

**UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB – BLIDA 1**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**



**THESE DE DOCTORAT**

Spécialité : Aéronautique

**ETUDE HYGROTHERMOMECHANIQUE DES PLAQUES  
COMPOSITES EPAISSES UTILISANT LA METHODE A  
ORDRE ELEVEE (HIGHER-ORDER)**

Par

**BOUKERT Billel**

Devant le jury composé de :

B.Z. BENAOUDA	Professeur, Université de Blida 1	Président
Z. SERIER	Professeur, Université d'Oran	Examineur
M. BOURADA	MCA, Université de Sidi Bel Abbès	Examineur
A. MAHI	MCA, Université de Blida 1	Examineur
E. ADDA BEDIA	Professeur, U.de Sidi Bel Abbès	Encadreur
A. BENKHEDDA	MCA, Université de Blida1	Co- Encadreur

Blida, Juin 2018

## RESUME

Dans le domaine aéronautique et aérospatial les avions et les navettes spatiales travaillent dans des conditions variables en termes de température et humidité, ces dernières génèrent des chargements et des sollicitations sur les matériaux composites qui constituent les structures, l'effort généré dépend des valeurs des variables environnementales, la façon de la variation des variables environnementales en fonction du temps. La particularité des matériaux composites à matrice polymère en termes d'hétérogénéité et d'anisotropie induisent des changements structuraux spécifiques qui peuvent engendrer des conséquences pénalisantes et irréversibles sur la structure, de plus l'exposition des plaques composites à une combinaison d'une température et un niveau d'humidité induisent un vieillissement du matériau qui se traduit par une réduction et une dégradation de la rigidité et de la résistance de ce dernier et peut aussi engendrer des contraintes résiduelles hygrothermiques à l'intérieur du stratifié, cet état de faiblesse du matériau peut engendrer un endommagement et une réduction de la durée de vie de la structure, la présente étude aborde l'effet de la température et de l'humidité sur le comportement des plaques composites épaisses en utilisant les théories d'ordre élevées HSDT, la chute des propriétés mécaniques des composites causées par la température et l'humidité est prise en compte lors des simulations.

## SUMMARY

In the aeronautical and aerospace field ,aircraft and space shuttles work under varying conditions in term of temperature and moisture that generate loadings and stresses in the composite materials which constitute the structures, the generated strains depends on the values of the environmental variables, the way of the variation according to time. The particularity of the polymer matrix composite materials in terms of heterogeneity and anisotropy induce specific structural changes that can lead to penalizing and irreversible consequences on the structure,the particularity of the polymer matrix composite materials in terms of heterogeneity and anisotropy induce specific structural changes that can lead to penalizing and irreversible consequences on the structure, moreover, the exposure of the composite plates to a combination of temperature and humidity level induces an aging of the material which results in reduction and degradation of rigidity and resistance and can also generate hygrothermal residual stresses inside the laminate, this material weakness can cause damage and reduction of the structure lifetime, the present study treat the effect of temperature and humidity on the behavior of thick composite plates by using High order theories HSDT, the degradation of mechanical properties of composites caused by temperature and humidity are taken into account during simulations.

## ملخص

في مجال الطيران والفضاء الجوي ، تعمل الطائرات والمركبات الفضائية في ظروف متفاوتة من حيث درجة الحرارة والرطوبة ، وهذه الأخيرة تولد الأحمال والإجهادات على المواد المركبة التي تشكل الهيكل ، والجهد المتولد يعتمد على خصوصية المواد المركبة المصنوفة . قيم المتغيرات الطريقة التي تختلف بها المتغيرات البيئية مع مرور الوقت البوليمرية من حيث عدم التجانس والتباين تحرض تغييرات هيكلية محددة يمكن أن تؤدي إلى عواقب لا رجعة فيها على البنية ، بالإضافة إلى تعرض الصفائح المركبة لمزيج من درجة الحرارة و يؤدي مستوى الرطوبة إلى تقادم المادة مما يؤدي إلى تقليل وتدهور الصلابة ومقاومة هذا الأخير ويمكنه أيضاً توليد إجهادات حرارية متبقية داخل الصفائح ، وهذه حالة ضعف المادة يمكن أن يسبب الضرر وخفض العمر الهيكلي ، وتعالج هذه الدراسة تأثير درجة الحرارة والرطوبة على سلوك الصفائح المركبة السميكة باستخدام نظريات النظام العالي يؤخذ الانخفاض في الخواص الميكانيكية للمركبات الناتجة عن درجة الحرارة والرطوبة في الاعتبار أثناء عمليات المحاكاة .

## REMERCIEMENTS

*Mes vifs et respectueux remerciements vont tout d'abord à mon Encadreur Mr Adda Bedia El abbes professeura l'universire de Sidi Bel abbes et mon Co-Encadreur Madame BENKHEDDA Amina, Maitre de conference A à l'université de Blida 1, à qui je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance surtout pour leur disponibilité et leurs prestigieux conseils dérivant de leur très haute compétence, qui ont donné un encadrement de très haut niveau et de qualité dans la faisabilité de ce travail. Je salue en eux leur grandes qualités humaines, bonté, modestie, leur enthousiasme, leur dévouement et sens extraordinaire de la communication.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Professeur B.Z. BENAOUDA pour avoir accepté de présider le jury ainsi qu'aux Professeur Z.SERIER de l'universite d'oran ,Mme A.MAHI Maitre de coference A à l'institut d'aéronautique et des études spatiales ,et Monsieur M.BOURADA de l'université de Sidi Bel Abbès pour avoir accepté la charge d'examineurs de ce travail.*

*Enfin, mes vives pensées vont à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ce parcours et à toutes celles qui m'ont aidée et ont ainsi contribué par leurs présences au bon déroulement de cette thèse.*

## TABLE DES MATIERES

RESUME.....	
REMERCIEMENTS.....	
TABLES DES MATIERES.....	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	
INTRODUCTION.....	21
1. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	23
1.1 Introduction.....	23
1.2 Problématique.....	24
1.3 Etat de l'art.....	25
1.3.1 Théories de comportement en déformation des plaques composites.....	25
1.3.1.1 Théorie classique des plaques minces (CLPT).....	25
1.3.1.2 Théorie du premier ordre des stratifiés (FSDT).....	26
1.3.1.3 Théories d'ordre élevées des stratifiés (HSDT).....	27
1.3.1.4 Théorie d'élasticité tridimensionnelle (3-D).....	28
1.3.2 Analyse des stratifié sous chargement Thermomécanique.....	29
1.3.3 Analyse des stratifié sous chargement Hygrothermique et Vieillessement Hygrothermique.....	30
1.4 Synthèse de la recherche bibliographique.....	39
1.5 Définition du sujet.....	40
2. MODELISATION DU VIEILLISSEMENT HYGROTHERMIQUE.....	41
2.1 Microanalyse pour un matériau composite unidirectionnel.....	41
2.2 Caractérisation du matériau .....	43
2.3 Introduction du vieillissement sur les propriétés mécaniques du matériau.....	44
2.3.1 Evolution de Tg au cours du vieillissement.....	45
2.3.2 Température adimensionnelle.....	45
2.3.3 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés de la matrice.....	46
2.3.4 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés des fibres.....	46
2.3.5 Prise en compte de l'effet de température et d'humidité dans l'évaluation des résistances à la rupture.....	47
2.4 Propriétés du T300/5208.....	48
2.5 Conditions de simulation.....	50
2.6 Résultats de la simulation.....	50
2.7 Interprétations des résultats.....	52
2.7.1 Effets de la température.....	52
2.7.2 Effets de la concentration.....	53

2.8 Validation des résultat.....	53
2.9 Influence de la fraction volumique.....	54
2.10 Cas d'une température d'utilisation proche de la température de post cuisson.....	58
2.11 Cas d'une température d'utilisation négative (régime subsonique).....	62
2.12 Conclusion.....	66

### 3.MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES ET MODELISATION HYGROTHERMIQUE.....67

3. Théories de comportement des stratifiés composites.....	68
3.1 Théorie classique des stratifiés .....	69
3.1.1Hypothèses.....	69
3.1.2 Lois de déformation.....	70
3.1.3 Loi de comportement.....	73
3.1.4 Matrice de rigidité.....	73
3.1.5 Contraintes planes.....	74
3.1.6 Etat de Contraintesplanes.....	74
3.1.7 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux.....	74
3.1.8 Matrice de rigidité réduite hors des axes principaux.....	75
3.1.9 Champ des contraintes.....	75
3.1.9.a Forme du champ des contraintes.....	75
3.1.9.b Expression des contraintes.....	76
3.1.10 Expression des résultantes et moments.....	77
3.1.10.a Résultantes en membrane.....	77
3.1.10.b Moment de flexion et de torsion.....	78
3.1.11 Equation du comportement mécanique d'un stratifié.....	79
3.1.11.a Equation constitutive.....	79
3.1.11.b Matrice de rigidité.....	80
3.1.12.a Déformations en membrane et courbures.....	81
3.1.12.b Champ des déformations.....	81
3.1.12.c Champ des contraintes.....	82
3.1.13 Equations du comportement des stratifies tenant compte des phénomènes de dilatation.....	83
3.1.13.a Coefficient d'expansion thermique et hygroscopique pour les unidirectionnels.....	83
3.1.13.b Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels.....	84
3.1.13.c Relations hygrothermoélastiques contraintes et déformations.....	84
3.1.13.e Contraintes résiduelles.....	87
3.1.13.f Analyse des stratifies multidirectionnels.....	89
3.1.14. Equations de mouvement.....	89
3.2 Theorie de cisaillement transversale du premier ordre.....	93
3.2.1 Deplacement et deformation.....	93
3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).....	98
3.3.1.a Contraintes Planes Généralisées.....	98
3.3.1.a.1 Etat de contraintes planes généralisées .....	98
3.3.1.a.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux dans le repère local L,T.....	99
3.3.1.a.3 La matrice de rigidité de chaque pli dans du stratifie.....	99

3.4 Théories de déformation en cisaillement de 3eme ordre de REDDY (TSDT).....	101
3.4.1 Champs de déplacement.....	101
3.4.2 Champs de déformation et contrainte.....	103
3.4.3 Matrice de passage de déformation et contrainte.....	104
3.4.4 Equation de mouvement.....	104
3.4.5 Solution de Navier.....	106
3.4.6 Equation de mouvement.....	114
3.5 Equation de Fick.....	116
3.6 Conclusion.....	118
4. RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....	119
4.1- Simulation des plaques epaisses sous chargement Hygrothermique.....	119
4.1.A-Modele hygrothermique 01.....	124
4.1.B-Modele hygrothermique 02.....	125
4.1.C-Modele hygrothermique 03.....	126
4.1.D-Modele hygrothermique 04.....	127
4.1.E-Modele hygrothermique 05.....	128
4.1.F-Modele hygrothermique 06.....	129
4.1.G-Modele hygrothermique 07.....	130
4.1.H-Modele hygrothermique 08.....	131
4.1.I-Modele hygrothermique 09.....	132
4.1.J-Modele hygrothermique 10.....	133
4.1.K-Modele hygrothermique 11.....	134
4.2- Simulation des plaques epaisses sous chargement hygrothermique avec une distribution de concentration selon la loi de Fick.....	144
4.2.1 Influence de la température et humidité sur le phénomène d'absorption....	146
4.2.2 Calcul des profils de concentration.....	148
4.2.3 Comportement sous chargement hygrothermique où l'hygroscopie est calcule par la loi de Fick.....	150
4.2.3.B-Modele Hygrothermique 01.....	151
4.2.3.C-Modele Hygrothermique 02.....	152
4.2.3.D-Modele Hygrothermique 03.....	153
4.2.3.E-Modele Hygrothermique 04.....	154
4.2.3.F-Modele Hygrothermique 05.....	155
4.2.3.G-Modele Hygrothermique 06.....	156
4.2.3.H-Modele Hygrothermique 07.....	157
4.2.3.I-Modele Hygrothermique 08.....	158
4.2.3.J-Modele Hygrothermique 09.....	159
4.2.3.K-Modele Hygrothermique 10.....	160
4.2.3.L-Modele Hygrothermique 11.....	161



5. Etude du comportement des stratifiés croisées.....	163
5.1 Influence de la distribution $\Delta T$ et $\Delta C$ sur le comportement des stratifié.....	166
5.1.A-Modèle M1.....	167
5.1.B-Modèle MT1.....	168
5.1.C-Modèle MTC2.....	169
5.1.D-Modèle MTC3.....	170
5.1.E-Modèle MTC4.....	171
5.1.F-Modèle MTC5.....	172
5.1.G-Modèle MTC6.....	173
5.1.H-Modèle MTCF1.....	174
5.1.I-Modèle MTCF2.....	175
5.1.J-Modèle MTCF3.....	176
5.1.K-Modèle MTCF4.....	177
5.1.L-Modèle MTCF5.....	178
5.2. Influence de la température et le taux d'humidité sur le comportement des stratifiés (Environnement variable).....	180
5.2.A-Modèle MT1.....	181
5.2.B-Modèle MTC2.....	182
5.2.C-Modèle MTC3.....	183
5.2.D-Modèle MTC4.....	184
5.2.E-Modèle MTC5.....	185
5.2.F-Modèle MTC6.....	186
5.2.G-Modèle MTCF1.....	187
5.2.H-Modèle MTCF2.....	188
5.2.I-Modèle MTCF3.....	189
5.2.J-Modèle MTCF4.....	190
5.2.K-Modèle MTCF5.....	191
5.3 Influence de la distribution $\Delta T$ et $\Delta C$ sur le comportement des stratifiés avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique.....	192
5.3.A Modèle MTC 2.....	193
5.3.B Modèle MTC 3.....	194
5.3.C Modèle MTC4.....	195
5.3.D Modèle MTC5.....	196
5.3.E Modèle MTC6.....	197
5.3.F Modèle MTCF1.....	198
5.3.G Modèle MTCF2.....	199
5.3.H Modèle MTCF3.....	200
5.3.I Modèle MTCF4.....	201
5.3.J Modèle MTCF5.....	202
5.4 Influence des paramètres de l'environnement sur le comportement des stratifiés avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique.....	203

5.4.A Modèle MTC 2.....	204
5.4.B Modèle MTC 3.....	205
5.4.C Modèle MTC4.....	206
5.4.D Modèle MTC5.....	207
5.4.E Modèle MTC6.....	208
5.4.F Modèle MTCF1.....	209
5.4.G Modèle MTCF2.....	210
5.4.H Modèle MTCF3.....	211
5.4.I Modèle MTCF4.....	212
5.4.J Modèle MTCF5.....	213

5.5 Influence du vieillissement hygrothermique sur le comportement des stratifiés Composites.....	214
---	-----

5.5.A Modèle MTC 2.....	215
5.5.B Modèle MTC 3.....	216
5.5.C Modèle MTC4.....	217
5.5.D Modèle MTC5.....	218
5.5.E Modèle MTC6.....	219
5.5.F Modèle MTCF1.....	220
5.5.G Modèle MTCF2.....	221
5.5.H Modèle MTCF3.....	222
5.5.I Modèle MTCF4.....	223
5.5.J Modèle MTCF5.....	224
5.5.K Modèle MTC 2.....	226
5.5.L Modèle MTC 3.....	227
5.5.M Modèle MTC4.....	228
5.5.N Modèle MTC5.....	229
5.5.O Modèle MTC6.....	230
5.5.P Modèle MTCF1.....	231
5.5.Q Modèle MTCF2.....	232
5.5.R Modèle MTCF3.....	233
5.5.S Modèle MTCF4.....	234
5.5.T Modèle MTCF5.....	235

5.6. Prise en compte des paramètres géométriques dans le comportement des stratifiés.....	236
---	-----

5.6. A Modèle MTC5.....	237
5.6. B Modèle MTCF5.....	238

5.7. Prise en compte des paramètres géométriques et la dégradation hygrothermique dans le comportement des stratifiés.....	239
--	-----

5.7. A Modèle MTC5.....	239
-------------------------	-----

5.7. B Modèle MTCF5.....	240
CONCLUSION GENERALE.....	242
LISTE DES SYMBOLES.....	
BIBLIOGRAPHIE.....	

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 2.1 : Organigramme de calcul des propriétés vieilles TSAILOC.....	49
Figure 2.2 : Effet de la variation de température sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration. ....	50
Figure 2.3 : Effet de la variation de température sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration. ....	51
Figure 2.4 : Effet de la variation de température sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration. ....	51
Figure 2.5 : Effet de la variation de température sur le coefficient de Poisson longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration. ....	52
Figure 2.6 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.01$ .....	54
Figure 2.7 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.015$ .....	55
Figure 2.8 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.01$ .....	55
Figure 2.9 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.015$ .....	56
Figure 2.10 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différentes température à $c = 0.01$ .....	56
Figure 2.11 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.015$ ....	57
Figure 2.12 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal pour le T300/5208 à différentes température à $c = 0.01$ .....	57
Figure 2.13 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à $c = 0.015$ .....	58
Figure 2.14 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a $T_{max} = 180$ °C et à $c = 0.01$ .....	58
Figure 2.15 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a $T_{max} = 180$ °C et à $c = 0.015$ .....	59

Figure 2.16 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.01.....	59
Figure 2.17 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.015.....	60
Figure 2.18 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.01.....	60
Figure 2.19 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.015...	61
Figure 2.20 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.01.....	61
Figure 2.21 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a Tmax =180 °C et à c =0.015.....	62
Figure 2.22 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.01.....	62
Figure 2.23 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.015.....	63
Figure 2.24 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.01.....	63
Figure 2.25 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.015.....	64
Figure 2.26 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.01.....	64
Figure 2.27 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.015.....	65
Figure 2.28 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.01.....	65
Figure 2.29 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a Tmin =-55 °C et à c =0.015.....	66
Figure 3.1 : Géométrie d'un bord de stratifié déformé et non-déformé sous les hypothèses de la théorie classique des stratifiés [149].....	70
Figure 3.2 : repère principal (LTT') d'une couche et repère du stratifié (X,Y,Z) .....	73
Figure 3.3 : Subdivision des couches en sous-couches. ....	76
Figure 3.4 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion.....	83

Figure 3.5 : Géométrie d'un bord de stratifié déformé et non-déformé sous les hypothèses de la théorie du cisaillement du premier ordre [149].	93
Figure 3.6 : Géométrie représentative d'une plaque composite.	117
Figure 4.1 : Organigramme « Thick-compo-modele » de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques.	121
Figure 4.2 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 01.	124
Figure 4.3: Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 02.	125
Figure 4.4 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 03.	126
Figure 4.5 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 04.	127
Figure 4.6 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 05.	128
Figure 4.7 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 06.	129
Figure 4.8 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 07.	130
Figure 4.9 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 08.	131
Figure 4.10 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 09.	132
Figure 4.11 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 10.	133
Figure 4.12 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 11.	134
Figure 4.13 : Organigramme Thick-compo-modele-F de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques.	146
Figure 4.14 : Courbes de prise en eau pour différents environnements pour un modèle de Fick 1D.	146
Figure 4.15 : Loi d'Arrhenius appliquée aux coefficients de diffusion obtenus en humidité relative.	147
Figure 4.16 : Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement.	148

Figure 4.17.a : Présentation 2D des profils de concentration à travers l'épaisseur pour $t=0$ H, 100 H, 200H , 400H, 700H, 950H. ....	149
Figure 4.17.b : Présentation 2D des profils de concentration à travers l'épaisseur pour $t=1150$ H, 1950H, 7500H. ....	150
Figure 4.18 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 01.....	151
Figure 4. 19 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 02. ....	152
Figure 4.20 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 03. ....	153
Figure 4.21 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 04. ....	154
Figure 4.22 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 05. ....	155
Figure 4.23 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 06. ....	156
Figure 4.24 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 07. ....	157
Figure 4.25 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 08. ....	158
Figure 4.26 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 09. ....	159
Figure 4.27 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 10. ....	160
Figure 4.28 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 11. ....	161
Figure 4.29 : Organigramme AGING-THICK-COMP-MAT de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques. ....	165
Figure 4.30 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique-modèle M1.....	167
Figure 4.31 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MT1...	168
Figure 4.32: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC2...	169
Figure 4.33 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC3..	170
Figure 4.34 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC4..	171
Figure 4.35 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC5..	172

Figure 4.36 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC6..	173
Figure 4.37 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF1.....	174
Figure 4.38 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF2.....	175
Figure 4.39 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF3.....	176
Figure 4.40 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF4.....	177
Figure 4.41 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5.....	178
Figure 4.42 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique -modèle MT1. ....	181
Figure 4.43 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique-modèle MTC2. ....	182
Figure 4.44: Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTC3. ....	183
Figure 4.45 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTC4. ....	184
Figure 4.46 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTC5. ....	185
Figure 4.47 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTC6. ....	186
Figure 4.48 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF1. ....	187
Figure 4.49 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF2. ....	188
Figure 4.50 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF3. ....	189
Figure 4.51: Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF4. ....	190
Figure 4.52: Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèle MTCF5. ....	191



Figure 4.53 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC2. ....	193
Figure 4.54 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC3. ....	194
Figure 4.55 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC4. ....	195
Figure 4.56 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC5. ....	196
Figure 4.57 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC6. ....	197
Figure 4.58 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF1. ....	198
Figure 4.59 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF2. ....	199
Figure 4.60 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF3. ....	200
Figure 4.61 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF4. ....	201
Figure 4.62 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF5. ....	202
Figure 4.63 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissement- modèle MTC2. ....	204
Figure 4.64 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC3. ....	205
Figure 4.65 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissement- modèle MTC4. ....	206
Figure 4.66 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC5. ....	207
Figure 4.67 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC6. ....	208
Figure 4.68 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF1. ....	209
Figure 4.69 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF2. ....	210

Figure 4.70 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différent environnement avec vieillissements- modèle MTCF3. ....	211
Figure 4.71 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différent environnement avec vieillissements- modèle MTCF4. ....	212
Figure 4.72 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF5. ....	213
Figure 4.73 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC2. ....	215
Figure 4.74 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC3. ....	216
Figure 4.75 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC4. ....	217
Figure 4.76 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC5. ....	218
Figure 4.77 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC6. ....	219
Figure 4.78 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF1. ....	220
Figure 4.79 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF2. ....	221
Figure 4.80 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF3. ....	222
Figure 4.81 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF4. ....	223
Figure 4.82 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF5. ....	224
Figure 4.83 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC2. ....	226
Figure 4.84 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC3.....	227
Figure 4.85 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC4. ....	228
Figure 4.86 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC5. ....	229

Figure 4.87 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC6. ....	230
Figure 4.88 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF1. ....	231
Figure 4.89 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF2. ....	232
Figure 4.90 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF3. ....	233
Figure 4.91 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF4. ....	234
Figure 4.92: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF5. ....	235
Figure 4.93 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC5 avec différents rapport géométriques. ....	237
Figure 4.94 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5 avec différents rapport géométriques. ....	238
Figure 4.95 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC5 avec différents rapport géométriques et vieillissement. ....	239
Figure 4.96: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5 avec différents rapport géométriques et vieillissement. ....	240

Tableau 2.1 : Caractéristiques de fibres et matrice du T300/5208 [107].....	48
Tableau 2.2 Caractéristiques de variations de température et d’humidité [107].....	48
Tableau 2.3 Résistances du T300/5208 [107].....	48
Tableau 2.4 : Environnements des simulations.....	50
Tableau 4.1 : Modèle de simulation relative au programme « Thick-compo- modele ».....	123
Tableau 4.2 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 01. ....	135
Tableau 4.3 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 01. ....	135
Tableau 4.4 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 01. ....	136
Tableau 4.5 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 02. ....	136
Tableau 4.6 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 02. ....	137
Tableau 4.7 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 02. ....	137
Tableau 4.8 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 03. ....	138
Tableau 4.9 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 03. ....	138
Tableau 4.10 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique03.....	139
Tableau 4.11 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par apport au modèl Reddy- Modèle Hygrothermique 04. ....	139
Tableau 4.12 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèl Reddy- Modèle Hygrothermique 04. ....	140
Tableau 4.13 : Valeurs relatifs de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par apport au modèl Reddy- Modèle Hygrothermique 04. ....	140
Tableau 4.14 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 08. ....	141

Tableau 4.15 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 08.....	141
Tableau 4.16 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 08.....	142
Tableau 4.17 : Modèles de simulation pour les stratifiés croisés. ....	167
Tableau 4.18 : Données de simulation-section 5.1.....	166
Tableau 4.19 : Données de simulation-section 5.2.....	180
Tableau 4.20 : Données de simulation de l'environnement 1. ....	214
Tableau 4.21 : Données de simulation de l'environnement 4.....	225

## INTRODUCTION

Les matériaux composites sont utilisés dans plusieurs domaines, des fois ces domaines sont pointus tel que le domaine aéronautique et aérospatiale a cause leurs principaux avantages qui sont la légèreté et la rigidité, d'où la nécessité de la maîtrise des techniques de fabrication, les méthodes d'analyse de comportement et le dimensionnement.

La famille des matériaux composites à matrice polymère est très utilisée dans le domaine de l'aviation civile et militaire, durant le fonctionnement des structures aéronautiques composites ces dernières subissent un changement des conditions environnementales telle que la température et l'humidité d'une manière variable ou cyclique qui engendrent des sollicitations qui cause une dilatation ou une restriction, l'état de contrainte devient plus en plus complexe à cause des paramètres environnementaux, ces dernières doivent être prises en considération pour le calcul de l'état de déformation et contrainte, un autre phénomène est remarqué c'est la réduction de la température de la transition vitreuse qui engendre par conséquent une sévère dégradation des performances mécaniques où les matériaux deviennent plus ductiles et fragiles, la matrice polymère favorise les sollicitations hygrothermiques par les phénomènes d'absorption de l'humidité qui cause des changements physiques et chimiques qui engendrent une perte des performances mécaniques.

L'analyse du comportement des stratifiés composites soumises à des sollicitations hygrothermiques est très importante et nécessite une modélisation, pour le cas des plaques épaisses une maîtrise des théories à ordre élevées est indispensables pour le calcul des contraintes, ce qui va permettre de voir les effets des conditions hygrothermiques sur leur comportements.

Pour l'accomplissement de cette étude, les étapes successives suivantes ont été suivies:

1. Une recherche bibliographique sur les différents travaux effectués dans l'axe de la modélisation des plaques épaisses et les différentes théories qui permet cette dernière, un autre axe pour lequel on s'est intéressé qui est le vieillissement des matériaux composites, cette recherche nous a permis de connaître l'état de l'art et d'orienter notre recherche.

2. Dans le chapitre 2, on traite la modélisation du vieillissement hygrothermique par le modèle de TSAI, une évaluation de la chute des performances mécaniques de la matrice et la fibre sous l'effet de la température et l'humidité à travers le modèle de TSAI est faite.

3. Le chapitre 3 traite en détail la mécanique des matériaux composites à travers les théories d'ordres élevées et la modélisation hygrothermique du comportement des stratifiés en composites.

4. Les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre 4, ce chapitre englobe la validation des résultats, les résultats obtenus par le code de calcul développé durant cette étude.

Nous terminerons par une conclusion générale et des perspectives.

## **CHAPITRE 1**

### **RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE**

#### 1.1. Introduction

Les matériaux composites sont plus en plus utilisés dans plusieurs applications de l'ingénierie qui a mené à des recherches intensives dans le cas d'analyse des stratifiés en mode statique et dynamique, dans les composites le couplage entre plusieurs modes de déformation et la non négligence du cisaillement transversal à travers l'épaisseur rend le problème plus en plus complexe, le cisaillement transversal est plus dominant dans le cas des plaques épaisses que dans le cas des plaques minces ou moyennement minces, donc une détermination plus réaliste est devenue plus en plus nécessaire vu la criticité du problème et les exigences de conception, une progression significative a été faite dans le cas de la modélisation des plaques minces, les plaques moyennement épaisses, et les plaques épaisses.

D'autres études de durabilité des matériaux composites à matrice polymère ont montré que ces matériaux pouvaient être fortement altérés par les facteurs environnementaux tels que la température, l'humidité ambiante, les rayons ultraviolets, l'immersion dans certains fluides, les propriétés mécaniques de certaines matrices polymères pouvaient être modifiées suite à une exposition prolongée dans une atmosphère humide et à température variable. L'évolution de ces propriétés avec le temps sous différentes conditions d'utilisation, conditions auxquelles les structures seront confrontées durant leur service ce qui a grandement attiré la curiosité de nombreuses études et recherches scientifiques, en vue de connaître avec précision la durabilité de la structure composite et de garantir ainsi sa fiabilité.

Dans le domaine aéronautique les structures sont réalisées en grandes parties en composites à matrice polymère, et elles évoluent dans des conditions



d'environnement variables, en termes d'altitudes, de vitesses, de températures et d'humidité, la réponse de ces matériaux est donc une combinaison complexe des phénomènes qui se produisent, dont la nature est d'une origine simultanée mécanique, physico-chimique et thermique.

La prévision du comportement des composites soumise à des efforts hygrothermiques exige la caractérisation des mécanismes et leurs couplages, ainsi que l'étude de leurs influences sur le comportement élastique et l'établissement de modèles.

## 1.2. Problématique

Cette étude a été accomplie au laboratoire des sciences aéronautiques - institut d'aéronautique et des études spatiales de l'université de blida1 avec la collaboration du laboratoire de matériaux et hydrologie de l'université de sidi bel abbes, elle s'insère dans un axe de recherche « hydrothermie des matériaux composites ».

Plusieurs recherches et travaux ont été développées dans cet axe qui s'intéresse à l'analyse du comportement des stratifiés composites sous chargement environnementale en terme de température et humidité pour le cas des plaque mince, l'axe de la dégradation des caractéristiques mécaniques due à la température et l'humidité a été aussi abordé.

Nous proposons l'étude et l'analyse du comportement des plaques épaisses en composite sous chargement hygro-thermo-mecanique avec la prise en compte de la dégradation des performances mécanique due aux conditions environnementales.

Le but de cette thèse est de développé un code de calcul qui permet de simuler le comportement des plaques composites épaisses sous chargement hygro-thermo-mecanique avec la prise en compte de la chute des performances mécaniques résultante de différentes paramètres environnementales.

### 1.3. État de l'art

#### 1.3.1 Théories de comportement en déformation des plaques composites

Dans la bibliographie on trouve diverses théories qui s'intéressent à l'étude du comportement des plaques composites parmi ces théories on peut citer , la théories de la couche unique équivalentes-ESL(2D) ,cette dernière présente deux grands catégorie la première est la théorie classique des stratifiée (CLPT), la deuxième théorie est celle de déformation en cisaillement des stratifiés ,il existe aussi une autre théorie plus complexe et difficile qui est la théorie tridimensionnelle d'élasticité (3D) .

La théorie de la couche unique équivalentes des plaques (ESL) est dérivée de la théorie l'élasticité 3D en faisant des hypothèses appropriées à la déformation ou l'état de contrainte par rapport a l'épaisseur du stratifié.

Ces hypothèses permettent le passage d'un problème 3D à problème 2D, dans la théorie tridimensionnelle d'élasticité ou dans la théorie de layerwise chaque couche est modélisée comme un solide 3D.

##### 1.3.1.1 Théorie classique des plaques minces (CLPT)

La théorie la plus simple dans la catégorie théorie de la couche équivalentes-ESL est la théorie classique des stratifiée (CLPT), qui est une extension de la théorie classique de plaque de Kirchhoff aux plaques composites [1] [2], elle est basé sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de la plaque est négligeable, le rapport de l'épaisseur sur la longueur ou largeur ne dépasse pas 0,05.
- Les sections droites sont perpendiculaires au plan moyen avant déformation et restent droite après déformation.
- Les transverses normales ne subit pas d'allongement.
- Les transverses normales subissent une rotation de telle façon de rester perpendiculaire au plan moyen après déformation.

Les deux premières hypothèses implique que le déplacement transversale est indépendant par rapport a l'épaisseur, la déformation normale est zéro, la 3<sup>ème</sup> hypothèse implique un cisaillement transversale égale à zéro.

Contrairement à ce qui est supposé par la théorie classique des stratifiés par rapport au cisaillement transversale, ce dernier n'est plus égale a zéro lorsque le rapport géométrique entre l'épaisseur et la longueur ou larguer dépasse 0.05, pour cela il faudra passer à la prochaine théorie dans la hiérarchie des théories de la couche équivalentes.

### 1.3.1.2 Théorie du premier ordre des stratifiés (FSDT)

Mindlin [3] et Resissner [4] ont proposé le schéma du premier ordre pour le cas des plaques peu épaisses, la description est plus realiste car les stratifiés présentent une prise en compte du cisaillement transversale ,le champ de déplacement est linéaire à travers l'épaisseur et suppose une contrainte de cisaillement transversale constante selon l'épaisseur qui nécessite un facteur de correction ,dans la théorie du premier ordre (FSDT), le troisième hypothèse de Kirchhoff est plus valable, c.-à-d., les sections normaux ne restent plus perpendiculaires au plan moyen après déformation.

Beaucoup de travaux de recherche sur le comportement des plaques composite ont utilisé la théorie du premier ordre, on peut citer P.M Wung [5], F.Auricchio [6], QI .Yunqian [7], ME.Fares [8].

RB.Nelson [9] a proposé un schéma de déplacement de second ordre pour les plaques composites orthotrope en gardant le coefficient de correction, les résultats ont été compares avec des résultats issue du schéma du premier ordre de Levinson.

### 1.3.1.3 Théories d'ordre élevées des stratifiés (HSDT)

La théorie classique des stratifiés et la théorie de premier ordre sont les théories les plus simples de la catégorie théorie de couche équivalente, et elles décrivent convenablement le comportement de la plupart des cas des stratifiés, la théorie à ordre élevée n'exige pas des facteurs de correction cisaillement, et peut rapporter une distributions inter laminaires de contrainte plus précise, la raison d'augmenter les déplacements au degré 3 par rapport à la coordonnée en épaisseur, par conséquent la variation du cisaillement transversal sera de même nature que le déplacement, ceci évite l'utilisation du facteur de correction de cisaillement.

La théorie classique des stratifiés peut être utilisée seulement pour les cas des plaques minces, cette dernière donne des résultats faux pour le cas des plaques épaisses, la théorie du premier ordre proposée par Mindlin [3] et Reissner [4] suppose que les normales transversales avant déformation, restent planes mais non perpendiculaires au plan moyen après déformation, le cisaillement transversal est supposé constant le long d'épaisseur du stratifié, un facteur de correction de cisaillement transversal est nécessaire pour satisfaire les conditions aux limites pour la face supérieure et inférieure du stratifié.

Dans la bibliographie plusieurs théories d'ordre élevées ont été proposées pour satisfaire les conditions aux limites, Ambarsumian [10] a proposé une fonction de cisaillement transversal pour expliquer la déformation du stratifié, une méthode similaire a été utilisée par Soldatos et Timarci [11] pour l'analyse dynamique des stratifiés, d'autres nouvelles fonctions ont apparaître, Reddy [12] [13] [14] [15] [16] [17], Touratier [18], Karama [19], Soldatos [20], Krishna Murthy [21] [22] [23], Levinson [24], Aydogdu [25] a comparé entre les différentes théories d'ordre élevées.

D'autres théories d'ordre élevées, Hidebrand [26], Whitney & Sun [27], Lo et al [28] qui ne satisfait pas la condition aux limites zéro cisaillement transversal aux faces du stratifié et exigent un nombre important d'inconnus figurent dans la bibliographie, KH.Lo [29] et T.Kant [30] ont proposé une théorie d'ordre élevé qui prend en considération la contrainte normale en utilisant le principe de l'énergie

potentiel stationnaire, les équations qui gouverne le problème sont obtenus , 11 équations sont obtenus pour résoudre un système qui contient 11 inconnus .

D'autres théories d'ordre élevées ont été introduit récemment dans le domaine de la recherche et modélisation des plaques composites ou FGM épaisses, on peut citer les travaux de Carrera et Petrolo [31], D'Ottavio et Carrera [32], Aydogdu [33] et El Meiche, Tounsi et al [34], Shimpi [35], AJM Ferreira [36], J.L.Mantari [37], B.Mechab [38],S.Ait Yahia [39],H.Ait Atmane [40], A.Mahi [41], M.Karama [42].

Plusieurs études du comportement des plaques composites épaisses ont été faites en utilisant des théories d'ordre enlevées avec une modélisation par éléments finis qui implique un nombre d'inconnus et degrés de liberté important, Ns.Putcha [43], N.Khoa[44], S.Jinlee [45], Theofanis [46], Zhen Wu [47][48], T.Prevez[49], G.Zou [50], Bn.Singh [51] ,les conditions aux limites (encastrement-simplement supporte etc.) sont present en compte lors de la résolution du problème statique ou dynamique des plaques composite, on peut citer les travaux de AS.Oktem [52] qui traitent le cas d'un stratifie encastre en 2 cotés opposé , et 2 cotés en simplement supporté en utilisant la méthode Levy.

#### 1.3.1.4 Théorie d'élasticité tridimensionnelle (3-D)

Une autre théorie très puissante qui existe dans la bibliographie qui est la théorie d'élasticité tridimentinelles-3D, la force de cette théorie est qu'elle n'impose aucune hypothèse restrictif , de point de vue résolution cette méthode implique un nombre d'inconnus important, plusieurs études ont traité le problème des plaques épaisses en utilisant la théorie 3D, PY.Tabakov [53] a développé un model mathématique pour l'analyse tridimensionnelle des contraintes avec petit déplacement pour des stratifiés composite non symétrique, WQ.Chen [54] et AK.Noor [55] ont traité le problème d'une plaque composite épaisse simplement supporté avec des endommagement au niveau des interfaces en utilisant la théorie tridimensionnelle ,H.Matsunaga [56] a fait une étude comparative entre le comportement des plaques épaisses en utilisant des technique 2D et 3D sous un

chargement thermique, AE.Bogdanovtich [57] a étudié le comportement des plaques épaisses avec des couches multiples par la théorie 3D chaque couche est traité et étudié indépendamment comme un corps 3D anisotrope, P.Malekzadeh [58] a analysé le problème des plaques épaisses soumises à des chargements dynamiques ,la théorie tridimensionnelle peut être utilisée pour les plaques FGM (AR.Mojdehi [59]).

### 1.3.2 Analyse des stratifié sous chargement Thermomécanique

Dans la littérature beaucoup de travaux traitent le cas du comportement des plaques composites sollicitées par des forces thermomécanique, Lc.Shiau [60] a étudié le flambage thermique avec un schéma de la théorie classique des stratifiés composite par la méthode des éléments finis pour différentes valeurs d'anisotropie ,rapports géométrique ,angles d'orientation des fibres, K.Swaminathan [61] a fait une analyse comparative des différentes méthodes de calcul du flambage thermique d'une plaque FGM soumise à différents profil de température, M.Gigliotti[62] a étudié le comportement des stratifiés croisés soumis a des sollicitations thermique ,la déflexion max a été étudié en détail par rapport a l'épaisseur des couche de  $90^\circ$ , BP.Patel [63] a analysé le comportement thermo mécanique des plaques épaisses en utilisant une théorie à ordre élevé qui prend en compte le cisaillement transversale et la déformation normale et la déformation thermique normale en utilisant la méthode des éléments finis, Zhen Wu [64] a étudié la réponse au chargement thermomécanique d'une plaque composite et une plaque sandwich en utilisant une théorie d'ordre élevés et la méthode des éléments finis la condition du cisaillement libre est satisfaite sur les faces du stratifié , A.Avci [65] et O.Sinan [66] ont analysé les plaques composites croisées symétriques et antisymétriques hybride avec un trou, la plaque est soumise à une température uniforme, la résolution est faite par la méthode des éléments finis, B.Mechab[38] a présenté une méthode analytique pour une plaque composite croisée sous chargement thermomécanique en utilisant une théorie à ordre élevée avec une nouvelle fonction sinusoïdale développée, O.Sayman [67][68][69] a étudié les contraintes thermomécanique élastique-plastic en utilisant la théorie classique des stratifiés, le stratifié est soumis à un

chargement thermique de différents profils linéaire et parabolique, JN.Reddy [70] a traité le problème des plaques moyennement épaisse en utilisant la théorie du premier ordre avec la méthode des éléments finis.

O.Sayman [71] [72] et N.Rastogi [73] a traité le problème des contraintes thermiques dans un stratifié composite à matrice en aluminium en utilisant le schéma de la théorie classique des stratifiés avec la méthode des éléments finis.

### 1.3.3 Analyse des stratifié sous chargement Hygrothermique et Vieillissement Hygrothermique

Un autre paramètre environnemental qui est l'hygroscopie est pris en compte dans divers recherches dans le cadre de l'analyse du comportement des plaques épaisses , W.Zhen [74] a proposé une théorie d'ordre élevé pour le calcul des contraintes hygrothermique ,le chargement hygrothermique est injecte dans le champ de déformation transversal, les champs de température et hygroscopique est une fonction de l'épaisseur, S .Lo [75] a utilisé les mêmes hypothèses avec un champ de déplacement transversal de 2eme degré, les caractéristiques mécaniques utilisées dans le calcul dépendent de la température.

J.Jedidi [76] et Z.Youssef [77] ont calculé les contraintes résiduelles hygrothermique dans un environnement cyclique pour un stratifié à matrice polymère travaillant à une vitesse supersonique, la distribution de la concentration est donne par l'équation de Fick.

M.Gigliotti [78] a utilisé une méthode approximative basée sur la théorie classique des stratifiés pour calculer les contraintes hygrothermique, le phénomène de diffusion est pris en compte dans les 3 directions de l'espace, les résultats ont été comparé avec un modèle analytique dans un pipe en mode transitoire, O.Sayman[79] a traité le même problème des cas symétrique et antisymétriques pour le cas des contraintes planes.

Jacquemein et Vautrin [80] [81] [82] ont proposé une méthode analytique permettant de calculer les contraintes internes induites par des conditions

environnementales cycliques pour des structures composites cylindriques épaisses, les cylindres sont composés de plis orthotropes dont les propriétés hygrothermoélastiques transitoires sont déterminées en considérant les équations classiques de la mécanique des solides.

V.Rao [83] a traité le problème dynamique en vibration libre pour un stratifié en composite dans un environnement hygrothermique, la modélisation a été faite en utilisant la méthode des éléments finis pour calculer les fréquences propre du stratifié, les caractéristiques mécaniques utilisé dans le calcul dépendent de la température et la concentration.

B .Patel [84] a fait une étude statique et dynamique des stratifiés épaisses exposés à un chargement hygrothermique en utilisant une théorie d'ordre élevée raffinée par la méthode des éléments finis , la formulation de déformation transversale prends en considération les termes non linéaire à travers l'épaisseur, les caractéristiques mécaniques utilisées dans le calcul dépendent de la température et la concentration.

A.Upadhyay [85] et N.Naidu [86] ont étudié le problème de flexion non linéaire d'un stratifié composite sous un chargement hygro-thermo-mecanique, des modèles micromécanique sont utilisé pour les calculs , les coefficients de dilatation thermique et hygroscopique sont calculer en fonction de la température et la concentration et les caractéristiques mécaniques sont calculé en fonction de la température et l'humidité ,la même étude a été faite par A.lal [87].

A.Megueni [88] a utilisé la méthode des éléments fini pour l'évaluation des contraintes pour un stratifié fissuré réparé, le vieillissement hygrothermique est pris en compte dans le calcul des caractéristiques mécaniques, le champ de température et concentration sont des polynômes.

AM.Zenkour [89] a étudié l'influence des conditions hygrothermiques sur le comportement des stratifiés composites croisés antisymétriques en utilisant une théorie d'ordre élevé raffinée, avec une fonction de distribution sinusoïdale , la



déformation dans l'axe de l'épaisseur est pris en compte, la même étude a été faite par AM.Zenkour [90][91] pour cas d'une plaque FGM.

AM.Zenkour [92] a déterminé la solution analytique de flexion d'un stratifié croisé sollicité par une force mécanique statique et un champ de température, les déformations thermiques sont prises en compte pour le calcul des contraintes thermomécaniques, les fonctions de déplacement utilisées sont la fonction de Reddy, une fonction sinusoïdale, le même travail a été fait par AM.Zenkour [90] [93] pour le cas de flambement des plaques composites.

AM.Zenkour [94] a utilisé la théorie d'ordre élevée sinusoïdale pour étudier le comportement des stratifiés composites à angles quel qu'onques, l'influence du champ de température et d'humidité a été prise en considération pour le calcul des contraintes hygrothermiques.

N.Boualem [95] a analysé le comportement des stratifiés composites hybrides dans les environnements hygrothermiques, les performances mécaniques sont fonction de la température et la concentration, l'utilisation du concept hybride a montré l'avantage que jouent les couches extérieures pour protéger les internes.

Z.Sereir [96] a étudié le comportement des stratifiés composites hybrides dans des conditions environnementales cycliques pour la détermination des contraintes transitoires, l'effet de l'hybridation a été utilisé pour isoler les couches internes, la distribution de concentration est déterminée par le programme W8 développé par Springer.

Mulheron et autres [97] ont traité l'influence du phénomène de conduction et diffusion pour évaluer l'état des contraintes internes et les contraintes résiduelles dans des environnements hygrothermiques et ont montré la dépendance de la diffusion avec la température.

Tounsi et Adda Bedia [98], Sereir, Adda Bedia et Tounsi [99] ont étudié les effets de l'humidité et température sur la réponse mécanique des structures composites pour un cas de chargement hygrothermique.

Cranck [100] c'est intéressé au couplage entre le phénomène de diffusion hygroscopiques et conduction thermique et leur influence sur l'état de contrainte dans un stratifié composite, les champs hygrothermiques sont obtenus indépendamment des contraintes en utilisant l'équation classique de Fourier pour le transfert de chaleur par conduction et la loi de Fick pour le transfert de masse par diffusion.

L'expérience de diffusion dans les systèmes époxy effectués par VanLandingham [101] montre que les accroissements du niveau d'humidité entraînent une augmentation dans le niveau de saturation, ceux-ci causent un gonflement qui est proportionnel au contenu de l'humidité. L'augmentation de la température engendre un comportement non Fickien avec une réduction dans la température de transition et une dégradation des propriétés mécaniques.

Mercier [102] a traité le vieillissement en milieu humide et l'endommagement par fissuration des matériaux composites à matrice organique (CMO). La diffusion d'eau dans le matériau (matrice époxy renforcée par des fibres de verre) a été tout d'abord analysée expérimentalement, par détermination des cinétiques d'absorption sous différentes conditions d'humidité. Des baisses de différentes propriétés mécaniques en fonction de la quantité d'eau absorbée, ont été mises en évidence et quantifiées lors d'essais expérimentaux de traction. Les mécanismes physiques à l'origine de ces modifications ont été identifiés. Un mode d'endommagement particulier, la fissuration intra laminaire, ainsi que son couplage avec l'humidité, ont aussi été étudiés expérimentalement. Des différences entre évolutions réversibles et irréversibles de propriétés ont été mises en évidence et analysées en détail.

Popineau [103] a traité la durabilité (vieillissement) en milieu humide d'assemblages structuraux constituant les tuyères de propulseurs à poudre. Les matériaux utilisés sont un alliage d'aluminium et un matériau composite, collés ensemble par un adhésif polymère, l'adhésif se révèle être la partie la plus sensible à un environnement aqueux, La diminution des propriétés mécaniques du polymère massique et des assemblages structuraux semble liée à la pénétration

de l'eau. Un modèle permettant d'évaluer indirectement l'énergie d'adhésion, et par extrapolation la résistance des assemblages en fonction du temps de vieillissement a été élaborée à partir du faciès de rupture des éprouvettes et de la cinétique de diffusion d'eau.

Kim [104], considéra l'effet de température sur la propagation des fissures dans les polymères et d'humidité sur un système graphite/époxy Thornel 300/Namco 5208. L'expérience a été faite sur les trois stratifiés suivants : [02/±45]2S, [90/±45]2S, et [0/ ±45/90]2S. Les résultats révélèrent que la rigidité à des essais humides à 260°F est 40% plus faible à la même température, mais à sec, l'effet d'humidité et de température combiné a une influence sur la dégradation de la rigidité dans les stratifiés.

L'étude de Trabelsi [105] fait partie du projet de recherche sur un nouveau avion supersonique civil susceptible de remplacer éventuellement le Concorde. L'objectif est la prévision du comportement et l'évolution des propriétés d'une pièce en composite travaillant sur une longue durée d'utilisation à des températures pouvant atteindre 100°C à 120°C, la durée de vie souhaitée est estimée à 20 000 cycles thermiques entre -50°C et 120°C et correspond à 80 000 heures (10 ans) de vol à 120°C sous atmosphère oxydante (air). L'objectif de cette thèse est d'étudier la thermo-oxydation d'un composite carbone/époxy.

Springer [106] détermina le contenu de l'humidité en fonction du temps, lorsque le matériau est exposé à une atmosphère humide, ou submergé d'eau et à température constante (taux d'humidité variant de 0 à 100%). Une description du coefficient de diffusion en fonction des propriétés des fibres et de la matrice est donnée.

La solution de l'équation de diffusion de l'humidité dans les stratifiés à travers l'épaisseur donnée par Jost est gouvernée par l'équation de diffusion classique. L'analyse des contraintes hygrothermiques engendrées par les conditions d'environnement cycliques ou le coefficient de diffusion  $D$  est fonction de la température fut abordée par Springer [106] et Tsai [107].

Benkhedda [108] a développé un code de calcul des contraintes hygrothermomécanique, en considérant une distribution uniforme de la concentration à travers l'épaisseur du stratifié lors de la phase d'absorption, la méthode des différences finis a été utilisée pour la résolution de l'équation de Fick, les contraintes résiduelles relatives aux environnements hygrothermique, thermiques, hygroscopiques ont été aussi calculées.

N.Boualem et Z.Serir [109] ont étudié le vieillissement à long terme des composites hybrides en graphite/époxy AS/3501-5, l'hybridation consiste à faire les deux couches extérieures exposées à l'environnement en T300/5208, le modèle de Tsai a permis de quantifier la chute des performances mécaniques, une modélisation par élément finis a permis le calcul des contraintes résiduelles.

Serir et Adda Bedia [110] ont étudié la réduction des contraintes hygrothermiques à travers l'utilisation des composites hybrides, la méthode utilisée est la méthode analytique développée par Adda Bedia et Tounsi, l'idée est de comparer le comportement d'une plaque en T300/5208-AS/3501-T300/5208 et une autre plaque en AS/3501-T300/5208-AS/3501 pour évaluer la configuration la plus adaptée pour la réduction des contraintes résiduelles.

Adda Bedia, Hann et Verchery [111] ont présenté une large synthèse en faisant des observations sur des aspects hygroscopiques qui interagissent lors des problèmes de diffusion à des conditions environnementales variables.

Benkeddad [112] a travaillé sur la prévision du comportement hygrothermique de structures soumises à des conditions de température et d'humidité. Un logiciel d'analyse des plaques stratifiées pour la détermination des contraintes et des déformations hygrothermiques transitoires à travers les plis a été conçu. La prise en compte des effets d'environnement sur les propriétés mécaniques n'a pas eu lieu.

Adda Bedia [113] a présenté une méthode analytique pour déterminer la valeur du gradient de la concentration en humidité, ainsi que le pourcentage maximal du gain de masse à travers l'épaisseur des plaques composites à matrice polymère,

exposées aux conditions d'environnement cycliques. La méthode prédit les extensions des effets de bord, les limites approximatives de la partie fluctuante, les valeurs de la concentration de l'humidité aux bords de la plaque et la concentration de l'humidité en régime transitoire.

Jacquemein et Vautrin [114] ont proposé une méthode analytique permettant de calculer les contraintes internes, induites par des conditions environnementales cycliques pour des structures composites cylindriques épaisses. Les cylindres sont composés de plis orthotropes dont les propriétés hygrothermoélastiques transitoires sont déterminées en considérant les équations classiques de la mécanique des solides.

Tounsi et Adda Bedia [115] ont développé une nouvelle méthode analytique, qui consiste à prédire les contraintes à travers une plaque exposée à des conditions environnementales variables symétriques, sans la détermination de la distribution de la concentration, cette méthode a été adoptée pour la détermination des contraintes résiduelles durant la phase de désorption d'humidité par Tounsi, Adda Bedia et Benachour [116]. L'effet de l'anisotropie sur la distribution des contraintes hygroscopiques à l'intérieur du stratifié a été étudié par Tounsi, Adda Bedia et Verchery [117].

Tounsi, Bouazza et Adda Bedia [118], ont étudié la distribution des contraintes hygroscopiques transitoires à travers l'épaisseur des plaques stratifiées, pour des conditions d'environnement cycliques symétriques et des conditions cycliques non symétriques [119]. Une étude particulière a été accordée à l'effet de l'orientation des fibres et des conditions d'environnement cycliques, sur les contraintes résiduelles non mécaniques dans les plaques composites, par Tounsi, Adda Bedia, Sereir et Benhasssaini [120].

Benkhedda [121] a étudié le comportement hygrothermique des matériaux composites à matrice polymère avec la théorie classique avec la prise en compte de l'effet du vieillissement lors de la désorption en régime transitoire, le modèle de Tsai a permis de quantifier la chute des caractéristiques mécaniques dans

environnement hygrothermiques, une nouvelle méthode analytique est utilisée pour quantifier les contraintes résiduelles.

Boukhoulda et Adda Bedia [122] ont examiné l'effet de l'orientation des fibres sur l'évolution de l'humidité, pour des composites en phase d'absorption. La méthode analytique a été utilisée afin d'évaluer la concentration d'humidité à travers l'épaisseur de la plaque, soumise à des conditions cycliques pour deux types de composite, le T300/5208 et le verre époxyde. Cette méthode permet aussi de prévoir simultanément le niveau et le temps de saturation. Les résultats montrent que l'influence de l'humidité est très nette lorsque la température et l'humidité agissent simultanément. Les contraintes thermiques apparaissent dans le sens transverse des fibres. Les fibres de carbones T300 ont tendance à se rétracter sous l'effet de température contrairement à la résine.

Sereir, Adda Bedia et Tounsi [99] ont appliqué la méthode de calcul des contraintes résiduelles développées en [115], en prenant un environnement constant et symétrique. Ils ont examiné l'effet de la température sur les propriétés mécaniques du graphite époxyde, puis sur le comportement hygrothermoélastiques des plaques minces composites en transitoire lors d'une phase d'absorption. L'effet du coefficient de diffusion sur le comportement hygrothermoélastiques a été bien décrit, son effet est bien mis en évidence sur différents types de stratifiés. Le coefficient de diffusion en fonction de l'orientation des fibres n'a pas été considéré. L'étude fut étendue pour un environnement non symétrique [123].

Certaines études ont été réalisées dans des conditions environnementales complexes, afin d'étudier le comportement des matériaux composites dans des conditions proches de leur fonctionnement en service, telles que les variations climatiques ou encore les cycles de vol d'un avion [124], [125], les auteurs montrent que l'endommagement et la fissuration du matériau sont accélérés et accentués par des conditions hygrothermiques cycliques, et ce, même en l'absence de sollicitations mécaniques.

D'autres auteurs ont étudié les phénomènes physiques et chimiques qui engendrent le vieillissement, l'absorption d'eau par les composites à matrice polymère peut conduire à la plastification [126] de la résine. Ce phénomène est expliqué par une augmentation de la mobilité des chaînes macromoléculaires de la résine due à une modification du volume libre et/ou une rupture des liaisons hydrogène -H. La plastification se traduit concrètement par une diminution de la température de transition vitreuse et du seuil de plasticité, au cours du processus de diffusion d'eau à travers les résines polymères, les molécules d'eau se fixent sur les sites hydrophiles des chaînes macromoléculaires et provoquent ainsi, une augmentation du volume appelé gonflement ou dilatation hygroscopique. Certains auteurs ont supposé que l'augmentation de volume était égale au volume d'eau absorbée [127], un autre phénomène a été étudié également qui est l'endommagement [128] [129] se traduit par la formation de craquelures ou fissures.

La transition vitreuse est l'une des caractéristiques les plus importantes des polymères, pendant laquelle le matériau passe progressivement d'un état vitreux (rigide) à un état caoutchoutique, le polymère perd une grande partie de sa rigidité. Ainsi, cette grandeur constitue un témoin de l'état physico-chimique [147] du polymère et un excellent indicateur de l'évolution du polymère, cette chute de  $T_g$  est expliquée par l'effet plastifiant de l'eau dans la matrice, qui augmente la mobilité moléculaire et permet donc un changement de conformation des chaînes macromoléculaires à des températures inférieures à celles du matériau sec. Les réactions par coupure de chaîne (hydrolyse), présentées également précédemment, impliquent aussi une baisse de  $T_g$ , dans le cas où le matériau présente un niveau de saturation en eau  $M_s$ , il existe en général une dépendance directe de  $M_s$  en fonction du degré d'humidité du milieu (HR%), Loos and Springer [130] ont illustré les variations de  $M_s$  en fonction de HR% pour trois matériaux composites différents et trois résines

Dans de nombreuses circonstances, les cinétiques d'absorption d'eau par les polymères ou par les composites à matrice polymère présentent des écarts par rapport au comportement Fickien évoqué précédemment. Weitsman [131] [132] qualifie cet aspect « d'anomalie de diffusion ». Selon lui, certains de ces

comportements non Fickiens peuvent être expliqués par le caractère viscoélastique des polymères. Il propose donc un modèle tenant compte du temps nécessaire pour atteindre l'équilibre aux limites, d'un matériau plongé dans un milieu aux conditions constantes. D'autres cas présentent une perte de poids du matériau, après une certaine durée de vieillissement Dewimille [133], Springer [134].

