

**UNIVERSITE BLIDA1**  
**Faculté de Technologie**  
Département de Mécanique

**THESE DE DOCTORAT**  
en Génie Mécanique  
Spécialité : Construction Mécanique

ANALYSE D'UNE FISSURE DE GRIFFITH A L'INTERFACE DE DEUX  
CERAMIQUES PIEZO-ELECTRIQUES SOUS CHARGEMENT ANTI-PLAN

Par

**Mustapha GHERROUS**

devant le jury composé de :

M. Ouali	Professeur, Université Blida1	Président
N.E. Bacha	Professeur, Université Blida1	Examineur
E. Ailam	Professeur, Université de Khémis-Miliana	Examineur
M. Gaceb	Professeur, Université de Boumerdes	Examineur
A. Mahieddine	MCA, Université de Khémis-Miliana	Examineur
H. Ferdjani	Professeur, Université Blida1	Rapporteur

Blida, Novembre 2016

## RESUME

L'objectif de ce travail est de contribuer à l'étude des structures piézo-électriques contenant des défauts internes initiales (fissures). Pour cela, on considère une fissure de Griffith à l'interface de deux céramiques piézo-électriques dans une structure plane semi-infinie. La structure est soumise à un cisaillement anti-plan combiné avec une induction électrique plane. En utilisant les transformées de Fourier, les équations de la piézoélectricité sont converties analytiquement en équations intégrales singulières. Les équations intégrales singulières sont ensuite réduites en un système d'équations algébriques et résolues numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev. Le facteur d'intensité de contrainte et le facteur d'intensité de l'induction électrique sont calculés et utilisés pour la détermination du taux de restitution d'énergie qui sera pris comme critère de rupture. A la fin, des résultats numériques sont présentés pour différents paramètres du problème; ils sont également présentés pour une structure plane infinie.

## ABSTRACT

The main objective of this work is the contribution to the study of the piezoelectric structures which contain preexisting defect (crack). For that, we consider a Griffith crack located at the interface of two piezoelectric ceramics in a semi-infinite plane structure. The structure is subjected to an anti-plane shearing combined with an in-plane electric displacement. Using integral Fourier transforms, the equations of piezoelectricity are converted analytically to a system of singular integral equations. The singular integral equations are further reduced to a system of algebraic equations and solved numerically by using Chebychev polynomials. The stress intensity factor and the electric displacement intensity factor are calculated and used for the determination of the energy release rate which will be taken as fracture criterion. At the end, numerical results are presented for various parameters of the problem; they are also presented for an infinite plane structure.

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو المساهمة في دراسة الهياكل الكهروضغطية التي تحتوي على عيوب داخلية أولية (شقوق). لهذا، فإننا نعتبر شق Griffith في واجهة اثنين من المواد الكهروضغطية في هيكل مستوي شبه لا نهائي. يخضع الهيكل إلى القص في عكس المستوي جنباً إلى جنب مع الحث الكهربائي في المستوي. باستخدام تحويلات Fourier، يتم تحويل المعادلات الكهروضغطية إلى معادلات تكاملية شاذة من الناحية التحليلية. ثم يتم تحويل المعادلات التكاملية الشاذة من خلال نظام من المعادلات الجبرية وحلها عددياً باستخدام كثيرات الحدود Chebychev. يتم احتساب عامل شدة التوتر وعامل شدة الحث الكهربائي وتستخدم لتحديد معدل إطلاق الطاقة التي تؤخذ على أنها معيار الكسر. في النهاية، يتم عرض النتائج العددية للوسائط المختلفة للمشكلة. وتعرض أيضاً لهيكل مستوي لا نهائي.

## Remerciements

Tout d'abord je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce travail.

Je remercie Mr H. Ferdjani mon directeur de thèse de m'avoir proposé ce sujet de recherche intéressant et passionnant à la fois. Je le remercie aussi pour sa pédagogie de travail, sa disponibilité et son soutien.

Je remercie également tout les membres du jury de l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'examiner et de juger ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Enfin, un grand merci à tout ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et à ceux qui m'ont encouragé durant ce travail.

## TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	2
TABLE DES MATIERES	3
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	5
INTRODUCTION	7
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	9
1.1. Mécanique de la rupture	9
1.1.1. Historique	11
1.1.2. Modes de fissuration	12
1.1.3. Facteur d'intensité de contrainte	12
1.1.4. Taux de restitution d'énergie	13
1.2. Matériaux piézoélectriques	13
1.2.1. Historique	14
1.2.2. Classement	14
1.2.2.1. Les oxydes ferroélectriques	15
1.2.2.2. Le quartz et les composés analogues	15
1.2.2.3. Les semi-conducteurs	15
1.2.2.4. Les polymères	16
1.2.2.5. Les sels	16
1.2.3. Mise en forme et procédés	16
1.2.3.1. Céramiques	16
1.2.3.2. Composites	16
1.2.3.3. Couches minces	17
1.2.4. Thermodynamique, coefficients et tenseurs piézoélectriques	17
1.2.5. Applications	17
1.2.5.1. Transducteurs acoustiques	17
1.2.5.2. Résonateurs piézoélectriques	18
1.2.5.3. Capteurs de pression ou d'accélération	18
1.2.5.4. Actionneurs et moteurs piézoélectriques	19
1.2.5.5. Générateurs et transformateurs	19
1.2.5.6. Filtres	19
1.3. Quelques problèmes de fissures à l'interface entre deux matériaux différents	20
1.4. Quelques problèmes de fissures à l'interface entre deux matériaux différents dans le cas de matériaux piézoélectriques	22
1.5. Conclusion	26

2. PRESENTATION DU PROBLEME	27
2.1. La structure étudiée	27
2.2. Etablissement de l'équation intégrale	31
2.2.1. Transformé de Fourier	31
2.2.2. Dérivation des équations intégrales	31
2.3. Résolution des équations intégrales	43
2.3.1. Valeur principale de Cauchy	43
2.3.2. Résolution numérique des équations intégrales	44
3. FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE ET DE L'INDUCTION ELECTRIQUE ET TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE	48
3.1. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique aux pointes de la fissure $\pm l_0$	48
3.2. Calcul du taux de restitution d'énergie	54
4. PROCEDURE NUMERIQUE ET APPLICATIONS	60
4.1. Etude d'une fissure interne dans le cas d'un seul matériau	60
4.1.1. Détermination de $A$	61
4.1.2. Détermination de $N$	62
4.1.3. Détermination de $n$	63
4.1.4. Détermination des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique	64
4.1.5. Etude de l'influence des différents paramètres du problème	68
4.1.5.1. Etude de l'influence du paramètre $h$	68
4.1.5.2. Etude de l'influence du paramètre $l_0$	69
4.1.5.3. Discussion des résultats	71
4.2. Etude d'une fissure à l'interface de deux matériaux différents	72
4.2.1. Etude de l'influence des différents paramètres du problème	73
4.2.1.1. Etude de l'influence du paramètre $h$	73
4.2.1.2. Etude de l'influence du paramètre $l_0$	73
4.2.1.3. Discussion des résultats	78
CONCLUSION	80
APPENDICE	82
A. Liste des symboles	82
B. Operateur mathématique	84
REFERENCES	86

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Différents Modes de sollicitations	11
Figure 2.1	Géométrie du problème initial	27
Figure 2.2	Décomposition du problème initial	30
Figure 4.1	Fissure à l'interface de deux matériaux	49
Figure 5.1	Définition du contour de Rice pour le calcul de $J$	54
Figure 4.1	Variation du facteur de forme $Y$ en fonction de $(l_0/h)$	67
Figure 4.2	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $h$	68
Figure 4.3	Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de $h$	69
Figure 4.4	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $l_0$	70
Figure 4.5	Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de $l_0$	70
Figure 4.6	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $h$ (PZT-4/5H)	74
Figure 4.7	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $h$ (PZT-5H/4)	74
Figure 4.8	Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de $h$ (PZT-4/5H)	75
Figure 4.9	Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de $h$ (PZT-5H/4)	75
Figure 4.10	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $l_0$ (PZT-4/5H)	76
Figure 4.11	Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de $l_0$ (PZT-5H/4)	76

Figure 4.13	Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de $l_0$ (PZT-5H/4)	77
Tableau 4.1	Valeurs de $K_{III}$ et $K_{IV}$ en fonctions de $N$	62
Tableau 4.2	Valeurs des $H_n^{ij}(r)$ en fonction de $n$	63
Tableau 4.3	$K_{III}(\pm l_0)$ , $K_{IV}(\pm l_0)$ et $Y$ en fonction de $h$	65

## INTRODUCTION

Dans un passé récent, un très grand progrès a été réalisé dans le développement des matériaux aux propriétés mécaniques, électriques et optiques spéciales utilisés dans l'engineering. Les matériaux piézo-électriques sont des matériaux récents utilisés pour générer une charge électrique à partir d'une force mécanique appliquée (effet piézo-électrique direct) et une force mécanique à partir d'une charge électrique (effet piézo-électrique inverse). Ces propriétés les ont rendu très utilisés dans les instruments de détection, les transformateurs d'énergie, les condensateurs, les actionneurs, etc...

Pour une bonne application de ces matériaux, il faut connaître leurs comportements vis-à-vis de la mécanique de la rupture. En conséquence, de nombreuses études ont été élaborées pour connaître l'aspect physique des fissures contenues dans ces matériaux. La plupart de ces études sont basées sur l'influence du champ électrique sur le comportement de rupture des matériaux piézo-électriques.

De nombreux critères de rupture par fissuration ont été proposés. Parmi lesquels, l'intensité de la contrainte [1], le taux de restitution d'énergie [2-4], le vecteur de densité d'énergie de déformation [5-7], le taux de restitution d'énergie local [8], le taux de restitution d'énergie de déformation mécanique [9], etc... Dans ces études l'axe de recherche portait en général soit sur le mode de fissuration ; mode I [1,10-11], mode II [12] (pour des matériaux composites laminés), mode III [13-18], mode mixte [19], soit sur le modèle ; modèle de Griffith [11,20-21], modèle de Dugdale-Barrenblatt [22-23], soit sur la position de la fissure dans la structure ; plan infini [4,10], plan semi-infini [22] (matériau non piézo-électrique) ou soit encore sur la composition de la structure ; un seul matériau [4], deux matériaux [24-25].

Récemment, les problèmes des fissures d'interfaces dans des structures composées de matériaux piézo-électriques différents ont suscité une attention



considérable dans la littérature. KUO et BARNETT [26], sont peut-être les premiers à aborder ce domaine. Pour des fissures d'interfaces imperméables contenues dans des structures piézo-électriques anisotropiques (bi-matériaux) SUO et al. [1] ont utilisé le théorème de Stroh et ont formulé des solutions fondamentales pour les problèmes d'interface. D'autres contributions dans ce domaine peuvent être observées dans [24, 27-35], où sont exposées des solutions analytiques concernant les fissures d'interfaces imperméables, perméables ou conductrices.

À notre connaissance, il n'y a aucun travail dans la littérature sur le comportement électro-élastique d'une fissure d'interface contenue dans une structure piézo-électrique semi-infinie composée de deux matériaux différents. Particulièrement, le cas d'une fissure en mode III dans une structure semi-infinie (deux matériaux piézo-électriques de différentes épaisseurs collés l'un à l'autre) soumise à un chargement électromécanique n'a pas encore été étudié.

Dans notre présent travail on se propose d'étudier la croissance de la fissure par une étude numérique en se basant sur le taux de restitution d'énergie, dans le cas d'une fissure d'interface imperméable (entre deux matériaux différents) en utilisant le modèle de Griffith. Le document est organisé comme suit. Une recherche bibliographique portant sur la mécanique de la rupture, les matériaux piézo-électriques, les travaux de recherches sur des problèmes de fissurations dans les matériaux en général et dans les matériaux piézo-électriques en particulier, est abordée au chapitre 1. Le chapitre 2 est consacré à la présentation du problème (équations d'équilibre, conditions aux limites, équations intégrales singulières), ainsi qu'à la dérivation et résolution des équations intégrales singulières par l'utilisation des transformées de Fourier et des polynômes de Chebychev. Les facteurs d'intensité de contrainte FIC et d'intensité de l'induction électrique FIIE ainsi que le taux de restitution d'énergie TRE sont déterminés dans le chapitre 3. Le chapitre 4 est réservé à la procédure numérique et à la discussion des résultats obtenus. A la fin, une conclusion générale est présentée.

## **CHAPITRE 1**

### **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

#### 1.1 Mécanique de la rupture :

##### 1.1.1 Historique :

Durant la seconde moitié du 19<sup>ème</sup> siècle, l'usage de l'acier et d'autres alliages métalliques se développa considérablement. Avec cet essor se multiplièrent aussi les accidents dus à l'utilisation inadéquate de ces matériaux, ainsi qu'à des faiblesses de conception et dimensionnement. Certains de ces accidents, de part de leur soudaineté et leurs brutalités, défrayèrent à raison la chronique. En janvier 1919, un énorme réservoir de molasse, de 27 mètres de diamètre et 15 mètres de hauteur se déchira soudainement, répandant 7.5 millions de litres de molasse dans les rues de Boston (USA). Douze personnes trouvèrent la mort et une quarantaine furent blessés dans cet accident. Dans les années 30 et 40, plusieurs ponts Vierendeel franchissant le canal Albert, en Belgique, furent victimes de ruptures fragiles. L'un deux s'effondra même complètement, un matin de mars 1938, par temps très froid.

Bien, que de nombreux autres accidents aient été reportés, ce ne fut qu'au cours de la seconde guerre mondiale que l'on commença à sérieusement considérer le problème de la rupture fragile.

En janvier 1943, un pétrolier en construction soudée, le Schenectady se brisa complètement en deux parties. Durant les dix années suivantes, plus de deux cents navires construits pour les besoins de la guerre furent plus au moins sévèrement endommagés par des ruptures fragiles. Parmi eux, neuf cargos T-2 et sept Liberty Ships se brisèrent totalement. La plupart de ces ruptures prirent naissance en des points de concentrations de contraintes. Durant la même période, des centaines d'incidents plus mineurs furent reportés, concernant des réservoirs sous pression, des ponts, des pièces de machines ou d'outillages mécaniques. La plupart de ces structures étaient soudées. Le développement du microscope électronique a mis en évidence que les défauts fortement concentrés aux environs des soudures peuvent exister en tous points d'une structure, même

en l'absence de tout traitement thermique ou mécanique. Par ailleurs de nombreux accidents ont montrés que de tels défauts peuvent conduire à des ruptures brutales et parfois catastrophiques lorsque les conditions de chargement et d'environnement sont propices

Ces incidents, bien que n'ayant affecté qu'un faible pourcentage du tonnage total de structures métalliques construites à cette époque, suffirent à initier un vaste courant de recherche sur le sujet. Ceci n'évita cependant pas quelques accidents spectaculaires et meurtriers. Dans les années 50, deux avions Comet se brisèrent en vol à haute altitude. L'expertise indiqua que la rupture avait pris naissance par fatigue sur des trous de rivets près des hublots, lesquels étaient carrés ! en 1972, une barge de 175 mètres de long se brisa en deux après une année de service seulement. Enfin en 1967, la rupture fragile du pont de Point Pleasant, en Virginie, causa la mort de quarante six personnes.

Bien que ces ruptures soient finalement en nombre très faible, par comparaison avec celles causées par surcharge (plastification) ou instabilité, elles sont particulièrement dangereuses. En effet, elles ne peuvent que difficilement être détectées à l'avance, car elles se produisent avec peu ou pas de déformation préalable. Par ailleurs, une fois initiée, la rupture fragile se propage à une vitesse telle (2000 m/s) que toute action corrective est impossible. Ces caractères justifient l'immense effort de recherche qui y a été consacré et qui a abouti à la création d'une nouvelle discipline : la mécanique de la rupture, qui peut se définir comme la science de l'étude du comportement d'une structure avec ses défauts. Son but est de déterminer quelles sont les dimensions critiques de ces défauts, c'est-à-dire celles qui, sous certaines conditions de charge et d'environnement, conduiraient à des ruptures non prévisibles. La mécanique de la rupture envisage donc les ruptures fragiles, par fatigue, par corrosion sous tension ou par fatigue corrosion [36].

Bien que relativement récente, puisque ses principes fondamentaux ne furent développés qu'après la seconde guerre mondiale, la mécanique de la rupture s'est déjà montrée être un outil de conception extrêmement efficace.

L'objet de la mécanique de la rupture est de déterminer l'évolution d'une ou plusieurs fissures dans une structure en fonction du chargement auquel elle est

soumise. Le cadre de la mécanique de la rupture fragile se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus supposés élastiques. Cette hypothèse, bien qu'idéaliste, reste le cadre d'étude de nombreux chercheurs et ingénieurs préoccupés de sûreté concernant la propagation de défauts dans les structures en service. C'est le cadre que nous avons choisi pour nos travaux. Nous commençons par donner un bref rappel des principaux concepts de la mécanique de la rupture fragile. Nous orientons le lecteur intéressé vers les ouvrages de références, ([37] par exemple). Dans ce formalisme, les principaux résultats ont été obtenus à partir de la théorie de GRIFFITH [38]. Ce dernier associe à toute fissure une énergie de surface proportionnelle à sa longueur. Il postule qu'il y aura propagation et donc augmentation de l'énergie de surface si cette dernière est parfaitement compensée par la restitution de l'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Dans le cas de problèmes quasi-statiques ce critère peut se formuler en terme de taux de restitution d'énergie élastique usuellement noté  $G$ . Ce dernier correspond à la variation d'énergie potentielle lors d'un accroissement infinitésimal de la fissure. Le critère de GRIFFITH stipule alors qu'il n'y aura pas propagation tant que  $G$  est inférieur à  $G_c$  (taux de restitution d'énergie critique correspondant à la ténacité du matériau).

### 1.1.2. Modes de fissuration :

L'ouverture subie par une fissure est décomposée en trois modes élémentaires définis par rapport au plan de symétrie local de la fissure (Figure 1.1).

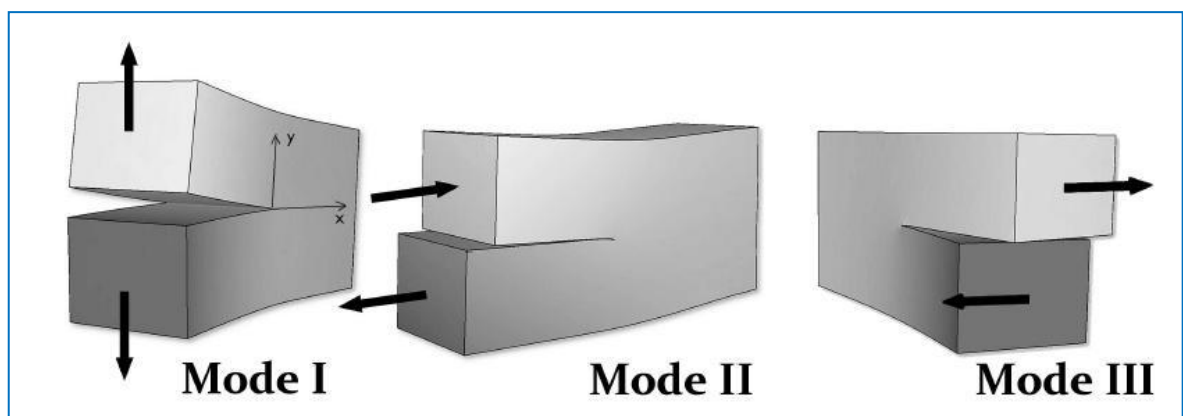


Figure 1.1: Différents modes de sollicitations : I ouverture, II cisaillement plan, III cisaillement anti-plan.

- Le mode I d'ouverture: partie symétrique du champ de déplacement par rapport au plan de la fissure.
- Le mode II de cisaillement plan: partie antisymétrique du champ de déplacement par rapport au plan de la fissure.
- Le mode III de cisaillement anti-plan: partie anti-plane du champ de déplacement par rapport au plan de la fissure.

### 1.1.3. Facteur d'intensité de contrainte :

La mécanique de la rupture est une philosophie de conception visant à développer un critère de ruine prenant en considération les fissures existant au sein du matériau. Pour cela, il importe de pouvoir comparer un facteur de charge à un paramètre des caractéristiques du matériau. La première étape consiste donc en la définition d'un facteur caractérisant la sévérité de la situation obtenue par l'application d'une charge sur une pièce fissurée. Ce facteur s'obtient par considération des contraintes et déformations au voisinage du front de fissure, pour les trois modes de fissuration élémentaires illustrés sur la Figure (1.1). Les facteurs  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  associés aux trois modes caractérisent à la fois la géométrie de la structure, la taille de la fissure, et la nature de sollicitations. Ils sont appelés facteurs d'intensité de contrainte et s'expriment en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Ils suffisent à caractériser la sévérité d'une situation et donc constituent l'un des deux éléments du critère de ruine précédemment annoncé.

### 1.1.4. Taux de restitution d'énergie :

La première approche énergétique de la fissuration fut proposée par GRIFFITH en 1920 [38]. Elle se base sur un bilan énergétique d'une structure fissurée en utilisant le formalisme de la thermomécanique. Le principe de conservation énergétique impose que l'énergie totale d'une structure fissurée ne varie pas. Le taux de restitution d'énergie représente donc l'énergie restituée de la structure à la fissure lors de propagation. Il constitue le deuxième élément du critère de ruine précédemment annoncé. Par la suite, IRWIN [39] montre que dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope homogène en trois dimensions ce taux de restitution d'énergie peut, pour une fissure rectiligne, être relié aux facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II et III.

## 1.2. Matériaux piézo-électriques :

### 1.2.1. Historique :

La piézo-électricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique. Les deux effets sont indissociables. Le premier est appelé effet piézo-électrique direct ; le second effet piézo-électrique inverse. Cette propriété trouve un très grand nombre d'applications dans l'industrie et la vie quotidienne. Une application parmi les plus familières est l'allume-gaz. Dans un allume-gaz, la pression exercée produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles : c'est une application de l'effet direct. De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézo-électrique en automobile, nano manipulateur,...).

Les matériaux piézo-électriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour créer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourd'hui dans l'industrie. En 2010, le marché des dispositifs piézo-électriques est estimé à 14,8 milliards de dollars.

La première démonstration de l'effet piézo-électrique direct est due à Pierre et Jacques Curie en 1880. À cette époque, les deux frères, âgés respectivement de 21 et 25 ans, sont tous deux préparateurs à la faculté des sciences de Paris. Combinant leurs connaissances de la pyroélectricité et de la structure cristalline, ils prédirent et vérifièrent l'existence de la piézo-électricité sur des cristaux de quartz, de tourmaline, de topaze, de sucre et de sel de Rochelle. L'existence de l'effet inverse fut prédite l'année suivante par Gabriel Lippmann sur la base de calculs thermodynamiques [40], et immédiatement vérifiée par les Curie [41]. C'est également en 1881 que Wilhelm Hankel (de) suggéra l'utilisation du terme piézo-électricité du grec « piezin » signifiant presser, appuyer.

La première application de la piézo-électricité fut le sonar développé par Paul Langevin et ses collaborateurs pendant la Première Guerre mondiale. Ce

sonar était composé de lames de quartz collées entre deux plaques d'acier et d'un hydrophone et permettait, par la mesure du temps écoulé entre l'émission d'une onde acoustique et la réception de son écho, de calculer la distance à l'objet. Peu de temps après, au début des années 1920, le premier oscillateur à quartz est mis au point par Walter Cady, ouvrant ainsi la voie au contrôle de fréquence [42].

Le succès de ces projets suscita un grand intérêt pour la piézo-électricité, relança les recherches et conduisit à travers les années qui suivirent au développement de nouveaux dispositifs pour une large palette d'applications dans la vie quotidienne, l'industrie et la recherche. L'amélioration du phonographe ou le développement du réflectomètre et du transducteur acoustique, largement utilisé pour les mesures de dureté ou de viscosité, en sont des exemples. Pendant cette période, les principaux matériaux utilisés sont le quartz, le sel de Seignette et le dihydrogène phosphate de potassium  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ .

