ne prétendons pas faire une analyse exhaustive de tous les travaux liés au phénomène de Rayleigh-Bénard, mais nous nous attardons seulement aux études les plus pertinentes, en essayant de mettre l'accent sur les travaux relatifs à la configuration géométrique qui nous intéresse en vue d'extraire les principaux résultats et de présenter l'état de l'art.

Les premières études sur la convection naturelle dans les fluides non-Newtoniens ont été menées dans le but de comprendre certains phénomènes géophysiques tels que le mouvement du manteau terrestre (Parmentier et Turcotte [18] et Christensen [19]). Ces études étaient fondées sur l'hypothèse d'un nombre de Prandtl infini et d'une viscosité obéissante au comportement de la loi de puissance. La majorité de ces études ont porté essentiellement sur la convection naturelle et sur la structure de l'écoulement dans les fluides non-Newtoniens dans une couche de fluide horizontale soumise à un gradient de température vertical.

Pierre et Tien [20] ont mené un travail expérimental sur la convection thermique d'un fluide non-Newtonien confiné entre deux plaques horizontales. Les fluides étudiés obéissent au modèle Ostwald-de-Waele. Leurs résultats ont été exprimés par une corrélation liant les nombres de Nusselt, de Rayleigh et de Prandtl.

L'étude de Ozoe et Churchill [21] semble être la première analyse numérique concernant la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien du type Ostwald-de-Waele et Ellis. La méthode des différences finies a été utilisée pour la résolution du

problème. Ces auteurs ont déterminé les conditions critiques relatives à la naissance des mouvements convectifs. Ils ont aussi constaté une augmentation du nombre de Rayleigh critique et une diminution du nombre de Nusselt moyen avec le paramètre rhéologique. En faisant comparer leurs résultats avec ceux de Tien et al. [22], ces auteurs ont remarqué que leurs résultats ne corroborent pas.

Tsuei et Tien [23] ont étudié expérimentalement la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien confiné dans une cavité horizontale et chauffée par le bas. En faisant plus de 50 expériences pour différentes solutions de polymères. Ils ont pu généraliser la corrélation trouvée par Pierre et Tien [20] pour une large gamme de nombre de Rayleigh.

Liang et Acrivos [24] ont mené une étude expérimentale pour des solutions polyacrylamide (Seperan AP30). Ils ont constaté que la viscosité de leurs solutions polymères décroît avec le taux de cisaillement et s'approche vers une valeur uniforme pour les faibles et les grandes valeurs du taux de cisaillement. Aussi, ils ont montré que les rhéofluidifiants tendent à améliorer le taux de transfert de chaleur et stabilisent la structure des cellules convectives.

Khayat [25] a examiné l'effet des fluides faiblement rhéofluidifiant sur le début du chaos en convection thermique, en utilisant un modèle de viscosité de Carreau-Bird. Ses résultats ont montré que le nombre de Rayleigh critique responsable à l'apparition de la convection thermique reste le même que dans le cas des fluides Newtoniens, mais la structure des cellules convectives semble plus affectée par l'effet rhéofluidifiant. Il a également démontré que la présence de l'effet rhéofluidifiant a donné lieu à un *point selle* dans le diagramme de bifurcation qui ne figurait pas dans le cas Newtonien. Aussi, il a constaté que l'effet rhéofluidifiant provoque une bifurcation prématurée de Hopf et favorise la transition vers le chaos pour des valeurs du nombre de Rayleigh bien inférieures à celles trouvées dans le cas Newtonien.

Solomatov [26] a effectué une analyse d'échelle de température et de contrainte qui dépend de la viscosité. Ainsi, trois régimes de convection ont été

identifiés : le régime de faible contraste de viscosité dans lequel le fluide se comporte comme si la viscosité est constante ; le régime intermédiaire où la symétrie des couches limites est rompue et la température interne augmente et enfin le régime du couvercle stagnant où la température interne est très élevée et suit un profil diffusif dans le couvercle. Il a également montré que la convection dans les fluides non-Newtoniens s'effectue généralement à amplitude finie, et ne peut pas être analysée par voie analytique.

Plus tard, Solomatov et Barr [27] ont étudié numériquement l'apparition de la convection pour des fluides non-Newtoniens en loi de puissance et ayant une viscosité fortement dépendante de la température. La valeur critique du nombre de Rayleigh trouvée était beaucoup plus petite que celle de la convection Newtonienne, indiquant clairement l'existence de convection sous-critique. Dans une autre étude numérique, Solomatov [28] a prédit l'existence d'un nouveau type de cellules convectives en convection sous-critique. Ces cellules étaient stables et situées au fond de la cavité, contrairement à la convection supercritique où les cellules convectives remplissaient toute la cavité.

Une étude numérique et expérimentale a été réalisée par Inaba et al. [29] sur une cavité chauffée par le bas est remplie par une boue à microémulsion à différentes concentrations. Ces auteurs ont proposé une corrélation empirique montrant le rôle du caractère pseudo-plastique sur le transfert de chaleur par convection.

Li et Khayat [30] ont examiné la convection thermique à amplitude finie pour une mince couche d'un fluide viscoélastique. Le modèle Oldroyd-B a été adopté pour caractériser le comportement rhéologique du fluide. Ils ont constaté que lorsque l'état conductif perd sa stabilité, la convection stationnaire apparaît pour les fluides faiblement élastiques. Alors que pour les fluides fortement élastiques, la convection oscillatoire apparaît. Également, ils ont utilisé une approche de l'équation d'amplitude dans la gamme d'inertie-élastique pour déterminer l'apparition de l'instabilité d'une part et les structures convectives stables d'autre part. Ces auteurs ont trouvé que la

viscosité et le nombre de Prandtl avaient une influence significative sur la stabilité des structures convectives. Ils ont démontré que les rouleaux ou les hexagones sont les structures les plus stables, selon le degré d'élasticité des fluides. Alors que, les structures carrées ont été trouvées toujours stables ; contrairement à la convection Newtonienne où seule les structures en rouleaux demeurent toujours stables.

Le cas de la cavité horizontale, remplie par un fluide non-Newtonien, chauffée par un flux de chaleur constant a été considéré par Lamsaadi et al. [31]. Une solution analytique a été développée basée sur le concept de l'écoulement parallèle. Les auteurs ont démontré que les fluides rhéofluidifiants causent une apparition précoce de la convection et améliorent le taux de transfert de chaleur, contrairement aux fluides dilatants, où une tendance inverse a lieu. En outre, les auteurs ont montré que pour les deux types de fluides (rhéofluidifiants et dilatants) le nombre de Rayleigh supercritique dépend fortement de l'indice de loi de puissance.

Une étude sur les fluides viscoélastiques avec viscosité dépendante de la température a été menée par Sakhar et al.[32]. En utilisant la théorie de stabilité linéaire et en considérant différentes conditions aux frontières, ces auteurs ont démontré l'existence de la convection stationnaire des fluides de type de Maxwell, Rivlin-Ericksen et Jeffreys. La condition de l'apparition de la convection oscillatoire et l'effet de la température sur la viscosité apparente ont été aussi étudiés. Parmi les fluides considérés, les fluides de type Maxwell se sont avérés instables, alors que les fluides de type Rivlin - Ericksen sont stables et se comportent comme des fluides Newtoniens soit avec une viscosité constante ou dépendante de la température.

Récemment, Albaalbaki et al. [33] ont analysé numériquement la convection de Rayleigh-Bénard dans une couche de fluide non-Newtonien. La viscosité du fluide a été modélisée par le modèle de Carreau-Bird. Au début de la convection, trois types de structures d'écoulement ont été examinés : rouleaux ; carrés et hexagones. La stabilité de ces trois structures d'écoulement dépend du nombre de Prandtl et le degré de la rhéofluidité du fluide. Une analyse de stabilité linéaire pour les différents fluides rhéofluidifiants, dilatants et viscoélastiques, a montré que le nombre de

Rayleigh critique et le nombre d'onde correspondant au début de la convection sont les mêmes que ceux rencontrés dans le cas des fluides Newtoniens. Pour les fluides fortement rhéofluidifiant, seulement les structures en motif hexagonal et rouleau ont été maintenues, tandis que les structures en motif carré ont disparu à l'approche de la convection supercritique. Les rouleaux convectifs sont stables que pour les faibles rhéofluidifiants et dilatants. Pour les fluides fortement rhéofluidifiants, avec un nombre de Prandtl élevé, les structures hexagones et carrées sont stables. Pour les fluides rhéofluidifiants, la convection sous-critique a été observée pour tous les types de structures d'écoulement, à cause du degré rhéofluidifiant est suffisamment élevé.

Ces auteurs ont déclaré que l'utilisation du modèle de loi de puissance n'était pas adéquat pour le problème de Rayleigh-Bénard du fait que la viscosité présentait une singularité au point critique dans le cas des fluides rhéofluidifiants et une viscosité nulle pour les fluides dilatants. Évidemment, ce comportement de la viscosité conduit à des valeurs erronées du nombre de Rayleigh supercritique. Le modèle de loi de puissance s'avère à l'échec et conduit à des inexactitudes dans les régions où le taux de cisaillement est très faible ou presque nul.

Turan et al. [34] ont réalisé une étude numérique de l'effet des nombres de Bingham, Prandtl et Rayleigh sur le taux de transfert de chaleur pour les fluides à contrainte seuil. Ces auteurs ont constaté que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh pour les deux fluides Newtonien et de Bingham. Alors que pour les grandes valeurs du nombre de Bingham, l'état de conduction demeure.

Kaddiri et al. [35] ont étudié de manière numérique la convection de Rayleigh-Bénard des fluides en loi de puissance dont la viscosité dépend de la température. Le fluide est confiné dans une cavité carrée, chauffée par le bas et refroidie par le haut avec des flux de chaleur uniforme. Les effets des paramètres de contrôles sur l'apparition de la convection, la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur ont été étudiés. Pour les fluides rhéofluidifiants, ils ont observé qu'une augmentation du nombre de Pearson favorise l'apparition de la convection sous-critique.

Récemment, Ben Khalifa et al.[36] ont examiné analytiquement et numériquement le problème de la convection naturelle dans une cavité horizontale poreuse remplie d'un fluide non-Newtonien binaire et soumis à des gradients verticaux de température et de concentration. Le comportement rhéologique de la solution binaire obéit au modèle de la loi de puissance. Ces auteurs ont également analysé l'influence des paramètres de contrôles sur les taux de transfert de chaleur et de masse. Pour un fluide dilatant ($n > 1$), ces auteurs ont montré que l'apparition de la convection supercritique a eu lieu pour un certain nombre de Rayleigh critique nul. Alors que pour un fluide rhéofluidifiant ($n < 1$), le nombre de Rayleigh critique tend vers l'infini, ce qui est loin d'être physique.

Une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien obéissant au modèle de loi de puissance a été réalisée par Alloui et al. [37]. Pour les fluides rhéofluidifiants, la convection est toujours sous-critique. Par contre, pour fluides dilatants, elle est toujours stationnaire du fait que le nombre de Rayleigh supercritique est nul. Alors que pour les faibles valeurs du taux de cisaillement, ce modèle a une valeur infinie du nombre de Rayleigh critique. Ces deux valeurs limites critiques du nombre de Rayleigh semblent être irréalistes et c'est probablement la conséquence du modèle de loi de puissance, qui n'est pas conçu pour les écoulements à faible taux de cisaillement.

1.6. Positionnement de notre travail par rapport à la littérature

L'étude bibliographique montre que la majorité des travaux expérimentaux, numériques et analytiques réalisés sur la convection naturelle dans une cavité de forme rectangulaire ou carrée ont été effectués pour des fluides non-Newtoniens dont le comportement rhéologique obéit au modèle de la loi de puissance. Par contre, très peu de recherches sont disponibles dans le domaine des transferts convectifs relatif aux fluides rhéofluidifiants où la viscosité obéit au modèle de Carreau-Yasuda.

Les récentes études d' Alloui et al. [37] et de Albaalbaki et al. [33] ont constitué le point de départ de notre recherche. La première motivation repose sur le choix du modèle alors que la seconde réside dans le choix des conditions aux limites :

Première motivation :

Dans leur étude Alloui et al. [37] ont décrit physiquement l'effet rhéologique du fluide sur le déclenchement des mouvements convectifs, en considérant un fluide rhéologique idéal dont le comportement obéit au modèle de loi de puissance. Leurs résultats n'ont pas été réalistes, vu que la viscosité utilisée n'était pas valable pour les faibles et grandes valeurs du taux de cisaillement ($\mu \rightarrow \infty ; \dot{\gamma} \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow 0 ; \dot{\gamma} \rightarrow \infty$). Ceci nous a mené à substituer le modèle de la loi de puissance par un modèle plus réaliste, à savoir le modèle de Carreau-Yasuda.

Cette substitution est basée sur les critères suivants :

- Le modèle de Carreau-Yasuda est valable pour n'importe quel taux de cisaillement vu qu'il a été développé sur des observations expérimentales ;
- Ce modèle décrit avec précision le profil de la viscosité des fluides rhéofluidifiants allant de zéro à l'infini compte tenu qu'il possède une viscosité apparente dépendante de cinq paramètres, chose absente dans le modèle de la loi de puissance ;
- Ce modèle nous permet de mieux appréhender les phénomènes physiques relatifs aux transferts de chaleur et aux écoulements convectifs sous-critique et supercritique d'un fluide non-Newtonien.

Seconde motivation :

La motivation réside aussi dans les études rapportées par Albaalbaki et al. [33] qui ont mené une analyse, sur une couche de fluide non-Newtonienne, avec des

conditions aux limites idéales. Notre contribution est de compléter leur travail en prenant des conditions aux limites expérimentales afin de mieux décrire le phénomène de la convection naturelle des fluides non-Newtoniens.

Enfin, notre recherche ne s'est pas limitée à ces deux motivations, elle a porté aussi sur les effets combinés des paramètres rhéologiques, du rapport de forme et des conditions aux limites thermiques sur l'apparition de la convection sous-critique et supercritique. Ce travail a le privilège d'être original compte tenu de l'absence de travaux antérieurs relatifs à la convection sous-critique.

CHAPITRE 2

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

2.1. Introduction

La convection thermique fait intervenir le transport de chaleur par un mouvement de la matière sous l'effet de la pesanteur. Cependant, les équations nécessaires à la modélisation de ce processus doivent décrire d'une part le mouvement de la matière, et d'autre part le transport de la chaleur. C'est précisément ce que font les équations de mouvement couplées avec l'équation de la chaleur. Dans le cas de la convection naturelle, ces équations peuvent être simplifiées, mais même après leur simplification, elles resteront toujours non-linéaires. Cette non-linéarité a rendu leur résolution par voie analytique impossible d'où le recours à des méthodes numériques à savoir, les méthodes des différences finies[21-38], les volumes finis[39], les éléments finis[40] ou les méthodes spectrales[41].

Dans cette étude, la méthode des différences finies a été retenue du fait qu'elle est la mieux adaptée à la configuration géométrique choisie.

Dans un premier temps, on présentera la formulation mathématique du problème de convection naturelle d'un fluide non-Newtonien confiné dans une cavité rectangulaire. Dans un second temps, on donnera sous forme dimensionnelle, dans un système de coordonnées cartésien, les équations gouvernantes associées aux conditions aux limites appropriées. Ensuite, on déterminera les échelles caractéristiques de la longueur, la vitesse et le temps dans le but de mettre ces équations sous formes adimensionnelles. Cette étape de travail, nous permettra de ressortir des nombres sans dimension dans le système d'équations. Enfin, on se basera sur des hypothèses simplificatrices pour faciliter le traitement numérique.

Par ailleurs, il est utile de mentionner que dans tout ce qui suit, on désigne par des primes (') les grandeurs dimensionnelles.

2.2. Description du modèle physique

Dans ce travail, la configuration géométrique qui a suscité notre intérêt est une cavité rectangulaire remplie d'un fluide non-Newtonien dont le comportement rhéologique obéit au modèle de Carreau-Yasuda. Comme il est illustré sur la figure 2.1, il s'agit d'une cavité rectangulaire de hauteur H' de largeur L' . L'origine du système de coordonnées cartésiennes considéré est située au centre de la cavité.

les parois horizontales sont soumises soit à un flux de chaleur constant, q' , ou maintenues à des températures constantes. Par ailleurs, Les parois verticales sont toujours adiabatiques.

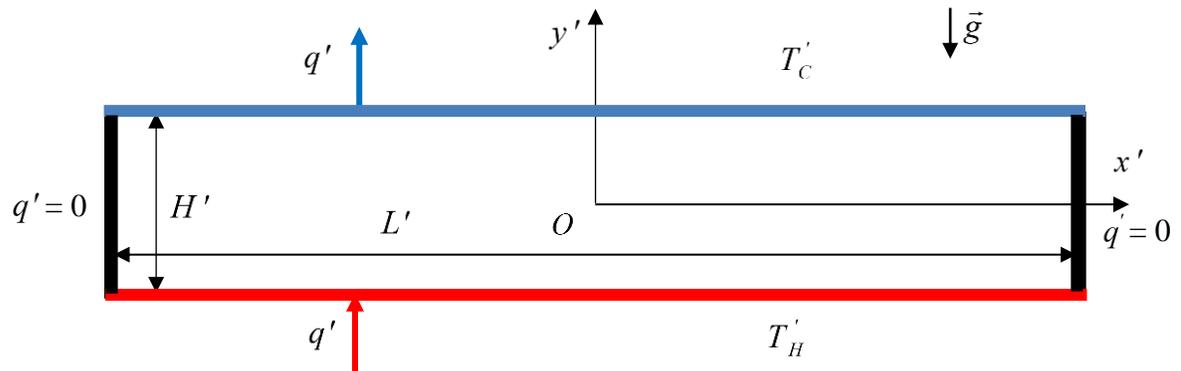


Figure 2.1 : Représentation schématique de la cavité et système de coordonnées.

2.3. Équations gouvernant le problème

Les équations de conservation, couplées décrivant le mouvement et le transfert de chaleur mises sous forme tensorielle, sont formulées de la manière suivante :

2.3.1. Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}(\rho \bar{V}') = 0 \quad (2.1)$$

Comme le fluide considéré est incompressible ($\rho = \text{cste}$), l'équation (2.1) se simplifie pour donner :

$$\bar{\nabla} \bar{V}' = 0 \quad (2.2)$$

2.3.2. Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\bar{V}'}{Dt} = \rho \bar{g} + \bar{\nabla} \bar{\Sigma} \quad (2.3)$$

où :

\bar{V}' : représente le vecteur vitesse ($\bar{V}' = u' \vec{i} + v' \vec{j}$) ;

\bar{g} : le vecteur de l'accélération de la pesanteur selon l'axe y' ;

$\bar{\Sigma}$: le tenseur des contraintes, qui se décompose en deux termes :

- $\bar{\tau}'$: tenseur des extra-contraintes (ou tenseur déviateur des contraintes), qui se rapporte aux contraintes tendant à déformer le fluide ;
- P' : la pression hydrostatique

$$\bar{\Sigma} = \bar{\tau}' - P' \bar{I} \quad (2.4)$$

et \bar{I} : représente le tenseur identité.

L'équation (2.3) s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{D\vec{V}'}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}' \right) = -\nabla P' + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}' \quad (2.5)$$

P' : représente la pression qui contient la contribution de la pesanteur ;

$\overline{\overline{\tau}}'$: le tenseur déviateur des contraintes défini par :

$$\overline{\overline{\tau}}' = \mu(\dot{\gamma}') \overline{\overline{\dot{\gamma}}}' \quad (2.6)$$

ou encore en terme de convention d'Einstein:

$$\tau'_{ij} = \mu(\dot{\gamma}') \dot{\gamma}'_{ij} \quad (2.7)$$

$\overline{\overline{\dot{\gamma}}}'$: représente le tenseur du taux de déformation défini comme la partie symétrique du tenseur du gradient de vitesse:

$$\overline{\overline{\dot{\gamma}}}' = \left(\overline{\overline{\nabla V}}' + \left(\overline{\overline{\nabla V}}' \right)^T \right) \quad (2.8)$$

où $\overline{\overline{\nabla V}}'$: représente le gradient de vitesse

Les composantes du tenseur du taux de déformation sont données par :

$$\dot{\gamma}'_{ij} = \left(\frac{\partial V'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial V'_j}{\partial x'_i} \right) \quad (2.9)$$

et μ : représente la viscosité apparente du fluide, exprimée en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}'$ et défini par la formule suivante:

$$\dot{\gamma}' = \sqrt{\frac{1}{2} \overline{\overline{\dot{\gamma}}}' : \overline{\overline{\dot{\gamma}}}' } = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{\gamma}'_{ij}{}^2} \quad (2.10)$$

2.3.3. Équation de conservation de l'énergie

$$\rho c_p \frac{DT'}{Dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla T' \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T') + \overline{\overline{\tau}}' : \nabla \vec{V}' \quad (2.11)$$

où :

λ : représente la conductivité thermique ;

c_p : la chaleur calorifique à pression constante ;

et $(\overline{\tau}' : \overline{\nabla V}')$: représente la dissipation visqueuse de l'énergie.

2.3.4. Équation constitutive (comportement rhéologique)

Dans le présent travail, le fluide considéré est un fluide purement visqueux, c'est un fluide rhéofluidifiant dont sa viscosité, μ , obéit au modèle de Carreau-Yasuda [12-42]:

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (E' \dot{\gamma}')^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (2.12)$$

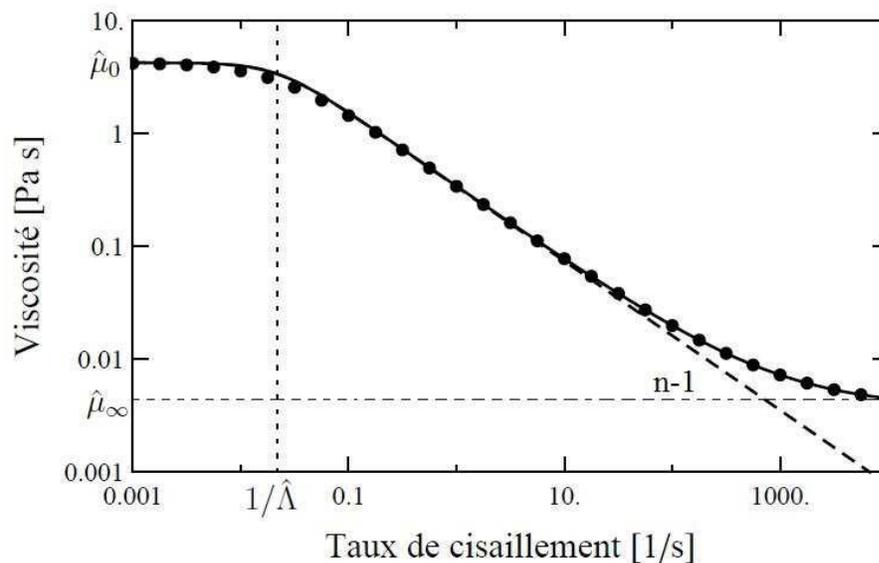


Figure 2.2 : Évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les points correspondent au modèle de Carreau-Yasuda, le trait continu au modèle de Carreau-Bird avec $n = 0.66$, $E' = 45.8 \text{ s}$, $\mu_0 = 4.22 \text{ Pa s}$ et $\mu_{\infty} = 0.00372 \text{ Pa s}$. Les pointillés correspondent au modèle de Carreau-Bird mais avec $\mu_{\infty} = 0$ [43]

2.4. Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier la formulation mathématique du modèle, on a pris en considération quelques approximations qui sont largement utilisées par de nombreux auteurs dans leurs études sur la convection naturelle.

On a supposé que :

- La troisième dimension est suffisamment grande par rapport aux deux autres dimensions (L' et H') rendant les effets de bords négligeables et ramenant la configuration à un problème bidimensionnel ;
- Le fluide non-Newtonien confiné à l'intérieur de la cavité est supposé incompressible ;
- L'écoulement engendré est supposé laminaire ;
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ;
- Le travail des forces visqueuses et de pression est négligeable ;
- Les propriétés thermo-physiques du fluide sont supposées constantes (indépendantes de la température) et sont évaluées à la température de référence ; à l'exception de la masse volumique ρ dans le terme de la poussée d'Archimède qui varie linéairement avec la température T' et obéit à l'approximation de Boussinesq [44]. En fait, cette approximation a été proposée pour la première fois en 1879 par Oberbeck [45]:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta (T' - T_0') \right] \quad (2.13)$$

ρ_0 : représente la densité du fluide donnée à la température référence T_0' ;

β : le coefficient d'expansion thermique à pression constante ; généralement, ce coefficient est de l'ordre de 10^{-4} . Il est défini par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_p \quad (2.14)$$

Selon Gray et Giorgini [46], l'approximation de Boussinesq est valide pour des faibles différences de température. Toutefois, et pour plus de détail, un exposé sur l'approximation de Boussinesq et ses conditions de validité sont données dans l'ouvrage de Bois [47].