Afin de mieux identifier les modes de dégradations du matériau en présence d'humidité, il est intéressant de réaliser des observations microscopiques. Plusieurs auteurs ont ainsi observé au microscope à balayage électronique (MEB) des faciès de rupture d'échantillons vieillis en milieu humide et les ont comparé à ceux d'échantillons non vieillis, B. Dewimille [135] observe très peu d'endommagement en dessous de 65°C [138] [136]. Y.J. Weitsman [137] et [139] observent que les décohésions fibre/matrice apparaissent essentiellement à l'intérieur du composite alors que Dewimille les trouve surtout proches de la surface, là où la concentration en eau est importante.

#### 1.4 Synthèse de la recherche bibliographique

Après une profonde recherche bibliographique, les remarques suivantes peuvent être évoquées :

- L'analyse des plaques épaisses est traitée par plusieurs auteurs.
- Plusieurs théories qui traitent les plaques épaisses existent dans la bibliographie.
- La prise en compte de la température et l'humidité dans le calcul de l'état de contrainte est évoquée par plusieurs auteurs pour des cas de distribution en profil.
- La prise en compte de dégradation des performances mécaniques dans l'analyse du comportement des plaques épaisses est très peu abordée dans l'état de l'art, quelques articles ont traité ce problème pour une température et un taux d'humidité bien déterminés, les performances mécaniques sont



généralement données pour des températures et des taux d'humidité bien déterminé.

- Pas de référence qui traite le comportement des plaques composite épaisses avec la prise en compte de la dégradation des performances mécanique d'une façon continue c a d des modèles valable pour des n'importe quelle combinaison de température et humidité.

### 1.5 Définition du sujet

Cette étude a été accomplie au niveau de l'institut d'Aéronautique et des études spatiales de l'Université SAAD DAHLAB Blida 1, laboratoire des Sciences aéronautiques. Elle s'insère également dans un axe de recherche au sein de ce laboratoire qui est « L'hygrothermie des composites à matrice polymère »

En effet, plusieurs recherches ont été menées par les équipes conjointement sur les problèmes hygrothermiques des composites à matrice polymère.

Le but principal de notre travail est d'analyser le comportement hygrothermomécanique des plaques composites épaisses avec la prise en compte du vieillissement hygrothermiques des caractéristiques mécanique en utilisant le modèle de TSAI, à travers une investigation analytique, le problème est modélisé par la théorie de déformation d'ordre élevée appliqués aux plaques épaisses, l'effet du cisaillement transversal est pris en considération.

La plaque épaisse simulée est soumise à un chargement hygrothermomécanique, les chargements sont des profils de différentes natures pour la température et humidité.

Les simulations numériques sont effectuées pour le matériau graphite/époxy T300/5208. Le résultat de cette étude est l'élaboration d'un code calcul appelé THICK-AGING-COM-MAT, pour l'analyse du comportement hygrothermique des stratifiés croisés vieillit.

## CHAPITRE 2

### MODELISATION DU VIEILLISSEMENT HYGROTHERMIQUE

Dans cette partie une modélisation du vieillissement des stratifiés composite sera faite par la prise en compte de l'influence de la température et humidité sur les propriétés mécaniques, le modèle semi-empirique de TSAI est utilisé pour modéliser et quantifié les chutes des caractéristiques mécaniques des composites vieilliss, on va s'intéresser aussi aux effets de couplage d'une température et une humidité.

#### 2.1 Microanalyse pour un matériau composite unidirectionnel

Nous présentons ici différents modèles par l'approche semi-empirique pour différents modules d'élasticité, pour un matériau composite à fibres continues unidirectionnelles, Issac [140], Berthelot [141], Staab [142].

##### 2.1.1 Module d'élasticité longitudinal $E_x$

Loi de mélange [140],[141], [142],[143], [144]  $E_x = V_f E_{fx} + (1 - V_f) E_m$  (2.1)

##### 2.1.2 Module d'élasticité transversal $E_y$

Chamis [144] 
$$E_y = \frac{E_{fx} E_{my}}{E_{fy} - \sqrt{V_f} (E_{fy} - E_{my})}$$
 (2.2)

Gibson [145] 
$$E_y = E_{my} \left[ (1 - V_f) + \frac{\sqrt{V_f} E_{my}}{1 - \sqrt{V_f} (1 - \frac{E_{my}}{E_{fy}})} \right]$$
 (2.3)

Equation d'Halpin-Tsai  $E_y = E_{my} \left[ \frac{E_{fy}(1+2V_f)+2E_{my}(1-V_f)}{E_{fy}(1-V_f)+E_{my}(2+V_f)} \right]$  (2.4)

[140], [141]

Gibson modifiée [145]  $\frac{1}{E_y} = \frac{1-\sqrt{V_f}}{E_{my}} + \frac{\sqrt{V_f}}{E_{fy}\sqrt{V_f} + (1-\sqrt{V_f})E_{my}}$  (2.5)

### 2.1.3 Module de cisaillement $G_{xy}$

Chamis[145]  $G_{xy} = \frac{G_{fxy} G_{mxy}}{G_{fxy} - \sqrt{V_f} (G_{fxy} - G_{mxy})}$  (2.6)

Christensen [146]  $G_{xy} = G_{mxy} \left[ \frac{(1+V_f)G_{fxy} + (1-V_f)G_{mxy}}{(1-V_f)G_{fxy} + (1+V_f)G_{mxy}} \right]$  (2.7)

Halpin-Tsai [140]  $G_{xy} = G_{mxy} \left[ \frac{(1+V_f)G_{fxy} + (1-V_f)G_{mxy}}{(1-V_f)G_{fxy} + (1+V_f)G_{mxy}} \right]$  (2.8)

Gibson [145]  $\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1-\sqrt{V_f}}{G_{mxy}} + \frac{\sqrt{V_f}}{G_{fxy}\sqrt{V_f} + (1-\sqrt{V_f})G_{mxy}}$  (2.9)

### 2.1.4 Coefficients de Poisson $\nu_{xy}$

Loi de mélange [140], [141], [142],[143], [144]  $\nu_{xy} = \nu_{fxy} V_f + \nu_{mxy}(1-V_f)$  (2.10)

## 2.2 Caractérisation du matériau

Après avoir exposé les différentes expressions semi-empiriques concernant l'évaluation des propriétés mécaniques du composite, nous allons devoir choisir les modèles des différents modules qui nous permettront de faire la caractérisation de notre matériau.

Le module de Young longitudinal et le coefficient de Poisson sont pris d'après le modèle correspondant à ceux issus de la loi des mélanges. Le module de Young transversal et le coefficient de Poisson sont pris selon le modèle correspondant à celui de la loi des mélanges modifiée par Hahn décrit en référence [107]. Ce modèle a également été adopté dans les travaux de Sereir et autres [99], [123].

Soit ci-dessous le choix du modèle semi-empirique pour l'évaluation des propriétés du composite en fonction des volumes des fibres.

### 2.2.1 Le module de Young dans la direction des fibres

$$E_x = V_f E_{fx} + (1 - V_f) E_m \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Le module de Young transversal

La relation micromécanique modifiée par Hahn [107] pour le graphite époxy T300/5208 du module de Young transversal est :

$$E_y = \frac{1 + 0.516(V_f / V_m)}{1 + \frac{0.516(V_f / V_m)}{E_f / E_m}} \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Le module de cisaillement longitudinal

De même, la relation micromécanique modifiée par Hahn [107] pour le graphite époxy T300/5208 du module de Young transversal est :

$$G_{xy} = \frac{1+0.316(V_f/V_m)}{\frac{1}{G_{fx}} + \frac{0.316(V_f/V_m)}{G_m}} \quad (2.13)$$

Avec

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (2.14)$$

### 2.2.4 Le coefficient de Poisson

$$\nu_{xy} = \nu_{fxy} V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (2.15)$$

## 2.3 Introduction du vieillissement sur les propriétés mécaniques du matériau

Cette étape est une étape clé dans notre étude, dans laquelle on va quantifier les performances des composites vieillis par la température et l'humidité, le modèle utilisé sera présenté en détail.

Le modèle utilisé est le modèle de Tsai [107], il tient compte de l'évolution de la température de transition en fonction de l'humidité, puis l'évolution des propriétés élémentaires des fibres et de la matrice en fonction de la température et de l'humidité. Ce modèle est le même adopté dans les travaux [99] [123] [121].

La particularité du modèle est que le vieillissement de la fibre est bien pris en considération. Ceci est en accord avec certaines études qui mentionnent une certaine dégradation des fibres due à l'humidité Ishai [124]. Cependant, la plupart des études considèrent cette dégradation comme négligeable, notamment par rapport à la dégradation de la matrice et de l'interface.

### 2.3.1 Évolution de Tg au cours du vieillissement

Le paramètre Tg est un paramètre quantitatif du phénomène de vieillissement, c'est aussi une caractéristique importante des polymères et représente la transition entre le domaine vitreux et le domaine caoutchoutique du matériau [102].

La première partie d'analyse doit permettre de suivre l'évolution de la température de transition vitreuse Tg au cours du vieillissement.

Tsai [107] assume qu'une absorption d'humidité induit une diminution de la température de transition d'une quantité gc:

$$Tg = T_g^{\circ} - gc \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Température adimensionnelle

Tsai [107] propose la notion de la température adimensionnelle T\*, qui est un élément essentiel pour l'évaluation des caractéristiques du composite :

$$T^* = \frac{T_g - T_{opr}}{T_g - T_{rm}} \quad (2.17)$$

On voit l'effet de la température à travers  $T_{opr}$  qui est la température d'utilisation ainsi que l'effet de la concentration à travers la température de transition.  $T_{rm}$  étant la température de référence.

### 2.3.3 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés de la matrice

Tsai [107] relie la température adimensionnelle  $T^*$ , pour déterminer empiriquement les expressions des propriétés de la matrice, en fonction de la température et de l'humidité avant et après le vieillissement.

$$\frac{E_m}{E_m^0} = (T^*)^a \quad (2.17a)$$

$$\frac{G_m}{G_m^0} = (T^*)^a \quad (2.17b)$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_m^0} = (T^*)^a \quad (2.17c)$$

### 2.3.4 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés des fibres

Les propriétés des fibres en fonction de la température et de la concentration s'expriment aussi en fonction de la température adimensionnelle.

$$\frac{E_{fx}}{E_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (2.18a)$$

$$\frac{E_{fy}}{E_{fy}^0} = (T^*)^f \quad (2.18b)$$

$$\frac{G_{fx}}{G_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (2.18c)$$

$$\frac{v_{fx}}{v_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (2.18d)$$

f et a: étant des constantes semi-empiriques [107], données dans le tableau 2.2

### 2.3.5 Prise en compte de l'effet de température et d'humidité dans l'évaluation des résistances à la rupture

Les résistances avant et après le vieillissement sont aussi fonctions des paramètres d'environnement et s'expriment en fonction de la température adimensionnelle [107].

#### 2.3.5.1 Résistance en traction longitudinale

$$\frac{X}{X^0} = \left( \frac{v_f}{v_f^0} \right) (T^*)^h \quad (2.19a)$$

#### 2.3.5.2 Résistance en compression longitudinale

$$\frac{X'}{X'^0} = \left( \frac{v_f}{v_f^0} \right) \left( \frac{G_{xy}}{G_{xy}^0} \right) (T^*)^e \quad (2.19b)$$

#### 2.3.5.3 Résistance en tension transversale

$$\frac{Y}{Y^0} = (T^*)^c \quad (2.19c)$$



#### 2.3.5.4 Résistance en compression transversale

$$\frac{Y'}{Y^0} = (T^*)^c \quad (2.19d)$$

#### 2.3.5.5 Résistance en cisaillement plan

$$\frac{S}{S^0} = (T^*)^c \quad (2.19e)$$

h,e,c : étant des constantes semi-empiriques [105], données dans le tableau 2.2

Par mesure des propriétés des plis qui sont fonction de la température et de l'humidité, nous reprenons les formulations micromécaniques pour calculer les propriétés ayant subi le changement du à ces paramètres.

### 2.4 Propriétés du T300/5208

L'application de notre étude se fera sur le T300/5208. Le T300 est la fibre de carbone et le N5208 est la résine. Nous présentons ci-dessous sous forme de tableaux les caractéristiques de ce type de matériau, ainsi que les caractéristiques de la matrice époxyde et des fibres de carbone :

Tableau 2.1 : Caractéristiques de fibres et matrice du T300/5208 [107].

$E_{fx}$ (Gpa)	$E_{fy}$ (Gpa)	$\nu_{fx}$	$E_m$ (Gpa)	$\nu_m$	$G_m$ (Gpa)	$G_{fx}$ (Gpa)
259	18.69	0.25	3.4	0.35	1.26	19.69

Tableau 2.2 Caractéristiques de variations de température et d'humidité [107].

$T_g^0$	$T_{rm}$ (°C)	G(°C/c)	a	b	c	f	h	e
160	22	2000	0.5	0.2	0.9	0.04	0.04	0.2

Tableau 2.3 Résistances du T300/5208 [107].

X(MPa)	X'(MPa)	Y(MPa)	Y'(MPa)	S(MPa)
1500	1500	40	246	68

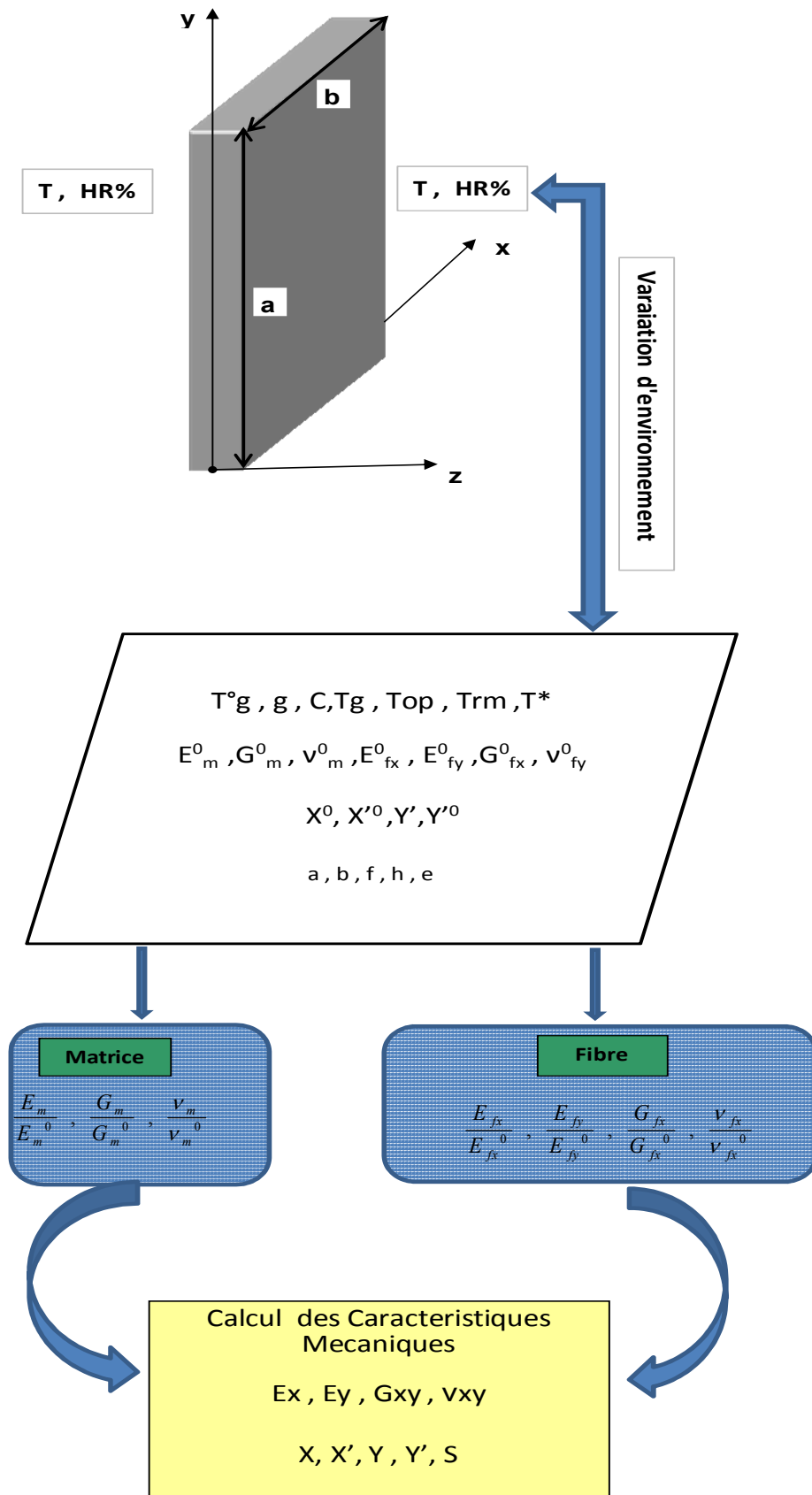


Figure 2.1 : Organigramme de calcul des propriétés vieillies TSAILOC.

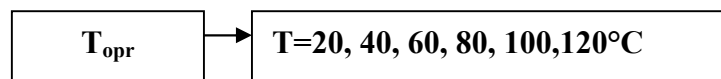
## 2.5 Conditions de simulation

Nous choisissons quatre environnements différents en termes d'humidité relative. Chaque environnement considère des températures d'utilisation variables de 20°C à 120°C.

120°C, correspond aussi à la température de post cuisson prise par Tsai [107].

Tableau 2.4 : Environnements des simulations.

Environnements	Humidité relative	Concentration $C=0.015(HR)\%$
ENV 1	HR1=0%	C=0
ENV 2	HR2=33%	C=0.005
ENV 3	HR3=66%	C=0.01
ENV 4	HR4=100%	C=0.015



## 2.6 Résultats de la simulation

### 2.6.1 Influence du taux d'humidité et la température d'utilisation et la fraction volumique des fibres

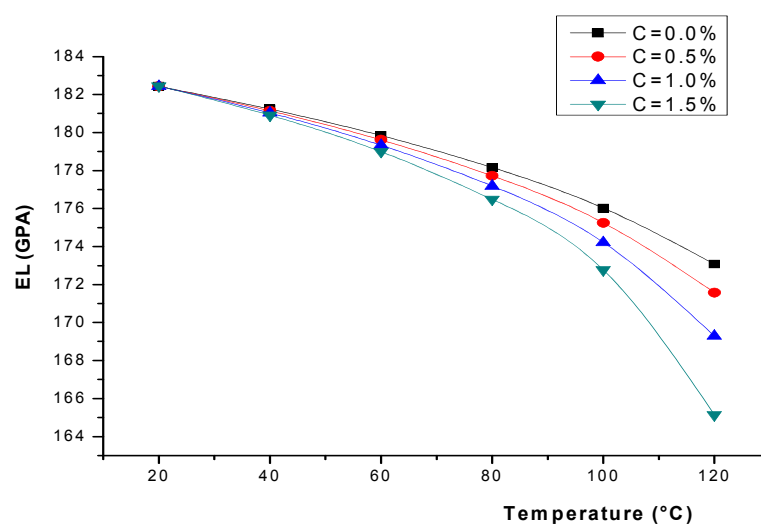


Figure 2.2 : Effet de la variation de température sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration.

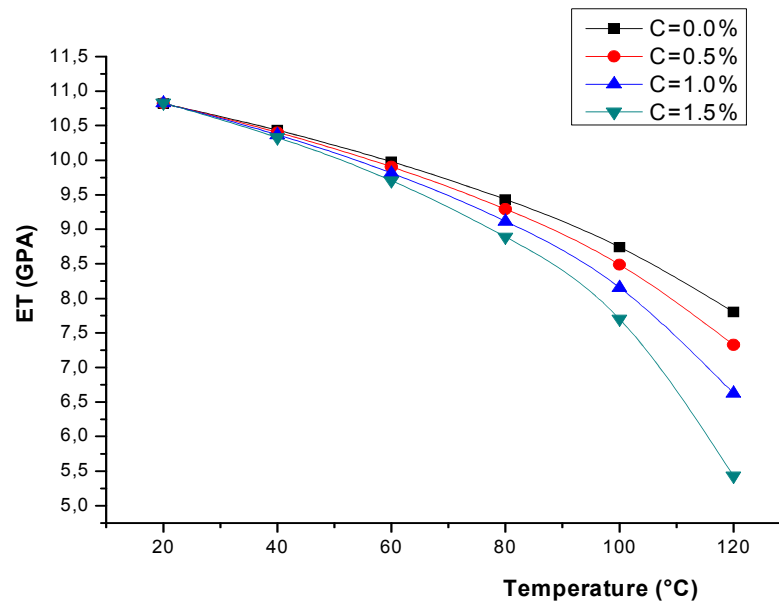


Figure 2.3 : Effet de la variation de température sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration.

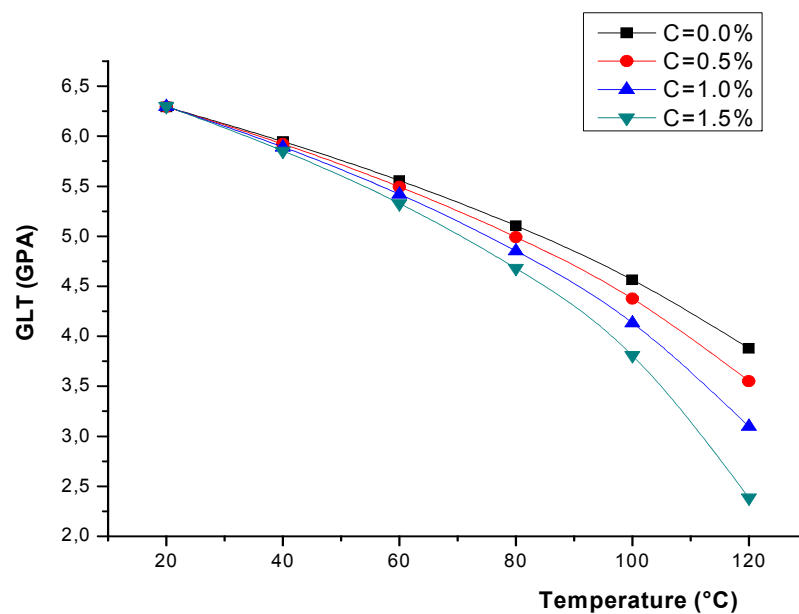


Figure 2.4 : Effet de la variation de température sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration.

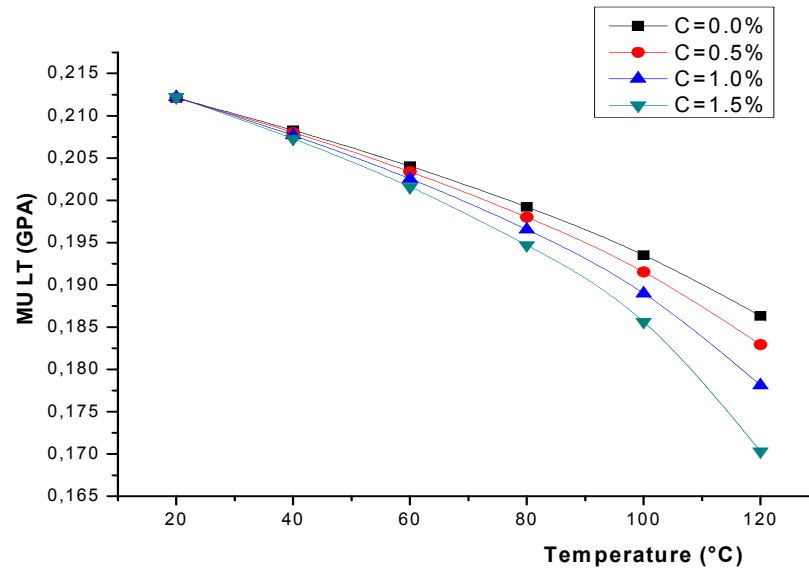


Figure 2.5 : Effet de la variation de température sur le coefficient de Poisson longitudinal pour le T300/5208 à différents niveaux de concentration.

## 2.7 Interprétations des résultats

### 2.7.1 Effets de la température

Pour connaître et analyser l'effet de la température sur le vieillissement des composites, on a simulé le comportement du module de Young longitudinale et transversale, le module de cisaillement longitudinal, le coefficient de poisson, comme le montrent les figures 2.2 à 2.5.

L'augmentation de la température engendre une chute des différents modules d'élasticité, nous observons une accélération de la réduction des caractéristiques mécaniques à partir de 80°C, le taux de réduction du module de Young transversal et le module de cisaillement longitudinal sont très importants et atteignent une chute de 50% des caractéristiques initiales.

En fait, ces réductions représentent la chute de rigidité. Nous constatons une réduction de la rigidité transversale de l'ordre de 56% lorsque la température atteint 120°C à une concentration initiale  $C=0.015$ . La rigidité en cisaillement se réduit considérablement aussi, elle est autour de 61% pour une température de

120°C et une concentration de  $C=0.015$ . Ces résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux cités dans la référence [119]

### 2.7.2 Effets de la concentration

Afin de déterminer l'effet de la concentration sur les caractéristiques mécaniques, on a simulé le comportement des composites dans différents environnements en terme d'humidité relative à travers les figures 2.2 à 2.5 on peut fixer la température et voir l'effet de l'humidité.

Plus la concentration est élevée, plus le taux de dégradation est élevé, exemple le cisaillement longitudinal chute de 6.7% lorsque la concentration passe de  $C=0\%$  à  $C=1.5\%$ . Le module de Young transversal quant à lui chute de 5.96% lorsque la concentration passe de  $C=0\%$  à  $C=1.5\%$ , la combinaison d'une température et d'un haut niveau d'humidité contribuent à réduire les propriétés mécaniques du graphite/époxyde T300/5208. L'effet de température est plus prononcé pour une concentration élevée.

L'influence de la concentration d'humidité et celle de la température sont similaire, pour une concentration d'humidité donnée, plus la température est élevée plus la dégradation est importante. Les caractéristiques mécaniques les plus sensibles sont l'élasticité transversale et le cisaillement longitudinal. Ceci permet de prévoir que l'effet combiné température humidité aura une conséquence visible sur les contraintes transversales et sur le cisaillement plan.

### 2.8 Validation des résultats

Nos résultats sont en bon accord avec les résultats obtenus par Benkhedda [121] ou il apparaît communément une baisse de rigidité dans le sens transversal et en cisaillement des composites unidirectionnels. Les résultats sont aussi en bon accord avec les travaux expérimentaux de Ghorbel [147] ; Shen et Springer [148].

Le modèle de Tsai nous a permis de simuler et analyse le vieillissement et la dégradation mécanique du composite, les propriétés mécaniques du composite peuvent être obtenues pour n'importe quelle condition de température et d'humidité, l'interprétation physico-chimique des résultats des effets de température et d'humidité sur les propriétés mécaniques est assez complexe, nos résultats montrent que pratiquement chaque propriété du matériau est susceptible d'être affectée par un vieillissement humide et thermique. Cependant, l'aspect micro analytique ne pourra déterminer ce qui se passe au coeur du matériau.

### 2.9 Influence de la fraction volumique

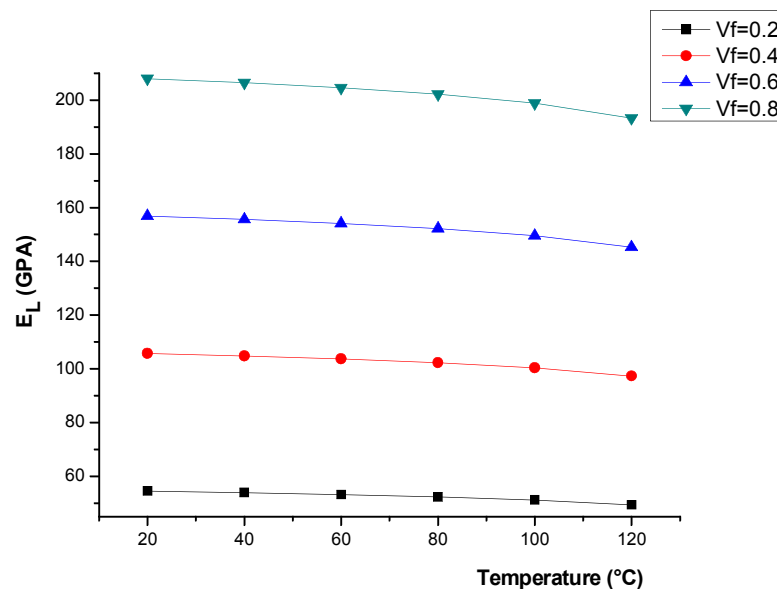


Figure 2.6 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c=0.01$

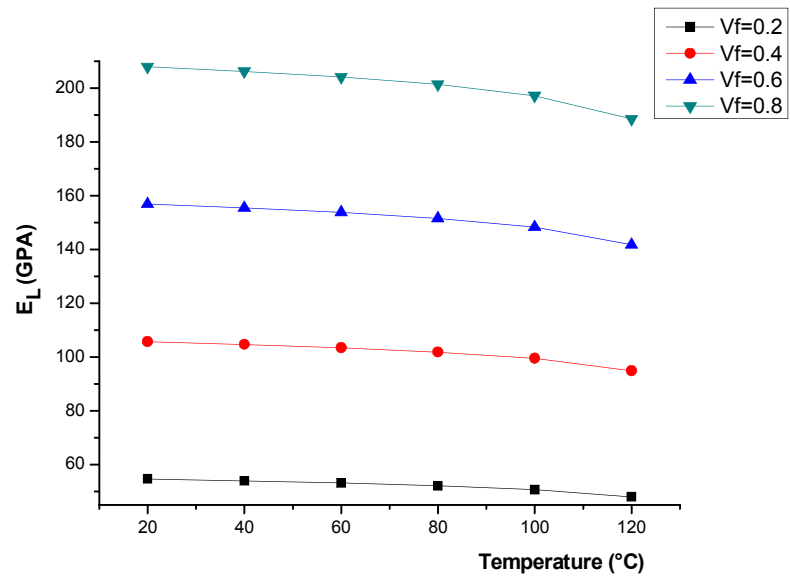


Figure 2.7 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c = 0.015$

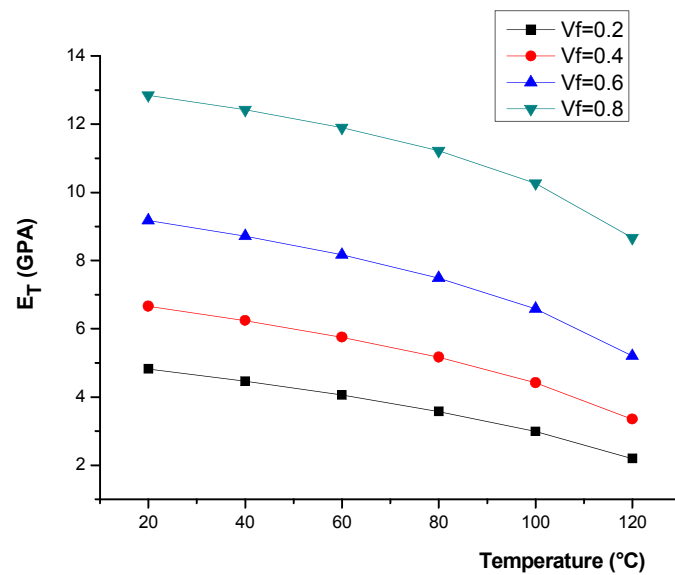


Figure 2.8 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c = 0.015$



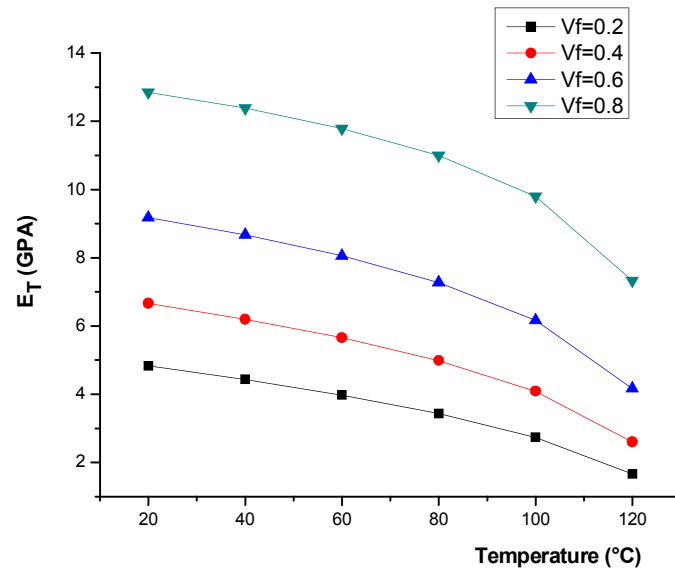


Figure 2.9 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c = 0.015$

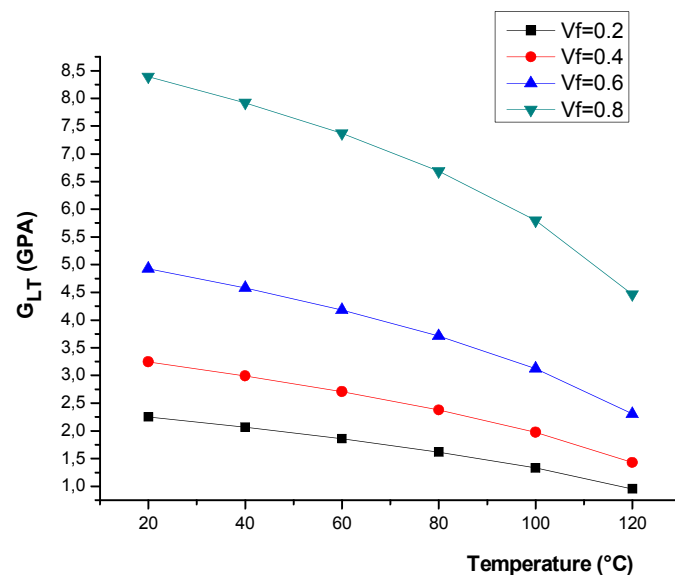


Figure 2.10 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différentes température à  $c = 0.01$

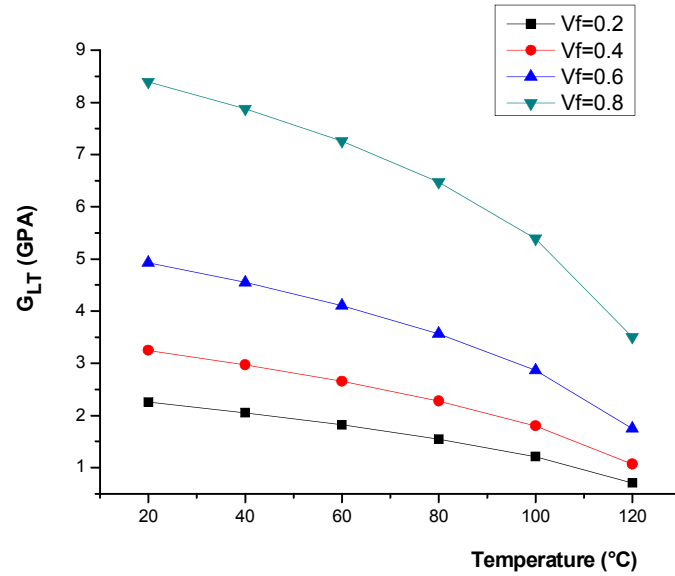


Figure 2.11 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c=0.015$

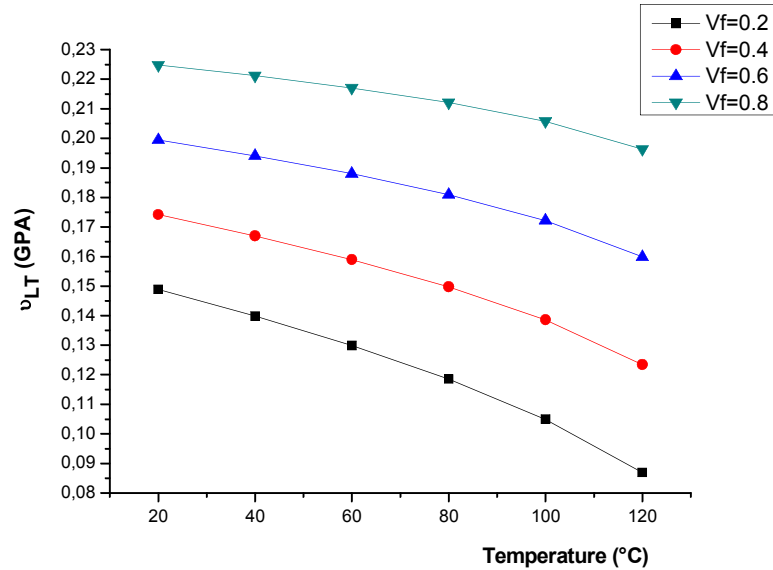


Figure 2.12 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal pour le T300/5208 à différentes température à  $c = 0.01$

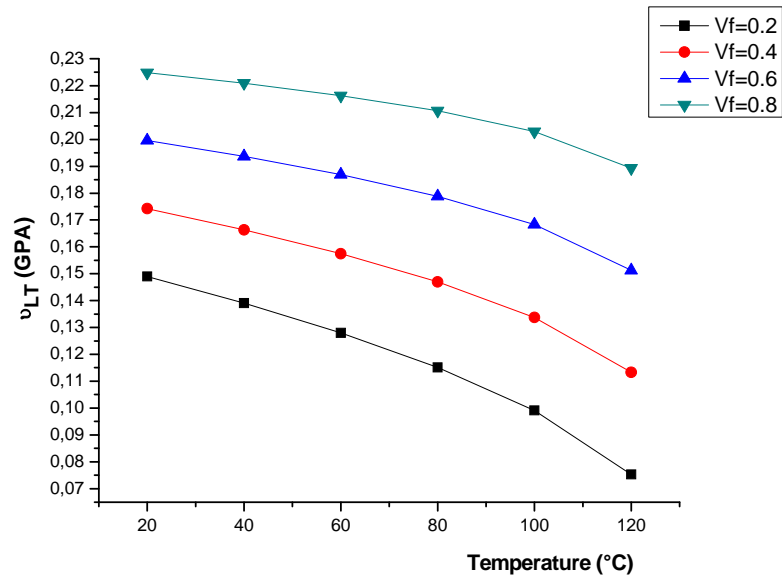


Figure 2.13 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal pour le T300/5208 à différentes températures à  $c = 0.015$

Les figures 2.6 -13 confirment le rôle des fibres qui est le renfort non seulement dans le cas de chargement mécanique, mais aussi avec une sollicitation hygrothermique, à chaque fois que l'on augmente le  $v_f$  on a un amortissement du vieillissement malgré l'augmentation de  $T$  et  $C$ .

### 2.10 Cas d'une température d'utilisation proche de la température de post cuisson

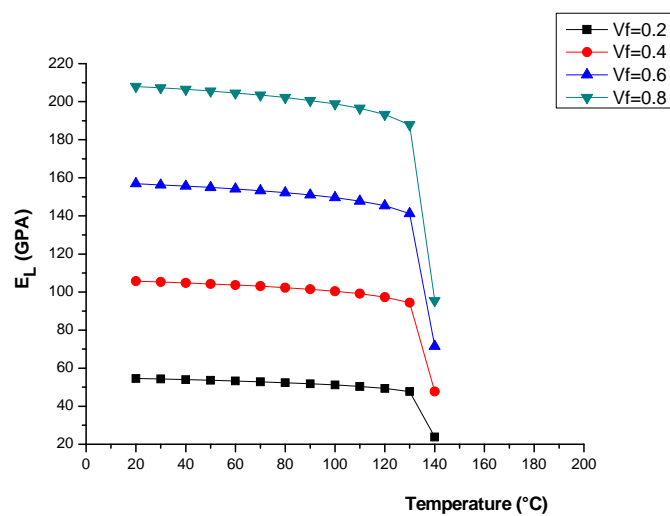


Figure 2.14 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'à  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.01$ .

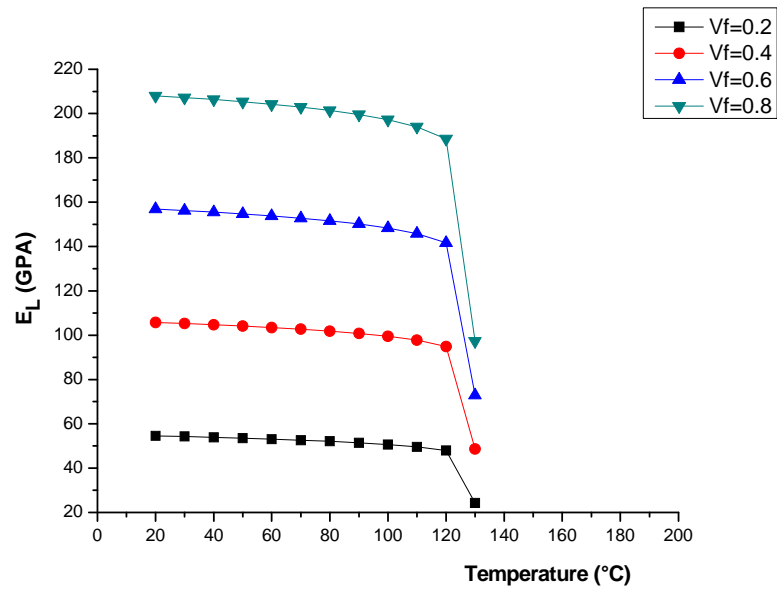


Figure 2.15 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.015$

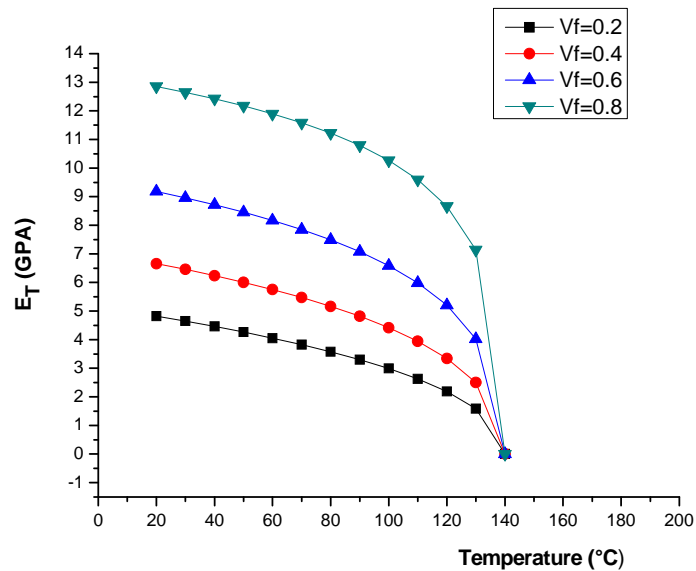


Figure 2.16 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.01$

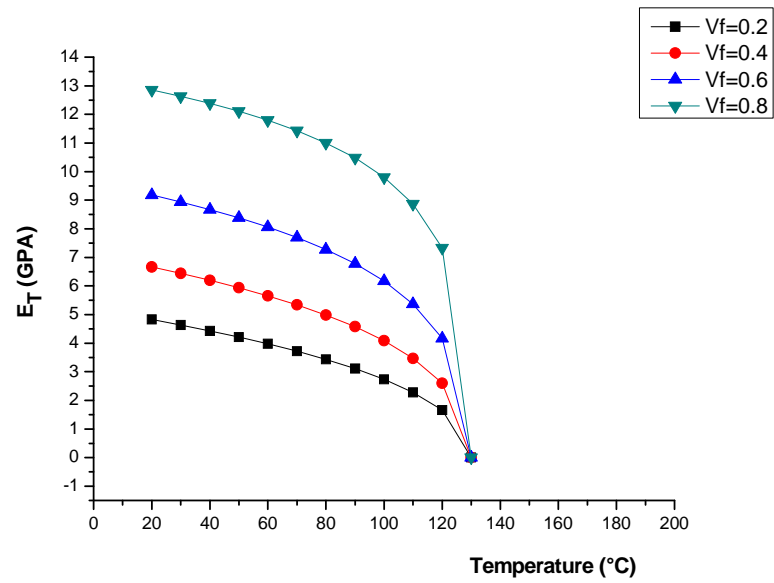


Figure 2.17 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.015$

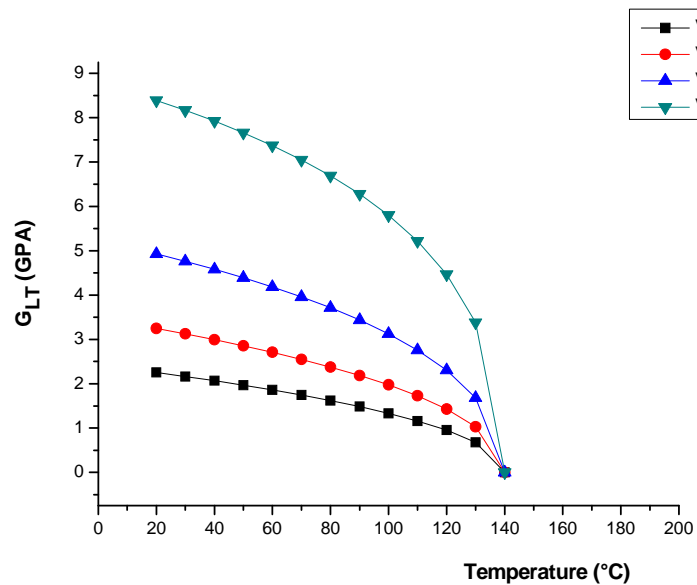


Figure 2.18 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.01$

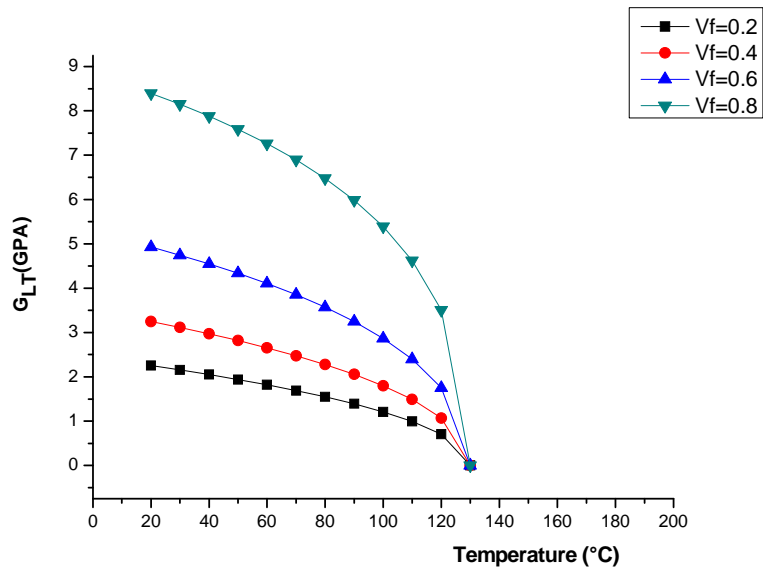


Figure 2.19 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.015$

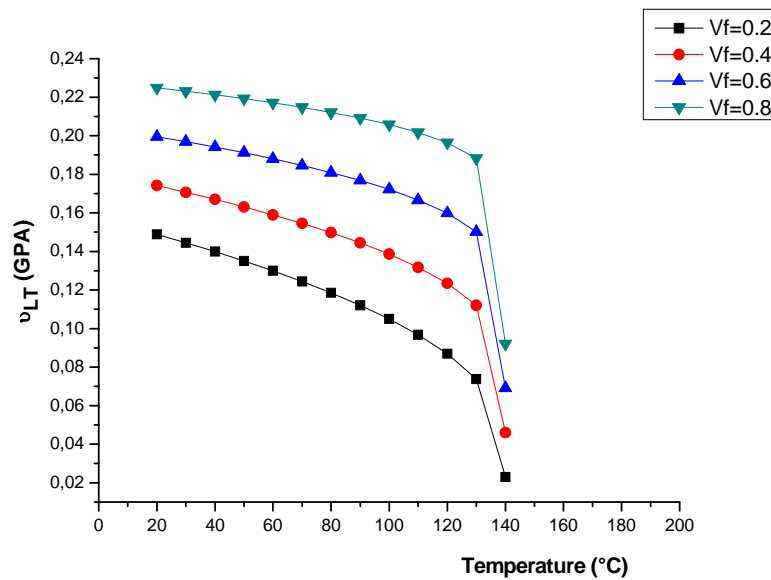


Figure 2.20 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.01$

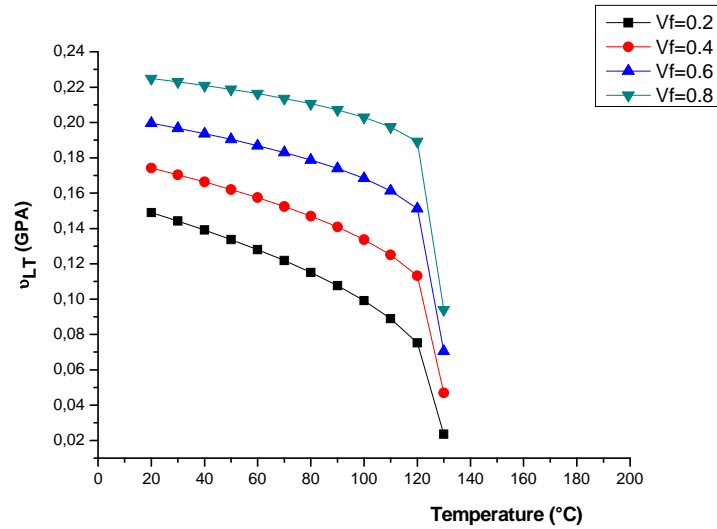


Figure 2.21 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{max} = 180$  °C et à  $c = 0.015$

Les figures 2.14-21 présentent la chute brutale des caractéristiques mécanique de notre matériau .

### 2.11 Cas d'une température d'utilisation négative

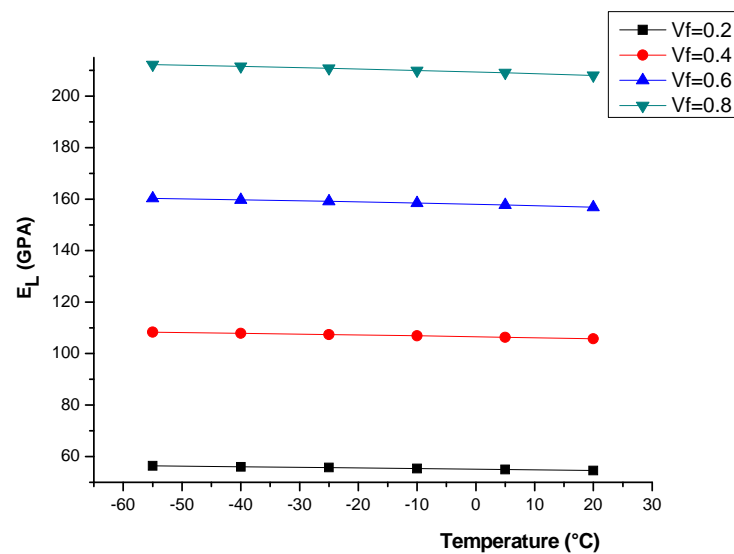


Figure 2.22 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.01$

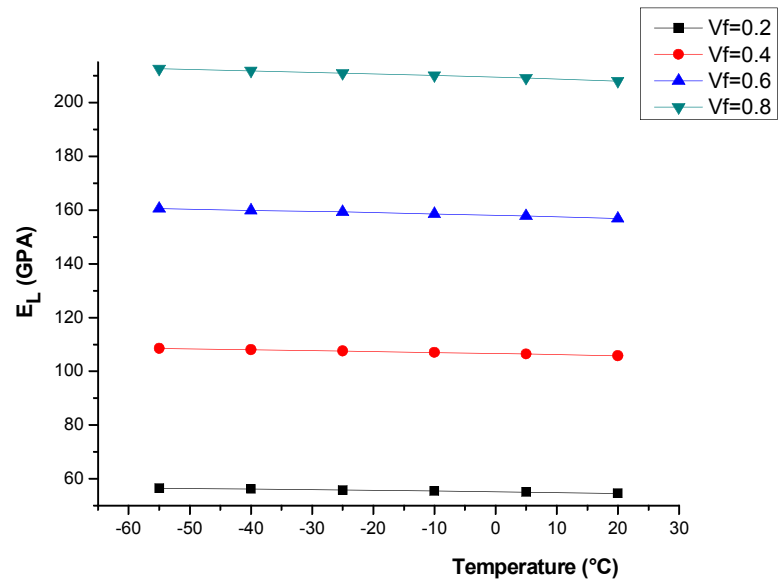


Figure 2.23 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.015$

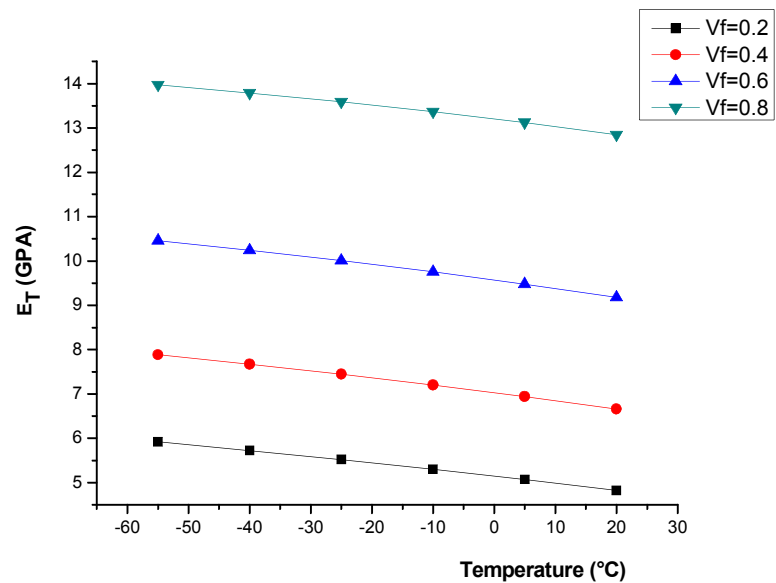


Figure 2.24 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.01$



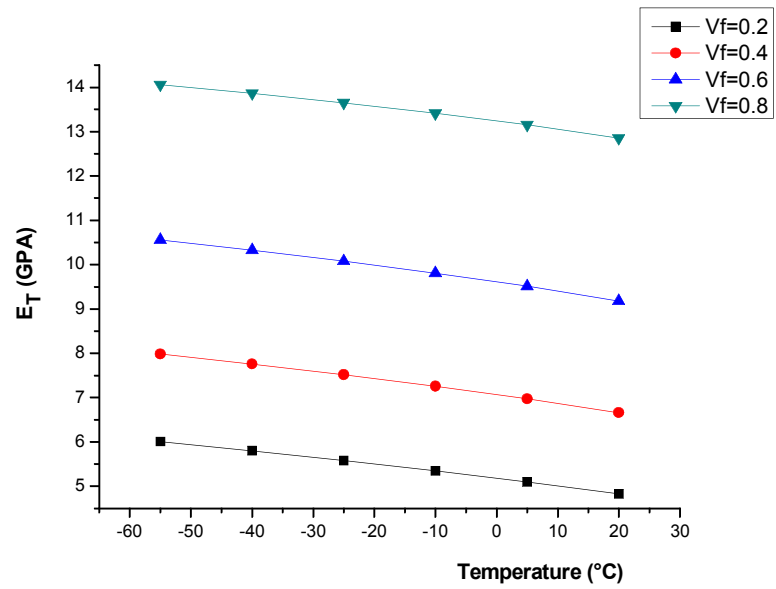


Figure 2.25 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de Young transversal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.015$

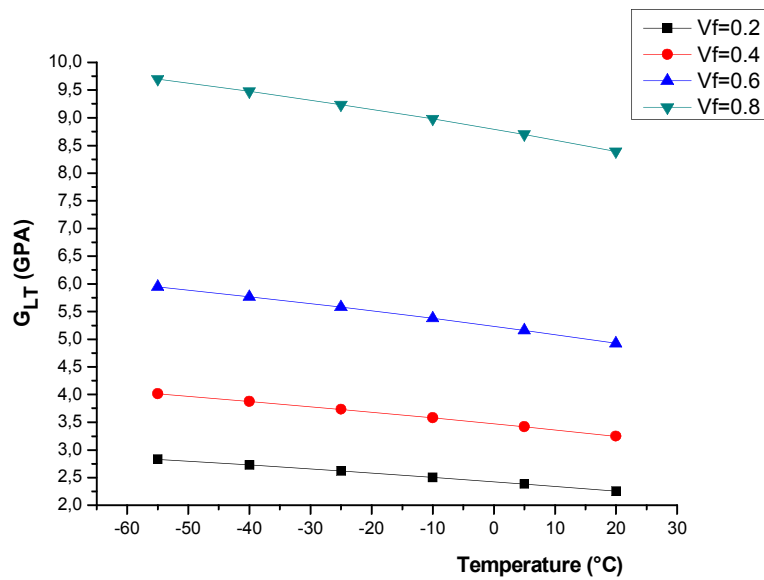


Figure 2.26 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.01$

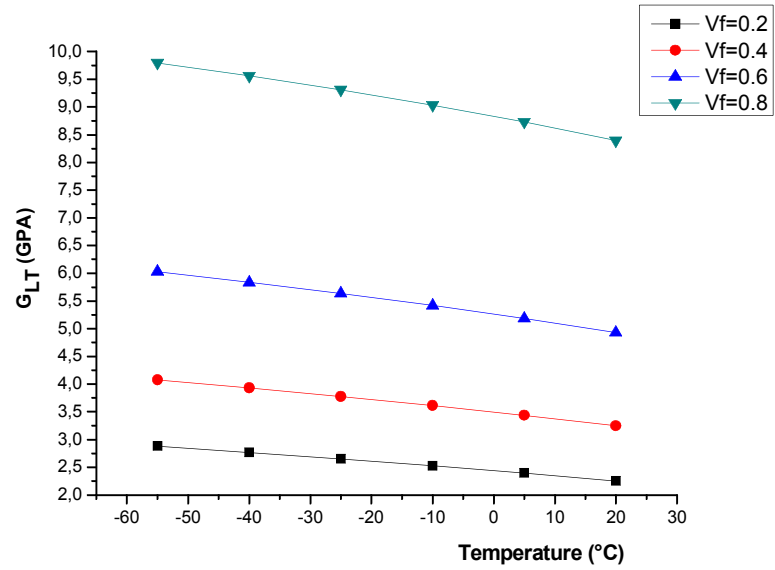


Figure 2.27 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le module de cisaillement longitudinal pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.015$

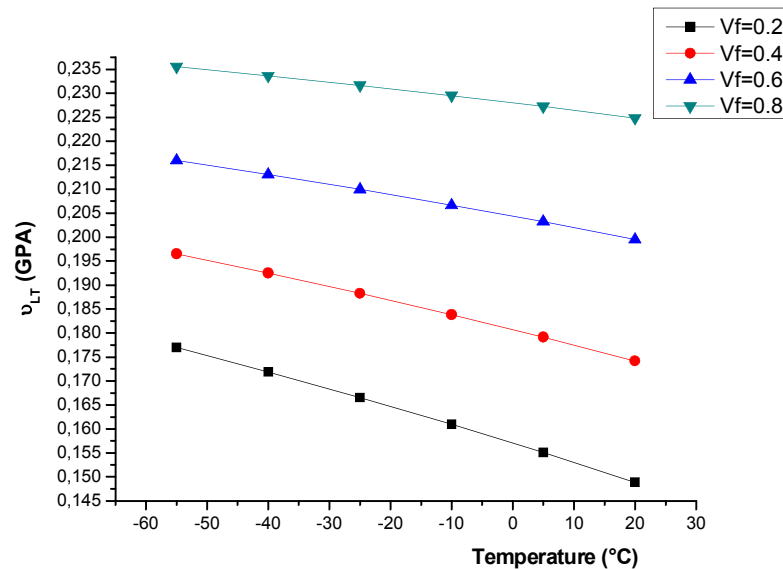


Figure 2.28 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.01$

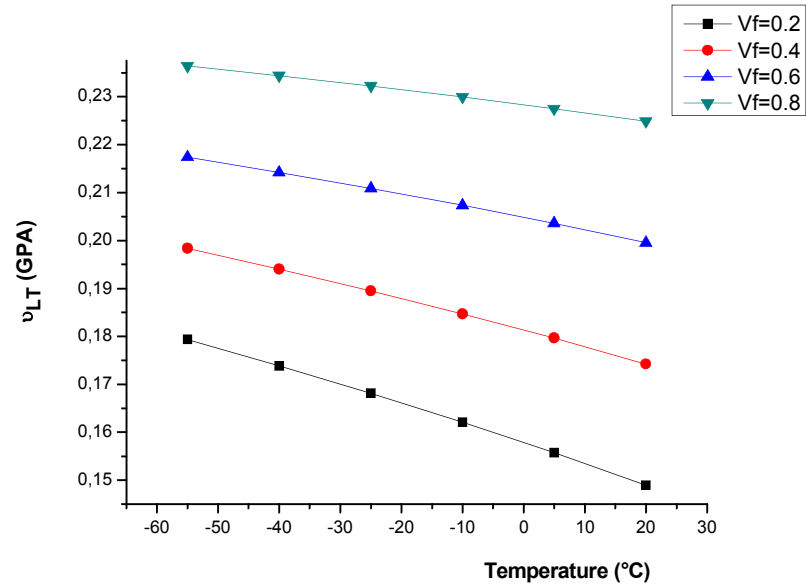


Figure 2.29 : Effet de la variation de la fraction volumique sur le coefficient de poisson longitudinal de pour le T300/5208 jusqu'a  $T_{min} = -55$  °C et à  $c = 0.015$

Les figures 2.22-29 présentent une stagnation des caractéristiques mécaniques de notre composite pour des températures d'utilisation négative, à travers ces graphes on peut dire que les phénomènes de vieillissement sont actifs thermiquement.