Au cours de la Seconde Guerre mondiale, la recherche de matériaux diélectriques plus performants amena différents groupes de recherche au Japon, aux États-Unis et en Russie à découvrir les propriétés piézo-électriques de céramiques de synthèse composées d'oxydes à structure pérovskite : le titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) puis les titano-zirconate de plomb ( $\text{PbZr}_x\text{Ti}_{1-x}\text{O}_3$ ) abrégé en PZT. La mise au point de ces matériaux représente une étape décisive dans le développement des dispositifs piézo-électriques. En effet, leurs propriétés sont globalement bien meilleures ; ils ont des coefficients piézo-électriques de l'ordre de 100 fois supérieurs à ceux des cristaux naturels. Mais surtout, il est possible avec ces céramiques synthétiques de jouer sur différents paramètres de synthèse et ainsi d'ajuster les propriétés du matériau pour une application précise. En particulier, le dopage par divers ions métalliques permet de modifier considérablement leur constante diélectrique, leur dureté, leur usinabilité, etc..

### 1.2.2. Classement :

#### 1.2.2.1. Les oxydes ferroélectriques :

Les matériaux ferroélectriques de structure pérovskite occupent une large place dans la palette des oxydes piézo-électriques. De nombreux ferroélectriques modèles appartiennent à cette famille : le titanate de plomb  $\text{PbTiO}_3$ , le titanate de

baryum  $\text{BaTiO}_3$ , le niobate de potassium  $\text{KNbO}_3$  et le plus couramment utilisé des piézo-électriques, le titano-zirconate de plomb ( $\text{Pb}(\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$  abrégé en PZT). On peut citer aussi le niobate de lithium  $\text{LiNbO}_3$  et le tantalate de lithium  $\text{LiTaO}_3$  qui forment une famille à part de par leurs compositions et sont particulièrement utilisés sous forme de monocristaux dans les dispositifs à ondes acoustiques de surface. Enfin on peut citer aussi les cristaux langasites (dont le langasite de composition  $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$ ).

#### 1.2.2.2. Le quartz et les composés analogues :

Le quartz ( $\text{SiO}_2$ ) est un matériau piézo-électrique important de par son rôle dans l'histoire de la piézo-électricité ainsi que par ses applications. Contrairement à la famille précédente, ces composés ne sont pas ferroélectriques. Ils ont en général des coefficients piézo-électriques et des couplages électromécaniques plus faibles que les oxydes ferroélectriques. Mais ils ont d'autres avantages. Le quartz notamment présente une combinaison unique de propriétés remarquables dont la stabilité, la piézo-électricité, la faible solubilité dans la plupart des solvants, la facilité d'usinage, l'abondance naturelle, etc..

#### 1.2.2.3. Les semi-conducteurs :

Parmi les matériaux modèles, on peut citer le nitrure d'aluminium ( $\text{AlN}$ ) et l'oxyde de zinc ( $\text{ZnO}$ ). L'effet piézo-électrique dans ces structures reste assez peu exploité en pratique, mais il joue un rôle important dans la compréhension des diverses propriétés de ces matériaux, particulièrement dans les nanostructures [43].

#### 1.2.2.4. Les polymères :

L'étude des effets piézo-électriques dans des polymères naturels d'origine biologique (cellulose, collagène, etc.) remonte aux années 1950 [44]. On peut citer par exemple la polyvinylidène difluorure (PVDF) et ses dérivés [45] qui sont couramment utilisés dans l'industrie. Ils présentent d'autres propriétés qui les rendent très utiles : impédance acoustique plus faible, faible permittivité diélectrique, faible conductivité thermique. De plus, ils sont flexibles et on peut les fabriquer sur de grandes surfaces à des coûts modérés. Ils sont utilisés en couche



mince de 6 à 25 microns pour la réalisation de transducteurs, d'hydrophones, de détecteurs, etc..

#### 1.2.2.5. Les sels :

Les sels piézo-électriques les plus significatifs sont le sel de Rochelle et les composés de la famille du Phosphate de potassium  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ . Ils sont ferroélectriques, mais avec des propriétés et des mécanismes très différents des oxydes décrits précédemment.

#### 1.2.3. Mise en forme et procédés :

Indépendamment de sa composition chimique, un matériau piézo-électrique peut être étudié et utilisé sous différentes formes.

##### 1.2.3.1. Céramiques :

Une céramique est composée de grains soudés entre eux par frittage. Les grains sont orientés statistiquement dans toutes les directions ; leur taille peut être contrôlée par les conditions de fabrication. C'est la forme la plus utilisée, principalement en raison de leur facilité de fabrication et des nombreuses propriétés qu'on peut obtenir en faisant varier la composition chimique, les paramètres de la fabrication, etc..

##### 1.2.3.2. Composites :

Dans un composite, le matériau piézo-électrique est divisé et plongé dans une matrice non piézo-électrique (une résine). Les composites ont montré leur intérêt par rapport aux céramiques conventionnelles dans le domaine des transducteurs acoustiques hautes fréquences pour l'imagerie : leur meilleur coefficient de couplage électromécanique et leur impédance acoustique plus adaptée permettent d'améliorer la résolution des images [46].

##### 1.2.3.3. Couches minces :

La piézo-électricité est une propriété à la base des microsystèmes électromécaniques (MEMS) comme les micromoteurs, les micros valves, les accéléromètres ou les membranes. Les avantages des couches minces piézo-électriques sont notamment leur faible puissance de fonctionnement, l'importance

des forces produites et les larges gammes de fréquences d'utilisation. Les couches sont en général fabriquées par un procédé sol-gel et ont une épaisseur comprise typiquement entre 0,5 et 5 microns. Le matériau le plus utilisé est là aussi le PZT.

#### 1.2.4. Thermodynamique, coefficients et tenseurs piézo-électriques :

Dans une approche thermodynamique, la piézo-électricité est un cas particulier de phénomène de couplage: le couplage entre les phénomènes élastiques et diélectriques d'un système. Selon les postulats de thermodynamique, on peut caractériser entièrement le système à l'équilibre par la donnée de variables extensives. Il s'agit ici de l'entropie, de la déformation et de la polarisation du système. En jouant sur ces trois grandeurs, on aboutit aux constantes piézo-électriques, aux équations constitutives de la piézo-électricité et aux tenseurs piézo-électriques (matrices carrées).

#### 1.2.5. Applications :

##### 1.2.5.1. Transducteurs acoustiques :

Les matériaux piézo-électriques permettent de convertir une onde acoustique en signal électrique et inversement. Ils constituent le cœur des transducteurs acoustiques utilisés pour émettre ou détecter des ondes acoustiques dans toutes les gammes de fréquences. On les retrouve dans les microphones de contact , les haut-parleurs des téléphones portables, les sonars utilisés de la marine, les applications d'échographies en médecine, etc..

##### 1.2.5.2. Résonateurs piézo-électriques :

Il est possible de réaliser des résonateurs piézo-électriques très stables au cours du temps et avec des fréquences très précises. La vibration piézo-électrique très stable permet de réaliser des références de temps exploitables en électronique. Les montres à quartz utilisent la résonance d'un diapason en quartz pour créer les impulsions régulières d'horloge. Les microbalances piézo-électriques, et particulièrement les microbalances à quartz, reposent également sur ce principe et permettent des mesures de masses très précises.

#### 1.2.5.3. Capteurs de pression ou d'accélération :

Une pression exercée sur un matériau piézo-électrique crée des charges que l'on peut mesurer électroniquement. Des capteurs de pression piézo-électriques sont utilisés notamment pour l'automobile (pression des pneus), l'aéronautique (pression dans les tuyères), des pèse-personnes, ou la musique (batterie électronique). Sur le même principe, il est possible de mesurer une accélération. On peut ainsi réaliser des capteurs inertiels (accéléromètre à lame vibrante, gyromètre vibrant Coriolis) qui peuvent être utilisés dans les centrales à inertie ou plus couramment dans des applications de plus basse précision : airbag (coussin gonflable de sécurité), guidage, manette de console de jeu vidéo, etc..

#### 1.2.5.4. Actionneurs et moteurs piézo-électriques :

Les actionneurs et moteurs piézo-électriques tirent profit de l'effet piézo-électrique inverse : dans ces dispositifs, un champ électrique est utilisé pour commander une déformation ou un déplacement. On appelle actionneur piézo-électrique des actionneurs monoblocs contrôlables, utilisant la déformation induite par une tension électrique pour entraîner le déplacement. Les moteurs piézo-électriques se distinguent des actionneurs en ce qu'ils ne sont pas monoblocs mais composés de plusieurs parties mobiles entre elles.

Aujourd'hui, ce sont les céramiques multicouches qui sont traditionnellement utilisées dans les actionneurs piézo-électriques. Un des premiers domaines d'application a été le domaine spatial, où leur faible échauffement et leur haute densité énergétique sont des atouts majeurs. Ils sont également utilisés pour le nano positionnement, la création de vibrations, le contrôle actif de vibrations, la commande de certains injecteurs en automobile, dans les applications opto-acoustiques, dans certaines imprimantes à jet d'encre, en astronomie (optique adaptative), etc..

Les moteurs piézo-électriques sont utilisés dans les systèmes autofocus d'appareils photographiques, dans les mécanismes de vitre électrique de voiture, et en général dans les applications où la taille réduite de ces moteurs répond à des contraintes volumiques.

#### 1.2.5.5. Générateurs et transformateurs :

L'allume-gaz et le briquet « électronique » sont des exemples de la manière dont les piézo-électriques permettent de produire de fortes tensions. L'effet piézo-électrique direct permet de produire de très fortes tensions, supérieures à la tension de claquage de l'air 30 kV/cm pour un écartement de quelques millimètres. Lorsque cette tension est atteinte, une étincelle de décharge est produite et mise à profit pour allumer le gaz du briquet ou de la gazinière.

Les premiers prototypes, dits micro générateurs, sont apparus en 2006 (démonstrateur de sonnette de maison sans fil et sans pile). Ils récupèrent par exemple l'énergie mécanique fournie par la pression du doigt sur un bouton. L'électricité ainsi récupérée sert à alimenter un circuit radio, qui émet un message vers le récepteur. Un autre exemple étudié en laboratoire est l'incorporation d'un film piézo-électrique dans des chaussures de sport afin de produire de l'énergie grâce à la pression du talon pendant la marche. Les faibles puissances produites pourraient suffire à terme à alimenter certains dispositifs électroniques

Un transformateur piézo-électrique est un multiplicateur de tension alternative. Le couplage mis à profit ici est acoustique. Par effet piézo-électrique inverse, une tension d'excitation permet de créer une contrainte alternative dans une barre d'un matériau fortement piézo-électrique (une céramique PZT par exemple). Cette contrainte permet la mise en vibration de la barre à une fréquence choisie pour correspondre à une fréquence de résonance. Par effet piézo-électrique direct, une tension est produite sur des électrodes situées sur la deuxième extrémité de la barre. Cette tension, qui bénéficie de l'amplification du mouvement dû à la résonance, peut être 1 000 fois plus élevée.

#### 1.2.5.6. Filtres

Il est possible d'exploiter les propriétés de piézo-électricité pour réaliser des filtres en électronique. On peut citer par exemple les filtres à ondes acoustiques de surface qui utilisent les propriétés de propagation des ondes à la surface du matériau.

### 1.3. Quelques problèmes de fissures à l'interface entre deux matériaux différents :

#### 1.3.1. Problèmes anti-plan élastique-plastique de deux milieux semi infinis liés contenant des fissures et des cavités [47] :

Le problème de deux milieux semi-infinis liés, ayant des propriétés différentes, contenant des fissures ou des cavités sur l'interface et soumis à des forces de cisaillement longitudinaux de divers côtés, a été considéré. Le problème élastique dans lequel les composantes des forces externes (normales au plan de la fissure) sont uniquement prises en considération, complète le problème de déformation plane ou les forces externes se trouvent dans le plan de la fissure. En employant l'approche de la théorie des dislocations pour des déformations plastiques, une technique simple basée sur la théorie élastique est développée, afin d'estimer la taille de la zone plastique au voisinage de la fissure et des cavités.

#### 1.3.2. Deux matériaux liés contenant des fissures parallèles à l'interface [48] :

Ce travail de recherche traite le problème de deux milieux élastiques semi-infinis liés avec différentes propriétés thermomécaniques. L'un des demi-plans contient une fissure parallèle à l'interface, et à une distance arbitraire de l'interface. Un système d'équations intégrales pour le problème général est obtenu. Les équations sont résolues pour trois combinaisons de matériaux adjacents pour le cas de traction uniforme symétrique et antisymétrique agissant sur les surfaces de la fissure. Les facteurs d'intensité de contrainte et les angles pour la contrainte maximale de clivage à la pointe de la fissure sont obtenus.

#### 1.3.3. Une fissure de la forme d'une pièce de monnaie à l'interface entre une couche élastique et un demi-espace [49] :

On considère le problème élasto-statique à symétrie axiale pour une couche liée à un demi-espace (deux matériaux différents). On suppose que l'interface entre les deux matériaux contient une fissure de la forme d'une pièce de monnaie, dont les faces sont soumises à des tractions connues. La solution du problème est ramenée à celle d'un système d'équations intégrales singulières de second ordre. Un exemple numérique pour une combinaison des matériaux aluminium-époxy est donné. Les facteurs d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie sont

calculés et donnés en fonction du rapport de l'épaisseur de la couche au rayon de la fissure.

1.3.4. L'effet de cisaillement sur une fissure de la forme d'une pièce de monnaie à l'interface entre un demi-espace élastique et un support rigide [50] :

Le problème considéré a pour objectif la détermination du champ de contraintes au voisinage d'une fissure ayant la forme d'une pièce de monnaie et située à l'interface d'un demi-espace élastique lié à un support rigide. La structure est soumise à un cisaillement anti-plan. La solution est obtenue en considérant les représentations par transformation de Hankel pour les fonctions inconnues dans la solution de Muki des équations d'élasticité. Ensuite, le système d'équations intégrales doubles résultant est réduit à un problème de Wiener-Hopf. Des expressions simples de forme explicite sont obtenues pour les composantes de la contrainte dans le plan de la fissure. Ces expressions permettent de calculer le facteur d'intensité de contrainte correspondant. En addition, des expressions intégrales sont déduites pour les composantes du déplacement de la surface de la fissure.

1.3.5. Deux demi plans liés avec une fissure traversant l'interface [51] :

On considère le problème plan de deux demi-plans élastiques liés contenant une fissure finie perpendiculaire à l'interface et traversant celle-ci. Ce problème est réduit en un système d'équations intégrales singulières avec des noyaux de Cauchy généralisés. Bien que le système ait trois points irréguliers, il est montré que les fonctions inconnues sont liées algébriquement au point singulier de l'interface et les équations intégrales peuvent être résolues. On montre que ce système d'équations intégrales aboutit à la même équation caractéristique que celle concernant deux quarts de plans liés dans le cas général d'une fissure qui les traverse et que l'équation caractéristique pour une extrémité de la fissure aboutissant sur l'interface dans ce cas spécial. Les résultats numériques donnés comprennent les facteurs d'intensité de contrainte aux lèvres de la fissure, les composantes normales et de cisaillement des facteurs d'intensité de contrainte au point singulier de l'interface, et des déplacements de surface de la fissure.

### 1.3.6. Champ des contraintes au voisinage d'une fissure de Griffith à l'interface entre deux demi plans élastiques différents [52] :

Les champs de contraintes et du déplacement au voisinage d'une fissure de Griffith située à l'interface entre deux demi-plans élastiques différents liés entre eux, sont déterminés. Un emploi systématique des transformations de Fourier ramène le problème à celui de la résolution d'un système de deux équations intégrales simultanées. Le système de deux équations est réduit à son tour à un problème de Riemann des conditions aux limites et aboutissant à une solution sous forme implicite. Le cas particulier dans lequel la fissure est ouverte par une pression constante est étudié.

### 1.4. Quelques problèmes de fissures à l'interface entre deux matériaux différents dans le cas de matériaux piézo-électriques :

#### 1.4.1. Problème de fissure à l'interface entre bi-matériaux ; élastique diélectrique / piézo-électrique [53] :

En considérant un matériau diélectrique élastique isotrope en tant que matériau piézo-électrique transversalement isotrope avec peu de piézo-électricité, le problème de fissure à l'interface des structures en bi-matériaux élastique / piézo-électrique est traité sur la base de la théorie de Stroh (1958) du potentiel complexe avec le modèle d'une fissure imperméable. Afin d'obtenir des résultats universels, des résultats numériques du champ de contrainte et du champ électrique en pointe de fissure pour 35 types de bi-matériaux différents construits par cinq types de matériaux élastiques diélectriques, à savoir Epoxy, Polymère, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, SiCand Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>, et sept sortes de céramiques piézo-électriques , à savoir PZT-4, BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5H, PZT-6B, PZT-7A, P-7, et PZT-PIC151, sont présentés.

#### 1.4.2. Propagation d'une fissure en mode-III le long d'une interface conductrice entre deux matériaux piézo-électriques [54] :

Une analyse est présentée pour une réponse transitoire d'une fissure d'interface en mode III se propageant entre deux demi-espaces piézo-électriques différents. La ténacité à la rupture dynamique d'une interface piézo-électrique est examinée, ce qui est un problème central en rapport avec la résistance d'interface des

capteurs multicouches et dispositifs à couches ferroélectriques minces. Pour la propagation de la fissure en mode III dans les matériaux piézo-électriques, une onde de surface électro-acoustique (onde Bleustein-Gulyaev) contrôle la vitesse de propagation de la fissure. On montre dans ce travail que la propagation d'une fissure d'interface dans les médias piézo-électriques peut exciter une onde de surface électro-acoustique d'interface (onde Maerfeld-Tournois) qui est fondamentalement différente de la propagation de la fissure d'interface en mode III dans les médias purement élastiques. En outre, il a été découvert que l'existence de l'onde Maerfeld-Tournois peut jouer un rôle important dans la détermination de la ténacité à la rupture dynamique des composites piézo-électriques.

#### 1.4.3. Paramètres de rupture d'une fissure en forme de pièce de monnaie à l'interface entre deux matériaux piézo-électriques [25] :

Une fissure en forme de pièce de monnaie à l'interface entre deux matériaux piézo-électrique est considérée. Les solutions analytiques générales basées sur les transformées de Hankel sont utilisées pour formuler le problème mixte des conditions aux limites (correspondant à une fissure d'interface) et le réduire à un système d'équations intégrales singulières. Les équations intégrales sont à leurs tours réduites à deux systèmes d'équations algébriques à l'aide des polynômes de Jacobi et Chebychev. Par la suite, les expressions exactes des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique en pointe de fissure sont obtenues. Des résultats numériques sélectionnés sont présentés pour différents systèmes bi-matériaux pour montrer les caractéristiques importantes des paramètres de rupture en pointe de fissure et de leur dépendance des propriétés des matériaux, de l'orientation de la polarisation et du chargement électrique.

#### 1.4.4. Analyse d'une rupture Anti-plane pour l'interface de faible-discontinuité dans une structure piézo-électrique (bi-matériaux) non homogène [55] :

Dans ce travail de recherche, le concept de faible discontinuité est étendu à l'interface des structures piézo-électriques (bi-matériaux) à gradient de propriétés. L'analyse de la rupture à l'interface de faible discontinuité est effectuée en utilisant les transformées de Fourier et les équations intégrales singulières de Cauchy. Des résultats numériques du taux de restitution d'énergie total (TRE) et du taux de restitution d'énergie de déformation mécanique (TREDM) sont obtenus pour



montrer les effets des paramètres de non homogénéité, des paramètres géométriques et des charges. L'étude paramétrique a montré en premier lieu que la réduction de la faible-discontinuité de l'interface est bénéfique pour résister à la rupture d'interface, et en deuxième lieu que (TRE) et (TREDM) pourraient être pris comme critères de rupture sous certaines conditions.

#### 1.4.5. Dispersion des ondes de cisaillement anti-plan dans une fissure à l'interface entre deux matériaux piézo-électriques différents à gradient de propriétés [56] :

Dans ce travail de recherche, le comportement dynamique d'une fissure de Griffith située à l'interface de deux matériaux piézo-électriques différents à gradient de propriétés (FGPM) est considéré. Il est supposé que la constante élastique, la constante piézo-électrique, la constante diélectrique et la masse volumique des FGPM varient de façon continue comme une fonction exponentielle des coordonnées  $x$  et  $y$ . Ces FGPM sont sollicités par un chargement mécanique anti-plan et un chargement électrique dans le plan. En utilisant la technique des transformées, le problème est réduit à quatre paires de deux équations intégrales, qui sont transformées en quatre équations intégrales de Fredholm simultanées avec quatre fonctions inconnues et résolues numériquement. Les effets des propriétés des matériaux sur les facteurs d'intensité de la contrainte et de l'induction électrique sont calculés et affichés graphiquement.

#### 1.4.6. Rupture à l'interface des déclencheurs piézo-électriques multicouche sous chargement mécanique et électrique [57] :

Le comportement de rupture des interfaces métal/piézo-céramique sous chargement mécanique et électrique est examiné par la flexion aux quatre points en utilisant des actionneurs multicouches commerciaux. Les expériences sont effectuées dans une machine d'essai faite sur commande pour le cas d'une fissure à croissance stable. En plus de la charge mécanique, un champ électrique constant a été méthodiquement mis en marche dans le sens de l'échantillon longitudinal. Les actionneurs polarisés et non polarisés ont été testés. La morphologie des fissures et la ténacité de la rupture dépendent du type d'interface métal-céramique. En considérant les cas d'une fissure perméable et imperméable, le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie des trois

modes de fissuration sont évalués en utilisant un calcul par éléments finis linéaires piézo-électriques pour les charges critiques mesurées.

#### 1.4.7. Fissure mobile sous chargement anti-plan dans une couche piézo-électrique à gradient de propriétés entre deux bandes piézo-électriques différentes [58] :

La propagation dynamique d'une fissure dans une couche de matériau piézo-électrique à gradient de propriétés (FGPM) à l'interface entre deux couches piézo-électriques différentes sous un chargement de cisaillement anti-plan est analysée. Les propriétés de la couche de FGPM varient de façon continue le long de l'épaisseur. La couche de FGPM et les deux couches piézo-électriques homogènes sont reliées par une faible-discontinuité. Une fissure mobile de vitesse constante du type Yoffe est considérée. La transformée de Fourier est utilisée pour réduire le problème à deux ensembles de deux équations qui sont ensuite réduites aux équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Des valeurs numériques sur la vitesse de libération d'énergie dynamique sont présentées pour la FGPM pour montrer les effets sur le chargement électrique, le gradient des propriétés des matériaux, la vitesse de déplacement de la fissure et l'épaisseur des couches.

#### 1.4.8. Propagation d'une fissure d'interface en mode III dans un bi-matériau piézo-électrique/piézo-magnétique [13] :

La réponse transitoire d'une fissure d'interface en mode III se propageant entre deux demi-espaces piézo-électrique (PE) et piézo-magnétique (PM) est étudiée. Les transformées de Laplace ainsi que les techniques de Wiener-Hopf et Cagniard-de Hoop sont utilisées pour résoudre le problème des conditions aux limites mixtes considéré. L'existence de l'onde d'interface généralisée Maerfeld-Tournois est discutée et les solutions des champs couplés sont dérivées pour quatre cas différents de la vitesse des ondes de cisaillement. Les facteurs dynamiques de l'intensité de contrainte, de l'induction électrique, et de l'induction magnétique ainsi que le taux de restitution d'énergie sont obtenus explicitement. Des résultats numériques des fonctions universelles et du taux de restitution d'énergie adimensionnel pour plusieurs combinaisons différentes de matériaux sont présentés et discutés en détail.