2.5. Formulation mathématique en coordonnées cartésiennes

L'application de l'approximation de Boussinesq permet de considérer la masse volumique du fluide constante dans tous les termes sauf dans le terme de poussée. En faisant intervenir la pression hydrostatique: $P' = p' - \rho_0 g$, le système d'équations en terme de u' et v' devient :

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.15)$$

Équation de mouvement suivant x' :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'} \quad (2.16)$$

Équation de mouvement suivant y' :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho_0 \beta (T' - T'_0) g + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'} \quad (2.17)$$

où :

$$\begin{aligned}\tau'_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \tau'_{xy} &= \tau'_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \tau'_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Équation de l'énergie :

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.19)$$

2.6. Conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques

La configuration la plus simple permettant d'étudier le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard concerne une cavité horizontale soumise à un gradient de température verticale. Les conditions aux limites dimensionnelles sont données par:

2.6.1. Conditions aux limites hydrodynamiques

- Parois horizontales :

Dans toute l'étude, les parois horizontales sont supposées rigides (cas sans glissement)

$$u' = v' = 0 \quad \text{pour } y' = \pm \frac{H'}{2} \quad (2.20)$$

- Parois verticales :

Dans le cas où les parois verticales supposées sont rigides (cas sans glissement) on a :

$$u' = v' = 0 \quad \text{pour } x' = +\frac{L'}{2} \quad (2.21)$$

Alors, lorsque ces parois verticales sont supposées libre (cas avec glissement) on a :

$$u' = \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \quad \text{pour } x' = +\frac{L'}{2} \quad (2.22)$$

2.6.2. Conditions aux limites thermiques

- Parois verticales :

Les parois verticales de la cavité sont supposées adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur), ce qui se traduit par :

$$q' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad \text{pour } x' = \pm \frac{L'}{2} \quad (2.23)$$

- Les parois horizontales :

Dans le cas où les parois horizontales sont supposées maintenues à un flux de chaleur constant (condition de Neumann), on a :

$$q' = -\lambda \frac{\partial T'}{\partial y}, \quad \text{pour } y' = \pm \frac{H'}{2} \quad (2.24)$$

Alors, lorsque ces parois horizontales sont supposées isothermes (condition de Dirichlet), on a :

$$T' = T'_H, \quad \text{pour } y' = -\frac{H'}{2} \quad (2.25)$$

$$T' = T'_C, \quad \text{pour } y' = +\frac{H'}{2} \quad (2.26)$$

2.7. Mise sous forme adimensionnelle

Les équations (2.15) à (2.19) avec les conditions aux (2.20) à (2.26) sont rendues adimensionnelles en considérant les échelles caractéristiques suivantes :

- La hauteur (H') de la cavité comme échelle de longueur ;
- Le temps de diffusion thermique (H'^2/α) comme échelle de temps. Ce temps caractéristique convient parfaitement pour des fluides dont le temps de diffusion thermique est plus élevé que le temps de diffusion visqueuse. C'est le cas des fluides dont le nombre de Prandtl est supérieur à 1 ;
- La vitesse de diffusion thermique ($H'/(H'^2/\alpha)$) comme échelle de vitesse ;
- L'écart de température ($\Delta T' = T'_H - T'_c$) ou bien ($\Delta T' = q'H' / \lambda$) suivant le cas considéré ;
- ($\rho_0 \alpha^2 / H'^2$) comme échelle de pression.

Ainsi, les variables sans dimension associées sont :

$$(x, y) = \frac{(x', y')}{H'}, t = \frac{t' \alpha}{H'^2}, (u, v) = \frac{(u', v') H'}{\alpha}, \psi = \frac{\psi'}{\alpha}, \eta = \frac{\mu}{\mu_0}, T = \frac{T' - T'_0}{\Delta T'} \quad (2.27)$$

où : $\alpha = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$ représente la diffusivité thermique.

En vertu des variables adimensionnelles données par la relation (2.27), les équations de conservation (2.15) à (2.19) peuvent se réécrire sous la façon suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + Ra_T T \right) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.32)$$

Compte tenu de l'équation (2.12), la viscosité apparente adimensionnelle du modèle de Carreau-Yasuda se réduit à :

$$\eta(\dot{\gamma}) = s + (1-s) \left[1 + (E \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (2.33)$$

où :

$s = \mu_\infty / \mu_0$: représente le rapport de la viscosité à taux de cisaillement infini sur taux de cisaillement nul ;

$E = E' \alpha / H'^2$: représente le temps caractéristique adimensionnelle du fluide.

$\dot{\gamma}$: représente le second invariant du tenseur de taux de déformation (taux de cisaillement) défini par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (2.34)$$

Le problème considéré fait intervenir le groupement de paramètres adimensionnels suivants :

- Le rapport de forme A ;
- Le nombre de Prandtl Pr qui caractérise les propriétés thermiques du fluide. C'est le rapport du temps caractéristique de diffusion thermique sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse :

$$Pr = \frac{\mu_0}{\rho_0 \alpha} \quad (2.35)$$

- Le nombre de Rayleigh thermique Ra_T qui exprime le transfert de chaleur à l'intérieur d'un fluide. C'est le rapport entre les effets déstabilisants (force d'Archimède) qui provoquent la mise en mouvement du fluide et les effets stabilisants (force visqueuse et diffusion thermique) :

$$Ra_T = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T' H'^3}{\mu_0 \alpha} \quad (2.36)$$

- Les paramètres rhéologiques n , E , s et a .

Il nous semble utile de mentionner que dans la présente étude, l'écart de température $\Delta T'$, le coefficient d'expansion thermique β ainsi que les nombres de Prandtl et de Rayleigh thermique Pr et Ra_T sont considérés positifs.

2.7.1. Équation de transport adimensionnelles en formulation (ψ, Ω)

Dans la plupart des travaux relatifs à la convection naturelle, l'étude de la pression ne présente pas un intérêt majeur. L'utilisation de la formulation fonction de courant-vorticité (ψ, Ω) fait non seulement réduire le nombre d'équation mais elle présente aussi l'avantage de tracer directement les lignes de courant qui apportent d'importantes informations sur la structure de l'écoulement.

Ainsi, l'équation de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = Pr \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{yy} - \tau_{xx}) + Ra_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (2.37)$$

où, Ω : représente la vorticité adimensionnelle definie comme suit :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.38)$$

avec :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.39)$$

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (2.40)$$

$$\tau_{yy} = -2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

et :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2} \quad (2.41)$$

En substituant les composantes du tenseur de déformation par ses valeurs respectives, et après manipulation algébrique, l'équation de mouvement (2.37) s'écrit comme :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = Pr \left[\eta \nabla^2 \Omega + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] + Pr \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Ra_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (2.42)$$

l'équation d'énergie devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

et la fonction de courant (équation de poisson) s'écrit comme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (2.44)$$

2.7.2. Conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions hydrodynamiques sur les parois horizontales sont définies de la manière suivante :

$$u = v = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = \pm \frac{1}{2} \quad (2.45)$$

Deux cas se présentent pour les parois verticales:

- dans le cas sans glissement on a :

$$u = v = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{A}{2} \quad (2.46)$$

- dans le cas avec glissement on a :

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{A}{2} \quad (2.47)$$

Cependant, les conditions thermiques sur les parois horizontales sont :

- pour le cas d'un flux de chaleur constant (type de Neumann)

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -1 \text{ pour } y = \pm \frac{1}{2} \quad (2.48)$$

- pour le cas de températures constant (type de Dirichlet) on a :

$$T = \pm \frac{1}{2} \text{ pour } y = \mp \frac{1}{2} \quad (2.49)$$

et sur les parois verticales on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = \pm \frac{A}{2} \quad (2.50)$$

où $A = \frac{L'}{H'}$: représente le rapport de forme de la cavité.

2.8. La vorticité sur les frontières

L'approximation de la vorticité sur les frontières du domaine est donnée par la formule de Woods[48], laquelle est fréquemment utilisée pour sa précision:

$$\Omega_w = \frac{1}{2} \Omega_{w+1} - \frac{3(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta r} \quad (2.51)$$

où : l'indice w désigne la paroi. et Δr l'espacement normal à la paroi.

2.9. Transfert thermique

Le taux de transfert thermique transport  par convection est caractérisé par le nombre de Nusselt qui représente le rapport entre la chaleur transférée par convection et la chaleur transférée par conduction. Si le nombre de Nusselt est très voisin de l'unité, le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction. Plus ce nombre augmente, plus les phénomènes convectifs sont dominants.

Ainsi, pour étudier le transfert thermique au sein de la cavité, on introduit le nombre de Nusselt local, Nu , donné à une position x par:

$$Nu(x) = -\frac{\lambda \frac{\partial T'}{\partial y'}}{\lambda \frac{\Delta T}{H'}} \quad (2.52)$$

et sous la forme adimensionnelle il peut s'écrire comme:

$$Nu(x) = \frac{1}{T\left(x, -\frac{1}{2}\right) - T\left(x, \frac{1}{2}\right)} \quad (2.53)$$

dans le cas où les parois actives sont soumises à des flux de chaleur constant.

Par ailleurs, lorsque les parois horizontales sont maintenues à des températures constantes, le nombre de Nusselt est donné par :

$$Nu(x) = -\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\text{parois}} \quad (2.54)$$

La valeur moyenne du nombre de Nusselt, Nu_m , le long des parois horizontales de la cavité est exprimé par :

$$Nu_m = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} Nu(x) dx \quad (2.55)$$

CHAPITRE 3

3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE ET VALIDATION

Les équations de conservation de mouvement et d'énergie munies des conditions aux limites appropriées sont discrétisées par la méthode des différences finies. Malgré, qu'elle est la plus ancienne des méthodes numériques, elle reste la plus adaptée pour des configurations géométriques simples comme la nôtre. Dans le cas de la convection naturelle des fluides confinés, plusieurs auteurs ont utilisé avec succès cette méthode pour résoudre des équations gouvernantes [21-31-37-49-50]. Le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme suivant les deux directions de l'espace (voir figure 3.1). Ainsi, chaque point est appelé nœud et peut être identifié par un couple d'indice (i, j) . Les inconnues du problème, à savoir, la température, la fonction de courant, la vorticité et la viscosité apparente sont calculées sur chaque nœud en résolvant les équations gouvernantes. Quant à la vitesse, elle est déduite de la fonction de courant.

L'équation de mouvement et l'équation d'énergie sont discrétisées par un schéma centré du deuxième ordre en utilisant la forme conservatrice des termes convectifs. Une fois que ces équations sont discrétisées, elles sont résolues numériquement. Les équations de conservation de mouvement et d'énergie sont résolues par le biais de la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) modifiée par Peaceman et al. [51]. Cette méthode très puissante est largement utilisée avec succès pour les problèmes de convection naturelle en régime transitoire. Quant à l'équation de la fonction de courant, qui ne contient pas de termes transitoires, celle-ci est résolue par la méthode de sur-relaxation (S.O.R) [52].

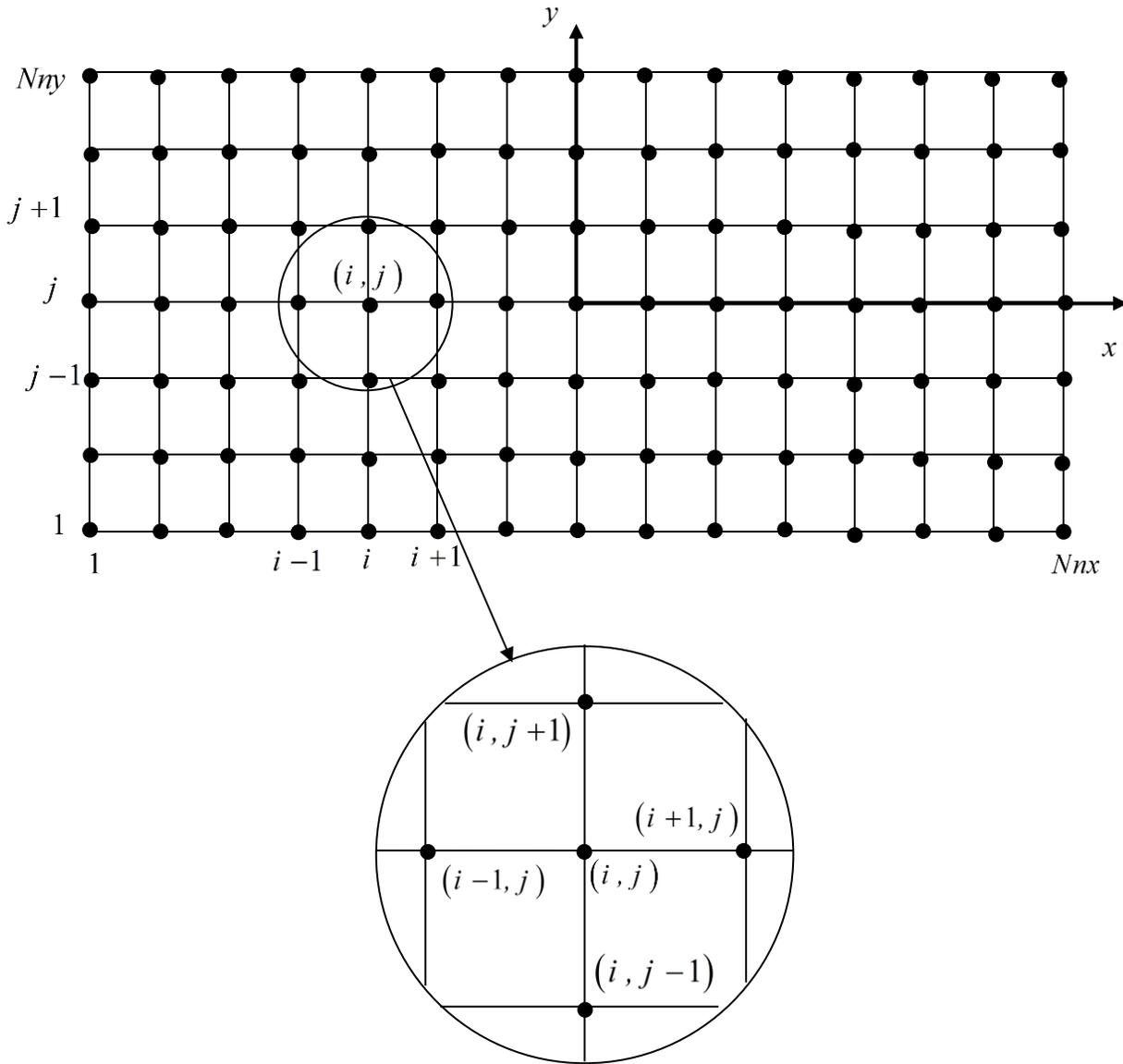


Figure 3.1: Présentation du maillage du domaine de calcul.

3.1. Discrétisation des équations de conservation

À l'intérieur du domaine, les dérivées partielles spatiales, apparaissant dans les équations de conservation (2.42) et (2.43) sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies. Ce choix est lié à la nature du problème considéré où les informations sont connues à l'amont et à l'aval (cavité fermée).

3.1.1. Les termes diffusifs et non diffusifs

À l'intérieur du domaine, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma centré aux différences finies :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2(\Delta x)} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2(\Delta y)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \quad (3.3)$$

où : f représente soit la température T , soit la fonction de courant ψ , soit la vortacité Ω ou soit la viscosité apparente η ;

(Δx) et (Δy) : représentent respectivement l'espace entre deux nœuds voisins.

3.1.2. Les termes convectifs

Les termes convectifs des équations de vortacité et de l'énergie sont approximés de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial u f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} f_{i+1,j} - u_{i-1,j} f_{i-1,j}}{2(\Delta x)} \quad (3.4)$$

3.1.3. Les termes temporels

L'avancement dans le temps de la fonction f entre les instants $t_m = m\Delta t$ et $t_{m+\Delta t} = t_m + \Delta t$ est approché par :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j}^{m+1} = \frac{f_{i,j}^{m+1} - f_{i,j}^m}{\Delta t} \quad (3.5)$$

Les équations de conservation de mouvement (2.42) et d'énergie (2.43) sont résolues numériquement par la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I). Son principe consiste, comme son nom l'indique, à écrire au cours d'un premier demi pas de temps les équations de conservation dont les inconnues sont respectivement Ω et T de manière implicite dans la direction des x , puis implicite dans la direction des y au cours du second demi pas de temps, en utilisant à chacune de ces étapes les derniers résultats obtenus.

3.1.4. Discrétisation de l'équation de mouvement :

La discrétisation de l'équation de mouvement (2.42) suivant un schéma implicite en x et explicite en y est écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{u_{i-1,j}^m}{2(\Delta x)} - \frac{Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta x)^2} + \frac{Pr(\eta_{i+1,j}^m - \eta_{i-1,j}^m)}{2(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i-1,j}^{m+1/2} + \left(-\frac{2}{\Delta t} + \frac{2Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i,j}^{m+1/2} + \\
& \left(\frac{u_{i+1,j}^m}{2(\Delta x)} - \frac{Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta x)^2} - \frac{Pr(\eta_{i+1,j}^m - \eta_{i-1,j}^m)}{2(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i+1,j}^{m+1/2} = \\
& \left(\frac{v_{i,j-1}^m}{2(\Delta y)} + \frac{Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta y)^2} - \frac{Pr(\eta_{i,j+1}^m - \eta_{i,j-1}^m)}{2(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j-1}^m + \\
& \left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{2Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j}^m + \left(\frac{-v_{i,j+1}^m}{2(\Delta y)} + \frac{Pr \eta_{i,j}^m}{(\Delta y)^2} + \frac{Pr(\eta_{i,j+1}^m - \eta_{i,j-1}^m)}{2(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j+1}^m + \\
& Pr \left(\frac{\eta_{i+1,j}^m - 2\eta_{i,j}^m + \eta_{i-1,j}^m}{(\Delta x)^2} - \frac{\eta_{i,j+1}^m - 2\eta_{i,j}^m + \eta_{i,j-1}^m}{(\Delta y)^2} \right) \left(\frac{u_{i,j+1}^m - u_{i,j-1}^m}{2(\Delta y)} + \frac{v_{i+1,j}^m - v_{i-1,j}^m}{2(\Delta x)} \right) - \\
& 2Pr \left(\frac{\eta_{i+1,j+1}^m - \eta_{i+1,j-1}^m - \eta_{i-1,j+1}^m + \eta_{i-1,j-1}^m}{4(\Delta x)(\Delta y)} \right) \left(\frac{u_{i+1,j}^m - u_{i-1,j}^m}{2(\Delta x)} - \frac{v_{i,j+1}^m - v_{i,j-1}^m}{2(\Delta y)} \right) + \\
& Ra_\tau Pr \left(\frac{T_{i+1,j}^m - T_{i-1,j}^m}{2(\Delta x)} \right) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

L'équation (3.6) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_i \Omega_{i-1,j}^{m+1/2} + B_i \Omega_{i,j}^{m+1/2} + C_i \Omega_{i+1,j}^{m+1/2} = D_i \tag{3.7}$$

Ainsi, La discrétisation de l'équation mouvement (2.42) suivant un schéma implicite en y et explicite en x est écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{v_{i,j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} + \frac{Pr(\eta_{i,j+1}^{m+1/2} - \eta_{i,j+1}^{m+1/2})}{2(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j-1}^{m+1} + \left(\frac{2}{\Delta t} + \frac{2Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j}^{m+1} + \\
& \left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} - \frac{Pr(\eta_{i,j+1}^{m+1/2} - \eta_{i,j-1}^{m+1/2})}{2(\Delta y)^2} \right) \Omega_{i,j+1}^{m+1} = \\
& \left(\frac{u_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} - \frac{Pr(\eta_{i+1,j}^{m+1/2} - \eta_{i-1,j}^{m+1/2})}{2(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i-1,j}^{m+1/2} + \\
& \left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i,j}^{m+1/2} + \left(\frac{-u_{i+1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{Pr \eta_{i,j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{Pr(\eta_{i+1,j}^{m+1/2} - \eta_{i-1,j}^{m+1/2})}{2(\Delta x)^2} \right) \Omega_{i+1,j}^{m+1/2} + \\
& Pr \left(\frac{\eta_{i+1,j}^{m+1/2} - 2\eta_{i,j}^{m+1/2} + \eta_{i-1,j}^{m+1/2}}{(\Delta x)^2} - \frac{\eta_{i,j+1}^{m+1/2} - 2\eta_{i,j}^{m+1/2} + \eta_{i,j-1}^{m+1/2}}{(\Delta y)^2} \right) \left(\frac{u_{i,j+1}^{m+1/2} - u_{i,j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} + \frac{v_{i+1,j}^{m+1/2} - v_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} \right) - \\
& 2Pr \left(\frac{\eta_{i+1,j+1}^{m+1/2} - \eta_{i+1,j-1}^{m+1/2} - \eta_{i-1,j+1}^{m+1/2} + \eta_{i-1,j-1}^{m+1/2}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \right) \left(\frac{u_{i+1,j}^{m+1/2} - u_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} - \frac{v_{i,j+1}^{m+1/2} - v_{i,j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} \right) + \\
& Ra_T Pr \left(\frac{T_{i+1,j}^{m+1/2} - T_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} \right) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

L'équation (3.8) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_j \Omega_{i,j-1}^{m+1} + B_j \Omega_{i,j}^{m+1} + C_j \Omega_{i,j+1}^{m+1} = D_j \tag{3.9}$$

3.1.5. Discrétisation de l'équation d'énergie :

La discrétisation de l'équation d'énergie (2.43) suivant un schéma implicite en x et explicite en y est écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{u_{i-1,j}^m}{2(\Delta x)} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) T_{i-1,j}^{m+1/2} + \left(-\frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(\Delta x)^2} \right) T_{i,j}^{m+1/2} + \\
& \left(\frac{u_{i+1,j}^m}{2(\Delta x)} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) T_{i+1,j}^{m+1/2} = \left(\frac{v_{i,j-1}^m}{2(\Delta y)} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j-1}^m + \\
& \left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j}^m + \left(\frac{-v_{i,j+1}^m}{2(\Delta y)} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j+1}^m \tag{3.10}
\end{aligned}$$

L'équation (3.10) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_i T_{i-1,j}^{m+1/2} + B_i T_{i,j}^{m+1/2} + C_i T_{i+1,j}^{m+1/2} = D_i \quad (3.11)$$

La discrétisation de l'équation d'énergie (2.43) suivant un schéma implicite en y et explicite en x est écrite comme suit :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{v_{i,j-1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j-1}^{m+1} + \left(\frac{2}{\Delta t} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j}^{m+1} + \\ & \left(\frac{v_{i,j+1}^{m+1/2}}{2(\Delta y)} - \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j+1}^{m+1} = \left(\frac{u_{i-1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) T_{i-1,j}^{m+1/2} + \\ & \left(\frac{2}{\Delta t} - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right) T_{i,j}^{m+1/2} + \left(\frac{-u_{i+1,j}^{m+1/2}}{2(\Delta x)} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) T_{i+1,j}^{m+1/2} + \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) peut s'écrire sous la forme généralisée comme suit :

$$A_j T_{i,j-1}^{m+1} + B_j T_{i,j}^{m+1} + C_j T_{i,j+1}^{m+1} = D_j \quad (3.13)$$

3.2. Résolution de l'équation de la fonction de courant

L'équation de courant (2.44), une fois discrétisée à l'aide d'un schéma centré du deuxième ordre, est calculée par la méthode de sur-relaxation (S.O.R) qui n'est qu'une méthode itérative de Gauss Seidel relaxée. À chaque nœud, les nouvelles valeurs de la fonction de courant sont relaxées de la manière suivante :

$$\psi_{i,j}^l = (1-\omega)\psi_{i,j}^l + \frac{\omega}{2(1+b^2)} \left(\psi_{i-1,j}^{l+1} + \psi_{i+1,j}^l + b^2\psi_{i,j-1}^{l+1} + b^2\psi_{i,j+1}^{l+1} + \Delta x^2 \Omega_{i,j} \right) \quad (3.14)$$

où : l'exposant l indique le nombre d'itération ;

b : représente le rapport : $\Delta x / \Delta y$;

et ω : représente le coefficient de sur-relaxation compris entre 1 et 2 ; son rôle est d'accélérer le processus de convergence et donc diminuer le nombre d'itérations. Sa valeur optimale, pour un maillage rectangulaire uniforme, est donnée par les paramètres suivants :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\zeta^2} \left(1 - \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \quad (3.15)$$

avec:

$$\zeta = \frac{\cos(\pi/Nx) + b^2 \cos(\pi/Ny)}{1 + b^2} \quad (3.16)$$

Nx, Ny désignent respectivement le nombre d'intervalles selon les directions des x et y .

À chaque pas de temps Δt , la fonction de courant ψ est déduite de la vorticité Ω , et comparée à celle obtenue de l'itération précédente. Cette opération est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence ci-dessous soit satisfait :

$$\frac{\sum_{i,j} \psi_{i,j}^{l+1} - \sum_{i,j} \psi_{i,j}^l}{\sum_{i,j} \psi_{i,j}^l} \leq 10^{-8} \quad (3.17)$$

Après, les champs de vitesse et de viscosité apparente seront déduits :

$$u_{i,j}^{l+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{l+1} - \psi_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y} \quad (3.18)$$

$$v_{i,j}^{l+1} = \frac{\psi_{i-1,j}^{l+1} - \psi_{i+1,j}^{l+1}}{2\Delta x} \quad (3.19)$$

$$\eta_{i,j}^{l+1} = s + (1-s) \left[1 + \left(E \dot{\gamma}_{i,j}^{l+1} \right)^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.20)$$

avec:

$$\dot{\gamma}_{i,j}^{l+1} = 2 \left(\left(\frac{u_{i+1,j}^{l+1} - u_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1}^{l+1} - v_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_{i,j+1}^{l+1} - u_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j}^{l+1} - v_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta x} \right)^2 \quad (3.21)$$

3.3. Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites de type Neumann sont discrétisées suivant un schéma décentré en amont ou en aval selon les conditions frontières considérées.