## 2.12 Conclusion

Le sous-programme TSAILOC développé dans ce chapitre permet de simuler le vieillissement d'un stratifié à l'aide du modèle de TSAI, et cela pour n'importe quelle condition de température et humidité, nos résultats montrent que pratiquement chaque propriété du matériau est susceptible d'être affectée par un vieillissement humide et thermique.

### **CHAPITRE 3**

## **MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES ET MODELISATION HYGROTHERMIQUE**

L'utilisation rationnelle des matériaux composites exige une bonne compréhension et une modélisation quasi réelle de leur propriété directionnelles, l'objectif de ce chapitre est d'exposé les éléments de base essentiels pour la modélisation dans le domaine des composites, à travers les lois de comportement élastique et hygrothermique pour les composites unidirectionnels, la modélisation hygrothermiques des composites.

Dans la bibliographie on trouve diverses théories qui s'intéressent à l' étude du comportement des plaques composites parmi ces théories on peut citer , la théories de la couche unique équivalentes-ESL(2D) ,cette dernière présente deux grands catégorie la première est la théorie classique des stratifiée (CLPT), la deuxième Théorie de déformation en cisaillement des stratifiés, il existe aussi une autre théorie plus complexe et difficile qui est la théorie tridimensionnelle d'élasticité (3D) .

La théorie de la couche unique équivalentes des plaques (ESL) est dérivée de la théorie l'élasticité 3D en faisant des hypothèses appropriées à la déformation ou l'état de contrainte par apport a l'épaisseur du stratifié.

Ces hypothèses permettent le passage d'un problème 3D à problème 2D, dans la théorie tridimensionnelle d'élasticité ou dans la théorie de layerwise chaque couche est modélisée comme un solide 3D.

### 3. Théories de comportement des stratifiés composites

La théorie classique des stratifiés est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.01}$$

où  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes de déplacement le long des coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point sur le plan moyen ( c.-à-d ,  $z = 0$  ). Le champ de déplacement (3.01) implique que les lignes droites normales au plan xy-avant déformation restent droites et normale au plan moyen après déformation, les hypothèses de Kirchhoff s'élèvent à négliger les effets du cisaillement transversal et la normale transversale.

La prochaine théorie dans la hiérarchie des théories de la couche équivalentes ESL est la théorie de premier ordre de déformation de cisaillement (FSDT), qui est basée sur le champ de déplacement :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.02}$$

Où  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  dénotent les rotations autour des axes x et y respectivement, la théorie du premier ordre FSDT déploie le schéma de déplacement du CLPT en incluant un cisaillement transversal dans ses hypothèses, c.-à-d, la contrainte de cisaillement transversale est assumée constante par rapport à l'épaisseur, la théorie du premier ordre FSDT exige des facteurs de correction de cisaillement qui est difficile à déterminer, les facteurs de correction de cisaillement dépendent non seulement du stratifié et des paramètres géométriques, mais également des conditions de chargement et conditions aux limites, le facteur de correction permet de satisfaire la condition du cisaillement transversale égale à zéro pour la face supérieure et inférieure du stratifié.

La théorie des plaques stratifiée de troisième ordre de Reddy avec la prise en compte du cisaillement transversal est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.03}$$

Le champ de déplacement est géré par un polynôme de 3<sup>ème</sup> degré, les contraintes de cisaillement sont égales à zéro sur la face supérieure et inférieure du stratifié, dans cette théorie il n'y a aucun besoin d'utiliser un facteur de correction de cisaillement, la théorie de troisième ordre fournit une exactitude relativement meilleure à la solution de FSDT.

### 3.1 Théorie classique des stratifiés :

#### 3.1.1 Hypothèses :

La théorie la plus simple dans la catégorie théories de la couche équivalente ESL est la théorie classique des stratifiés (CLPT), qui est une extension de la théorie classique des plaques de Kirchhoff aux plaques composites [1] [2], elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de la plaque est négligeable, le rapport de l'épaisseur sur la longueur ou largeur ne dépasse pas 0,05.
- Les sections droites sont perpendiculaires au plan moyen avant déformation et restent droites après déformation.
- Les transverses normales ne subissent pas d'allongement.
- Les transverses normales subissent une rotation de telle façon de rester perpendiculaire au plan moyen après déformation.

Les deux premières hypothèses impliquent que le déplacement transversal est indépendant par rapport à l'épaisseur, la déformation transversale normale est zéro.

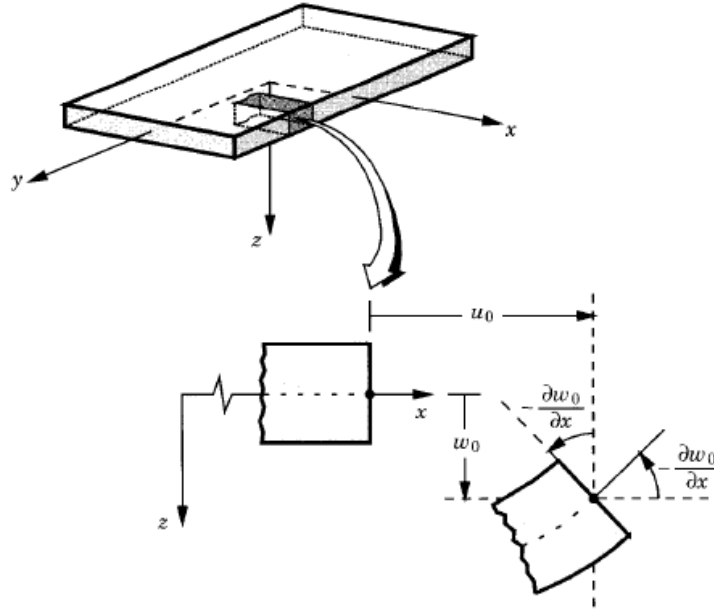


Figure 3.1 : Géométrie d'un bord de stratifié déformé et non-déformé sous les hypothèses de la théorie classique des stratifiés [149].

### 3.1.2 Lois de déformation :

Les déformations liées au champ de déplacement (3.01) peuvent être calculées avec les relations non-linéaires de déformation-déplacement [149] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.04.a}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{3.04.b}$$

L'hypothèse de petites déformations implique que tous les termes du 2<sup>ème</sup> ordre suivants sont négligeables :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2, \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
&\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.05}$$

Alors les termes suivants sont petits mais non négligeable :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.06}$$

Les relations de déformations (3.04) deviennent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{3.07}$$



En utilisant les hypothèses citées ci-dessus les relations de déformation (3.04) deviennent :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.08}$$

Les relations de déformation (3.08) peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.09}$$

Ou (  $\varepsilon_{xx}^0$  ,  $\varepsilon_{yy}^0$  ,  $\varepsilon_{xy}^0$  ) sont les déformations en membrane ,(  $\varepsilon_{xx}^1$  ,  $\varepsilon_{yy}^1$  ,  $\varepsilon_{xy}^1$  ) sont les déformations en courbures .

Une fois les déplacements ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ) du plan moyen sont connus, les déformations peuvent être calculé pour un point quelconque ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) dans la plaque en utilisant le système d'équation (3.09).

### 3.1.3 Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois de comportement caractérisant l'élasticité linéaire du milieu. Ces lois, permettent de rendre compte aux mieux des phénomènes observés, et sont connues sous l'application « lois de hook généralisée » [142], [140].

### 3.1.4 Matrice de rigidité

La loi de hook généralisée, introduit la matrice de rigidité  $C$  qui est généralement symétrique et décrite par des coefficients indépendants soient des constantes de rigidité.

La relation d'élasticité linéaire s'écrit sous la forme matricielle

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ij}][\varepsilon_{ij}] \quad i, j = 1, 6 \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{66} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{16} & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

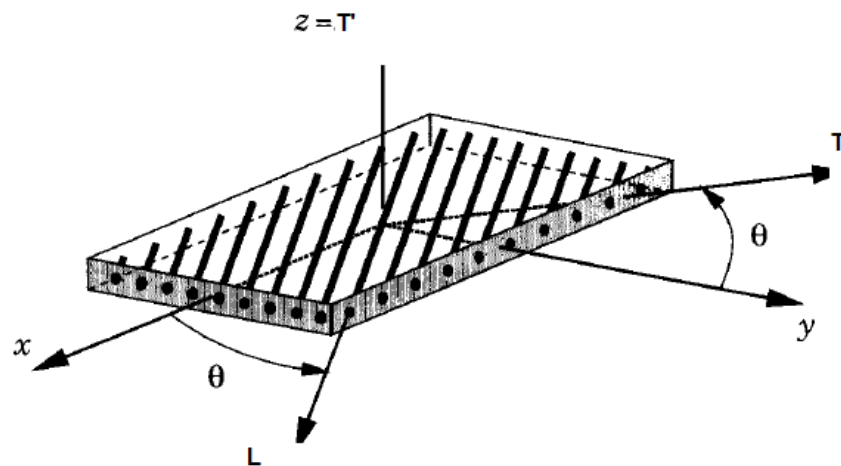


Figure 3.2 : repère principal (LTT') d'une couche et repère du stratifié (X, Y, Z)

### 3.1.5 Contraintes planes

Les éléments développés précédemment, sont applicables pour la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'un matériau composite .Nous étudions dans ce paragraphe, le problème d'un état de contraintes planes, dont les résultats sont nécessaires à la modélisation du problème étudié.

### 3.1.6 Etat de contraintes planes

Un état de contraintes planes est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale, le tenseur est caractérisé par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.1.7 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Rapportées aux axes principaux, les relations d'élasticités se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Les constantes de rigidité réduites s'expriment par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{TL} \nu_{LT}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{TL} \nu_{LT}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{TL} \nu_{LT}} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.1.8 Matrice de rigidité réduite hors des axes principaux

Les relations d'élasticités peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (3.15)$$

Sachant que les expressions de constantes de rigidité réduites s'expriment :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\ Q'_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4 \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 \\ Q'_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))s^2c^2] + Q_{66}(c^4 + s^4) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Avec:  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$ .

### 3.1.9 Champ des contraintes

#### 3.1.9.a Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes est obtenu à partir de la relation (3.15), dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_{11} \varepsilon_{xx} + Q'_{12} \varepsilon_{yy} + Q'_{16} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= Q'_{12} \varepsilon_{xx} + Q'_{22} \varepsilon_{yy} + Q'_{26} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= Q'_{16} \varepsilon_{xx} + Q'_{26} \varepsilon_{yy} + Q'_{66} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 0 \\ \sigma_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le tenseur des contraintes en M, est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.1.9.b Expression des contraintes

Les relations (3.17), montrent que les contraintes dans la couche  $k$ , s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Avec :

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad (3.20)$$

Soit :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon^0(x, y) + z Q'_k \varepsilon^1(x, y) \quad (3.21)$$

$\sigma_k(M)$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ . la matrice de rigidité réduite  $Q'_k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

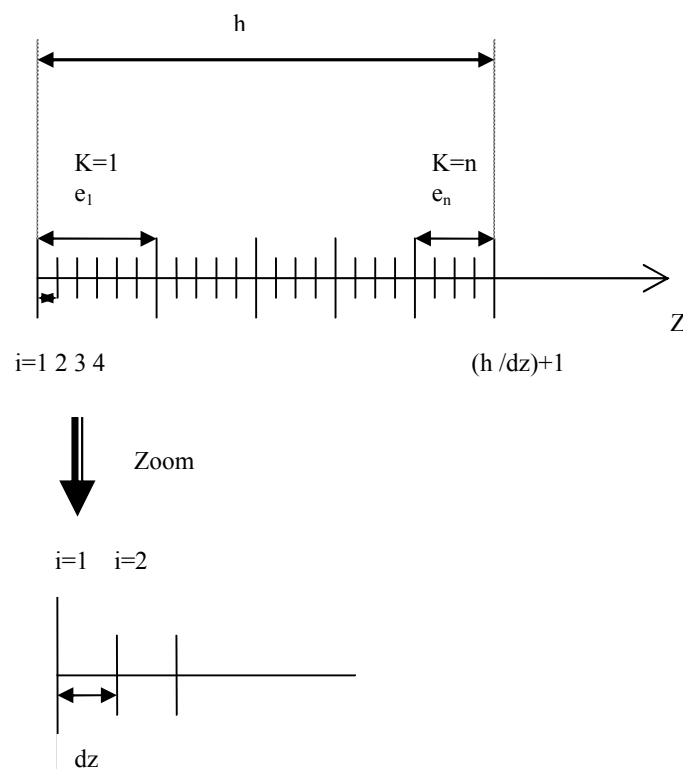


Figure 3.3 : Subdivision des couches en sous-couches.

### 3.1.10 Expression des résultantes et moments

#### 3.1.10.a Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, note  $N(x,y)$ , est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (3.22)$$

Soit dans le stratifié :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i dz \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [Q'_i \varepsilon^0(x, y) + z_i Q'_i \varepsilon^1(x, y)] dz \\ N(x, y) &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \left[ Q'_i \varepsilon^0(x, y) \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \right] + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \left[ Q'_i \varepsilon^1(x, y) \int_{h_{i-1}}^{h_i} z_i dz \right] \\ N(x, y) &= \left[ \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i - h_{i-1}) Q'_i \right] \varepsilon^0(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i^2 - h_{i-1}^2) Q'_i \right] \varepsilon^1(x, y) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Soit en définitive :

$$N(x, y) = A \varepsilon^0(x, y) + B \varepsilon^1(x, y) \quad (3.25)$$

En introduisant les matrices :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i - h_{i-1}) Q'_i \\ A_{ij} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i - h_{i-1}) (Q'_{ij})_i \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i^2 - h_{i-1}^2) (Q'_{ij})_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'expression développée des résultats, s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ), ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane, mais sont également fonctions des déformations en flexion et en torsion.

### 3.1.10.b Moment de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i dz \quad (3.28)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion, et  $M_{xy}$  les moments de torsion, ils sont schématisés en figure 3.4. Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (3.9) des contraintes dans l'expression (3.28), soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [z_i Q'_i \varepsilon^0(x, y) + z_i^2 Q'_i \varepsilon^1(x, y)] dz \quad (3.29)$$

Où

$$M_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i^2 - h_{i-1}^2) Q'_i \right] \varepsilon^0(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i^3 - h_{i-1}^3) Q'_i \right] \varepsilon^1(x, y) \quad (3.30)$$

Soit :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon^0(x, y) + D \varepsilon^1(x, y) \quad (3.31)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (h_i^3 - h_{i-1}^3) (Q'_{ij})_i \quad (3.32)$$

L'expression développée des moments, s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Les moments de flexion et de torsion, sont donc des fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

### 3.1.11 Equation du comportement mécanique d'un stratifié

#### 3.1.11.a Equation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée, exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, elle s'obtient en regroupant les expressions (3.27) et (3.33), suivant une seule écriture matricielle sous la forme [141] [140].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Soit, sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \varepsilon^1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Les termes des matrices introduites, sont donnés par les expressions (3.26), (3.32). Ils peuvent être également exprimés en introduisant, l'épaisseur  $e_i$ , et la cote  $z_i$  du centre de la sous couche  $i$ , sous la forme :



$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q'_{ij})_i e_i \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q'_{ij})_i e_i z_i \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q'_{ij})_i \left( e_i z_i^2 + \frac{e_i^3}{12} \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  de l'équation constitutive (3.34) d'un stratifié, s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues pour chaque couche en fonction des relations (3.14), et des expressions (3.16).

### 3.1.11.b Matrice de rigidité

La matrice intervenante dans l'expression (3.34), est la matrice de rigidité du stratifié décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point  $M_0(x,y)=M(x,y,0)$ , la matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion, et B la matrice de couplage membrane flexion torsion.

Divers couplage peuvent être observés, le couplage traction-cisaillement provient des termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$ . Le couplage membrane-flexion résulte des termes  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$ , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes  $B_{16}$  et  $B_{26}$ , enfin le couplage flexion-torsion résulte des coefficients  $D_{16}$  et  $D_{26}$ .

Les stratifiés multidirectionnels, étant caractérisés par une discontinuité de contraintes dans les plis, il est préférable de travailler avec les déformations, qui sont continués à travers l'épaisseur.

L'intervention de l'équation, (3.34) permet d'exprimer les déformations en membrane et en courbures.

### 3.1.12.a Déformations en membrane et courbures

L'expression des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts et moments extérieurs est :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ - \\ \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & | & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & | & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & | & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ - & - & - & | & - & - & - \\ c_{11} & c_{12} & c_{16} & | & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} & | & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & | & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ - \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Où :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \varepsilon^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & | & b \\ - & - & - \\ c & | & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.1.12.b Champ des déformations

Le champ des déformations au point (x, y, z) s'exprime :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

On remarque une variation linéaire suivant l'épaisseur.

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation s'expriment :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_i = T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.40)$$

La matrice T est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.1.12.c Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans le repère xyz, est donné par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.42)$$

Le champ des contraintes dans le repère LT :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_i = T' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.43)$$

Avec :

$$T' = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Soit finalement,

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_i \quad (3.45)$$

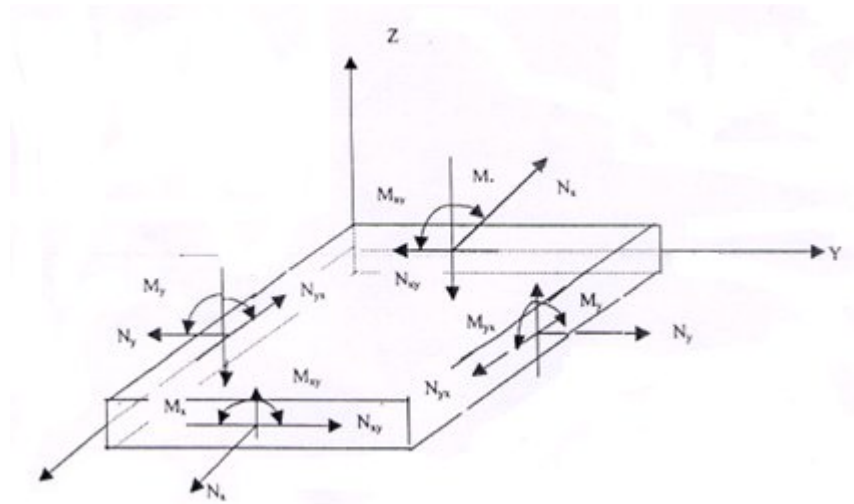


Figure 3.4 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion

### 3.1.13 Equations du comportement des stratifiés tenant compte des phénomènes de dilatation

Dans cette partie nous examinons de quelles manières sont modifiées les équations de comportement, dans le cas où l'on tient compte des phénomènes de dilatations, et les conséquences induites, sur le comportement mécanique des structures composites considérés [141] [140].

#### 3.1.13.a Coefficient d'expansion thermique et hygroscopique pour les unidirectionnels

Le coefficient hygrothermique des stratifiés unidirectionnels est caractérisé par deux coefficients d'expansion thermique  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$ , et deux coefficients d'expansion hygroscopique  $\beta_L$  et  $\beta_T$ , qui sont liés aux propriétés des constituants [140] [141] [149].

Dans le repère (x, y) les coefficients de dilatation thermique s'expriment :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \alpha_L c^2 + \alpha_T s^2 \\ \alpha_y &= \alpha_L s^2 + \alpha_T c^2 \\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_L - \alpha_T)cs\end{aligned}\tag{3.46}$$

Et les coefficients d'expansion hygroscopique sont :

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta_L c^2 + \beta_T s^2 \\ \beta_y &= \beta_L s^2 + \beta_T c^2 \\ \beta_{xy} &= 2(\beta_L - \beta_T)cs\end{aligned}\quad (3.47)$$

avec :

$$c = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad s = \sin(\theta) \quad (3.48)$$

### 3.1.13.b Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels

Lorsque le stratifié est soumis à un changement de température et d'humidité dans un environnement quelconque, alors  $\Delta T = T - T_0$  et  $\Delta C = C - C_0$ , ou  $T_0$  et  $C_0$  sont les conditions de l'état de référence hygrothermique [140] [141] [142] [150].

Les déformations hygrothermiques, dans les axes principaux du stratifié sont :

$$\begin{aligned}e_L(i) &= \varepsilon_{L}^{ht}(i) = \alpha_L \Delta T(i) + \beta_L \Delta C(i) \\ e_T(i) &= \varepsilon_{T}^{ht}(i) = \alpha_T \Delta T(i) + \beta_T \Delta C(i) \\ e_{LT}(i) &= \varepsilon_{LT}^{ht}(i) = 0\end{aligned}\quad (3.49)$$

Les déformations hygrothermiques, dans les axes du stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned}e_x(i) &= \varepsilon_x^{ht}(i) = \alpha_x \Delta T(i) + \beta_x \Delta C(i) \\ e_y(i) &= \varepsilon_y^{ht}(i) = \alpha_y \Delta T(i) + \beta_y \Delta C(i) \\ e_{xy}(i) &= \varepsilon_{xy}^{ht}(i) = \alpha_{xy} \Delta T(i) + \beta_{xy} \Delta C(i)\end{aligned}\quad (3.50)$$

### 3.1.13.c Relations hygrothermoélastiques contraintes et déformations

Lorsque un stratifié multidirectionnel, est assujetti à des chargements mécanique [N] et [M], et hygrothermiques ( $\Delta T$  et  $\Delta C$ ), l'état principal hygrothermoélastiques  $[\varepsilon]^i$  dans le stratifié, est égale à la somme des déformations produites par les contraintes dans le stratifié.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - e_x \\ \varepsilon_{yy} - e_y \\ \varepsilon_{xy} - e_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x + z_i \varepsilon^1_x - e_x \\ \varepsilon^0_y + z_i \varepsilon^1_y - e_y \\ \varepsilon^0_{xy} + z_i \varepsilon^1_{xy} - e_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.53)$$

Soit finalement :

$$[\sigma]_{x,y}^i = [Q]_{x,y}^i [\varepsilon^0]_{x,y} + [Q]_{x,y}^i [\varepsilon^1]_{x,y} z_i - [Q]_{x,y}^i [e]_{x,y}^i \quad (3.54)$$

L'intégration des contraintes à travers l'expression de chaque sous couche, donne la résultante en force :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} [N]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\sigma]_{x,y}^i dz \\ [N]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} [Q]_{x,y}^i \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z_i [k]_{x,y} - [e]_{x,y}^i \right\} dz \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_k = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon^1_x \\ \varepsilon^1_y \\ \varepsilon^1_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}_i \right\} dz \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

[A] et [B] , sont les matrices de rigidité .  $[N^{HT}]_{x,y}$  représentent les résultantes des forces hygrothermiques :

$$\begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}_i t_i \quad (3.59)$$

$t_i=dz=h_i-h_{i-1}$ , est l'épaisseur de la sous couche i .

Les moments résultants à travers les plis du stratifié sont délivrés à partir de l'équation (3.53).

$$\begin{aligned} [M]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} [\sigma]_{x,y}^i z dz \\ [M]_{x,y} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} [Q]_{x,y}^i \{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z_i [\varepsilon^1]_{x,y} - [e]_{x,y}^i \} z_i dz \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

[B] et [D] sont les matrices de rigidité,  $[M^{HT}]_{x,y}$ , sont les moments hygrothermiques définis comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}_i z_i t_i \quad (3.62)$$

Les équations (3.58) et (3.61) sont réécrites sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{N_x} \\ \overline{N_y} \\ \overline{N_{xy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Finalement en bref ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{N} \\ \overline{M} \end{bmatrix}_{x,y} &= \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} N^{HT} \\ M^{HT} \end{bmatrix}_{x,y} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \end{bmatrix}_{x,y} \\ &= \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \end{bmatrix}_{x,y} + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^1 \end{bmatrix}_{x,y} \end{aligned} \quad (3.65)$$

[N] et [M] sont respectivement, les résultantes en forces et en moment, égales respectivement à la somme des composantes mécaniques et hygrothermiques, l'équation (3.65) se met sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} \overline{N} \\ - \\ \overline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ \varepsilon^1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Les relations forces déformations et contraintes déformations, sont identiques à ceux dérivées pour le chargement mécanique (3.35), à la seule différence ; c'est que les forces et moments hygrothermiques, sont ajoutés aux forces et moments mécaniques appliqués.

### 3.1.13.e Contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles, sont introduites dans les stratifiés multidirectionnels durant la fabrication. Sur le plan microscopique, les contraintes résiduelles sont introduites dans les couches unidirectionnelles autour des fibres, à cause des imperfections dans les propriétés thermiques des constituants.

En l'absence de forces externes appliquées, [N]=0 et [M]=0 ; les relations hygrothermiques (3.63) et (3.64) se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$



$$\begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

L'intervention de ces relations, donnent les déformations en membrane  $[\varepsilon^0]$  et courbures  $[\varepsilon^1]$ , produits par un changement hygrothermique seulement. Dans ce cas ces déformations sont aussi appelées, les déformations non mécaniques.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Les déformations hygrothermiques dans la sous couche i sont obtenues :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Les déformations résiduelles dans chaque sous couche i sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_{i \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}_i \quad (3.72)$$

Les contraintes résiduelles dans chaque sous couche i sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{i \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{i \text{ résiduelles}} \quad (3.73)$$

### 3.1.13.f Analyse des stratifiés multidirectionnels

Les effets hygrothermiques représentent la superposition de l'effet de température et de l'humidité.

Les efforts et les moments hygrothermiques sont définis par :

$$\begin{aligned} N_x^{HT} &= N_x^H + N_x^T \\ N_y^{HT} &= N_y^H + N_y^T \\ N_{xy}^{HT} &= N_{xy}^H + N_{xy}^T \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} M_x^{HT} &= M_x^H + M_x^T \\ M_y^{HT} &= M_y^H + M_y^T \\ M_{xy}^{HT} &= M_{xy}^H + M_{xy}^T \end{aligned} \quad (3.75)$$

Avec :

$$\begin{aligned} N_x^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{11}^i \alpha_x + Q_{12}^i \alpha_y + Q_{16}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{11}^i \beta_x + Q_{12}^i \beta_y + Q_{16}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i \\ N_y^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{12}^i \alpha_x + Q_{22}^i \alpha_y + Q_{26}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{12}^i \beta_x + Q_{22}^i \beta_y + Q_{26}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i \\ N_{xy}^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{16}^i \alpha_x + Q_{26}^i \alpha_y + Q_{66}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{16}^i \beta_x + Q_{26}^i \beta_y + Q_{66}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i \\ M_x^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{11}^i \alpha_x + Q_{12}^i \alpha_y + Q_{16}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i z_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{11}^i \beta_x + Q_{12}^i \beta_y + Q_{16}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i z_i \\ M_y^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{12}^i \alpha_x + Q_{22}^i \alpha_y + Q_{26}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i z_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{12}^i \beta_x + Q_{22}^i \beta_y + Q_{26}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i z_i \\ M_{xy}^{HT} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{16}^i \alpha_x + Q_{26}^i \alpha_y + Q_{66}^i \alpha_{xy}) \Delta T(i) t_i z_i + \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (Q_{16}^i \beta_x + Q_{26}^i \beta_y + Q_{66}^i \beta_{xy}) \Delta C(i) t_i z_i \end{aligned} \quad (3.76)$$

### 3.1.14. Equations de mouvement :

Les équations de mouvement sont tirées du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorie classique des stratifiés les équations de mouvements sont données par [90] [91] [92] [93] [94] [149] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= 0
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

Le système (3.78) devient en utilisant la définition des efforts et Moments donnés par (4.79) et (4.80) :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\
& A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) - \\
& B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \\
& A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \\
& B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - \left( \frac{\partial N^T}{\partial x}{}_{xx} + \frac{\partial N^T}{\partial y}{}_{xy} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\
& A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) - \\
& B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \\
& A_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{26} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \\
& B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - \left( \frac{\partial N^T}{\partial x}{}_{xy} + \frac{\partial N^T}{\partial y}{}_{yy} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \\
& B_{12} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
& B_{16} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + \\
& 2B_{16} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
& 2B_{26} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
& 2B_{66} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \\
& 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
& + B_{26} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + \\
& B_{22} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \\
& 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + q - \left( \frac{\partial^2 M^r}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M^r}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M^r}{\partial y^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.83}$$

## 3.2 Theorie de cisaillement transversale du premier ordre

### 3.2.1 Déplacements et déformations

Dans la théorie du premier ordre (FSDT), la troisième hypothèse de Kirchhoff est plus valable, c.-à-d., les sections normales ne restent plus perpendiculaires au plan moyen après déformation (voir Figure 3.5).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z.\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z.\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Où  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  sont des paramètres du plan moyen à déterminer, les déformations peuvent être calculées pour un point quelconque  $(x, y, z)$ .

Ce qui indique que  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations d'une normale transversale autour des axes  $x$  et  $y$  et axes.

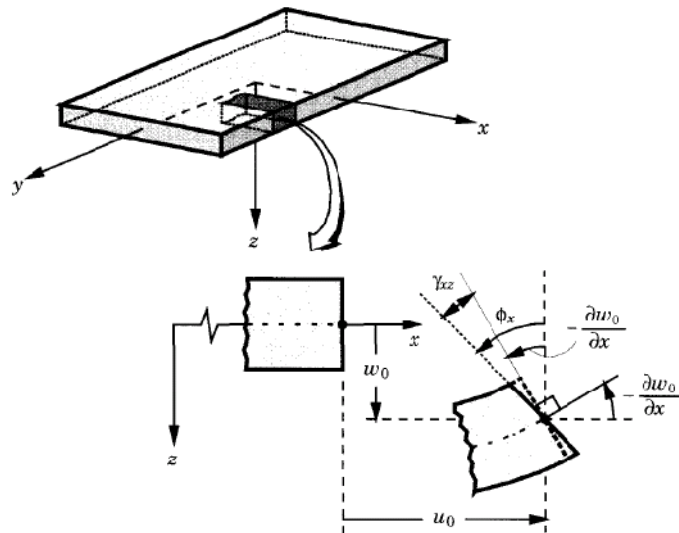


Figure 3.5 : Géométrie d'un bord de stratifié déformé et non-déformé sous les hypothèses de la théorie du cisaillement du premier ordre [149].

Les paramètres ( $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ ) sont appelés les déplacements généralisés pour des plaques épaisses.

Les déformations associées aux champs de déplacement sont données par [149] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

À noter que les déformations ( $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ ) sont linéaires à travers l'épaisseur, les déformations en cisaillement ( $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ ) sont constantes à travers l'épaisseur.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \tag{3.86.a}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.86.b)$$

Puisque les déformations en cisaillement sont constantes en fonction de l'épaisseur du stratifié, les contraintes de cisaillements sont par conséquence constantes aussi, donc pour satisfaire la condition du contrainte du cisaillement zéro sur les deux faces du stratifié un facteur de correction K est introduit pour satisfaire cette dernière.

Les résultantes en force transversale sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{c} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = K \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{array} \right\} dz \quad (3.87)$$

Les équations de mouvement sont tirées du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorie du cisaillement transversale du premier ordre les équations de mouvements sont données par [149] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$



Avec :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Le système (4.88) devient en utilisant la définition des efforts et Moments donnés par (3.87) (3.89) et (3.90) :

$$\begin{aligned} & A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\ & A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + B_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \\ & A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ & A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ & B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial N^r}{\partial x} + \frac{\partial N^r}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) + \\
& A_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{26} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + B_{26} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial N^r_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N^r_{xy}}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
& K.A_{55} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + K.A_{45} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + K.A_{45} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + \\
& K.A_{44} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q - \frac{\partial Q^r_x}{\partial x} + \frac{\partial Q^r_y}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{16} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& B_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \\
& K.A_{55} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) - K.A_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) - \left( \frac{\partial M^r_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N^r_{xy}}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& B_{12} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{26} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{26} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \\
& K.A_{45} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) - K.A_{44} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) - \left( \frac{\partial M^r}{\partial x} + \frac{\partial N^r}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

### 3.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) :

La théorie classique des stratifié et la théorie de premier ordre sont les théories les plus simple de la catégorie théorie de couche équivalente, et elles décrivent convenablement le comportement de la plupart des cas des stratifiés ,la théorie à ordre élevée représente bien le comportement des stratifiés ,elle n'exige pas des facteurs de correction cisaillement, et peut rapporter une distribution inter laminaires des contraintes plus précise, la raison d'augmenter les déplacements au 3<sup>ème</sup> degré par rapport à la cordonnée en épaisseur , par conséquence la variation du cisaillement transversal sera de même nature que le déplacement ,ceci évite l'utilisation du facteur de correction de cisaillement.

#### 3.3.1.a Contraintes Planes Généralisées

##### 3.3.1.a.1 Etat de contraintes planes généralisées

Un état de contrainte plane généralisé est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale où la deformation dans cet axe est nulle, le tenseur est caractérisé par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

### 3.3.1.a.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Rapportée aux axes principaux, la relation d'élasticité se met sous la forme [149] :

$$[Q]_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Ces constantes de rigidité réduites sont :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{44} &= G_{TT} \\ Q_{55} &= G_{LT} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (3.99)$$

### 3.3.1.a.3 La matrice de rigidité de chaque pli dans du stratifié

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme :

$$[Q']_{ij} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)] \\ Q'_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ Q'_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\ Q'_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.101)$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ Q'_{16} \\ Q'_{26} \\ Q'_{44} \\ Q'_{55} \\ Q'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 & 0 & 0 \\ c^3s & -c^3s & -cs(c^2 - s^2) & -2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ cs^3 & -c^3s & cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -cs & cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{44} \\ Q_{55} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

### 3.4 Théories de déformation en cisaillement de 3eme ordre de REDDY (TSDT) :

#### 3.4.1 Champs de déplacement :

La théorie de troisième ordre de plaque utilise les hypothèses suivantes :

- La section normale n'est plus perpendiculaire après déformation.
- La section normale n'est plus plane après la déformation (Voir Figure 3.5).

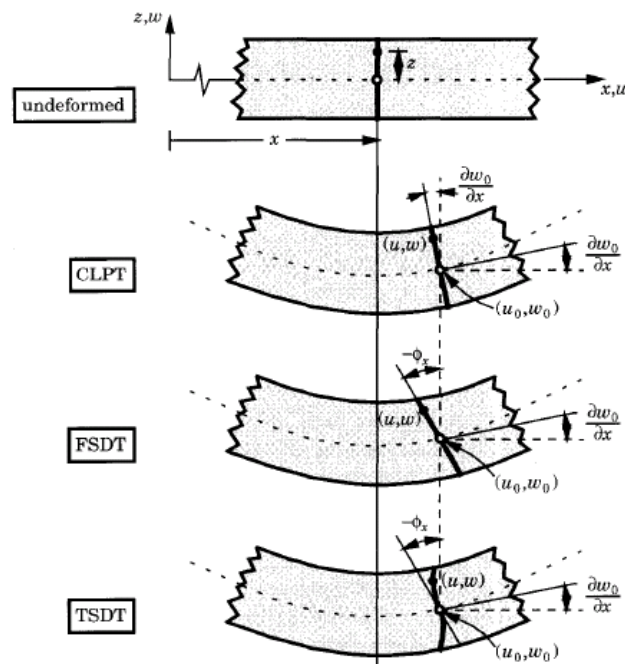


Figure 3.5 : Déformation d'une section transversal normal dans le cas de la théorie classique des stratifiés, théorie de cisaillement du premier ordre, théorie de cisaillement de troisième ordre [149].

Considérant le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\lambda_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\lambda_y(x, y) \\
 w &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.103}$$

Ou  $(u_0, v_0, w_0)$ ,  $(\phi_x, \phi_y)$ ,  $(\theta_x, \theta_y)$ ,  $(\lambda_x, \lambda_y)$  sont des paramètres à déterminer tel que :

$$u_0 = u(x, y, 0), v_0 = v(x, y, 0), w_0 = w(x, y, 0)$$

$$\begin{aligned} \phi_x &= \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}, \phi_y = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}, \theta_x = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=0} \\ \theta_y &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{z=0}, \lambda_x = \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right)_{z=0}, \lambda_y = \left( \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right)_{z=0} \end{aligned} \quad (3.104)$$

En imposant la condition limite libre pour la face supérieure et inférieure du stratifié :

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0, \sigma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$$

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2) = Q_{55} \gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) + Q_{45} \gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$$

$$\sigma_{yz}(x, y, \pm h/2) = Q_{45} \gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) + Q_{44} \gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0$$

$$\gamma_{xz}(x, y, \pm h/2) = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (2z\theta_x + 3z^2\lambda_x)_{z=\pm h/2} = 0$$

$$\gamma_{yz}(x, y, \pm h/2) = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (2z\theta_y + 3z^2\lambda_y)_{z=\pm h/2} = 0$$

$$\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (-h\theta_x + 3\frac{h^2}{4}\lambda_x) = 0, \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + (h\theta_x + 3\frac{h^2}{4}\lambda_x) = 0$$

$$\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (-h\theta_y + 3\frac{h^2}{4}\lambda_y) = 0, \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + (h\theta_y + 3\frac{h^2}{4}\lambda_y) = 0$$

$$\lambda_x = -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \lambda_y = -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \theta_x = 0, \theta_y = 0 \quad (3.105)$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.106)$$

### 3.4.2 Champs de déformation et contrainte :

En remplaçant le champ de déplacement (3.106) dans le système des lois de déformation (3.07) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{cases} + z \begin{cases} \varepsilon^1_{xx} \\ \varepsilon^1_{yy} \\ \gamma^1_{xy} \end{cases} + z^3 \begin{cases} \varepsilon^3_{xx} \\ \varepsilon^3_{yy} \\ \gamma^3_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon^1_{xx} \\ \varepsilon^1_{yy} \\ \gamma^1_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{cases}, \quad (3.107.a)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^3_{xx} \\ \varepsilon^3_{yy} \\ \gamma^3_{xy} \end{cases} = -c_1 \begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{cases} + z^2 \begin{cases} \gamma^2_{yz} \\ \gamma^2_{xz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma^2_{yz} \\ \gamma^2_{xz} \end{cases} = -c_2 \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases}$$

(3.107.b)

Avec :

$$c_1 = 4/3 h^2$$

$$c_2 = 3C_1$$



### 3.4.3 Matrice de passage de déformation et contrainte :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{LT'} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{TT'} \\ \sigma_{LT'} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{TT'} \\ \varepsilon_{LT'} \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{TT'} \\ \varepsilon_{LT'} \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

### 3.4.4 Equation de mouvement :

Les équations de mouvement sont tirées du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorie d'ordre élevées les équations du mouvements sont données par [149], qui implique l'énergie de déplacement virtuel et le travail virtuel résultant des forces appliquées, et l'énergie cinétique virtuel :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \overline{Q_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Q_y}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + \\
\frac{\partial}{\partial y} (N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y}) + c1 (\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2}) + q &= 0 \\
\frac{\partial \overline{M_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M_{xy}}}{\partial y} - \overline{Q_x} &= 0 \\
\frac{\partial \overline{M_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M_{yy}}}{\partial y} - \overline{Q_y} &= 0
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Avec :

$$\overline{M_{ij}} = M_{ij} - c1 P_{ij}, (i, j = 1, 2, 6), \overline{Q_i} = Q_{ij} - c2 R_{ij}, (i, j = 4, 5)$$

Les résultantes des contraintes sont reliées à la déformation par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^3\} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^2\} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q'{}^k_{ij} \cdot (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q'{}^k_{ij} \cdot (1, z^2, z^4) dz, \quad i, j = 4, 5$$

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i - z_{i-1}) Q_{ij}^n \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i^2 - z_{i-1}^2) Q_{ij}^n \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i^3 - z_{i-1}^3) Q_{ij}^n \\
E_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i^4 - z_{i-1}^4) Q_{ij}^n \\
F_{ij} &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i^5 - z_{i-1}^5) Q_{ij}^n \\
H_{ij} &= \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} (z_i^7 - z_{i-1}^7) Q_{ij}^n
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Avec :

$$\{[N], [M], [P]\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} (1, z, z^3) dz \tag{3.115}$$

$$\{[Q], [R]\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} (1, z^2) dz \tag{3.116}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

### 3.4.5 Solution de Navier :

Les équations de mouvement de la théorie de troisième ordre de Reddy présentées dans le système (3.112), dans ce paragraphe on va développer les solutions de Navier pour un stratifié antisymétrique croisée simplement supporté, pour le cas déjà citer les constante de rigidité suivantes sont égales à zéro :

$$\begin{aligned}
A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \\
E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = 0
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u_0(x, 0) = \phi_x(x, 0) = u_0(x, b) = \phi_x(x, b) = 0 \\ v_0(0, y) = \phi_y(0, y) = v_0(a, y) = \phi_y(a, y) = 0 \\ w_0(x, 0) = w_0(x, b) = w_0(0, y) = w_0(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} N_{xx}(0, y) = N_{xx}(a, y) = N_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, b) = 0 \\ \overline{M_{xx}}(0, y) = \overline{M_{xx}}(a, y) = \overline{M_{yy}}(x, 0) = \overline{M_{yy}}(x, b) = 0 \end{aligned}$$

Les inconnus sont exprimés en termes de double séries :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \\ w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ \phi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\ \phi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Avec :  $\alpha = m\pi / a$ ,  $\beta = n\pi / b$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{array} \right\} \quad (3.121)$$

Le chargement mécanique transversal est aussi développé en double séries comme suite :

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ Q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \end{aligned} \quad (3.122)$$

Les coefficients du vecteur  $\Delta$  exprimés dans la formule (3.121) sont obtenus à travers la résolution du système suivant (cas d'un chargement mécanique) :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\ S_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\ S_{13} &= -c_1 [E_{11}\alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66})\beta^2] \alpha \\ S_{14} &= \hat{B}_{11}\alpha^2 + \hat{B}_{66}\beta^2 \\ S_{15} &= (\hat{B}_{12} + \hat{B}_{66})\alpha\beta \\ S_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ S_{23} &= -c_1 [E_{22}\beta^2 + (E_{12} + 2E_{66})\alpha^2] \beta \\ S_{24} &= S_{15} \\ S_{25} &= \hat{B}_{66}\alpha^2 + \hat{B}_{22}\beta^2 \\ S_{33} &= \bar{A}_{55}\alpha^2 + \bar{A}_{44}\beta^2 + c_1^2 [H_{11}\alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66})\alpha^2\beta^2 + H_{22}\beta^4] \\ S_{34} &= \bar{A}_{55}\alpha - c_1 [\hat{F}_{11}\alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha\beta^2] \\ S_{35} &= \bar{A}_{44}\beta - c_1 [\hat{F}_{22}\beta^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha^2\beta] \\ S_{44} &= \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 \\ S_{45} &= (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\alpha\beta \\ S_{55} &= \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66}\alpha^2 + \bar{D}_{22}\beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ij} &= A_{ij} - c_1 D_{ij}, \hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij}, \hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} & (i, j = 1, 2, 6) \\ \hat{F}_{ij} &= F_{ij} - c_1 H_{ij}, \bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_1 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_1 D_{ij} + c_1^2 F_{ij} & (i, j = 1, 2, 6) \\ \bar{D}_{ij} &= \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} = D_{ij} - 2c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij} & (i, j = 1, 2, 6) \\ \bar{A}_{ij} &= \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} = A_{ij} - 2c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij} & (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (3.124)$$

Pour le cas d'un chargement hygrothermomecanique les coefficients du vecteur  $\Delta$  exprimés dans la formule (3.121) sont obtenus à travers la résolution du système (3.125) :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha N_{mn}^{T1} - \alpha N_{mn}^{C1} \\ -\beta N_{mn}^{T2} - \beta N_{mn}^{C2} \\ Q_{mn} \\ -\alpha \overline{M}_{mn}^{T1} - \alpha \overline{M}_{mn}^{C1} \\ -\beta \overline{M}_{mn}^{T2} - \beta \overline{M}_{mn}^{C2} \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

Où :

$$\begin{aligned} N^{T(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z). dz \\ M^{T(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z). z. dz \\ P^{T(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\alpha_{(a)}\}^k \Delta T(x, y, z). z^3. dz \\ N^{C(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). dz \\ M^{C(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). z. dz \\ P^{C(a)}_{mn} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q_i]^k \{\beta_{(a)}\}^k \Delta C(x, y, z). z^3. dz^* \end{aligned} \quad (3.126)$$

avec :  $(a) = xx, yy, xy$

$$\begin{aligned} \overline{M}^{T(a)}_{mn} &= M^{T(a)}_{mn} - \frac{4}{3h^2} P^{T(a)}_{mn} \\ \overline{M}^{C(a)}_{mn} &= M^{C(a)}_{mn} - \frac{4}{3h^2} P^{C(a)}_{mn} \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$T^i_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b T^i \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (3.128)$$

$$\Delta T(x, y, z), \Delta C(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f(z, T), f(z, C)) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (3.129)$$

Les contraintes relatives à chaque sous couche peut être calculer par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}^i \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}^i \Delta T(x, y, z) - \begin{bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}^i \Delta C(x, y, z) \right)$$

Ou :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} + z^3 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} (R_{mn}^{xx} + zS_{mn}^{xx} + c_1 z^3 O_{mn}^{xx}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ (R_{mn}^{yy} + zS_{mn}^{yy} + c_1 z^3 O_{mn}^{yy}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ (R_{mn}^{xy} + zS_{mn}^{xy} + c_1 z^3 O_{mn}^{xy}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{bmatrix} O_{mn}^{xx} \\ O_{mn}^{yy} \\ O_{mn}^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2\alpha\beta W_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}^i \left( \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} + z^2 \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q'_{44} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}^i \left( \begin{bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Comme citer dans le chapitre de la recherche bibliographique, il existent d'autres théories d'ordre élevées, on peut citer ces dernières par apport à l'écriture unifiés exprimer par le système (3.132) :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\delta w}{\delta x} + \phi(z) \left[ \phi_x(x, y) + \frac{\delta w}{\delta x} \right] \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\delta w}{\delta y} + \phi(z) \left[ \phi_y(x, y) + \frac{\delta w}{\delta y} \right] \\ W(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.132)$$

$\phi(z)$  : est la fonction de distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque.

Ambartsumian [5] : 
$$\phi(z) = \frac{h^2}{8} Z - \frac{1}{6} Z^3 \quad (3.133)$$

Reissner [3] : 
$$\phi(z) = \frac{5}{4} Z - \frac{5}{3h^2} Z^3 \quad (3.134)$$

Touratier [32] : 
$$\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \quad (3.135)$$

Karama [9] : 
$$\phi(z) = Z e^{-\frac{2z^2}{h^2}} \quad (3.136)$$

Reddy [7] : 
$$\phi(z) = Z - \frac{4}{3h^2} Z^3 \quad (3.137)$$

Aydogdu [23] : 
$$\phi(z) = Z \alpha^{-\frac{2(Z^2/h^2)}{\ln(\alpha)}} \quad (3.138)$$

El Meiche, Tounsi [24] : 
$$\phi(z) = \frac{h}{\cosh(\pi/2)-1} \frac{\pi}{h} \sinh\left(\frac{\pi Z}{h}\right) - \frac{1}{\cosh(\pi/2)-1} Z \quad (3.139)$$

Atmane, Tounsi [30] : 
$$\phi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)-1} Z - \frac{h}{\cosh(\pi/2)-1} \frac{\pi}{h} \sinh\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \quad (3.140)$$

Shimpi [25] : 
$$\phi(z) = \frac{1}{4} Z - \frac{5}{3h^2} Z^3 \quad (3.141)$$



$$\text{Soldatos [10] : } \quad \phi(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.142)$$

$$\text{Belaid [28] : } \quad \phi(z) = \frac{\cos(1/2)}{\cos(1/2)-1} Z - \frac{h}{\cosh(1/2)-1} \sin\left(\frac{Z}{h}\right) \quad (3.143)$$

$$\text{Mantari [27] : } \quad \phi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{1/2 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} z \quad (3.144)$$

$$\text{Ferreira [26] : } \quad \phi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (3.145)$$

$$\text{Ait Yahia [29] : } \quad \phi(z) = \frac{3}{13} \left( \frac{1}{2} \cdot z \cdot \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + 1 \right) + \frac{10}{13} \cdot z \cdot \left( 1 - \frac{16z^4}{5h^4} \right) \quad (3.146)$$

$$\text{A.Mahi [89] : } \quad \phi(z) = z \left[ 1 - \alpha \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \beta \left( \frac{z}{h} \right)^4 \right] \quad (3.147)$$

La relation (3.148) contrainte déformation prend en considération le cisaillement transversal et l'effet de la température :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \cdot \Delta T(x, y, z) - \beta_x \cdot \Delta C(x, y, z) \\ \varepsilon_y - \alpha_y \cdot \Delta T(x, y, z) - \beta_y \cdot \Delta C(x, y, z) \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \cdot \Delta T(x, y, z) - \beta_{xy} \cdot \Delta C(x, y, z) \end{bmatrix}_i \quad (3.148)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} Q'_{44} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}_i$$

La matrice  $Q'_{ij}$  est la matrice de rigidite de la sous couche  $i$ ,  $T(x,y,z)$  est la distribution de temperature.

Les résultantes, les moments sont donnees par (3.149) :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [B^a] \\ [B] & [D] & [D^a] \\ [B^a] & [D^a] & [F^a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^3\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \\ \{S^T\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^C\} \\ \{M^C\} \\ \{S^C\} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q\} = [A^a] \{\gamma\}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$B^a = \begin{bmatrix} B^a_{11} & B^a_{12} & B^a_{16} \\ B^a_{12} & B^a_{22} & B^a_{26} \\ B^a_{16} & B^a_{26} & B^a_{66} \end{bmatrix}, D^a = \begin{bmatrix} D^a_{11} & D^a_{12} & D^a_{16} \\ D^a_{12} & D^a_{22} & D^a_{26} \\ D^a_{16} & D^a_{26} & D^a_{66} \end{bmatrix},$$

$$F^a = \begin{bmatrix} F^a_{11} & F^a_{12} & F^a_{16} \\ F^a_{12} & F^a_{22} & F^a_{26} \\ F^a_{16} & F^a_{26} & F^a_{66} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}, A^a = \begin{bmatrix} A^a_{44} & A^a_{45} \\ A^a_{45} & A^a_{55} \end{bmatrix}$$

$$N^T = \begin{bmatrix} N^T_x \\ N^T_y \\ N^T_{xy} \end{bmatrix}, M^T = \begin{bmatrix} M^T_x \\ M^T_y \\ M^T_{xy} \end{bmatrix}, S^T = \begin{bmatrix} S^T_x \\ S^T_y \\ S^T_{xy} \end{bmatrix}$$

(3.149)

$$N^C = \begin{bmatrix} N^C_x \\ N^C_y \\ N^C_{xy} \end{bmatrix}, M^C = \begin{bmatrix} M^C_x \\ M^C_y \\ M^C_{xy} \end{bmatrix}, S^C = \begin{bmatrix} S^C_x \\ S^C_y \\ S^C_{xy} \end{bmatrix}$$

Les coefficients de rigidite sont definit en terme des coefficient de rigidite reduit est donne par les fomules :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} Q'_{ij} \cdot (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$(B^a_{ij}, D^a_{ij}, F^a_{ij}) = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} Q'_{ij} \cdot \phi(z) (1, z, \phi(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.150)$$

$$(A^a_{ij}) = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} Q'_{ij} \cdot (\phi'(z))^2 dz, \quad i, j = 4, 5$$

Ou les résultantes, les moments dus au chargement thermiques et hygroscopique sont données par (3.151) :

$$\begin{bmatrix} N^T_x, M^T_x, S^T_x \\ N^T_y, M^T_y, S^T_y \\ N^T_{xy}, M^T_{xy}, S^T_{xy} \end{bmatrix}_i = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_i \cdot (1, z, \phi(z)) \cdot \Delta T(x, y, z) \cdot dz \quad (3.151)$$

$$\begin{bmatrix} N^C_x, M^C_x, S^C_x \\ N^C_y, M^C_y, S^C_y \\ N^C_{xy}, M^C_{xy}, S^C_{xy} \end{bmatrix}_i = \sum_{i=1}^{(h/dz)+1} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_i \cdot (1, z, \phi(z)) \cdot \Delta C(x, y, z) \cdot dz$$

### 3.4.6 Equation de mouvement

Les équations de mouvement sont tire du principe de déplacement virtuel, pour le cas de la théorise d'ordre élevées les équations de mouvements sont donne par [149], qui implique l'énergie de déplacement virtuel et le travail virtuel résultant des forces appliquées, et l'énergie cinétique virtuel :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= 0 \\
\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} &= 0 \\
\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - Q_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{3.152}$$

En substituant l'équation (3.149) dans (3.152) on obtient le système suivant :

$$[L]\{\Delta\} = \{f\} \tag{3.153}$$

Avec L est une matrice symétrique des opérateurs différentiels.