### 1.5. Conclusion :

Les travaux de recherches cités précédemment avaient pour objectif l'étude d'un problème de mécanique de la rupture pour une structure bien définie et soumise à des sollicitations données et éventuellement à un chargement électrique appliqué. L'essentiel était d'aboutir à une solution analytique ou numérique pour le problème envisagé. Cependant, les objectifs visés n'étaient pas les mêmes, et les résultats obtenus n'étaient pas nécessairement dans le même contexte. Ceci est dû à la complexité des problèmes rencontrés dans le domaine de la mécanique de la rupture, qui nécessitent un développement mathématique très puissant pour résoudre un problème donné. Étant donné que le domaine de recherche dans la mécanique de la rupture est très vaste, et qu'il s'est développé que récemment, les recherches ne sont qu'à leur début et le gros du travail reste à faire.

Dans notre présent travail, on a voulu aborder un problème qui n'a pas été traité auparavant, et on a choisi de concentrer notre étude sur une fissure de Griffith en mode III située à l'interface d'une structure semi-infinie constituée de deux céramiques piézo-électriques et soumise à un chargement électromécanique.

Notre travail de recherche a été inspiré par celui de PAK [4], qui a considéré le cas d'une fissure de Griffith en mode III incorporée dans une céramique piézo-électrique infinie soumise à un chargement électromécanique. Notre travail n'a de point commun avec celui de PAK[4], que dans le cas où notre structure composée de deux céramiques aux différentes propriétés physiques devient une structure composée d'un seul matériau (deux matériaux aux mêmes propriétés physiques), avec en plus, le cas où le matériau mince devient épais (structure semi-infinie tendant vers une structure infinie).

## CHAPITRE 2

### PRESENTATION DU PROBLEME

#### 2.1. La structure étudiée :

On considère un milieu bidimensionnel semi infini  $\Omega = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, h)$  constitué de deux milieux :  $\Omega_1 = (-\infty, +\infty) \times (0, h)$  (matériau 1 : le plus mince) et  $\Omega_2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)$  (matériau 2 : le plus épais) contenant un défaut initial de type fissure  $D_f = [-l_0, l_0] \times \{0\}$  de longueur  $2l_0$  située à l'interface entre les deux matériaux (Fig. 2.1). On note par  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  la base canonique de  $R^3$  et par  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes associés à cette base.

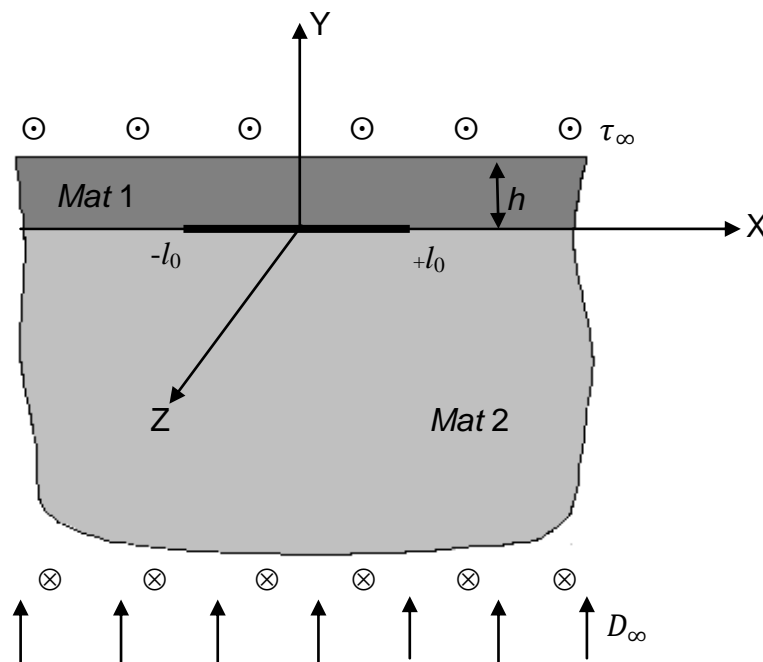


Figure 2.1 : Géométrie du problème initial.

Les faces supérieures  $y = h$  et inférieure  $y \rightarrow -\infty$  sont soumises à une contrainte de cisaillement anti plan uniforme et positive d'intensité  $\tau_\infty$  et à une induction électrique uniforme et positive d'intensité  $D_\infty$  (suivant l'axe  $y$ ) tandis que les faces de la fissure sont libres.

Les deux matériaux sont linéairement élastiques, homogènes, isotropes et piézo-électriques. Leurs propriétés physiques sont définies par les constantes élastiques ( $C44^{(1)}$ ,  $C44^{(2)}$ ), les constantes piézo-électriques ( $e15^{(1)}$ ,  $e15^{(2)}$ ) et les constantes diélectriques ( $\varepsilon11^{(1)}$ ,  $\varepsilon11^{(2)}$ ).

A cause de la nature du matériau (céramique polarisée dans la direction Z) et du chargement, on est dans la situation de la piézo-élasticité anti plane. Par conséquent, la seule composante du vecteur déplacement est dans la direction z et indépendante de z et le potentiel électrique ne dépend pas de z.

$$U = V = 0, \quad W = W(x, y), \quad \phi = \phi(x, y) \quad (2.1)$$

Les équations constitutives décrivant le problème sont [4] :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = D_z = 0 \quad (2.2)$$

$$\tau_{xz} = C44^{(i)} \frac{\partial W}{\partial x} + e15^{(i)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$D_x = e15^{(i)} \frac{\partial W}{\partial x} - \varepsilon11^{(i)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\tau_{yz} = C44^{(i)} \frac{\partial W}{\partial y} + e15^{(i)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$D_y = e15^{(i)} \frac{\partial W}{\partial y} - \varepsilon11^{(i)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.6)$$

Dans les équations (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) l'indice i (i = 1, 2) s'affecte pour les matériaux piézo-électriques (supérieur et inférieur) respectivement.

Les composantes des vecteurs (déformation et champs électriques) sont respectivement données par:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.8)$$

Les équations régissantes sont données par:

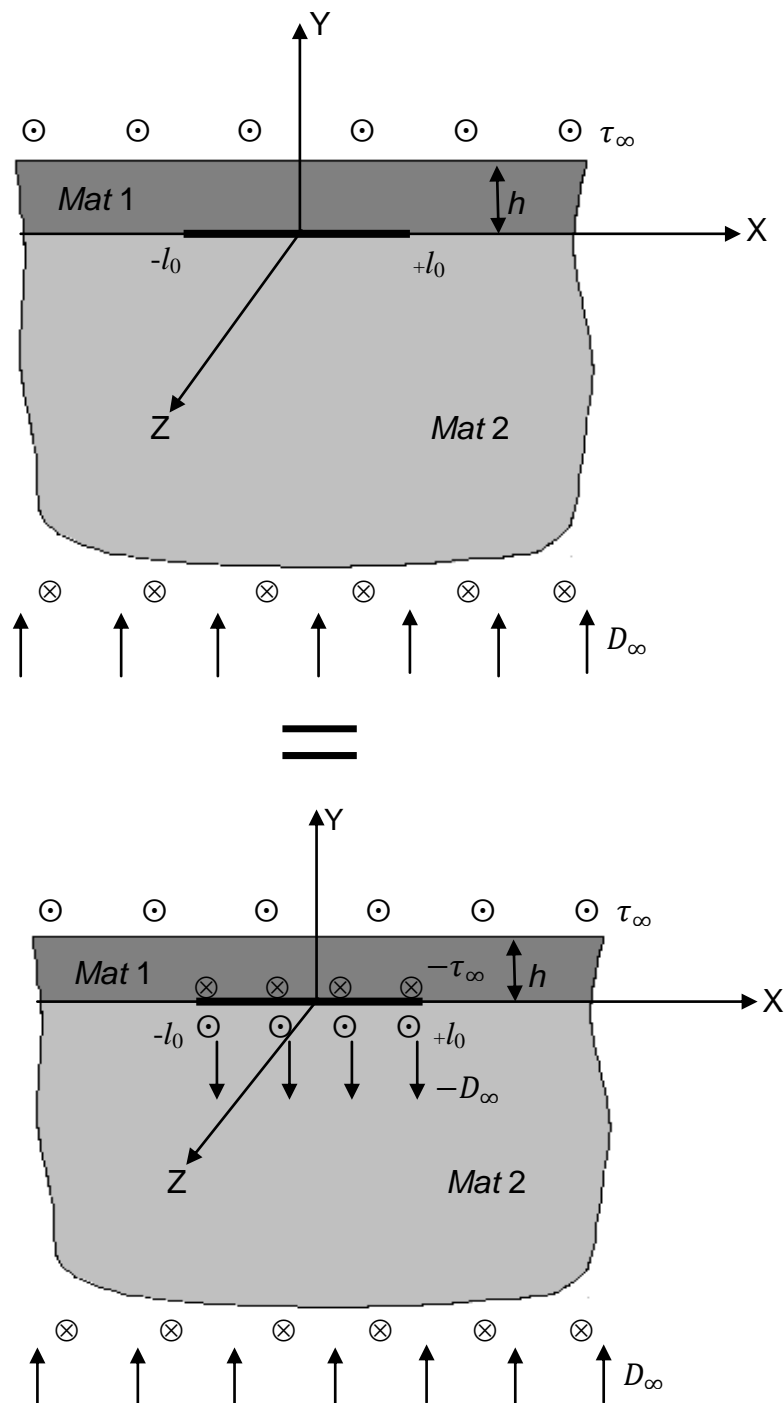
$$\begin{cases} C44^{(i)} \nabla^2 W + e15^{(i)} \nabla^2 \phi = 0 \\ e15^{(i)} \nabla^2 W - \varepsilon11^{(i)} \nabla^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Ou sous leurs formes simplifiées:

$$\nabla^2 W = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.10)$$

Où  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  désigne le Laplacien

En utilisant le principe de superposition, le problème est décomposé en la somme d'un problème homogène sans fissure et d'un problème non homogène due à la fissure (Fig. 2.2). Puisqu'on s'intéresse à la propagation de la fissure, on considère par la suite le problème non homogène.



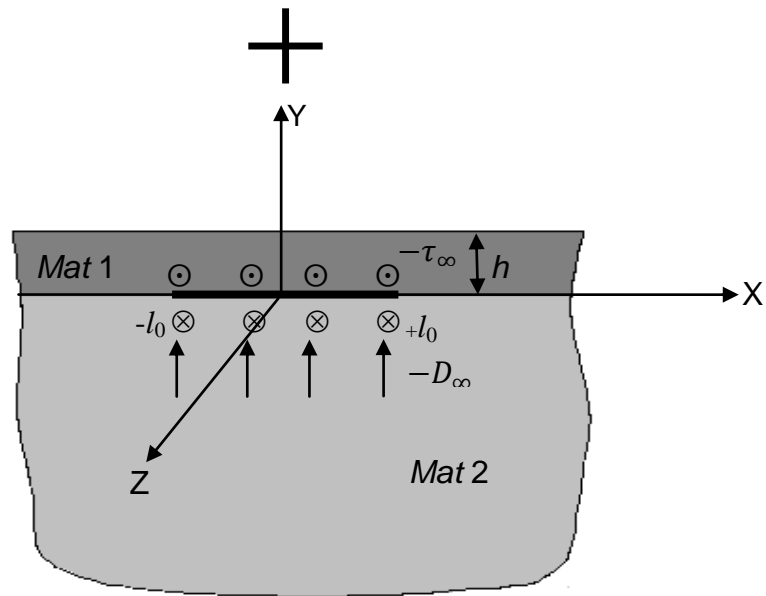


Figure 2.2 : Décomposition du problème.

Tout d'abord on écrit les conditions aux limites à l'infini, sur les lèvres de la fissure, ainsi que les conditions de transmission sur l'axe  $y = 0$ .

$$\tau_{yz}(x, h) = 0 \quad |x| < +\infty \quad (2.11)$$

$$D_y(x, h) = 0 \quad |x| < +\infty \quad (2.12)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = 0 \quad y \rightarrow -\infty \quad |x| < +\infty \quad (2.13)$$

$$D_y(x, y) = 0 \quad y \rightarrow -\infty \quad |x| < +\infty \quad (2.14)$$

$$W(x, 0^+) = W(x, 0^-) \quad |x| > l_0 \quad (2.15)$$

$$\Phi(x, 0^+) = \Phi(x, 0^-) \quad |x| > l_0 \quad (2.16)$$

$$\tau_{yz}(x, 0^+) = \tau_{yz}(x, 0^-) \quad |x| > l_0 \quad (2.17)$$

$$D_y(x, 0^+) = D_y(x, 0^-) \quad |x| > l_0 \quad (2.18)$$

$$\tau_{yz}(x, 0^+) = \tau_{yz}(x, 0^-) = \tau(x) \quad |x| \leq l_0 \quad (2.19)$$

$$D_y(x, 0^+) = D_y(x, 0^-) = D(x) \quad |x| \leq l_0 \quad (2.20)$$

Les équations (2.11) et (2.13) sont les conditions aux limites en contraintes sur la face supérieure et la face inférieure ( $y \rightarrow -\infty$ ) de la structure.

Les équations (2.12) et (2.14) sont les conditions aux limites en induction électrique sur la face supérieure et la face inférieure ( $y \rightarrow -\infty$ ) de la structure.

Les équations (2.15) et (2.16) sont respectivement la condition de continuité du déplacement et du potentiel électrique à l'interface en dehors de la fissure.

Les équations (2.17) et (2.18) sont respectivement la condition de continuité des vecteurs contrainte et induction électrique à l'interface en dehors de la fissure.

Les équations (2.19) et (2.20) traduisent respectivement le chargement et l'induction électrique appliqués sur les lèvres de la fissure.

## 2.2. Etablissement des équations intégrales :

Dans le but d'étudier la croissance de la fissure, on doit résoudre les problèmes piézoélectriques correspondants. Pour cela, on réduit les équations du problème à des équations intégrales singulières en utilisant les transformées de Fourier. On commence par un bref rappel sur la transformée de Fourier.

### 2.2.1. Transformée de Fourier :

Soit  $f(x)$  une fonction continue avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ . La transformée de Fourier de  $f(x)$  est définie par:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad (2.21)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \quad (2.22)$$

### 2.2.2. Dérivation des équations intégrales :

En se basant sur les travaux d'ERDOGAN [59], on commence par définir les transformées de Fourier du champ de déplacement et du potentiel électrique.



La transformé de Fourier du champ de déplacement  $W(x, y)$  est donnée par:

$$\widehat{W}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) e^{i\lambda x} dx \quad (2.23)$$

Et sa transformée de Fourier inverse :

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{W}(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.24)$$

En injectant l'expression de  $W(x, y)$  dans l'équation (2.10), ( $\nabla^2 W = 0$ ), et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient l'équation suivante de  $\widehat{W}(\lambda, y)$ :

$$-\lambda^2 \widehat{W}(\lambda, y) + \frac{\partial^2 \widehat{W}(\lambda, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.25)$$

En cherchant la solution de (2.25) sous la forme  $\widehat{W}(\lambda, y) = C(\lambda) e^{ny}$ , on obtient l'équation caractéristique suivante:

$$n^2 - \lambda^2 = 0 \quad (2.26)$$

Les racines de cette équation caractéristiques sont :

$$n_{1,2} = \pm |\lambda| \quad (2.27)$$

A cause de la présence de la fissure, on introduit la définition suivante de la fonction  $\widehat{W}(\lambda, y)$  pour chacun des matériaux constituant la structure:

$$\widehat{W}(\lambda, y) = C1(\lambda) e^{n_1 y} + C2(\lambda) e^{n_2 y} \quad 0 < y \leq h \quad (2.28)$$

$$\widehat{W}(\lambda, y) = C3(\lambda) e^{n_3 y} + C4(\lambda) e^{n_4 y} \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.29)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (2.28) et (2.29), on déduit les équations suivantes de  $W(x, y)$ :

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C1(\lambda) e^{|\lambda| y} + C2(\lambda) e^{-|\lambda| y}) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad 0 < y \leq h \quad (2.30)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C3(\lambda) e^{|\lambda| y} + C4(\lambda) e^{-|\lambda| y}) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.31)$$

De l'équation (2.31), on déduit que  $C_4(\lambda) = 0$  pour que cette intégrale ne tend pas vers l'infini pour  $y$  tendant vers l'infini. Il nous reste à déterminer les coefficients  $C_k(\lambda)$ , pour  $k = 1, 2, 3$ .

Afin de réduire le problème à une équation intégrale, on définit d'abord la fonction densité suivante :

$$\psi_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} [W(x, 0^+) - W(x, 0^-)] \quad (2.32)$$

Il est clair que l'équation (2.32) est satisfaite si on pose:

$$\int_{-l_0}^{+l_0} \psi_1(t) dt = 0, \quad \psi_1(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > l_0 \quad (2.33)$$

De la même manière en prenant l'expression du potentiel électrique  $\Phi(x, y)$  et en l'injectant dans l'équation (2.10), ( $\nabla^2 \Phi = 0$ ) et en suivant les mêmes étapes établis pour  $W(x, y)$  on aboutit aux équations de  $\Phi(x, y)$  qui sont données par :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (D1(\lambda) e^{|\lambda|y} + D2(\lambda) e^{-|\lambda|y}) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad 0 < y \leq h \quad (2.34)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D3(\lambda) e^{|\lambda|y} e^{-i\lambda x} d\lambda \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.35)$$

On définit aussi la fonction densité suivante:

$$\psi_2(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\Phi(x, 0^+) - \Phi(x, 0^-)] \quad (2.36)$$

Il est clair aussi que l'équation (2.36) est satisfaite si on pose:

$$\int_{-l_0}^{+l_0} \psi_2(t) dt = 0, \quad \psi_2(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > l_0 \quad (2.37)$$

En injectant les équations (2.30), (2.31) et (2.34), (2.35) dans (2.5) et (2.6) respectivement on obtient les expressions de la contrainte et de l'induction électrique qui sont données par:

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [C44^{(1)}(|\lambda| C1(\lambda) e^{|\lambda|y} - |\lambda| C2(\lambda) e^{-|\lambda|y}) + e15^{(1)}(|\lambda| D1(\lambda) e^{|\lambda|y} - |\lambda| D2(\lambda) e^{-|\lambda|y})] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad 0 < y \leq h \quad (2.38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C44^{(2)} |\lambda| C3(\lambda) e^{|\lambda|y} + e15^{(2)} |\lambda| D3(\lambda) e^{|\lambda|y}) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.39)$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e15^{(1)}(|\lambda| C1(\lambda) e^{|\lambda|y} - |\lambda| C2(\lambda) e^{-|\lambda|y}) - \varepsilon11^{(1)}(|\lambda| D1(\lambda) e^{|\lambda|y} - |\lambda| D2(\lambda) e^{-|\lambda|y})] e^{-i\lambda x} d\lambda \quad 0 < y \leq h \quad (2.40)$$

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e15^{(2)} |\lambda| C3(\lambda) e^{|\lambda|y} - \varepsilon11^{(2)} |\lambda| D3(\lambda) e^{|\lambda|y}) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad -\infty < y \leq 0 \quad (2.41)$$

En injectant (2.38) et (2.40) respectivement dans (2.11) et (2.12) et en prenant leurs transformées de Fourier inverse on obtient:

$$C44^{(1)}(C1(\lambda) e^{|\lambda|h} - C2(\lambda) e^{-|\lambda|h}) + e15^{(1)}(D1(\lambda) e^{|\lambda|h} - D2(\lambda) e^{-|\lambda|h}) = 0 \quad (2.42)$$

$$e15^{(1)}(C1(\lambda) e^{|\lambda|h} - C2(\lambda) e^{-|\lambda|h}) - \varepsilon11^{(1)}(D1(\lambda) e^{|\lambda|h} - D2(\lambda) e^{-|\lambda|h}) = 0 \quad (2.43)$$

En injectant respectivement (2.38) et (2.39) dans l'équation (2.17) et (2.40) et (2.41) dans l'équation (2.18), et en prenant leurs transformées de Fourier inverse on obtient:

$$\begin{aligned} C44^{(1)}(C1(\lambda) - C2(\lambda)) + e15^{(1)}(D1(\lambda) - D2(\lambda)) \\ = C44^{(2)}C3(\lambda) + e15^{(2)}D3(\lambda) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} e15^{(1)}(C1(\lambda) - C2(\lambda)) - \varepsilon11^{(1)}(D1(\lambda) - D2(\lambda)) \\ = e15^{(2)}C3(\lambda) - \varepsilon11^{(2)}D3(\lambda) \end{aligned} \quad (2.45)$$

On utilise maintenant les définitions (2.32) et (2.36) de la fonction densité. En y injectant respectivement (2.30) et (2.31) puis (2.34) et (2.35), et en prenant leurs transformées de Fourier inverses on obtient:

$$C1(\lambda) + C2(\lambda) - C3(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \int_{-l_0}^{+l_0} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt = F1 \quad (2.46)$$

$$D1(\lambda) + D2(\lambda) - D3(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \int_{-l_0}^{+l_0} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt = F2 \quad (2.47)$$

Des équations (2.42), (2.43), (2.44), (2.45), (2.46) et (2.47) on obtient le système linéaire suivant:  $(A) \cdot \{B\} = \{C\}$

Où :

$$(A) = \begin{pmatrix} C44^{(1)} e^{|\lambda|h} & -C44^{(1)} e^{-|\lambda|h} & 0 & e15^{(1)} e^{|\lambda|h} & e15^{(1)} e^{-|\lambda|h} & 0 \\ e15^{(1)} e^{|\lambda|h} & -e15^{(1)} e^{-|\lambda|h} & 0 & -\varepsilon11^{(1)} e^{|\lambda|h} & \varepsilon11^{(1)} e^{-|\lambda|h} & 0 \\ C44^{(1)} & -C44^{(1)} & -C44^{(2)} & e15^{(1)} & -e15^{(1)} & -e15^{(2)} \\ e15^{(1)} & -e15^{(1)} & -e15^{(2)} & -\varepsilon11^{(1)} & \varepsilon11^{(1)} & \varepsilon11^{(2)} \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} C1(\lambda) \\ C2(\lambda) \\ C3(\lambda) \\ D1(\lambda) \\ D2(\lambda) \\ D3(\lambda) \end{Bmatrix}, \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F1 \\ F2 \end{Bmatrix}$$

La résolution de ce système donne :

$$C1(\lambda) = \frac{(A_1 e^{-2|\lambda|h} + A_2)F1 + (A_3 e^{-2|\lambda|h} - A_3)F2}{\Delta} \quad (2.48)$$

$$C2(\lambda) = \frac{(A_2 e^{2|\lambda|h} + A_1)F1 - (A_3 e^{2|\lambda|h} - A_3)F2}{\Delta} \quad (2.49)$$

$$C3(\lambda) = -\frac{(A_4 e^{2|\lambda|h} + A_5 e^{-2|\lambda|h} - A_6)F1 + (A_3 e^{2|\lambda|h} - A_3 e^{-2|\lambda|h})F2}{\Delta} \quad (2.50)$$

$$D1(\lambda) = -\frac{(A_7 e^{-2|\lambda|h} - A_7)F1 + (A_8 e^{-2|\lambda|h} - A_9)F2}{\Delta} \quad (2.51)$$

$$D2(\lambda) = -\frac{(-A_7 e^{2|\lambda|h} + A_7)F1 - (A_9 e^{2|\lambda|h} - A_8)F2}{\Delta} \quad (2.52)$$

$$D3(\lambda) = -\frac{(-A_7 e^{2|\lambda|h} + A_7 e^{-2|\lambda|h})F1 + (A_{10} e^{2|\lambda|h} + A_{11} e^{-2|\lambda|h} - A_6)F2}{\Delta} \quad (2.53)$$

Avec les coefficients:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (e_{15^{(2)}})^2 - e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + C_{44^{(2)}} (\varepsilon_{11^{(2)}} - \varepsilon_{11^{(1)}}) \\
A_2 &= (e_{15^{(1)}})^2 + e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + C_{44^{(2)}} (\varepsilon_{11^{(2)}} + \varepsilon_{11^{(1)}}) \\
A_3 &= e_{15^{(1)}}\varepsilon_{11^{(2)}} - e_{15^{(2)}}\varepsilon_{11^{(1)}} \\
A_4 &= (e_{15^{(1)}})^2 + e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + C_{44^{(1)}} (\varepsilon_{11^{(1)}} + \varepsilon_{11^{(2)}}) \\
A_5 &= (e_{15^{(1)}})^2 - e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + C_{44^{(1)}} (\varepsilon_{11^{(1)}} - \varepsilon_{11^{(2)}}) \\
A_6 &= 2 \left( (e_{15^{(1)}})^2 + (C_{44^{(1)}}\varepsilon_{11^{(1)}}) \right) \\
A_7 &= C_{44^{(2)}}e_{15^{(1)}} - C_{44^{(1)}}e_{15^{(2)}} \\
A_8 &= -(e_{15^{(1)}})^2 + e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + \varepsilon_{11^{(2)}} (C_{44^{(1)}} - C_{44^{(2)}}) \\
A_9 &= (e_{15^{(2)}})^2 + e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + \varepsilon_{11^{(2)}} (C_{44^{(1)}} + C_{44^{(2)}}) \\
A_{10} &= (e_{15^{(1)}})^2 + e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + \varepsilon_{11^{(1)}} (C_{44^{(1)}} + C_{44^{(2)}}) \\
A_{11} &= (e_{15^{(1)}})^2 - e_{15^{(1)}}e_{15^{(2)}} + \varepsilon_{11^{(1)}} (C_{44^{(1)}} - C_{44^{(2)}}) \\
A_{12} &= (e_{15^{(1)}} + e_{15^{(2)}})^2 + (\varepsilon_{11^{(1)}} + \varepsilon_{11^{(2)}})(C_{44^{(1)}} + C_{44^{(2)}}) \\
A_{13} &= (e_{15^{(1)}} - e_{15^{(2)}})^2 + (\varepsilon_{11^{(1)}} - \varepsilon_{11^{(2)}})(C_{44^{(1)}} - C_{44^{(2)}}) \\
A_{14} &= 2 \left( (e_{15^{(2)}})^2 - (e_{15^{(1)}})^2 - (\varepsilon_{11^{(1)}}C_{44^{(1)}}) + (\varepsilon_{11^{(2)}}C_{44^{(2)}}) \right) \\
\Delta &= A_{12}e^{2|\lambda|h} + A_{13}e^{-2|\lambda|h} + A_{14}
\end{aligned}$$

On remarque que les coefficients  $C_i(\lambda)$  et  $D_i(\lambda)$  ne dépendent que des inconnues  $F_1$  et  $F_2$ , et par conséquent des fonctions densités  $\psi_1(x)$  et  $\psi_2(x)$ . Donc pour résoudre le problème, il suffit de déterminer  $\psi_1(x)$  et  $\psi_2(x)$ .