Amont :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i-2,j} + f_{i-1,j} + 3f_{i,j}}{2(\Delta x)} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j-2} + f_{i,j-1} + 3f_{i,j}}{2(\Delta y)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aval:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{4f_{i+1,j} - f_{i+2,j} - 3f_{i,j}}{2(\Delta x)} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{4f_{i,j+1} - f_{i,j+2} - 3f_{i,j}}{2(\Delta y)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'utilisation des équations (3.22) et (3.23) conduit à discrétiser les conditions aux limites comme suit :

a) Paroi horizontale inferieure : $(y = -\frac{1}{2})$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas sans glissement :

$$u_{i,1} = v_{i,1} = \psi_{i,1} = 0, \quad \Omega_{i,1} = \frac{1}{2}\Omega_{i,2} - \frac{3}{(\Delta y)^2}\psi_{i,2} \quad (3.24)$$

- Conditions thermiques du type Neumann :

$$T_{i,1} = \frac{4T_{i,2} - T_{i,3} + 2\Delta y}{3} \quad (3.25)$$

- Conditions thermiques du type Dirichlet :

$$T_{i,1} = \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

b) Paroi horizontale superieure : $(y = \frac{1}{2})$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas sans glissement :

$$u_{i,Nny} = v_{i,Nny} = \psi_{i,Nny} = 0, \quad \Omega_{i,Nny} = \frac{1}{2}\Omega_{i,Nny-1} - \frac{3}{(\Delta y)^2}\psi_{i,Nny-1} \quad (3.27)$$

- Conditions thermiques du type Neumann :

$$T_{i,Nny} = \frac{4T_{i,Nny-1} - T_{i,Nny-2} - 2\Delta y}{3} \quad (3.28)$$

- Conditions thermiques du type Dirichlet :

$$T_{i,Nny} = -\frac{1}{2} \quad (3.29)$$

c) Paroi verticale gauche : $(x = -\frac{A}{2})$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas sans glissement :

$$u_{1,j} = v_{1,j} = \psi_{1,j} = 0, \quad \Omega_{1,j} = \frac{1}{2}\Omega_{2,j} - \frac{3}{(\Delta x)^2}\psi_{2,j} \quad (3.30)$$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas avec glissement :

$$u_{1,j} = 0, \quad v_{1,j} = \frac{\psi_{3,j} - 4\psi_{2,j}}{2(\Delta x)}, \quad \psi_{1,j} = 0, \quad \Omega_{1,j} = 0 \quad (3.31)$$

- Condition thermique où les parois sont adiabatiques :

$$T_{1,j} = \frac{4T_{2,j} - T_{3,j}}{3} \quad (3.32)$$

d) Paroi verticale droite : $(x = \frac{A}{2})$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas sans glissement :

$$u_{Nnx,j} = v_{Nnx,j} = \psi_{Nnx,j} = 0, \quad \Omega_{Nnx,j} = \frac{1}{2}\Omega_{Nnx-1,j} - \frac{3}{(\Delta x)^2}\psi_{Nnx-1,j} \quad (3.33)$$

- Conditions hydrodynamiques dans le cas avec glissement :

$$u_{Nnx,j} = \psi_{Nnx,j} = 0, \quad v_{Nnx,j} = \frac{4\psi_{Nnx-1,j} - 3\psi_{Nnx-2,j}}{2(\Delta x)}, \quad \Omega_{1,j} = 0 \quad (3.34)$$

- Condition thermique où les parois sont adiabatiques :

$$T_{Nnx,j} = \frac{4T_{Nnx-1,j} - T_{Nnx-2,j}}{3} \quad (3.35)$$

3.4. Algorithme de résolution

L'algorithme de calcul à chaque étape de temps se résume comme suit :

1. Introduction des paramètres de contrôle.
2. Génération de maillage.
3. Calcul du facteur de sur-relaxation.
4. Introduction des conditions initiales et aux limites des champs des températures, de la fonction de courant, des vitesses et de la viscosité apparente.
5. Début de la boucle de temps.
6. Résoudre l'équation de la fonction de courant par la méthode S.O.R et calcul la fonction de courant.
7. Déduire le champ de la viscosité apparente.
8. Résoudre l'équation d'énergie de de vorticité par la méthode A.D.I.
9. Calcul du nombre de Nusselt local et moyen par la méthode de Boole.
10. Déduire le champ des vitesses.
11. Passer à l'étape du temps suivant $t = t + \Delta t$ et retourner à l'étape 6.

Répéter les calculs jusqu'à l'obtention d'une solution permanente ou oscillante établie.

12. Traitement et affichage des résultats.

3.5. Validation du code numérique

Le code numérique élaboré pour résoudre les équations de conservation a été validé dans le cas Newtonien en comparant les résultats de la présente étude à ceux

reporté par Turan et al. [34], Ouertatani et al. [53] et Venturi et al. [54], pour le cas d'une cavité carrée à parois rigides, et par les travaux de Clever et Busse [55] pour le cas où les parois verticales sont libres.

Tableau 3.1 : Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité carrée rempli d'air.

$A=1, Pr=0.71$				
Ra_T	Présente étude	Turan et al.[34]	Ouertatani et al.[53]	Venturi et al.[54]
10^4	2.163	2.154	2.158	-
10^5	3.934	3.907	3.910	-
10^6	6.379	6.363	6.309	-
1.5×10^4	2.420	-	-	2.40

Tableau 3.2 : Validation du code numérique en termes de nombre de Nusselt moyen, Nu_m dans le cas d'une cavité rectangulaire

$A=2.016, Pr=7$		
Ra_T	Présente étude	Clever et Busse [55]
5×10^3	2.104	1.214
10^4	2.105	2.112
10^4	2.612	2.618

Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent qu'avec un maillage de 101×101 pour $A = 1$ et 201×101 pour $A = 2.016$, une bonne concordance des résultats est observée pour les valeurs de Nusselt moyen, Nu_m , avec une erreur relative inférieure à 1%. Par ailleurs, la solution de l'approximation de l'écoulement parallèle a aussi été utilisée pour valider le code numérique.

3.6. Effet de la sensibilité du maillage

Il est évident que la précision des résultats numériques est liée à la taille du maillage. Le choix de ce dernier dépend des valeurs des paramètres de contrôles. Pour optimiser le temps de calcul et préserver la précision de la solution numérique, des essais préliminaires ont été conduits avec un rapport de forme $A = 10$ (les raisons de ce choix seront précisées par la suite) et différentes valeurs de Ra_T . La procédure suivie consiste à raffiner le maillage jusqu'à recouvrir raisonnablement les résultats analytiques. Le tableau 3.3 présente la sensibilité de la solution numérique au maillage en termes de nombre de Nusselt, Nu , et de l'intensité de l'écoulement, ψ_0 , au centre de la cavité pour le cas d'un fluide Newtonien.

Le tableau 3.3 compare les valeurs numériques et analytiques des grandeurs thermoconvectives. D'après ce tableau, il est justifié et suffisant de prendre un maillage uniforme de 201×81 pour modéliser convenablement l'écoulement et le transfert de chaleur au sein de la cavité considérée.

Par ailleurs, dans le cas d'une cavité carrée, $A = 1$, et en se basant sur des essais numériques, un maillage uniforme de l'ordre de 101×101 est retenu.

Le pas de temps considéré dépend aussi des valeurs des paramètres de contrôle et il est compris entre $: 10^{-6} \leq \Delta t \leq 10^{-4}$. Ainsi, pour tous les cas considérés dans cette étude, le nombre de Prandtl Pr est égal à 10 et les paramètres rhéologiques a et s sont pris respectivement égal à 2 et 0.01.

Tableau 3.3 : Sensibilité de la solution numérique au maillage en termes de nombre de Nusselt, Nu , et de l'intensité de l'écoulement, ψ_0 , au centre de la cavité pour les valeurs de $A = 10$, $Pr = 10$, $Ra_T = 4000$ et $n = 1$.

		Solution numérique			Solution analytique	
		$Nnx \times Nny$	201 x 61	201 x 81	201 x 101	
$Ra_T = 2000$	Nu		1.820	1.816	1.814	1.811
	ψ_0		2.096	2.904	2.093	2.091
$Ra_T = 5000$	Nu		2.513	2.505	2.500	2.495
	ψ_0		3.830	3.827	3.826	3.824

3.7. Approximation de l'écoulement parallèle

L'approximation de l'écoulement parallèle a été largement utilisée dans le passé avec succès dans de nombreuses études. Par exemple, Cormack et al. [56] ont utilisé une méthode d'expansion asymptotique pour déterminer analytiquement le transfert de chaleur au sein d'une couche fluide chauffée à température constante sur les côtés, les parois horizontales étant thermiquement isolées. Cette technique a également été employée par Sen et al.[57], Alavyoon [58], Bennacer et al.[59], Bian et al. [60] et Mamou et al. [61]. Cette approximation suppose que lorsqu'une cavité présente un large rapport de forme ($A \gg 1$) et quand les parois actives sont soumises à des flux de chaleur constants, l'écoulement engendré devient parallèle le long de ces parois. Ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire à ces parois. Ainsi, pour le cas d'écoulement permanent, une solution asymptotique peut être obtenue, vers laquelle va converger la solution transitoire. Cette solution permet de grandes simplifications dans les équations gouvernantes et une

compréhension rapide sur le comportement du fluide induit par le phénomène de la convection naturelle.

3.7.1. Équations gouvernantes simplifiées

Ainsi, lorsque la cavité présente un très grand rapport de forme, les lignes de courants dans la région centrale de la cavité deviennent parallèles à l'axe des x . Il en ressort que :

$$u(x, y) \approx u(y) \quad (3.36)$$

$$v(x, y) = 0 \quad (3.37)$$

Ainsi, on obtient une fonction de courant qui dépend seulement de l'ordonnée y :

$$\psi(x, y) = \psi(y) \quad (3.38)$$

Cependant, le profil de température peut être approximé et peut s'écrire de la manière suivante:

$$T(x, y) = C_T x + \theta(y) \quad (3.39)$$

où :

C_T est le gradient de température dans la direction horizontale.

Les équations (3.38) et (3.39) sont valables uniquement au centre de la cavité.

Afin de confirmer l'exactitude de cette approximation, des résultats numériques sont présentés sur la figure 3.2 avec $Ra_T = 2000$, $E = 0.2$, $s = 0.01$ et $n = 0.4$ pour les valeurs $A = 10$ et $A = 1$. En examinant ces résultats numériques, on peut constater l'effet du rapport de forme sur la structure de l'écoulement et le profil de température.

La figure 3.2(a) confirme bien cet état de fait, on constate que pour les grands rapports de forme, l'écoulement est bien parallèle au centre de la cavité et que le profil de température présente une stratification linéaire dans la direction horizontale. Par contre, lorsque le rapport de forme $A=1$ (figure 3.2(b)), la structure de l'écoulement est bidimensionnelle.

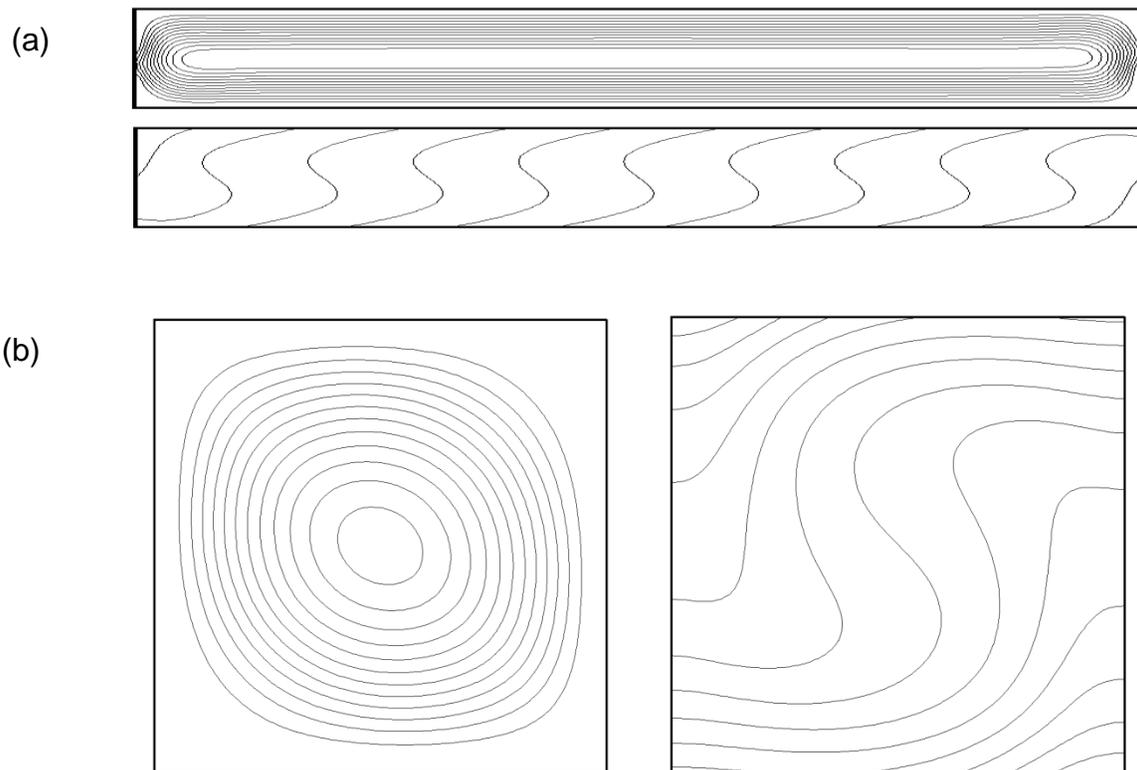


Figure 3.2 : Lignes de courant et isothermes pour $Ra_T = 2000$, $E = 0.2$, $s = 0.01$, $n = 0.4$
 (a) $A=10$, (b) $A=1$.

En introduisant les approximations (3.38) et (3.39) dans l'équation de mouvement (2.42), on obtient:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[\eta \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} \right) \right] = C_T Ra_T \quad (3.40)$$

l'équation de la viscosité apparente (2.33) se réduit a :

$$\eta(y) = s + (1-s) \left[1 + (E \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (3.41)$$

avec :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} \right)^2} = \left| \frac{d^2 \psi}{dy^2} \right| \quad (3.42)$$

et l'équation d'énergie (2.43) devient:

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} = C_T \frac{d\psi}{dy} \quad (3.43)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$u = \psi = \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\theta}{dy} + 1 = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

3.7.2. Détermination du gradient de température horizontale C_T

En faisant un bilan énergétique dans un volume de contrôle (\mathcal{G}) représenté sur figure 3.3 et en tenant compte des conditions aux limites (2.45), (2.46), (2.48) et (2.50), le bilan du transfert de chaleur sur une section verticale de la cavité s'écrit comme suit :

$$\iiint_{\mathcal{G}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) d\mathcal{G} = \iiint_{\mathcal{G}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} T) d\mathcal{G} \quad (3.45)$$

En utilisant le théorème de Gauss, l'intégrale de volume (3.45) peut être transformée en une intégrale équivalente sur la surface ($d\vec{S}$) de la cavité :

$$\iint_A \vec{\nabla} T \, d\vec{S} = \iint_A \vec{V} T \, d\vec{S} \quad (3.46)$$

L'intégrale (3.46) appliquée sur chacune des faces du volume de contrôle (\mathcal{G}), en tenant compte des conditions aux limites mentionnées précédemment (3.44), nous donne l'équation suivante :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dT}{dx} dy = \int_{-1/2}^{1/2} T \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (3.47)$$

Cette relation est similaire à la relation du bilan d'énergie donnée par Trévisan et al.[62] pour la détermination du gradient thermique.

En remplaçant $\left(C_T = \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ dans l'expression (3.47) on obtient:

$$C_T = \int_{-1/2}^{1/2} T \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (3.48)$$

Ainsi, l'intégration de l'équation (3.43) suivie d'une manipulation algébrique de l'équation (3.48) permet d'obtenir une expression de C_T sous la forme :

$$C_T = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} \psi(y) dy}{1 + \int_{-1/2}^{1/2} \psi^2(y) dy} \quad (3.49)$$

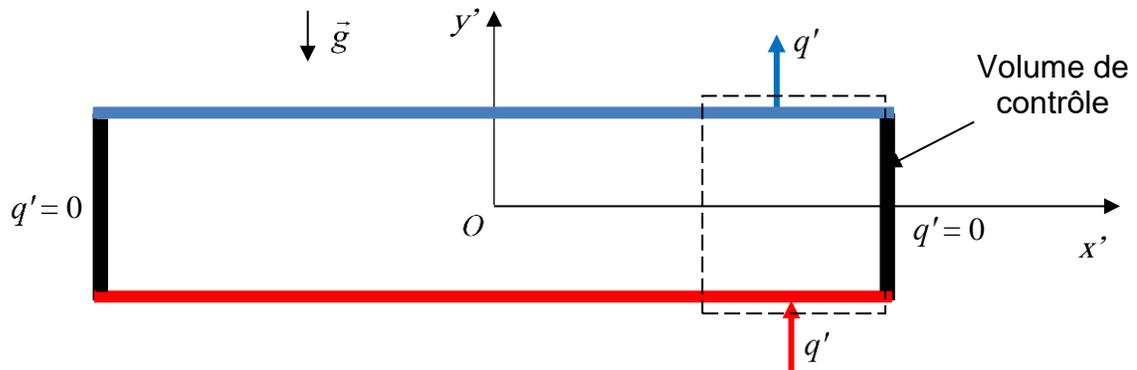


Figure 3.3 : Représentation de la cavité munie du volume de contrôle.

3.8. Résolution numérique de l'approximation de l'écoulement parallèle

Les équations (3.40), (3.41) et (3.49) sont résolues simultanément et numériquement par la méthode des différences finies avec un schéma centré du deuxième ordre. Dans ce cas, le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage uniforme suivant la direction de y (voir figure 3.4). Chaque point (j) est appelé nœud. Les inconnues du problème, à savoir, la température, la fonction de courant et la viscosité apparente sont calculées sur chaque nœud en résolvant les équations gouvernantes. La vitesse et nombre de Nusselt sont déduits respectivement de la fonction de courant et de la température.

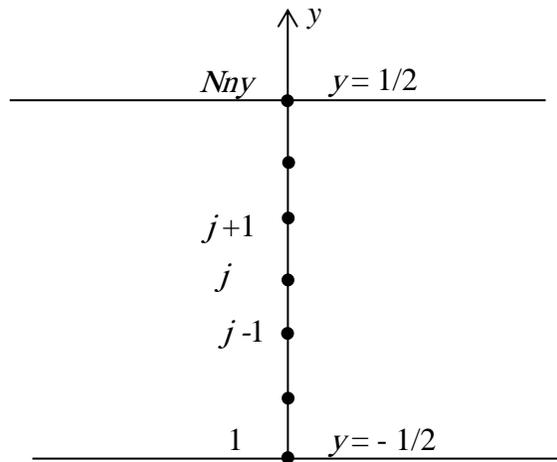


Figure 3. 4 : Schéma de discrétisation selon la direction y

3.8.1. Discrétisation de l'équation de mouvement :

La dérivée de l'équation (3.40) donne :

$$\frac{d^4 \psi}{dy^4} + 2 \frac{d\eta}{dy} \frac{d^3 \psi}{dy^3} + \frac{d^2 \eta}{dy^2} \frac{d^2 \psi}{dy^2} = C_T Ra_T \quad (3.50)$$

La discrétisation de l'équation (3.50) donne lieu au système matriciel penta-diagonal suivant :

$$A_j \psi_{j-2} + B_j \psi_{j-1} + C_j \psi_j + D_j \psi_{j+1} + E_j \psi_{j+2} = F_j \quad (3.51)$$

Tels que :

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{\eta_j}{\Delta y^4} + \frac{\eta_{j-1} - \eta_{j+1}}{2\Delta y^4} \\
B_j &= \frac{2\eta_{j+1} - 6\eta_j}{\Delta y^4} \\
C_j &= \frac{-2\eta_{j-1} + 10\eta_j - 2\eta_{j+1}}{\Delta y^4} \\
D_j &= \frac{2\eta_{j-1} - 6\eta_j}{\Delta y^4} \\
E_j &= \frac{\eta_j}{\Delta y^4} + \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta y^4} \\
F_j &= C_T R a_T
\end{aligned} \tag{3.52}$$

où :

$$\eta_j = s + (1-s) \left[1 + E^a \left| \frac{\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}}{\Delta y^2} \right|^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \tag{3.53}$$

Les conditions aux limites correspondant sont données par :

$$\psi_1 = \psi_{Nny} = 0 \tag{3.54}$$

Ainsi, le système matriciel (3.51) associé des conditions aux limites (3.54) est résolu par l'algorithme de PDMA (Pentadiagonal Matrix Algorithm).

Comme les équations (3.51) et (3.53) sont non-linéaires et fortement couplées, la solution numérique de la fonction de courant est obtenue par une méthode itérative avec des paramètres de contrôles donnés.

Pour chaque itération, une relaxation est appliquée à la fonction de courant ψ afin d'accélérer le processus de convergence. Cette opération est répétée jusqu'à ce que le critère de convergence ci-dessous soit satisfait :

$$\frac{\sum_{i,j} \psi_{i,j}^{l+1} - \sum_{i,j} \psi_{i,j}^l}{\sum_{i,j} \psi_{i,j}^l} \leq 10^{-12} \quad (3.55)$$

Après avoir déterminé le profil de la fonction de courant ψ , l'intégration du coefficient C_T (3.49) est faite par la méthode de Boule munie d'un schéma de précision de l'ordre quatre.

3.8.2. Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie (3.43) est aussi résolue numériquement par la méthode des différences finies avec un schéma de deuxième ordre.

La discrétisation de cette équation d'énergie donne lieu à un système matriciel tri-diagonal :

$$a_j \theta_{j-1} + b_j \theta_j + c_j \theta_{j+1} = d_j \quad (3.56)$$

où :

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\Delta y^2} \\ b_j &= \frac{-2}{\Delta y^2} \\ c_j &= \frac{1}{\Delta y^2} \\ d_j &= C_T \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les conditions aux limites thermiques appropriées sont exprimées par:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{4\theta_2 - \theta_3 + 2\Delta y}{3} \\ \theta_{Nny} &= \frac{4\theta_{Nny-1} - \theta_{Nny-2} - 2\Delta y}{3}\end{aligned}\quad (3.58)$$

Cependant, le système matriciel (3.56) muni des conditions aux limites (3.58) est résolu numériquement par l'algorithme de Thomas (TDMA).

Une fois le profil de température est déterminé, le nombre de Nusselt local est déterminé comme suit :

$$Nu = \frac{1}{\theta_1 - \theta_{Nny}} \quad (3.59)$$

3.9. Résolution analytique de l'approximation de l'écoulement parallèle (cas Newtonien)

La solution analytique, du cas Newtonien, est présentée ici pour des fins de comparaison avec la solution numérique. Cependant, dans le cas Newtonien, la viscosité apparente étant $\eta = 1$, il en ressort que l'équation (3.40) devient :

$$\frac{d^4\psi}{dy^4} = C_T Ra_T \quad (3.60)$$

L'intégration de l'équation (3.60) associée des conditions aux limites (3.44) donne une solution polynomiale de la forme :

$$\psi(y) = \frac{C_T Ra_T}{24} \left(y^2 - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (3.61)$$

avec :

$$\psi_0 = \frac{C_T Ra_T}{384} \quad (3.62)$$

qui représente l'expression de la fonction de courant au centre de la cavité ($x=0, y=0$).

Une fois $\psi(y)$ est déterminée, $\theta(y)$, en fonction de C_T , est par la suite déterminée en utilisant l'équation (3.43). Le champ de température $T(x, y)$ est donné par l'expression :

$$T(x, y) = C_T x - y + \frac{C_T^2 Ra_T}{24} \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + \frac{y}{16} \right) \quad (3.63)$$

Cependant, le gradient de température horizontale C_T est déterminé en remplaçant $\psi(y)$ dans l'équation (3.49). L'intégration de cette équation donne :

$$C_T = \frac{\sqrt{504(Ra_T - 720)}}{Ra_T} \quad (3.64)$$

A partir de l'équation (3.64), on déduit pour la condition $C_T = 0$ que le début de la convection à partir de l'état de repos ($\psi = 0, T = -y$) se produit à un nombre de Rayleigh supercritique $Ra_T^{sup} = 720$. Ce résultat est en accord avec celui de Sparrow et al. [63], obtenu sur la base de la théorie de la stabilité linéaire.

Ainsi, le taux de transfert de chaleur exprimé par le nombre de Nusselt, Nu , à une position $x = 0$ en fonction du nombre de Rayleigh Ra_T est obtenu comme suit:

$$Nu = \frac{10Ra_T}{3Ra_T + 5040} \quad (3.65)$$

De cette expression, on constate que la valeur limite de nombre de Nusselt dans le cas Newtonien tend vers une valeur asymptotique qui est de 10/3.

3.10. Validation de l'approximation de l'écoulement parallèle

Plusieurs tests numériques ont été effectués pour déterminer la gamme du rapport de forme A de la cavité où l'écoulement peut être considéré comme parallèle au centre de la cavité. La figure 3.4 montre, respectivement, la variation de l'intensité de l'écoulement ψ_0 , les nombres de Nusselt local Nu et moyen Nu_m , en fonction du rapport de forme A , pour $Ra_T = 2000$, $Pr = 10$, $E = 0.2$, $s = 0.01$ et $n = 0.4$. L'intensité de l'écoulement est définie comme étant la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité ($x = y = 0$) et le nombre de Nusselt local est calculé au milieu des parois horizontales ($x = 0$).