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}d_{11} + 2A_{16}d_{12} + A_{66}d_{22} \\
L_{12} &= A_{16}d_{11} + (A_{12} + A_{66})d_{12} + A_{26}d_{22} \\
L_{13} &= B_{11}d_{111} - 3B_{16}d_{112} - (B_{12} + 2B_{66})d_{122} - B_{26}d_{222} \\
L_{14} &= B_{11}^a d_{11} + 2B_{16}^a d_{12} + B_{66}^a d_{22} \\
L_{15} &= B_{16}^a d_{11} + (B_{12}^a + B_{66}^a)d_{12} + B_{26}^a d_{22} \\
L_{22} &= A_{66}d_{11} + 2A_{26}d_{12} + A_{22}d_{22} \\
L_{23} &= -B_{16}d_{111} - (B_{12} + 2B_{66})d_{112} - 3B_{26}d_{122} - B_{22}d_{222} \\
L_{24} &= L_{15} \\
L_{25} &= B_{66}^a d_{11} + 2B_{26}^a d_{12} + B_{22}^a d_{22} \\
L_{33} &= D_{11}d_{1111} + 4D_{16}d_{1112} + 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122} + 4D_{26}d_{1122} \\
&\quad + 4D_{26}d_{1222} + D_{22}d_{2222} \\
L_{34} &= -D_{11}^a d_{111} - 3D_{16}^a d_{112} - (D_{12}^a + 2D_{66}^a)d_{122} - D_{26}^a d_{222} \\
L_{35} &= -D_{16}^a d_{111} - (D_{12}^a + 2D_{66}^a)d_{112} - 3D_{26}^a d_{122} - D_{22}^a d_{222} \\
L_{44} &= F_{11}^a d_{11} + 2F_{16}^a d_{12} + F_{66}^a d_{22} - A_{44}^a \\
L_{45} &= F_{16}^a d_{11} + (F_{12}^a + F_{66}^a)d_{12} + F_{26}^a d_{22} - A_{45}^a \\
L_{55} &= F_{66}^a d_{11} + 2F_{26}^a d_{12} + F_{22}^a d_{22} - A_{55}^a
\end{aligned} \tag{3.154}$$

{f} est un vecteur de force général donne par :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N^T_{xx} + N^C_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N^T_{xy} + N^C_{xy} \right) \\
 f_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N^T_{xy} + N^C_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N^T_{yy} + N^C_{yy} \right) \\
 f_3 &= q - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( M^T_{xx} + M^C_{xx} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( M^T_{xy} + M^C_{xy} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( M^T_{yy} + M^C_{yy} \right) \quad (3.155) \\
 f_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( S^T_{xx} + S^C_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S^T_{xy} + S^C_{xy} \right) \\
 f_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( S^T_{xy} + S^C_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S^T_{yy} + S^C_{yy} \right)
 \end{aligned}$$

Les inconnus sont exprimés en termes de séries double :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\
 v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \\
 w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\
 \phi_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn} \cdot \cos(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \\
 \phi_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn} \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)
 \end{aligned} \quad (3.156)$$

Avec :  $\alpha = m\pi / a$ ,  $\beta = m\pi / b$

Ou  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn})$  sont des inconnus arbitraire à déterminer et qui satisfait le système (3.153).

### 3.5 Equation de Fick :

Soit une plaque d'épaisseur  $h$ , exposée à la même humidité sur ses six faces. Le contenu de l'humidité et de la température dans la plaque varie suivant  $z$  :

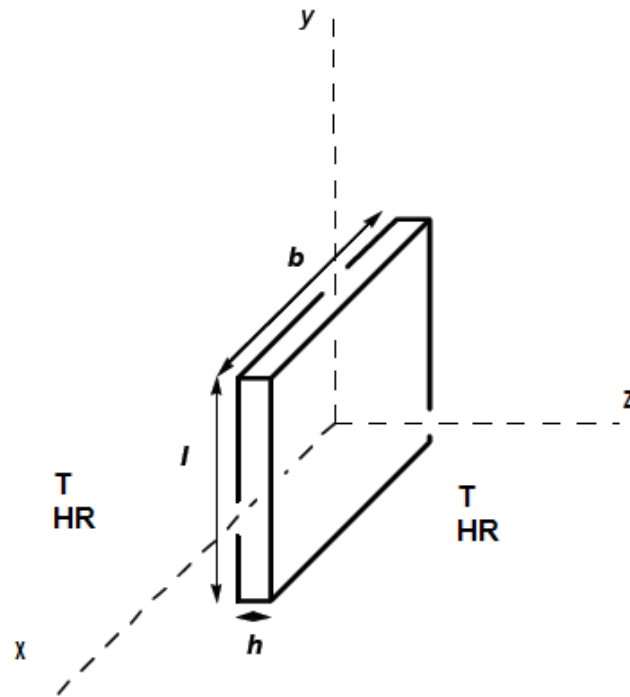


Figure 3.6 : Géométrie représentative d'une plaque composite.

La distribution de concentration est décrite par l'équation de Fick :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (3.157)$$

Les conditions initiales et les conditions aux limites pour le cas d'absorption sont :

$$t = 0 \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \quad \longrightarrow C = C_0 \quad (3.158)$$

$$t = 0 \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad \longrightarrow C = C_s$$

Springer [106] [123] démontra que la température approche l'équilibre  $10^6$  fois plus vite que la concentration d'humidité .par exemple, pour une plaque composite d'épaisseur 12.7mm, type graphite fibrite T-300/1034, exposé à 90% d'air humide et à une température de 350°K, la température à travers la plaque devient uniforme au bout de 15 secondes ; cependant la concentration atteint l'équilibre au bout de 13 ans. C'est ainsi que dans plusieurs applications, la température à l'intérieur du matériau peut être prise comme étant, la température ambiante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (3.159)$$

La solution de l'équation différentielle pour le cas d'absorption est donnée par [106] [123]:

$$\frac{C - C_0}{C_s - C_0} = 1 - \frac{4}{\Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\Pi z}{h} \exp \left[ -\frac{D_z (2n+1)^2 \Pi^2 t}{h^2} \right] \quad (3.160)$$

La prise en eau Mt donnée par l'équation (3.161) :

$$\frac{M_t}{M_s} = 1 - \frac{8}{\Pi^2} * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} * \exp \left( -D \frac{(2n+1)^2}{h^2} \Pi^2 t \right) \quad (3.161)$$

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de détaillé les équations permettant la modélisation des plaques épaisses et d'intégrer la modélisation des phénomènes hygrothermiques dans les lois de comportement des composites, ce qui permet de passer à la prochaine étape qui est l'élaboration du code de calcul.

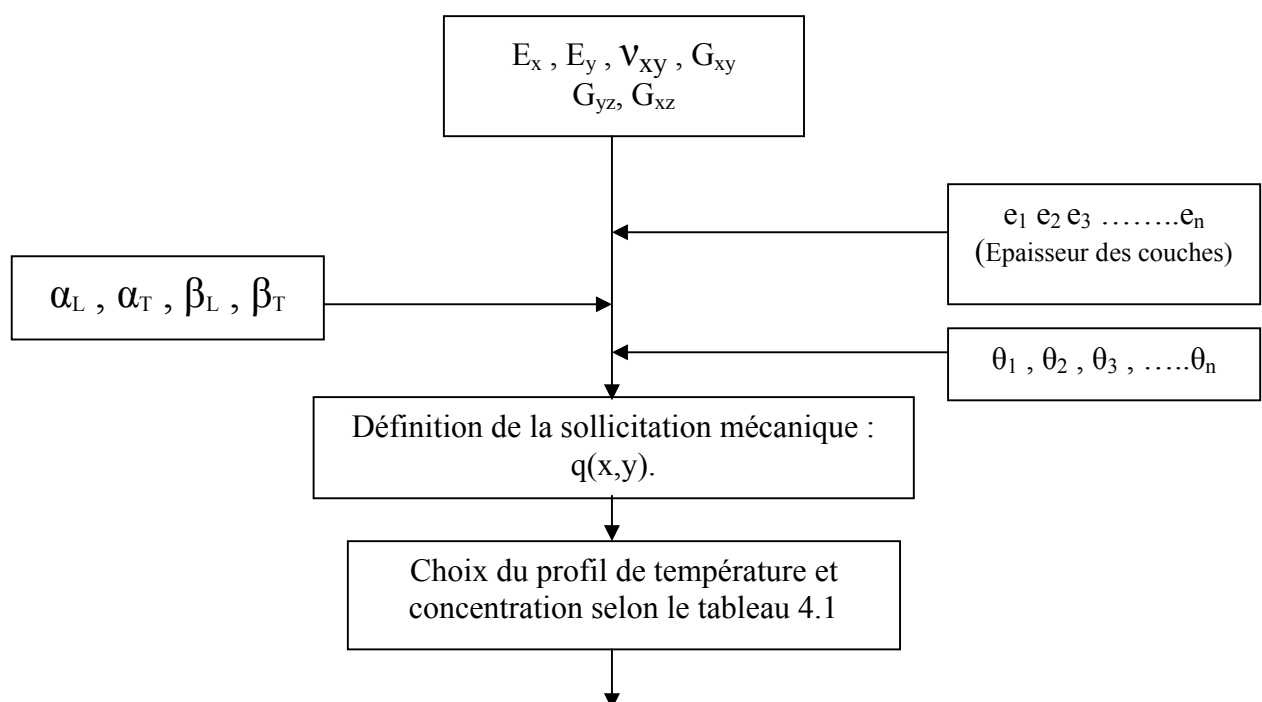
## CHAPITRE 4

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

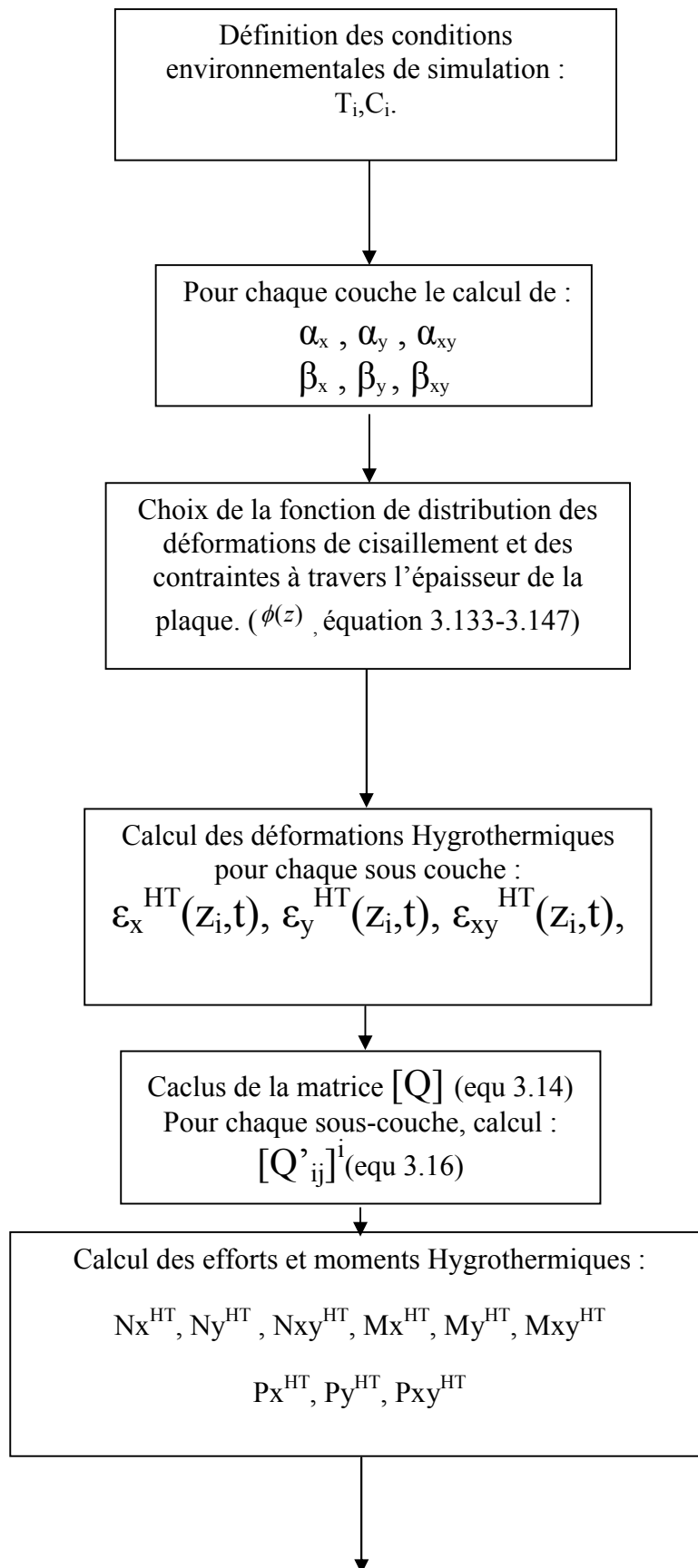
Dans ce chapitre on va présenter les résultats obtenus à travers le code de calcul développer durant ce travail. Diverses simulations numériques seront présentées pour différents cas physiques traités, plusieurs programmes Fortran ont été développés afin de simuler le comportement des plaques composites épaisses.

#### 4.1 Simulations des plaques épaisses sous chargement Hydrothermique

Un premier programme a été développé appelé « Thick-compo-modèle » afin de simuler le comportement des plaques épaisses en utilisant les différents modèles cités dans le paragraphe 3.4.5 sous un chargement thermique ou hydrothermique selon l'organigramme 4.1 le tableau 4.1 présentés ci-dessous :







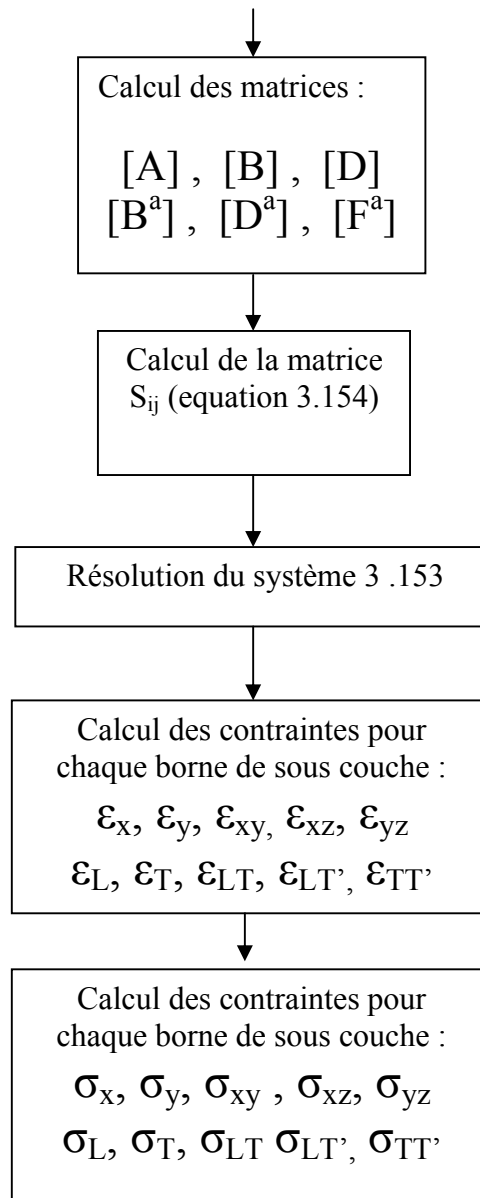


Figure 4.1 : Organigramme « Thick-compo-modele » de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques.

N°	Modèle	Modèle Thermique-Hygroscopique	Conditions de simulation
1	Distribution Linéaire [67]	$\Delta T = 2T_0 \cdot \left( \frac{Z}{h} \right)$	$T_0 = 10^\circ\text{C}$
2	Distribution Linéaire [68]	$\Delta T = T_0 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{Z}{h} \right)$	$T_0 = 10^\circ\text{C}$
3	Distribution Parabolique [69]	$\Delta T(Z) = T_0 \cdot \left( 1 - \frac{4Z^2}{h^2} \right)$	$T_0 = 10^\circ\text{C}$
4	Distribution Sinusoïdale [30]	$\Delta T(Z) = (T_0 + zT_1) \cdot T(x, y)$ $T(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $T_0 = \frac{1}{2}(T^+ + T^-) \quad , \quad T_1 = \frac{1}{2h}(T^+ - T^-)$	$T^+ = 10^\circ\text{C}$ $T^- = 15^\circ\text{C}$
5	Distribution Sinusoïdale [38]	$\Delta T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} \cdot T_2(x, y) + \frac{\phi(z)}{h} T_3(x, y)$ $\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\phi(z) = \frac{\cos(1/2)}{\cos(1/2) - 1} Z - \frac{h}{\cosh(1/2) - 1} \sin\left(\frac{Z}{h}\right)$	$\begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix} ^\circ\text{C}$
6	Distribution Sinusoïdale [23]	$T(x, y) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$	$T_0 = 10^\circ\text{C}$
7	Distribution Sinusoïdale [89]	$\Delta T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} \cdot T_2(x, y) + \frac{\phi(z)}{h} T_3(x, y)$ $\Delta C(x, y, z) = C_1(x, y) + \frac{z}{h} \cdot C_2(x, y) + \frac{\phi(z)}{h} C_3(x, y)$ $\begin{Bmatrix} T_i \\ C_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{C}_i \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)$	$\begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.12 \end{Bmatrix}$
8	Distribution Sinusoïdale [92]	$\Delta T(x, y, z) = \frac{z}{h} \cdot T_2(x, y)$ $\Delta C(x, y, z) = \frac{z}{h} \cdot C_2(x, y)$ $\begin{Bmatrix} T_i \\ C_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{C}_i \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$	$\bar{T}_2 = 10^\circ\text{C}$ $\bar{C}_2 = 0.25$
9	Distribution Sinusoïdale [89]	$\Delta T(x, y, z) = z \cdot T_2(x, y) + \phi(z) T_3(x, y)$ $\Delta C(x, y, z) = z \cdot C_2(x, y) + \phi(z) C_3(x, y)$ $\begin{Bmatrix} T_i \\ C_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_i \\ \bar{C}_i \end{Bmatrix} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)$	$\bar{T}_2 = 10^\circ\text{C}$ $\bar{T}_3 = 15^\circ\text{C}$ $\bar{C}_2 = 0.25$ $\bar{C}_3 = 0.12$

10	Distribution Sinusoïdale [89]	$\Delta T(x, y, z) = (T - \bar{T}_1)\phi(z)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)$	$T = 10^\circ C$ $\bar{T}_1 = 15^\circ C$
11	Distribution Sinusoïdale [89]	$\Delta T(x, y, z) = (T - \bar{T}_1)\phi(z)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\Delta C(x, y, z) = C.\phi(z).\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ $\phi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)$	$T = 10^\circ C$ $\bar{T}_1 = 15^\circ C$ $C = 0.25$

Tableau 4.1 : Modèle de simulation relative au programme « Thick-compo-modèle ».

Les simulations ont été faite pour un stratifié en T300/5208 de 03 couches ,1mm chaque une, configuration [45,-45,45], stratifié rectangulaire avec a/b=2, a/h=4, pour les conditions de simulation, voir la colonne « condition de simulation » du tableau 4.1.

Afin de simplifier les résultats et faciliter le traçage des graphes les coefficients ci-dessous sont utilisés.

$$SIG_{xx} = \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right), \quad SIG_{yy} = \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right), \quad SIG_{xy} = \sigma_{xy}(0, 0, z)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right)$$

$$SIG_{xz} = \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h}{b \cdot 10^5}\right), \quad SIG_{yz} = \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right)\left(\frac{h}{b \cdot 10^5}\right)$$

#### 4.1.A- Modèle hygrothermique 01 :

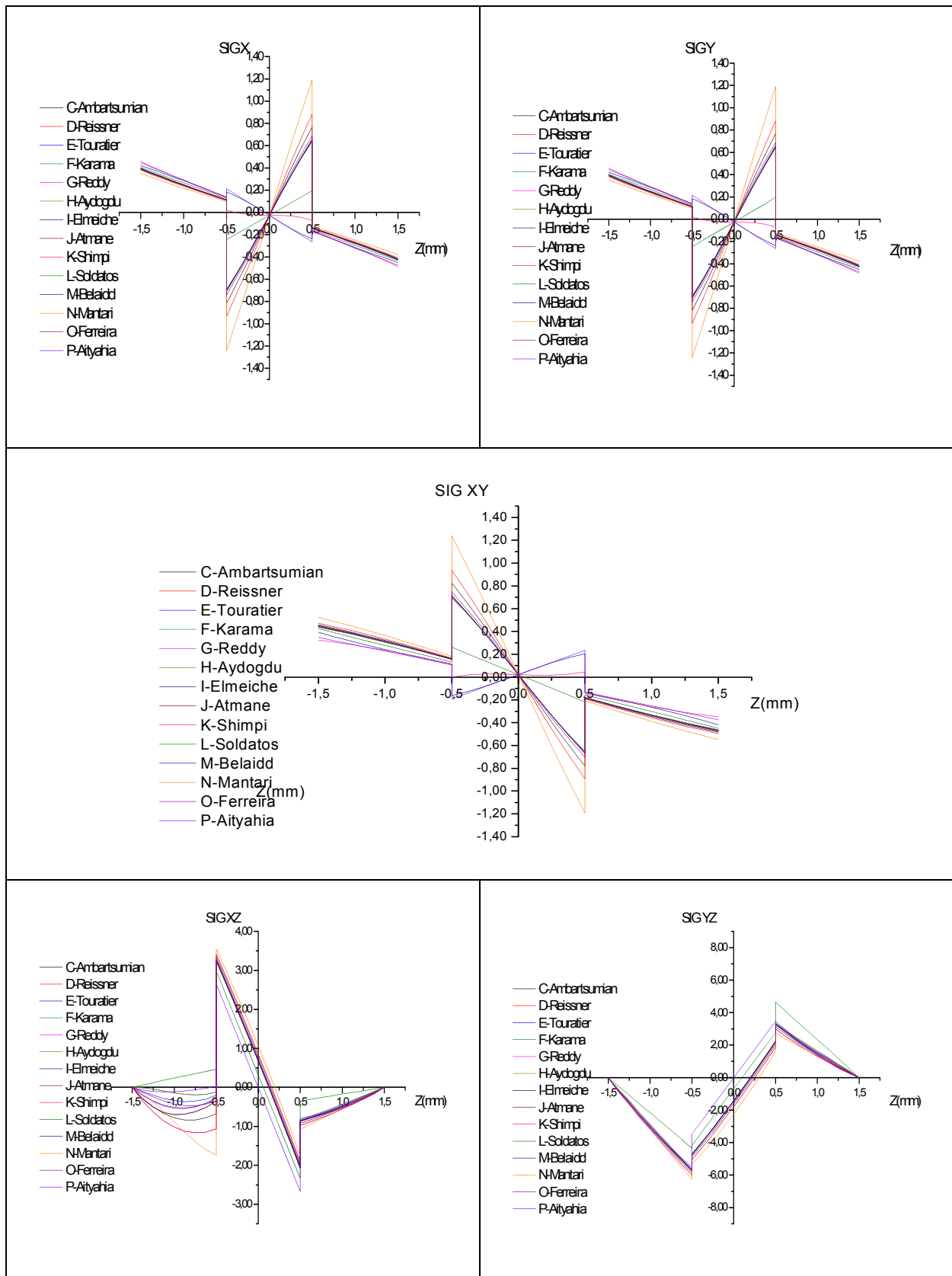


Figure 4.2 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 01.

#### 4.1.B-Modèle hygrothermique 02 :

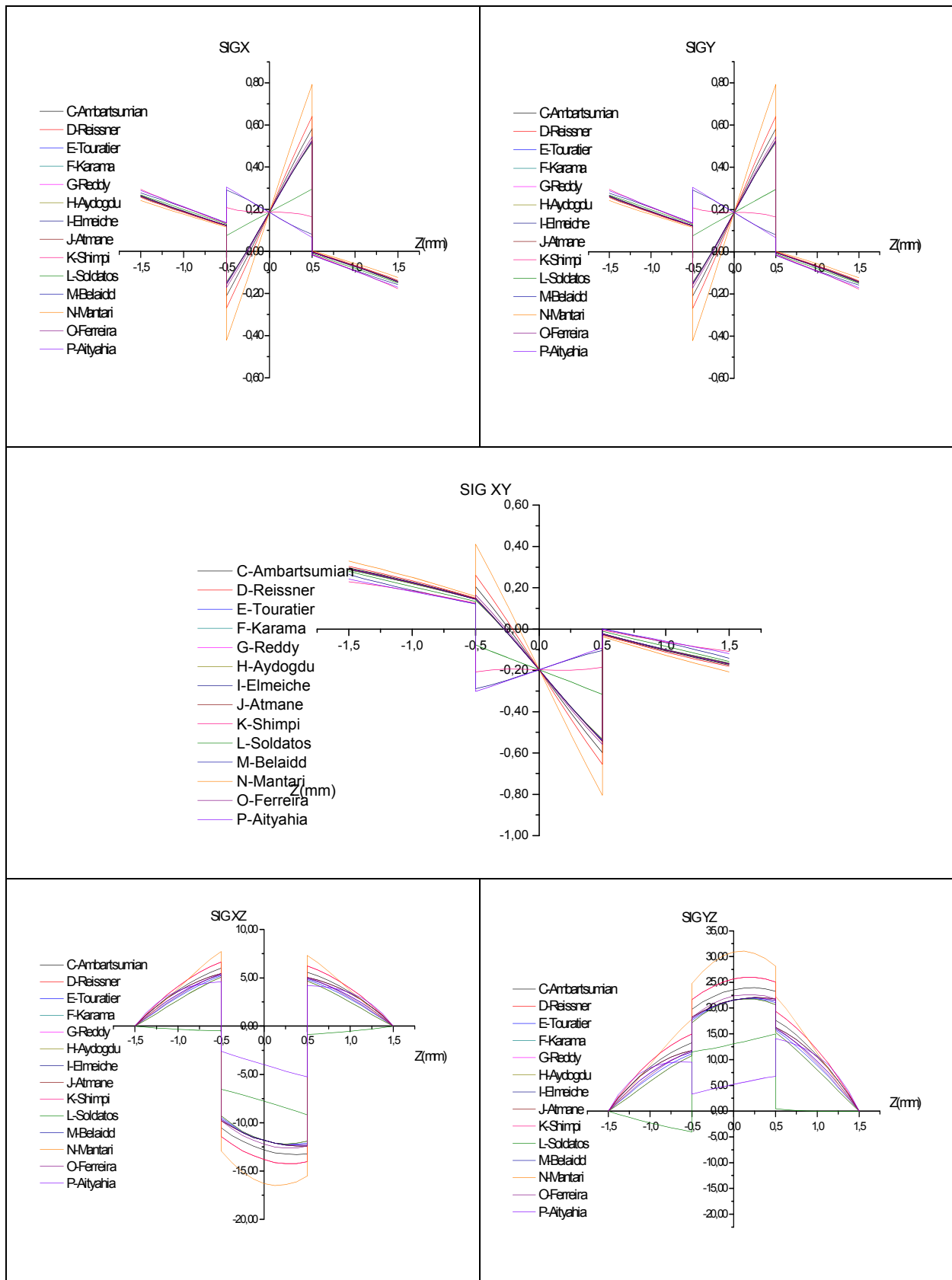


Figure 4.3: Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 02.

4.1.C-Modèle hygrothermique 03 :

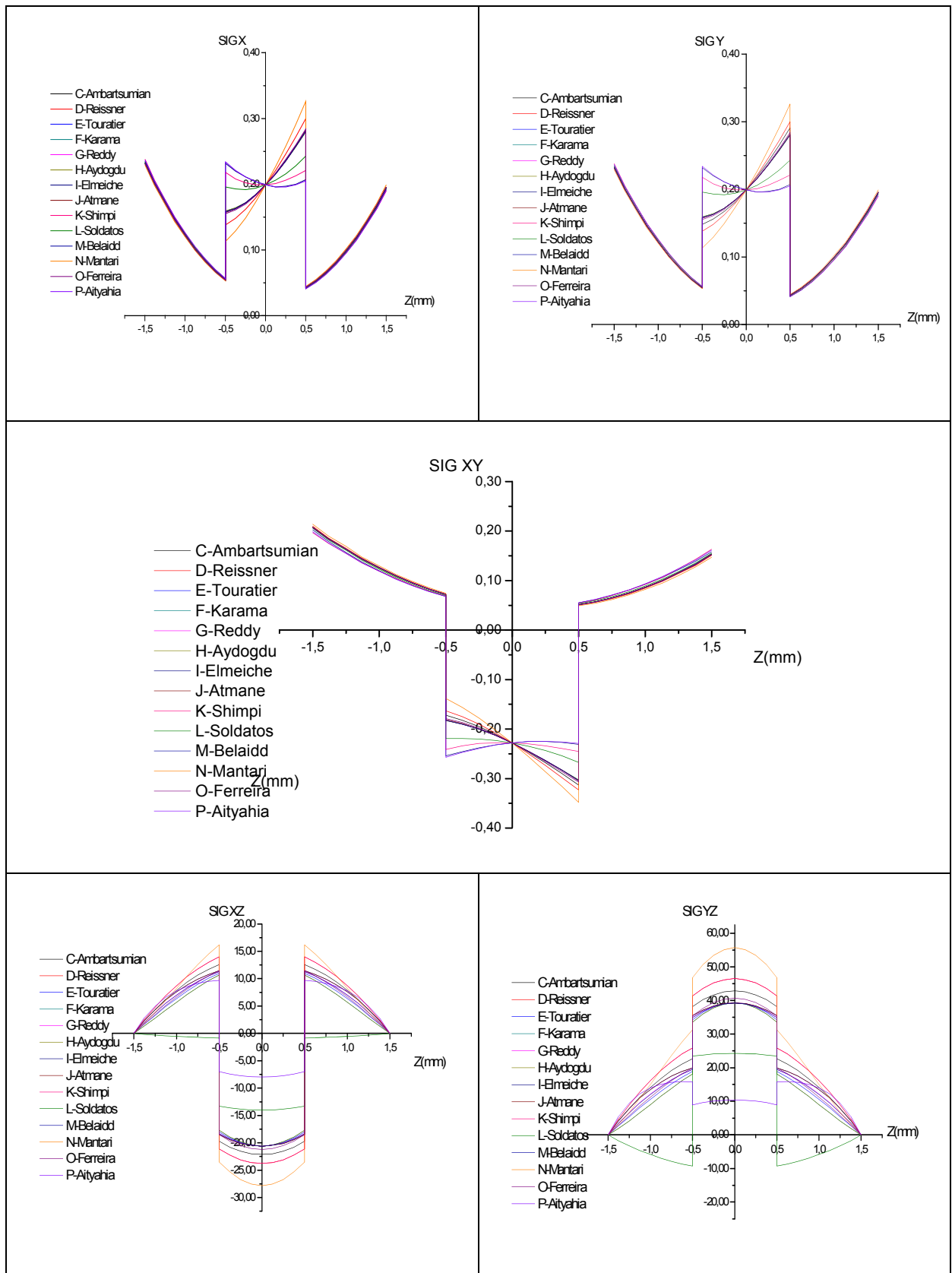


Figure 4.4 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 03

#### 4.1.D-Modèle hygrothermique 04 :

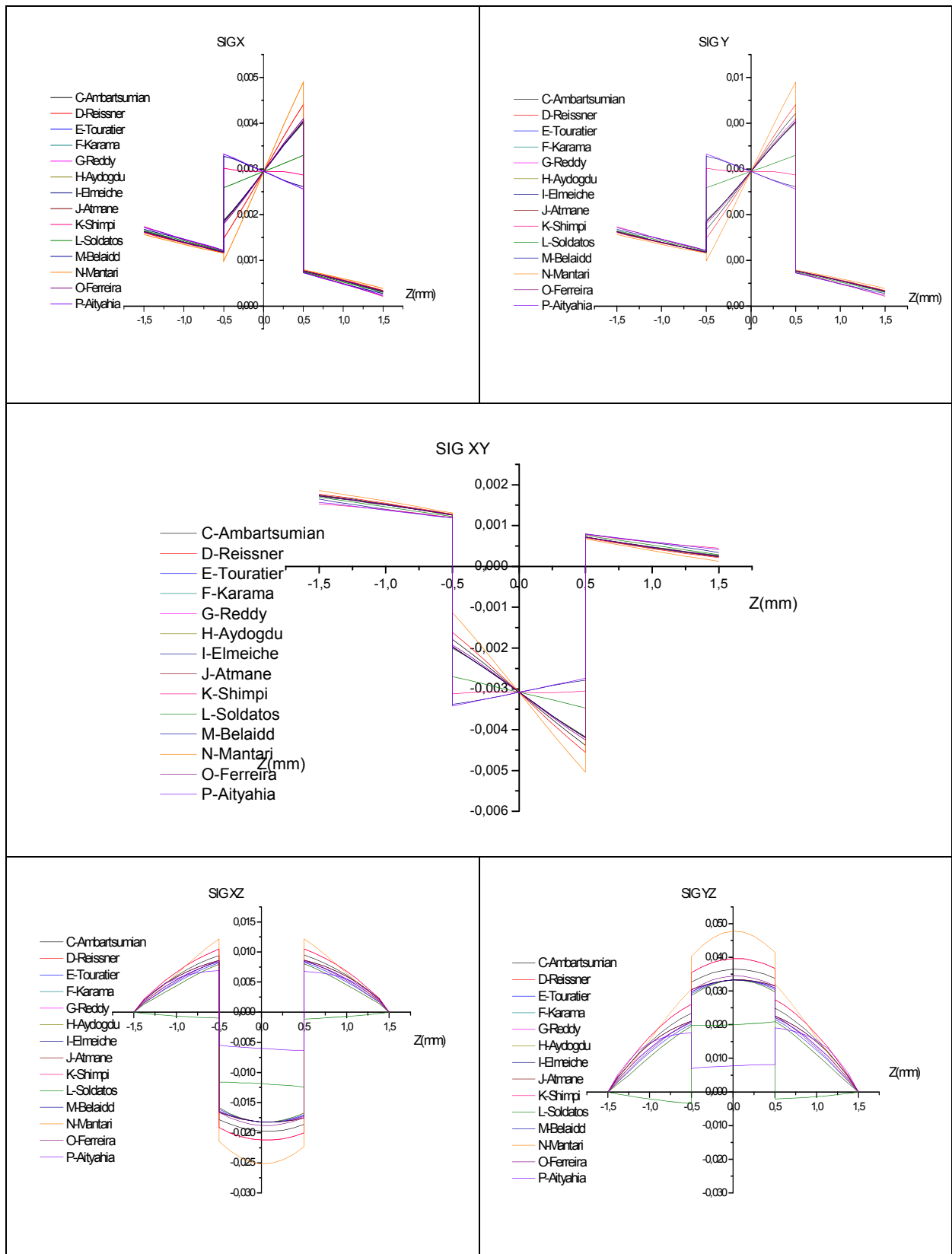


Figure 4.5 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 04.



4.1.E-Modèle hygrothermique 05 :

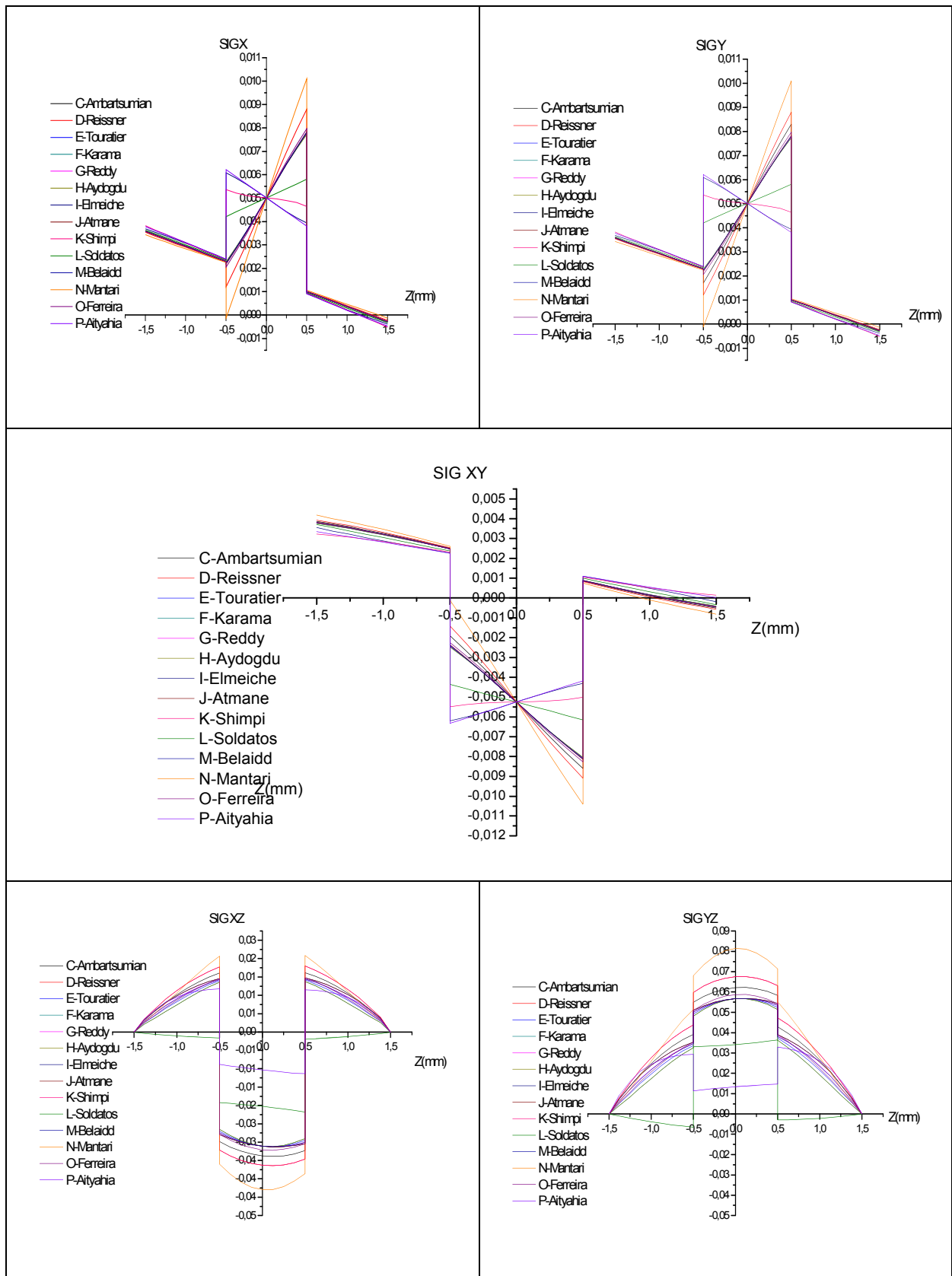


Figure 4.6 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 05.

4.1.F-Modèle hygrothermique 06 :

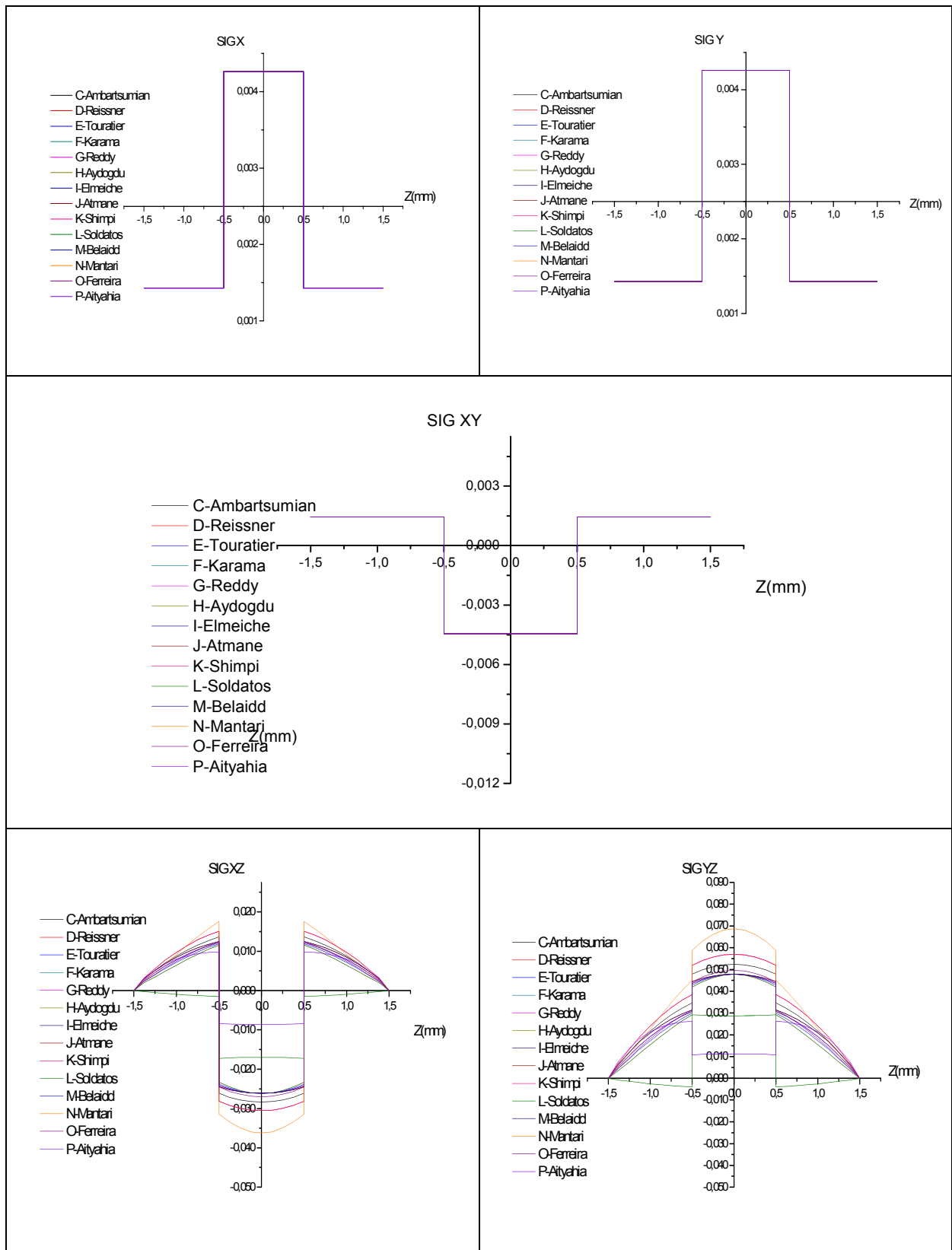


Figure 4.7 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 06.

4.1.G-Modèle hygrothermique 07 :

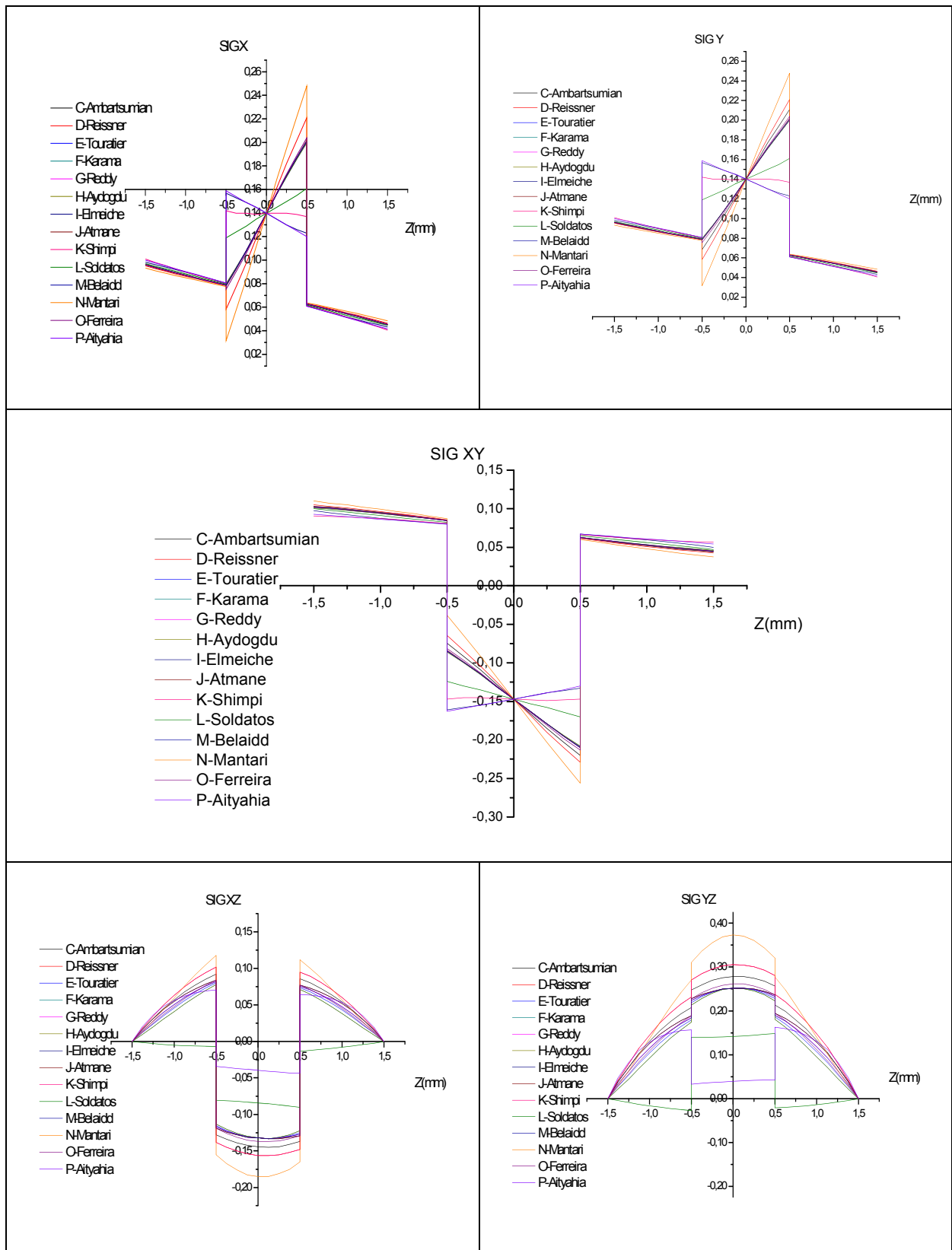


Figure 4.8 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 07.

4.1.H-Modèle hygrothermique 08 :

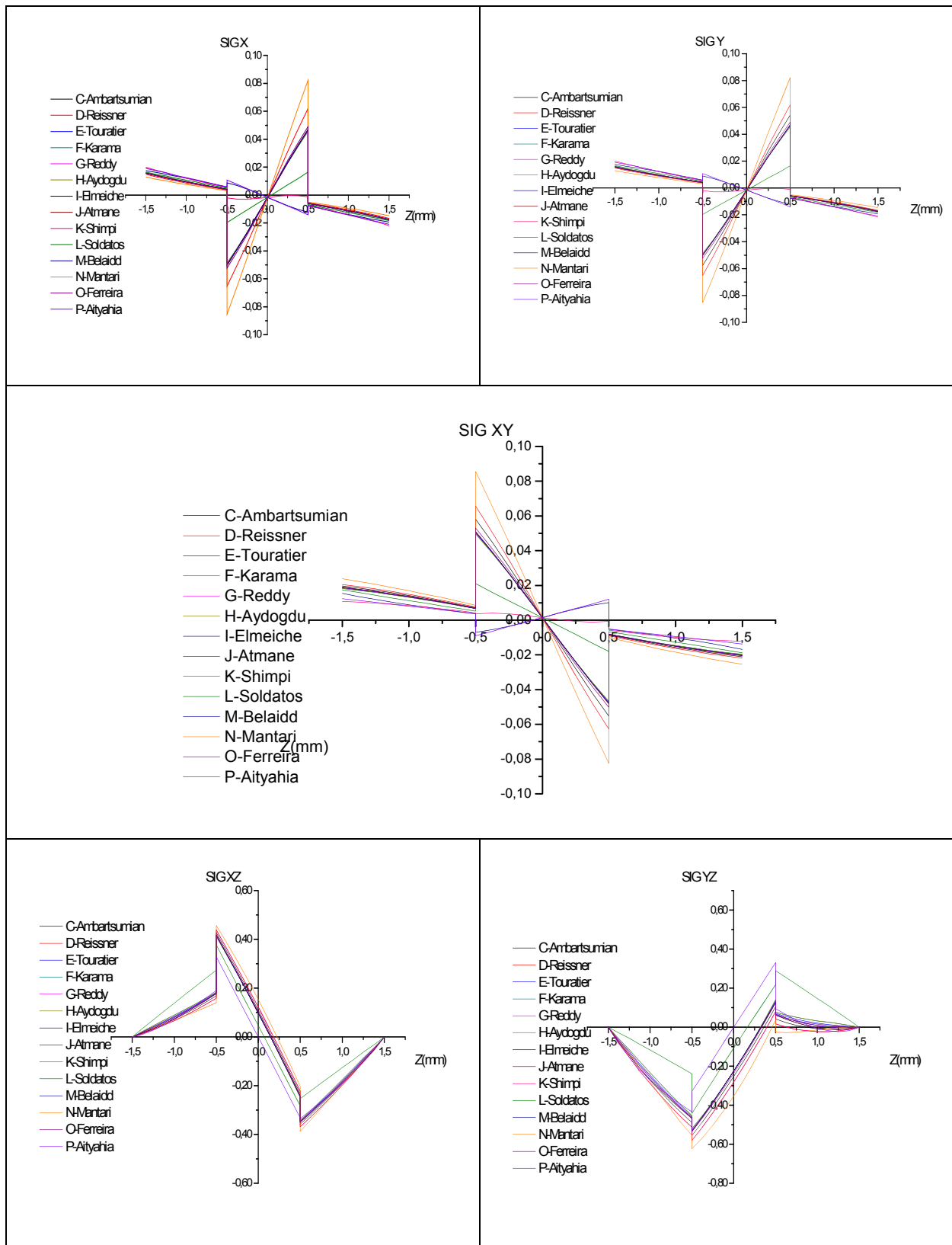


Figure 4.9 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 08.

4.1.I-Modèle hygrothermique 09 :

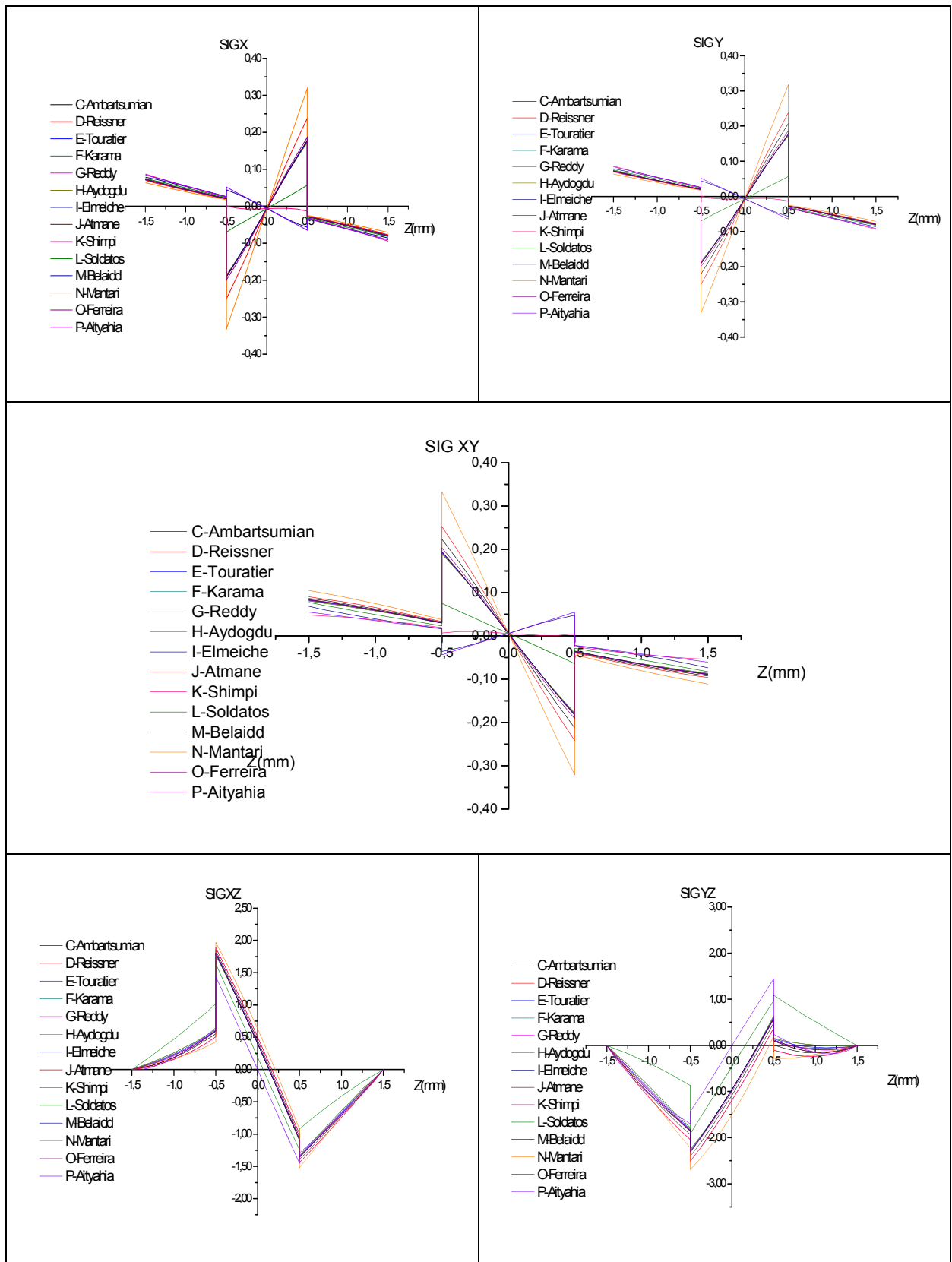


Figure 4.10 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 09.

4.1.J-Modèle hygrothermique 10 :

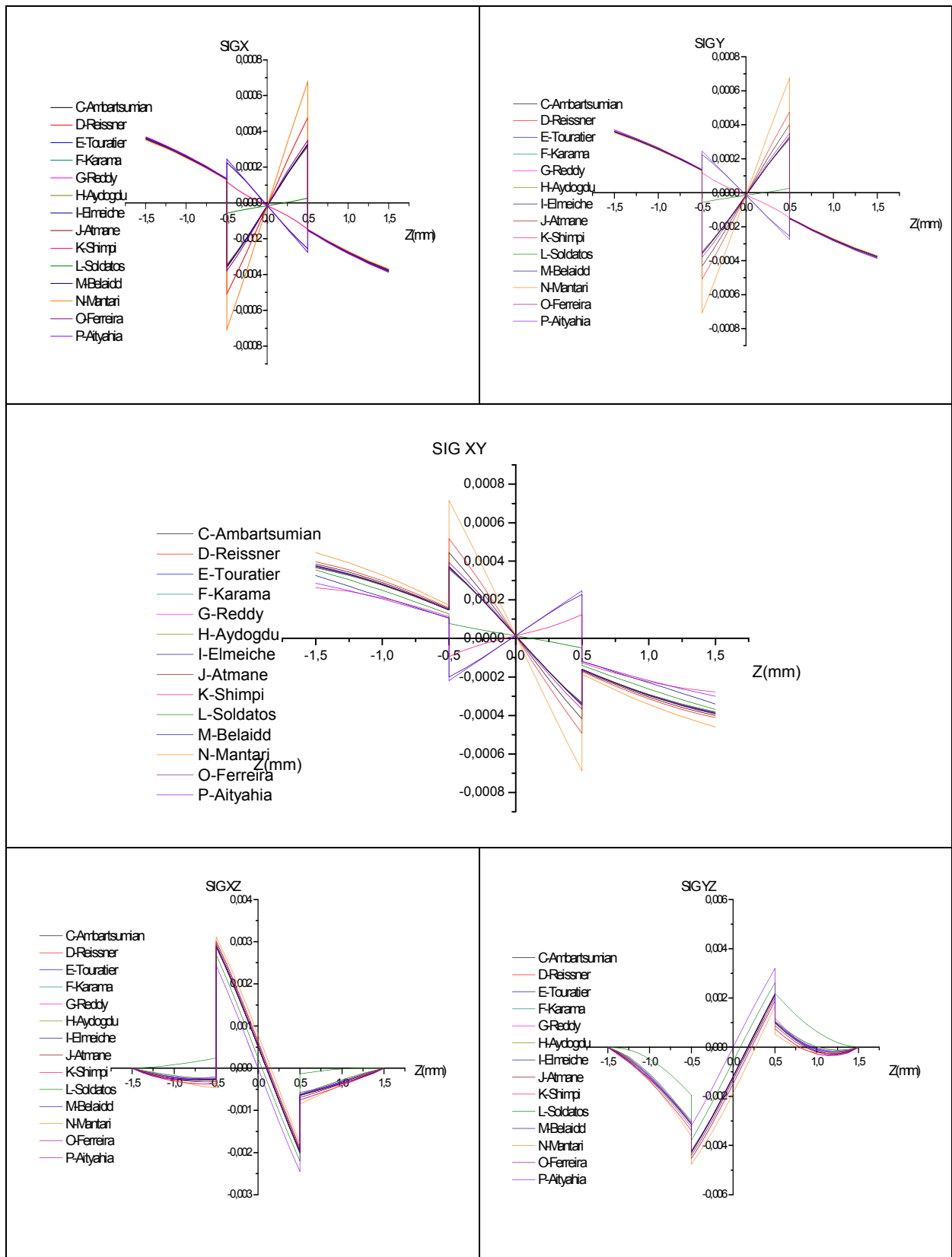


Figure 4.11 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique modèle 10.