Les fonctions  $\psi_1(x)$  et  $\psi_2(x)$  seront déterminées par la résolution de deux équations intégrales singulières. Ces équations intégrales seront déduites à partir des équations (2.19) et (2.20).

En injectant respectivement les équations (2.39) et (2.41) dans (2.19) et (2.20), et en remplaçant  $C_3(\lambda)$  et  $D_3(\lambda)$  par leurs expressions données en (2.50) et (2.53), on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (C44^{(2)} [F1(A_4 e^{2|\lambda|h} + A_5 e^{-2|\lambda|h} - A_6) + F2 A_3 (e^{2|\lambda|h} - e^{-2|\lambda|h})] + e15^{(2)} [F1 A_7 (-e^{2|\lambda|h} + e^{-2|\lambda|h}) + F2 (A_{10} e^{2|\lambda|h} - A_{11} e^{-2|\lambda|h} - A_6)]) e^{-i\lambda x} d\lambda = -\tau(x) \quad (2.54)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (e15^{(2)} [F1(A_4 e^{2|\lambda|h} + A_5 e^{-2|\lambda|h} - A_6) + F2 A_3 (e^{2|\lambda|h} - e^{-2|\lambda|h})] - \varepsilon11^{(2)} [F1 A_7 (-e^{2|\lambda|h} + e^{-2|\lambda|h}) + F2 (A_{10} e^{2|\lambda|h} - A_{11} e^{-2|\lambda|h} - A_6)]) e^{-i\lambda x} d\lambda = -D(x) \quad (2.55)$$

Dans ces deux dernières équations, le passage à la limite est nécessaire, car l'intégrale ne peut être évaluée en  $y = 0$ . En réarrangeant la première équation intégrale, on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (F1 [e^{2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_4 - e15^{(2)} A_7) + e^{-2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_5 + e15^{(2)} A_7) - C44^{(2)} A_6] + F2 [e^{2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_3 + e15^{(2)} A_{10}) - e^{-2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_3 + e15^{(2)} A_{11}) - e15^{(2)} A_6]) e^{-i\lambda x} d\lambda = -\tau(x) \quad (2.56)$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{2\pi} (I1 + I2) = -\tau(x) \quad (2.57)$$

Où :

$$I1 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (F1 G11(\lambda)) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.58)$$

$$I2 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (F2 G12(\lambda)) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.59)$$

$$G11(\lambda) = e^{2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_4 - e15^{(2)} A_7) + e^{-2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_5 + e15^{(2)} A_7) - C44^{(2)} A_6 \quad (2.60)$$

$$G12(\lambda) = e^{2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_3 + e15^{(2)} A_{10}) - e^{-2|\lambda|h} (C44^{(2)} A_3 + e15^{(2)} A_{11}) - e15^{(2)} A_6 \quad (2.61)$$

En tenant compte de l'expression de F1, I1 devient :

$$I1 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i|\lambda| G11(\lambda) e^{|\lambda|y}}{\lambda \Delta} \left( \int_{-l_0}^{+l_0} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt \right) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.62)$$

En changeant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I1 = \int_{-l_0}^{+l_0} K11(x, t) \psi_1(t) dt \quad (2.63)$$

Le noyau  $K11(x, t)$  est donné par :

$$K11(x, t) = i \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} N11(y, \lambda) e^{i\lambda(t-x)} d\lambda \quad (2.64)$$

Où  $N11$  est donné par :

$$N11(y, \lambda) = \frac{|\lambda| G11(\lambda) e^{|\lambda|y}}{\lambda \Delta} \quad (2.65)$$

On voit bien que  $N11(y, -\lambda) = -N11(y, \lambda)$ . Donc  $N11$  est une fonction impaire en  $\lambda$ . D'où :

$$\begin{aligned} K11(x, t) &= i \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} N11(y, \lambda) \cos(\lambda(t-x)) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} N11(y, \lambda) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \right) \\ &= -2 \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} N11(y, \lambda) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le noyau  $K11(x, t)$  est divergent en  $y = 0$ . Puisque  $N11(0, \lambda)$  est une fonction continue, la singularité de l'intégrale impropre ne peut venir que des extrémités de l'intervalle. Sachant que  $N11(0, 0) = 0$ , la singularité ne peut venir que du voisinage de l'infini. Afin d'isoler cette singularité, on étudie le comportement de  $N11$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

On a:

$$N11^\infty(y, \lambda) = \frac{H_{11} e^{\lambda y}}{A_{12}} \quad (2.67)$$

Où:

$$H_{11} = C44^{(2)} A_4 - e15^{(2)} A_7 \quad (2.68)$$

Afin d'extraire la singularité du noyau  $K_{11}(x, t)$ , on ajoute et on retranche  $N_{11}^\infty$ .

$$K_{11}(x, t) = -2 \left( \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} (N_{11}(y, \lambda) - N_{11}^\infty(y, \lambda)) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \right. \\ \left. + \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} N_{11}^\infty(y, \lambda) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \right) \quad (2.69)$$

La deuxième intégrale de (2.69) peut être évaluée d'une manière explicite.

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} N_{11}^\infty(y, \lambda) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} \frac{H_{11} e^{\lambda y}}{A_{12}} \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \\ = \frac{H_{11}}{A_{12}} \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} e^{\lambda y} \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \\ = \frac{H_{11}}{A_{12}} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{t-x}{y^2 + (t-x)^2} \\ = \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} \quad (2.70)$$

La première intégrale de (2.69) sera :

$$k_{11}(x, t) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} (N_{11}(y, \lambda) - N_{11}^\infty(y, \lambda)) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \\ = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{11}(\lambda) e^{\lambda y}}{\Delta} - \frac{H_{11} e^{\lambda y}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad (2.71)$$

Dans (2.71), l'intégrale impropre converge uniformément. On peut donc introduire la limite sous le signe de l'intégrale et on obtient :

$$k_{11}(x, t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{11}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{11}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad (2.72)$$

En remplaçant (2.70) et (2.72) dans (2.69), on obtient :

$$K_{11}(x, t) = -2 \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{11}(x, t) \right) \quad (2.73)$$

Vu la ressemblance entre les intégrales I1 et I2, on adopte le même raisonnement pour I2. Ce qui permet d'obtenir :



$$I_2 = \int_{-l_0}^{+l_0} K_{12}(x, t) \psi_2(t) dt \quad (2.74)$$

$$N_{12}(y, \lambda) = \frac{|\lambda| G_{12}(\lambda) e^{|\lambda| y}}{\lambda \Delta} \quad (2.75)$$

$$N_{12}^\infty(y, \lambda) = \frac{H_{12} e^{\lambda y}}{A_{12}} \quad (2.76)$$

$$H_{12} = C_{44}^{(2)} A_3 + e_{15}^{(2)} A_{10} \quad (2.77)$$

$$k_{12}(x, t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{12}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{12}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad (2.78)$$

$$K_{12}(x, t) = -2 \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{12}(x, t) \right) \quad (2.79)$$

Ainsi, en vertu de (2.63) et (2.74), le membre gauche de l'équation (2.57) devient :

$$\frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-l_0}^{+l_0} K_{11}(x, t) \psi_1(t) dt + \int_{-l_0}^{+l_0} K_{12}(x, t) \psi_2(t) dt \right) \quad (2.80)$$

En remplaçant les expressions de  $K_{11}(x, t)$  et  $K_{12}(x, t)$  obtenues en (2.73) et (2.79), l'équation (2.80) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2) = & -\frac{1}{\pi} \left[ \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{11}(x, t) \right) \psi_1(t) dt \right. \\ & \left. + \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{12}(x, t) \right) \psi_2(t) dt \right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Finalement, en égalisant cette dernière équation avec le membre droit de l'équation (2.57), on obtient l'équation singulière, dont les inconnues sont  $\psi_1(t)$  et  $\psi_2(t)$  et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{11}(x, t) \right) \psi_1(t) dt + \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{12}(x, t) \right) \psi_2(t) dt \\ = \pi \tau(x) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l_0}^{+l_0} \psi_1(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-l_0}^{+l_0} \psi_2(t) dt = 0 \quad (2.83)$$

L'équation (2.82) est appelée « équation intégrale singulière de Cauchy du premier type ». La singularité provient du noyau de Cauchy  $1/(t-x)$ .

De la même façon et vu la ressemblance de l'équation (2.54) avec l'équation (2.55) à des constantes près, le même traitement lui sera réservé. On obtient :

$$\frac{1}{2\pi} (I3 + I4) = -D(x) \quad (2.84)$$

Où :

$$I3 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (F1G21(\lambda)) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.85)$$

$$I4 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda| e^{|\lambda|y}}{\Delta} (F2G22(\lambda)) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.86)$$

$$G21(\lambda) = e^{2|\lambda|h} (e^{15^{(2)}} A_4 + \varepsilon_{11}^{(2)} A_7) + e^{-2|\lambda|h} (e^{15^{(2)}} A_5 - \varepsilon_{11}^{(2)} A_7) - e^{15^{(2)}} A_6 \quad (2.87)$$

$$G22(\lambda) = e^{2|\lambda|h} (e^{15^{(2)}} A_3 - \varepsilon_{11}^{(2)} A_{10}) - e^{-2|\lambda|h} (e^{15^{(2)}} A_3 - \varepsilon_{11}^{(2)} A_{11}) + \varepsilon_{11}^{(2)} A_6 \quad (2.88)$$

$$N21(y, \lambda) = \frac{|\lambda| G21(\lambda) e^{|\lambda|y}}{\lambda \Delta} \quad (2.89)$$

$$N21^\infty(y, \lambda) = \frac{H_{21} e^{\lambda y}}{A_{12}} \quad (2.90)$$

$$N22(y, \lambda) = \frac{|\lambda| G22(\lambda) e^{|\lambda|y}}{\lambda \Delta} \quad (2.91)$$

$$N22^\infty(y, \lambda) = \frac{H_{22} e^{\lambda y}}{A_{12}} \quad (2.92)$$

En remplaçant les expressions de F1 et F2 dans I3 et I4, on obtient :

$$I3 = \int_{-l_0}^{+l_0} K21(x, t) \psi_1(t) dt \quad (2.93)$$

$$K_{21}(x, t) = -2 \left( \frac{H_{21}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{21}(x, t) \right) \quad (2.94)$$

$$k_{21}(x, t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{21}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{21}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad (2.95)$$

$$H_{21} = e_{15}^{(2)} A_4 + \varepsilon_{11}^{(2)} A_7 \quad (2.96)$$

$$I_4 = \int_{-l_0}^{+l_0} K_{22}(x, t) \psi_2(t) dt \quad (2.97)$$

$$K_{22}(x, t) = -2 \left( \frac{H_{22}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{22}(x, t) \right) \quad (2.98)$$

$$k_{22}(x, t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{22}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{22}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad (2.99)$$

$$H_{22} = e_{15}^{(2)} A_3 - \varepsilon_{11}^{(2)} A_{10} \quad (2.100)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{11}(x, t) \right) \psi_1(t) dt + \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{12}(x, t) \right) \psi_2(t) dt \\ & = \pi D(x) \end{aligned} \quad (2.101)$$

En définitive, le système d'équations (2.5) et (2.6) se résume à un système de deux équations intégrales singulières de Cauchy dont les inconnues sont  $\psi_1(t)$  et  $\psi_2(t)$  et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{11}(x, t) \right) \psi_1(t) dt + \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{12}(x, t) \right) \psi_2(t) dt \\ & = \pi \tau(x) \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{21}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{21}(x, t) \right) \psi_1(t) dt + \int_{-l_0}^{+l_0} \left( \frac{H_{22}}{A_{12}} \frac{1}{(t-x)} + k_{22}(x, t) \right) \psi_2(t) dt \\ & = \pi D(x) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Où :

$$k_{ij}(x, t) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right) \sin(\lambda(t-x)) d\lambda \quad i = 1,2, \quad j = 1,2 \quad (2.104)$$

Avec la condition:

$$\int_{-l_0}^{+l_0} \psi_1(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-l_0}^{+l_0} \psi_2(t) dt = 0 \quad (2.105)$$

Dans l'équation (2.105)  $H_{ij}$ ,  $\Delta$  et  $A_{12}$  dépendent seulement des constantes des matériaux et  $G_{ij}(\lambda)$  dépend de  $\lambda$ ,  $h$  et des constantes des matériaux.

### 2.3. Résolution des équations intégrales :

Cette section est consacrée à la résolution numérique des équations intégrales singulières. Le noyau de ces équations contient la singularité de Cauchy (intégrale impropre). Pour l'évaluer, on utilise le concept de l'intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy. On commence par en donner un bref aperçu.

#### 2.3.1. Valeur principale de Cauchy [60] :

##### Définition :

Si  $f(x)$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , sauf au point  $x_0 \in [a, b]$ , la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est définie par :

$$VP = \left( \int_a^b f(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right) \quad (2.106)$$

La valeur principale de Cauchy est obtenue en approchant la singularité symétriquement. Si l'intégrale existe, elle est égale à sa valeur principale.

##### Exemple :

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  est non définie. Sa valeur principale est égale à :

$$VP \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
VP \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ([\log |x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\log |x|]_{-\varepsilon}^{-1}) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log |-\varepsilon| - \log |\varepsilon|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dans la suite du travail, toutes les intégrales singulières (contenant le noyau  $1/(t-x)$ ) seront évaluées au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour simplifier l'écriture on omettra d'écrire VP ( ), et on écrira simplement le signe intégrale.

### 2.3.2. Résolution numérique des équations intégrales :

La méthode adoptée pour la résolution des équations intégrales est tirée des travaux d'ERDOGAN [59] (ERDOGAN et al.1973).

La résolution s'effectuera en utilisant les polynômes de Chebychev qui seront définis plus tard. Ces polynômes sont définis dans l'intervalle  $[-1,1]$ . On doit donc changer l'intervalle des équations intégrales de  $[-l_0, l_0]$  à  $[-1,1]$ . D'abord, on définit les quantités normalisées suivantes :

$$\begin{aligned}
r = \frac{x}{l_0}, \quad s = \frac{t}{l_0}, \quad \psi_1(x) = f_1(x), \quad \psi_2(x) = f_2(x), \quad \tau(x) = \tau(r), \quad D(x) = D(r), \\
k_{ij}(x, t) = L_{ij}(r, s) \quad i = 1, 2. \quad j = 1, 2. \quad |r| \leq 1 \quad (2.107)
\end{aligned}$$

En effectuant le changement annoncé, les équations intégrales (2.102) et (2.103) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \left[ \frac{H_{11}}{A_{12}} \frac{1}{(s-r)} + l_0 L_{11}(r, s) \right] f_1(s) ds \\
+ \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{H_{12}}{A_{12}} \frac{1}{(s-r)} + l_0 L_{12}(r, s) \right] f_2(s) ds = \pi \tau(r) \quad (2.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \left[ \frac{H_{21}}{A_{12}} \frac{1}{(s-r)} + l_0 L_{21}(r, s) \right] f_1(s) ds \\
+ \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{H_{22}}{A_{12}} \frac{1}{(s-r)} + l_0 L_{22}(r, s) \right] f_2(s) ds = \pi D(r) \quad (2.109)
\end{aligned}$$

Avec la condition :

$$\int_{-1}^{+1} f_1(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} f_2(t) dt = 0 \quad (2.110)$$

Les fonctions  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  ont des singularités intégrables aux points  $\pm 1$ . Il a été montré dans [59] que, dans ce cas la solution des équations intégrales (2.108) et (2.109) peut s'exprimer comme :  $f(s) = w(s) \cdot \varphi(s)$  où  $w = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$  est la fonction poids associée au polynôme de Chebychev de première espèce ordre exprimé comme  $T_n(s) = \cos(n \cdot \arccos(s))$  et  $\varphi(s)$  est une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $[-1,1]$ , laquelle peut être exprimée comme une série des polynômes de Chebychev de seconde espèce.

Donc on peut exprimer les solutions sous la forme :

$$f_1(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_{2n-1}(s) \approx (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N A_n T_{2n-1}(s) \quad (2.111)$$

$$f_2(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_{2n-1}(s) \approx (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N B_n T_{2n-1}(s) \quad (2.112)$$

Dans (3.6) et (3.7) on ne tient compte que des polynômes de Chebychev à indice impair, car  $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$ , et suite à cela  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  sont des fonctions impaires vu la symétrie du problème.

On observe qu'avec les expressions (2.111) et (2.112), la condition (2.110) est automatiquement vérifiée.

En remplaçant les expressions de  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  dans les équations (2.108) et (2.110), et en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}}{s - r} ds = \begin{cases} U_{n-1}(r), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (2.113)$$

Où :

$U_n(r) = \sin((n + 1) \arccos(r)) / \sqrt{1 - r^2}$  désigne les polynômes de Chebychev de seconde espèce. On obtient :

$$\sum_{n=1}^N \left[ A_n \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} U_{2n-2}(r) + H_n^{11}(r) \right) + B_n \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} U_{2n-2}(r) + H_n^{12}(r) \right) \right] = \tau(r) \quad (2.114)$$

$$\sum_{n=1}^N \left[ A_n \left( \frac{H_{21}}{A_{12}} U_{2n-2}(r) + H_n^{21}(r) \right) + B_n \left( \frac{H_{22}}{A_{12}} U_{2n-2}(r) + H_n^{22}(r) \right) \right] = D(r) \quad (2.115)$$

Où:

$$H_n^{ij}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_0 L_{ij}(r,s) T_{2n-1} ds \quad i = 1,2, \quad j = 1,2 \quad (2.116)$$

On peut résoudre le système d'équations (2.114) et (2.115) en sélectionnant  $N$  points de collocation (les racines de  $T_{2n-1}$ ), donnés par :

$$r_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)}\right) \quad j = 1, \dots, N \quad (2.117)$$

En utilisant les points de collocations donnés par l'équation (2.117), on obtient un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues ( $A_1, B_1, \dots, A_N, B_N$ ) donné par :

$$\sum_{n=1}^N \left[ A_n \left( \frac{H_{11}}{A_{12}} U_{2n-2}(r_j) + H_n^{11}(r_j) \right) + B_n \left( \frac{H_{12}}{A_{12}} U_{2n-2}(r_j) + H_n^{12}(r_j) \right) \right] = \tau(r_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (2.118)$$

$$\sum_{n=1}^N \left[ A_n \left( \frac{H_{21}}{A_{12}} U_{2n-2}(r_j) + H_n^{21}(r_j) \right) + B_n \left( \frac{H_{22}}{A_{12}} U_{2n-2}(r_j) + H_n^{22}(r_j) \right) \right] = D(r_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (2.119)$$

La valeur de  $N$  du system d'équations (2.118) et (2.119) sera déterminée par une étude de convergence qui dépendra des paramètres du problème et sera étudiée au chapitre 4.

Les valeurs de  $H_n^{ij}(r_j)$  sont calculées à l'aide de l'équation (2.116) dans laquelle, les intégrales sont évaluées numériquement en utilisant la formule d'intégration de Gauss-Chebyshev [61] donnée par :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{n} \quad , \quad t_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (2.120)$$

Dans les expressions de  $H_n^{ij}(r)$ , il y'a la fonction  $L_{ij}(r, s)$ . Cette fonction est donnée sous forme d'une intégrale impropre, qui s'écrit (Equation (2.104)) :

$$L_{ij}(r, s) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad (2.121)$$

A cause de la présence du terme  $\left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right)$ , l'intégrand tend rapidement vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $L_{ij}(r, s)$  sera décomposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L_{ij}(r, s) = & \int_0^A \left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \\ & + \int_A^{+\infty} \left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \end{aligned} \quad (2.122)$$

Pour une valeur de  $A$  suffisamment grande, la deuxième intégrale devient négligeable, et  $L_{ij}(r, s)$  sera évaluée à l'aide de la première intégrale. Cette évaluation s'effectuera numériquement par l'utilisation de la méthode de Gauss-Chebyshev. La valeur de  $A$  dépendra bien sur des paramètres du problème et sera déterminé dans le Chapitre 4.



## CHAPITRE 3

### FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE ET DE L'INDUCTION ELECTRIQUE ET TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Ce chapitre est consacré à la détermination du facteur d'intensité de contrainte ainsi que du facteur d'intensité de l'induction électrique. Ces deux facteurs seront utilisés plus tard pour la détermination du taux de restitution d'énergie. Pour cela, on utilise la résolution numérique des équations intégrales singulières établie au chapitre précédent.

#### 3.1. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique aux pointes de la fissure $\pm l_0$ :

Dans cette section on utilisera les expressions du déplacement et du potentiel électrique en coordonnées cylindriques en pointes de fissure [62] et qui seront injectées dans les équations décrivant le problème et données par :

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}^{(i)} = C44^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + e15^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} & (3.1) \\ D_{\theta}^{(i)} = e15^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \epsilon11^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} & (3.2) \end{cases}$$

Pour une fissure à l'interface de deux matériaux en mode III (Figure 3.1), les expressions asymptotiques du déplacement et du potentiel électrique en pointes de fissure sont données par :

$$W(r, \theta) = \begin{cases} A \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & 0 \leq \theta \leq \pi & \text{matériau 1} \\ C \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & -\pi \leq \theta \leq 0 & \text{matériau 2} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} B \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & 0 \leq \theta \leq \pi & \text{matériau 1} \\ D \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & -\pi \leq \theta \leq 0 & \text{matériau 2} \end{cases} \quad (3.4)$$

$r$  et  $\theta$  représentent les coordonnées polaires.