L'augmentation du rapport de forme de 1 à 20, fait augmenter ψ_0 et Nu de manière monotone, ceux-ci convergent asymptotiquement vers des valeurs constantes, comme le prédit l'approximation de l'écoulement parallèle. La solution parallèle est indiquée sur la figure 3.4 en lignes pointillées. Pour $A = 1$, on constate que la solution numérique (cercle plein relié par une ligne) s'écarte considérablement de la solution parallèle et la structure de l'écoulement ne correspond plus aux prédictions de l'écoulement parallèle (voir fig. 3.2(b)). Cependant, en augmentant progressivement le rapport de forme, on constate que la solution numérique se rapproche de plus en plus de la solution parallèle et un bon accord est observé au-delà de $A = 6$. À l'exception du nombre de Nusselt moyen, Nu_m , qui tend vers la valeur du nombre de Nusselt locale, Nu , lorsque la valeur de A est suffisamment grande. Les lignes de courant et les isothermes présentées sur la figure 3.2(a) montrent clairement les caractéristiques de l'approximation de l'écoulement parallèle.

Suite à ces observations numériques, la plupart des résultats numériques reportés dans la présente étude sont obtenus avec un rapport de forme $A = 10$.

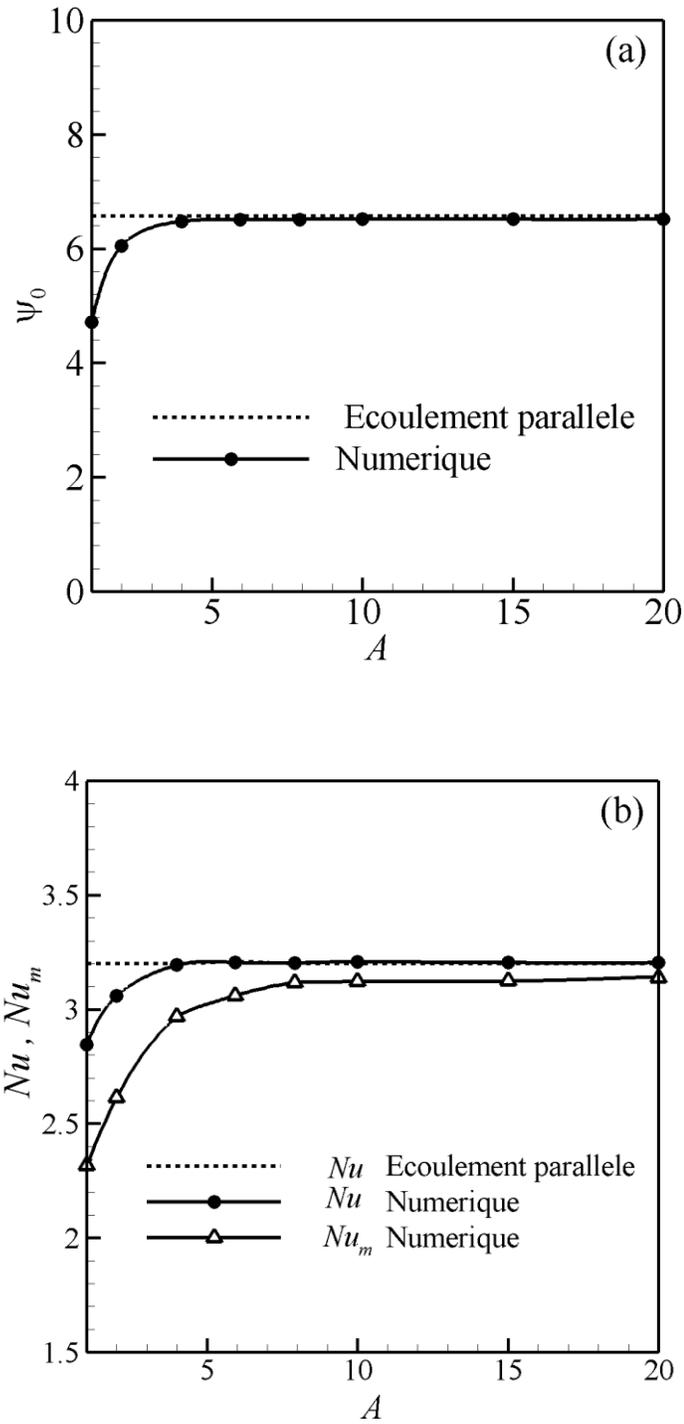


Figure 3. 5 : Effet du rapport de forme de la cavité pour $Ra_T = 2000$, $Pr = 10$, $E = 0.2$, $s = 0.01$ et $n = 0.4$ sur: (a) intensité de l'écoulement, (b) le nombre de Nusselt local, Nu , et le nombre de Nusselt moyen, Nu_m .

3.11. Le seuil supercritique

Ce paragraphe se propose de déterminer le seuil du déclenchement des mouvements convectifs d'un fluide non-Newtonien obéissant au modèle Carreau-Yasuda. Pour ce faire, une étude de la stabilité linéaire a été considérée en prenant comme solution de base l'état de repos ou stationnaire du fluide.

En utilisant les équations gouvernantes de conservation sous la formulation de la fonction de courant ψ , les équations (2.42) et (2.43) deviennent comme suit :

Équation de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = Pr \eta \nabla^4 \psi + 2 Pr \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \right) + \\ Pr \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + 4 Pr \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - Pr Ra_T \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} = \nabla^2 T \quad (3.67)$$

Les équations (3.66) et (3.67) sont complétées par des conditions aux limites hydrodynamiques (2.45), (2.46) et par des conditions aux limites thermiques (2.48)-(2.50).

On suppose que (ψ_b, T_b) est la solution de l'état stationnaire satisfaisant aux équations (3.66) et (3.67). Pour examiner la stabilité de la solution de base de l'état stationnaire, une perturbation infinitésimale $(\varepsilon \psi_p, \varepsilon T_p, \varepsilon \eta_p)$ est introduite de telle sorte que l'écoulement perturbé s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \psi_b(x, y) + \varepsilon \psi_p(x, y, t) \\ T(x, y, t) &= T_b(x, y) + \varepsilon T_p(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.68)$$

ε : est une très petite quantité sans dimension représentant l'amplitude de la perturbation, ψ_p et T_p sont les profils spatiaux et temporels de la perturbation.

De la même manière, la viscosité apparente perturbée η prend la forme :

$$\eta = \eta_b + \varepsilon \eta_p \quad (3.69)$$

où : η_p représente la perturbation de la viscosité apparente.

En utilisant un développement de Taylor du premier ordre autour de la solution de base, la viscosité apparente peut s'exprimer comme suit:

$$\eta(\psi_b + \varepsilon \psi_p) = \eta(\psi_b) + \varepsilon \dot{\gamma}_{ij}(\psi_p) \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\psi_b) + 0(\varepsilon^2) \quad (3.70)$$

où :

$$\eta_b = \eta(\psi_b) = s + (1-s) \left[1 + (E \dot{\gamma}_b)^a \right]^{\frac{n-1}{a}}$$

et
$$\eta_p = \dot{\gamma}_{ij}(\psi_p) \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\psi_b)$$

par ailleurs, en posant :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\psi_b) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right)_b \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{ij}(\psi_p) = (\dot{\gamma}_{ij})_p$$

η_p prend la forme :
$$\eta_p = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right)_b (\dot{\gamma}_{ij})_p$$

où:
$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \right)_b = \frac{(n-1)(E \dot{\gamma}_b)^a (\eta_b - s)}{\dot{\gamma}_b \left[1 + (E \dot{\gamma}_b)^a \right]}$$

$$\text{et } \eta_p = 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}_{xx}} \right)_b \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_p + 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}_{xy}} \right)_b \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_p - 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}_{yy}} \right)_b \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_p$$

Ainsi, après des manipulations algébriques, η_p peut s'exprimer par

$$\eta_p = \frac{2}{\dot{\gamma}_b} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \right)_b \left[2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_b \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)_p + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_b \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_p \right] \quad (3.71)$$

En substituant (3.68) dans les équations (3.66) et (3.67), puis après avoir négligé les termes de second ordre, on obtient:

Équation de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_p + \frac{\partial \psi_b}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_p}{\partial x} - \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi_b}{\partial y} &= Pr \left(\eta_b \nabla^4 \psi_p + \eta_p \nabla^4 \psi_b \right) \\ + 2 Pr \left(\frac{\partial \eta_p}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi_b}{\partial x} + \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_p}{\partial y} + \frac{\partial \eta_p}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_b}{\partial y} \right) & \\ + Pr \left(\frac{\partial^2 \eta_b}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \eta_p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial x^2} \right) \right) - Pr Ra_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p & \end{aligned} \quad (3.72)$$

Équation d'énergie :

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} + \frac{\partial \psi_b}{\partial y} \frac{\partial T_p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_p}{\partial y} \frac{\partial T_b}{\partial x} - \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \frac{\partial T_b}{\partial y} = \nabla^2 T_p \quad (3.73)$$

La solution des équations ci-dessus donne le profil des perturbations lorsque la solution de l'écoulement de base est superposée aux équations non-linéaires non-Newtoniennes.

Cependant, en régime de conduction pure (état stationnaire ou de repos), seule la diffusion est présente et l'écoulement de base est donné par:

$$\begin{aligned}\psi_b(x, y) &= 0 \\ T_b(x, y) &= -y \\ \eta_b &= 1\end{aligned}\tag{3.74}$$

Ainsi, en remplaçant le profil de l'état conductif (3.74) dans les équations de perturbation non-Newtonien on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_p &= Pr \nabla^4 \psi_p - Pr Ra_T \frac{\partial T_p}{\partial x} \\ \frac{\partial T_p}{\partial t} + \frac{\partial \psi_p}{\partial x} &= \nabla^2 T_p\end{aligned}\tag{3.75}$$

En écrivant les profils des perturbations (ψ_p, T_p) en termes de répartition spatiale et en taux d'accroissement temporel on a:

$$\begin{aligned}\psi_p &= F(x, y) e^{\sigma t} \\ T_p &= G(x, y) e^{\sigma t}\end{aligned}\tag{3.76}$$

En mettant la perturbation sous cette forme, on suppose qu'elle se développe dans le temps de manière exponentielle, avec une fréquence complexe $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ exprimant le taux d'amplification de la perturbation et sa fréquence circulaire. Lorsque le paramètre σ est nul, on parle de stabilité marginale ; lorsqu'il est non nul on parle de stabilité transitoire. F et G sont deux fonctions qui décrivent respectivement le profil de la fonction de courant et de la température au seuil de la convection. En substituant (3.76) dans (3.75), les équations de stabilité linéaires dans une cavité chauffée par le bas s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma \nabla^2 F &= Pr \nabla^4 F - Pr Ra_T \frac{\partial G}{\partial x} \\ \sigma G + \frac{\partial F}{\partial x} &= \nabla^2 G\end{aligned}\tag{3.77}$$

Le système d'équations gouvernant l'écoulement sus-cité (3.77) est complété par :

a) des conditions aux limites hydrodynamiques :

- Sur toutes les parois:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} = F = 0 \quad \text{pour } y = \pm 1/2 \quad \text{et } x = \pm \frac{A}{2} \quad (3.78)$$

b) des conditions aux limites thermiques :

- Sur les parois horizontales:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = \pm 1/2 \quad (\text{type Neumann}) \quad (3.79)$$

$$G = 0 \quad \text{pour } y = \pm 1/2 \quad (\text{type Dirichlet ou Rayleigh-Bénard}) \quad (3.80)$$

- Sur les parois verticales :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = \pm \frac{A}{2} \quad (3.81)$$

Cependant, dans le cas d'une couche de fluide infinie, en supposant que la périodicité est dans la direction horizontale, les profils de perturbation (ψ_p, T_p) peuvent être écrits en tant que:

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y, t) &= F(y) e^{\sigma t + ikx} \\ T_p(x, y, t) &= G(y) e^{\sigma t + ikx} \end{aligned} \quad (3.82)$$

où k représente le nombre d'onde de la perturbation.

Après avoir remplacé les expressions des perturbations (3.82) et ses dérivées respectives par leurs expressions dans le système d'équations (3.77), les équations de la stabilité linéaires, dans ce cas, se réduisent à :

$$\begin{aligned}\sigma(D^2 - k^2)F &= Pr(D^2 - k^2)^2 F - ik Pr Ra_T G \\ \sigma G + ikF &= (D^2 - k^2)G\end{aligned}\quad (3.83)$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 F + \mathcal{L}_2 G &= \sigma \mathcal{L}_3 F \\ \mathcal{M}_1 F + \mathcal{M}_2 G &= \sigma \mathcal{M}_3 G\end{aligned}\quad (3.84)$$

avec : $D \equiv d/dy$, $\mathcal{L}_1 = Pr(D^2 - k^2)^2$, $\mathcal{L}_2 = -ik Pr Ra_T$, $\mathcal{L}_3 = D^2 - k^2$

et : $\mathcal{M}_1 = -ik$, $\mathcal{M}_2 = (D^2 - k^2)$ et $\mathcal{M}_3 = I$

Le système d'équations ci-dessus peut être écrit sous la forme matricielle généralisée où σ représente la valeur propre à déterminer, l'équation généralisée est écrite sous la forme:

$$A_G X = \sigma B_G X \quad (3.85)$$

avec : $X = (F, G)^T$, $A_G = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \end{pmatrix}$ et $B_G = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_3 \end{pmatrix}$

Si Réel (σ) est négatif pour toutes les valeurs propres, alors l'écoulement de base est stable. Par contre, s'il existe une valeur propre ou Imaginaire (σ) est positif, l'écoulement de base est oscillant.

Par ailleurs, le seuil de convection supercritique est atteint lorsque $\sigma = 0$ (l'état marginal). Après des manipulations algébriques, le système d'équations (3.85) devient :

$$[E - \xi I] F = 0 \quad (3.86)$$

avec:

$$E = \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{M}_2^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{M}_1 ;$$

I : la matrice identité ;

F : le vecteur propre des inconnues.

La résolution de l'équation (3.86) représente un problème aux valeurs propres. Le système d'équations admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant de la matrice $[E - \xi I]$ est égale à zéro. Ceci nous ramène à calculer les valeurs propres ξ_i vérifiant l'équation (3.86). En général, les valeurs de ξ_i sont complexes, mais pour le présent cas, elles sont toutes réelles. Elles peuvent être classées par ordre croissant et l'inverse de la valeur maximale correspond au Rayleigh supercritique caractérisant le déclanchement de la convection ;

$$Ra_T^{sup} = \frac{1}{\xi_{max}} \quad (3.87)$$

Le système d'équations différentielles (3.84) munis des conditions aux limites (3.78) à (3.81) est discrétisé par la méthode des différences finies avec un schéma centré d'ordre 2. L'inverse des matrices ainsi que les valeurs propres ξ_i de l'équation (3.86) sont déterminés par la procédure ZGGEV de la librairie LAPACK.

Le code numérique a été testé pour le cas de Rayleigh-Bénard, en faisant varier le pas de discrétisation. Les valeurs critiques, Ra_T^{sup} et k_c calculées sont consignées dans tableau 3.4. La comparaison de nos résultats à ceux obtenus par Chandrasekhar [2] et Platten [4] ($Ra_T^{sup} = 1707.762$ et $k_c = 3.117$) permet de valider le code dès $Nny = 101$ (0.02 % erreur).

En vertu de cette étude, on remarque que les équations de stabilité linéaire dérivées des écoulements convectifs non-Newtoniens – équations (3.77) ou (3.83) - en utilisant le modèle de Carreau-Yasuda, sont exactement les mêmes que celles dérivées du cas de la convection Newtonienne. Par conséquent, on peut affirmer que,

quelle que soit la valeur des paramètres rhéologiques des fluides, le seuil du déclenchement de la convection supercritique est le même pour les deux types de fluides Newtoniens et non-Newtoniens. Ceci montre que le modèle de Carreau-Yasuda est valable pour tout le spectre de taux de cisaillement (allant de zéro à l'infini).

Tableau 3.4 : Conditions critiques pour différentes valeurs de Nny

Présente étude		
$Nny \times 201$	Ra_T^{sup}	k_c
51	1702.734	3.115
101	1706.445	3.116
151	1707.422	3.116
201	1707.812	3.116

3.12. Conclusion

Une présentation détaillée de la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations de mouvement et d'énergie, a été accomplie. La méthode des différences finies s'avère la mieux adaptée à ce genre de configuration géométrique et à ce type particulier de problème de convection naturelle. Dans le cas d'une cavité ayant un grand rapport de forme et chauffée par le bas et refroidie par le haut, par l'intermédiaire d'un flux de chaleur constant, une solution basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle a été considérée. Elle a servi à valider le code numérique élaboré. Une étude de la stabilité linéaire a été effectuée dans le but d'évaluer le nombre de Rayleigh supercritique conduisant au déclenchement de la convection stationnaire à amplitude nulle.

CHAPITRE 4

4. RÉSULTATS & DISCUSSIONS

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats suivis d'une discussion des effets des paramètres rhéologiques du modèle de Carreau-Yasuda sur la structure d'écoulement, le transfert de chaleur et l'existence de la convection sous-critique.

On examinera également les effets des paramètres de contrôle sur l'écoulement et le transfert de chaleur; à savoir le rapport de forme, A , les nombres de Prandtl, Pr , et de Rayleigh, Ra_T , avec différentes conditions frontières thermiques et.

4.1. Effet du nombre Prandtl Pr sur la structure de l'écoulement et les isothermes

La figure 4.1 montre les structures d'écoulement pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, Pr , pour $Ra_T = 2000$, $E = 0.2$, $s = 0.01$, $n = 0.4$ et $A = 10$. La figure 4.1(a) fait ressortir que l'écoulement convectif à l'intérieur de la cavité est instable pour des valeurs relativement faibles du nombre de Prandtl ($Pr = 1$). De cet état de fait, on déduit que plus le nombre de Prandtl diminue, plus l'écoulement au centre de la cavité devient instable et par conséquent perd les caractéristiques de l'écoulement parallèle. En effet, si on se réfère à l'équation (2.42), on constate que les termes convectifs du membre gauche l'emportent à ceux du membre droit au fur et à mesure que le nombre de Prandtl diminue. Une telle situation engendre une déstabilisation de l'écoulement.

Par contre, les figures 4.1(b), 4.1(c) et 4.1(d) montrent que pour des valeurs de Prandtl bien supérieures à l'unité: $Pr = 5$, 10 et 1000 , l'écoulement convectif devient stable et monocellulaire. D'autre part, on remarque pour ces valeurs de Prandtl, les quantités physiques exprimées en termes de ψ_0 , $Nu_{x=0}$ deviennent si proches qu'il convient de considérer la valeur $Pr = 10$ comme valeur asymptotique. Ce résultat est en accord avec celui de Ozoe et al. [21]. Ces auteurs ont considéré $Pr = 10$ comme

valeur asymptotique dans leur étude concernant la convection de Rayleigh-Bénard pour un fluide d'Ostwald-De Waele confiné dans une cavité rectangulaire horizontale.

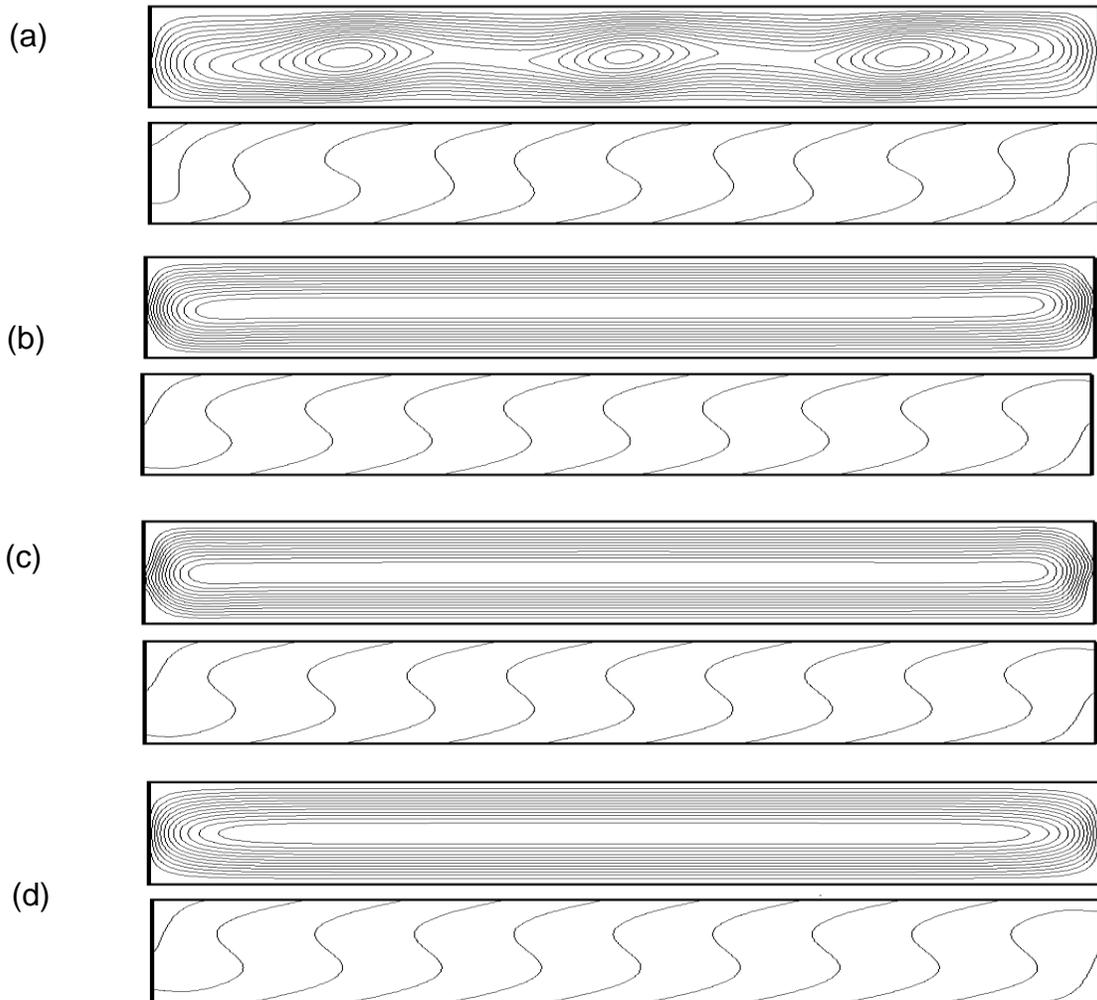


Figure 4.1 : Effet de Pr sur les lignes de courant et les isothermes pour $Ra_T=2000$, $E=0.2$, $s=0.01$, $n=0.4$ et $A=10$, (a) $Pr=1$ ($\psi_0=7.747$, $Nu_{x=0}=3.573$, $Nu_m=3.095$), (b) $Pr=5$ ($\psi_0=6.558$, $Nu_{x=0}=3.203$, $Nu_m=3.131$), (c) $Pr=10$ ($\psi_0=6.568$, $Nu_{x=0}=3.219$, $Nu_m=3.150$) et (d) $Pr=1000$ ($\psi_0=6.562$, $Nu_{x=0}=3.210$, $Nu_m=3.153$).

Par ailleurs, pour le même type de fluide, Lamsaadi et al.[31] ont considéré $Pr = 100$ comme valeur asymptotique caractérisant les fluides à grands nombre de Prandtl. Toutefois, pour des raisons d'économie dans le temps de calcul, ces derniers ont adopté la valeur $Pr \rightarrow \infty$. Ce choix nous paraît évident ; car en se référant à l'équation (2.42), les termes convectifs du membre gauche tendent à être négligeables devant ceux du membre droit qui augmente au fur et à mesure que Pr augmente.

Concernant les isothermes, on remarque que ces dernières ne semblent pas affectées par l'augmentation du nombre de Prandtl.

4.2. Effet du nombre de Rayleigh Ra_T sur la structure de de l'écoulement et les isothermes

Pour la valeur du nombre de Rayleigh inférieure au seuil Newtonien ($Ra_T = 720$), on observe un écoulement monocellulaire et parallèle au centre de la cavité. Par exemple, pour $Ra_T = 640$, les cellules convectives sont réduites et n'occupent pas toute la cavité. Quant aux isothermes elles tendent à devenir horizontales témoignant ainsi la présence d'un régime conductif. Ces observations sont montrées sur la figure 4.2(a) qui représente les structures d'écoulement et les isothermes pour des nombres donnés de n, s et E .

En revanche, la figure 4.2(b) montre que l'écoulement à l'intérieur de la cavité demeure parallèle et monocellulaire pour $Ra_T = 5000$. Dans cette situation, les lignes de courants sont allongées, très serrées et occupent toute la cavité révélant, l'existence d'une convection considérablement intense.

Concernant les isothermes, on remarque que ces dernières sont très affectées par l'augmentation du nombre de Rayleigh. Comparées au cas de $Ra_T = 640$, elles sont devenues plus déformées.

Cependant, nous prévoyons que le système deviendra chaotique et par la suite turbulent aux grandes valeurs des nombres de Rayleigh.