4.1.K-Modèle hydrothermique 11 :

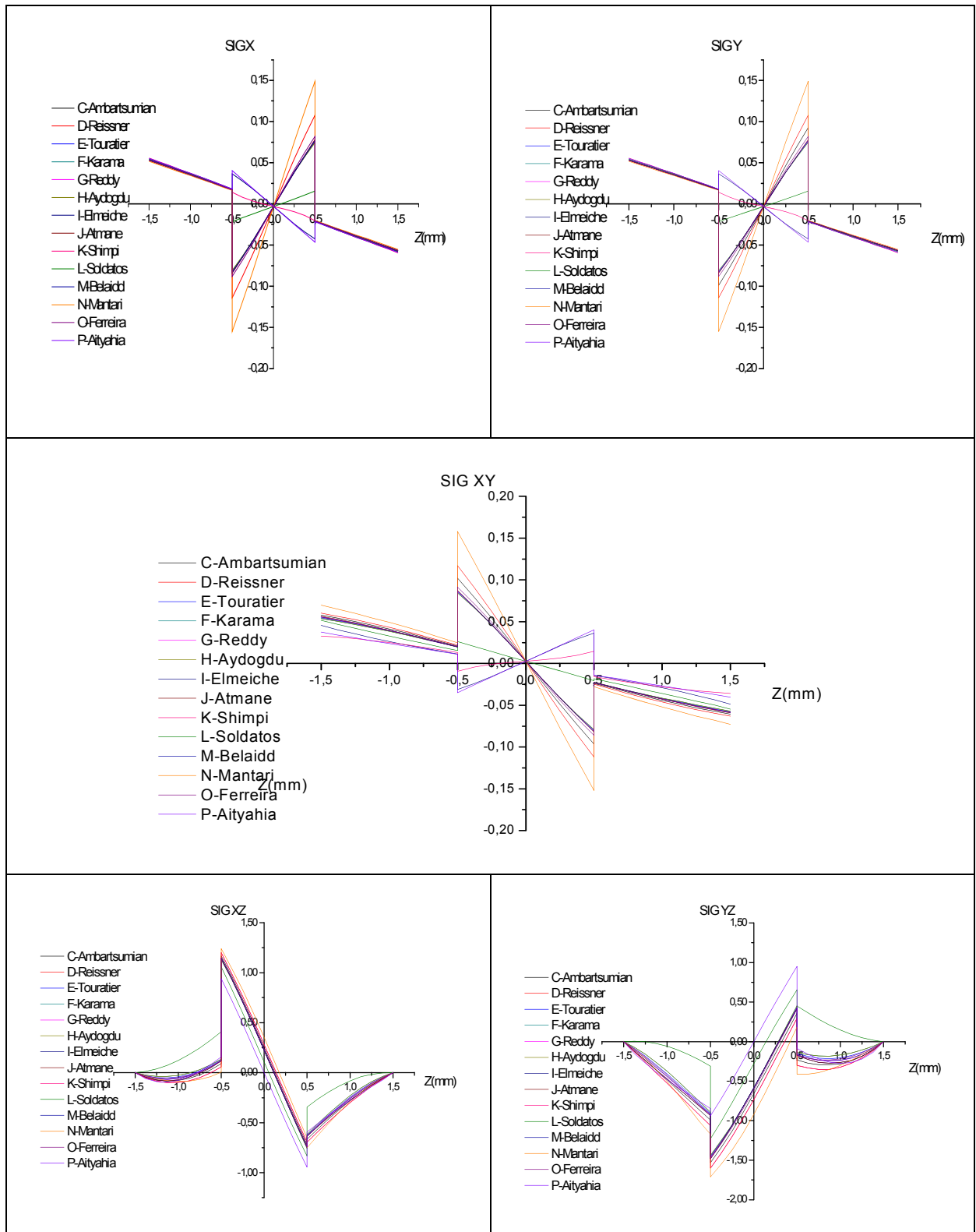


Figure 4.12 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hydrothermique modèle 11.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	-1,52%	-3,30%	0,51%	1,29%	1,27%	7,11%	-0,51%
-h/3	-2,41%	-4,82%	0,40%	0,83%	0,80%	15,26%	-0,80%
-h/6	-2,61%	-6,09%	0,00%	0,00%	0,00%	20,87%	0,00%
-h/6	16,36%	32,72%	-1,00%	-2,28%	-2,28%	-126,46%	0,85%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	17,56%	34,96%	-1,22%	-2,67%	-2,60%	-135,88%	0,92%
h/6	-2,13%	-4,26%	0,00%	0,79%	0,71%	17,73%	0,00%
h/3	-1,82%	-4,00%	0,36%	1,11%	1,09%	13,82%	-0,36%
h/2	-1,66%	-3,33%	0,48%	0,98%	0,95%	6,65%	-0,48%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	16,75%	3,05%	0,00%	-10,41%	0,00%	13,45%
-h/3	16,47%	7,23%	0,00%	-11,65%	-0,40%	17,67%
-h/6	17,39%	10,43%	0,00%	-13,13%	-0,87%	21,74%
-h/6	-103,02%	-65,01%	0,00%	76,39%	5,12%	-130,73%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-110,66%	-69,92%	-0,15%	81,68%	5,34%	-140,31%
h/6	14,18%	9,22%	0,00%	-9,93%	-0,71%	18,44%
h/3	15,27%	6,91%	0,00%	-10,18%	-0,36%	16,36%
h/2	15,68%	2,61%	0,00%	-9,98%	0,00%	12,35%

Tableau 4.2 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des modèles HSDT par rapport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 01.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	46,05%	91,73%	-36,84%	-65,68%	-73,68%	30,26%	30,26%
-h/6	140,00%	278,57%	-30,00%	-58,00%	-60,00%	22,50%	22,50%
-h/6	2,45%	4,60%	-0,31%	-3,20%	-0,92%	0,31%	0,31%
0	12,45%	25,04%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-3,90%	-7,32%	0,49%	5,23%	1,46%	-0,98%	-0,98%
h/6	6,53%	13,19%	-1,28%	-1,85%	-2,80%	1,17%	1,17%
h/3	7,22%	14,43%	-5,77%	-13,98%	-11,55%	4,95%	4,95%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	91,73%	-145,30%	-3,95%	65,79%	-21,05%	-79,70%
-h/6	278,57%	-266,43%	-2,50%	517,86%	22,50%	-108,93%
-h/6	4,60%	-8,28%	0,00%	8,59%	0,31%	-18,71%
0	25,04%	-52,12%	0,00%	56,66%	4,69%	-100,00%
h/6	-7,32%	13,17%	0,00%	-13,66%	-0,98%	29,76%
h/6	13,19%	-59,04%	-0,12%	24,85%	1,17%	-7,70%
h/3	14,43%	-65,36%	-0,62%	10,31%	-3,30%	6,19%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.3 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des modèles HSDT par rapport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 01.



Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	3,00%	6,00%	-2,67%	-5,00%	-5,00%	2,00%	2,00%
-h/6	2,64%	5,27%	-0,53%	-1,05%	-1,05%	0,53%	0,53%
-h/6	3,16%	6,54%	-0,84%	-1,48%	-1,48%	0,42%	0,42%
0	12,68%	25,35%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-7,24%	-14,48%	1,36%	2,71%	2,71%	-1,36%	-1,36%
h/6	-4,55%	-9,09%	0,91%	1,82%	1,82%	-0,91%	-0,91%
h/3	-6,00%	-12,67%	4,67%	10,00%	10,00%	-4,00%	-4,00%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	6,00%	-28,33%	-0,33%	4,33%	-1,67%	2,33%
-h/6	5,27%	-23,73%	0,00%	9,84%	0,53%	-3,16%
-h/6	6,54%	-12,03%	-0,21%	12,24%	0,42%	-27,00%
0	25,35%	-51,97%	0,00%	57,75%	4,93%	-100,00%
h/6	-14,48%	25,34%	0,00%	-26,70%	-1,36%	57,47%
h/6	-9,09%	40,61%	0,00%	-16,97%	-0,91%	5,15%
h/3	-12,67%	56,00%	0,67%	-8,67%	2,67%	-6,00%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.4 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 01.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	-1,52%	-2,65%	0,38%	0,88%	0,76%	5,30%	-0,38%
-h/3	-1,57%	-3,14%	0,00%	0,64%	0,52%	9,95%	-0,52%
-h/6	-1,61%	-2,42%	0,00%	0,00%	0,00%	9,68%	0,00%
-h/6	37,25%	75,16%	-2,61%	-5,37%	-5,23%	-290,85%	1,96%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	10,84%	21,86%	-0,76%	-1,62%	-1,52%	-84,56%	0,57%
h/6	-38,07%	-76,36%	2,65%	5,74%	5,54%	295,18%	-1,93%
h/3	-3,94%	-7,88%	0,84%	1,93%	1,83%	26,72%	-0,84%
h/2	-2,08%	-4,86%	0,69%	1,89%	1,39%	9,72%	-0,69%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	12,12%	1,89%	0,00%	-7,95%	0,00%	9,85%
-h/3	10,47%	4,71%	0,00%	-7,33%	-0,52%	11,52%
-h/6	8,06%	4,84%	0,00%	-6,45%	-0,81%	10,48%
-h/6	-236,60%	-149,48%	0,00%	175,16%	11,76%	-300,00%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-68,82%	-43,54%	0,00%	50,76%	3,42%	-87,36%
h/6	242,17%	153,01%	0,24%	-177,83%	-11,81%	304,82%
h/3	29,11%	13,08%	0,00%	-19,97%	-0,56%	31,50%
h/2	22,92%	4,17%	0,00%	-14,58%	0,00%	18,06%

Tableau 4.5 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des modèles HSDT par apport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 02.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	12,01%	24,02%	-9,91%	-17,04%	-19,52%	8,11%	8,11%
-h/6	12,13%	24,07%	-2,43%	-5,09%	-5,22%	2,05%	2,05%
-h/6	9,03%	18,38%	-1,87%	-3,23%	-3,84%	1,56%	1,56%
0	8,47%	16,95%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	7,32%	13,82%	-1,63%	-3,56%	-3,25%	0,81%	0,81%
h/6	12,90%	26,01%	-2,82%	-6,98%	-5,65%	2,02%	2,02%
h/3	13,14%	25,96%	-10,26%	-22,34%	-20,51%	8,97%	8,97%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	24,02%	-109,31%	-0,90%	17,12%	-5,71%	10,51%
-h/6	24,07%	-108,58%	-0,19%	44,59%	2,05%	-13,99%
-h/6	18,38%	-32,29%	-0,10%	33,96%	1,56%	-73,21%
0	16,95%	-34,41%	0,00%	38,14%	3,39%	-66,27%
h/6	13,82%	-25,37%	0,00%	26,02%	0,81%	-57,48%
h/6	26,01%	-117,34%	-0,40%	47,98%	2,02%	-15,32%
h/3	25,96%	-116,35%	-0,96%	18,59%	-5,77%	11,54%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.6 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 02.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	14,44%	28,88%	-11,50%	-22,86%	-22,86%	9,76%	9,76%
-h/6	15,65%	30,43%	-2,61%	-6,09%	-6,09%	2,61%	2,61%
-h/6	10,00%	20,56%	-1,67%	-4,44%	-4,44%	1,67%	1,67%
0	9,26%	18,98%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	8,37%	16,74%	-1,86%	-3,72%	-3,72%	1,40%	1,40%
h/6	10,63%	21,25%	-1,88%	-4,38%	-4,38%	1,88%	1,88%
h/3	11,00%	22,30%	-8,84%	-17,57%	-17,57%	7,91%	7,91%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	28,88%	-129,81%	-1,07%	20,59%	-6,55%	12,57%
-h/6	30,43%	-134,87%	0,00%	55,65%	2,61%	-17,30%
-h/6	20,56%	-36,11%	0,00%	37,78%	1,67%	-81,56%
0	18,98%	-39,35%	0,00%	43,06%	3,70%	-75,88%
h/6	16,74%	-30,23%	0,00%	31,16%	1,40%	-68,42%
h/6	21,25%	-97,00%	0,00%	39,38%	1,88%	-11,88%
h/3	22,30%	-99,90%	-0,82%	16,14%	-5,04%	9,97%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.7 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des modèles HSDT par apport au modèle de Reddy- Modèle Hygrothermique 02.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	-0,43%	0,43%	0,53%	0,43%	1,29%	0,00%
-h/3	0,00%	-0,82%	0,00%	0,00%	0,00%	2,46%	0,00%
-h/6	-0,55%	-1,10%	0,00%	0,00%	0,00%	3,68%	0,00%
-h/6	-6,33%	-12,66%	0,00%	0,78%	0,63%	46,84%	-0,63%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	3,56%	6,76%	-0,36%	-0,48%	-0,36%	-26,33%	0,36%
h/6	0,46%	1,15%	-0,23%	-0,45%	-0,23%	-4,85%	0,00%
h/3	0,40%	0,81%	-0,10%	-0,24%	-0,20%	-3,23%	0,10%
h/2	0,51%	0,51%	0,00%	0,00%	0,00%	-1,03%	0,51%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	2,59%	0,43%	0,00%	-1,29%	0,00%	2,16%
-h/3	3,28%	1,64%	0,00%	-1,64%	0,00%	3,28%
-h/6	2,95%	1,84%	0,00%	-2,39%	-0,18%	3,87%
-h/6	37,97%	24,05%	0,00%	-28,48%	-1,90%	48,10%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-21,35%	-13,52%	0,00%	16,01%	1,07%	-27,05%
h/6	-3,93%	-2,54%	0,00%	2,77%	0,00%	-5,08%
h/3	-3,53%	-1,61%	0,00%	2,82%	0,00%	-3,83%
h/2	-2,56%	-0,51%	0,00%	2,05%	0,00%	-2,05%

Tableau 4.8 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des modèles HSDT par rapport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 03.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	-5,28%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	11,91%	23,83%	-9,50%	-18,01%	-19,01%	7,94%	7,94%
-h/6	11,50%	23,89%	-2,65%	-6,22%	-5,31%	1,77%	1,77%
-h/6	7,65%	15,30%	-1,64%	-6,45%	-3,28%	1,09%	1,09%
0	7,28%	15,05%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	7,65%	15,30%	-1,64%	-5,63%	-3,28%	1,09%	1,09%
h/6	11,50%	23,89%	-2,65%	-4,87%	-5,31%	1,77%	1,77%
h/3	11,91%	23,83%	-9,50%	-21,00%	-19,01%	7,94%	7,94%
h/2	0,00%	0,00%	-5,28%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	11,70%	-5,53%	-5,53%	0,00%
-h/3	23,83%	-107,52%	-0,85%	17,02%	-5,53%	10,64%
-h/6	23,89%	-107,35%	0,00%	43,36%	1,77%	-13,98%
-h/6	15,30%	-27,32%	0,00%	28,42%	1,09%	-61,97%
0	15,05%	-32,04%	0,00%	34,95%	2,91%	-61,36%
h/6	15,30%	-27,32%	0,00%	28,42%	1,09%	-61,97%
h/6	23,89%	-107,35%	0,00%	43,36%	1,77%	-13,98%
h/3	23,83%	-107,52%	-0,85%	17,02%	-5,53%	10,64%
h/2	0,00%	0,00%	11,70%	-5,53%	-5,53%	0,00%

Tableau 4.9 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des modèles HSDT par rapport au modèle de Reddy-Modèle Hygrothermique03.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	-12,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	16,39%	32,79%	-13,11%	-26,07%	-26,07%	10,66%	10,66%
-h/6	16,41%	32,82%	-3,08%	-7,18%	-7,18%	2,56%	2,56%
-h/6	9,14%	18,29%	-2,00%	-4,00%	-4,00%	1,43%	1,43%
0	9,16%	18,58%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	9,14%	18,29%	-2,00%	-4,00%	-4,00%	1,43%	1,43%
h/6	16,41%	32,82%	-3,08%	-7,18%	-7,18%	2,56%	2,56%
h/3	16,39%	32,79%	-13,11%	-26,07%	-26,07%	10,66%	10,66%
h/2	0,00%	0,00%	-12,50%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	27,70%	-13,10%	-13,10%	0,00%
-h/3	32,79%	-147,54%	-1,64%	22,95%	-7,38%	14,75%
-h/6	32,82%	-147,44%	0,00%	60,51%	2,56%	-18,97%
-h/6	18,29%	-32,86%	-0,29%	33,71%	1,43%	-74,34%
0	18,58%	-38,17%	0,00%	41,98%	3,56%	-73,54%
h/6	18,29%	-32,86%	-0,29%	33,71%	1,43%	-74,34%
h/6	32,82%	-147,44%	0,00%	60,51%	2,56%	-18,97%
h/3	32,79%	-147,54%	-1,64%	22,95%	-7,38%	14,75%
h/2	0,00%	0,00%	27,70%	-13,10%	-13,10%	0,00%

Tableau 4.10 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique03.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	-0,61%	-1,23%	0,61%	0,57%	0,61%	3,07%	0,00%
-h/3	-0,71%	-1,43%	0,00%	0,00%	0,00%	4,29%	0,00%
-h/6	0,00%	-0,85%	0,00%	0,00%	0,00%	3,39%	0,00%
-h/6	-9,73%	-20,00%	0,54%	1,55%	1,62%	77,30%	-0,54%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	4,46%	9,16%	-0,25%	-0,81%	-0,74%	-35,40%	0,25%
h/6	0,65%	1,30%	-0,13%	-0,34%	-0,13%	-5,18%	0,00%
h/3	1,62%	3,24%	-0,36%	-0,88%	-0,72%	-10,97%	0,36%
h/2	3,11%	6,52%	-1,24%	-2,76%	-2,48%	-14,29%	0,93%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	6,75%	1,23%	0,00%	-3,68%	0,00%	5,52%
-h/3	5,00%	2,14%	0,00%	-3,57%	0,00%	5,00%
-h/6	3,39%	1,69%	0,00%	-1,69%	0,00%	3,39%
-h/6	63,24%	40,00%	0,00%	-46,43%	-2,70%	80,00%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-28,96%	-18,32%	0,00%	21,29%	1,49%	-36,63%
h/6	-4,15%	-2,72%	0,00%	2,98%	0,13%	-5,31%
h/3	-12,05%	-5,40%	0,00%	8,27%	0,18%	-12,95%
h/2	-32,92%	-5,90%	-0,31%	20,50%	0,00%	-26,40%

Tableau 4.11 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 04.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	11,46%	23,11%	-9,43%	-21,09%	-18,48%	7,76%	7,76%
-h/6	11,97%	24,41%	-2,37%	-7,00%	-5,09%	2,01%	2,01%
-h/6	8,54%	16,46%	-1,83%	-6,02%	-3,66%	1,22%	1,22%
0	8,24%	16,48%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	7,51%	15,61%	-1,73%	-3,45%	-3,47%	1,16%	1,16%
h/6	11,75%	23,38%	-2,47%	-7,34%	-5,05%	1,88%	1,88%
h/3	11,19%	22,56%	-9,03%	-21,05%	-18,05%	7,58%	7,58%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	23,11%	-111,28%	-0,92%	16,45%	-5,36%	3,51%
-h/6	24,41%	-111,37%	-0,12%	44,55%	2,01%	-18,01%
-h/6	16,46%	-29,27%	0,00%	30,49%	1,22%	-66,83%
0	16,48%	-35,16%	0,00%	38,46%	3,30%	-67,14%
h/6	15,61%	-28,32%	-0,58%	28,90%	1,16%	-63,64%
h/6	23,38%	-112,81%	-0,24%	43,36%	1,88%	-20,21%
h/3	22,56%	-112,27%	-0,90%	16,06%	-5,23%	0,00%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.12 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 04.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	13,08%	26,15%	-10,00%	-20,00%	-20,00%	9,23%	9,23%
-h/6	13,04%	26,09%	-2,42%	-5,31%	-5,31%	1,93%	1,93%
-h/6	9,36%	18,73%	-2,01%	-4,01%	-4,01%	1,67%	1,67%
0	9,61%	18,92%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	9,03%	18,39%	-1,94%	-3,87%	-3,87%	1,61%	1,61%
h/6	12,16%	23,87%	-2,70%	-5,41%	-5,41%	1,80%	1,80%
h/3	12,41%	24,82%	-9,49%	-18,98%	-18,98%	8,76%	8,76%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	26,15%	-115,85%	-0,77%	18,46%	-5,38%	11,54%
-h/6	26,09%	-116,57%	0,00%	47,83%	1,93%	-14,98%
-h/6	18,73%	-33,78%	-0,33%	34,78%	1,34%	-76,52%
0	18,92%	-39,94%	0,00%	43,54%	3,60%	-76,52%
h/6	18,39%	-32,58%	0,00%	33,87%	1,61%	-73,74%
h/6	23,87%	-109,10%	-0,45%	44,59%	1,80%	-13,96%
h/3	24,82%	-109,93%	-0,73%	17,52%	-5,11%	11,68%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.13 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG yz des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy- Modèle Hygrothermique 04.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	-2,55%	-5,10%	1,27%	2,67%	2,55%	12,10%	-0,64%
-h/3	-3,97%	-7,85%	0,84%	1,02%	1,88%	26,57%	-0,73%
-h/6	-5,05%	-10,10%	0,24%	0,60%	0,72%	39,18%	-0,24%
-h/6	15,20%	30,40%	-1,00%	-2,45%	-2,20%	-117,82%	0,80%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	16,24%	32,48%	-1,07%	-2,00%	-2,35%	-125,85%	0,85%
h/6	-3,58%	-7,16%	0,17%	0,78%	0,51%	27,60%	-0,34%
h/3	-3,54%	-7,08%	0,88%	0,90%	0,88%	22,12%	-0,88%
h/2	-2,30%	-4,60%	1,15%	2,45%	2,30%	10,92%	-0,57%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	28,03%	5,10%	0,64%	-17,20%	0,00%	22,29%
-h/3	28,66%	12,97%	0,00%	-19,67%	-0,52%	30,75%
-h/6	31,73%	19,95%	0,00%	-23,56%	-1,68%	40,38%
-h/6	-95,96%	-60,60%	-0,20%	70,80%	4,60%	-121,60%
0	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-102,46%	-64,74%	0,00%	75,64%	4,91%	-129,91%
h/6	22,49%	14,14%	0,00%	-16,70%	-1,19%	28,62%
h/3	23,89%	10,62%	0,00%	-16,90%	-0,88%	25,66%
h/2	25,29%	4,60%	0,57%	-15,52%	0,00%	20,11%

Tableau 4.14 : Valeurs relatives de la contrainte longitudinale SIG xx des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique08.

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	-8,75%	-16,25%	6,25%	13,74%	12,50%	-6,25%	-6,25%
-h/6	-6,11%	-11,67%	1,11%	3,34%	2,22%	-1,11%	-1,11%
-h/6	2,64%	5,28%	-0,48%	-2,45%	-1,20%	0,48%	0,48%
0	12,13%	25,38%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-4,55%	-8,68%	1,24%	3,14%	2,07%	-0,41%	-0,41%
h/6	2,88%	6,05%	-0,58%	-2,54%	-1,44%	0,58%	0,58%
h/3	3,80%	7,07%	-2,72%	-6,65%	-5,43%	2,17%	2,17%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	-16,25%	73,75%	0,00%	-12,50%	3,75%	-8,75%
-h/6	-11,67%	52,22%	0,00%	-21,67%	-1,11%	6,11%
-h/6	5,28%	-9,35%	0,00%	9,59%	0,48%	-21,10%
0	25,38%	-52,09%	0,00%	56,98%	4,99%	-100,00%
h/6	-8,68%	16,12%	0,41%	-16,53%	-0,41%	36,78%
h/6	6,05%	-27,09%	0,00%	11,24%	0,58%	-3,46%
h/3	7,07%	-32,07%	0,00%	4,89%	-1,63%	3,26%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.15 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par rapport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 08

Z	Ambartsumian	Reissner	Touratier	Karama	Aydogdu	Elmeiche	Atmane
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	5,84%	12,06%	-5,06%	-9,73%	-9,73%	3,89%	3,89%
-h/6	5,40%	10,80%	-1,08%	-2,38%	-2,38%	0,86%	0,86%
-h/6	4,72%	9,43%	-0,94%	-2,08%	-2,08%	0,75%	0,75%
0	12,44%	24,89%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
h/6	-19,23%	-38,54%	3,85%	8,46%	8,46%	-3,08%	-3,08%
h/6	-36,36%	-74,24%	7,58%	16,67%	16,67%	-6,06%	-6,06%
h/3	-177,78%	-344,44%	133,33%	266,67%	266,67%	-122,22%	-122,22%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Z	Shimpi	Soldatos	Belaidd	Mantari	Ferreira	Aityahia
-h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
-h/3	12,06%	-54,86%	-0,78%	8,56%	-3,11%	5,06%
-h/6	10,80%	-48,38%	0,00%	19,87%	0,86%	-6,26%
-h/6	9,43%	-16,79%	-0,19%	17,36%	0,75%	-38,11%
0	24,89%	-52,00%	0,00%	56,89%	4,89%	-100,00%
h/6	-38,54%	68,46%	0,00%	-71,15%	-3,08%	155,38%
h/6	-74,24%	339,39%	1,52%	-137,88%	-6,06%	43,94%
h/3	-344,44%	1544,44%	11,11%	-255,56%	77,78%	-166,67%
h/2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Tableau 4.16 : Valeurs relatives de la contrainte transversale SIG xz des différents modèles HSDT par apport au modèle Reddy-Modèle Hygrothermique 08

Les figures 4.2 – 4.12 présentent des simulations du comportement d'un stratifiée en composite T300/5208 de configuration [45/-45/45] sous différents types de chargements détaillés dans le tableau 4.1 ,qui peuvent être de nature thermique (Modèle 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 10) ou hygrothermique (Modèle 7, 8, 9, 11) avec des conditions de chargement proche afin de voir l'influence du modèle de chargement sur le comportement du stratifié ,pour chaque modèle de chargement des simulations sont faites en utilisant les différentes théories d'ordre élevées citées dans le paragraphe 3.4.5, les simulations montrent une forte dépendance entre le comportement du stratifié et le type de chargement thermique/hygrothermique en terme de force de sollicitations induite par le chargement et en terme d'allure de distribution des contraintes.

Pour le cas de Sig xx, Sig yy , Sig xy l'allure des comportements est conservée pour les modèles 01, 02, 04, 05, 07, 08, 09, 10, 11 qui suivent une distribution linéaire de température et concentration pour le cas du chargement 03 l'influence

est claire par la distribution parabolique de la température qui se reflète sur Sig xx, Sig yy, Sig xy, Sig xz, Sig yz, on remarque aussi l'égalité en terme d'allure et valeur entre Sig xx, Sig yy et sa est dû à la particularité de l'architecture du stratifié choisis [45/-45/45].

L'influence du chargement thermique /hygrothermique est aussi visible sur les contraintes de cisaillement transversal Sig xz, Sig yz en terme de valeurs ou allure qui passe du linéaire pour le cas de chargement 01, 08, 09, 10, 11 au parabolique pour le cas de chargement 02, 03, 04, 05, 06, 07.

Par apport aux différentes théories d'ordre élevées simulées dans ce paragraphe on remarque pour le cas du Sig xx, Sig yy, Sig xy un rapprochement des courbes dans le centre du stratifié et un éloignement considérable est remarqué dans le sens contraire jusqu'à la limite de la couche extérieur, un écart constant et faible est constaté entre les différents modèles HSDT lors du passage de la couche intérieur d'orientation  $-45^\circ$  au couches extérieurs d'orientation  $45^\circ$ .

Les tableaux 4.3 – 5.16 représentent les valeurs relatives sur le comportement du stratifié des différents modèles HSDT par apport au modèle de Reddy pour les différents cas de chargement hygrothermique , Pour le cas de SIG xx les modèles de Touratier, Karama, Aydogdu, Atmane, Belaid, Ferraira présentent une très bonne concordance avec le modèle de Reddy à travers des valeurs relatives très faible qui sont en général inférieur à 5%, cette valeur max est constatée lors du passage des couches de  $-45^\circ$  à  $45^\circ$ , le reste des modèles (Ambartsumian, Reissner, El Meiche, Shimpi, Soldatos, Mantari, Ait yahia) pressentent des valeurs relatives plus importantes et surtout dans la zone de transition entre  $-45^\circ$  et  $45^\circ$ , cette dernière peut aller jusqu'à 135% pour le cas du modèle d'El Meiche, 110% Shimpi, 140% Ait yahia, les mêmes commentaires sont applicable pour le cas de Sig yy et Sig xy.

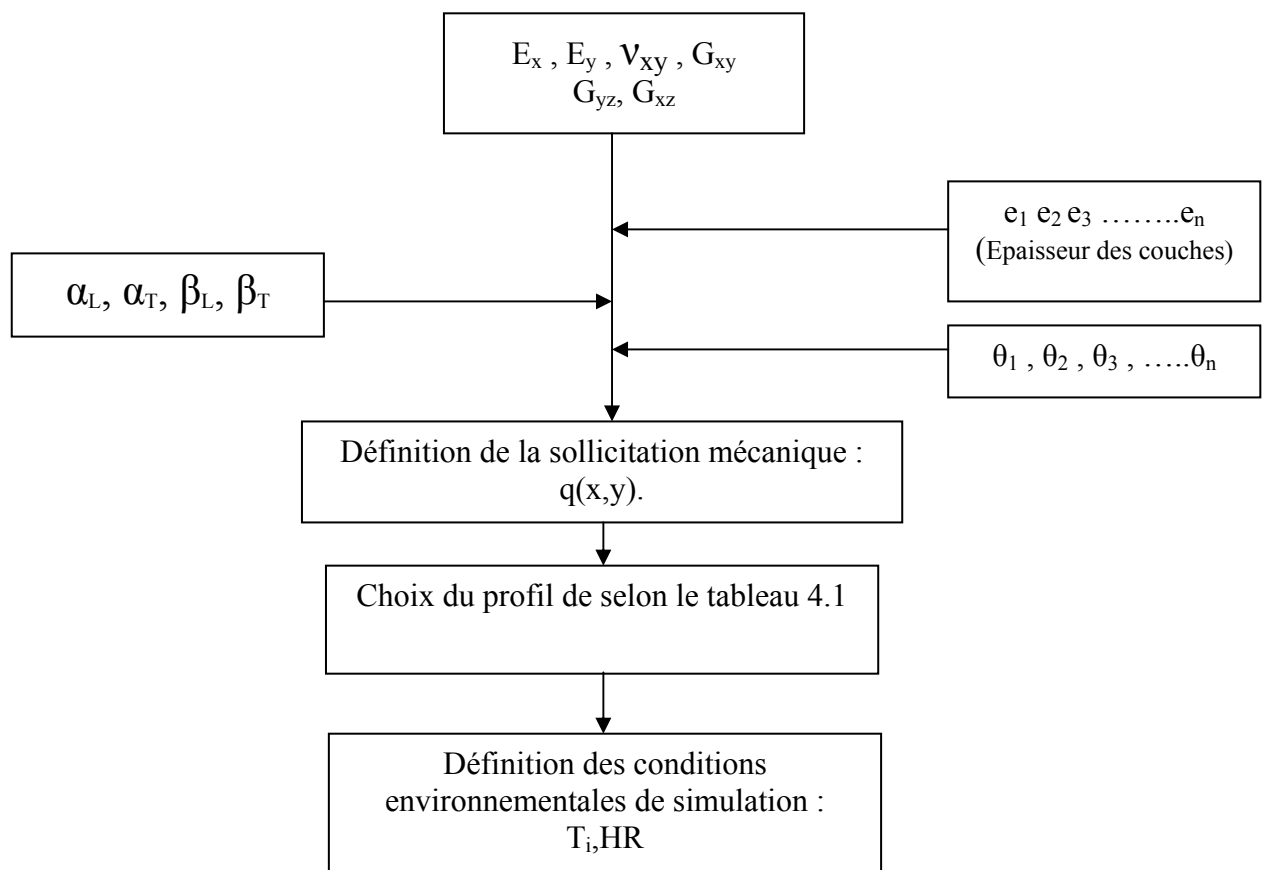
Pour le cas des contraintes de cisaillement Sig xz et Sig yx une valeur relative modéré est généralement constatée pour tous les modèles HSDT par apport au modèle de Reddy, en général les contraintes sont différentes et se comporte en parallèle le long de l'épaisseur du stratifié sans rapprochement pour toutes les

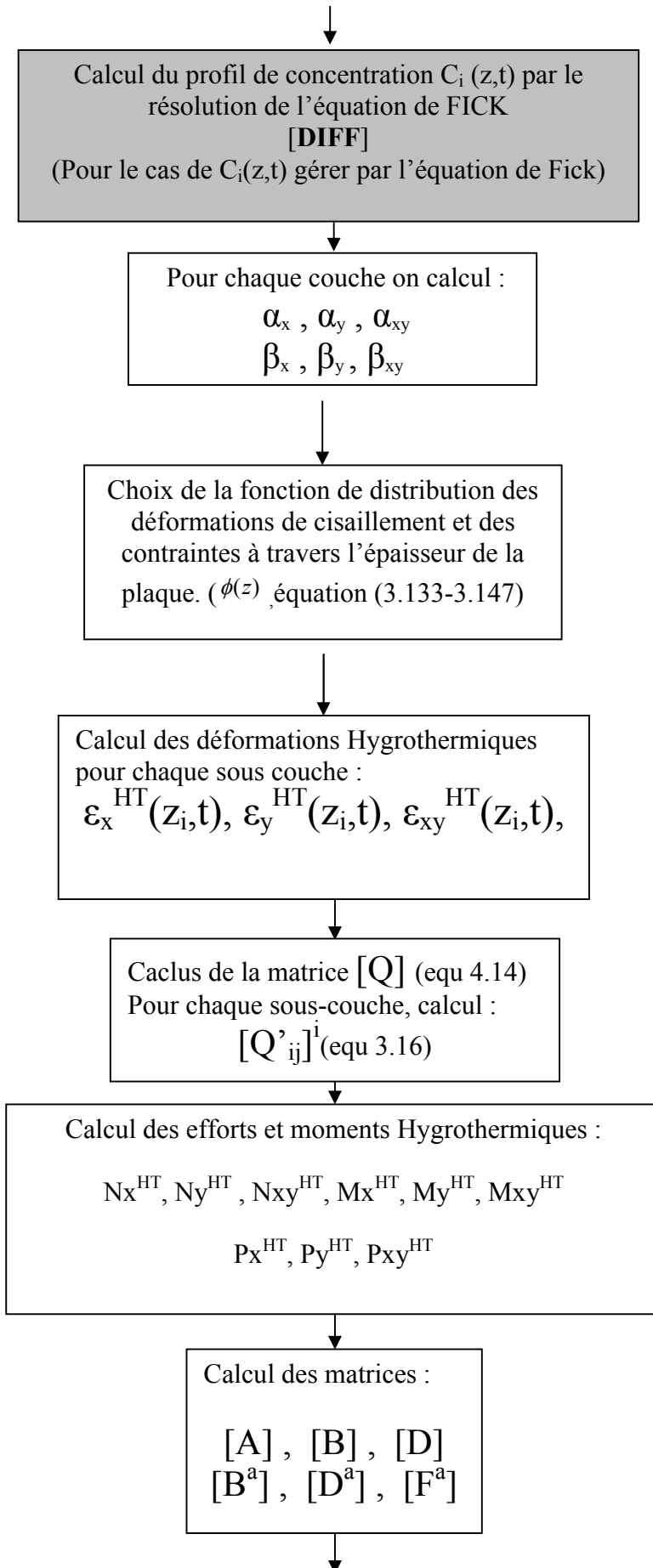


couches, le seul rapprochement constaté se situe dans la face supérieure et inférieure du stratifié et sa est dû à la condition au limite zéro contrainte de cisaillement pour les faces supérieur et inférieur imposée par les modèles HSDT simulés, en terme de valeur des contraintes de cisaillement il est important de signaler que le modèle de Soldatos et Ait yahia présentent des valeurs minimales par rapport aux autres modèles.

#### 4.2 Simulation des plaques épaisses sous chargement hygrothermique avec une distribution de concentration selon la loi de Fick

Dans ce paragraphe un deuxième programme appelé « Thick-compo-modèle-Fick » qui utilise une distribution de concentration gérée par l'équation de FICK ( Fig 4.13 ) est imposée dans les simulations, les mêmes conditions et dimensions ont été gardées par rapport au paragraphe 4.1, pour les paramètres relatifs au équation de Fick nous avons la température opérationnel qui est égale à la température Maximale par rapport aux condition de simulation de chaque modèle , l'humidité relative est égale à 40% et un temps d'exposition égale à 200 heures, les résultats sont représentés dans le paragraphe 4.2.3.





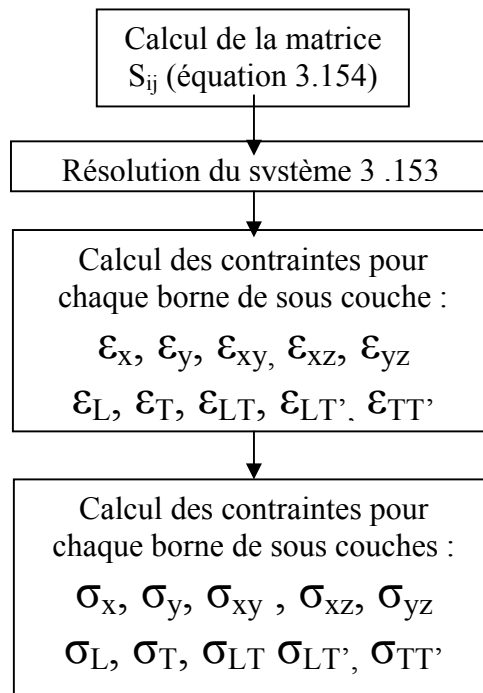


Figure 4.13 : Organigramme Thick-compo-modèle-Fick de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques.

#### 4.2.1 Influence de la température et humidité sur le phénomène d'absorption

A travers le sous-programme DIFF on a simulé la prise en eau  $M_t$  du T300/5208 donnée par l'équation (3.161) en fonction de la racine carrée du temps d'exposition, pour différents environnements, les résultats obtenus sont représentés dans la figure 4.14.

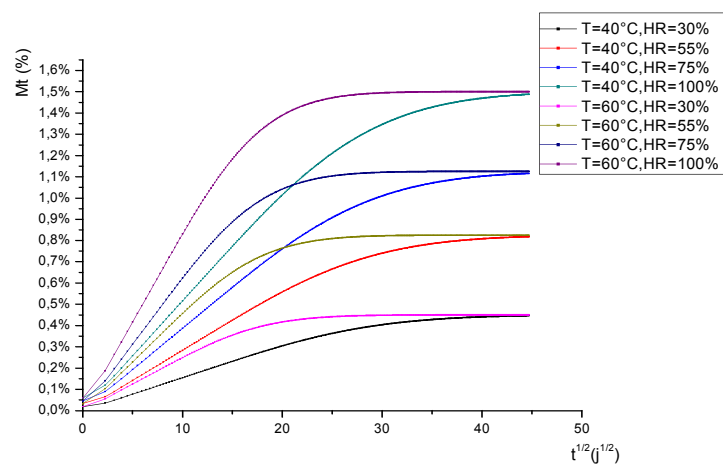


Figure 4.14 : Courbes de prise en eau pour différents environnements pour un modèle de Fick 1D.

Afin d'analyser l'évolution de la diffusion  $D$ , en fonction de la température, la figure 4.15 représente l'évolution de la diffusion  $D$  du T300/5208.

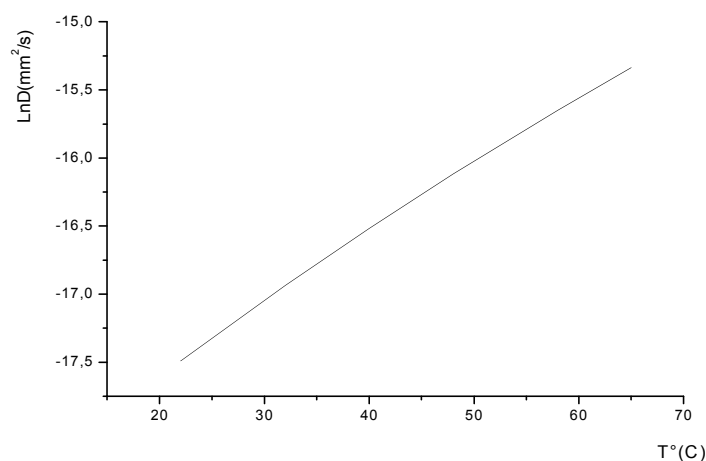


Figure 4.15 : Loi d'Arrhenius appliquée aux coefficients de diffusion.

Pour une humidité relative donnée, la cinétique d'absorption diffère en fonction de la température. En effet, quelle que soit la température, la quantité d'eau absorbée par le matériau à saturation est la même, ce qui confirme que le phénomène d'absorption d'eau est thermoactive, c'est à dire que plus la température est élevée, plus le plateau de saturation est atteint rapidement.

Il apparaît que pour une température donnée, le coefficient de diffusion n'évolue pas avec le taux d'humidité relative  $HR$ . Par contre, le seuil de saturation  $M_s$  augmente avec  $HR$ . , il est vérifié que  $M_s$  suit une loi de puissance du type  $M_s = a(HR)^b$ .

#### 4.2.2 Calcul des profils de concentration

Nous considérons un stratifié en graphite/époxy T300/5208 d'épaisseur  $h=5\text{mm}$  placé dans un environnement de température  $T=32^\circ\text{C}$ , et d'humidité  $HR=55\%$ , à travers l'équation de FICK (équation 3.155) programmée dans le sous programme DIFF nous calculons les profils de concentration à travers l'épaisseur de la plaque ( $z$ ) pour différentes durées d'exposition pour le cas d'absorption, les résultats de la simulation sont présentés dans la figure 4.16.

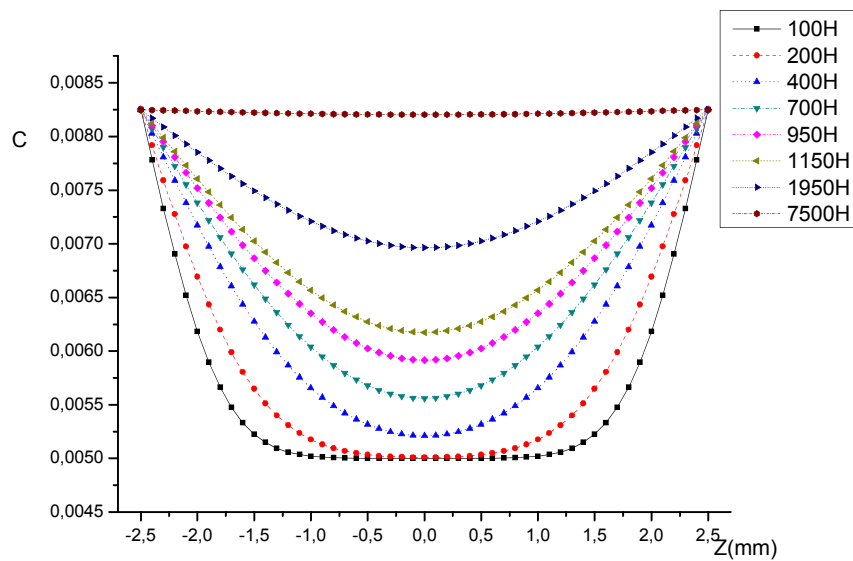


Figure 4.16 : Profils de concentration à travers l'épaisseur d'un stratifié en T300/5208 pour différentes durées de vieillissement.

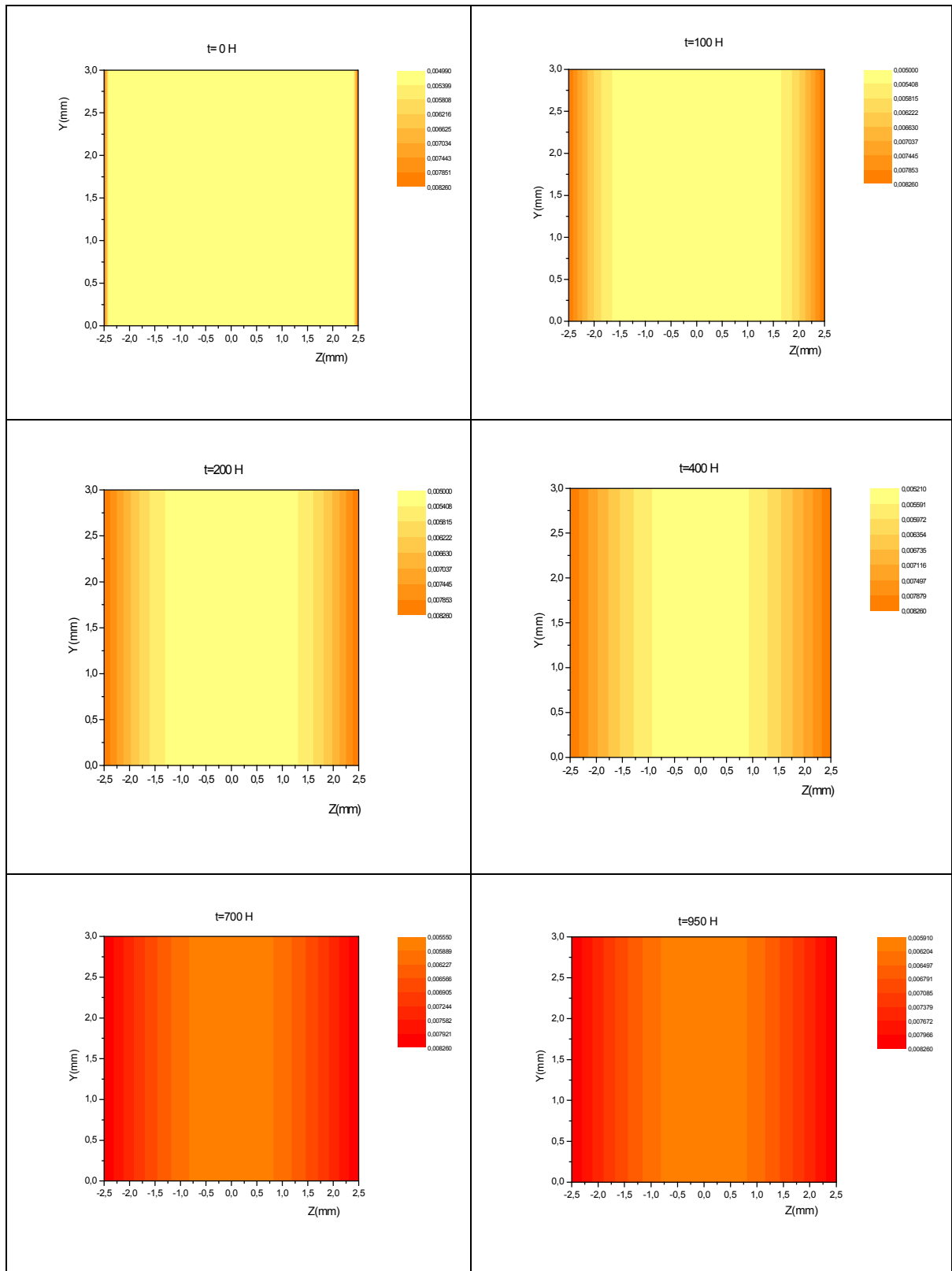


Figure 4.17.a : Présentation 2D des profils de concentration à travers l'épaisseur pour  $t=0$  H, 100 H, 200H , 400H, 700H, 950H.

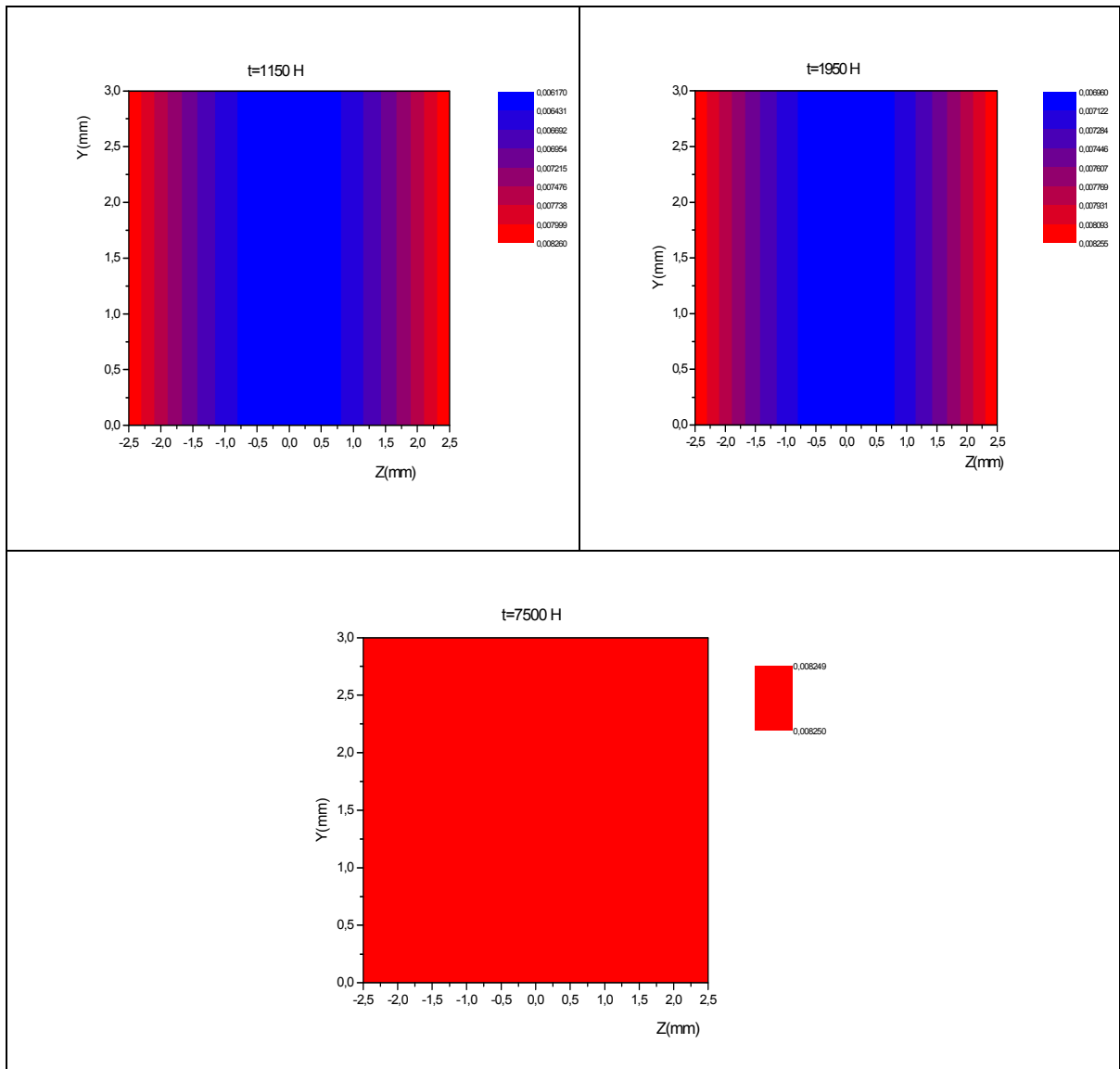


Figure 4.17.b : Présentation 2D des profils de concentration à travers l'épaisseur pour  $t=1150H$ ,  $1950H$ ,  $7500H$ .

La figure 4.17.a et b sont des présentations 2D des profils de concentration représentées sur la figure 4.16, la concentration  $C$  dépend de  $z$  seulement, et elle indépendante de  $y$  à cause de l'environnement constant.

#### 4.2.3 Comportement sous chargement hygrothermique où l'hygroscopie est calculé par al loi de Fick.

$$SIG_{xx} = \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right), \quad SIG_{yy} = \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right), \quad SIG_{xy} = \sigma_{xy}(0, 0, z)\left(\frac{h^2}{b^2 \cdot 10^7}\right)$$

$$SIG_{xz} = \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)\left(\frac{h}{b \cdot 10^5}\right), \quad SIG_{yz} = \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right)\left(\frac{h}{b \cdot 10^5}\right)$$

4.2.3.B-Modèle hygrothermique 01 :

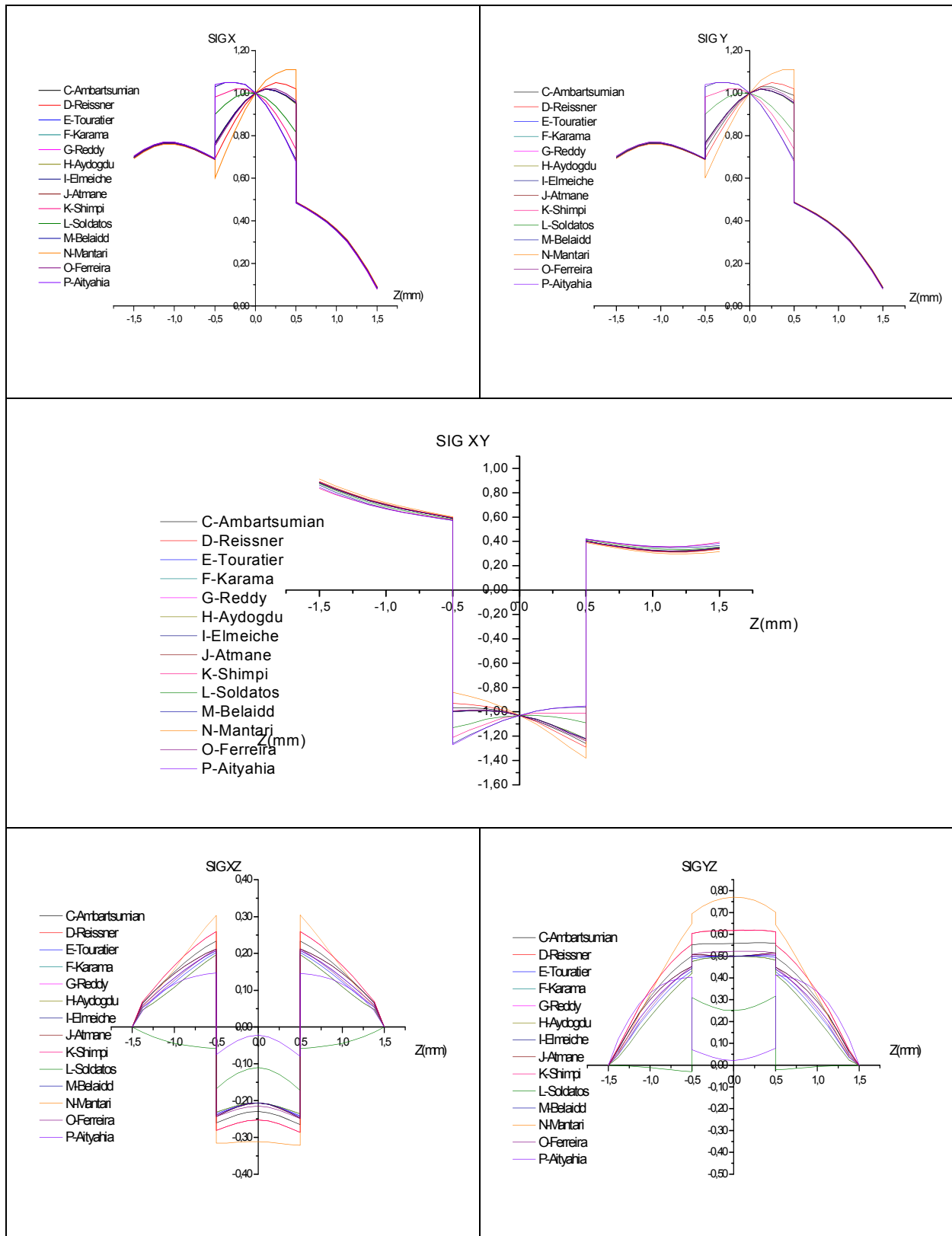


Figure 4.18 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 01.