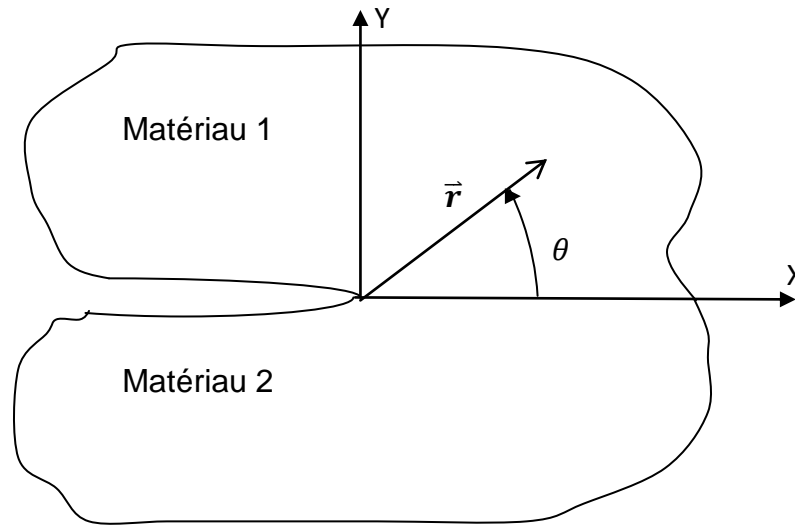


Figure 3.1 : Fissure à l'interface de deux matériaux.

En injectant les équations (3.3) et (3.4) dans (3.1) et (3.2) on obtient pour le premier matériau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ D_{\theta}^{(1)} = \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ D_{\theta}^{(1)} = \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

A l'interface ( $\theta = 0$ ), ces équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \\ D_{\theta}^{(1)} = \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \\ D_{\theta}^{(1)} = \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Le facteur d'intensité de contrainte est défini par :

$$\begin{aligned} K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (C44^{(1)}A + e15^{(1)}B) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le facteur d'intensité de l'induction électrique est défini par :

$$\begin{aligned}
 K_{IV} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} D_{\theta} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \frac{e_{15}^{(1)} A - \varepsilon_{11}^{(1)} B}{2\sqrt{r}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e_{15}^{(1)} A - \varepsilon_{11}^{(1)} B)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

En réarrangeant les équations (3.9) et (3.10) on obtient:

$$\begin{cases}
 C_{44}^{(1)} A + e_{15}^{(1)} B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{III} \\
 e_{15}^{(1)} A - \varepsilon_{11}^{(1)} B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{IV}
 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases}
 e_{15}^{(1)} A - \varepsilon_{11}^{(1)} B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{IV}
 \end{cases} \tag{3.12}$$

Les équations (3.11) et (3.12) forment le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} C_{44}^{(1)} & e_{15}^{(1)} \\ e_{15}^{(1)} & -\varepsilon_{11}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{Bmatrix} K_{III} \\ K_{IV} \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

Après résolution du système (3.13), on tire les constantes  $A$  et  $B$  qui sont données par :

$$\begin{cases}
 A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon_{11}^{(1)} K_{III} + e_{15}^{(1)} K_{IV}}{C_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2}
 \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases}
 B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_{15}^{(1)} K_{III} - C_{44}^{(1)} K_{IV}}{C_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2}
 \end{cases} \tag{3.15}$$

De la même manière, en suivant les mêmes étapes pour le matériau 2 et en utilisant les équations (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13), qui cette fois-ci, contiennent les constantes  $C$  et  $D$  (à la place de  $A$  et  $B$ ) qui sont calculées et données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\varepsilon_{11}^{(2)} K_{III} + e_{15}^{(2)} K_{IV}}{C_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2} \\ D = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_{15}^{(2)} K_{III} - C_{44}^{(2)} K_{IV}}{C_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_{15}^{(2)} K_{III} - C_{44}^{(2)} K_{IV}}{C_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Le saut du déplacement à travers la fissure est défini par :

$$[[w]] = w(r; +\pi) - w(r; -\pi) \quad (3.18)$$

En remplaçant l'expression de  $W(r, \theta)$ , équation (3.3) dans (3.18) on aura :

$$\begin{aligned} [[w]] &= A \sqrt{r} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - C \sqrt{r} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (A + C) \sqrt{r} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sur les lèvres de la fissure  $r$  est donné par :  $r = l_0 - x$

On aura donc :

$$[[w]] = (A + C) \sqrt{l_0 - x} \quad (3.20)$$

La fonction densité  $\psi_1(x)$  est la dérivée du saut du déplacement par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{d}{dx} [[w]] \\ \psi_1(x) &= \frac{-(A + C)}{2\sqrt{l_0 - x}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De cette dernière équation et en passant à la limite on aura :

$$\begin{aligned} -(A + C) &= 2 \lim_{x \rightarrow l_0} \sqrt{l_0 - x} \psi_1(x) \\ &= 2 \lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{l_0 - l_0 r} f_1(r) \\ &= 2 \sqrt{l_0} \lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{1 - r} (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_{2n-1}(r) \\ &= 2 \sqrt{\frac{l_0}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_{2n-1}(1) \\ -(A + C) &= \sqrt{2 l_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le saut de l'induction électrique à travers la fissure est défini par :

$$[[\Phi]] = \Phi(r; +\pi) - \Phi(r; -\pi) \quad (3.23)$$

En remplaçant l'expression de  $\Phi(r, \theta)$ , équation (3.4) dans (3.23), on aura :

$$[[\Phi]] = (B + D)\sqrt{l_0 - x} \quad (3.24)$$

La fonction densité  $\psi_2(x)$  est la dérivée du saut de l'induction électrique par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{d}{dx} [[\Phi]] \\ \psi_2(x) &= \frac{-(B + D)}{2\sqrt{l_0 - x}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

En utilisant la même procédure adoptée pour  $\psi_1(x)$ , et en passant à la limite pour l'équation (3.25), on obtient :

$$-(B + D) = \sqrt{2l_0} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \quad (3.26)$$

En remplaçant les valeurs de A, B, C et D obtenues en (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17) et en tenant compte des équations (3.22) et (3.26), on obtient :

$$\frac{\varepsilon_{11}^{(1)} K_{III} + e_{15}^{(1)} K_{IV}}{C_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2} + \frac{\varepsilon_{11}^{(2)} K_{III} + e_{15}^{(2)} K_{IV}}{C_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2} = -\sqrt{\pi l_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (3.27)$$

$$\frac{e_{15}^{(1)} K_{III} - C_{44}^{(1)} K_{IV}}{C_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2} + \frac{e_{15}^{(2)} K_{III} - C_{44}^{(2)} K_{IV}}{C_{44}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2} = -\sqrt{\pi l_0} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \quad (3.28)$$

En réduisant au même dénominateur et en réarrangeant ces deux dernières équations on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(1)}\beta + \varepsilon_{11}^{(2)}\alpha & e_{15}^{(1)}\beta + e_{15}^{(2)}\alpha \\ e_{15}^{(1)}\beta + e_{15}^{(2)}\alpha & -(C_{44}^{(1)}\beta + C_{44}^{(2)}\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{III} \\ K_{IV} \end{bmatrix} = -\sqrt{\pi l_0} \alpha\beta \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Où:

$$\alpha = C44^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e15^{(1)})^2$$

$$\beta = C44^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e15^{(2)})^2$$

En résolvant le système d'équations (3.29), on aboutit aux facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique dont les expressions sont données par :

$$K_{III}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{k} \left( k_1 \sum_{n=1}^N A_n + k_2 \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (3.30)$$

$$K_{IV}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{k} \left( k_2 \sum_{n=1}^N A_n - k_3 \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (3.31)$$

Où:

$$k_1 = C44^{(1)} \left( C44^{(2)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e15^{(2)})^2 \right) + C44^{(2)} \left( C44^{(1)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e15^{(1)})^2 \right)$$

$$k_2 = e15^{(1)} \left( C44^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e15^{(2)})^2 \right) + e15^{(2)} \left( C44^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e15^{(1)})^2 \right)$$

$$k_3 = \varepsilon_{11}^{(1)} \left( C44^{(1)} \varepsilon_{11}^{(2)} + (e15^{(2)})^2 \right) + \varepsilon_{11}^{(2)} \left( C44^{(2)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e15^{(1)})^2 \right)$$

$$k = (\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)}) (C44^{(1)} + C44^{(2)}) + (e15^{(1)} + e15^{(2)})^2$$

Dans le cas particulier où on a un seul matériau (fissure interne dans une structure piézo-électrique semi-infinie), les constantes physiques des deux matériaux sont les mêmes et les facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique auront les expressions suivantes :

$$K_{III}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{2} \left( C44 \sum_{n=1}^N A_n + e15 \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (3.32)$$

$$K_{IV}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{2} \left( e15 \sum_{n=1}^N A_n - \varepsilon_{11} \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (3.33)$$

### 3.2. Calcul du taux de restitution d'énergie :

On se propose dans ce qui suit de déterminer le taux de restitution d'énergie  $G$  (qui représente l'énergie restituée à la structure lors de la propagation de la fissure) en utilisant l'intégrale du contour de Rice  $J$  [63] qui permet de décrire l'état d'énergie du matériau en fond de fissure et qui est égale à  $G$  (appelé aussi force d'extension de la fissure) dans le cas d'un matériau élastique linéaire. On utilisera les facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique obtenus précédemment (numériquement) pour aboutir à la fin à une forme explicite du taux de restitution d'énergie.

Pour un problème plan et pour un matériau piézoélectrique [8],  $J$  est donné par la relation:

$$J = \int (H \cdot n_x - \sigma_{ij} n_j u_{i,x} - D_i n_i \Phi_{,x}) ds \quad (3.33)$$

Dans laquelle  $S$  est un contour, pris au voisinage de la fissure (Figure 3.2) où  $H$  représente la densité de l'enthalpie électrique.

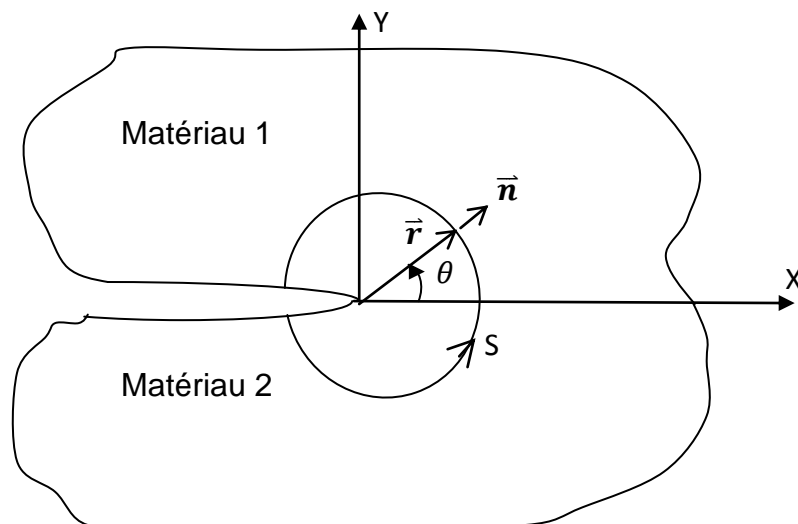


Figure 3.2 : Définition du contour de Rice pour le calcul de  $J$ .

Pour déterminer l'intégrale  $J$ , on divise l'intégrale (3.33) en trois parties. La première partie donne:

$$I = \int H \cdot n_x ds \quad (3.34)$$

Dans l'intégrale (3.34), il y'a la densité de l'enthalpie électrique  $H$  qui est définie en [8] par :

$$H = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} D_i E_i \quad (3.35)$$

Dans notre cas nous avons :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = D_z = E_z = 0 \quad (3.36)$$

En tenant compte de (3.36), la première partie de  $H$  donnera :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \tau_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} + \tau_{rz} \varepsilon_{rz} \quad (3.37)$$

Dans l'équation (3.37),  $\tau_{\theta z}$  est déjà définie auparavant en (3.5), les autres paramètres sont définis dans [62] par:

$$\tau_{rz} = \frac{C44 A + e15 B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{A}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{A}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.40)$$

En injectant (3.5), (3.38), (3.39) et (3.40) dans (3.37) et en faisant l'intégrale de la première partie de (3.35), avec ( $n_x = \cos \theta$  et  $ds = r d\theta$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} n_x ds &= \int_{-\pi}^0 \left( \frac{C44^{(2)}C + e15^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \frac{C}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{C44^{(2)}C + e15^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \frac{\theta}{2} \frac{C}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) r \cos \theta d\theta + \int_0^{\pi} \left( \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \frac{A}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \frac{A}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$



$$\int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} n_x ds = \frac{C44^{(2)}C^2 + e15^{(2)}CD}{4} \int_{-\pi}^0 \cos \theta d\theta + \frac{C44^{(1)}A^2 + e15^{(1)}AB}{4} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta$$

Etant donné que la fonction  $\cos \theta$  est impaire dans  $[-\pi,0]$  ou  $[0,\pi]$ , on aura :

$$\int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} n_x ds = 0 \quad (3.41)$$

En tenant compte de (3.36), la deuxième partie de  $H$  donnera :

$$-\frac{1}{2} D_i E_i = -\frac{1}{2} D_\theta E_\theta - \frac{1}{2} D_r E_r \quad (3.42)$$

Dans l'équation (3.42),  $D_\theta$  est déjà définie auparavant en (3.6). Les autres paramètres sont définis dans [62] par :

$$D_r = \frac{e15 A - \varepsilon11 B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.43)$$

$$E_r = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.44)$$

$$E_\theta = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.45)$$

De la même façon en injectant (3.6), (3.43), (3.44) et (3.45) dans (3.37) et en faisant l'intégrale de la deuxième partie de (3.35), on obtient :

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{2} D_i E_i n_x ds &= \int_{-\pi}^0 \left( \frac{e15^{(2)}C - \varepsilon11^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \frac{C}{4\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{e15^{(2)}C - \varepsilon11^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \frac{\theta}{2} \frac{C}{4\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) r \cos \theta d\theta + \int_0^{\pi} \left( \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \frac{A}{4\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \frac{A}{4\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) r \cos \theta d\theta \\ &= \frac{e15^{(2)}C^2 - \varepsilon11^{(2)}CD}{8} \int_{-\pi}^0 \cos \theta d\theta + \frac{e15^{(1)}A^2 - \varepsilon11^{(1)}AB}{8} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Comme précédemment, la fonction  $\cos \theta$  est impaire dans  $[-\pi,0]$  ou  $[0,\pi]$ .

On aura ainsi :

$$-\int \frac{1}{2} D_i E_i n_x ds = 0 \quad (3.46)$$

Compte tenue de (3.41) et (3.46), la première partie de l'intégrale  $J$  sera :

$$I = 0 \quad (3.47)$$

La deuxième partie de (3.33) donne:

$$II = -\int \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds \quad (3.48)$$

Dans l'intégrale (3.48), la normale au contour suivant  $r$  est égale à l'unité et elle est nulle suivant  $\theta$  et  $z$ . Suite à cela,  $\tau_{\theta z}$  n'est pas prise en compte (il ne reste que  $\tau_{rz}$ ). Il y'a aussi l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x}$  qui est donné en Appendice B par :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.49)$$

Par conséquent, l'intégrale (3.48) donnera:

$$-\int \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds = -\int \tau_{rz} n_r \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial x} ds \quad (3.50)$$

Compte tenue de (3.49), on aura :

$$\begin{aligned} -\int \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds &= -\int \tau_{zr} \left( \cos \theta \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \right) r d\theta \\ &= -\int_{-\pi}^0 \frac{C44^{(2)}C + e15^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \theta \frac{C}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{r} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{C\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) r d\theta - \int_0^{\pi} \frac{C44^{(1)}A + e15^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \theta \frac{A}{2\sqrt{r}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{A\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) r d\theta \\ &= \frac{C44^{(2)}C^2 + e15^{(2)}CD}{8} \int_{-\pi}^0 \sin(\theta/2)^2 d\theta + \frac{C44^{(1)}A^2 + e15^{(1)}AB}{8} \\ &\quad \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta/2)^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds &= \frac{C44^{(2)}C^2 + e15^{(2)}CD}{8} \int_{-\pi}^0 \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta + \frac{C44^{(1)}A^2 + e15^{(1)}AB}{8} \\
&\quad \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} (C44^{(2)}C^2 + e15^{(2)}CD + C44^{(1)}A^2 + e15^{(1)}AB) \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, et en remplaçant les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  par leurs valeurs obtenues en (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17), l'intégrale (3.48) sera :

$$\text{II} = \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon11^{(1)}K_{III}^2 + e15^{(1)}K_{III}K_{IV}}{C44^{(1)}\varepsilon11^{(1)} + (e15^{(1)})^2} + \frac{\varepsilon11^{(2)}K_{III}^2 + e15^{(2)}K_{III}K_{IV}}{C44^{(2)}\varepsilon11^{(2)} + (e15^{(2)})^2} \right) \quad (3.52)$$

La troisième partie de (3.33) donne :

$$\text{III} = - \int D_i n_i \Phi_{,x} ds \quad (3.53)$$

Dans l'intégrale (3.53), et puisque la normale au contour est nulle suivant  $\theta$ ,  $D_\theta$  n'est pas prise en compte (il ne reste que  $D_r$ ). L'intégrale (3.53) donnera :

$$- \int D_i n_i \Phi_{,x} ds = - \int D_r n_r \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial x} ds \quad (3.54)$$

Compte tenu de (3.49) on obtient :

$$\begin{aligned}
- \int D_i n_i \Phi_{,x} ds &= - \int D_r \left( \cos \theta \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta} \right) r d\theta \\
&= - \int_{-\pi}^0 \frac{e15^{(2)}C - \varepsilon11^{(2)}D}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \theta \frac{C}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{r} \sin \theta \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{C\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) r d\theta - \int_0^{\pi} \frac{e15^{(1)}A - \varepsilon11^{(1)}B}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \theta \frac{A}{2\sqrt{r}} \right. \\
&\quad \cdot \left. - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{A\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) r d\theta \\
&= \frac{e15^{(2)}C^2 - \varepsilon11^{(2)}CD}{4} \int_{-\pi}^0 \sin(\theta/2)^2 d\theta + \frac{e15^{(1)}A^2 - \varepsilon11^{(1)}AB}{4} \\
&\quad \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta/2)^2 d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int D_i n_i \Phi, x ds &= \frac{e15^{(2)}C^2 - \varepsilon11^{(2)}CD}{4} \int_{-\pi}^0 \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta + \frac{e15^{(2)}A^2 - \varepsilon11^{(2)}AB}{4} \\
&\quad \cdot \int_0^\pi \frac{1 - \cos \theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} (e15^{(2)}C^2 - \varepsilon11^{(2)}CD + e15^{(1)}A^2 - \varepsilon11^{(1)}AB) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, et en remplaçant les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  par leurs valeurs obtenues en (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17), l'intégrale (3.53) sera :

$$\text{III} = \frac{1}{4} \left( \frac{e15^{(1)}K_{III}K_{IV} - C44^{(1)}K_{IV}^2}{C44^{(1)} \varepsilon11^{(1)} + (e15^{(1)})^2} + \frac{e15^{(2)}K_{III}K_{IV} - C44^{(2)}K_{IV}^2}{C44^{(2)} \varepsilon11^{(2)} + (e15^{(2)})^2} \right) \quad (3.56)$$

Compte tenue de (3.47), (3.52) et (3.56), l'expression de l'intégrale du contour  $J$  sera :

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon11^{(1)}K_{III}^2 + 2 e15^{(1)}K_{III}K_{IV} - C44^{(1)}K_{IV}^2}{C44^{(1)} \varepsilon11^{(1)} + (e15^{(1)})^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon11^{(2)}K_{III}^2 + 2 e15^{(2)}K_{III}K_{IV} - C44^{(2)}K_{IV}^2}{C44^{(2)} \varepsilon11^{(2)} + (e15^{(2)})^2} \right) \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où on a un seul matériau (fissure interne dans une structure piézo-électrique semi-infinie), les constantes seront les mêmes et l'expression de  $J$  aura la forme :

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon11K_{III}^2 + 2 e15 K_{III}K_{IV} - C44K_{IV}^2}{C44 \varepsilon11 + e15^2} \right) \quad (3.58)$$

## CHAPITRE 4

### PROCEDURE NUMERIQUE ET APPLICATIONS

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques applications numériques. Parmi les objectifs à atteindre, la détermination des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique ainsi que le taux de restitution d'énergie  $G$ . Pour cela, on fait varier certains paramètres du problème tandis que d'autres seront fixés. Parmi ces paramètres on peut citer le chargement appliqué, l'induction électrique imposée, l'épaisseur du premier matériau, la taille de la fissure initiale, etc....

Pour chaque étude, on doit d'abord déterminer les paramètres  $N$ ,  $n$  et  $A$  vus au Chapitre 2 et nécessaires à la résolution numérique des équations intégrales. Cette détermination s'effectuera sur la base d'une étude de convergence. Pour  $A$ , on se basera sur la convergence de l'intégrale impropre  $L_{ij}(r, s)$  en utilisant le logiciel MAPLE. Pour  $N$ , on se basera sur la convergence des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique respectivement  $(K_{III}(\pm l_0))$  et  $(K_{IV}(\pm l_0))$ . Pour  $n$ , on étudiera la convergence d'une intégrale particulière à l'aide de la formule d'intégration numérique de Gauss-Chebychev.

La première application sera la considération du cas particulier où on a un seul matériau.

#### 4.1. Etude d'une fissure interne dans le cas d'un seul matériau :

On considère un matériau piézo-électrique qui est la céramique PZT-5H et dont les caractéristiques sont [4]:

Constante élastique :  $C_{44} = 3.53 * 10^{10} \text{ N/m}^2$

Constante piézo-électrique :  $e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2$

Constante diélectrique :  $\epsilon_{11} = 1.51 * 10^{-8} \text{ C/Vm}$

Taux de restitution d'énergie critique :  $J_{cr} = 5.0 \text{ N/m}$

#### 4.1.1. Détermination de A :

L'expression de  $L_{ij}(r, s)$  est donnée par :

$$L_{ij}(r, s) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{G_{ij}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{ij}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \quad i = 1,2, \quad j = 1,2 \quad (4.1)$$

On prend la plus grande valeur possible de  $(s - r)$ , soit 2. On fixera les valeurs de  $l_0$  à 10 mm et  $h$  à 1mm.

L'évaluation numérique des intégrales  $L_{ij}(r, s)$  à l'aide du logiciel MAPLE avec la fonction `evalf` a donnée :

$$\text{evalf } L_{11}(r, s) = \text{evalf } \int_0^{\infty} \left( \frac{G_{11}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{11}}{A_{12}} \right) \sin(20\lambda) d\lambda = -1.146175482 * 10^9$$

$$\text{evalf } L_{12}(r, s) = \text{evalf } \int_0^{\infty} \left( \frac{G_{12}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{12}}{A_{12}} \right) \sin(20\lambda) d\lambda = -0.07401697981$$

$$\text{evalf } L_{22}(r, s) = \text{evalf } \int_0^{\infty} \left( \frac{G_{22}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{22}}{A_{12}} \right) \sin(20\lambda) d\lambda = 1.062261279 * 10^5$$

Si on limite l'intégrale sur  $[0, 12]$  on obtient une très bonne convergence et on retrouve les mêmes valeurs.