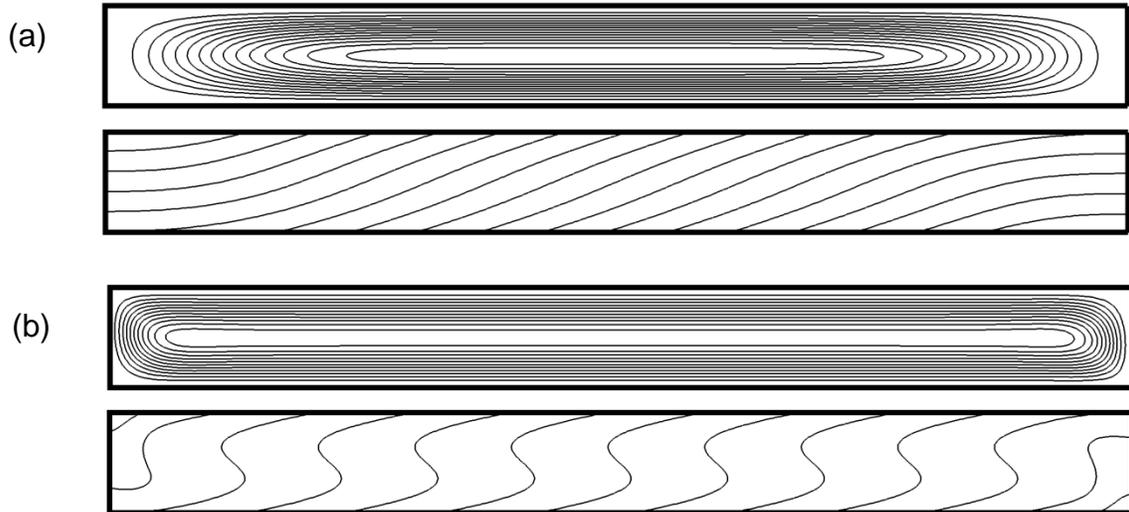


Figure 4.2 : Effet de Ra_T sur les lignes de courant et les isothermes pour $Pr = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$, $n = 0.8$ et $A = 10$, (a) $Ra_T = 640$ ($\psi_0 = 0.741$, $Nu_{x=0} = 1.150$, $Nu_m = 1.104$), (b) $Ra_T = 5000$ ($\psi_0 = 5.787$, $Nu_{x=0} = 2.953$, $Nu_m = 2.878$).

4.3. Effet de l'indice de puissance n sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur

La figure 4.3 présente les résultats numériques obtenus en terme de lignes de courant et d'isothermes pour $Ra_T = 2000$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ avec des valeurs discrètes de l'indice de puissance n à savoir $n = 0.4$, $n = 0.6$ et $n = 1$.

On constate que, avec des conditions aux limites thermiques imposées (flux de chaleur constant), tous les résultats présentés sont associés à un écoulement monocellulaire, comme le montre la figure 4.3(a)-(c).

Concernant l'effet du paramètre n , lorsque celui-ci prend des faibles valeurs, on remarque que les lignes de courants sont très serrées au niveau des parois actives, indiquant la présence d'une convection très intense. Quant aux niveaux des isothermes, on observe que celles-ci deviennent plus déformées.

Cette situation trouve son explication dans la diminution de la viscosité apparente avec le paramètre rhéologique n . L'équation (2.33) ne fait que confirmer cet état. En effet, une diminution de la viscosité apparente tend à renforcer les mouvements convectifs en réduisant les effets visqueux et ainsi améliorer davantage le transfert de chaleur par convection.

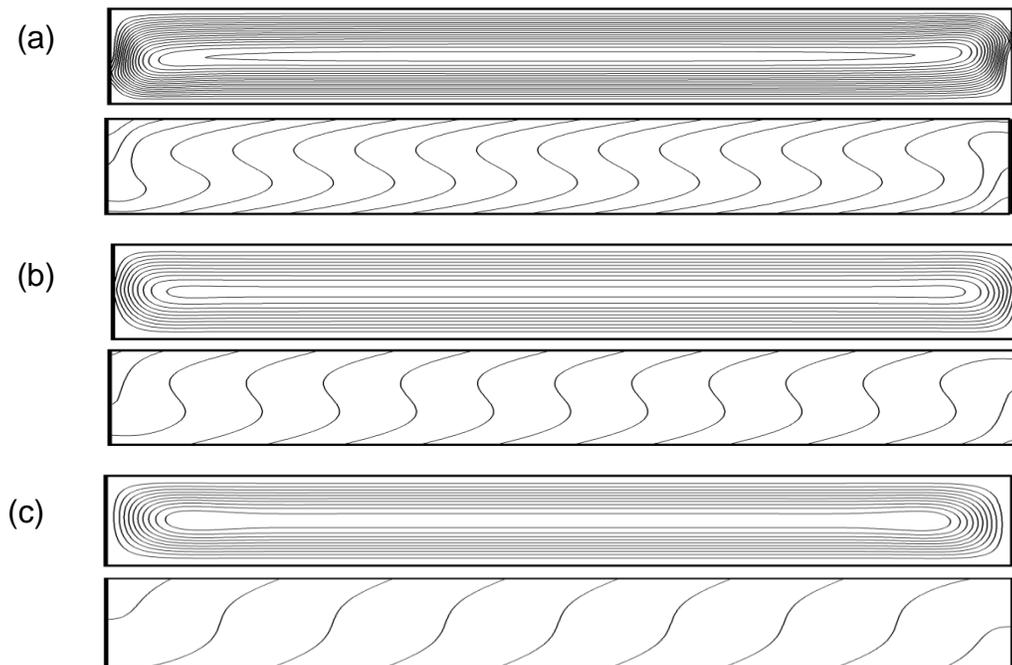


Figure 4.3 :Effet de n sur les lignes de courant et les isothermes pour $Ra_\tau=2000, E=0.4, s=0.01, Pr=10$ et $A=10$, (a) $n=0.4$ ($\psi_0=8.679, Nu_{x=0}=3.393, Nu_m=3.337$), (b) $n=0.6$ ($\psi_0=5.119, Nu_{x=0}=2.904, Nu_m=2.836$), (c) $n=1$ ($\psi_0=2.103, Nu_{x=0}=1.828, Nu_m=1.768$).

Les résultats numériques confirment également cet état de fait (figure 4.3). ils montrent que lorsque $n = 0.4$, l'intensité de l'écoulement et le transfert de chaleur sont beaucoup plus meilleurs ($\psi_0 = 8.679, Nu_{x=0} = 3.393$) que ceux obtenus au cas Newtonien, $n = 1$, ($\psi_0 = 2.103, Nu_{x=0} = 1.828$).

Cependant, nos résultats remettent en cause le principe de l'unicité de la structure d'écoulement monocellulaire à ce type de condition aux limites thermique (type Neumann).

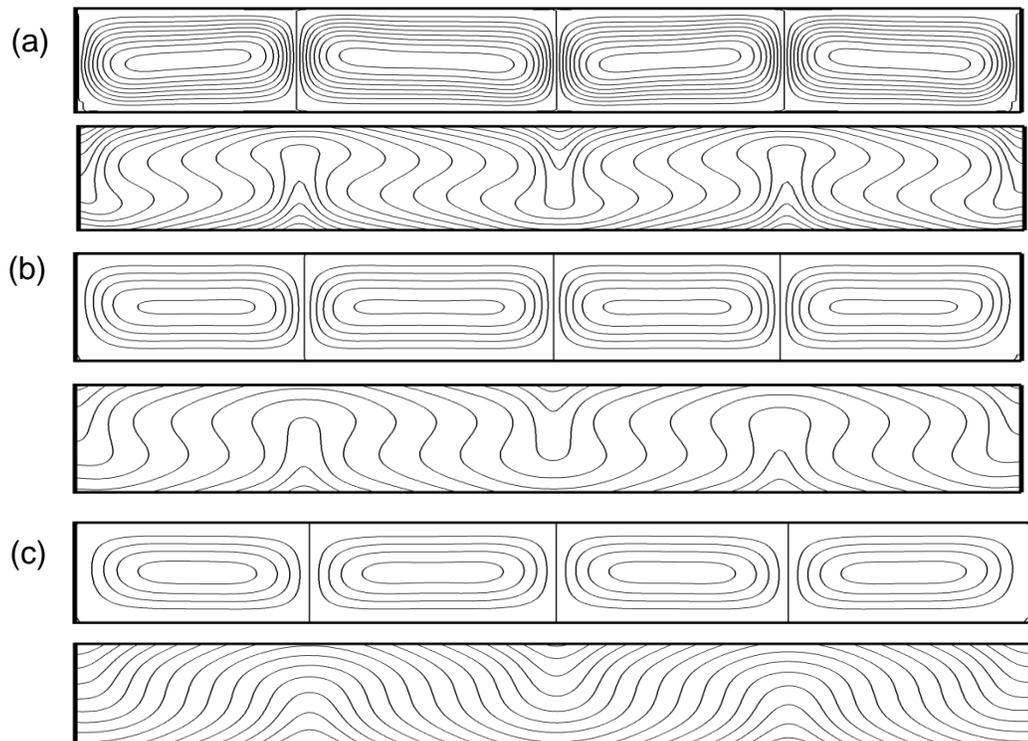


Figure 4.4 : Effet de n sur les lignes de courant et les isothermes (Solution multicellulaire) pour $Ra_T = 2000, E = 0.4, s = 0.01, Pr = 10$ et $A = 10$, (a) $n = 0.4$ ($\psi_{max} = 8.460, \psi_{min} = -8.460, Nu_m = 3.275$), (b) $n = 0.6$ ($\psi_{max} = 5.189, \psi_{min} = -5.188, Nu_m = 2.678$), (c) $n = 1$ ($\psi_{max} = 2.222, \psi_{min} = -2.222, Nu_m = 1.641$).

En effet, en modifiant les conditions initiales par un écoulement multicellulaire de Bénard, une structure multicellulaire apparaît ; comme le montre la figure 4.4. Cette dernière révèle que cet écoulement est constitué de cellules convectives pratiquement rectangulaires, de taille presque identiques et alignées dans la direction de x .

Quant à l'effet du paramètre rhéologique n , il est pratiquement le même que celui d'un écoulement monocellulaire: l'intensité de l'écoulement et le transfert de chaleur par convection sont accentués par la diminution de ce dernier. Pour différentes valeurs du paramètre n (0.4, 0.6 et 1), les résultats numériques, en termes de ψ_0 (cas monocellulaire), ψ_{max} (cas multicellulaire) et Nu_m , montrent qu'une légère amélioration est observée dans le cas d'un écoulement monocellulaire. En effet, dans le cas où l'écoulement est monocellulaire, la stratification des isothermes est uniforme, alors que dans le cas multicellulaire la stratification des isothermes est alternée, parfois positive et parfois négative, cela a pour effet la légère diminution observée sur le nombre de Nusselt moyen Nu_m .

4.4. Effet des paramètres rhéologiques sur les profils de la fonction courant, la composante de la vitesse horizontale et la température

Les figures 4.5-4.8 représentent l'effet des différents paramètres rhéologiques du modèle de Carreau–Yasuda sur les profils de la fonction de courant ψ , la composante horizontale de la vitesse u et la température T obtenues au centre de la cavité. Les résultats numériques sont calculés avec un rapport de forme fini; $A = 10$, un nombre de Prandtl $Pr = 10$ et un nombre de Rayleigh thermique $Ra_T = 2000$.

Il y a lieu de signaler que le cas Newtonien ($n=1$ et $E=0$) est toujours représenté dans nos figures et cela à des fins de comparaison.

4.4.1. Effet de l'indice de puissance n

La figure 4.5 compare les résultats numériques avec ceux de l'approximation de l'écoulement parallèle des profils de la fonction de courant ψ , la composante horizontale de la vitesse u et la température T , obtenus au centre de la cavité avec $E = 0.4$, et différentes valeurs de n . Une parfaite concordance est obtenue entre les solutions numériques (représentées par des cercles pleins) et celle déduite de l'approximation de l'écoulement parallèle (représentées en traits pleins).

La figure 4.5 (a) montre que lorsque l'indice de puissance n diminue, l'intensité de l'écoulement augmente et par conséquent, la circulation de l'écoulement à l'intérieur de la cavité s'accroît.

La figure 4.5(b) confirme cette observation au niveau du profil de la composante horizontale de la vitesse u . En effet, au niveau des parois inférieures de la cavité ($y = -0.5$), on remarque que la vitesse augmente à partir de la valeur zéro (conditions d'adhérences) jusqu'au sommet d'une couche appelée sous couche-visqueuse. Dans cette région centrale, la vitesse devient presque constante, puis chute vers la valeur zéro au niveau du centre de la cavité ($y = 0$), là où un renversement de l'écoulement est observé.

La Figure 4.5(c) permet de visualiser le profil de température. On remarque qu'avec la diminution des valeurs de n (effet plus rhéofluidifiant), la différence de température entre les deux parois horizontales devient assez petite engendrant ainsi une augmentation du transfert thermique. Ce résultat est conforme à ceux rapportés par Lamsaadi et al. [31-36-64] et la récente étude de Alloui et al. [65].

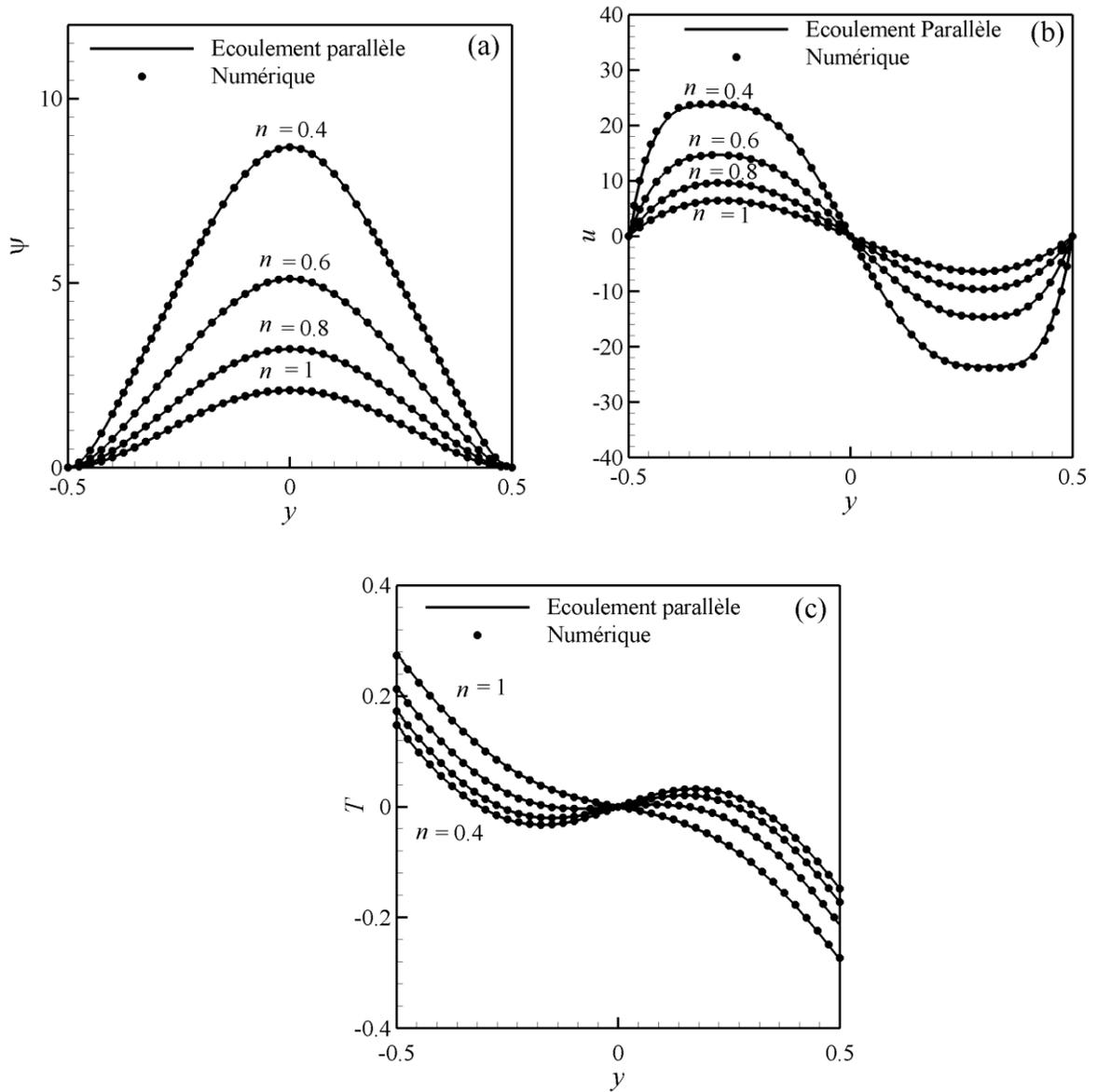


Figure 4.5 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $n = 1, n = 0.8, n = 0.6$ et $n = 0.4$ avec $Ra_T = 2000, E = 0.4, s = 0.01, Pr = 10$ et $A = 10$.

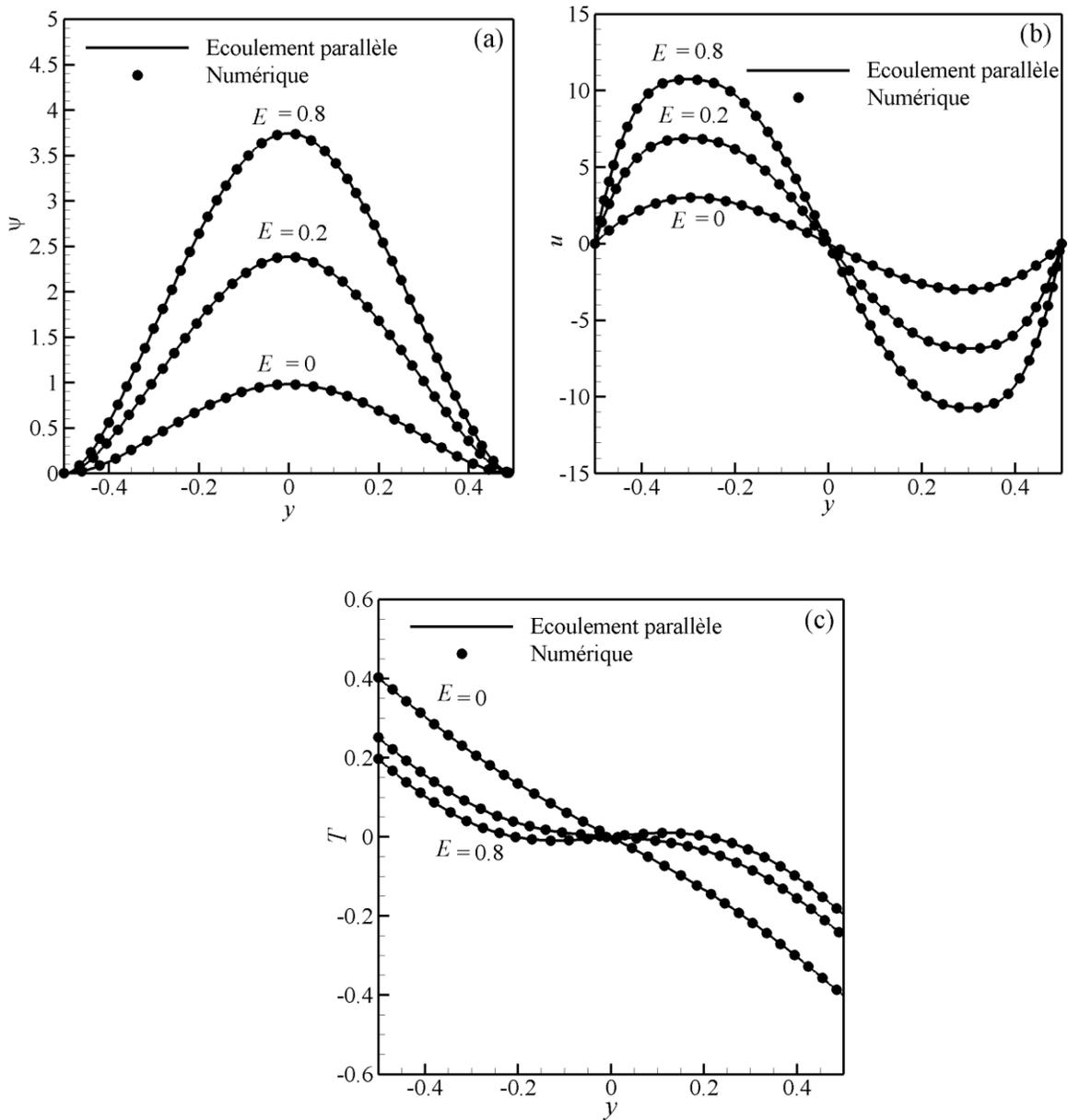


Figure 4.6 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $E = 0$, $E = 0.2$ et $E = 0.8$ avec $Ra_r = 2000$, $n = 0.6$, $s = 0.01$, $a = 2$, $Pr = 10$ et $A = 10$.

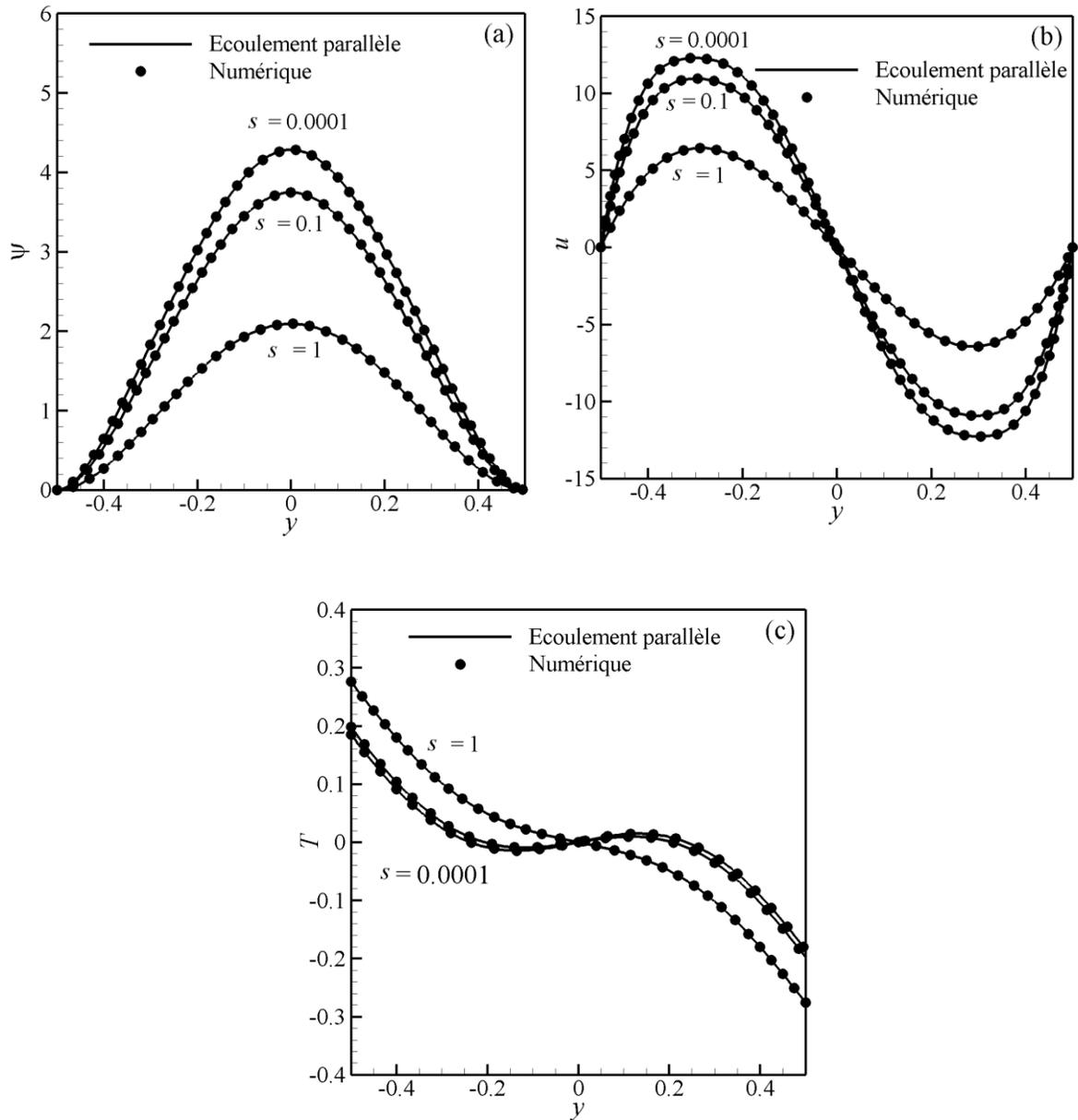


Figure 4.7 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $s = 0.0001$, $s = 0.1$ et $s = 1$ avec $Ra_T = 2000$, $n = 0.6$, $a = 2$, $E = 0.2$, $Pr = 10$ et $A = 10$.