4.2.3.C-Modèle hygrothermique 02 :

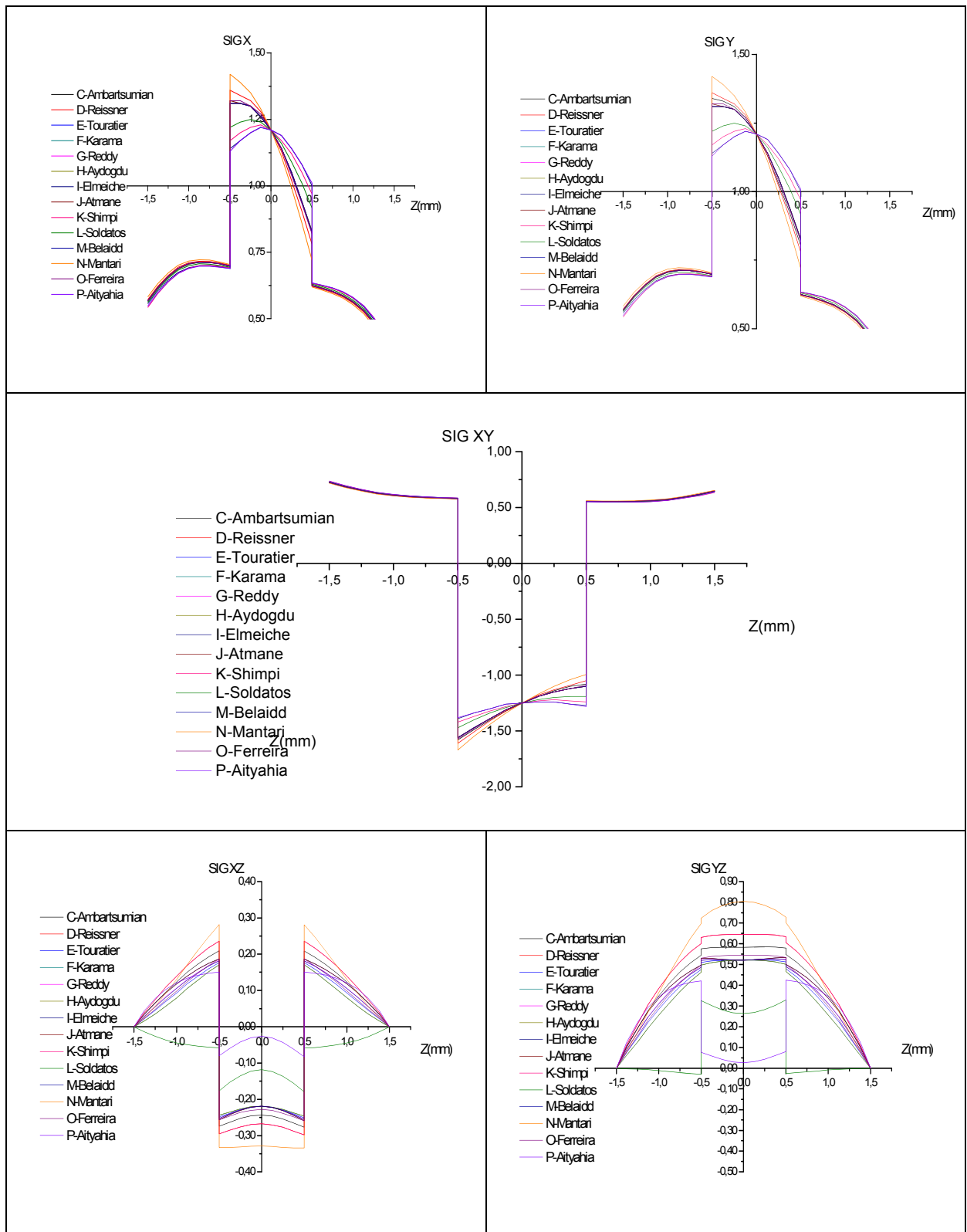


Figure 4. 19 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 02.

4.2.3.D-Modèle hygrothermique 03 :

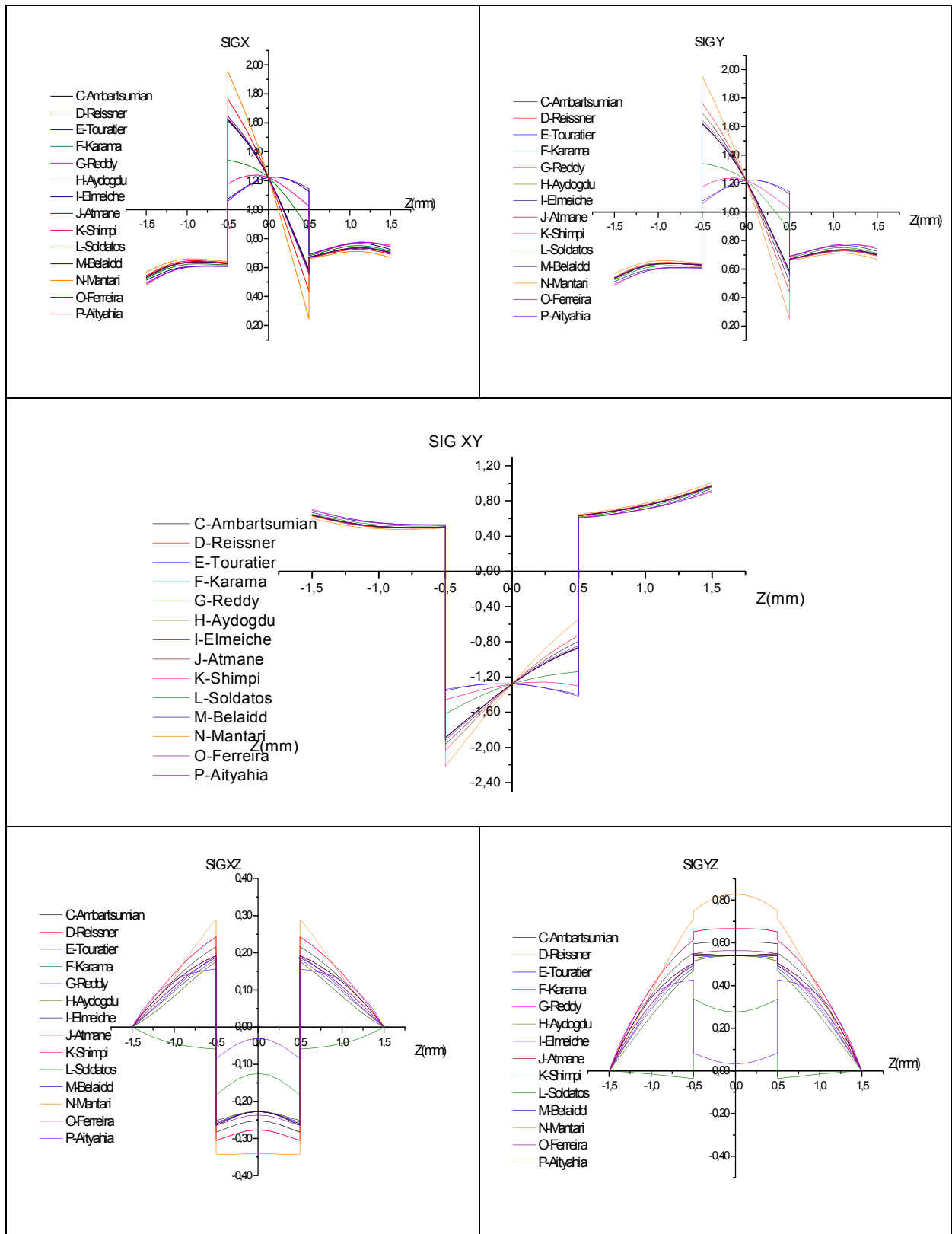


Figure 4.20 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 03.

4.2.3.E-Modèle hygrothermique 04 :

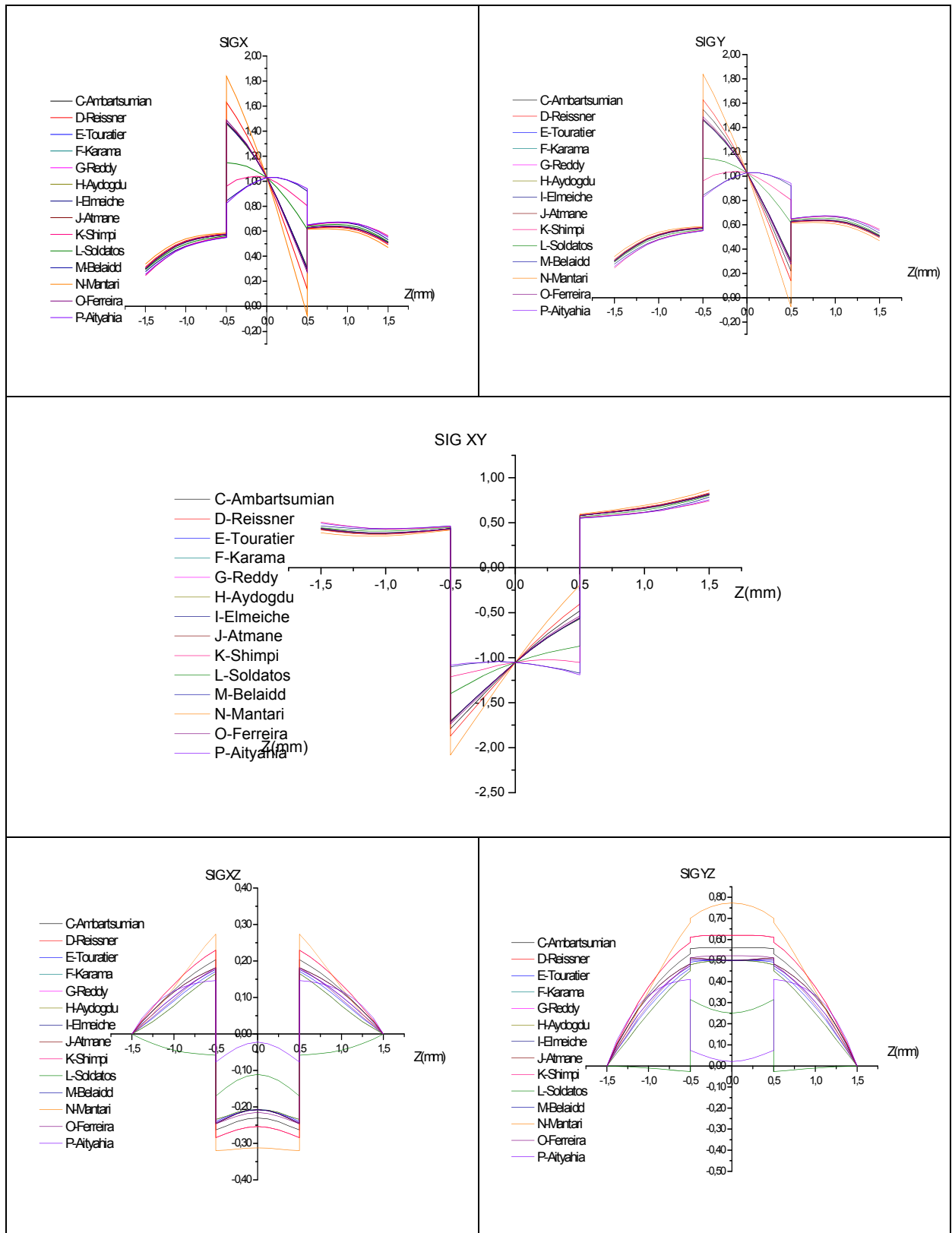


Figure 4.21 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 04.

4.2.3.F-Modèle hygrothermique 05 :

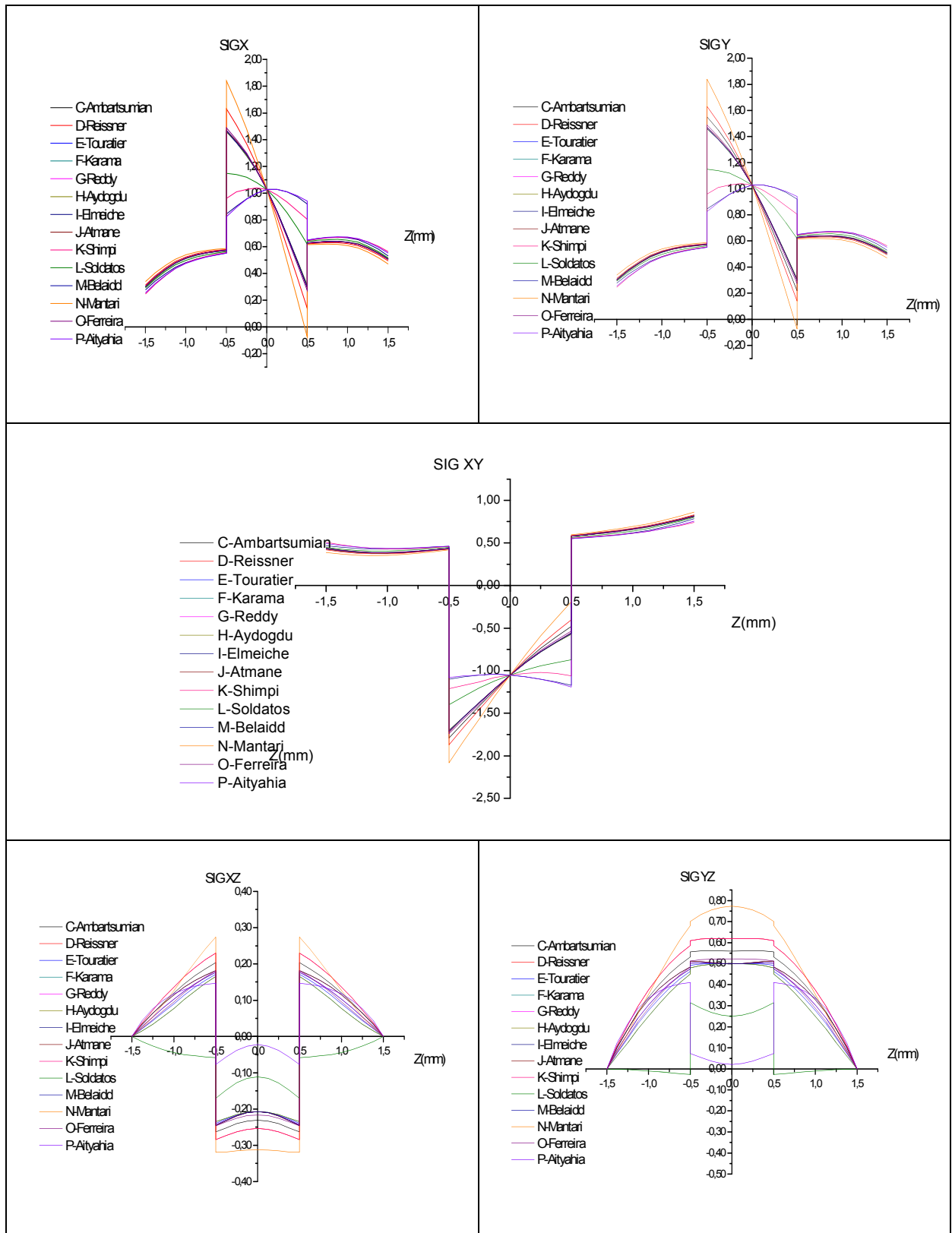


Figure 4.22 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 05.

4.2.3.G-Modèle hygrothermique 06 :

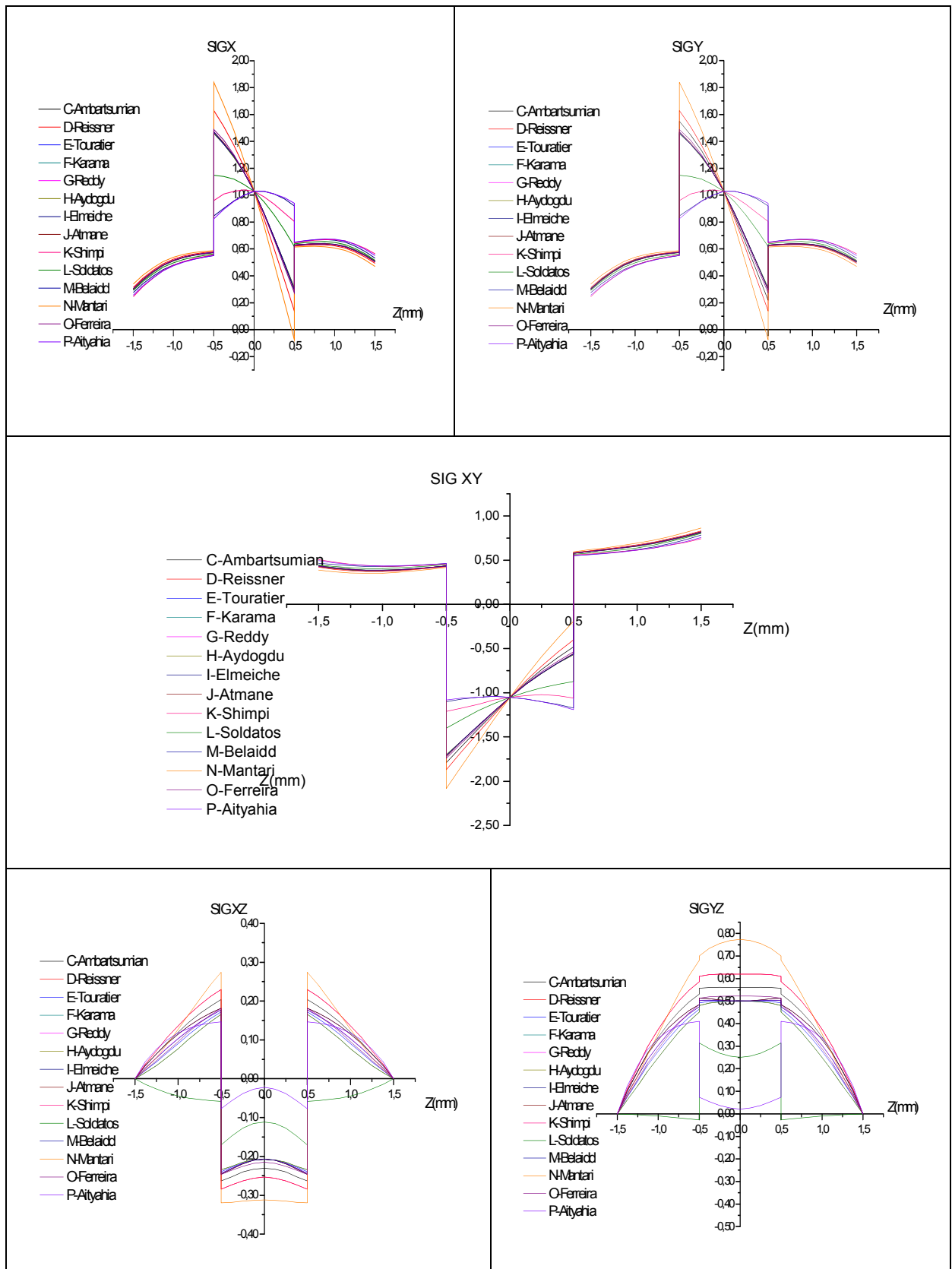


Figure 4.23 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 06.

4.2.3.H-Modèle hygrothermique 07 :

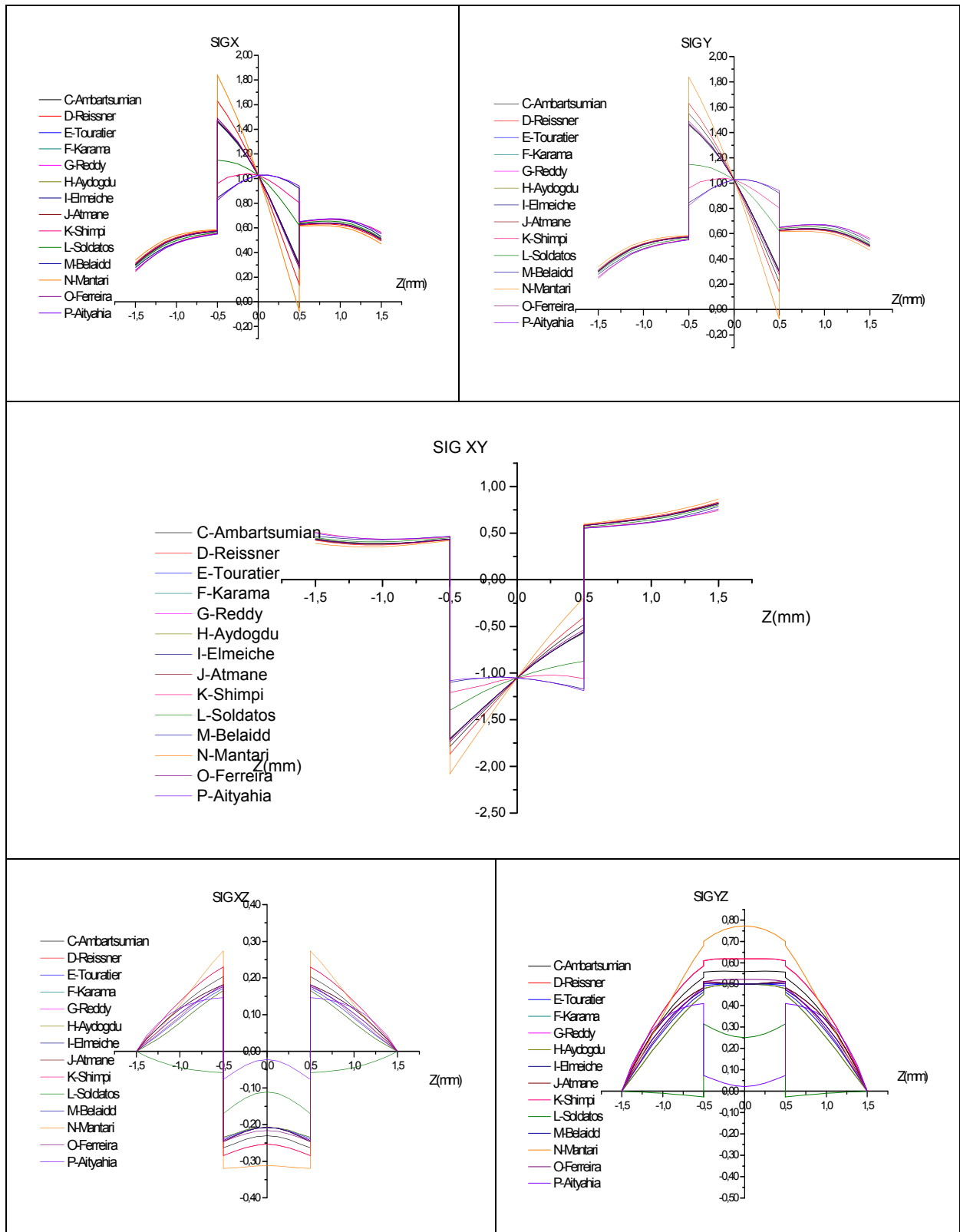


Figure 4.24 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 07.

4.2.3.I-Modèle hygrothermique 08 :

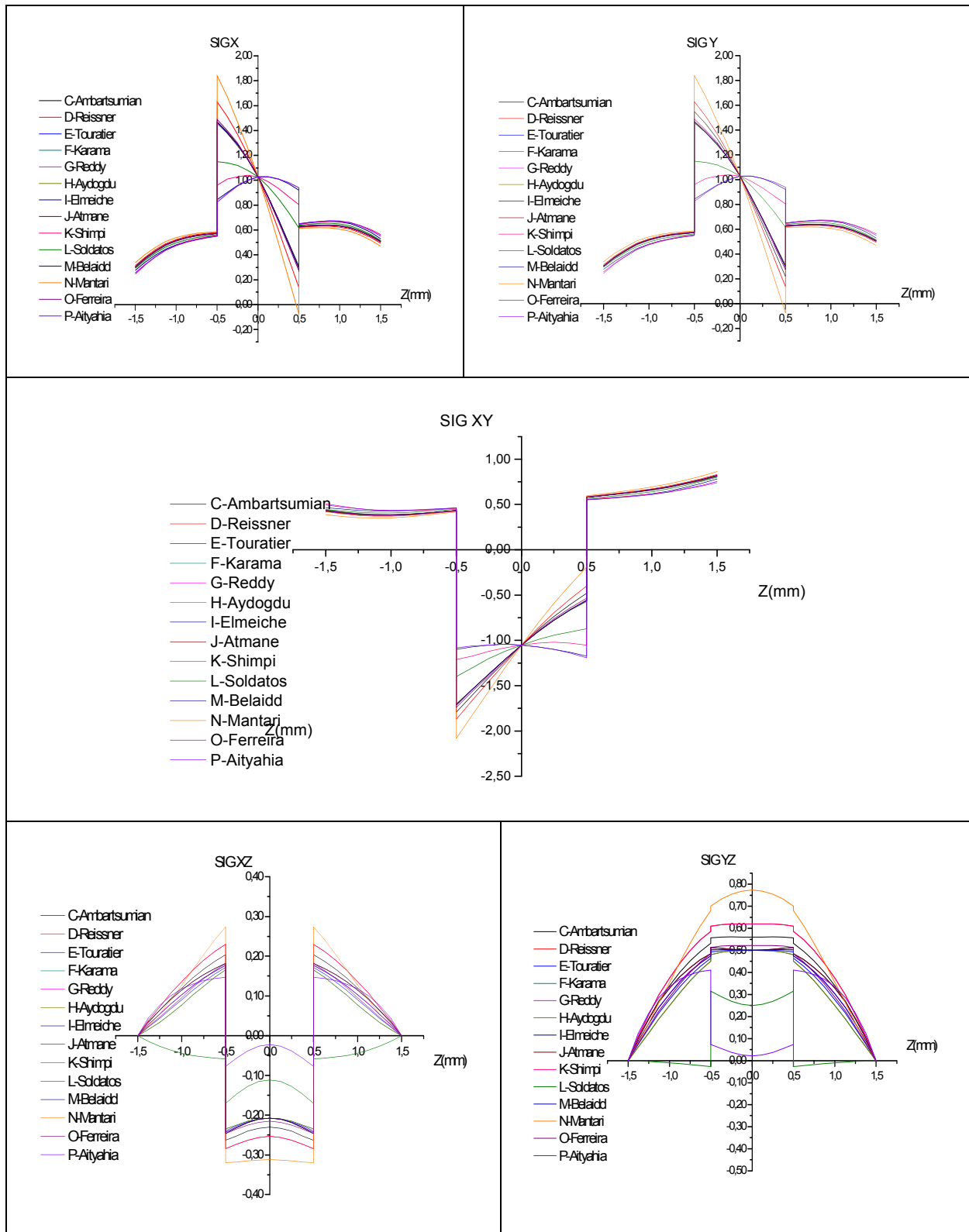


Figure 4.25 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 08.

4.2.3.J-Modèle hygrothermique 09 :

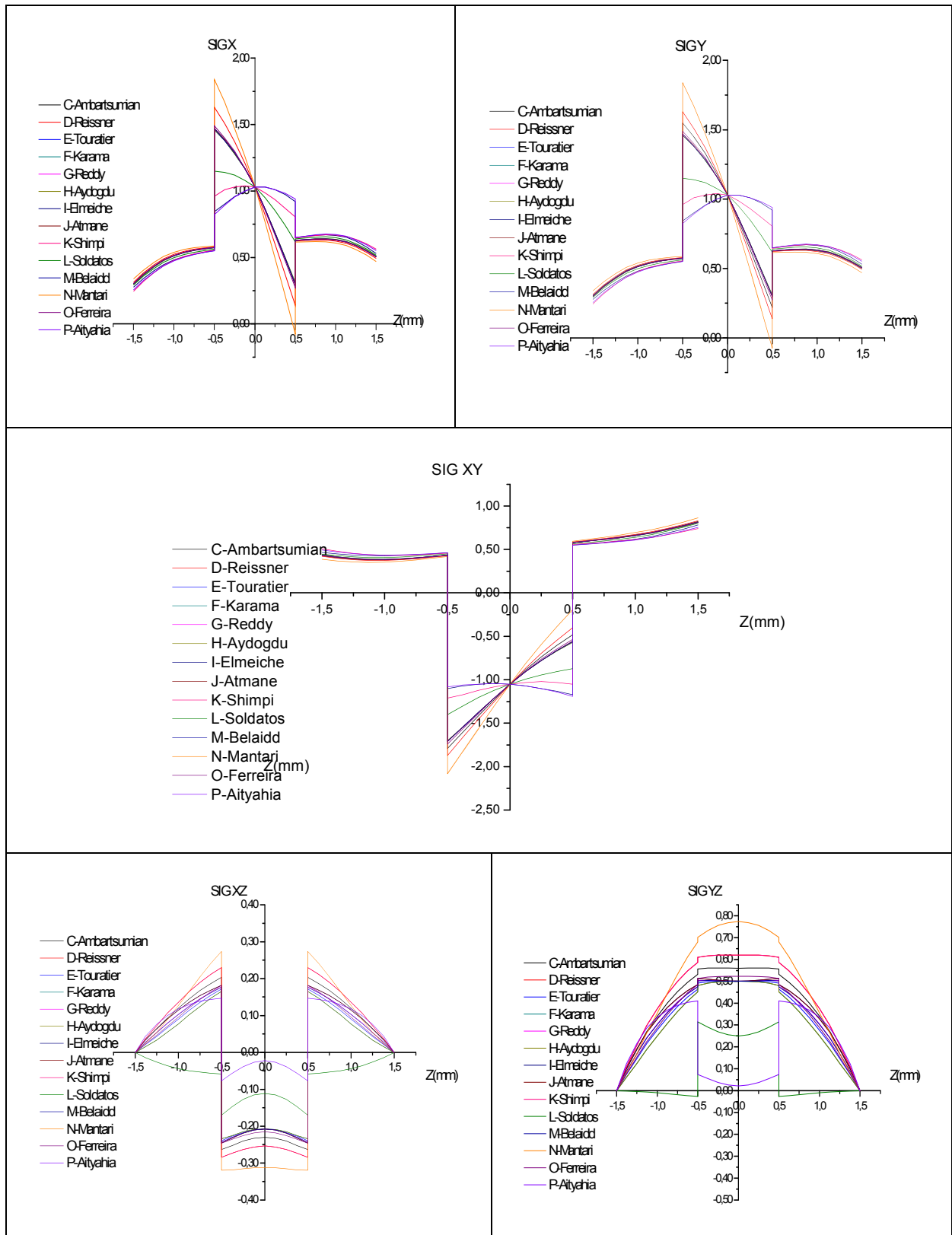


Figure 4.26 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 09.



4.2.3.K-Modèle hygrothermique 10 :

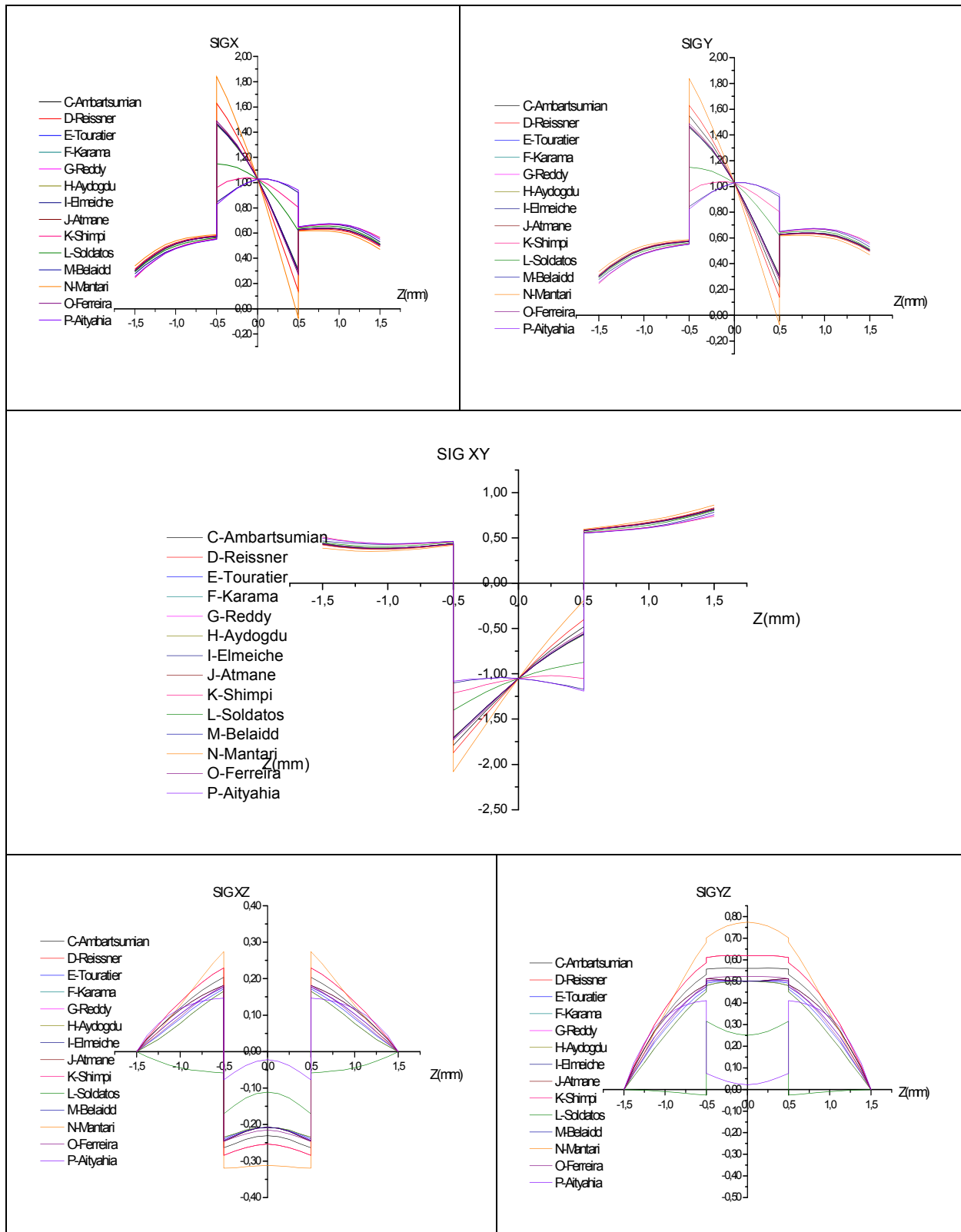


Figure 4.27 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 10.

4.2.3.L-Modèle hygrothermique 11 :

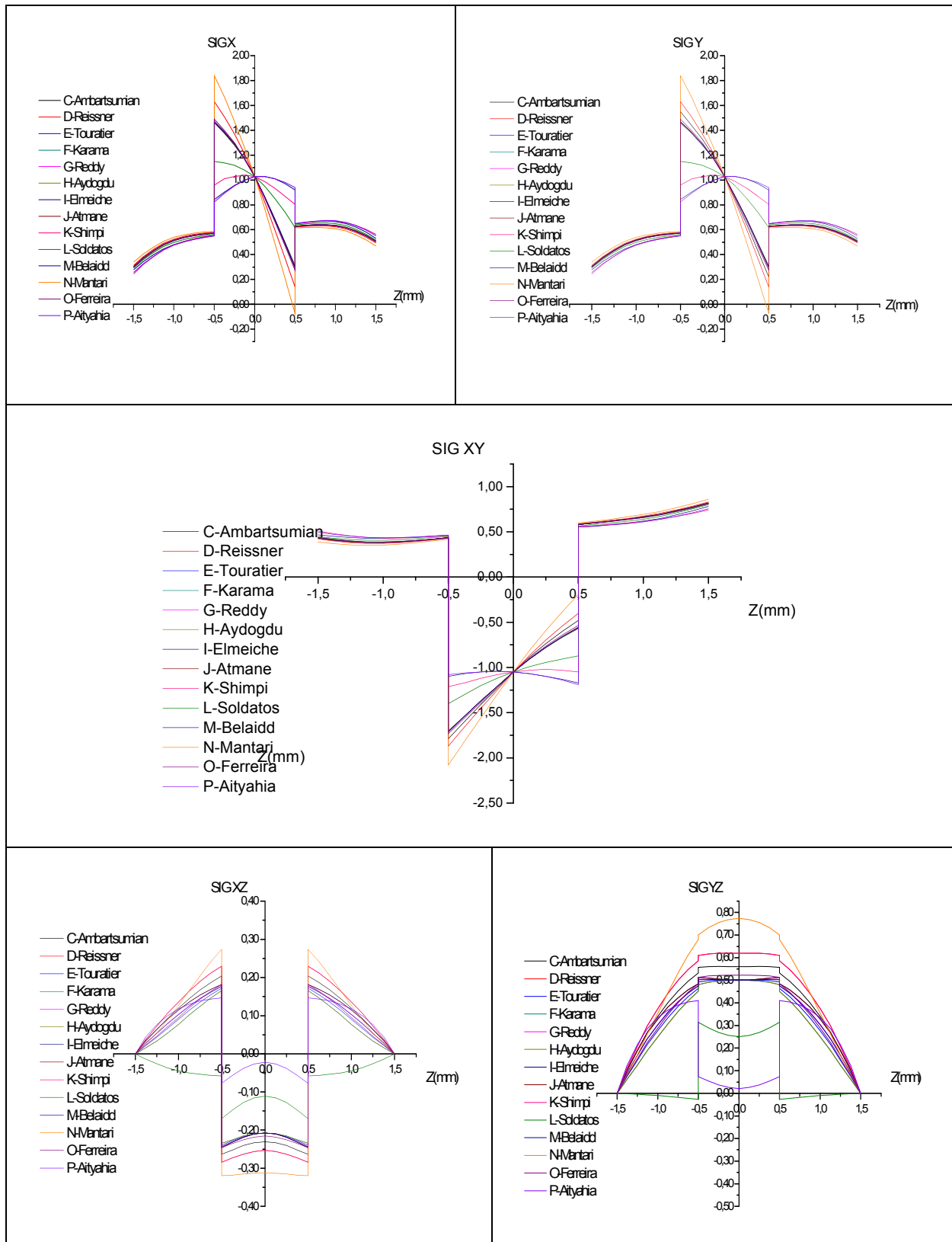
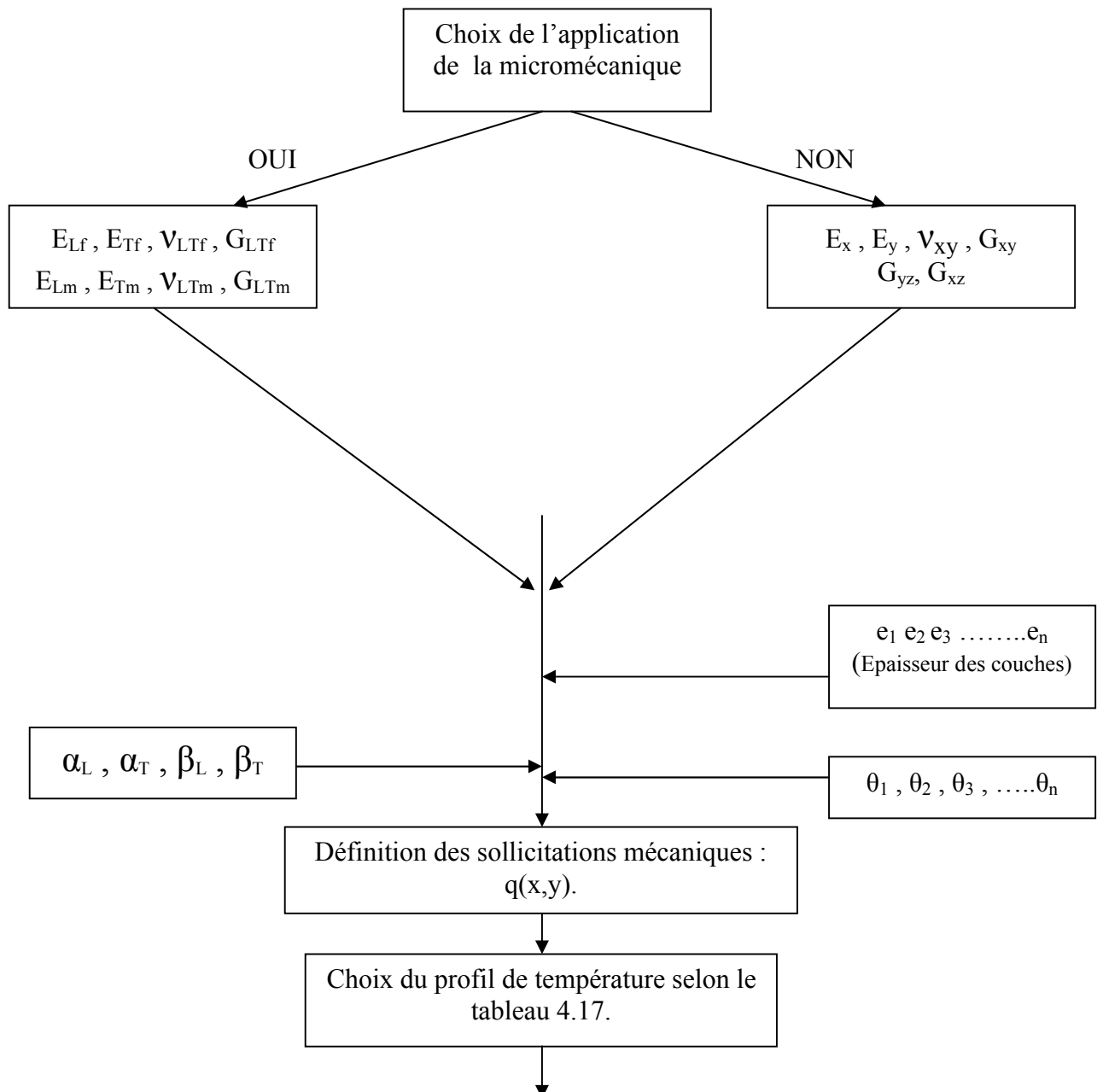


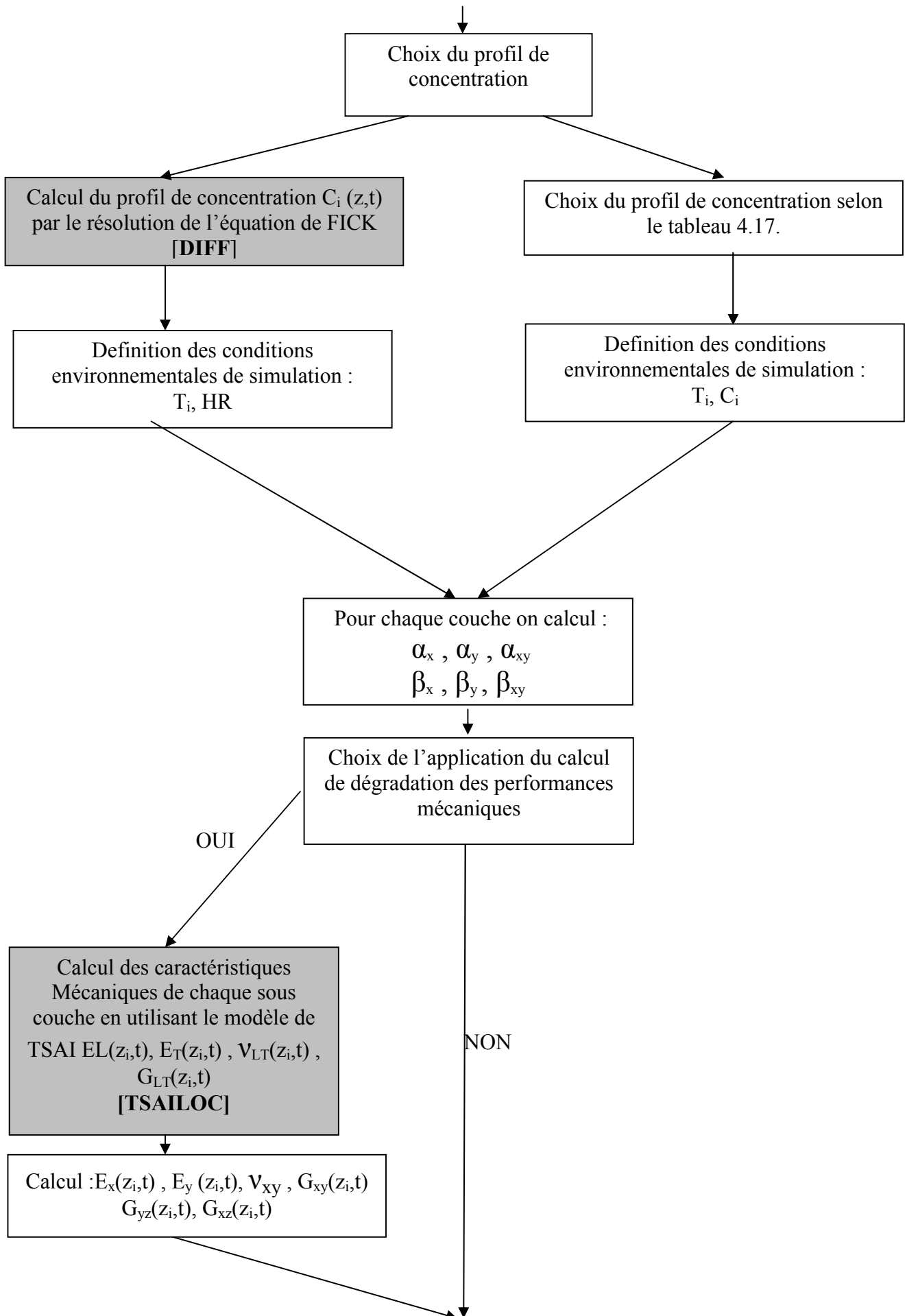
Figure 4.28 : Etat de contrainte par différentes théories HSDT sous chargement hygrothermique-Fick modèle 11.

Comme déjà évoqué dans la section précédente, les figures 4.18 – 4.28 présentent des simulations du comportement d'un stratifié en composite T300/5208 de configuration [45/-45/45] sous différents types de chargements thermiques détaillés dans le tableau 4.1, un chargement hygroscopique est imposé par la loi de FICK, en général les mêmes commentaires de la section précédente sont applicables ici , on remarque que les contraintes  $\sigma_{xx}$  ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  changent d'allure du linéaire au parabolique est sa est dû à la distribution parabolique de la concentration imposée par la loi de Fick.

## 5. Etude du comportement des stratifiées croisées

Dans cette section on va utiliser le schéma de REDDY donné par l'équation (3.106) et le développement fait par les équations 3.107 au 3.131 pour l'analyse du comportement des stratifiées croisées détaillés par les simulations ci-dessous, un programme Fortran appelé AGING-THICK-COMP-MAT est développé expliquer par la Figure 4.29, dans ce programme des nouvelles composantes ont été ajoutées, la première traite l'application des lois micromécaniques dans le calcul des performances mécanique, la deuxième est le choix des profils de concentration entre linéaire paraboliques etc et un profil donné par la loi de Fick, la troisième est le choix de la prise en compte de dégradation des performances mécanique .





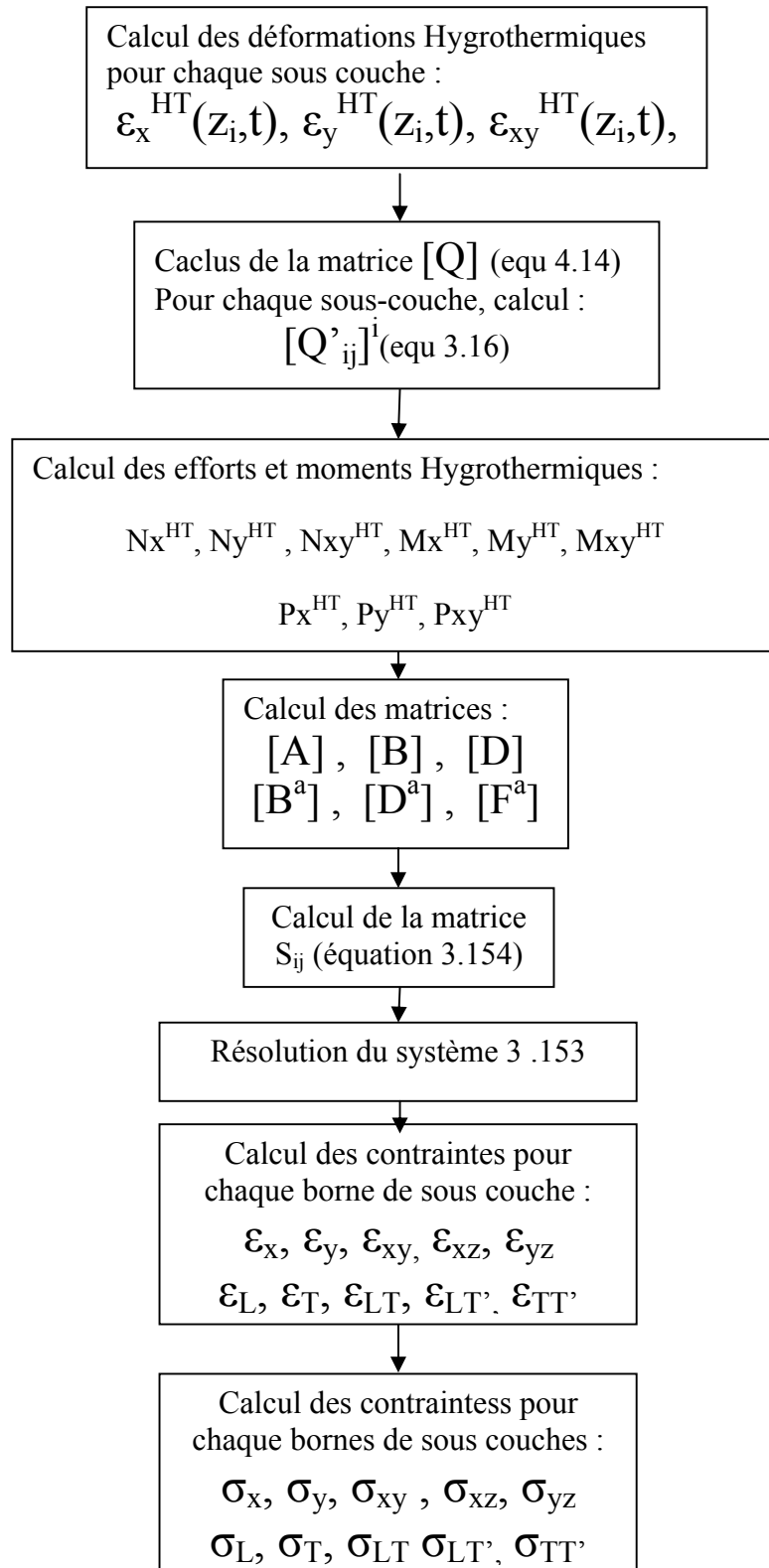


Figure 4.29 : Organigramme AGING-THICK-COMP-MAT de calcul des contraintes et déformations hygrothermomécaniques.

### 5.1 Influence de la distribution $\Delta T$ et $\Delta C$ sur le comportement des stratifiés

Ce paragraphe simule le comportement des stratifiés composites croisés basés sur le schéma de REDDY, selon les modèles cités dans le tableau 4.17 pour un stratifié en T300/5208 [0°/90°/90°/0°] d'épaisseur égale à 1mm avec a/h=4 et a/b=1, les données de simulation sont donnés par le tableau 5.18 et les résultats de cette section sont validés avec la référencés [12][92][149].

N°	REF	Chargement mécanique	$\Delta T$	$\Delta C$
1	M1	OUI	0	0
2	MT1	OUI	$T_0+ZT_1$	0
3	MTC2	OUI	$T_0+ZT_1$	$C_0+ZC_1$
4	MTC3	OUI	$2T_0(z/h)$	$2C_0(z/h)$
5	MTC4	OUI	$T_0(1/2+z/h)$	$C_0(1/2+z/h)$
6	MTC5	OUI	$T_0(1-4z^2/h^2)$	$C_0(1-4z^2/h^2)$
7	MTC6	OUI	$T_0+T_1(2z/h)+T_2(4z^2/h^2)$	$C_0+C_1(2z/h)+C_2(4z^2/h^2)$
8	MTCF1	OUI	$T_0+ZT_1$	Lois de Fick
9	MTCF2	OUI	$2T_0(z/h)$	Lois de Fick
10	MTCF3	OUI	$T_0(1/2+z/h)$	Lois de Fick
11	MTCF4	OUI	$T_0(1-4z^2/h^2)$	Lois de Fick
12	MTCF5	OUI	$T_0+T_1(2z/h)+T_2(4z^2/h^2)$	Lois de Fick

Tableau 4.17 : Modèles de simulation pour les stratifiés croisés.

N°	REF	Chargement mécanique	$\Delta T$	$\Delta C$
1	M1	q0=100	0	0
2	MT1	q0=100	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C$	0
3	MTC2	q0=100	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C$	$C_0=0.01, C_1=0.02$
4	MTC3	q0=100	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
5	MTC4	q0=100	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
6	MTC5	q0=100	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
7	MTC6	q0=100	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C, T_2=20^\circ C$	$C_0=0.01, C_1=0.02, C_2=0.03$
8	MTCF1	q0=100	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
9	MTCF2	q0=100	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
10	MTCF3	q0=100	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
11	MTCF4	q0=100	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
12	MTCF5	q0=100	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C, T_2=20^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)

Tableau 4.18 : Données de simulation.

Telle que :

$$SIG_{xx} = \sigma_{xx} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \left( \frac{a^2}{\alpha_L \cdot E_L \cdot h \cdot 10^7} \right), \quad SIG_{yy} = \sigma_{yy} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right) \left( \frac{a^2}{\alpha_L \cdot E_L \cdot h \cdot 10^7} \right), \quad SIG_{xy} = \sigma_{xy} (0, 0, z) \left( \frac{a^2}{\alpha_L \cdot E_L \cdot h} \right)$$

$$SIG_{xz} = \sigma_{xz} \left( 0, \frac{b}{2}, z \right) \left( \frac{a^2}{\alpha_L \cdot E_L \cdot h \cdot 10^3} \right), \quad SIG_{yz} = \sigma_{yz} \left( \frac{a}{2}, 0, z \right) \left( \frac{a^2}{\alpha_L \cdot E_L \cdot h \cdot 10^3} \right)$$

### 5.1.A-Modèle M1 :

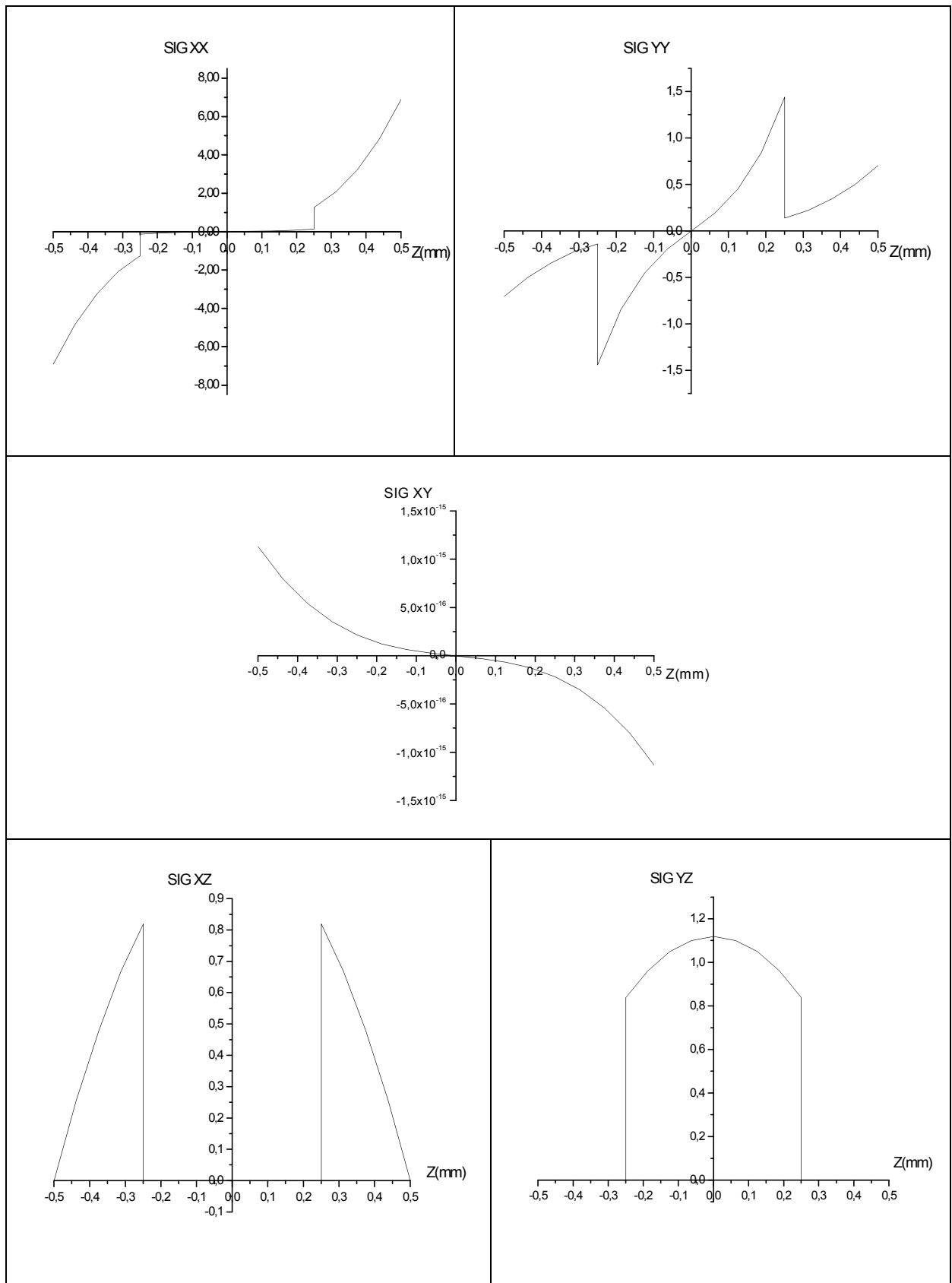


Figure 4.30 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique-modèle M1.