En conclusion, on peut limiter l'intégrale sur  $[0, 12]$  et les intégrales  $L_{ij}(r, s)$  auront la forme :

$$L_{11}(r, s) = \int_0^{12} \left( \frac{G_{11}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{11}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \quad (4.2)$$

$$L_{12}(r, s) = \int_0^{12} \left( \frac{G_{12}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{12}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \quad (4.3)$$

$$L_{22}(r, s) = \int_0^{12} \left( \frac{G_{22}(\lambda)}{\Delta} - \frac{H_{22}}{A_{12}} \right) \sin(l_0 \lambda (s - r)) d\lambda \quad (4.4)$$

**Note :** Vu le phénomène de couplage, on a :

$$G_{12}(\lambda) = G_{21}(\lambda) \quad \text{et} \quad H_{12} = H_{21} \quad \text{ce qui nous ramène à} \quad L_{12}(r, s) = L_{21}(r, s)$$

#### 4.1.2. Détermination de $N$ :

On se fixe tout d'abord  $n$  à 100, puis on fixera les valeurs de  $l_0$  à 10 mm et  $h$  à 1 mm. La contrainte de cisaillement et l'induction électrique, auront respectivement les valeurs  $\tau_\infty = 4.2 \text{ Mpa}$  et  $D_\infty = 10^{-3} \frac{C}{m^2}$ .

On calcule les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique pour différentes valeurs de  $N$  à partir des formules suivantes :

$$K_{III}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{2} \left( C44 \sum_{n=1}^N A_n + e15 \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (4.5)$$

$$K_{IV}(\pm l_0) = -\frac{\sqrt{\pi l_0}}{2} \left( e15 \sum_{n=1}^N A_n - \varepsilon11 \sum_{n=1}^N B_n \right) \quad (4.6)$$

Tableau 4.1 : Valeurs de  $K_{III}$  et  $K_{IV}$  en fonctions de  $N$ .

$N$	1	2	3	4	5
$K_{III}[MPa\sqrt{m}]$	3.7956	1.4742	1.5234	1.5318	1.5298
$K_{IV}[(C/m^2)\sqrt{m}]$	0.090396	0.035100	0.036271	0.036371	0.036425

$N$	6	7	8	9	10
$K_{III}[MPa\sqrt{m}]$	1.5297	1.5298	1.5298	1.5298	1.5298
$K_{IV}[(C/m^2)\sqrt{m}]$	0.036422	0.036422	0.036423	0.036423	0.036423

En consultant le Tableau 4.1, et d'après les valeurs obtenues, on peut bien voir qu'à partir de  $N = 8$ , il y a convergence des valeurs de  $K_{III}(\pm l_0)$  et  $K_{IV}(\pm l_0)$ . Donc, pour la suite du travail, la valeur de  $N$  sera fixée à 8.

#### 4.1.3. Détermination de $n$ :

On fixe la valeur de  $N$  à 8, et on calcule les expressions des  $H_n^{ij}(r)$  pour différentes valeurs de  $n$  en utilisant la formule d'intégration de Gauss-Chebyshev.

Les expressions des  $H_n^{ij}(r)$  sont données par les formules suivantes :

$$H_n^{11}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_0 L_{11}(r,s) T_{2n-1}(s) ds \approx l_0 \sum_1^n \frac{L_{11}(r, s_k) T_{2n-1}(s_k)}{n} \quad (4.7)$$

$$H_n^{12}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_0 L_{12}(r,s) T_{2n-1}(s) ds \approx l_0 \sum_1^n \frac{L_{12}(r, s_k) T_{2n-1}(s_k)}{n} \quad (4.8)$$

$$H_n^{22}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_0 L_{22}(r,s) T_{2n-1}(s) ds \approx l_0 \sum_1^n \frac{L_{22}(r, s_k) T_{2n-1}(s_k)}{n} \quad (4.9)$$

Où :

$$s_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (4.10)$$

**Note** : du fait que  $L_{12}(r,s) = L_{21}(r,s)$ , on a aussi  $H_n^{21}(r) = H_n^{12}(r)$

Dans les équations (4.7), (4.8) et (4.9), on prend les mêmes paramètres que précédemment, avec en plus  $r = 0.99$

Tableau 4.2 : Valeurs des  $H_n^{ij}(r)$  en fonction de  $n$ .

$n$	$H_n^{11}(r)$	$H_n^{12}(r)$	$H_n^{22}(r)$
5	-45118.06	-1.97 $\cdot 10^{-5}$	1.920 $\cdot 10^{-14}$
8	7022.20	6.00 $\cdot 10^{-6}$	-3.000 $\cdot 10^{-14}$
12	7482.00	3.06 $\cdot 10^{-6}$	-3.200 $\cdot 10^{-15}$
20	2474.63	1.21 $\cdot 10^{-6}$	-1.500 $\cdot 10^{-15}$
25	-9631.55	-4.87 $\cdot 10^{-6}$	4.120 $\cdot 10^{-15}$
30	-7436.78	-1.52 $\cdot 10^{-6}$	3.180 $\cdot 10^{-15}$



40	-5396.06	-2.061 $\cdot 10^{-6}$	2.300 $\cdot 10^{-15}$
50	-4884.66	-2.317 $\cdot 10^{-6}$	2.089 $\cdot 10^{-15}$
60	-4847.79	-2.335 $\cdot 10^{-6}$	2.073 $\cdot 10^{-15}$
70	-4847.39	-2.334 $\cdot 10^{-6}$	2.073 $\cdot 10^{-15}$
80	-4847.23	-2.334 $\cdot 10^{-6}$	2.073 $\cdot 10^{-15}$
90	-4847.23	-2.334 $\cdot 10^{-6}$	2.073 $\cdot 10^{-15}$

On consultant le Tableau 4.2, et d'après les valeurs obtenues, on constate qu'à partir de  $n = 80$ , il y a convergence des valeurs des  $H_n^{ij}(r)$ .

En conclusion, dans tout ce qui va suivre les calculs seront effectués avec  $A = 20$ ,  $N = 8$  et  $n = 80$ .

#### 4.1.4. Détermination des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique :

Dans cette première simulation numérique, on considère une fissure de Griffith en mode III avec  $l_0 = 0.5 \text{ mm}$  soumise à un cisaillement anti-plan de valeur  $\tau_\infty = 2 \text{ Mpa}$  et à une induction électrique de valeur  $D_\infty = 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ , et on se propose de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique en utilisant respectivement les équations (3.32) et (3.33), tout en variant  $h$  de 0.05 mm à l'infini.

Les valeurs obtenues de  $K_{III}(\pm l_0)$  et  $K_{IV}(\pm l_0)$  sont classées dans le Tableau (4.3). On constate que si  $h$  atteint une valeur de 5 mm ou plus, alors  $K_{III}(\pm l_0)$  et  $K_{IV}(\pm l_0)$  convergent vers ceux de la structure infinie dont les expressions sont directement données par :

$$K_{III}(\pm l_0) = \sqrt{\pi l_0} \tau_\infty \quad (4.11)$$

$$K_{IV}(\pm l_0) = \sqrt{\pi l_0} D_\infty \quad (4.12)$$

Tableau 4.3 :  $K_{III}(\pm l_0)$  ,  $K_{IV}(\pm l_0)$  et  $Y$  en fonction de  $h$ .

$h$ [mm]	$l_0/h$	$Y$	$K_{III}(\pm l_0)$ [Mpa $\sqrt{m}$ ]	$K_{IV}(\pm l_0)$ [(C/m <sup>2</sup> ) $\sqrt{m}$ ] * 10 <sup>-3</sup>
0.05	10	2.055	0.1627	0.0813
0.0625	8	1.888	0.1495	0.0747
0.064	7.8	1.869	0.1480	0.0740
0.065	7.6	1.85	0.1465	0.0732
0.067	7.4	1.83	0.1449	0.0724
0.069	7.2	1.81	0.1433	0.0716
0.0714	7.0	1.79	0.1417	0.0708
0.0735	6.8	1.77	0.1400	0.070
0.075	6.6	1.751	0.1386	0.0693
0.078	6.4	1.733	0.1372	0.0686
0.0806	6.2	1.715	0.1358	0.0679
0.0833	6.0	1.697	0.1344	0.0672
0.086	5.8	1.679	0.1329	0.0664
0.089	5.6	1.660	0.1314	0.0657
0.0925	5.4	1.641	0.1299	0.0649
0.0961	5.2	1.620	0.1283	0.0641
0.1	5.0	1.596	0.1264	0.0632
0.106	4.7	1.564	0.1238	0.0619
0.119	4.2	1.508	0.1194	0.0597
0.131	3.8	1.462	0.1157	0.0578
0.15	3.333	1.406	0.1113	0.0565
0.172	2.9	1.353	0.1071	0.0535
0.2	2.5	1.301	0.1030	0.0510
0.222	2.25	1.267	0.1003	0.0501
0.25	2.0	1.233	0.0976	0.0488
0.3	1.666	1.186	0.0939	0.0469
0.35	1.428	1.152	0.0912	0.0456
0.4	1.250	1.127	0.0892	0.0446
0.45	1.111	1.107	0.0876	0.0438
0.5	1.000	1.091	0.0864	0.0432
0.55	0.908	1.079	0.0854	0.0427
0.6	0.833	1.068	0.0845	0.0422
0.65	0.769	1.060	0.0839	0.0419
0.7	0.714	1.053	0.0833	0.0416
0.75	0.666	1.047	0.0829	0.0414
0.8	0.625	1.042	0.0825	0.0412
0.85	0.588	1.038	0.0822	0.0411
0.9	0.555	1.034	0.0818	0.0409
0.95	0.526	1.031	0.0816	0.0408
1	0.500	1.028	0.0814	0.0407
1.05	0.476	1.026	0.0812	0.0406
1.1	0.454	1.024	0.0811	0.0405

$h$ [mm]	$l_0/h$	$Y$	$K_{III}(\pm l_0)$ [Mpa $\sqrt{m}$ ]	$K_{IV}(\pm l_0)$ [(C/m <sup>2</sup> ) $\sqrt{m}$ ] * 10 <sup>-3</sup>
1.15	0.434	1.022	0.0809	0.0404
1.2	0.416	1.020	0.0807	0.0403
1.25	0.400	1.019	0.0807	0.0403
1.3	0.384	1.017	0.0805	0.0402
1.35	0.370	1.016	0.0804	0.0402
1.4	0.344	1.015	0.0803	0.0401
1.45	0.333	1.014	0.0803	0.0401
1.5	0.322	1.013	0.0802	0.0401
1.75	0.285	1.012	0.0801	0.0400
2.0	0.250	1.008	0.0798	0.0399
2.5	0.200	1.005	0.0795	0.0397
3.0	0.166	1.003	0.0794	0.0397
4.0	0.125	1.002	0.0793	0.0396
5.0	0.100	1.001	0.0792	0.0396
6.0	0.083	1.001	0.0792	0.0396
7.0	0.071	1.001	0.0792	0.0396

Dans le but de reformuler les équations (4.11) et (4.12) en fonction des caractéristiques géométriques du matériau, on introduit les facteurs de forme  $Y1$  et  $Y2$  qui sont fonction de ( $l_0/h$ ). Les expressions de (4.11) et (4.12) seront :

$$K_{III}(\pm l_0) = Y1 \sqrt{\pi l_0} \tau_{\infty} \quad (4.13)$$

$$K_{IV}(\pm l_0) = Y2 \sqrt{\pi l_0} D_{\infty} \quad (4.14)$$

En utilisant les valeurs déjà obtenues de  $K_{III}(\pm l_0)$  et  $K_{IV}(\pm l_0)$ , et en les divisant respectivement par  $\sqrt{\pi l_0} \tau_{\infty}$  et  $\sqrt{\pi l_0} D_{\infty}$ , on obtient les valeurs de  $Y1$  et  $Y2$  (Tableau 4.3) qui sont identiques. Ces derniers seront notés par  $Y$  qui sera à son tour représenté dans la Figure (4.1).

L'allure de la courbe  $Y = fct \left( \frac{l_0}{h} \right)$  ressemble bien à celle d'un polynôme dont le degré reste à déterminer. Pour y arriver, on utilise la méthode des moindres carrés pour aboutir à l'expression finale de  $Y$ .

En utilisant plus de 40 points, et pour  $\frac{l_0}{h} \leq 5$ , le facteur de forme est déterminé avec une précision meilleure que 0.4% et a pour expression [64]:

$$Y = 0.99263 + 0.04484 \left( \frac{l_0}{h} \right) + 0.06867 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 - 0.01884 \left( \frac{l_0}{h} \right)^3 + 0.00163 \left( \frac{l_0}{h} \right)^4 \quad (4.15)$$

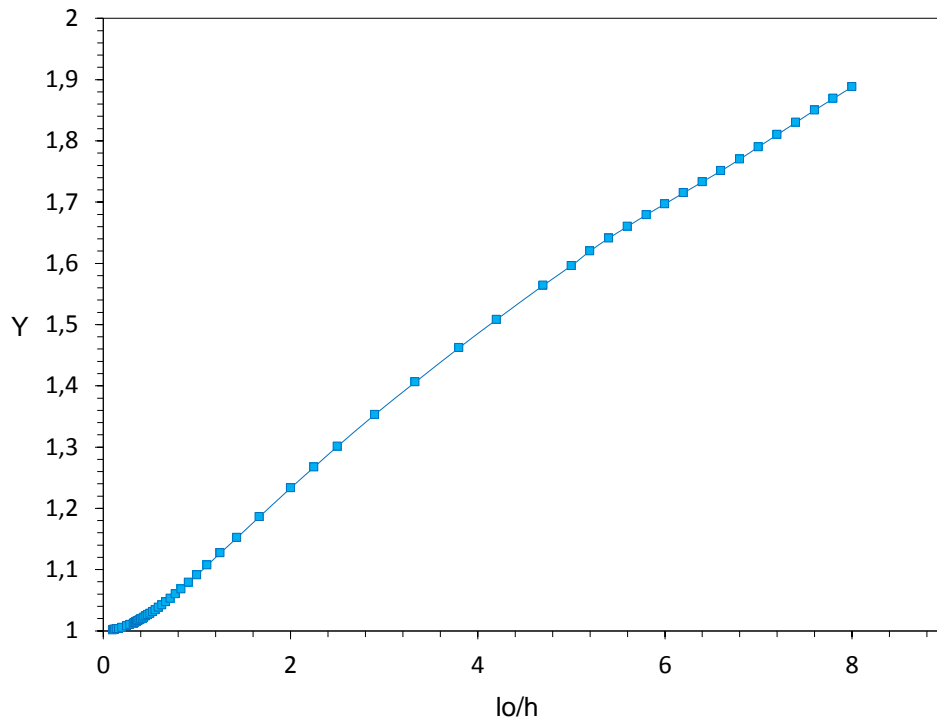


Figure 4.1 : Variation du facteur de forme  $Y$  en fonction de  $\left(\frac{l_0}{h}\right)$ .

Dans le but de reformuler l'expression du taux de restitution d'énergie (en fonction des constantes du matériau, du chargement, de l'induction électrique, du défaut initial et du facteur de forme  $Y$ ), on remplace les expressions (4.13) et (4.14) dans (3.58). On obtient :

$$J = \left(\frac{\pi l_0}{2}\right) Y^2 \left(\frac{\varepsilon_{11}\tau_{\infty}^2 + 2 e_{15} \tau_{\infty} D_{\infty} - C_{44} D_{\infty}^2}{C_{44} \varepsilon_{11} + e_{15}^2}\right) \quad (4.16)$$

Dans le cas de la plaque infinie,  $Y = 1$  et l'expression (4.16) sera :

$$J = \left(\frac{\pi l_0}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon_{11}\tau_{\infty}^2 + 2 e_{15} \tau_{\infty} D_{\infty} - C_{44} D_{\infty}^2}{C_{44} \varepsilon_{11} + e_{15}^2}\right) \quad (4.17)$$

L'expression (4.17) est identique à celle donnée par PAK [4] pour le cas de la structure plane infinie.

#### 4.1.5. Etude de l'influence des différents paramètres du problème :

##### 4.1.5.1. Etude de l'influence du paramètre $h$ :

Dans cette partie et en premier lieu, on considère une fissure de Griffith en mode III avec  $l_0 = 10 \text{ mm}$  soumise à un cisaillement anti-plan de valeur  $\tau_\infty = 4.2 \text{ Mpa}$  et à une induction électrique variable. On fait varier le paramètre  $h$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.58) et on trace les courbes  $J/J_{cr}$  en fonction de  $D_\infty$  pour différentes valeurs de  $h$  (Figure 4.2).

En second lieu, on considère la même fissure, mais cette fois-ci soumise à une induction électrique de valeur  $D_\infty = 10^{-3} \frac{C}{m^2}$  et à un cisaillement anti-plan variable. On fait varier le paramètre  $h$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.58) et on trace les courbes  $J/J_{cr}$  en fonction de  $\tau_\infty$  pour différentes valeurs de  $h$  (Figure 4.3).

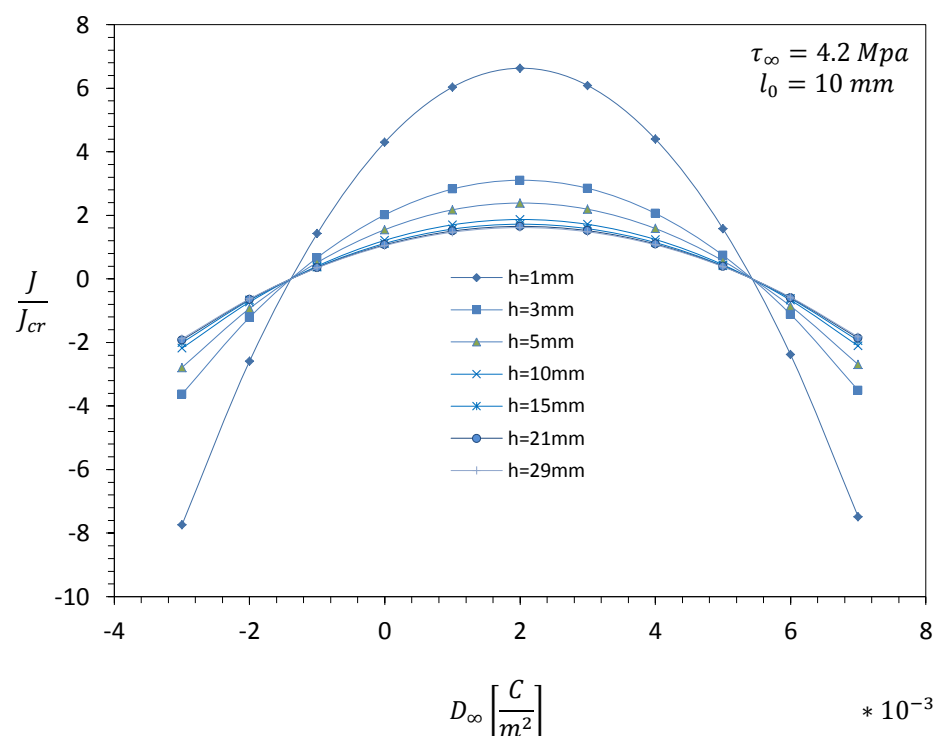


Figure 4.2 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $h$ .

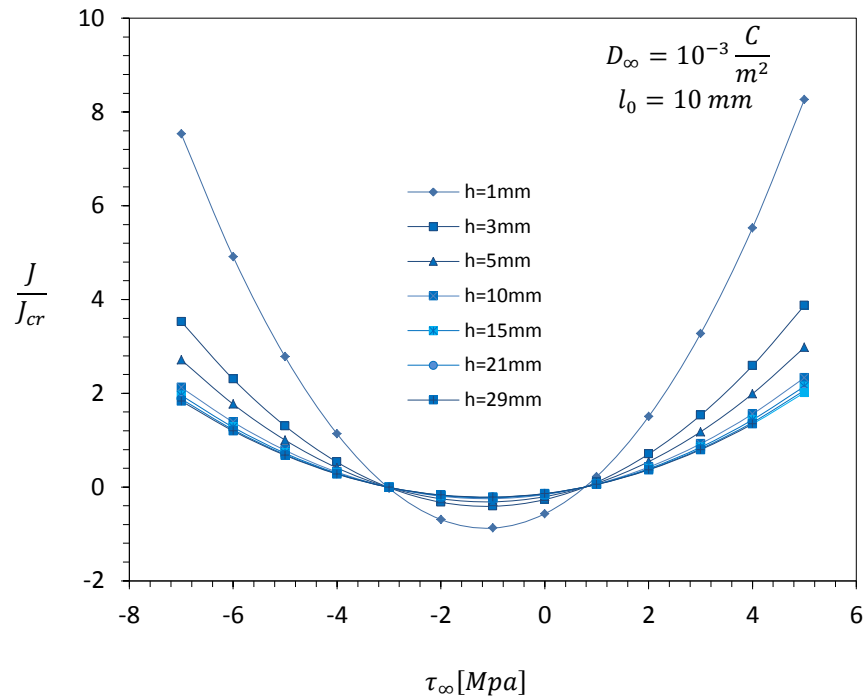


Figure 4.3 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $h$ .

#### 4.1.5.2. Etude de l'influence du paramètre $l_0$ :

Dans cette partie et en premier lieu, on considère une fissure de Griffith en mode III avec  $h = 1 \text{ mm}$  soumise à un cisaillement anti-plan de valeur  $\tau_{\infty} = 4.2 \text{ Mpa}$  et à une induction électrique variable. On fait varier le paramètre  $l_0$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.58) et on trace les courbes  $J/J_{cr}$  en fonction de  $D_{\infty}$  pour différentes valeurs de  $l_0$  (Figure 6.4).

En second lieu, on considère la même fissure, mais cette fois-ci soumise à une induction électrique de valeur  $D_{\infty} = 10^{-3} \frac{C}{m^2}$  et à un cisaillement anti-plan variable. On fait varier le paramètre  $l_0$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.58) et on trace les courbe  $J/J_{cr}$  en fonction de  $\tau_{\infty}$  pour différentes valeurs de  $l_0$  (Figure 4.5).