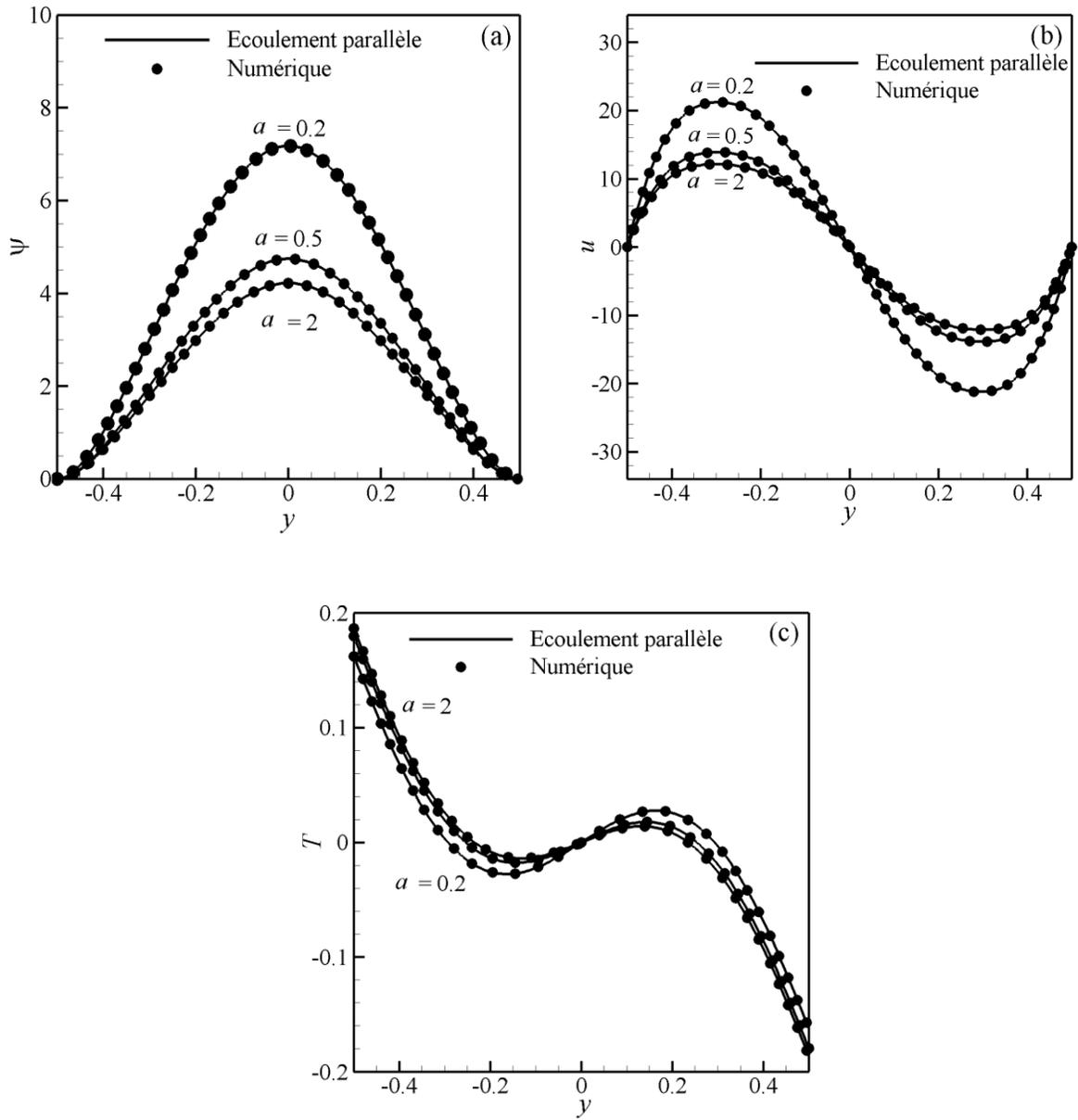


Figure 4.8 : Comparaison des solutions numériques et de l'écoulement asymptotique: (a) fonction courant, ψ , (b) vitesse horizontale, u , (c) température, T , les profils sont obtenus pour un indice de puissance $a=0.2$, $a=0.5$ et $a=2$ avec $Ra_T=2000$, $n=0.6$, $s=0.01$, $E=0.2$, $Pr=10$ et $A=10$.

4.4.2. Effet du paramètre rhéologique E

La figure 4.6 montre l'effet de la constante de temps adimensionnelle E sur les profils de la fonction de courant ψ , la composante horizontale de la vitesse u et la température T obtenus au centre de la cavité avec $n = 0.6$. Une excellente concordance est aussi observée entre l'approximation de l'écoulement parallèle et les résultats numériques.

La figure 4.6 montre qu'une augmentation progressive du paramètre E améliore l'écoulement convectif à l'intérieur de la cavité. En se référant à l'équation (2.33), on remarque que lorsque $E \rightarrow \infty$ la valeur de viscosité apparente $\eta \rightarrow s$. Ceci nous permet de déduire que la viscosité apparente diminue avec les grandes valeurs de E , améliorant ainsi les écoulements convectifs à l'intérieur de la cavité. Ce résultat est en bon accord avec la récente étude effectuée par Alloui et al.[65].

4.4.3. Effet des paramètres rhéologiques s et a

L'effet du paramètre rhéologique s sur les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur est maintenant considéré pour les valeurs $n = 0.6$, $a = 2$ et $E = 0.2$.

La figure 4.7 montre un très bon accord entre les solutions numériques et celles de l'approximation de l'écoulement parallèle. On constate également que l'intensité de l'écoulement et le transfert de chaleur par convection sont favorisés par la diminution du paramètre s lorsque ce dernier prend des valeurs allant de $s = 1$ (fluide Newtonien) à $s = 10^{-4}$.

Quant à l'effet du paramètre rhéologique a sur l'évolution des profils de la fonction de courant et la vitesse et la température au centre de la cavité, celui-ci est illustré sur la figure 4.8. Comme on peut l'observer, une diminution de ce paramètre conduit à une légère amélioration de l'intensité de l'écoulement et le transfert de

chaleur par convection. Cette constatation trouve son explication dans l'équation (2.33). En effet, pour les faibles valeurs de a ($a \rightarrow 0$), la viscosité apparente $\eta \rightarrow s$.

4.5. Convection à amplitude finie pour un grand rapport de forme ($A=10$)

L'effet des paramètres rhéologiques, n , E et s sur l'apparition de la convection sous-critique est examiné dans le cas d'une cavité rectangulaire ayant un rapport de forme fini ($A = 10$) dont les parois actives sont soumises soit à un flux de chaleur constant (type Neumann), soit à des températures constantes (type Dirichlet).

4.5.1. Effet de l'indice de la loi de puissance n sur l'apparition de la convection

La figure 4.9 illustre, pour des différentes valeurs de l'indice de loi de puissance n , l'évolution de l'intensité de l'écoulement, ψ_0 , et le nombre de Nusselt Nu en fonction du nombre de Rayleigh Ra_T .

Les résultats numériques observés sur la figure 4.9 sont en bon accord avec ceux obtenus par l'approximation de l'écoulement parallèle.

À l'exception du cas $n = 0.4$ et $Ra_T \geq 3000$, les calculs numériques révèlent que l'écoulement à l'intérieur de la cavité est instable, perd son parallélisme, devient multicellulaire et oscillant d'une manière désordonnée. Cet état de fait est bien illustré sur la figure 4.10. Celle-ci montre clairement que la structure de l'écoulement est instable et se compose de petits tourbillons secondaires le long du demi-plan de la couche de fluide. Ce résultat nous laisse supposer l'existence d'une transition précoce vers le chaos.

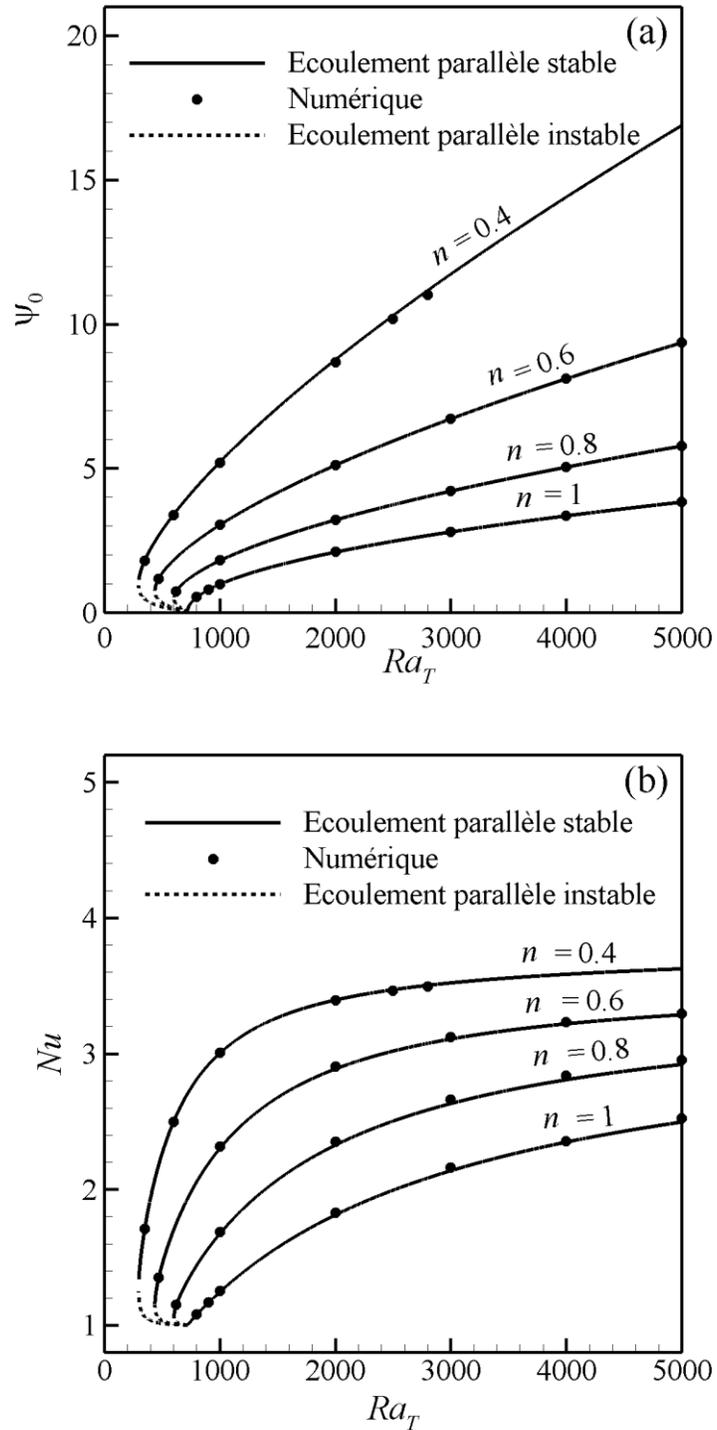


Figure 4.9 : Le diagramme de bifurcation : (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu versus Ra_T pour différentes valeurs n avec $A = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ (type Neumann).

La figure 4.9(a) montre que l'écoulement convectif s'améliore lorsque n diminue. Il en est de même concernant le taux de transfert de chaleur, Nu , qui s'améliore avec la diminution de n (figure 4.9(b)).

Tel que discuté précédemment dans le paragraphe 4.3, une diminution de l'indice de loi de puissance n provoque une diminution de la viscosité apparente η dont le rôle principal est de réduire les résistances visqueuses d'une part et d'améliorer l'écoulement convectif d'autre part. Ce résultat est démontré par la figure 4.11 sur laquelle on observe que le cisaillement est très important au centre et à proximité des parois de la cavité. Ce qui a engendré une diminution significative de la viscosité apparente dans ces régions.

Dans le cas d'un fluide Newtonien ($n = 1$), la littérature montre (Sparrow et al. [63]) que l'apparition de la convection se produit avec une amplitude convective nulle pour une valeur du nombre de Rayleigh supercritique égale à $Ra_{TC}^{sup} = 720$. Par contre, pour les fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), l'apparition de la convection se produit bien en dessous de la valeur critique des fluides Newtoniens estimée à 720[66]. Ce résultat nous laisse affirmer l'existence de la convection appelée sous-critique pour les fluides pourvus d'un caractère rhéofluidifiant. Des résultats similaires ont été rapportés par Balmforth et al.[67]. En utilisant des fluides viscoplastiques, ces auteurs [67] ont constaté que lorsque la viscosité est finie à un taux de cisaillement nul, le nombre de Rayleigh critique est identique à celui des fluides Newtoniens. Albaalbaki et al. [33] ont confirmé ce constat dans leur étude menée sur de la convection de Rayleigh-Bénard d'un fluide rhéofluidifiant obéissant au modèle de Carreau-Bird.

Par contre, les travaux de Alloui et al. [37] ont montré que le nombre de Rayleigh critique est infini en utilisant le modèle de la loi de puissance. Ce résultat est en contradiction aux travaux déjà cités. Ce qui confirme que le modèle de la loi de puissance ne représente pas réellement le comportement des fluides rhéofluidifiants, surtout aux très faibles taux de cisaillement.

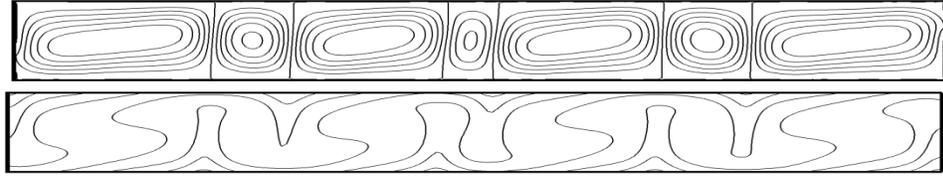


Figure 4.10 : Lignes de courant et les isothermes pour $Pr = 10, E = 0.4, s = 0.01, n = 0.4, A = 10$ et $Ra_T = 3500$.

Les simulations numériques prévoient, pour $n = 0.4$, que l'apparition de convection sous-critique se produit par le biais d'une amplitude finie pour une valeur du nombre de Rayleigh de l'ordre de : $Ra_{TC}^{sous} = 300$. Cette valeur du nombre de Rayleigh sous-critique est obtenue en diminuant les valeurs du nombre de Rayleigh jusqu'à ce que l'état de conduction soit atteint.

Par ailleurs, en dessous de cette valeur sous-critique, l'état conductif s'installe quel que soit la grandeur de l'amplitude de la perturbation. Entre les deux seuils de la convection sous-critique et supercritique, deux solutions convectives sont observées; l'une stable (trait plein) et l'autre instable (ligne pointillée). La solution stable se qualifie par sa résistance aux perturbations infinitésimales et revient à son état original. L'effet inverse est observé dans le cas d'une solution instable.

La solution de l'écoulement parallèle révèle, sur la figure 4.12, que pour les grandes valeurs de Ra_T , le nombre de Nusselt Nu dépasse la valeur $10/3$ en passant par un maximum, puis décroît asymptotiquement vers la valeur Newtonien $10/3$, devenant ainsi indépendant de la valeur n . Cette prédiction est basée sur l'étude de l'analyse asymptotique.

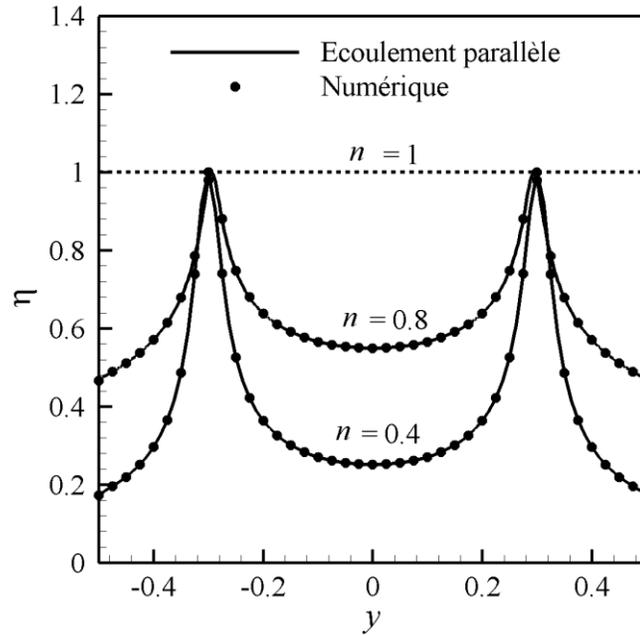


Figure 4.11 : Profil de la viscosité apparente dans la partie centrale de la cavité pour différentes valeurs de n avec $Ra_T = 2000$, $A = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$.

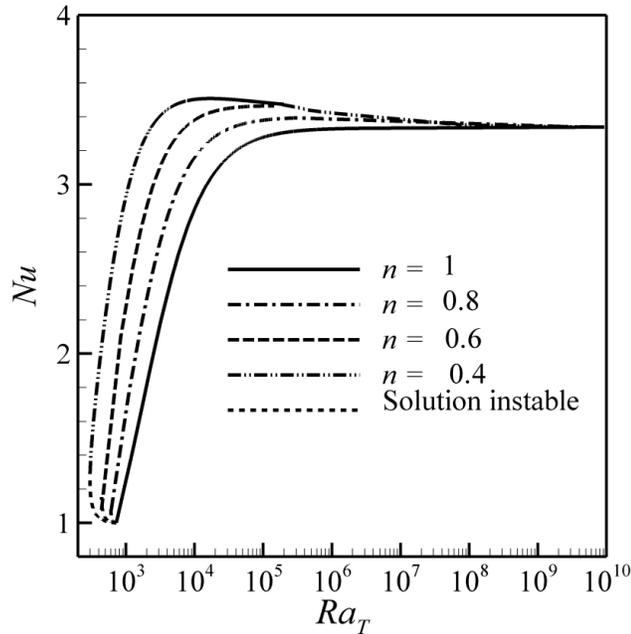


Figure 4.12 : L'effet des grandes valeurs du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs de n avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $E = 0.4$.

La figure 4.13 indique que malgré le changement effectué au niveau des conditions frontières thermiques (type Dirichlet), une diminution de l'indice de loi de puissance n favorise toujours l'apparition de la convection sous-critique à amplitude finie. Néanmoins, dans ce type de condition aux limites thermiques et pour une valeur donnée du paramètre n , cette convection se produit bien au-dessus de celle obtenue dans le cas des conditions aux limites du type Neumann (voir Tableau 4.1). Quant à la structure de l'écoulement à l'intérieur de la cavité, cette dernière n'est plus monocellulaire, elle a été substituée par une structure multicellulaire stable (voir figure 4.14).

Par ailleurs, des essais numériques révèlent que pour les faibles valeurs du paramètre n ($n = 0.2$), les solutions numériques obtenues étaient toutes instables. Ceci nous a empêché de déterminer la valeur du nombre de Rayleigh critique responsable à l'apparition de la convection sous-critique. Ce résultat indique probablement la présence probable d'un écoulement oscillatoire pour les fluides fortement rhéofluidifiants.

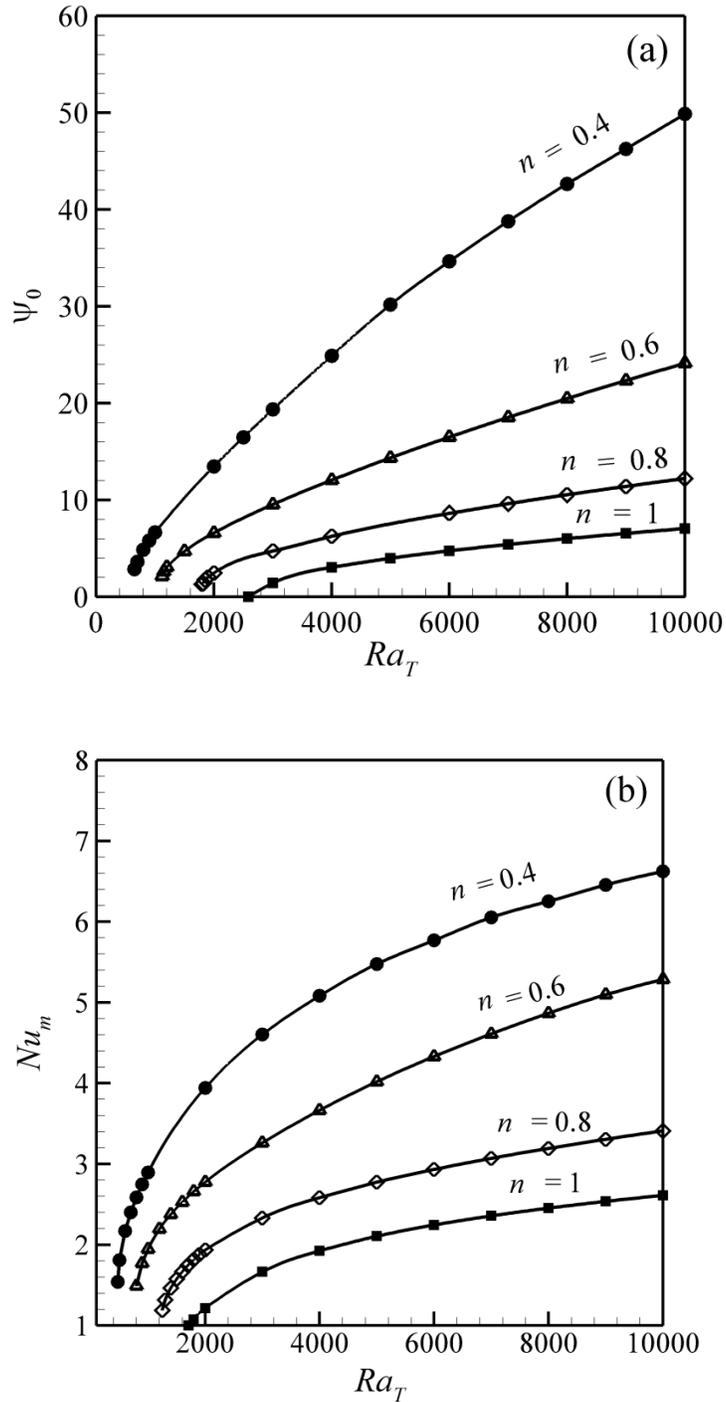


Figure 4.13 : Le Diagramme de bifurcation (a) de l'intensité de l'écoulement via Ra_T , et (b) Nu via Ra_T pour différentes valeurs n avec $A = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ (type Dirichlet).

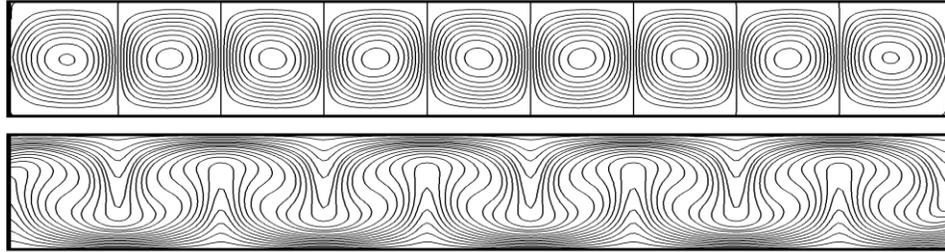


Figure 4.14 : Lignes de courant et isothermes pour les conditions thermiques type Dirichlet avec : $Ra_T = 2000$, $A = 10$, $E = 0.4$, $s = 0.01$, $n = 0.6$ et $Pr = 10$ ($\psi_{max} = 9.523$, $\psi_{min} = -9.523$, $Nu_m = 2.711$).

Les valeurs du nombre de Rayleigh critique caractérisant l'apparition de convection sous-critique en fonction de l'indice de loi de puissance n relatives aux deux types de conditions frontières thermiques sont consignées dans le Tableau 4.1. On remarque que pour les fluides rhéofluidifiants, la convection sous-critique semble fortement affectée d'une part par l'indice de la loi de puissance et d'autre part par le type des conditions aux limites thermiques considérées.

Tableau 4.1 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de l'indice, n , avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $E = 0.4$.

	Neumann	Dirichlet
n	Ra_{TC}^{sous}	Ra_{TC}^{sous}
1	720	1707.7
0.8	606	1250
0.6	442	800
0.4	300	470
0.2	194	-

4.5.2. Effet de la constante de temps adimensionnelle E sur l'apparition de la convection

La figure 4.15 montre l'influence de la constante de temps adimensionnelle E sur l'intensité de l'écoulement ψ_0 et le nombre de Nusselt Nu . Les solutions numériques (cercles pleins) et les solutions de l'écoulement parallèle: stables (traits pleins) et instables (pointillés) sont indiquées sur la figure. Un bon accord est observé entre les résultats numériques et ceux de la solution stable de l'approximation de l'écoulement parallèle.

Par ailleurs, cette figure indique également la présence d'une convection sous-critique pour les différentes valeurs du paramètre E considérées dans ce problème.

En effet, les figures 4.15(b) et 4.15(d) montrent clairement que l'apparition de la convection sous-critique se produit avec un point selle, au-delà duquel bifurque deux solutions : stables et instables. Les branches instables représentées en lignes pointillées sont situées bien en dessous du point selle jusqu'au point de l'apparition de la convection supercritique[68]. Après multiples essais numériques, les solutions des branches instables n'ont pas pu être obtenues. Les lignes verticales observées sur ces figures indiquent les valeurs des Rayleigh sous-critiques et supercritiques.