### 5.1.B-Modèle MT1 :

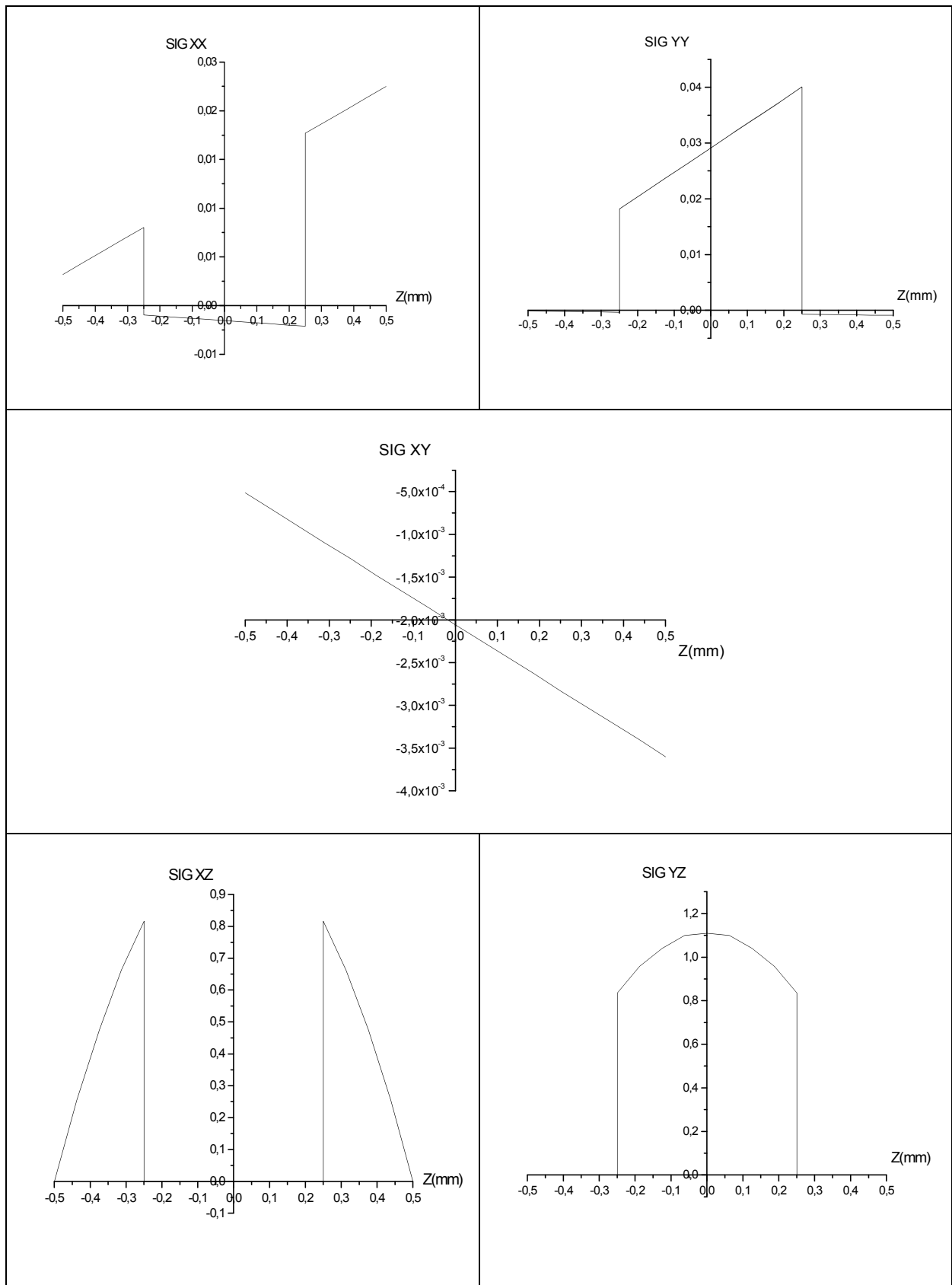


Figure 4.31 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique- modèle MT1.

### 5.1.C-Modèle MTC2 :

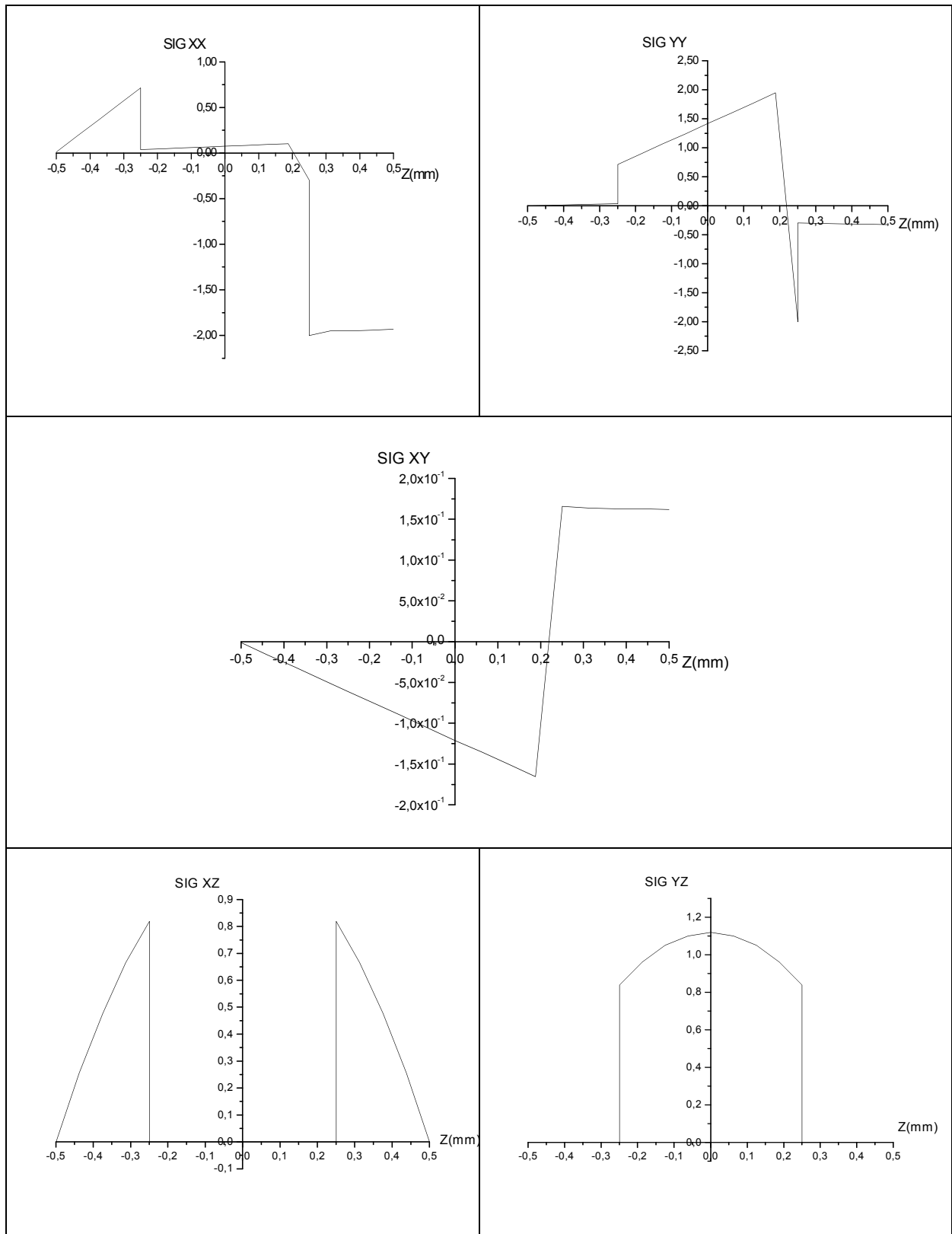


Figure 4.32: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC2.

### 5.1.D-Modèle MTC3 :

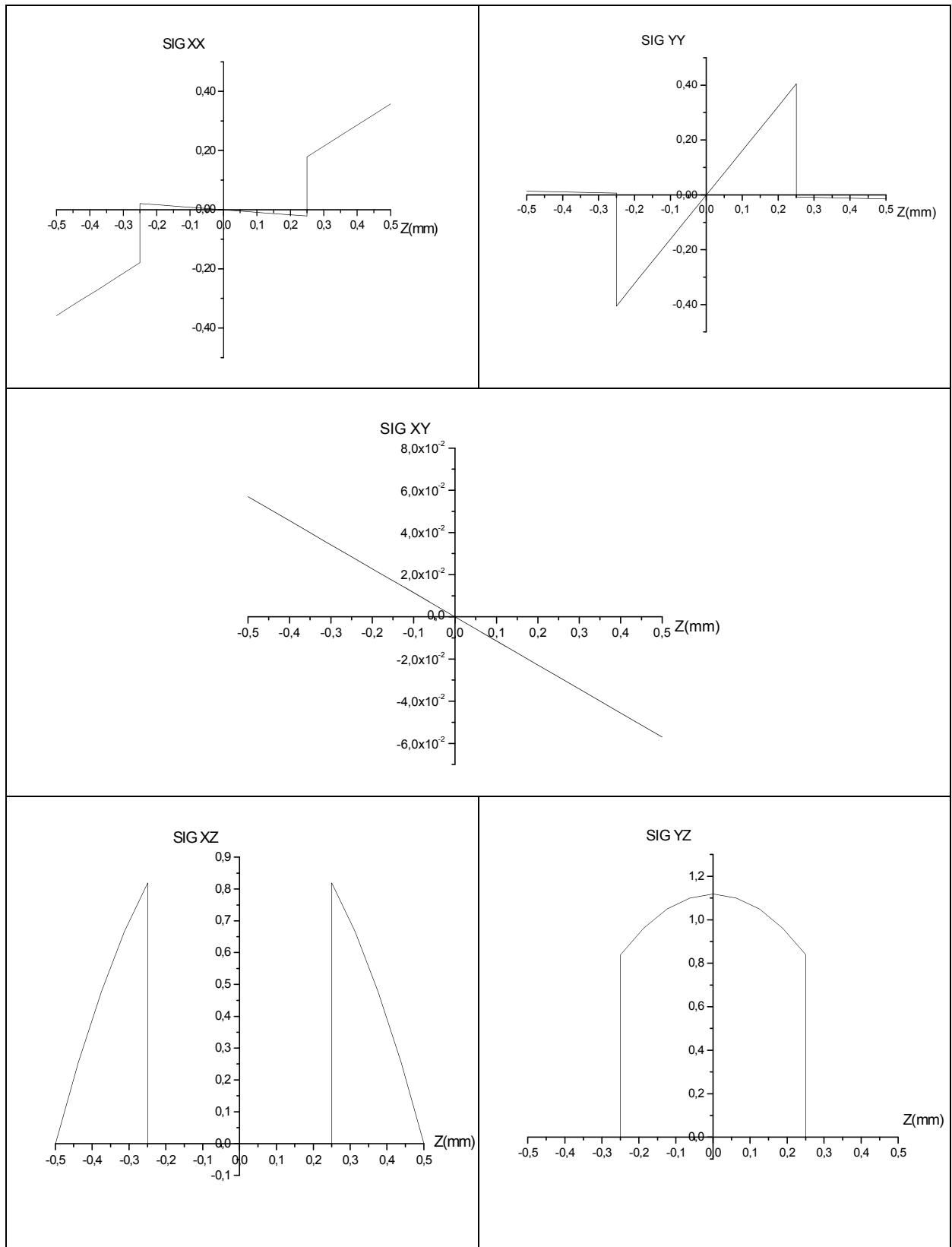


Figure 4.33 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC3.

### 5.1.E-Modele MTC4 :

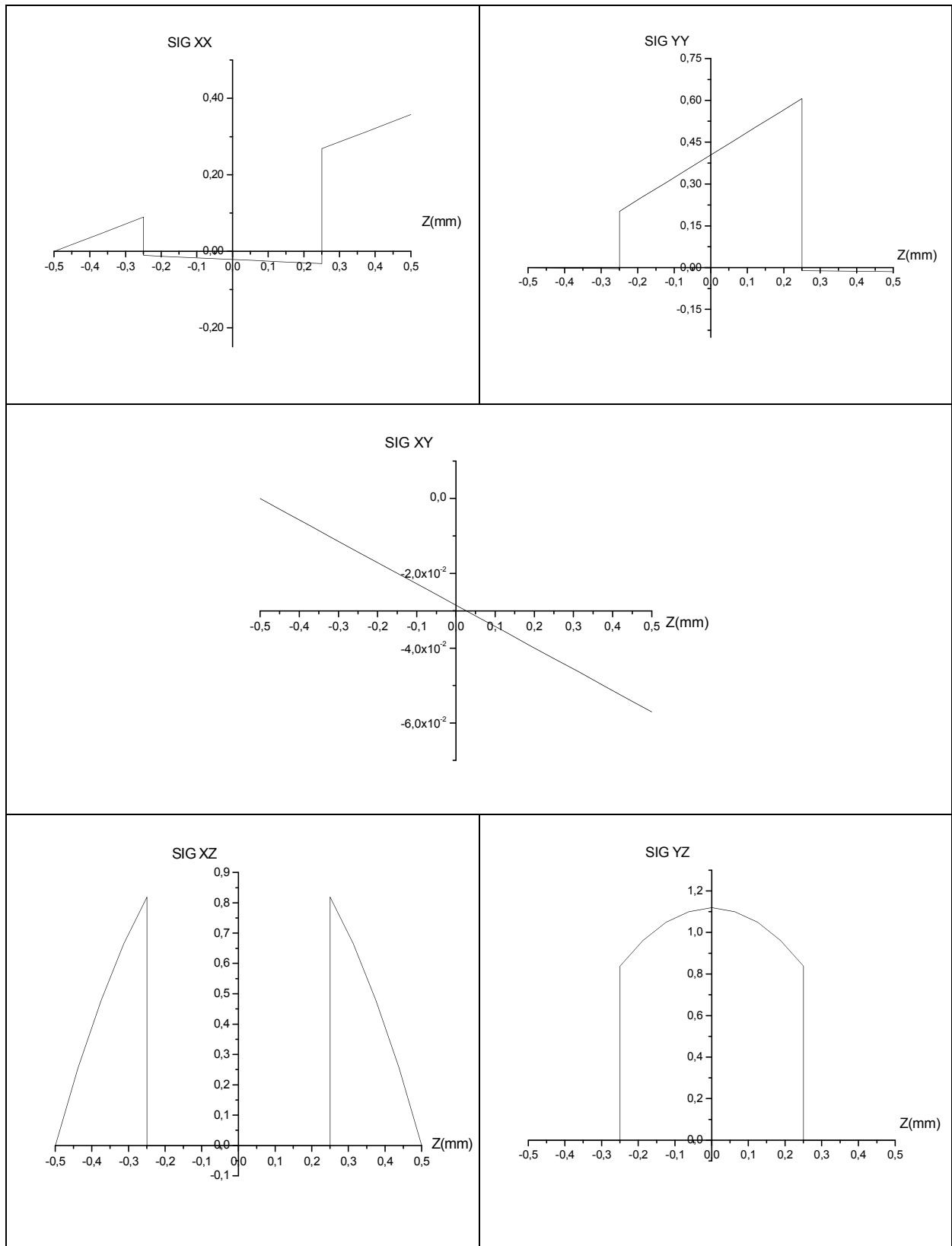


Figure 4.34 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC4.

### 5.1.F-Modele MTC5 :

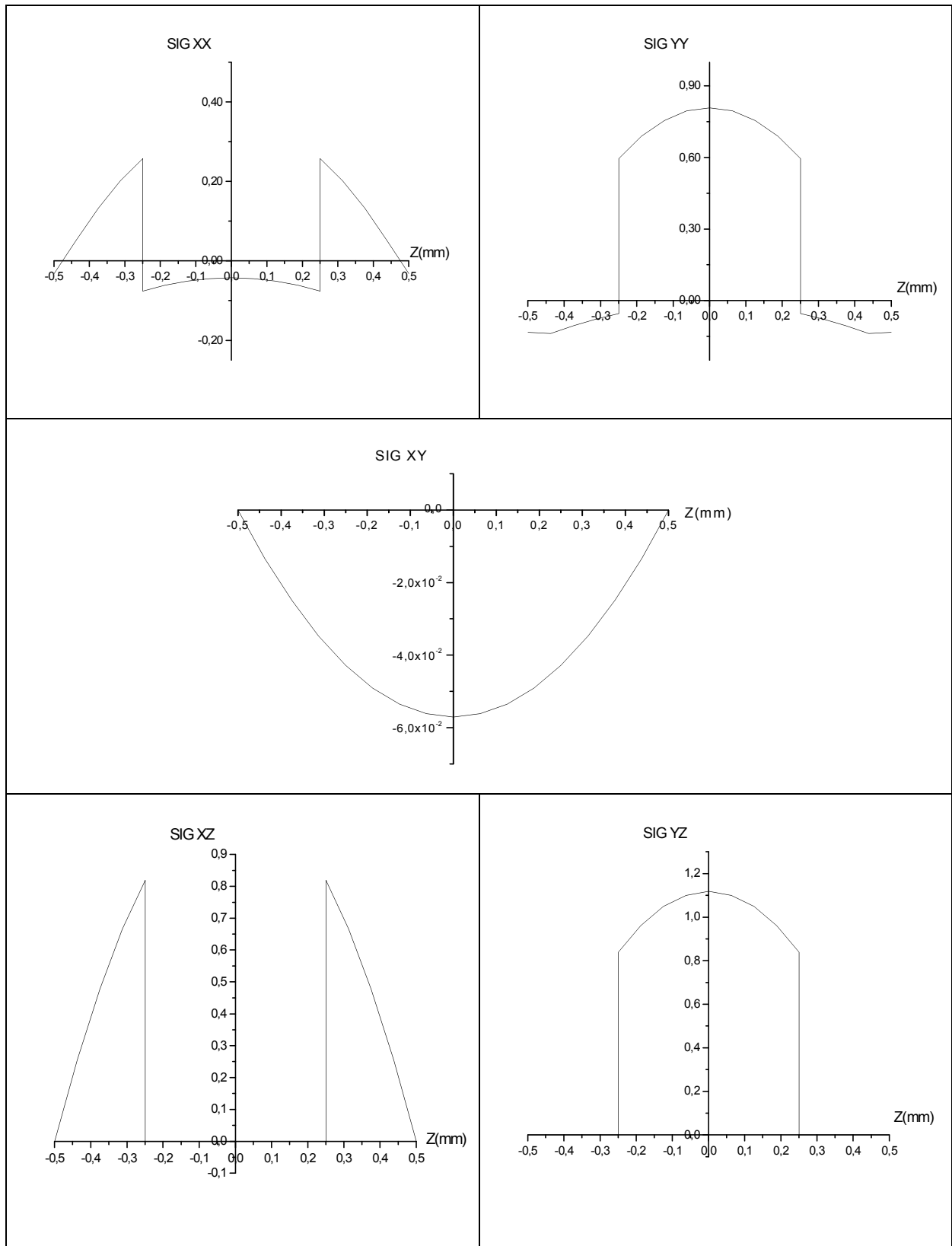


Figure 4.35 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC5.

5.1.G-Modele MTC6 :

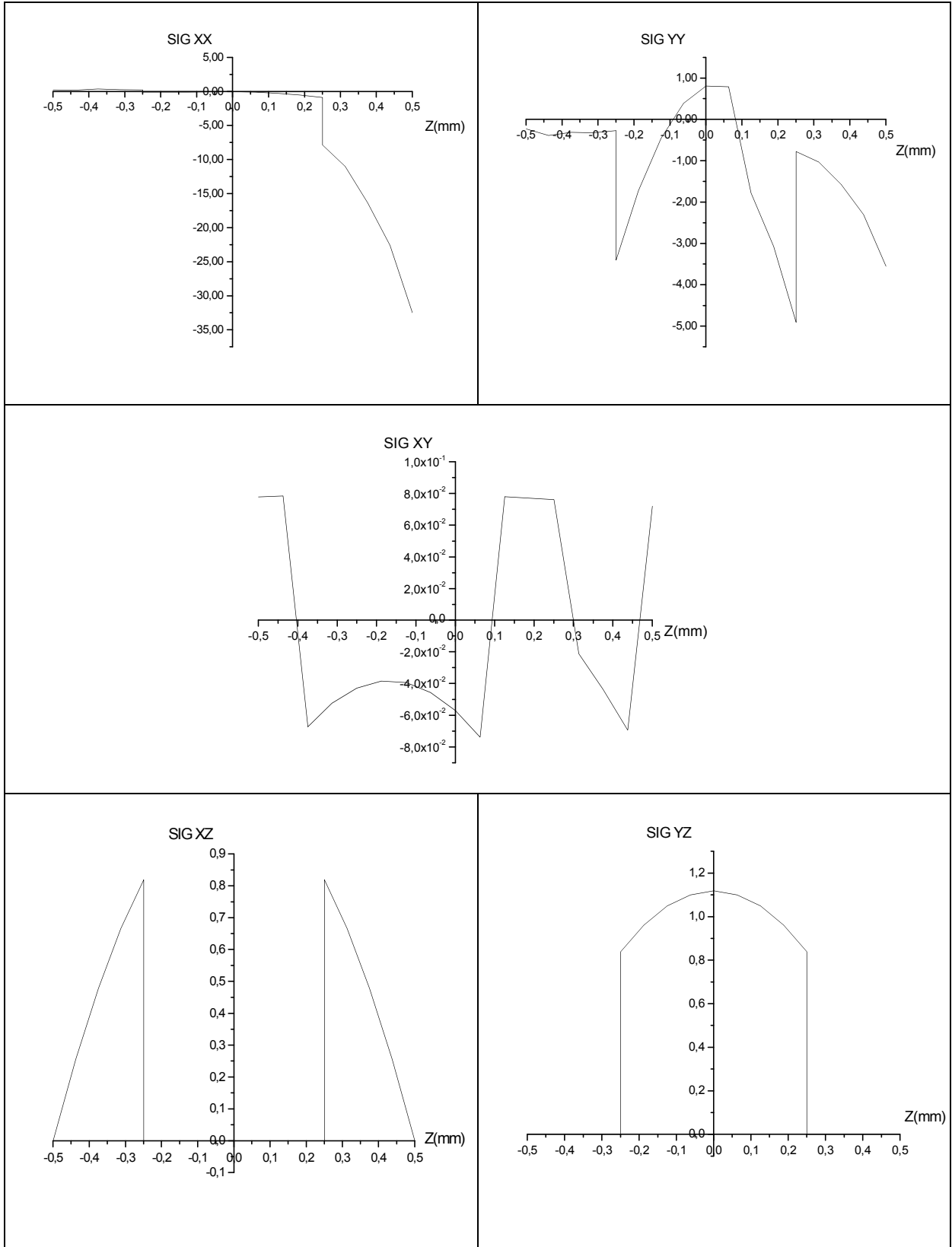


Figure 4.36 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC6.

5.1.H-Modele MTCF1 :

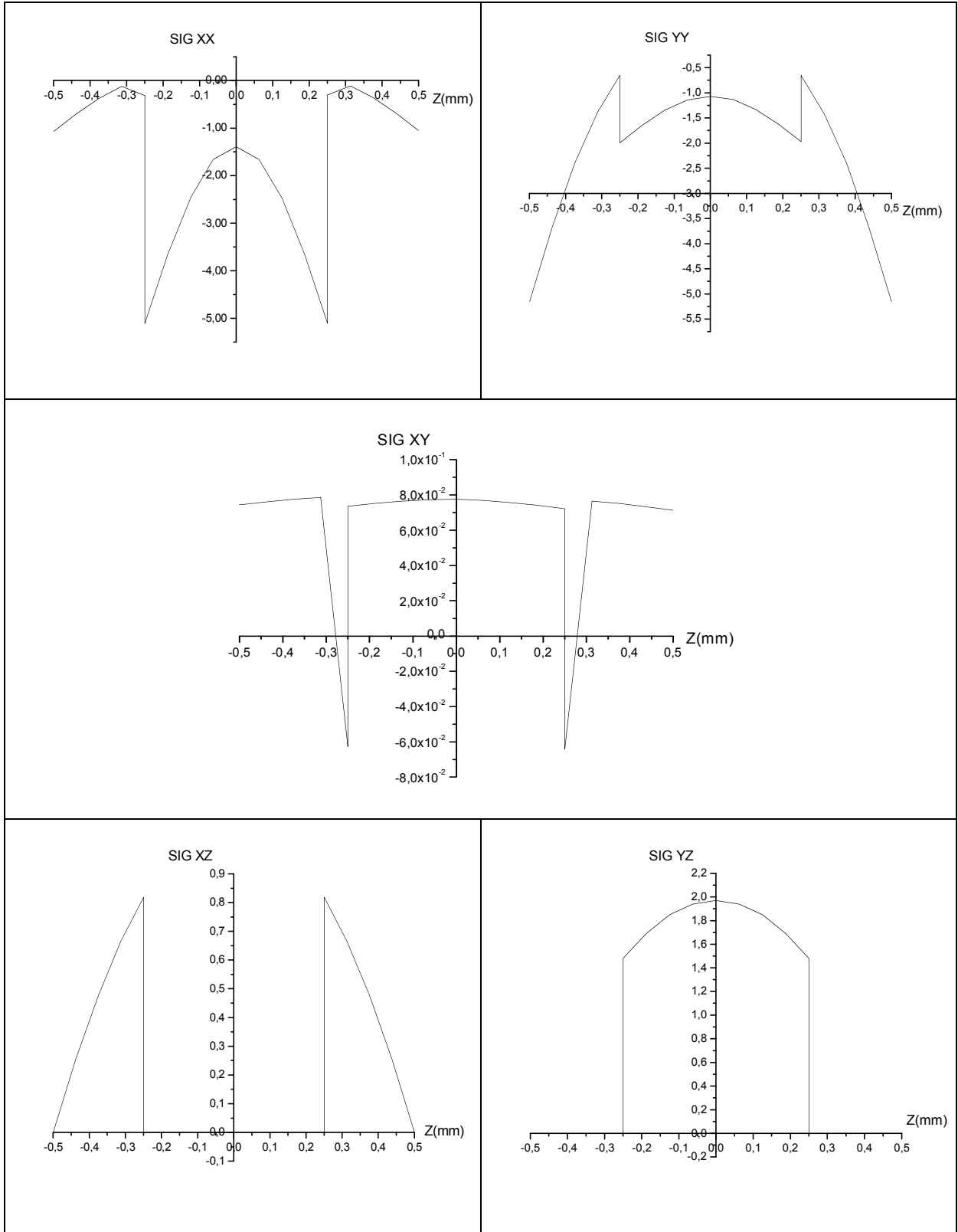


Figure 4.37 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF1.

### 5.1.1-Modele MTCF2 :

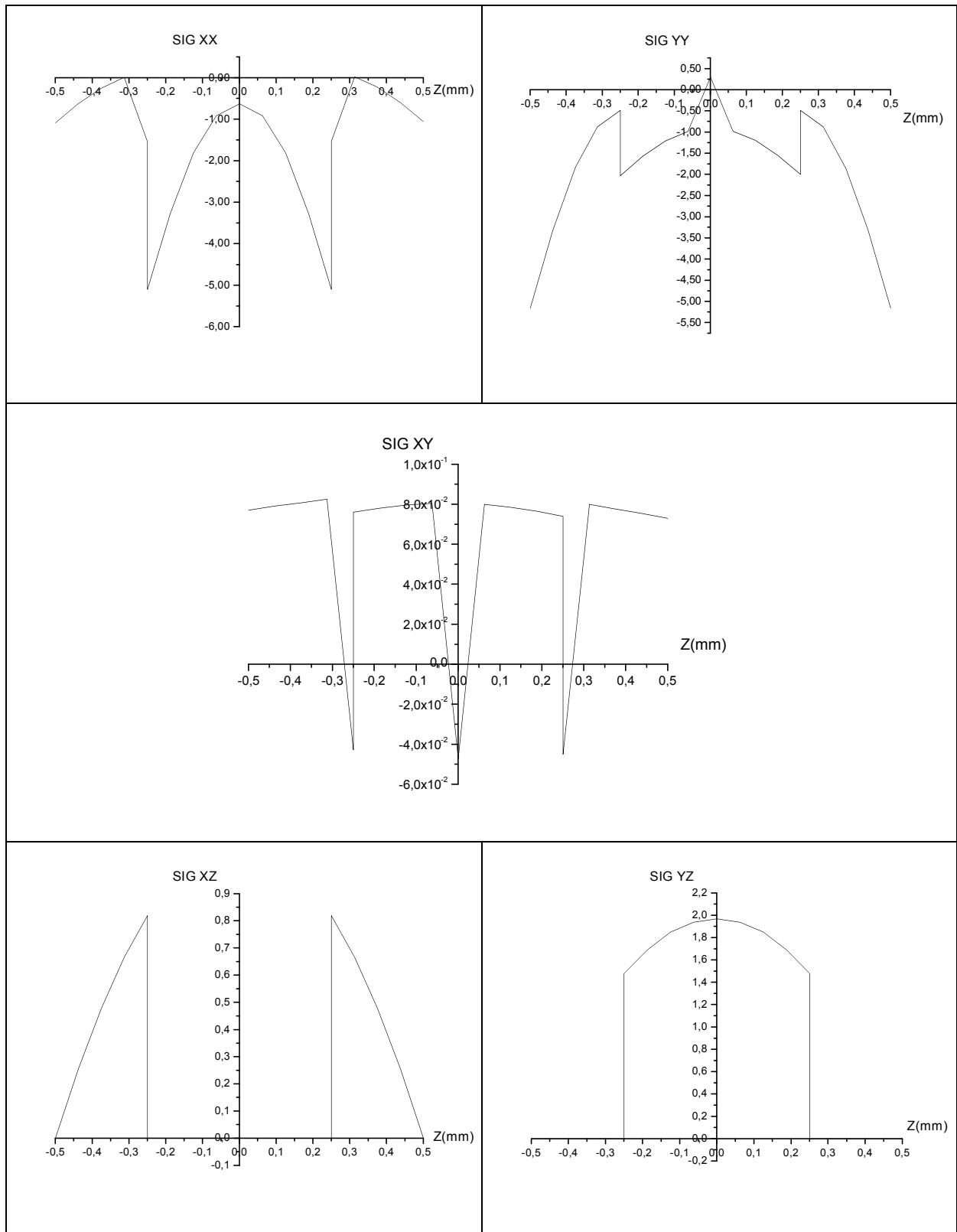


Figure 4.38 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF2.



### 5.1.J-Modele MTCF3 :

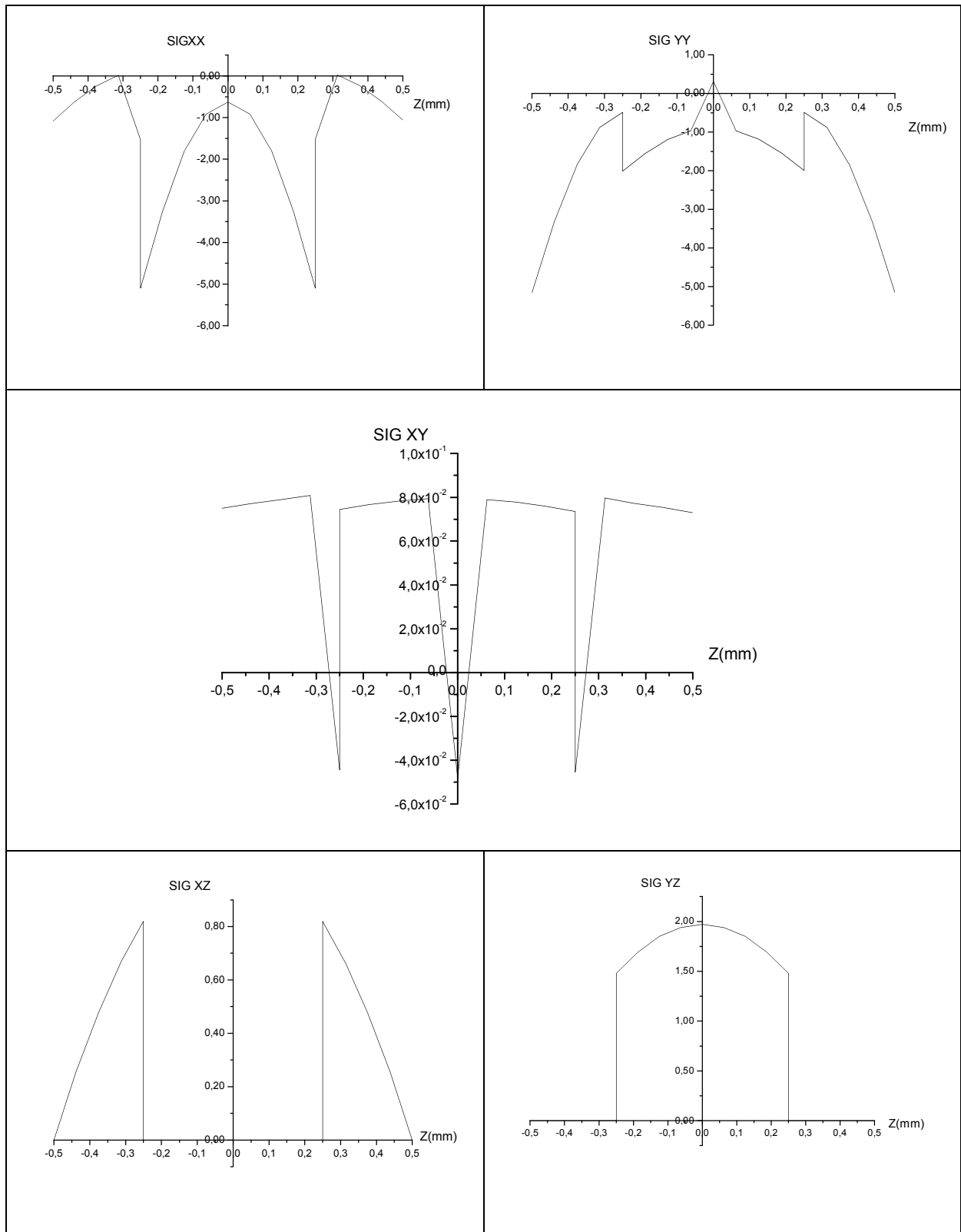


Figure 4.39 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF3.

### 5.1.K-Modele MTCF4 :

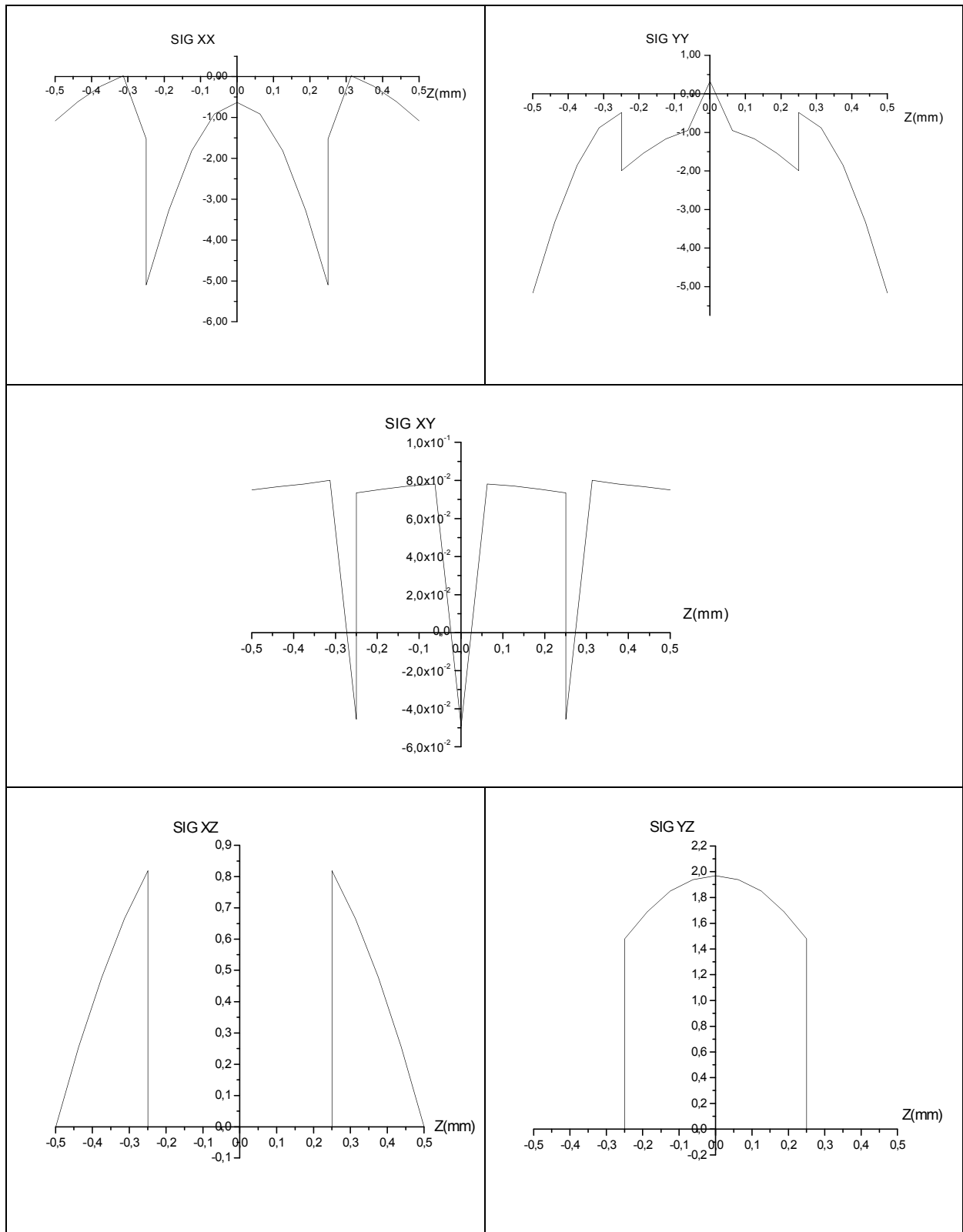


Figure 4.40 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF4.

### 5.1.L-Modele MTCF5 :

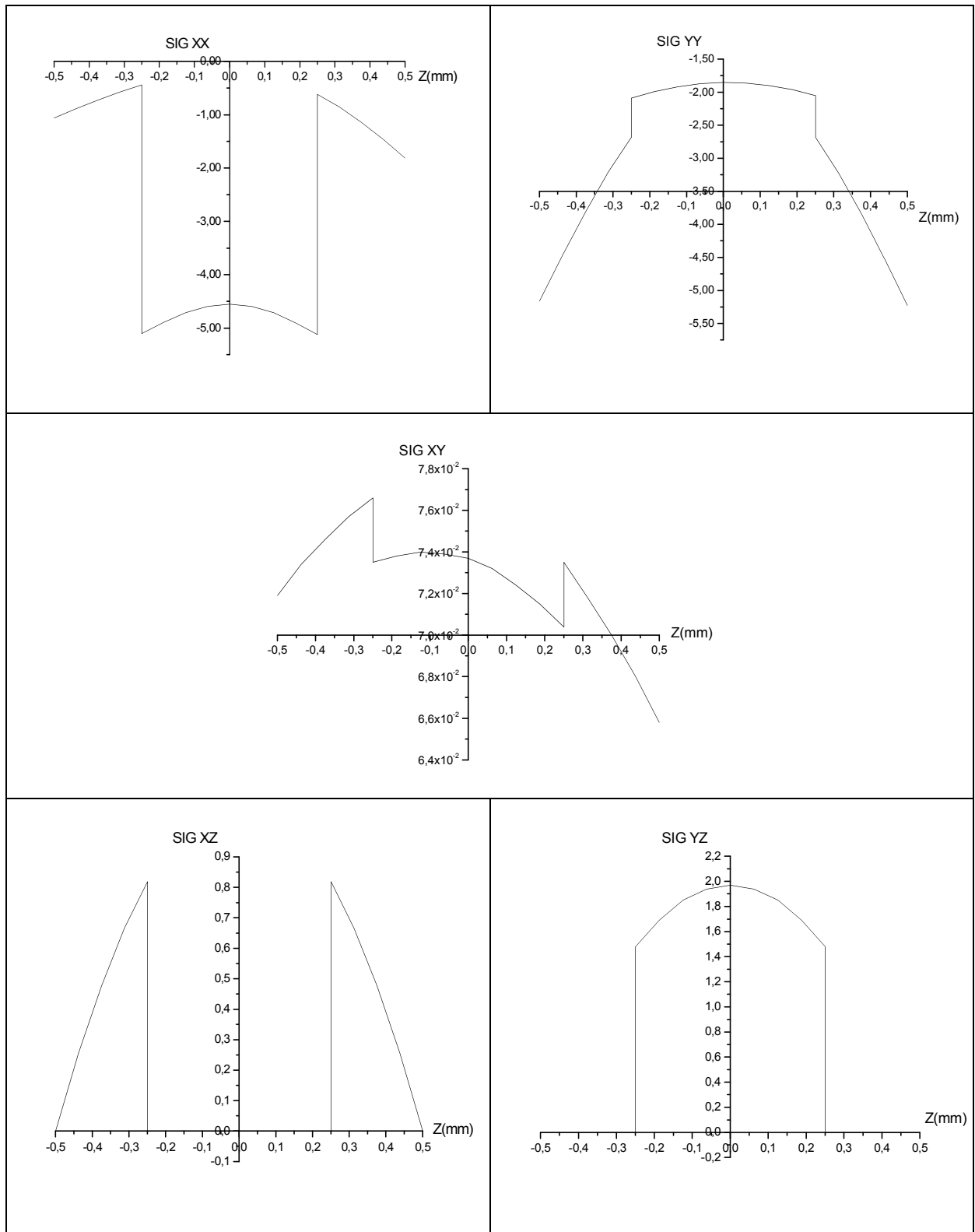


Figure 4.41 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5.

Les figures 4.30 au 4.41 représentent des simulations faites sur un stratifié composite en T300/5208 d'architecture croisée  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  d'épaisseur de 1mm en utilisant le schéma de REDDY, le stratifié est soumis à une force mécanique  $q_0$  sinusoïdale égale 100, différents cas de chargement hygrothermique sont traités comme expliqué par le tableau 4.18, les simulations passent du cas de chargement purement mécanique (Modèle M1) à un chargement thermomécanique (Modèle MT1), à un chargement Hygrothermomécanique, plusieurs allures de chargement sont simulées simultanément, on cite par exemple une distribution linéaire de température et humidité – Modèle MTC2, MTC3, MTC4, cas parabolique pour la température et humidité (MTC6), un autre cas de figure est traité, c'est le cas d'une sollicitation hygrothermomécanique ou particulièrement un chargement hygroscopique est géré par la loi de Fick (Modèle MTCF1, MTCF2, MTCF3, MTCF4, MTCF5).

Les simulations montrent une très forte dépendance entre le comportement du stratifié en terme de  $\text{Sig } xx$ ,  $\text{Sig } yy$ ,  $\text{Sig } xy$  et le mode de chargement MTC2, MTC3, MTC4, MTC5, MTC6, pour le chargement MTC2 les contraintes  $\text{Sig } xx$ ,  $yy$ ,  $xy$  reflètent directement l'allure du chargement thermique et hygroscopique qui donne un  $0^\circ$  pour  $z=-h/2$  et  $T=T_1$  pour  $z=h/2$ , le chargement MTC3 donne une distribution de contrainte antisymétrique qui résulte directement de l'allure antisymétrique donnée par le chargement de température et humidité, les commentaires du chargement MTC2 sont applicables au chargement MTC4, le chargement MTC5 est symétrique et par conséquent les contraintes suivent une allure symétrique.

Les chargements MTCF1, MTCF2, MTCF3, MTCF4, MTCF5 montrent une faible dépendance entre le type de chargement et le comportement, l'allure de  $\text{Sig } xx$ ,  $yy$ ,  $xy$  est la même avec quelques différences mineures, ce qui confirme la dominance du chargement hygroscopique géré par la loi de Fick par rapport aux différents chargements thermiques.

## 5.2. Influence de la température et le taux d'humidité sur le comportement des stratifiés (Environnement variable)

Pour ce paragraphe on va simule le comportement des stratifiés composites croisés selon les modèles cités dans le tableau 4.17 dans plusieurs environnements dans le but de voir l'influence de la température et humidité pour un stratifié en T300/5208 [0°/90°/90°/0°] d'épaisseur égale à 1mm avec  $a/h=4$  et  $a/b=1$ , les données de simulation sont données par le tableau 4.19.

N°	REF	Chargement mécanique	Environnement	$\Delta T$	$\Delta C$
2	MT1	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}, T_1=15^\circ\text{C}$	0
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}, T_1=20^\circ\text{C}$	0
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}, T_1=25^\circ\text{C}$	0
3	MTC2	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}, T_1=15^\circ\text{C}$	$C_0=0.01, C_1=0.02$
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}, T_1=20^\circ\text{C}$	$C_0=0.02, C_1=0.03$
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}, T_1=25^\circ\text{C}$	$C_0=0.03, C_1=0.04$
4	MTC3	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}$	$C_0=0.01$
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}$	$C_0=0.02$
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}$	$C_0=0.03$
5	MTC4	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}$	$C_0=0.01$
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}$	$C_0=0.02$
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}$	$C_0=0.03$
6	MTC5	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}$	$C_0=0.01$
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}$	$C_0=0.02$
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}$	$C_0=0.03$
7	MTC6	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}, T_1=15^\circ\text{C}, T_2=20^\circ\text{C}$	$C_0=0.01, C_1=0.02, C_2=0.03$
			ENV 2	$T_0=20^\circ\text{C}, T_1=25^\circ\text{C}, T_2=30^\circ\text{C}$	$C_0=0.03, C_1=0.04, C_2=0.05$
			ENV 3	$T_0=30^\circ\text{C}, T_1=35^\circ\text{C}, T_2=40^\circ\text{C}$	$C_0=0.05, C_1=0.06, C_2=0.07$
8	MTCF1	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}, T_1=15^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=40%, t=200H)
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}, T_1=20^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=50%, t=200H)
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}, T_1=25^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=60%, t=200H)
9 10 11	MTCF2 MTCF3 MTCF4	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=40%, t=200H)
			ENV 2	$T_0=15^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=50%, t=200H)
			ENV 3	$T_0=20^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=60%, t=200H)
12	MTCF5	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ\text{C}, T_1=15^\circ\text{C}, T_2=20^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=40%, t=200H)
			ENV 2	$T_0=20^\circ\text{C}, T_1=25^\circ\text{C}, T_2=30^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=50%, t=200H)
			ENV 3	$T_0=30^\circ\text{C}, T_1=35^\circ\text{C}, T_2=40^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=60%, t=200H)

Tableau 4.19 : Données de simulation.

5.2.A-Modèle MT1 :

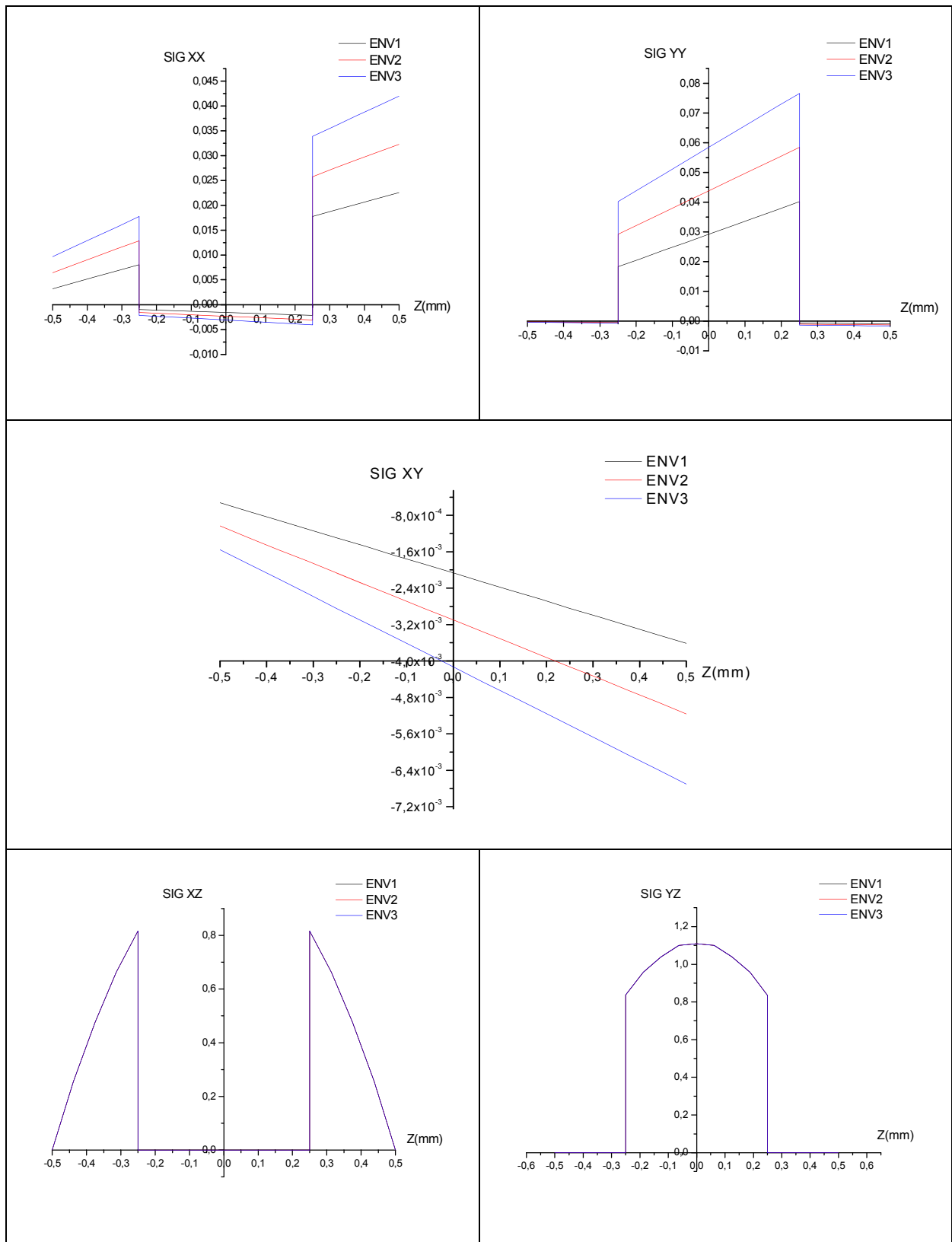


Figure 4.42 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèle MT1.

### 5.2.B-Modele MTC2 :

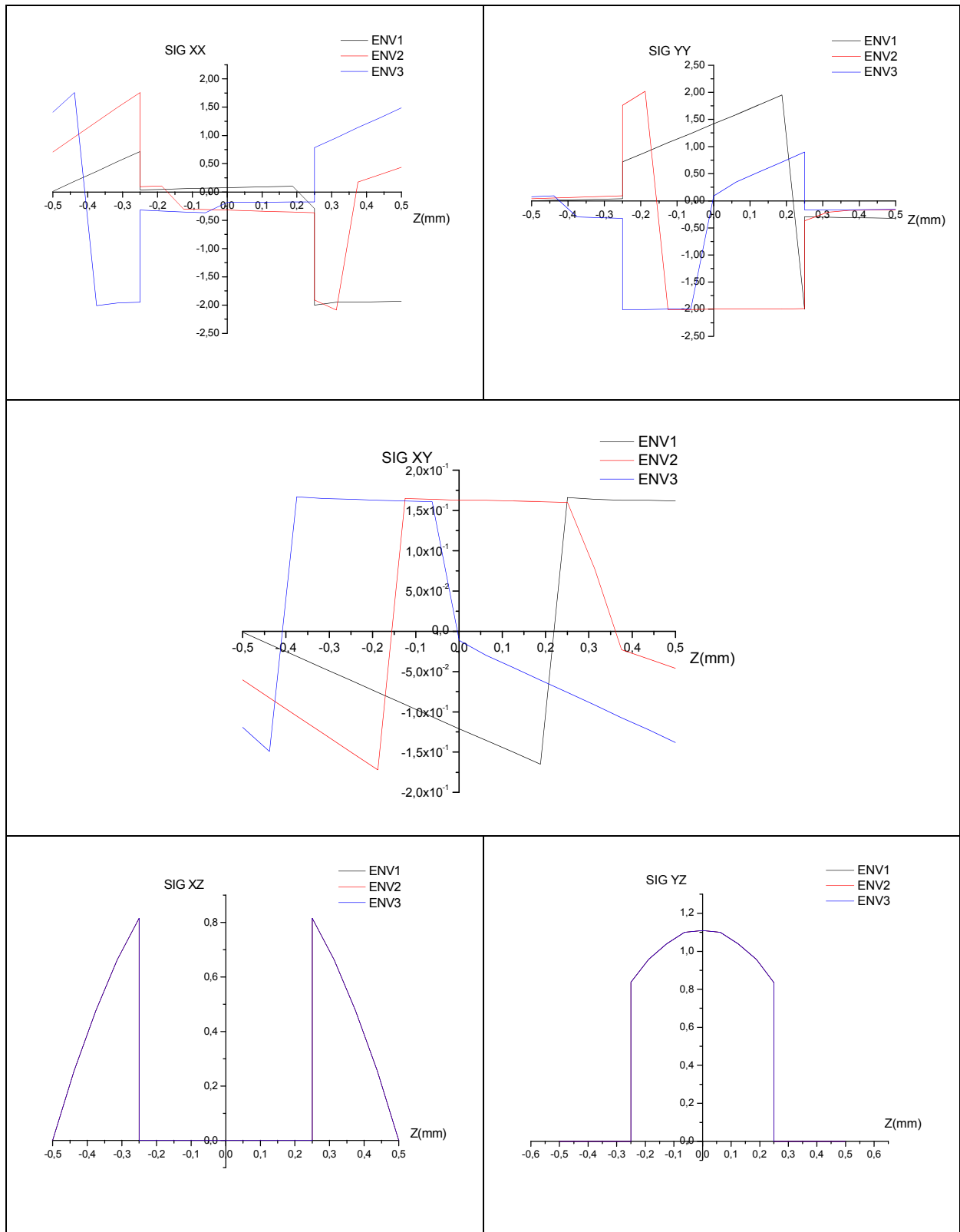


Figure 4.43 :Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique-  
modèle MTC2.