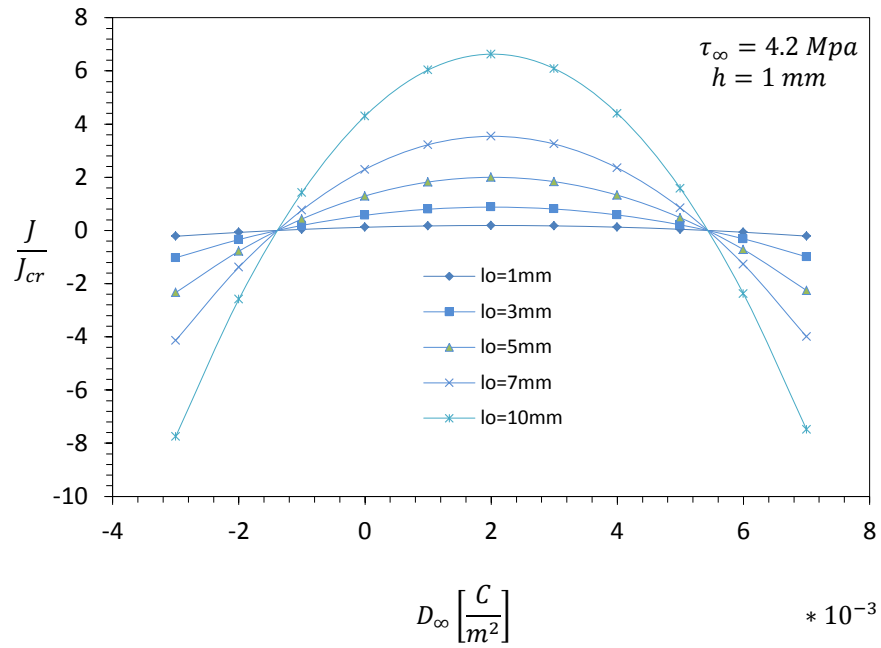


Figure 4.4 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $l_0$

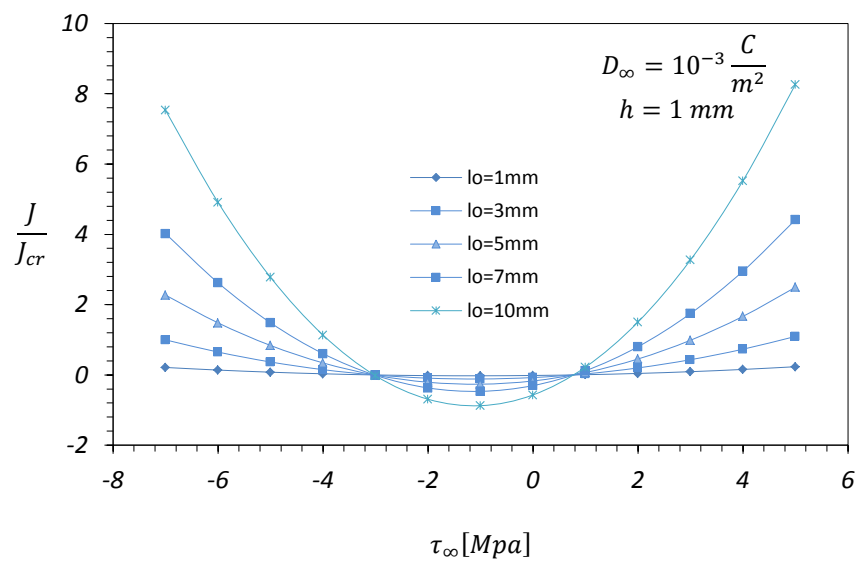


Figure 4.5 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $l_0$

#### 4.1.5.3. Discussion des résultats :

On remarque sur la Figure (4.2) qu'en faisant varier le  $h$ , les courbes  $J/J_{cr} = f(D_{\infty})$  sont des paraboles dont le maximum est obtenu pour la valeur  $D_{\infty} = 2 * 10^{-3} \frac{C}{m^2}$  (même axe de symétrie) et dont les points communs ( $J/J_{cr} = 0$ ) sont obtenus pour les valeurs de  $D_{\infty}^1 = -1.4 * 10^{-3} \frac{C}{m^2}$  et  $D_{\infty}^2 = 5.4 * 10^{-3} \frac{C}{m^2}$ . Avec la croissance de  $h$ , on tend vers le cas de la structure plane infinie et spécialement pour  $h = 29$  (valeur limite du  $h$  dans notre code de calcul) la courbe obtenue converge vers celle obtenue par PAK [4], (mêmes paramètres pour le cas d'une structure infinie). Dans ce cas précis, l'expression de  $J$  est donnée par (4.17). Les valeurs de  $D_{\infty}$  qui annulent cette dernière sont exactement  $D_{\infty}^1$  et  $D_{\infty}^2$ .

On remarque sur les courbes obtenues que si l'induction électrique imposée est en dehors de l'intervalle  $[D_{\infty}^1, D_{\infty}^2]$ , alors le taux de restitution d'énergie est négatif. Dans le même intervalle et pour certaines valeurs de  $D_{\infty}$ ,  $J/J_{cr} \leq 1$ . Pour ces deux cas précédents, la fissure ne risque pas de croître. Par contre, dans le même intervalle, si  $J/J_{cr} > 1$ , la croissance de la fissure est favorable et ceci est d'autant vrai avec la diminution de  $h$  (la fissure se situe plus près de la surface extérieure du matériau). On peut conclure à la fin que l'accroissement de  $|D_{\infty} - 2 * 10^{-3}|$  a tendance à retarder la croissance de la fissure.

La Figure (4.3) montre qu'en faisant varier le  $h$ , les courbes  $J/J_{cr} = f(\tau_{\infty})$  sont des paraboles (de même axe de symétrie) dont le minimum est obtenu pour la valeur de  $\tau_{\infty} = -1.125 \text{ Mpa}$  et dont les points communs ( $J/J_{cr} = 0$ ) sont obtenus pour les valeurs de  $\tau_{\infty}^1 = -3.04 \text{ Mpa}$  et  $\tau_{\infty}^2 = 0.77 \text{ Mpa}$ . Ceux-ci peuvent être aussi déduits de l'expression (4.17). De même que précédemment, si le chargement appliqué se situe dans l'intervalle  $[\tau_{\infty}^1, \tau_{\infty}^2]$ , alors le taux de restitution d'énergie est négatif. En dehors de cet intervalle et pour certaines valeurs de  $\tau_{\infty}$ ,  $J/J_{cr} \leq 1$ . Pour ces deux cas précédents la fissure ne risque pas de croître. Par contre, si  $J/J_{cr} > 1$ , il y'a risque de croissance de la fissure et ceci est d'autant vrai que  $h$  diminue. On peut conclure à la fin que l'accroissement de  $|\tau_{\infty} + 1.125|$  a tendance à favoriser la croissance de la fissure.



On voit bien sur la Figure (4.4) qu'en faisant varier le  $l_0$  (défaut initial), les courbes  $J/J_{cr} = f(D_\infty)$  sont aussi des paraboles qui ressemblent à celles de la Figure (4.2) (mêmes points communs et même valeur de  $D_\infty$  pour le pic). Si la valeur de l'induction électrique se situe en dehors de l'intervalle  $[D_\infty^1, D_\infty^2]$ , alors la fissure ne risque pas de croître quelque soit le défaut initial. Dans l'intervalle considéré et pour les paramètres ( $h = 1$  mm et  $\tau_\infty = 4.2$  Mpa) si le défaut initial est petit ( $2l_0$  jusqu'à 6 mm), alors la fissure ne risque pas de croître. Par contre, si  $l_0$  atteint 5 mm et plus, alors la croissance de la fissure est propice et spécialement pour la valeur de  $l_0 = 10$  mm on voit que  $J_{max}$  dépasse 6 fois  $J_{cr}$ . Si  $l_0$  dépasse 10 mm, alors la rupture sera inévitable ( $l_0 = 15$  mm,  $J_{max} = 12.82 J_{cr}$ )

On voit sur la Figure (4.5) qu'en faisant varier le  $l_0$  (défaut initial), les courbes  $J/J_{cr} = f(D_\infty)$  sont aussi des paraboles qui ressemblent à celles de la Figure (4.3) (mêmes points communs et même valeur de  $D_\infty$  pour le minimum). Si le chargement appliqué appartient à l'intervalle  $[\tau_\infty^1, \tau_\infty^2]$ , alors le taux de restitution d'énergie est négatif et la fissure ne risque pas de croître. De même que précédemment, en dehors de l'intervalle considéré et pour les paramètres ( $h = 1$  mm et  $D_\infty = 10^{-3} \frac{C}{m^2}$ ), si le défaut initial est petit ( $2l_0$  jusqu'à 6 mm), alors la fissure ne risque pas croître. Par contre, si  $l_0$  atteint 5 mm et plus, alors la croissance de la fissure est propice. Si  $l_0$  dépasse 10 mm, alors la rupture sera inévitable.

## 6.2. Etude d'une fissure à l'interface de deux matériaux différents :

Dans cette deuxième partie, on aborde l'étude d'une fissure située à l'interface de deux matériaux. Pour cela, on considère un autre matériau piézo-électrique proche du matériau étudié précédemment. Notre choix a porté sur la céramique PZT-4 et dont les caractéristiques sont [9] :

Constante élastique :  $C_{44} = 2.56 * 10^{10} \text{ N/m}^2$

Constante piézo-électrique :  $e_{15} = 13.44 \text{ C/m}^2$

Constante diélectrique :  $\epsilon_{11} = 0.60 * 10^{-8} \text{ C/Vm}$

Dans ce qui suit, on note la structure PZT-4/5H, la structure composée par la céramique PZT-4 (matériau 1) et la céramique PZT-5H (matériau 2). De la même façon, on notera la structure PZT-5H/4 la structure inverse.

#### 4.2.1. Etude de l'influence des différents paramètres du problème :

##### 4.2.1.1. Etude de l'influence du paramètre $h$ :

Dans cette partie et en premier lieu, on considère une fissure de Griffith en mode III avec  $l_0 = 5 \text{ mm}$  soumise à un cisaillement anti-plan de valeur  $\tau_\infty = 5.94 \text{ Mpa}$  et à une induction électrique variable. On fait varier le paramètre  $h$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.57) et on trace les courbes  $J/J_{cr}$  en fonction de  $D_\infty$  pour différentes valeurs de  $h$  (Figure 4.6) pour la structure PZT-4/5H et (Figure 4.7) pour la structure PZT-5H/4.

En second lieu, on considère la même fissure, mais cette fois-ci soumise à une induction électrique de valeur  $D_\infty = 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  et à un cisaillement anti-plan variable. On fait varier le paramètre  $h$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.57) et on trace les courbe  $J/J_{cr}$  en fonction de  $\tau_\infty$  pour différentes valeurs de  $h$  (Figure 4.8) pour la structure PZT-4/5H et (Figure 4.9) pour la structure PZT-5H/4.

##### 4.2.1.2. Etude de l'influence du paramètre $l_0$ :

Dans cette partie et en premier lieu, on considère une fissure de Griffith en mode III avec  $h = 1 \text{ mm}$  soumise à un cisaillement anti-plan de valeur  $\tau_\infty = 4.2 \text{ Mpa}$  et à une induction électrique variable. On fait varier le paramètre  $l_0$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.57) et on trace les courbes  $J/J_{cr}$  en fonction de  $D_\infty$  pour différentes valeurs de  $l_0$  (Figure 4.10) pour la structure PZT-4/5H et (Figure 4.11) pour la structure PZT-5H/4.

En second lieu, on considère la même fissure, mais cette fois-ci soumise à une induction électrique de valeur  $D_\infty = 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$  et à un cisaillement anti-plan variable. On fait varier le paramètre  $l_0$ . On détermine le taux de restitution d'énergie  $J$  en utilisant l'équation (3.57) et on trace les courbe  $J/J_{cr}$  en fonction de  $\tau_\infty$  pour différentes valeurs de  $l_0$  (Figure 4.12) pour la structure PZT-4/5H et (Figure 4.13) pour la structure PZT-5H/4.

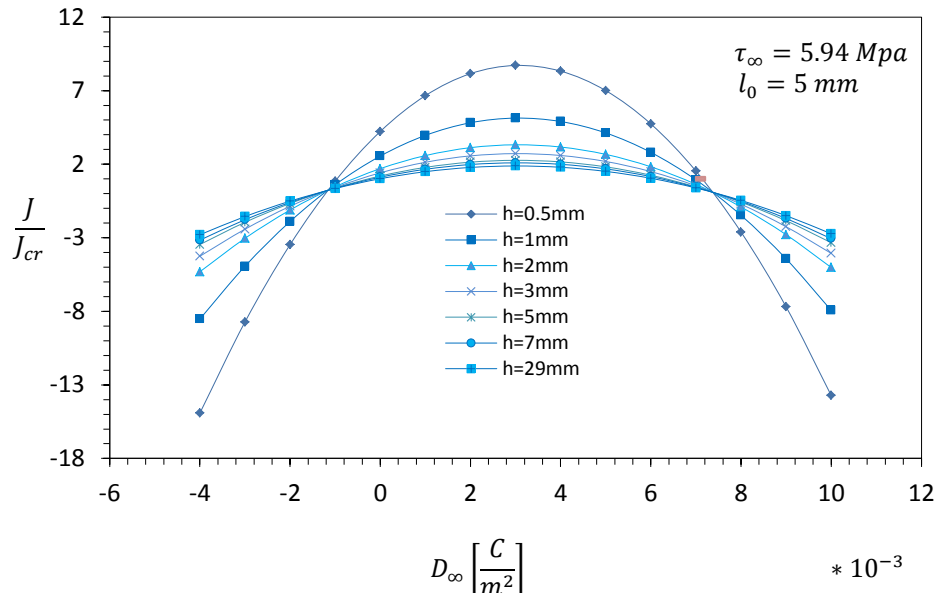


Figure 4.6 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $h$  (PZT-4/5H).

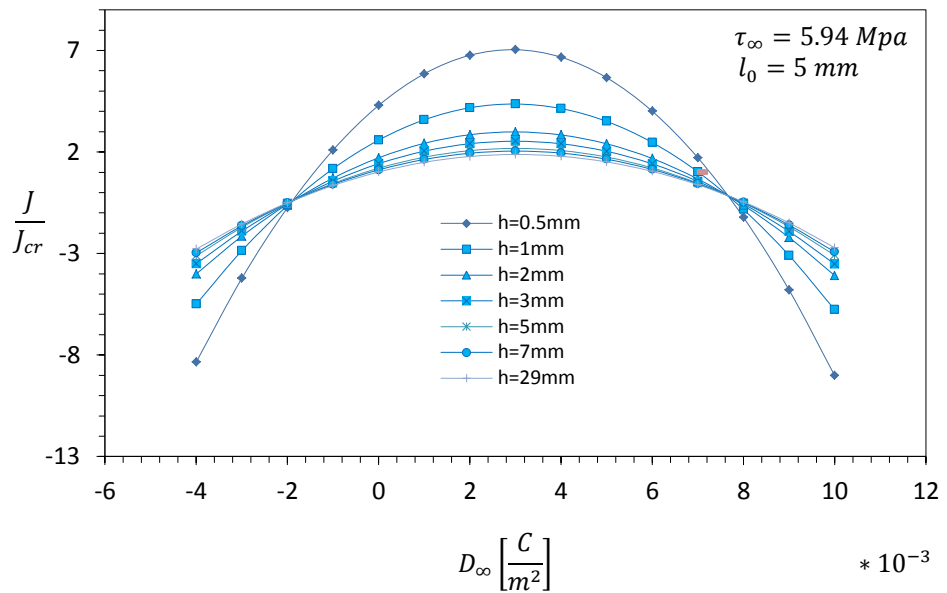


Figure 4.7 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $h$  (PZT-5H/4).

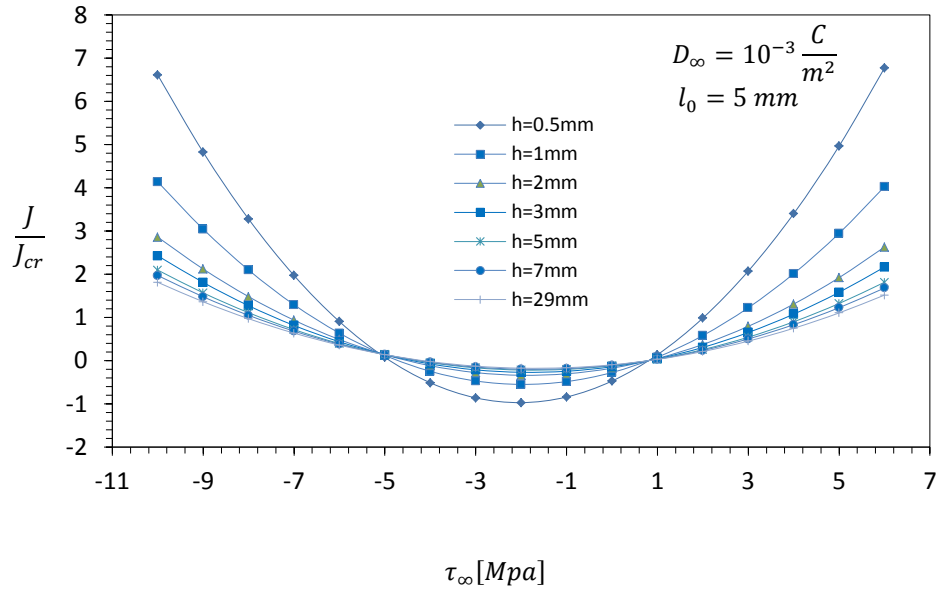


Figure 4.8 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $h$  (PZT-4/5H).

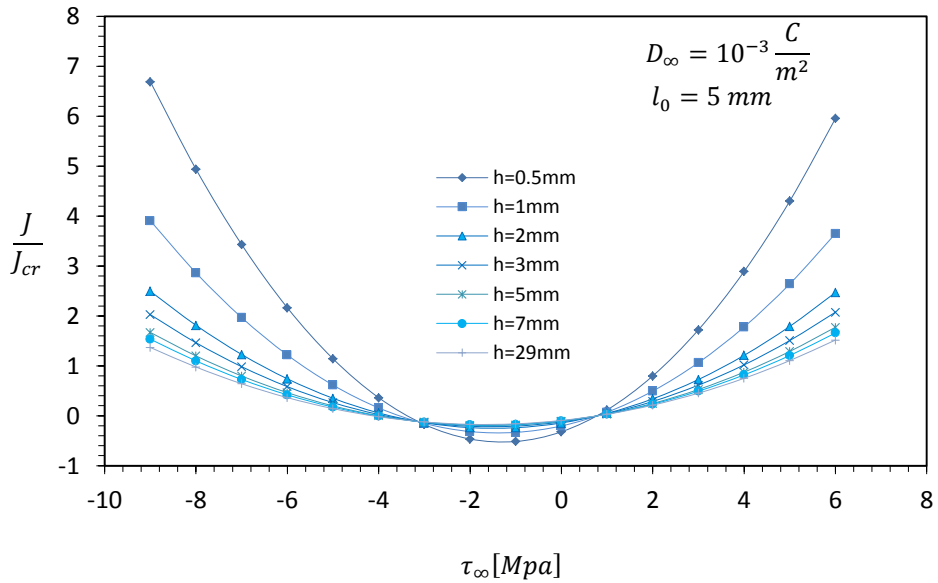


Figure 4.9 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $h$  (PZT-5H/4).

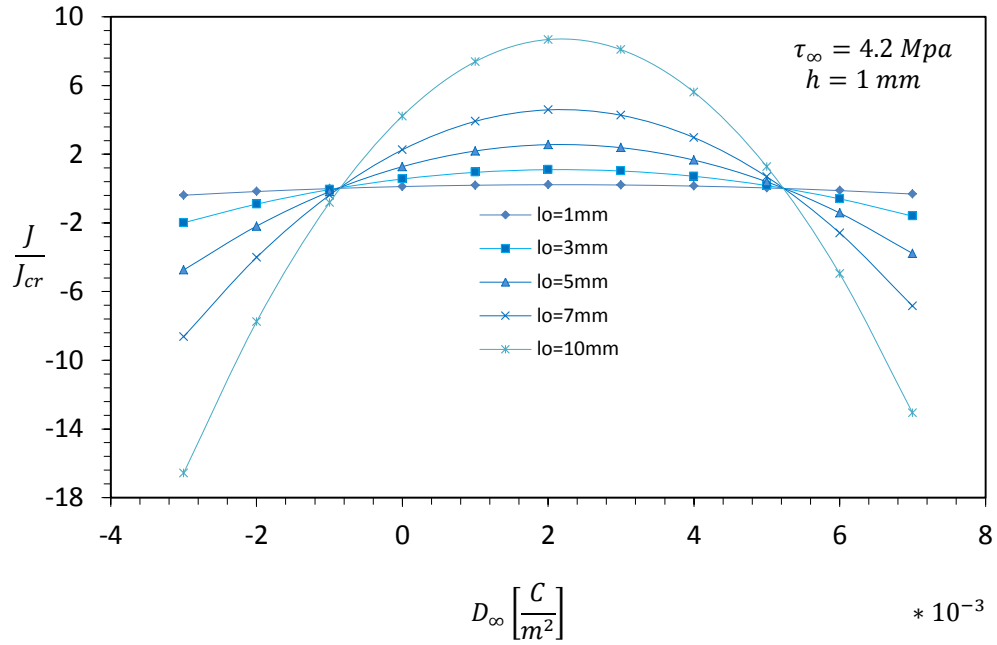


Figure 4.10 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $l_0$  (PZT-4/5H).

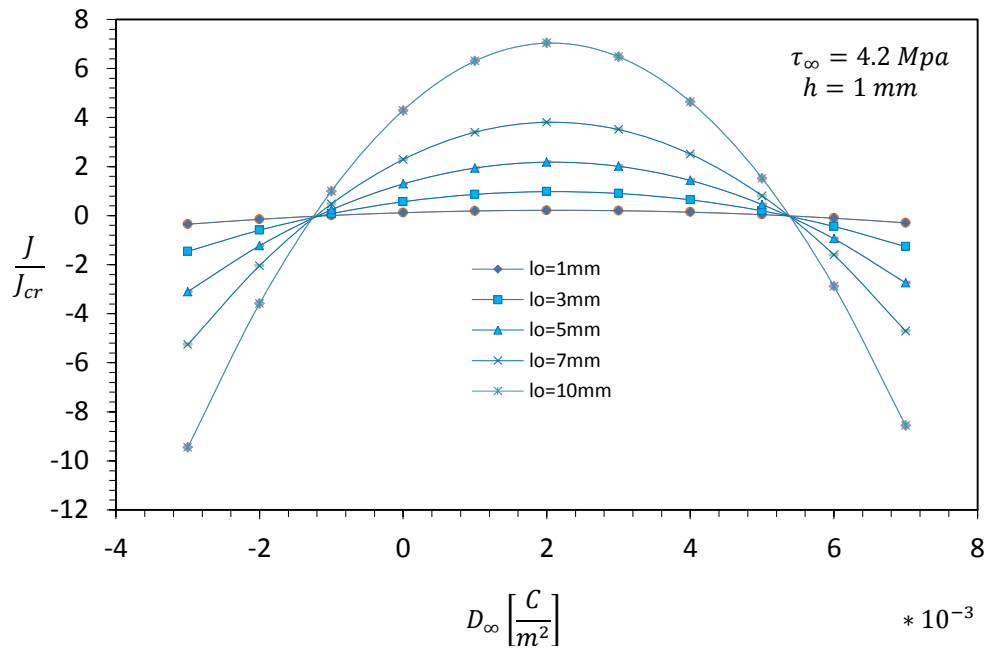


Figure 4.11 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et l'induction électrique imposée pour différentes valeurs de  $l_0$  (PZT-5H/4).

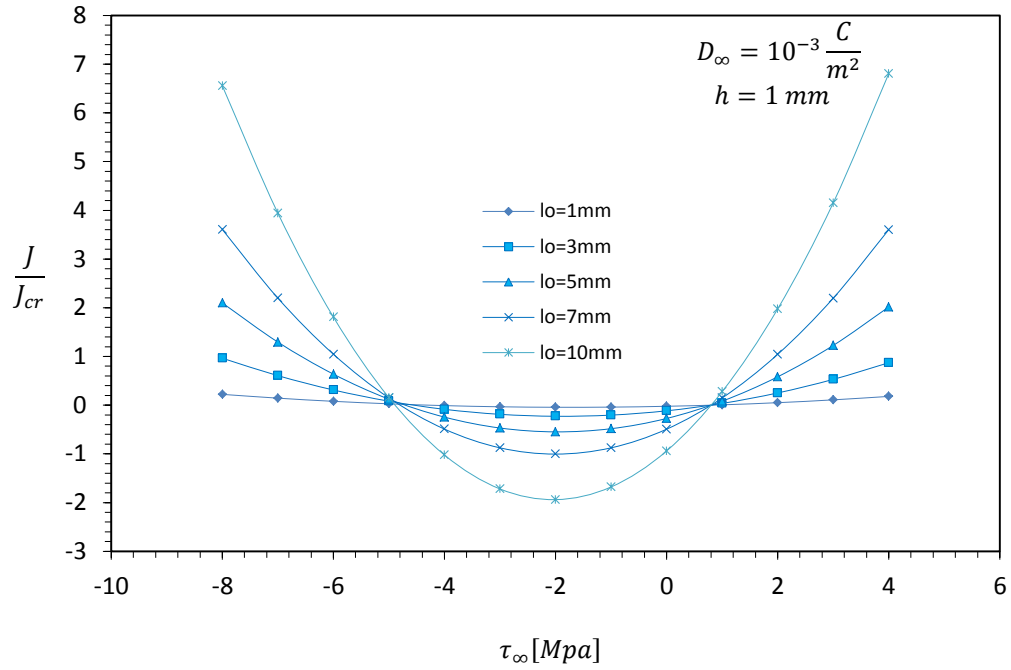


Figure 4.12 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $l_0$  (PZT-4/5H).