En outre, on constate d'après les figures 4.15, 4.16, 4.17 et le tableau 4.2, que les mêmes conclusions que celles tirées dans le cas précédent (concernant l'effet de n), peuvent être dégagées ici pour l'effet de E . La seule différence qui existe réside dans le fait que dans le cas présent, une augmentation de ce paramètre améliore les mouvements convectifs et le transfert de chaleur d'une part et favorise l'apparition précoce de la convection sous-critique d'autre part. La structure d'écoulement reste monocellulaire mais perd son intensité avec la diminution de ce paramètre E

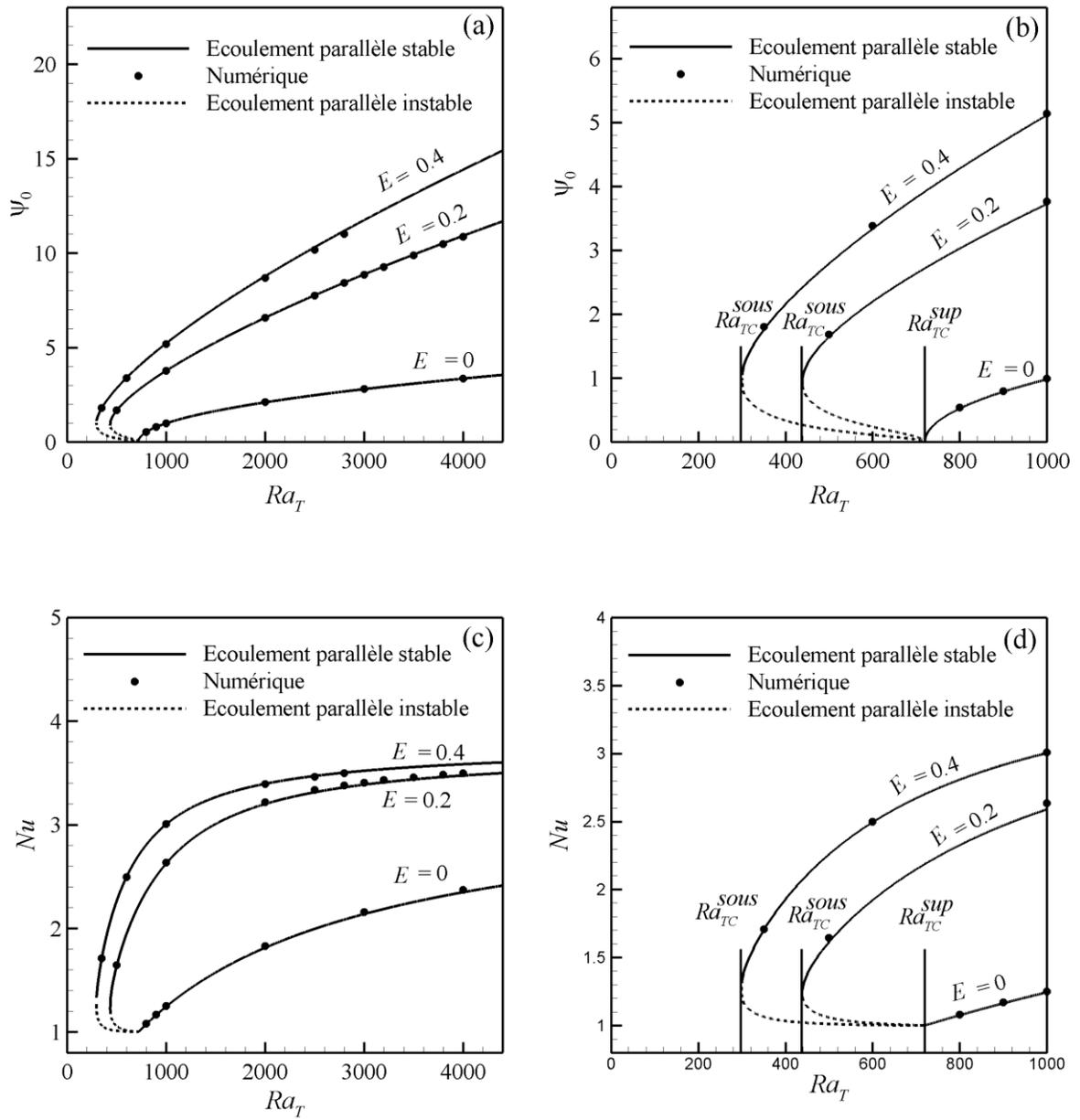


Figure 4.15 : Vue d'ensemble et de près de l'écoulement convectif pour différentes valeurs de E avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $n = 0.4$: a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et b) Nu versus Ra_T .

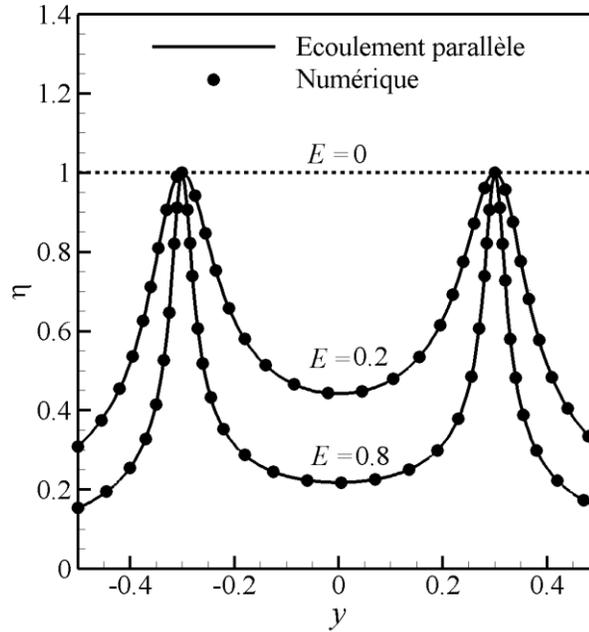


Figure 4.16 : Profil de la viscosité apparente dans la partie centrale de la cavité pour différentes valeurs de E avec $Ra_T = 2000$, $A = 10$, $n = 0.6$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$.

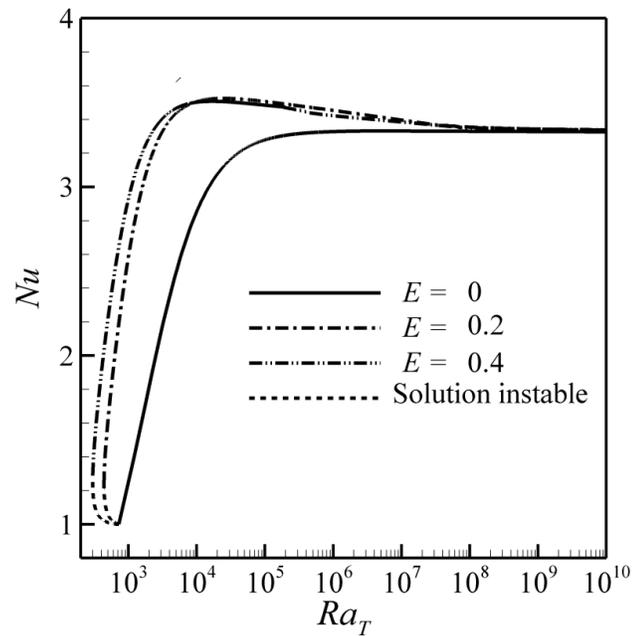


Figure 4.17 : L'effet des grandes valeurs du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs de E avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $n = 0.4$.

Tableau 4.2 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de la constante de temps sans adimensionnée E avec $A = 10$, $Pr = 10$ et $n = 0.4$

E	0	0.2	0.4	0.6	0.8
Ra_{TC}^{sous}	720	439	300	239	203

4.5.3. Effet des paramètres s et a sur l'apparition de la convection

Le tableau 4.3 montre les valeurs du nombre de Rayleigh sous-critique Ra_{TC}^{sous} indiquant le seuil de l'apparition de la convection en fonction du paramètre rhéologique s . Notons que la valeur du nombre de Rayleigh sous-critique est presque constante, pour les très faibles valeurs de s ($10^{-5} \leq s \leq 10^{-3}$). Alors que dans le cas où $s > 10^{-2}$ une augmentation considérable du nombre de Rayleigh est observée.

Le tableau 4.4 montre l'effet du paramètre rhéologique a sur le nombre de Rayleigh sous-critique. On constate que les valeurs du nombre de Rayleigh sous-critique sont très rapprochées pour des valeurs a comprises entre 1 et 3. En outre, on remarque qu'une augmentation de ce paramètre a engendre une légère amélioration dans la valeur du nombre de Rayleigh sous-critique.

Tableau 4.3 : Nombre de Rayleigh sous-critique donnant naissance à la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs du paramètre, s , pour $Pr = 10$, $A = 10$ et $E = 0.4$.

s	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Ra_{TC}^{sous}	291	291	292	300	366

Tableau 4.4 : Nombre de Rayleigh sous-critique donnant naissance à la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs du paramètre, a , pour $Pr = 10$, $A = 10$ et $E = 0.4$.

a	1	1.5	2	2.5	3
Ra_{TC}^{sous}	280	296	300	301	302

Et enfin, suite à ces observations numériques, on peut révéler l'existence de convection sous-critique sur toutes les gammes des paramètres rhéologiques rendant le fluide plus rhéofluidifiant, pour le cas d'une cavité rectangulaire.

4.6. La convection à amplitude finie pour un faible rapport de forme ($A=1$)

l'effet des paramètres rhéologiques, n et E , est examiné sur l'apparition de la convection sous-critique dans le cas d'une cavité ayant un faible rapport de forme ($A=1$) et dont les parois actives sont soumises soit à un flux de chaleur constant (type Neumann), soit à des températures constantes (type Dirichlet).

4.6.1. Effet de l'indice de la loi de puissance n sur l'apparition de la convection

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques relatifs à une cavité carrée ($A = 1$) dans laquelle toutes ses parois sont rigides. Les murs horizontaux (actifs) sont soumis soit à des flux de chaleur constante ou à des températures constantes. Le cas d'une cavité carrée munie de deux parois verticales avec glissement (configuration de Rayleigh-Bénard) est également considéré.

Les diagrammes de bifurcation (Figures 4.18 et 4.19) montrent qu'avec les deux types de conditions aux limites thermiques considérées, la convection sous-critique des fluides rhéofluidifiants ($n < 1$) apparaît bien avant la convection

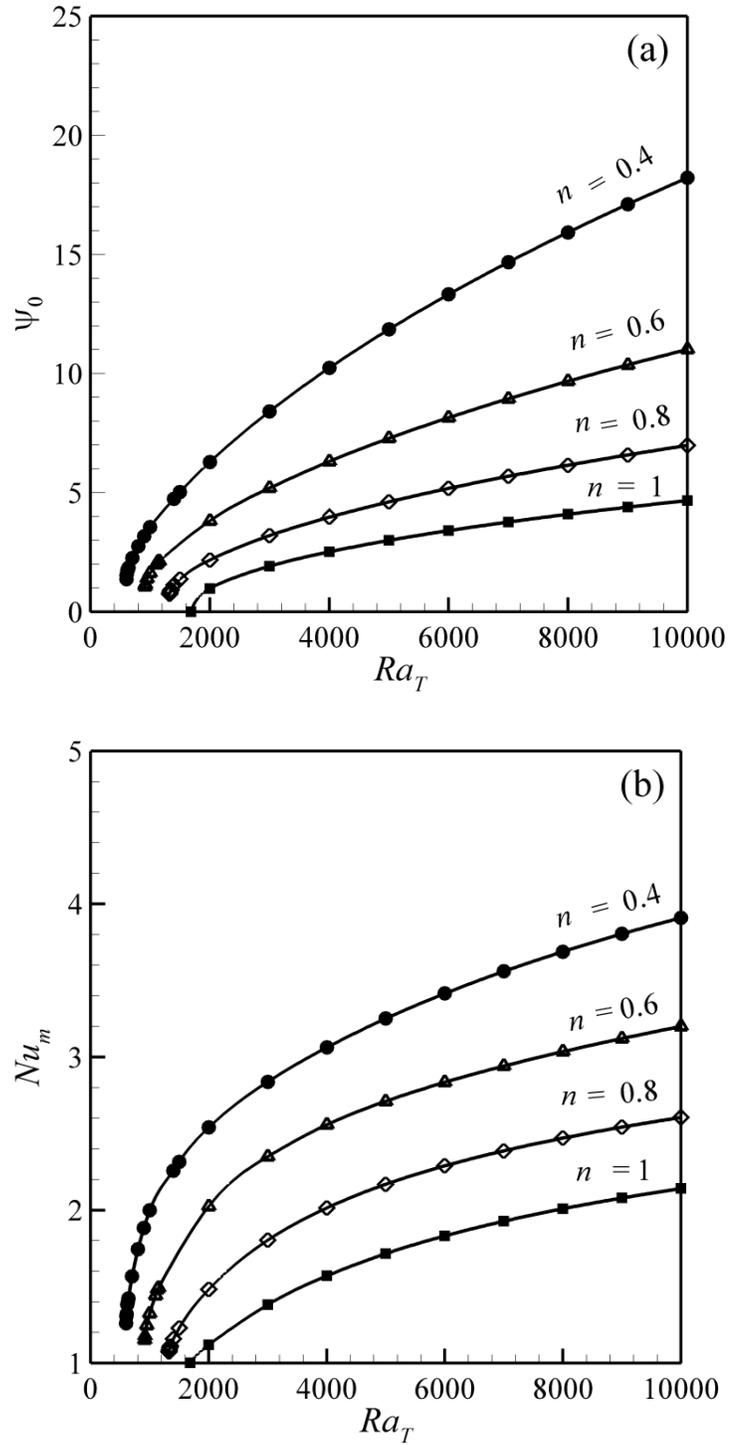


Figure 4.18 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$, pour les conditions thermiques de type Neumann

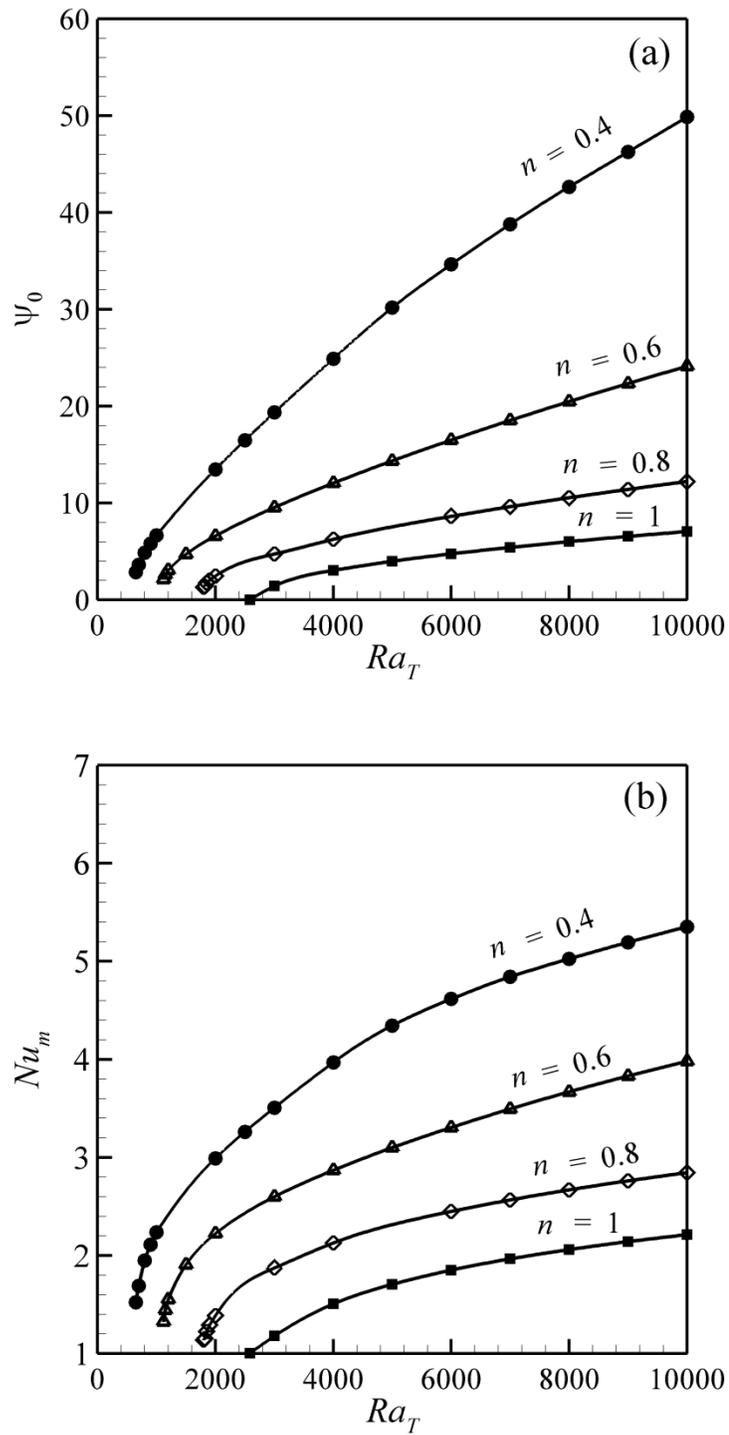


Figure 4.19 : Le diagramme de bifurcation : (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions thermiques de type Dirichlet.

Newtonienne. L'amplitude de l'écoulement augmente de manière monotone avec les nombres de Rayleigh, pour les différentes valeurs de n .

En outre, selon la nature des conditions aux limites thermiques, les figures 4.18 et 4.19 indiquent qu'une diminution de l'indice de loi de puissance n améliore à la fois l'écoulement convectif et le taux de transfert à l'intérieur de la cavité considérée.

Quant aux figures 4.18(a) et 4.19(a), elles démontrent qu'avec les différentes valeurs n et de Ra_T considérées dans ce problème, toutes les solutions numériques obtenues sont stables.

Par contre, dans le cas d'une cavité rectangulaire de rapport de forme fini égale à 10, on remarque pour les faibles valeurs de n ($n < 0.4$) et des valeurs $Ra_T \geq 3000$, que l'écoulement à l'intérieur de la cavité n'est plus stable; une transition précoce vers le chaos semble en effet s'annoncer.

En se basant sur les résultats obtenus, on remarque qu'une diminution du rapport de forme tend à stabiliser l'écoulement et à retarder la survenue des mouvements convectifs.

La figure 4.20 montre que malgré les changements effectués au niveau des parois verticales (avec glissement), les résultats restent similaires en termes d'intensité de l'écoulement et du nombre de Nusselt à ceux obtenus au cas précédent (parois verticales sans glissement).

En comparant nos résultats numériques avec ceux rapportés dans la littérature par la récente étude de Jenny et al. [69], nous avons observé une excellente conformité avec nos résultats malgré la différence entre les deux méthodes. Ces derniers utilisent en effet un code de calcul commercial nommé `freefem++` basé sur la méthode des éléments finis, alors que le nôtre est basé sur la méthode des différences finies. À titre comparatif, en considérant le cas $n = 0.6$, et

$Ra_r = 800$, ces auteurs ont obtenu une valeur du nombre de Nusselt égale à $Nu = 1.4751$ [69], alors que la nôtre, $Nu = 1.4798$ [70]. Autrement dit, l'erreur relative est estimée à 0.32%. Le même constat est observé pour une valeur de $Ra_r = 2000$, où l'erreur relative est de l'ordre de 0.38% ($Nu = 2.7655$ [69] la nôtre est $Nu = 2.7759$ [62]).

Étant donné que le nombre de Rayleigh critique dépend de la nature du rapport de forme, des conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques, on suppose que le nombre d'onde en convection non linéaire dépend fortement des paramètres rhéologiques des fluides. Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, Ra_{TC}^{sous} , caractérisant l'apparition de la convection sous-critique en fonction de l'indice de loi de puissance, n , sont répertoriées sur le tableau 4.5.

Tableau 4.5 : Nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection à amplitude finie obtenu pour une cavité carrée avec différentes conditions aux limites thermiques à différentes valeurs de l'indice de loi de puissance, n , pour $Pr = 10$, $s = 0.01$, $a = 2$ et $E = 0.4$.

	Parois sans glissement				Parois verticaux avec glissement	
	Neumann		Dirichlet		Dirichlet	
n	Ra_{TC}^{sous}	R	Ra_{TC}^{sous}	R	Ra_{TC}^{sous}	R
0.4	602	0.357	650	0.251	470	0.275
0.6	915	0.543	1120	0.433	800	0.468
0.8	1325	0.786	1800	0.696	1250	0.732
1.0	1685 [61]	1.0	2585 [4]	1.0	1707.7	1.0

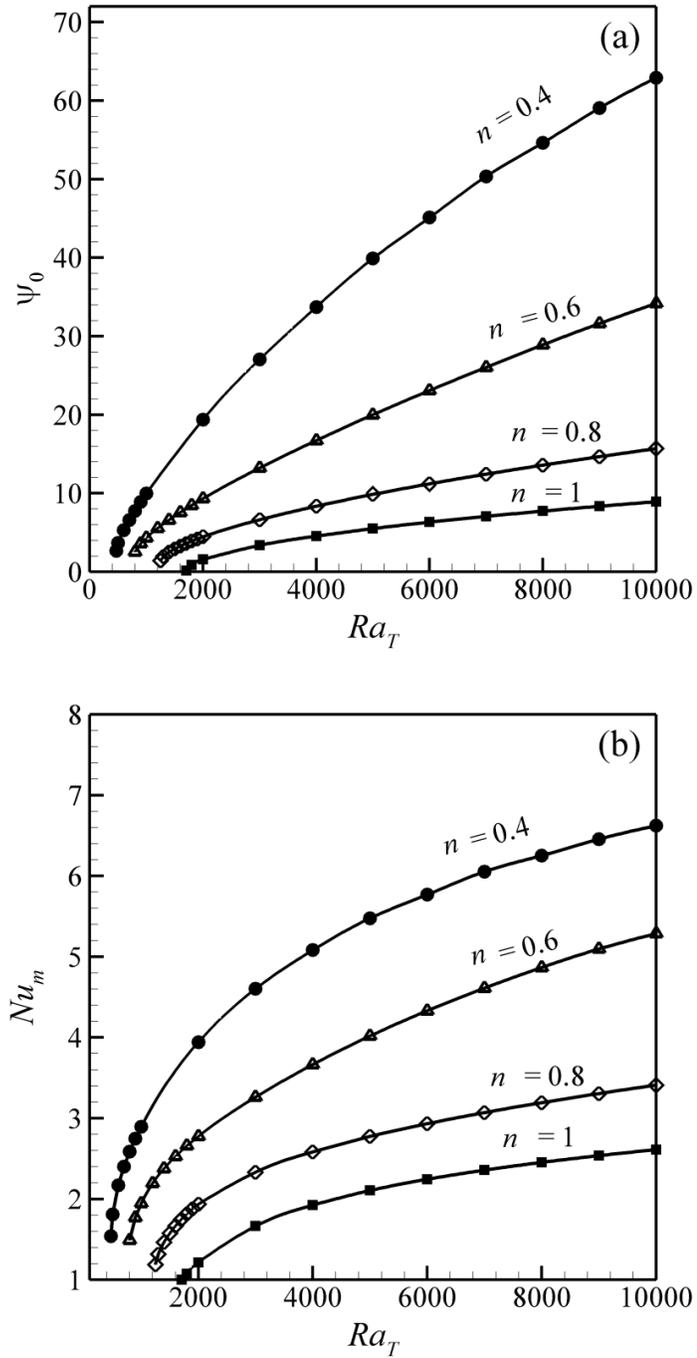


Figure 4.20 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de n avec $A = 1$, $E = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions frontières thermiques de type Dirichlet et parois verticales avec glissement (convection de Rayleigh-Bénard).

Selon le paramètre correspondant aux rapports des valeurs critiques, $R = Ra_{TC}^{sous} / Ra_{TC}^{sup}$, la plus profonde convection sous-critique, exprimée par les faibles valeurs de R , a été enregistrée dans le cas d'une cavité pourvue de parois rigides. Cela est évident, vu que la viscosité dans ce type de condition aux limites atteint son minimum à proximité des parois actives ; le fluide devient plus fluidifiant.

4.6.2. Effet de la constante de temps adimensionnelle E sur l'apparition de la convection

On constate, d'après les figures 4.21, 4.22, que les conclusions concernant l'effet de E sont similaires à celles dégagées dans le cas précédent (concernant l'effet de n). Toutefois, dans cette situation, l'augmentation du paramètre E améliore l'intensité des mouvements convectifs et le transfert de chaleur, exprimé par le nombre de Nusselt moyen, Nu_m , et favorise considérablement l'apparition de la convection sous-critique.

Les valeurs du nombre de Rayleigh critique dépendent fortement de la nature des conditions aux limites et des paramètres rhéologiques des fluides. Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, Ra_{TC}^{sous} , caractérisant l'apparition de la convection sous-critique en fonction de la constante de temps adimensionnelle E , sont consignées dans le tableau 4.6.

Tableau 4.6 : Nombre de Rayleigh critique au seuil de la convection à amplitude finie obtenu pour différentes valeurs de la constante de temps adimensionnelle E avec $A = 1$, $Pr = 10$, $n = 0.4$ et $s = 0.01$.

	Neumann	Dirichlet
E	Ra_{TC}^{sous}	Ra_{TC}^{sous}
0	1685[61]	2585[4]
0.2	880	900
0.4	602	650

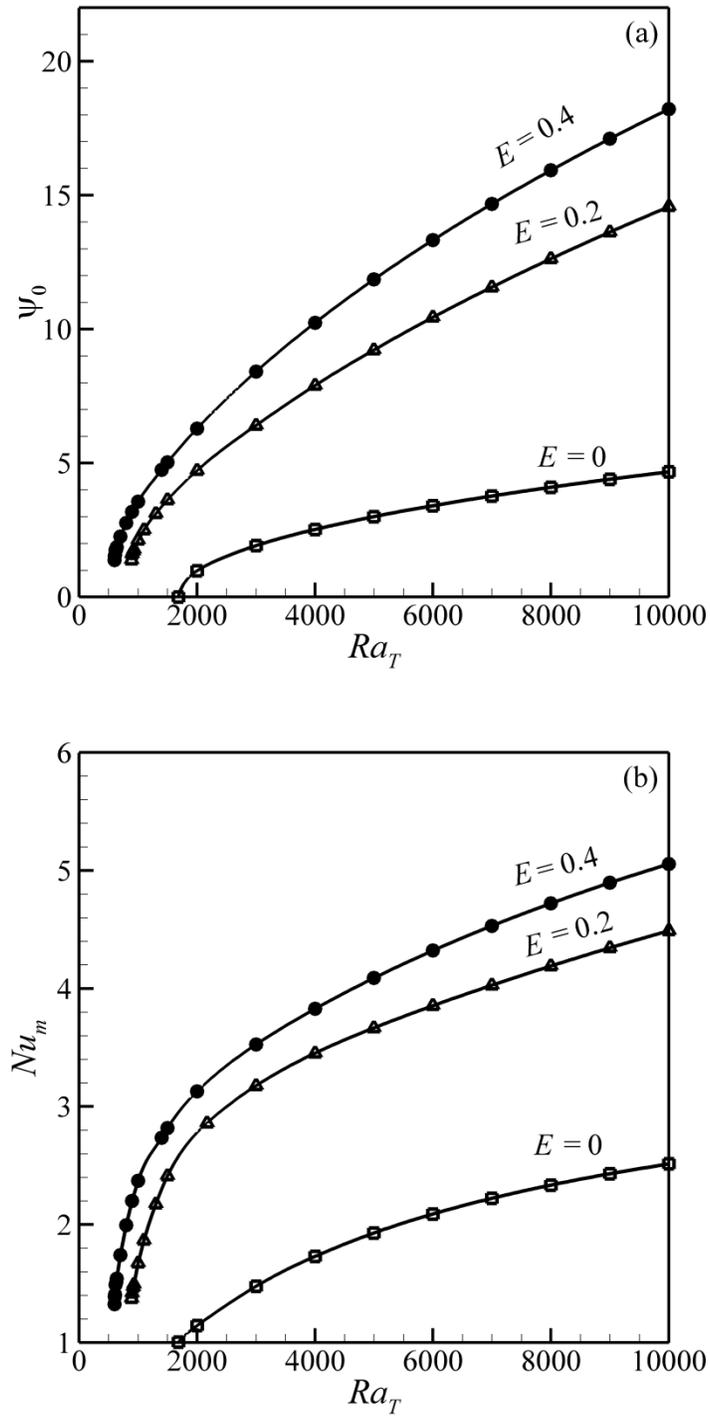


Figure 4.21 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de E avec $A = 1$, $n = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour des conditions thermiques de type Neumann.

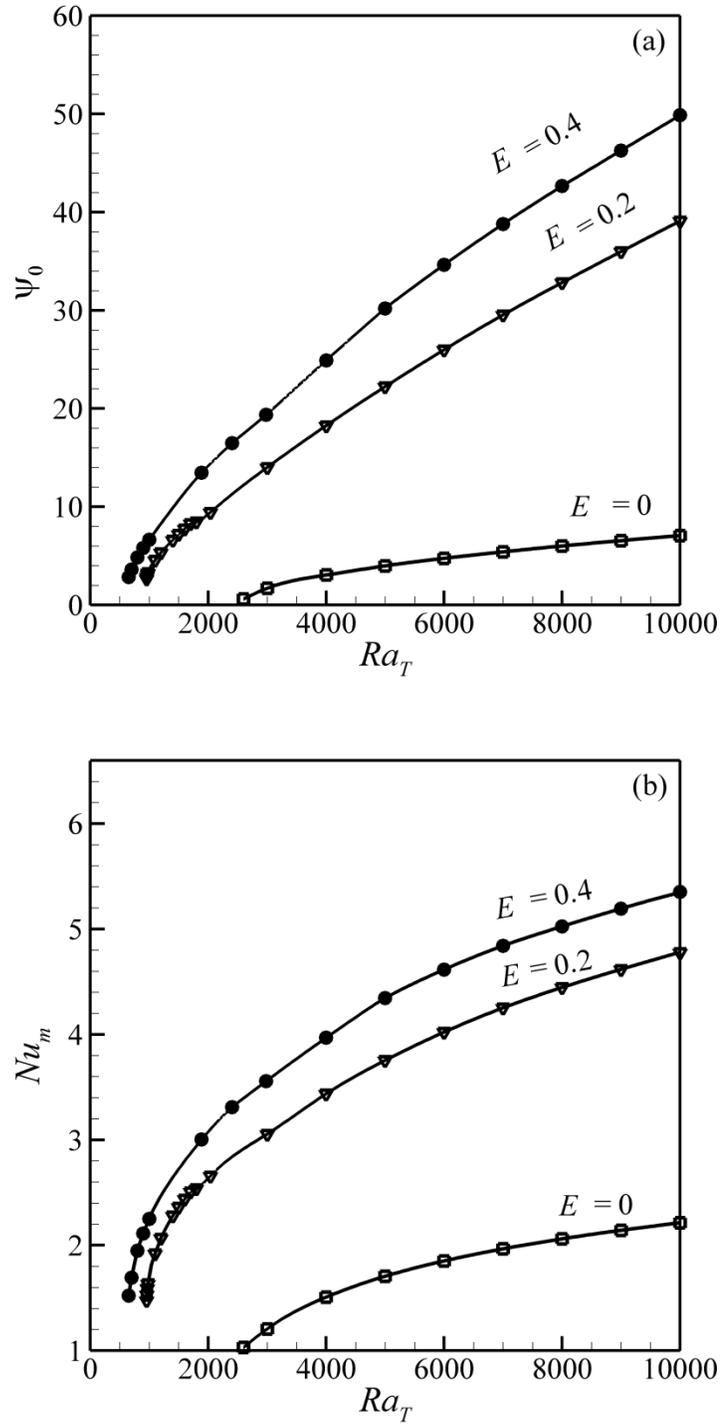


Figure 4.22 : Le diagramme de bifurcation: (a) intensité de l'écoulement versus Ra_T , et (b) Nu_m versus Ra_T , pour différentes valeurs de E avec $A = 1$, $n = 0.4$, $s = 0.01$ et $Pr = 10$ pour les conditions thermiques de type Dirichlet.

4.7. Conclusion

Dans ce chapitre, une étude numérique de la convection naturelle a été menée dans le cas d'une conduite rectangulaire et carrée remplie d'un fluide rhéofluidifiant obéissant au modèle de Carreau-Yasuda. Les résultats des simulations montrent que la circulation du fluide et le transfert convectif sont très affectés par les différents paramètres rhéologiques du modèle de CY. L'apparition de la convection sous-critique dépend aussi des paramètres rhéologiques du modèle considéré. En effet, cette dernière est accentuée au fur et à mesure que le fluide devient de plus en plus rhéofluidifiant. Nous avons constaté également, que l'apparition de la convection sous-critique dépend des différentes conditions aux limites aussi bien thermiques qu'hydrodynamiques.

5. CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Une étude numérique de la convection naturelle dans des cavités peu profondes rectangulaire et carrés remplies d'un fluide non-Newtonien et chauffées par le bas a été effectuée. Les résultats numériques nous ont permis de mieux appréhender les effets combinés des paramètres rhéologiques avec les différentes conditions aux frontières sur l'apparition de la convection critique, sous-critique, l'intensité d'écoulement et le taux de transfert de chaleur.

Les principales conclusions de la présente investigation sont résumées comme suit:

- ✓ Une diminution de l'indice de loi de puissance n , et une augmentation constante de temps E , améliore le caractère rhéofluidifiant du fluide et provoque le déclenchement précoce de l'apparition de la convection sous-critique.
- ✓ Le nombre de Nusselt est sensible à la fois à l'indice de loi de puissance n et à la constante de temps adimensionnelle E . Toutefois, une diminution de n et une augmentation de E améliore considérablement le taux de transfert de chaleur par convection.
- ✓ Pour les fluides rhéofluidifiants, les conditions aux limites hydrodynamiques sans glissement favorisent l'apparition de la convection sous-critique car au niveau de ses parois, le taux de cisaillement augmente et provoque une diminution de la viscosité du fluide.
- ✓ Une diminution des paramètres rhéologiques a et s déclenche une convection sous-critique, bien en dessous du seuil de convection supercritique. Cependant, l'effet de ces paramètres est moins important en comparaison avec ceux de n et E .

- ✓ Une transition rapide vers un écoulement oscillatoire est observée pour les faibles valeurs du paramètre n et les fortes valeurs du paramètre E .
- ✓ Pour la solution convective stable et pour des larges rapports de forme, les résultats issus de l'approximation de l'écoulement parallèle sont jugés en bon accord avec ceux obtenus par la résolution numérique des équations gouvernant générale du problème.
- ✓ Pour les fluides rhéofluidifiants obéissant au modèle de Carreau-Yasuda, l'étude de la stabilité linéaire a montré que le seuil de la convection supercritique est le même que celui des fluides Newtoniens.
- ✓ Pour des valeurs modérées du nombre de Rayleigh, l'écoulement monocellulaire n'est pas unique dans le cas des conditions aux limites thermiques du type Neumann, d'autre part ; les résultats numériques révèlent l'existence d'un écoulement multicellulaire
- ✓ Pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh, la solution parallèle montre que le nombre de Nusselt tend asymptotiquement vers la valeur Newtonienne $10/3$ et devient ainsi indépendant des paramètres rhéologiques n et E .

Recommandations et perspectives

Les perspectives envisagées sont nombreuses:

- en dépit de l'originalité des résultats obtenus, ce travail reste académique en l'absence des résultats expérimentaux. Il serait donc souhaitable de conduire des expériences avec des fluides non-Newtoniens (obéissant au modèle de Carreau-Yasuda) afin de rendre réaliste les conclusions de cette étude.
- Il serait aussi intéressant de considérer les configurations géométriques autres que celles étudiées dans ce mémoire. Nous proposons à titre indicatif le cas d'une cavité inclinée en gardant le même type de fluide et les mêmes

conditions aux frontières. Ceci nous permettra de voir de près le rôle de l'inclinaison, combiné avec celui du comportement rhéologique et des conditions aux frontières, sur la convection.

- Etudier l'effet stabilisateur d'un champ magnétique sur la convection des fluides non Newtoniens.
- Elaborer un code numérique en 3D afin d'étudier l'effet tridimensionnel.
- Une étude de la stable transitoire est souhaitable afin de déterminer les modes stables, instables et oscillants.
- Il serait souhaitable de faire une étude de la stabilité non-linéaire afin de voir l'effet des paramètres rhéologiques sur la structure d l'écoulement.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

- A : Rapport de forme de la cavité ; $A = H' / L'$
- C_T : Gradient de température dans la direction x
- E : Temps caractéristique adimensionnel ; $E = E' \alpha / H'^2$
- H' : Hauteur de la cavité, m
- L' : Largeur de la cavité, m
- $Nu(x)$: Nombre de Nusselt local.
- Nu_m : Nombre de Nusselt moyen.
- Pr : Nombre de Prandtl ; $Pr = \frac{\mu_0}{\rho_0 \alpha}$
- Ra_T : Nombre de Rayleigh thermique ; $Ra_T = \frac{\rho_0 g \beta \Delta T' H'^3}{\mu_0 \alpha}$
- Ra_T^{sous} : Nombre de Rayleigh sous-critique
- Ra_T^{sup} : Nombre de Rayleigh supercritique
- Ra_{TC} : Nombre de Rayleigh critique
- T : Température adimensionnelle
- T_H : Température adimensionnelle de la paroi chaude
- T_C : Température adimensionnelle de la paroi froide

- $\Delta T'$: Différence de température ; $\Delta T' = T'_H - T'_C$
- t : Temps adimensionnel
- a : Décrit la région de transition entre la viscosité à taux de cisaillement nul et la viscosité de la loi de puissance
- c_p : Chaleur calorifique à pression constante
- g : Accélération de la pesanteur, m/s^2
- k : Nombre d'onde de la perturbation
- n : Indice de la loi en puissance, paramètre réel
- q' : Flux de chaleur constant par unité de surface, W/m^2
- s : Rapport de la viscosité à taux de cisaillement infini sur taux de cisaillement nul ; $s = \mu_\infty / \mu_0$
- u : Composante de la vitesse adimensionnelle dans la direction x
- v : Composante de la vitesse adimensionnelle dans la direction y
- x, y : Coordonnées cartésiennes à partir du centre de la cavité

Symboles Grecs

- α : Diffusivité thermique du fluide, m^2/s
- β : Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
- $\dot{\gamma}$: Second invariant du tenseur de taux de déformation (taux de cisaillement)
- $\overset{=}{\dot{\gamma}}$: Tenseur du taux de déformation

- η : Viscosité apparente adimensionnelle
- λ : Conductivité thermique du fluide, W/mK
- μ : Viscosité dynamique d'un fluide Newtonien, $Pa s$
- ρ : Masse volumique du fluide, Kg/m^3
- $\bar{\tau}$: Tenseur déviateur des contraintes
- σ : Taux d'amplification de la perturbation
- Ω : Vorticité adimensionnelle
- ψ : Fonction du courant adimensionnelle ; $\psi = \frac{\psi'}{\alpha}$
- ξ : Valeurs propres

Exposants

- sous* : Valeur au seuil de la convection sous-critique
- sup* : Valeur au seuil de la convection supercritique
- ' : Variables dimensionnelles

RÉFÉRENCES

1. Ostrach, S., "Natural convection in enclosures", J. Heat Trans.,V.110,(1988), 1175-1190.
2. Chandrasekhar, S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover Publications, Inc., New York, (1961), p.
3. Bejan, A., "convection heat transfer", John Wiley and Sons Inc., New York, (1984), 477 p.
4. Platten, J.K., Legros, J.C., "Convection in Liquids", Springer Verlag, New York, (1984), p.
5. Ben Amara, S., "Ecoulement et transferts thermiques en convection naturelle dans les milieux macro-poreux alimentaires : Application aux r• éfrig• irateurs m• énagers", Institut National Agronomique Paris-Grignon, France,Thèse de Doctorat,(2005).
6. Koschmieder, E.L., Pallas, S.G., "Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer", Int. J. heat Mass Transfer,V.17,(1974), 991-1002.
7. Martinand, M.D., "Détermination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh-Bénard-Poiseuille", Université de Lille 1, Claude Bernard,These de Doctorat,(2003).
8. Newton, I., Du Châtelet, E., Toulmonde, M., "Principes mathématiques de la philosophie naturelle ", Centre International d'Etude du XVIIIe siècle, (1726 - relié 2015), 1086 p.
9. Ben Azouz Ahmed, K., "Relation entre propriétés rhéologiques et structure microscopique de dispersions de particules d'argile dans des dispersions de polymères", Université de haute Alsace,Thèse de Doctorat,(2010).

10. Chhabra, R.P., Richardson, J.F., "Fundamentals and Engineering Applications", Butterworth-Heinemann, (1999), 436 p.
11. Koller, E., "Transport et stockage des fluides dans l'industrie", Dunod, Paris, (2002), 416 p.
12. Bird, B.R., Armstrong, R.C., Hassager, O., "Dynamics of Polymeric Liquids", John Wiley and Sons Inc., New York, (1987), p.
13. Baird, C.G., Collias, D.I., "Polymer Processing: Principles and Design", John Wiley & Sons, New York, (1988), p.
14. Barnes, H.A., Hutton, J.F., Walters, K., "An Introduction to Rheology", Elsevier Science Publishers, (1989), 200 p.
15. Cross, M.M., "Rheology of Non-Newtonian Fluids. A new flow equation for pseudo-plastic systems ", J. of Colloid Sciences,V.20,(1965), 417-437.
16. Quemada, D., "Modélisation rhéologique structurelle", Lavoisier, (2006), 316 p.
17. Coelho, P.M., Pinho, F.T., "Vortex shedding in cylinder flow of shear-thinning fluids. III Pressure measurements", J. Non-Newtonian Fluid Mech,V.121,(2004), 55-68.
18. Parmentier, E.M., Turcotte, D.L., "Studies of finite amplitude non-Newtonian thermal convection with application to convection in the earth mantle", J. Geophys. Res. :Solid Earth Planets,V.81,(1976), 1839-1846.
19. Christensen, U., "Convection in a variable viscosity fluid: Newtonian versus power-law rheology", Earth planet. Sci. Lett.,V.64,(1983), 153-162.
20. Pierre, C.S., Tien, C., "Experimental investigation of natural convection heat transfer in confined space for non-Newtonian fluid", Can. J. Chem. Eng.,V.41,(1963), 122-127.

21. Ozoe, H., Churchill, S.W., "Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald–de Waele and Ellis fluids: The development of a numerical solution", *AIChE J.*,V.18,(1972), 1196-1207.
22. Tien, C., Tsuei, H.S., Sun, Z.S., "Thermal instability of a horizontal layer of non-Newtonian fluid heated from Below", *Int. J. Heat Mass Transfer*,V.12,(1969), 1173-1178.
23. Tsuei, H.S., Tien, C., "Free convection heat transfer in a horizontal layer of non-Newtonian fluid", *Can. J. Chem. Eng.*,V.51,(1973), 249-251.
24. Liang, S.F., Acrivos, A., "Experiments on buoyancy-driven convection in non-Newtonian fluid", *Rheol. Acta*,V.9,(1970), 447-455.
25. Khayat, R.E., "Chaos in the thermal convection of weakly shear-thinning fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*,V.63,(1996), 153-178.
26. Solomatov, V.S., "Scaling of temperature- and stress-dependent viscosity convection", *Phys. Fluids*,V.7,(1995), 266.
27. Solomatov, V.S., Barr, A.C., "Onset of convection in fluids with strongly temperature-dependent, power-law viscosity", *Phys. Earth Planet. Inter.*,V.155,(2006), 140–145.
28. Solomatov, V.S., "Localized subcritical convective cells in temperature-dependent viscosity fluids", *Phys. Earth Planet. Inter.*,V.200-201,(2012), 63–71.
29. Inaba, H., Dai, C., Horibe, A., "Numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection in non-Newtonian phase-change material slurries", *Int. J. Therm. Sci.* ,V.42,(2003), 471–480.
30. Li, Z., Khayat, R.E., "Finite-amplitude Rayleigh-Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids", *J. Fluid Mech.*,V.529,(2005), 221-251.

31. Lamsaadi, M., Naimi, M., Hasnaoui, M., "Natural convection of non-Newtonian power law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated from below", *Heat Mass Transfer*,V.41,(2005), 239-249.
32. Sekhar, G.N., Jayalatha, G., "Elastic effects on Rayleigh-Bénard convection in liquids with temperature-dependent viscosity ", *Int. J. Therm. Sci.*,V.49,(2010), 67–75.
33. Albaalbaki, B., Khayat, R.E., "Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids", *J. Fluid Mech.*,V.668,(2011), 500-550.
34. Turan, O., Chakraborty, N., Poole, R.J., "Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*,V.171-172,(2012), 83–96.
35. Kaddiri, M., Naimi, M., Raji, A., Hasnaoui, M., "Rayleigh-Bénard convection of non-newtonian power-law fluids with temperature-dependent viscosity", *ISRN Thermodyn.*,V.2012,(2012), 614712-614722.
36. Ben Khelifa, N., Alloui, Z., Beji, H., Vasseur, P., "Natural convection in a horizontal porous cavity filled with a non-Newtonian binary fluid of power-law type", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*,V.169-170,(2012), 15–25.
37. Alloui, Z., Ben Khelifa, N., Vasseur, P., Guizani, A., "The onset of convection of power-law fluids in a shallow cavity heated from below by a constant heat flux", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* ,V.196,(2013), 70–82.
38. Soong, C., Tzeng, P., Chiang, D., Sheu, T., "Numerical study on mode-transition of natural convection in differentially heated inclined enclosures", *Int J Heat Mass Transfer* V.39,(1996), 1869-1882.
39. Mukotmoni, D., Yang, K., "Thermal convection in small enclosures: an atypical bifurcation sequence", *Int J Heat Mass Transfer* V.38,(1995), 113-126.

40. Murty, V., "A numerical investigation of Bénard convection using finite elements", *Comp Fluids*,V.14,(1986), 379-391.
41. Howle, L., " A comparison of the reduced galerkin and pseudo-spectral methods for simulation of steady rayleigh-bénard convection", *Int J Heat Mass Transfer*,V.39,(1996), 2401-2407.
42. Yasuda, K., Armstrong, R.C., Cohen, R.E., "Shear-flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes", *Rheol. Acta*,V.20,(1981), 163-178.
43. Roland, N., "Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires", Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, These de Doctorat,(2010).
44. Boussinesq, J., "Théorie analytique de la chaleur", Gauthier-Villars, Paris, (1903), 666 p.
45. Oberbeck, A., "Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen", *Annalen der Physik und Chemie*,V.7,(1879), 271-292.
46. Gray, D.D., Giorgini, A., "The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases", *Int. J. Heat Mass Transfer*,V.19,(1976), 545–551.
47. Bois, P.A., "Mécanique théorique des fluides", Ellipses, (2000), p.
48. Woods, L.C., "A note of numerical solution of fourth differential equations", *Aero.Q.*,V.5,(1954), 176-184.
49. Demir, H., "Rayleigh-Bénard convection of viscoelastic fluid", *Appl. Math. Comput.*,V.136,(2003), 251–267.

50. Metivier, C., "instabilites thermoconvectives pour les fluides viscoelstiques", Institut National Polytechnique de Lorraine, these de doctorat, (2006).
51. Douglas Jr., J., Peaceman, D.W., "Numerical solution of two dimensional heat flow problems", AIChE J., V.1, (1955), 505–512.
52. Frankel, S.P., "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations", Math. Tables aids compt., V.4, (1950), 65-75.
53. Ouertatani, N., Ben Cheikh, N., Ben Beya, B., Lili, T., "Numerical simulation of two dimensional Rayleigh-Bénard convection in an enclosure", C. R. Mec, V.336, (2008), 464-470.
54. Venturi, D., Wan, X., Karniadakis, G., "Stochastic bifurcation analysis of Rayleigh-Bénard convection", J. Fluid Mech., V.650, (2010), 391-413.
55. Clever, R.M., Busse, F.H., "Transition to time-dependent convection", J. Fluid Mech., V.65, (1974), 625-645.
56. Cormack, D.E., Leal, L.G., Imberger, J., "Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory", J. Fluid Mech., V.65, (1974), 209-229.
57. Sen, M., Vasseur, P., Robillard, L., " Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer ", Int. J. Heat Mass Transfer, V.3, (1987), 587–598.
58. Alavyoon, F., Masuda, Y., Kimura, S., " on natural-convection in vertical porous enclosures due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls", Int. J. Heat Mass Transfer, V.37(2), (1994), 195-206.
59. Bennacer, R., Mahidjiba, A., Vasseur, P., Beji, H., Duval, R., "The soret effect on convection in a horizontal porous domain under cross temperature and

- concentration gradients", *Int. J. Num. Methods for Heat & Fluid Flow*, V.13(2-3), (2003), 199–215.
60. Bian, W., Vasseur, P., Bilgen, E., "Natural convection of non-Newtonian fluid in an inclined porous layer", *Chem. Eng. Commun.*, V.129, (1994), 79-97.
61. Mamou, M., Vasseur, P., Hasnaoui, M., "On numerical stability analysis of double diffusive convection in confined enclosures", *J. Fluid Mech.*, V.433, (2001), 209-250.
62. Trevisan, O.V., Bejan, A., "Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, V.29, (1986), 403-415.
63. Sparrow, E.M., Goldstein, R.J., Jonsson, R.J., "Thermal instability in a horizontal fluid layer: Effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile", *J. Fluid Mech.*, V.18, (1964), 513-528.
64. Lamsaadi, M., Naimi, M., Hasnaoui, M., Mamou, M., "Natural convection in a vertical rectangular cavity filled with a non-Newtonian power-law fluid and subject to a horizontal thermal gradient", *Numer. Heat Transfer*, V.49, (2006), 969–990.
65. Alloui, Z., Vasseur, P., "Natural convection of Carreau–Yasuda non-Newtonian fluids in a vertical cavity heated from the sides", *Int. J. Heat Mass Transfer* V.84, (2015), 912–924.
66. Benouared, O., Mamou, M., Nouar, C., Ait Messaoudene, N., Bouayed, N., Study of Natural Convection in a Horizontal Shallow Cavity Heated From Below Filled With a Non-Newtonian Fluid in: 15th International Meeting on Thermal Sciences, Tlemcen, Algeria, 2011.
67. Balmforth, N.J., Rust, A.C., "Weakly nonlinear viscoplastic convection", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, V.158, (2009), 36–45.

68. Benouared, O., Mamou, M., Numerical study of subcritical thermal convection in non-Newtonian fluid, in: CONV-14: Int. Symp. on Convective Heat and Mass Transfer, Turkey, 2014.
69. Jenny, M., Plaut, E., Briard, A., "Numerical study of subcritical Rayleigh–Bénard convection rolls in strongly shear-thinning Carreau fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, V.219 (2015), 19–34.
70. Benouared, O., Mamou, M., Ait Messaoudene, N., "Numerical nonlinear analysis of subcritical Rayleigh–Bénard convection in a horizontal confined enclosure filled with non-Newtonian fluids", *Phys. Fluids*, V.26,(2014), 1-22.