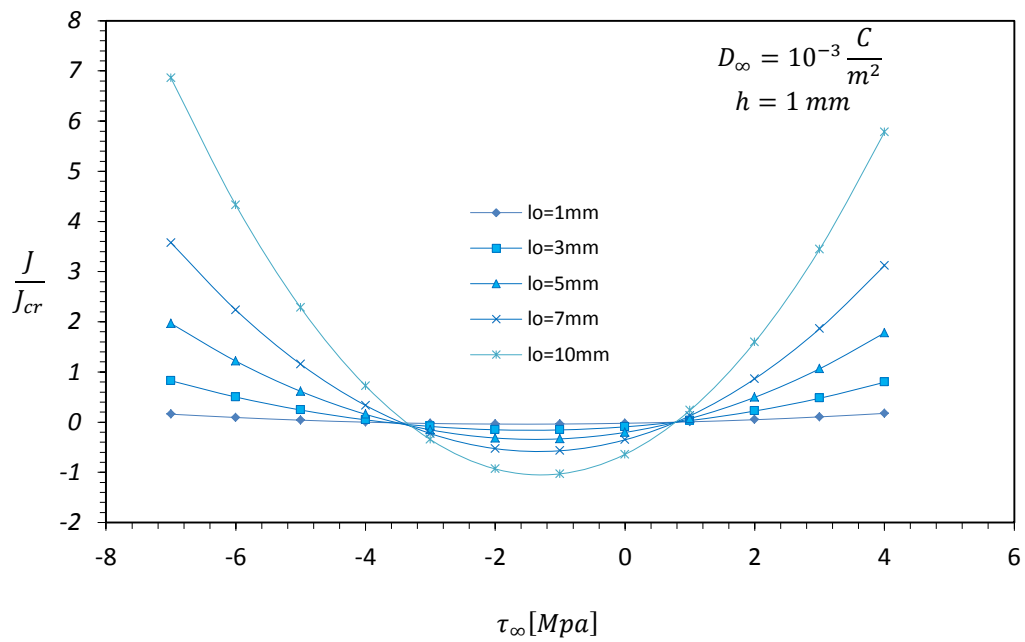


Figure 4.13 : Relation entre le taux de restitution d'énergie et le chargement appliqué pour différentes valeurs de  $l_0$  (PZT-5H/4).

#### 4.2.1.3. Discussion des résultats :

On remarque sur les Figures (4.4) et (4.7) que les courbes sont des paraboles semblables à celles de la Figure (4.2) mais différentes par la position de l'axe de symétrie et la position des points communs ( $J/J_{cr} = 0$ ). On peut conclure ici les mêmes remarques que celles du cas d'un seul matériau. Il faut noter que dans ce cas ci, la fissure à été réduite de la moitié par rapport au cas précédent (un seul matériau), mais en contrepartie le chargement à été augmenté de tel sorte à avoir le même pic que dans le cas de la structure infinie pour le matériau PZT-5H.

On peut bien voir que la courbe  $J/J_{cr} = f(D_{\infty})$  pour la structure (PZT-4/5H) est identique à celle de la structure (PZT-5H/4) pour le cas de la structure infinie ( $h=29$ ), parce que le taux de restitution d'énergie est fonction des facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique, qui eux-mêmes ne dépendent pas ici des caractéristiques des matériaux.

On constate aussi par exemple, que le taux de restitution d'énergie maximal atteint pour  $h= 0.5$  mm dans les deux structures est supérieur à celui du cas d'un seul matériau. Du point de vue de sa plus grande valeur, c'est la structure PZT-4/5H qui l'emporte.

Etant donnée que la constante élastique ( $C_{44}$ ) du matériau PZT-5H est plus grande que celle du matériau PZT-4, alors la structure PZT-5H est plus rigide que la structure (PZT-5H/4). Cette dernière, est à son tour plus rigide que la structure (PZT-4/5H). Les résultats obtenus ont bien confirmé cela.

Les courbes montrées sur les Figures (4.8) et (4.9) sont des paraboles semblables à celles de la Figure (4.3). Les remarques concernant ces courbes sont identiques à celles du cas d'un seul matériau. On peut aussi voir que le taux de restitution d'énergie est le plus grand dans le cas de la structure (PZT-4/5H).

Les courbes montrées sur les Figures (4.10) et (4.11) sont aussi des paraboles semblables à celles de la Figure (4.4). Il faut noter ici, qu'on a conservé le même chargement appliqué que dans le cas d'un seul matériau. Les mêmes remarques sont valables et le taux de restitution d'énergie est le plus grand dans le cas de la structure (PZT-4/5H).

Les courbes représentées sur les Figures (4.12) et (4.13) sont aussi des paraboles semblables à celles de la Figure (4.5). Les mêmes remarques sont valables que pour le cas d'un seul matériau et le taux de restitution d'énergie obtenu est le plus grand dans le cas de la structure (PZT-4/5H).

En résumé, On peut conclure que le facteur dominant pour juger le comportement de rupture d'une structure en matériau piézo-électrique comportant une fissure (structure étudiée soumise au chargement anti-plan et à l'induction électrique plane) est la constante élastique. Plus cette constante élastique est grande, plus la structure résiste mieux à la fissuration. Si la structure se compose de deux matériaux de différentes épaisseurs, il faut sous réserve que le matériau de moindre épaisseur soit le plus rigide des deux.



## CONCLUSION

Dans ce présent document, une fissure de Griffith en mode III dans une structure semi-infinie à l'interface de deux matériaux piézo-électriques soumise à un chargement mécanique combiné avec une induction électrique est considérée. Les transformées de Fourier sont utilisées pour convertir les équations de la piézo-élasticité en un système d'équations intégrales. Les équations intégrales sont à leurs tours réduites analytiquement à un système d'équations algébriques qui sera résolu numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev. Puis, sont déterminés les facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique ainsi que le taux de restitution d'énergie en pointes de fissure.

L'application numérique a inclus premièrement le traitement du cas d'un seul matériau (fissure interne dans une structure semi-infinie) pour valider les résultats obtenus par rapport à des travaux antérieurs [4]. Le critère de rupture est basé sur le taux de restitution d'énergie.

Les résultats numériques ont permis dans un premier temps de définir les facteurs d'intensité de contrainte et de l'induction électrique sous de nouvelles formes en se basant sur les caractéristiques géométriques de la structure et par l'introduction d'un facteur de forme approprié.

Les résultats numériques ont montré dans un deuxième temps que l'amorçage et la croissance de la fissure sont en accord avec l'accroissement de la dimension du défaut initial ou de la réduction de l'épaisseur du matériau supérieur (fissure plus proche de la surface extérieure de la structure).

Ils ont montré aussi, que en général, la croissance de l'induction électrique en valeur absolue (pour des grandes valeurs) en dehors de l'intervalle où le taux de restitution d'énergie est positive, a pour conséquence de retarder l'amorçage et la croissance de la fissure.

L'application numérique a inclus en deuxième lieu le traitement du cas de deux matériaux (fissure d'interface entre deux matériaux piézo-électriques). Les observations constatés pour un seul matériau sont toujours valables ici. L'amorçage et la croissance de la fissure sont favorisés par la croissance de la dimension du défaut initial ou de la réduction de l'épaisseur du matériau supérieur et ils sont retardés par une très grande augmentation en valeur absolue de l'induction électrique.

Les résultats numériques ont montré aussi que dans le cas d'une structure composée de deux matériaux, et dans le but d'une meilleure résistance à la rupture, il est nécessaire que le matériau le moins épais des deux soit le plus rigide.

**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES**

$C44 [N/m^2]$	: Constante élastique du matériau
$D_f$	: La fissure (Défaut)
$D_x [C/m^2]$	: Induction électrique appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction X
$D_y [C/m^2]$	: Induction électrique appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction Y
$D_\infty [C/m^2]$	: Induction électrique imposée à l'infini
$E_x$	: Champ électrique suivant la direction X
$E_y$	: Champ électrique suivant la direction Y
$G [N/m]$	: Taux de restitution d'énergie
$K_{III} [MPa\sqrt{m}]$	: Facteur d'intensité de contrainte en mode III
$K_{IV} [(C/m^2)\sqrt{m}]$	: Facteur d'intensité de l'induction électrique en mode III
$KIJ(x, t)$	: Noyau de l'équation intégrale
$J$	: Intégrale de contour de Rice
$N$	: Nombre d'équations du système d'équations algébriques obtenu par application de la méthode de collocation sur une équation intégrale
$T$	: Polynôme de Chebychev du premier ordre
$U$	: Polynôme de Chebychev du second ordre
$W(x, y)$	: Champ de déplacement suivant la direction Z
$W(r, \theta)$	: Champ de déplacement en coordonnées polaires
$[[w]]$	: Saut du déplacement

$X$	: Direction parallèle à la fissure
$Y$	: Direction normale à la fissure
$e_{15} [C/m^2]$	: Constante piézoélectrique
$\hat{f}(\lambda)$	: Transformée de Fourier de $f(x)$
$h [mm]$	: Epaisseur du matériau supérieur
$l_0 [mm]$	: Demi-longueur de la fissure
$n$	: Nombre de nœuds
$r_j$	: Points de collocation
$t$	: Nœuds
$w$	: Fonction poids associée au polynôme de Chebychev de première espèce
$\Omega$	: Domaine du milieu bidimensionnel semi infini
$\nabla^2$	: Opérateur Laplacien
$\gamma_{xz}$	: Déformation dans le plan XZ
$\gamma_{yz}$	: Déformation dans le plan YZ
$\epsilon_{11} [C/Vm]$	: Constante diélectrique
$\tau_{xz} [N/m^2]$	: Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction X
$\tau_{yz} [N/m^2]$	: Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction Y
$\tau_\infty [N/m^2]$	: Contrainte de cisaillement appliquée à l'infini
$\phi(x, y)$	: Potentiel électrique suivant Z
$\phi(r, \theta)$	: Potentiel électrique en coordonnées polaires
$[[\Phi]]$	: Saut du potentiel électrique
$\psi_i(x)$	: Fonction densité

## APPENDICE B

### OPERATEUR MATHÉMATIQUE

Soit une fissure d'interface entre deux matériaux, et soit un contour S pris au voisinage de cette fissure (Figure 3.2).

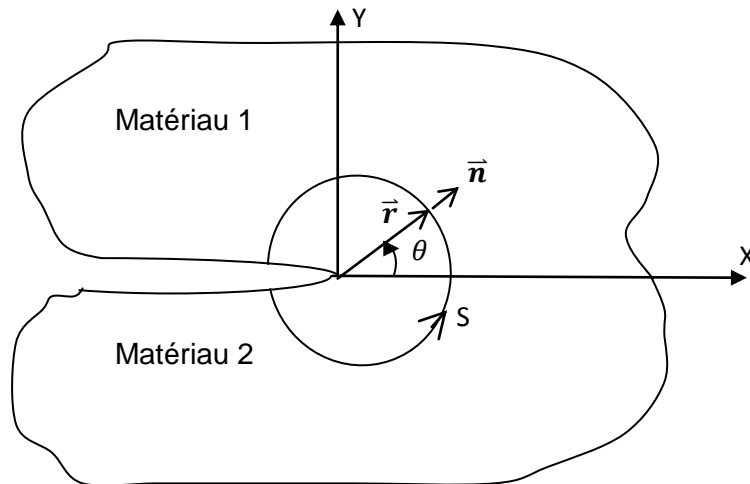


Figure 3.2 : Définition du contour de Rice.

Les coordonnées polaires d'un point de ce contour sont données par :

$$x = r \cos \theta \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2)$$

Les expressions de  $r$  et  $\theta$  en fonction de ces coordonnées sont données par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\theta = \cot^{-1} \frac{y}{x} \quad (4)$$

L'opérateur mathématique  $\frac{\partial}{\partial x}$  appliqué à  $r$  et  $\theta$  est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5)$$

La dérivée partielle de  $r$  par rapport à  $x$  est :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

Compte tenu de (1) et (3), on aura :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad (7)$$

La dérivée partielle de  $\theta$  par rapport à  $x$  est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{-y}{x^2 + y^2}\end{aligned}\tag{8}$$

Compte tenu de (2) et (3), on aura :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}\tag{9}$$

En remplaçant (7) et (9) dans (5), on aura :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\tag{10}$$

## REFERENCES

1. Suo, Z., Kuo, C.M., Barnett, D.M., Willis, J.R., "Fracture mechanics for piezoelectric ceramics", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, V.40, n°4, (May 1992), 739-765.
2. Gao, C.F., Zhao, M., Tong, P., Zhang, T.Y., "The energy release rate and the J integral of an electrically insulated crack in piezoelectric material". *International Journal of Engineering Science*, V.42, n°46-47, (November 2004), 2175-2192.
3. Pak, Y.E., Hermann, G., "Conservations laws and the material momentum tensor for the electric dielectrics", *International Journal of Engineering Science*, V.24, n°8, (1986), 1365-1374.
4. Pak, Y.E., "Crack extension force in a piezoelectric material", *Journal of Applied Mechanics*, V.57, n°3, (September 1990), 647-653.
5. Shen, S., Nishioka, T., "Fracture of piezoelectric material: energy density criterion", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V.33, n°3, (2000), 57-65.
6. Soh, A.K., Fang, D.-N., Lee, K.L., "Fracture analysis of piezoelectric materials with defect using Energy density theory", *International Journal of Solids and Structures*, V.38, n°5, (2001), 8331-8344.
7. Zuo, J.Z., Sih, G.C., "Energy density theory formulation and interpretation of cracking behavior for piezoelectric ceramics", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V.34, n°, (2000), 17-33.
8. Gao, H., Zhang, T.Y., Tong, P., "Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, V.45, n°4, (April 1997), 491-510.
9. Park, S.B., Sun, C.T., "Fracture criteria for piezoelectric ceramics", *Journal American Ceramic Society*, V.78, n° (1995), 1475-1480.
10. Li, X., Lee, K.Y., "Fracture analysis of cracked piezoelectric materials", *International Journal of Solids and Structures*, V.41, n°15, (July 2004), 4137-4161.
11. Loboda, V., Lapusta, Y., Govorukha, V., "Mechanical and electrical yielding for an electrically insulated crack in an interlayer between piezoelectric materials", *International Journal of Engineering Science*, V.46, n°2, (2008), 260-272.
12. Guimard, J.-M., Allix, O., Pechnik, N., Thévenet, P., "Characterization and modeling of rate effects in the dynamic propagation of mode-II delamination in composite laminates", *International Journal of Fracture*, V.160, n°1, (2009), 55-71.

13. Chen, H., Wei, W., Liu, J., Fang, D., "Propagation of a mode-III interfacial crack in a piezoelectric–piezomagnetic bi-material", *International Journal of Solids and Structures*, V.49, n°18, (September 2012), 2547-2558.
14. Chen, S., Gao, H., "Dynamic behaviors of mode III interfacial crack under a constant loading rate", *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, V.22, n°6-8, (September 2010), 515–530.
15. Chiang, C.R., "Mode-III crack problems in a cubic piezoelectric medium", *Acta Mechanica*, V.224, n°9 (September 2013), 2203–2217.
16. Li, X.F., "Transient response of a piezoelectric material with a semi-infinite mode-III crack under impact loads", *International Journal of Fracture*, V.111, n°1, (September 2001), 119–130.
17. Ryvkin, M., "Steady-state mode III delamination crack in a periodically layered medium", *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, V.22, n°6-8 (September 2010), 635–646.
18. Song, H.P., Gao, C.F., "Interaction of a piezoelectric screw dislocation with a blunt mode III crack in a piezoelectric material", *Engineering Fracture Mechanics*, V.96, n°8, (December 2012), 687–700.
19. Ricoeur, A., Kuna, M., "Influence of electric fields on the fracture of ferroelectric ceramics", *Journal of European Ceramic Society*, V.23, n° (2012), 1313–1328.
20. Hu, K.Q., Kang, Y.L., Li, G.Q., "Moving crack at the interface between two dissimilar magneto-electroelastic materials", *Acta Mechanica*, V.182, n°1-2 (March 2006), 1–16.
21. Zhou, Z.G., Du, S.Y., WANG, B., "Investigation of anti-plane shear behavior of a Griffith crack in a piezoelectric material by using the non-local theory", *International Journal of Fracture*, V.111, n°1, (September 2001), 105–117.
22. Ferdjani, H., Abdelmoula, R., Marigo, J.J., El Borgi, S., "Study of size effects in the Dugdale model through the case of a crack in a semi-infinite plane under anti-plane shear loading", *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, V.21, n°1, (June 2009), 41-55.
23. Keqiang, H.u., Zengtao, Chen. Jiawei, F.u., "Moving Dugdale crack along the interface of two dissimilar magneto-electroelastic materials", *Acta Mechanica*, V.226, n°6, (June 2015), 2065–2076.
24. Nishioka T., Shen, S., "Higher order asymptotic solution for an interfacial crack in piezoelectric bi-material under impact", *Material Science Research International*, V.7, n°, (2001), 157–165.



25. Tian, W.Y., Rajapakse, R.K.N.D., "Fracture parameters of a penny-shaped crack at the interface of a piezoelectric bi-material system", *International Journal of Fracture*, V.141, n°1-2, (September 2006), 105–117.
26. Kuo, C.M., Barnett, D.M., "Stress singularities of interfacial cracks in bounded piezoelectric half-spaces. In *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications* (Edited by Wu, J.J., Ting, T.C.T. and Barnett, D.M.), SIAM Proceedings Series, Philadelphia, (1991), 33–50.
27. Beom, H.G., Atluri, S.N., "Near-tip and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media", *International Journal of Fracture*, V.75, n° 3-4, (March 1996), 163–183.
28. Deng, W., Meguid, S.A., "Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials", *ASME, Journal of Applied Mechanics*, V.65, n°5, (September 1998), 76–84.
29. Gao, C.F., Wang, M.Z., "Collinear permeable cracks between dissimilar piezoelectric materials", *International Journal of Solids and Structures*", V.37, n°36, (September 2000), 4969–4986.
30. Li, X., "Electroelastic analysis of an internal interface crack in a half-plane consisting of two bonded dissimilar piezoelectric quarter-planes", *Meccanica*, V.38, n°3, (May 2000), 309-323.
31. Ou, Z.C., Chen, Y.H., "Interface crack problem in elastic dielectric/piezoelectric biomaterials", *International Journal of Fracture*, V.130, n°1, (November 2004), 427–454.
32. Qin Q.H, Mai Y.W., "Crack branch in piezoelectric biomaterial system", *International Journal of Engineering Science*, V.38, n°6, (April 2000), 673–693.
33. Qin, Q.H., Yu, S.W., "An arbitrarily-oriented plane crack terminating at interface between dissimilar piezoelectric materials", *International Journal of Solids and Structures*, V.34, n°5, (February 1997), 581–590.
34. Scherzer, M., Kuna, M., "Combined analytical and numerical solution of 2D interface corner configurations between dissimilar piezoelectric materials", *International Journal of Fracture*, V.127, n°1, (May 2004), 61–99.
35. Wang, T.C., Han, X.L., "Fracture mechanics of piezoelectric materials", *International Journal of Fracture*, V.98, n°1, (May 1999), 15–35.
36. Barthélemy, B., "notion pratiques en mécanique de la rupture", Edition Eyrolles (1980).
37. Leblond, J.B., "Mécanique de la rupture fragile", Ecole Polytechnique, Edition (1994).

38. Griffith, A., "The phenomena of rupture and flow in solids". Philosophical Transaction of the Royal Society of London, CCXXI-A, (1920), 163-198.
39. Irwin G. R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", Journal of Applied Mechanics, V.24, (1957), 361-364.
40. Lippman, G., "Principe de la conservation de l'électricité", Annales de chimie et de physique, V.24, (1881), p.145.
41. Curie, P., Curie, J., "Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémihédres à faces inclinées", Comptes rendus de l'Académie des Sciences, V. XCIII, séance du 26 décembre 1881, p.1137.
42. Ballato, A., "*Piezoelectricity: Old Effect, New Thrusts*", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, V.42, (1995), p.916.
43. Lew Yan Voon, L.C., Willatzen, M., "*Electromechanical phenomena in semiconductor nanostructures*", Journal of Applied Physics, V.109, n° 3, (2011), p.31101.
44. Fukada, E., "*History and recent progress in piezoelectric polymers*", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, V.47, (2000), 1277-1290.
45. Lang, S.B., Muensit, S., "*Review of some lesser-known applications of piezoelectric and pyroelectric polymers*", Applied Physics A: Materials Science & Processing, V.85, (2006), 125-134.
46. Shung, K.K., Cannata, J.M., Zhou, Q.F., "*Piezoelectric materials for high frequency medical imaging applications: A review*", Journal of Electroceramics, V.19, (2007), 139-145.
47. Erdogan, F., "Elastic-plastic anti-plane problems for bonded dissimilar media containing cracks and cavities", International Journal of Solids and Structures, V.2, n°2, (July 1966), 447-465.
48. Erdogan, F., "Bonded dissimilar materials containing cracks parallel to the interface", Engineering Fracture Mechanics, V.3, n°10, (1971), 231-240.
49. Erdogan, F., K. Arin., "Penny-shaped interface crack between an elastic layer and a half space" International Journal of Engineering Science, V.10, n°2, (February 1972), 115-125.
50. Lowengrub, M., Sneddon, I.N., "The effect of shear on a penny-shaped crack at the interface of an elastic half-space and a rigid foundation", International Journal of Engineering Science, V.10, n°10, (October 1972), 899-913 .
51. Erdogan, F., Biricikoglu, V., "Two bonded half planes with a crack going through the interface" International Journal of Engineering Science, V.11, n°7, (July 1973), 745-766.

52. Lowengrub, M., Sneddon, I.N., "The stress field near a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar elastic half-planes" *International Journal of Engineering Science*, V.11, n°9, (September 1973), 1025-1034.
53. Ou, Z.C., Chen, Y.H., "Interface crack problem in elastic dielectric/piezoelectric biomaterials", *International Journal of Fracture*, V.130, n°1, (November 2004), 427-454.
54. To, A.C., Li, S., Glaser, S.D., "Propagation of a mode-III interfacial conductive crack along a conductive interface between two piezoelectric materials", *Wave Motion*, V.43, n°2, (2006), 368-386.
55. Li, Y.D., Leeb, K.Y., "Anti-plane fracture analysis for the weak-discontinuous interface in a non-homogeneous piezoelectric bi-material structure", *European Journal of Mechanics A/Solids*, V.28, n°, (2009), 241-247.
56. Singh, B.M, Rokne, J.R., Dhaliwal, R.S., Vrbik, J., "Scattering of anti-plane shear waves by an interface crack between two bonded dissimilar functionally graded piezoelectric materials", *Proceeding Royal Society American*, V.465, n°4, (2009), 1249-1269.
57. Häusler, C., Jelitto, H., Neumeister, P., Balke, H., Schneider, G.A., "Interfacial fracture of piezoelectric multilayer actuators under mechanical and electrical loading", *International Journal of Fracture*, V.160, n°1, (2009), 43-54.
58. Shin, J.W, Lee, Y.S., "Anti-plane moving crack in a functionally graded piezoelectric layer between two dissimilar piezoelectric strips", *Journal of Mechanical Science and Technology*, V.26, n°4, (2012), 1017-1025.
59. Erdogan, F., Gupta, G.D., Cook, T., "Numerical solution of singular integral equations", In : Sih, G.C. (ed.) *Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff International Publications, Leyden, (1973), 368-425.
60. Mauch, S., "introduction to methods of applied mathematics", 2004.
61. Abramowitz, M., Stegun, I.A.: "Handbook of mathematical functions", National Bureau of Standards, Applied Mathematics, Series 55, (1964), P.773.
62. Sosa, H. A., Pak, Y. E., "Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material", *International Journal of Solids and Structures*, V.26, n°1, (1990), 1-15.
63. Rice, J.R., "A path independent integral and the approximate of strain concentration by notches and cracks ", *Journal of Applied Mechanics, transactions ASME*, V.35, (June 1968).
64. Gherrous, M., Ferdjani, H., "Analysis of a Griffith crack at the interface of two piezoelectric materials under anti-plane loading", *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, V.28, n°6, (November 2016), 1683-1704.