5.2.C-Modele MTC3 :

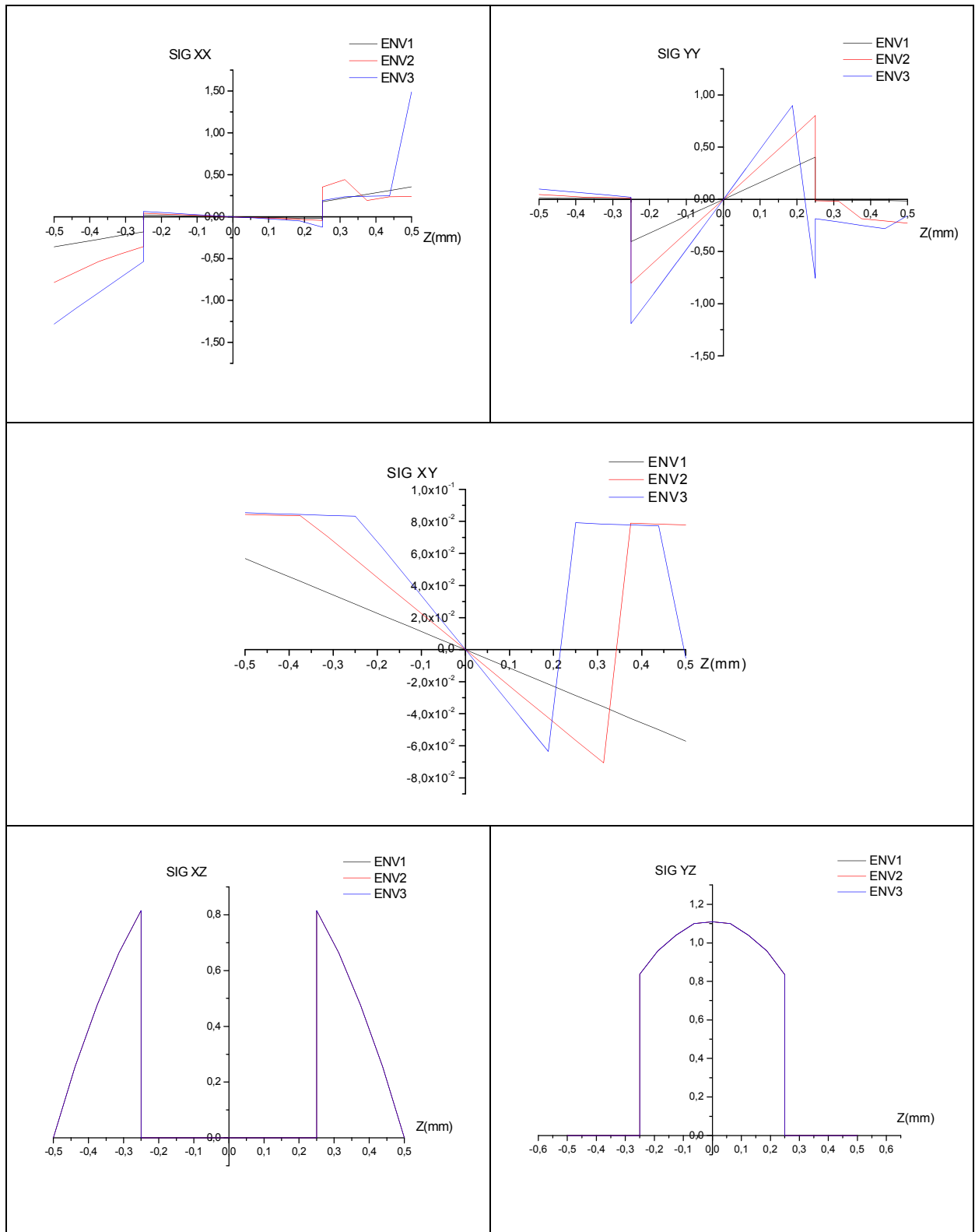


Figure 4.44: Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTC3.



### 5.2.D-Modele MTC4 :

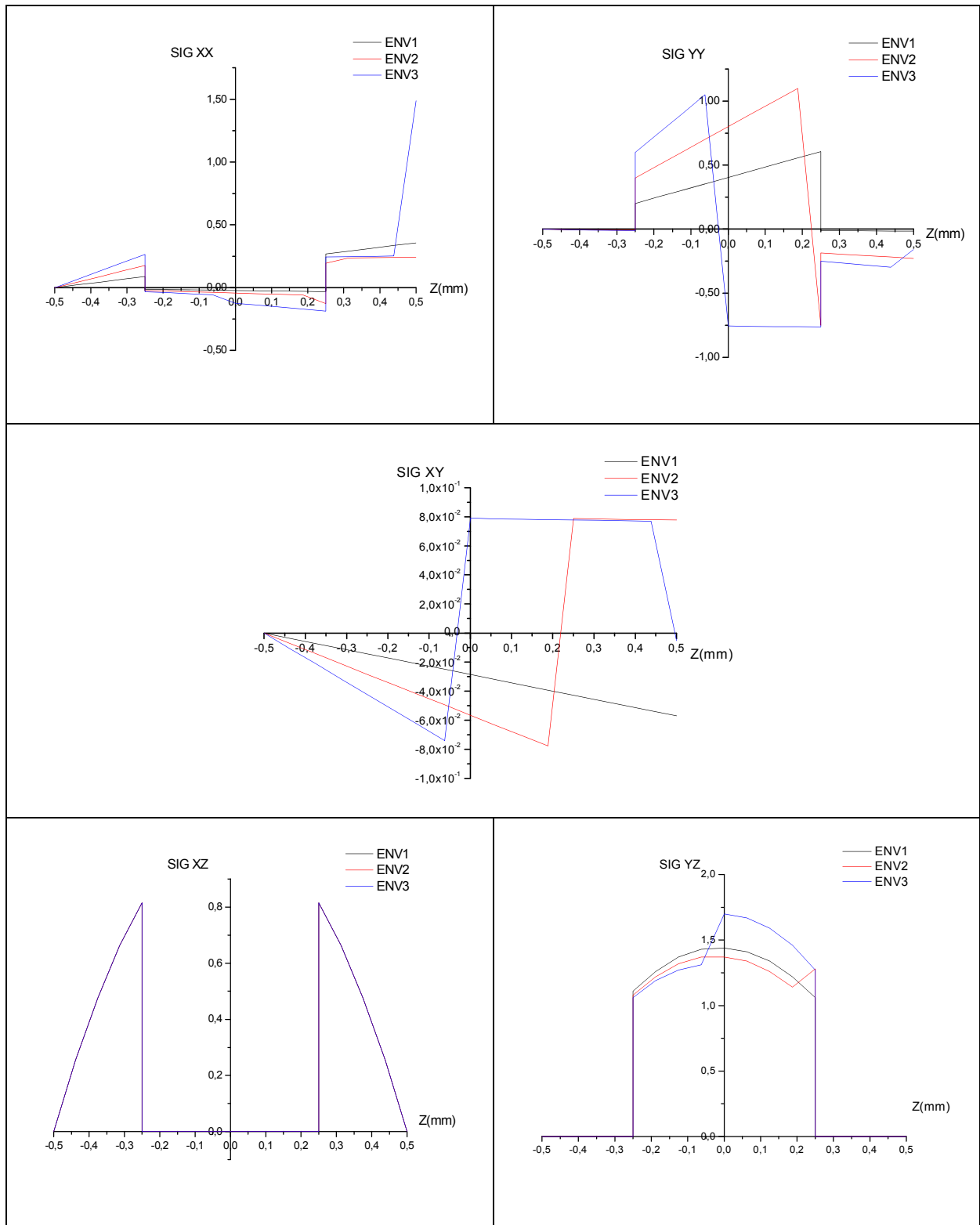


Figure 4.45 : Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèles MTC4.

### 5.2.E-Modele MTC5 :

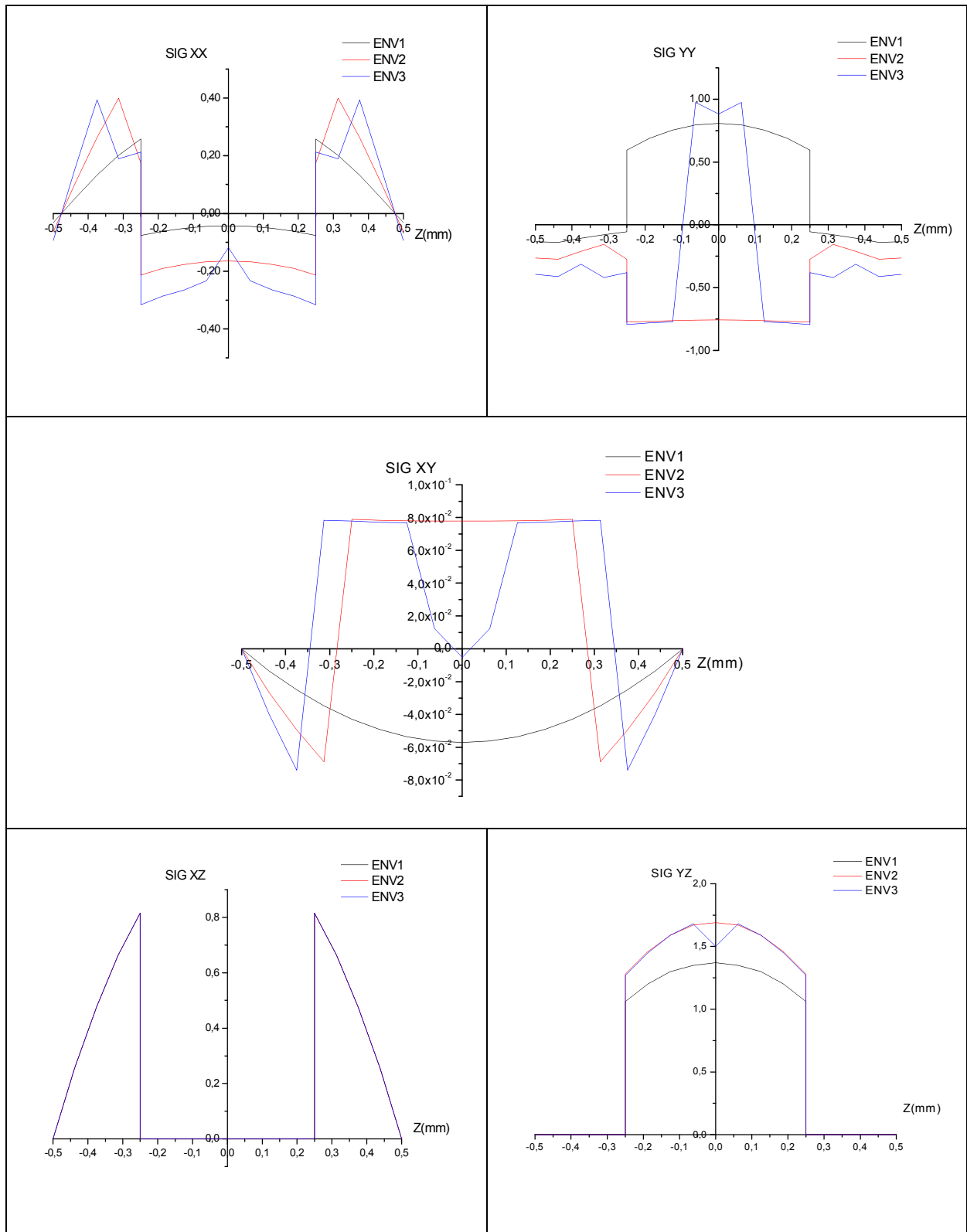


Figure 4.46 : Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèles MTC5.

### 5.2.F-Modele MTC6 :

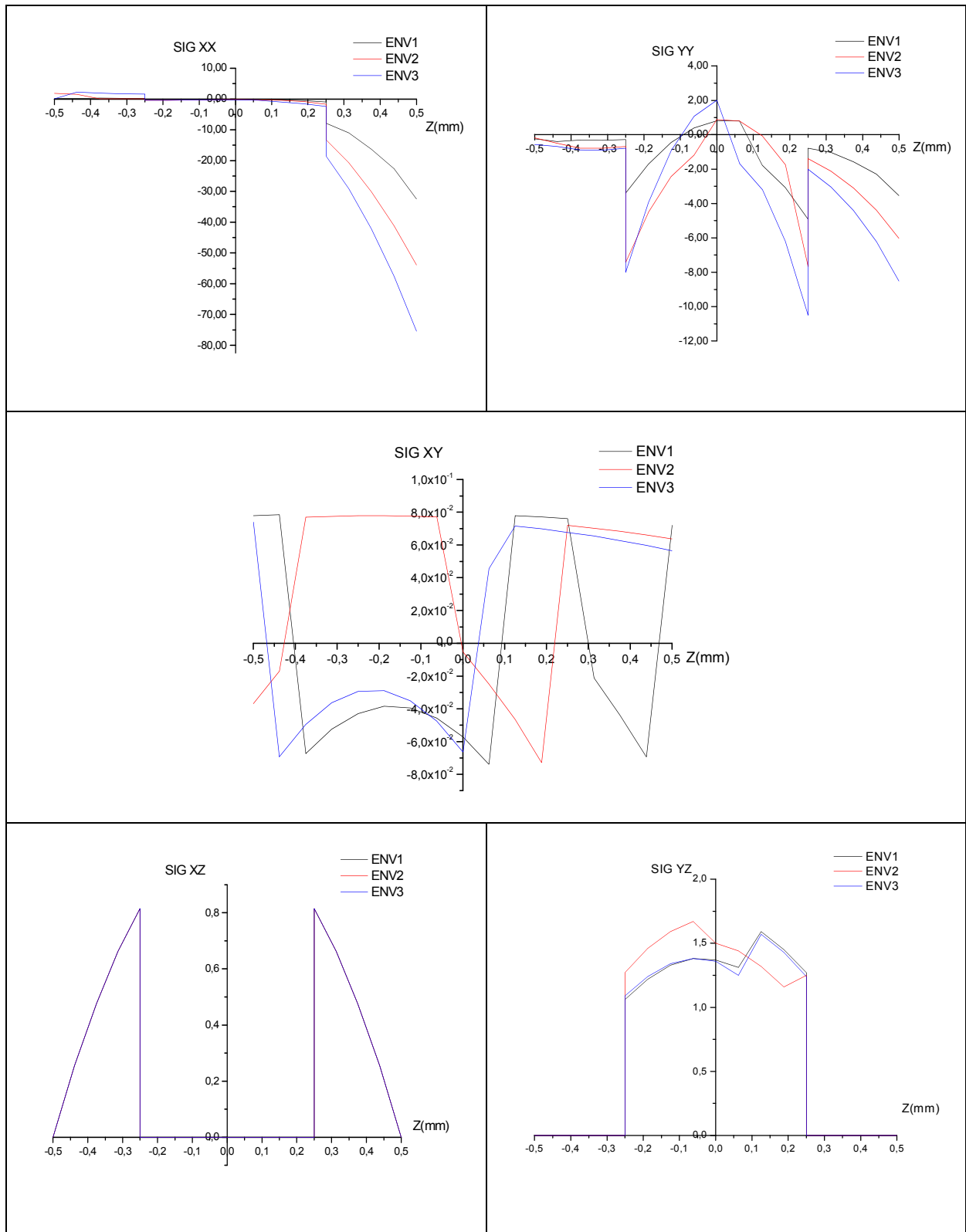


Figure 4.47 : Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèles MTC6.

### 5.2.G-Modele MTCF1 :

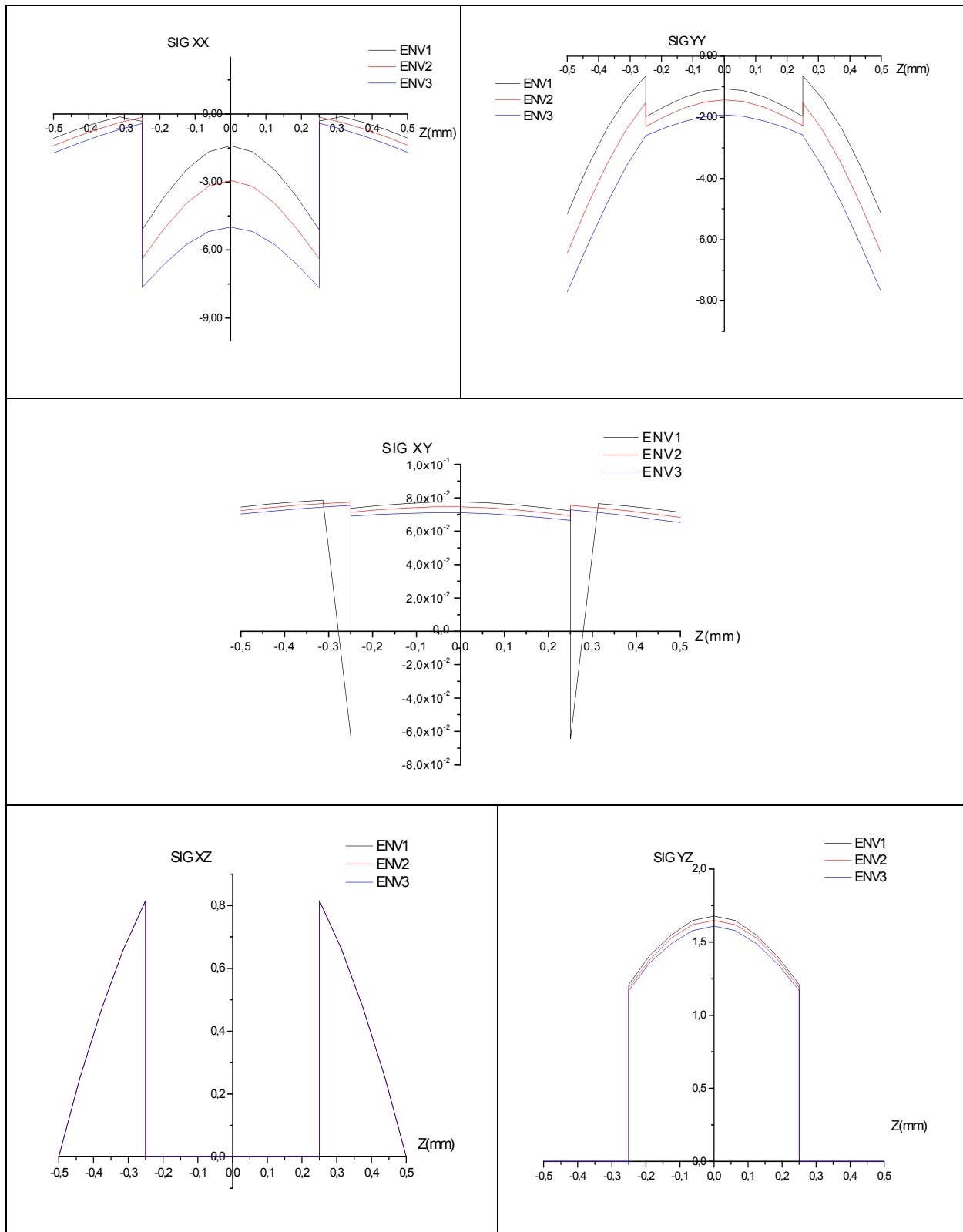


Figure 4.48 : Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèles MTCF1.

### 5.2.H-Modele MTCF2 :

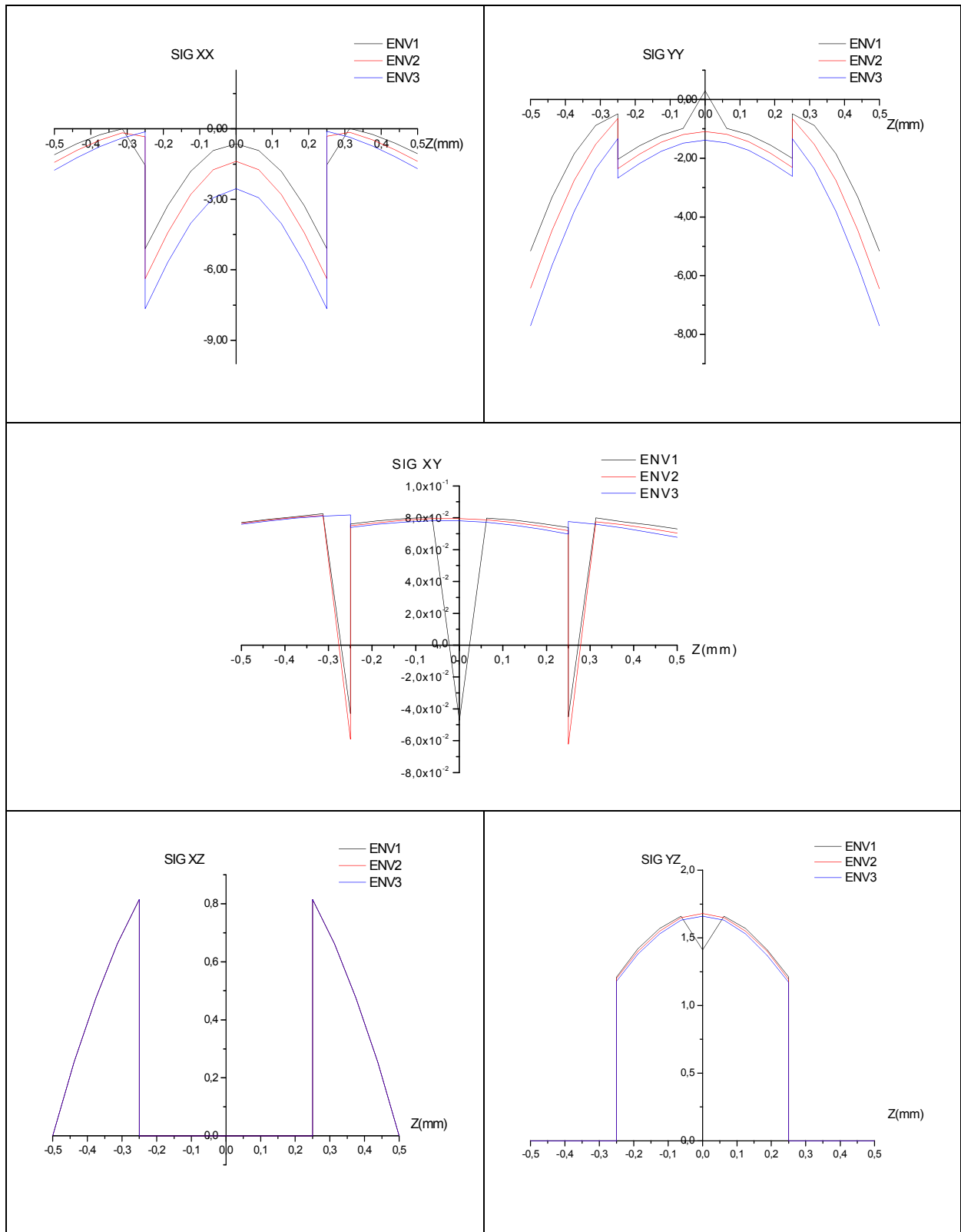


Figure 4.49 : Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF2.

5.2.1-Modele MTCF3 :

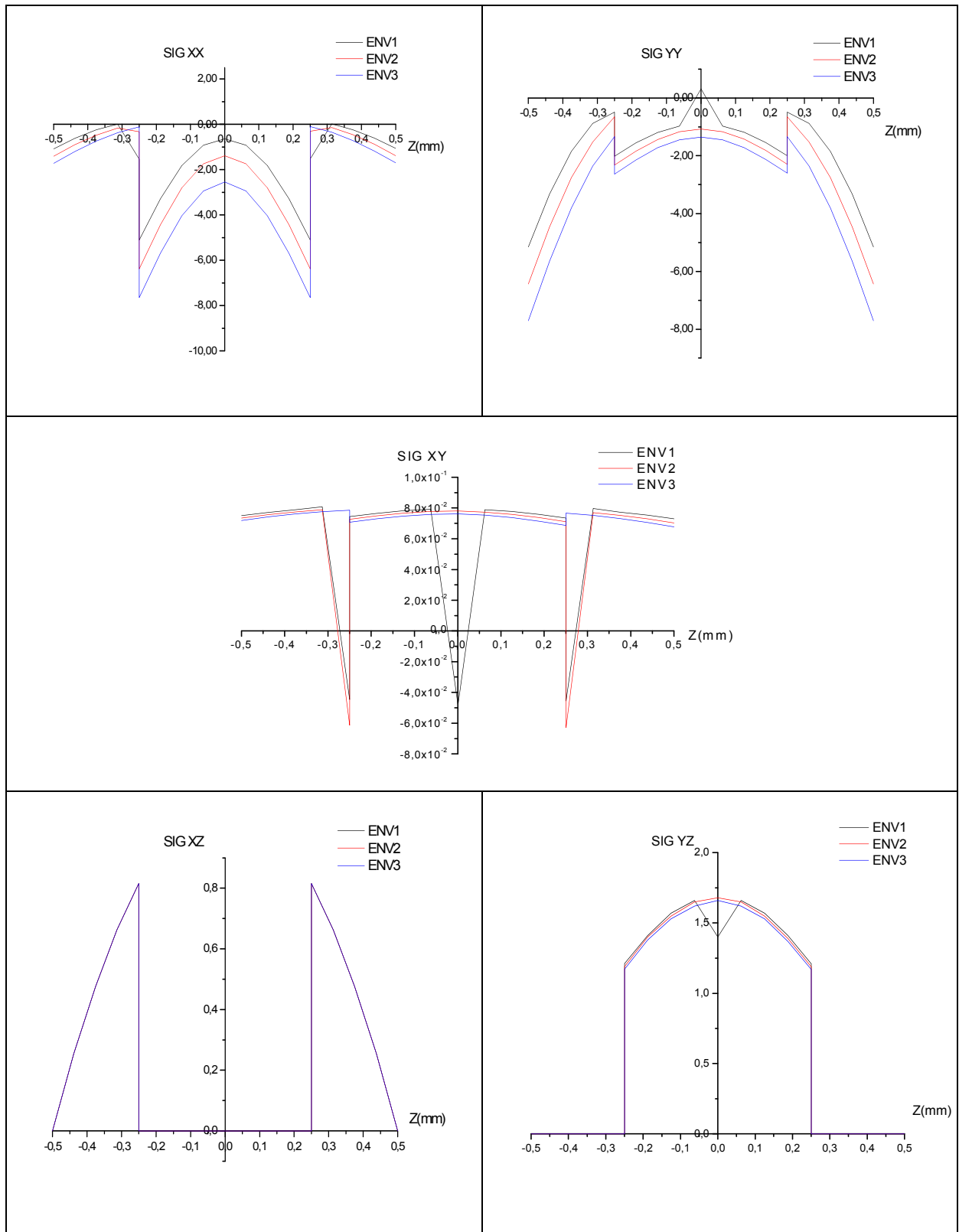


Figure 4.50 : Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèles MTCF3.

5.2.J-Modele MTCF4 :

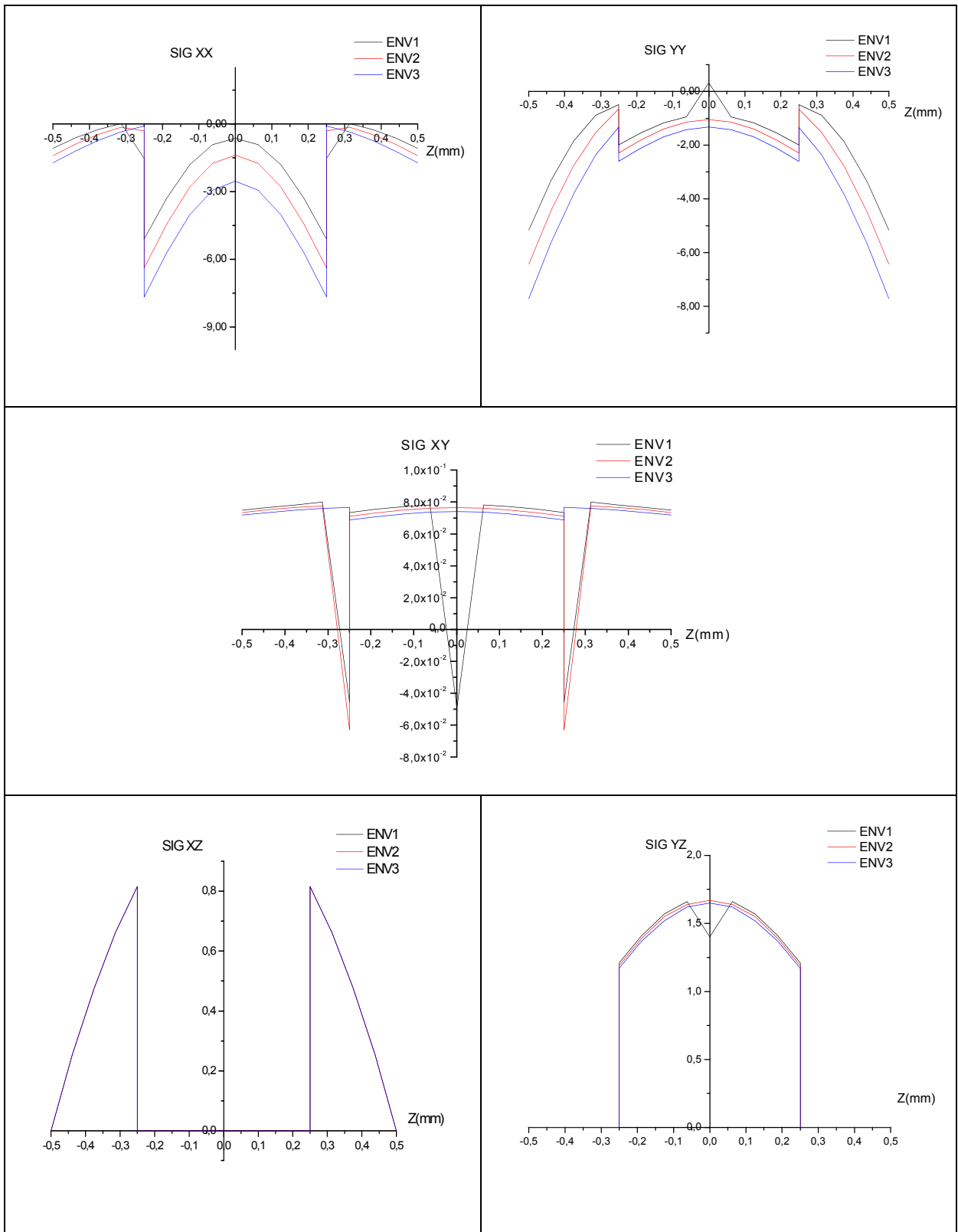


Figure 4.51: Etat de contrainte sous différents chargements hygrothermique - modèles MTCF4.

### 5.2.K-Modele MTCF5 :

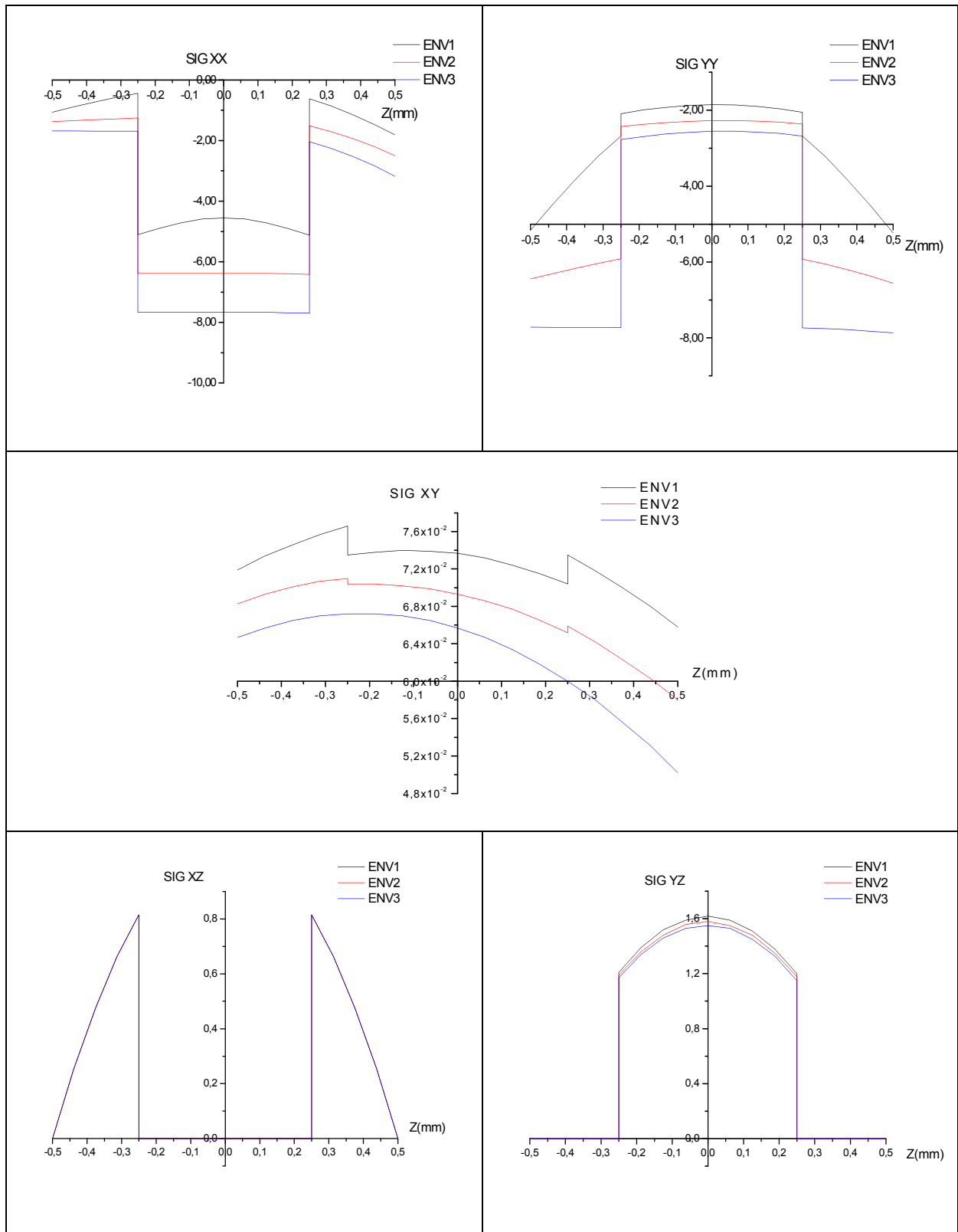


Figure 4.52: Etat de contrainte sous différents chargements hydrothermique - modèle MTCF5.



Les figures 4.42 au 4.52 représentent des simulations sur le comportement des stratifiés croisés sous différents types de chargement présentés dans le tableau 4.17 dans 03 environnements différents en terme de température et humidité, le but de ces simulations est de voir l'influence de l'environnement (Température et humidité simultanément) sur le comportement du stratifié, pour cela les simulations passent d'environnement moins agressive aux environnements plus en plus agressive, les résultats montrent clairement une grande influence de l'environnement sur les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , cette influence est expliquée par la croissance des valeurs de contrainte toutes en augmentant les valeurs environnementales, l'allure de ces contraintes est en général conservé à travers les 03 environnements, et cela est valable pour tous les modèles, une très faible influence est constatée sur les contraintes de cisaillement pour les modèles MTC4, MTC5, MTC6, MTCF1, MTCF2, MTCF3, MTCF4, MTCF5.

### 5.3 Influence de la distribution $\Delta T$ et $\Delta C$ sur le comportement des stratifiés avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique

Ce paragraphe simule le comportement des stratifiés composite croisés selon les modèles cités dans le tableau 4.17 pour un stratifié en T300/5208  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  d'épaisseur égale à 1mm avec  $a/h=4$  et  $a/b=1$ , les valeurs de température et concentration sont données par le tableau 4.18 avec la prise en compte du vieillissement Hygrothermique en utilisant le modèle de TSAI expliqué dans le chapitre 2.

### 5.3.A Modèle MTC2 :

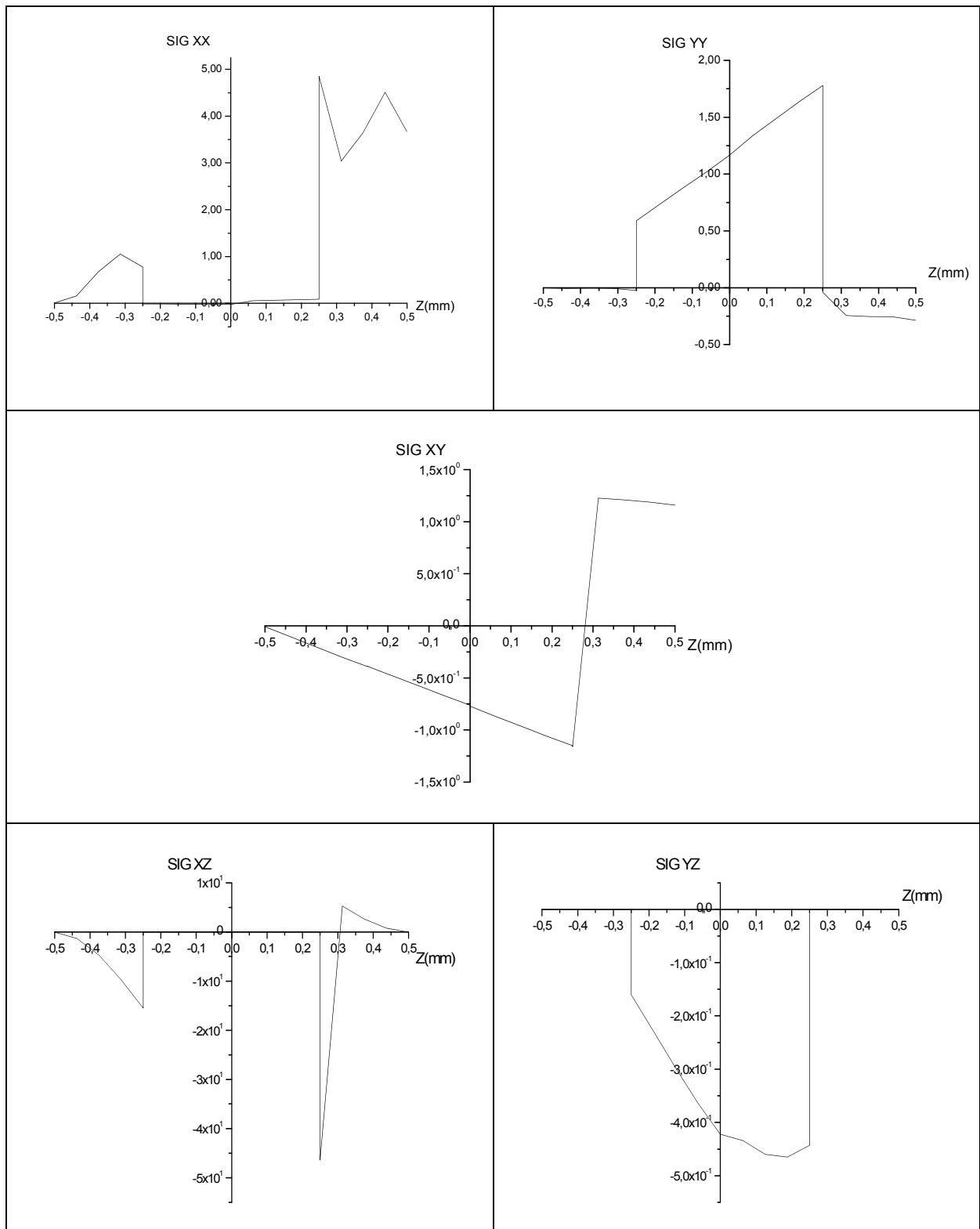


Figure 4.53 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique avec vieillissement modèle MTC2.

### 5.3.B Modèle MTC 3 :

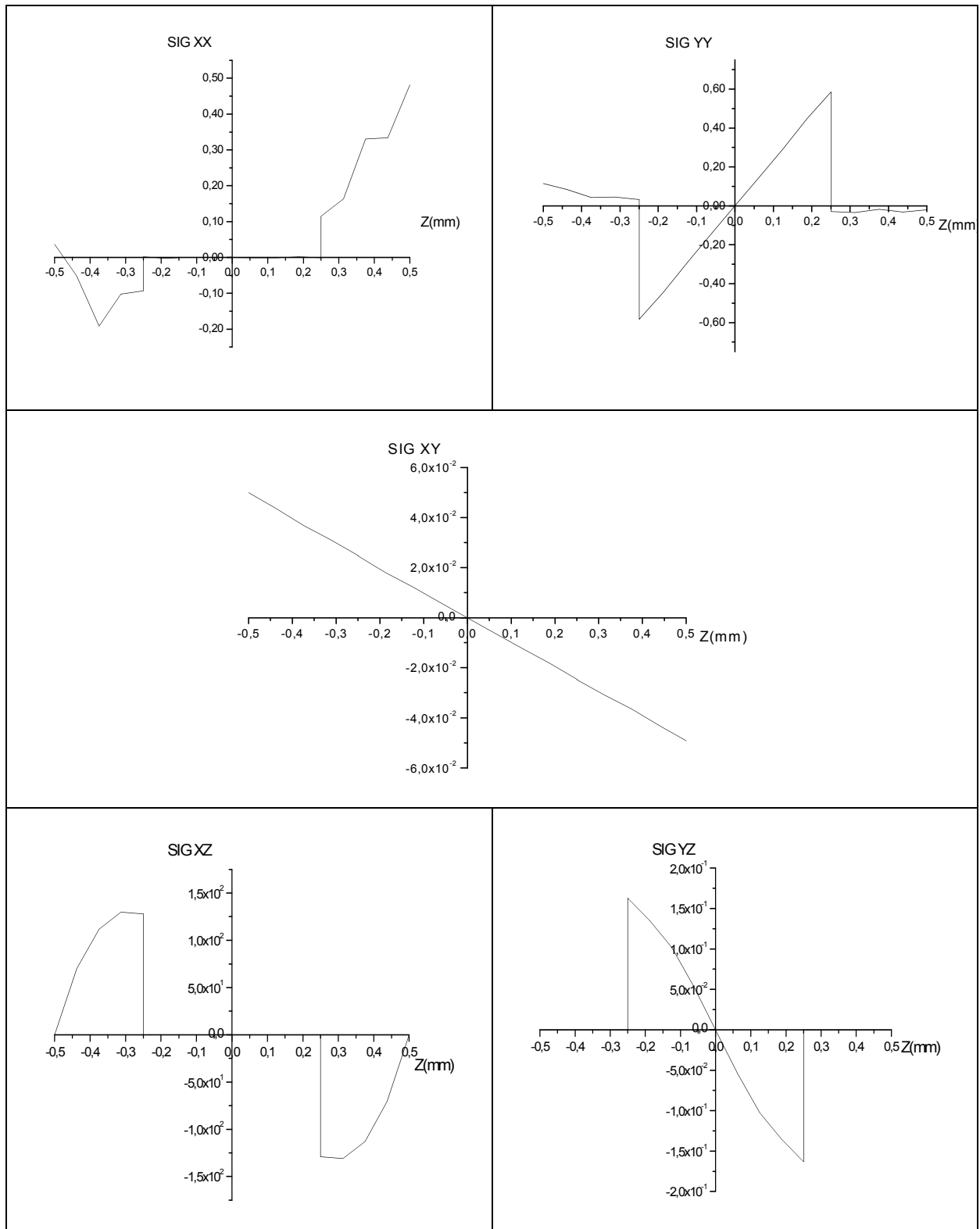


Figure 4.54 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC3.

### 5.3.C Modèle MTC4 :

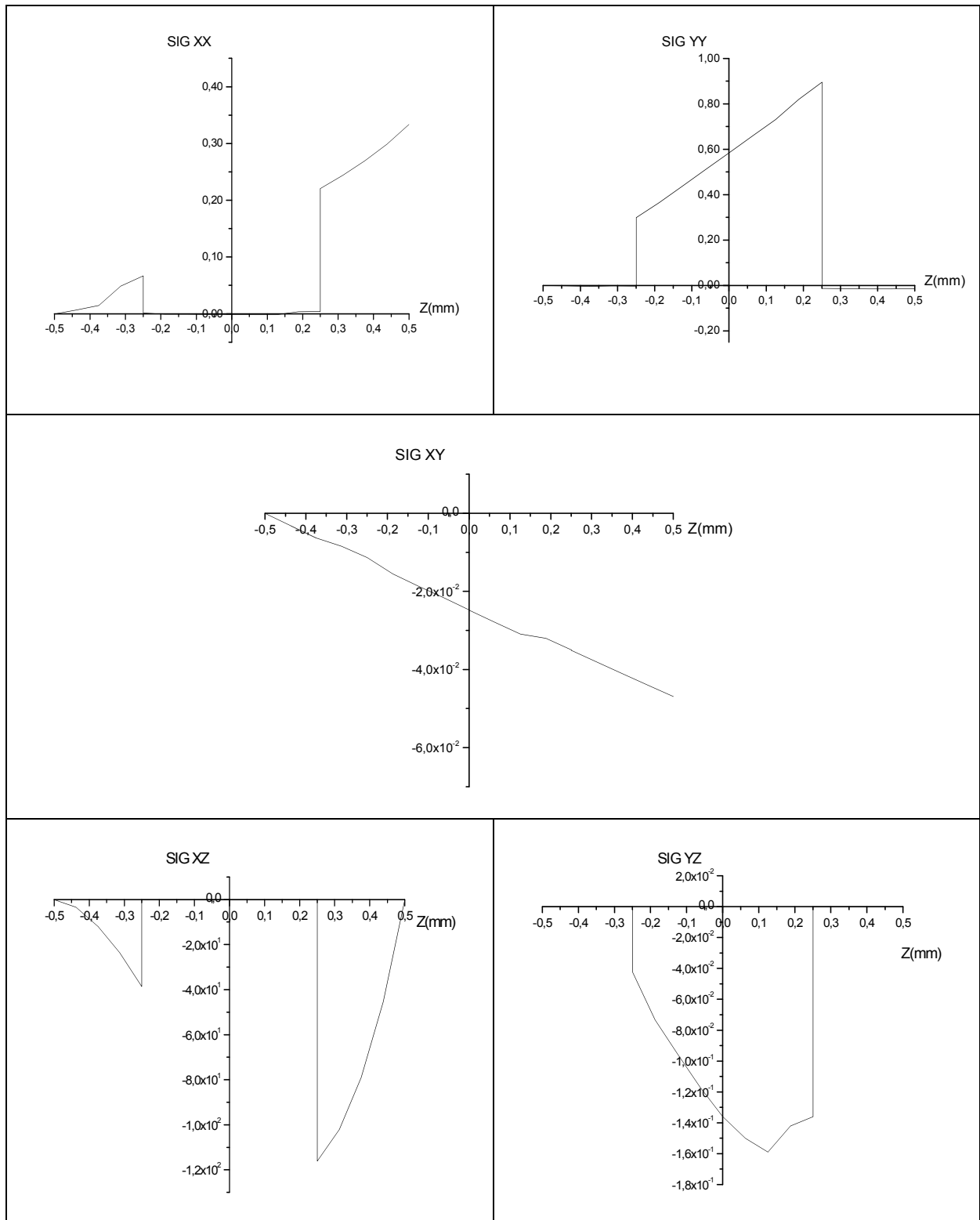


Figure 4.55 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC4.

### 5.3.D Modèle MTC5 :

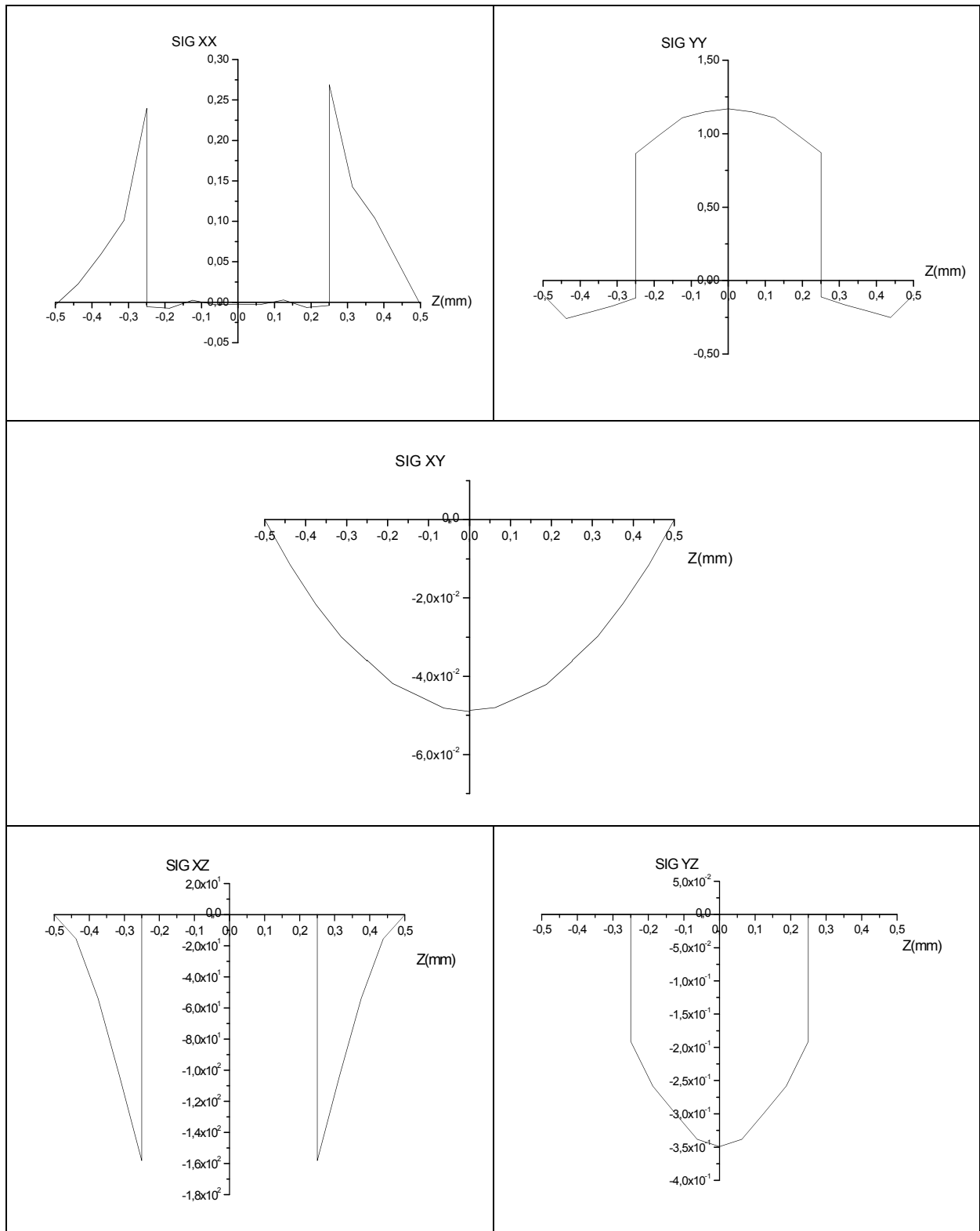


Figure 4.56 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTC5.

### 5.3.E Modèle MTC6 :

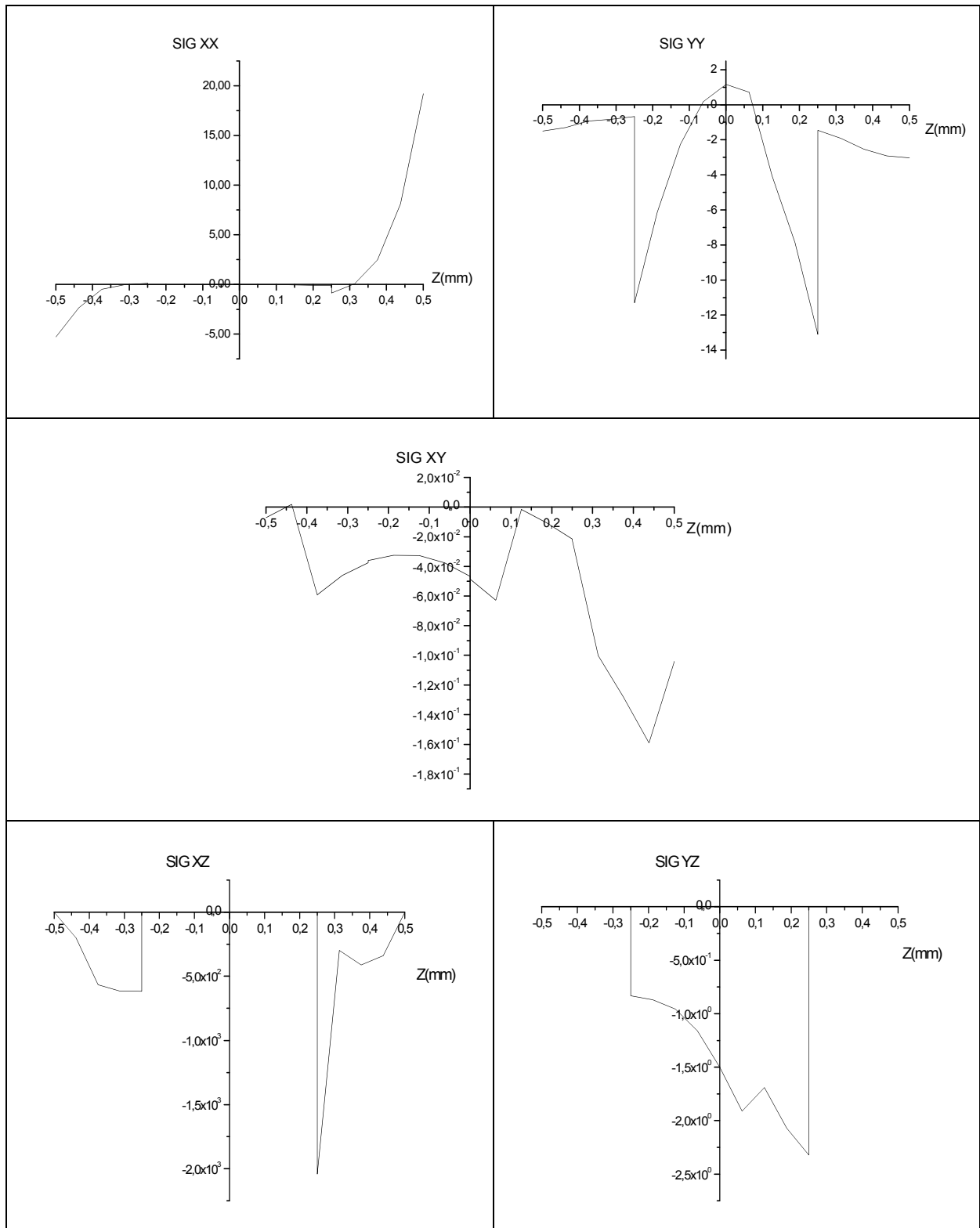


Figure 4.57 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique avec vieillissement modèle MTC6.

### 5.3.F Modèle MTCF1 :

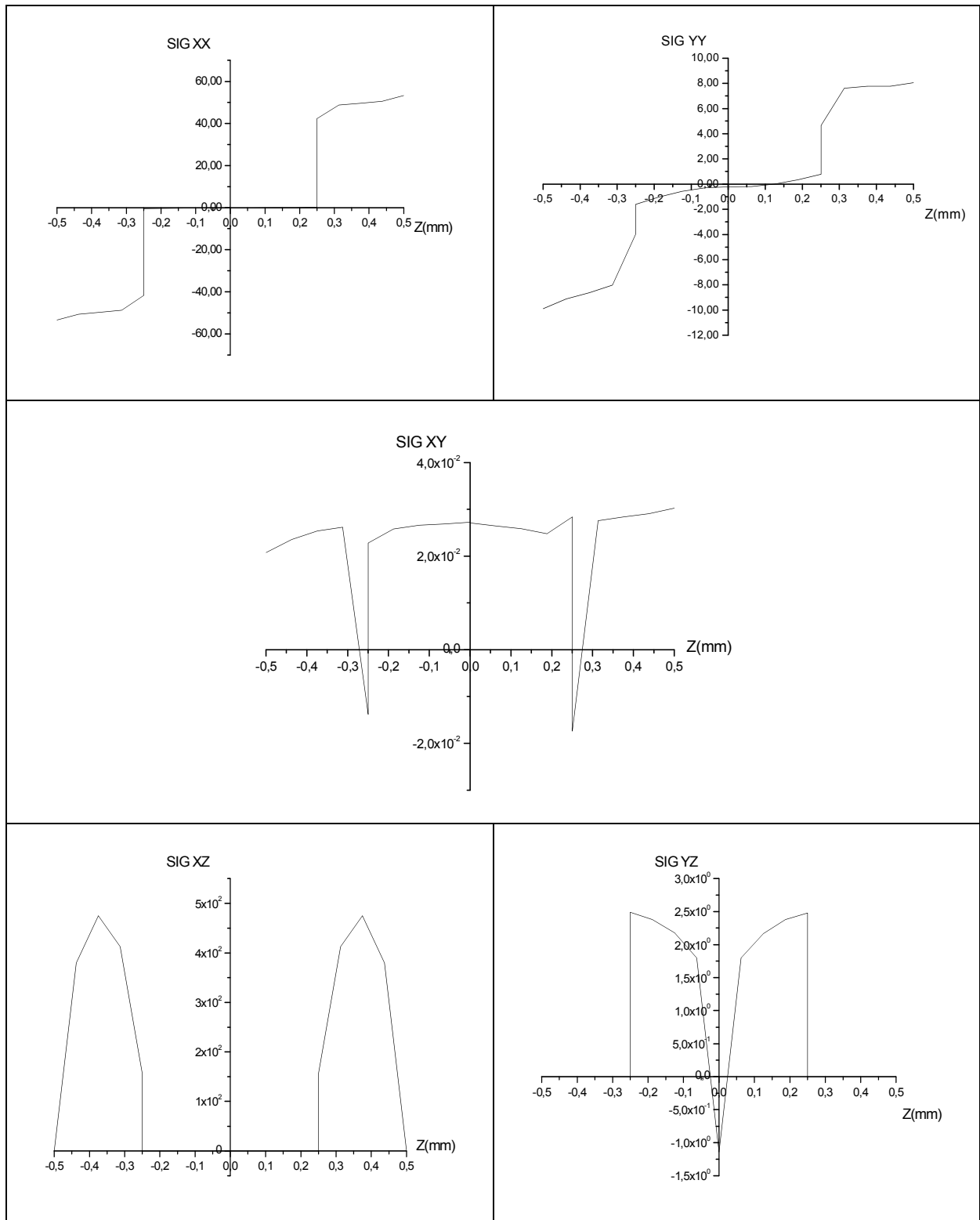


Figure 4.58 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF1.

### 5.3.G Modèle MTCF2 :

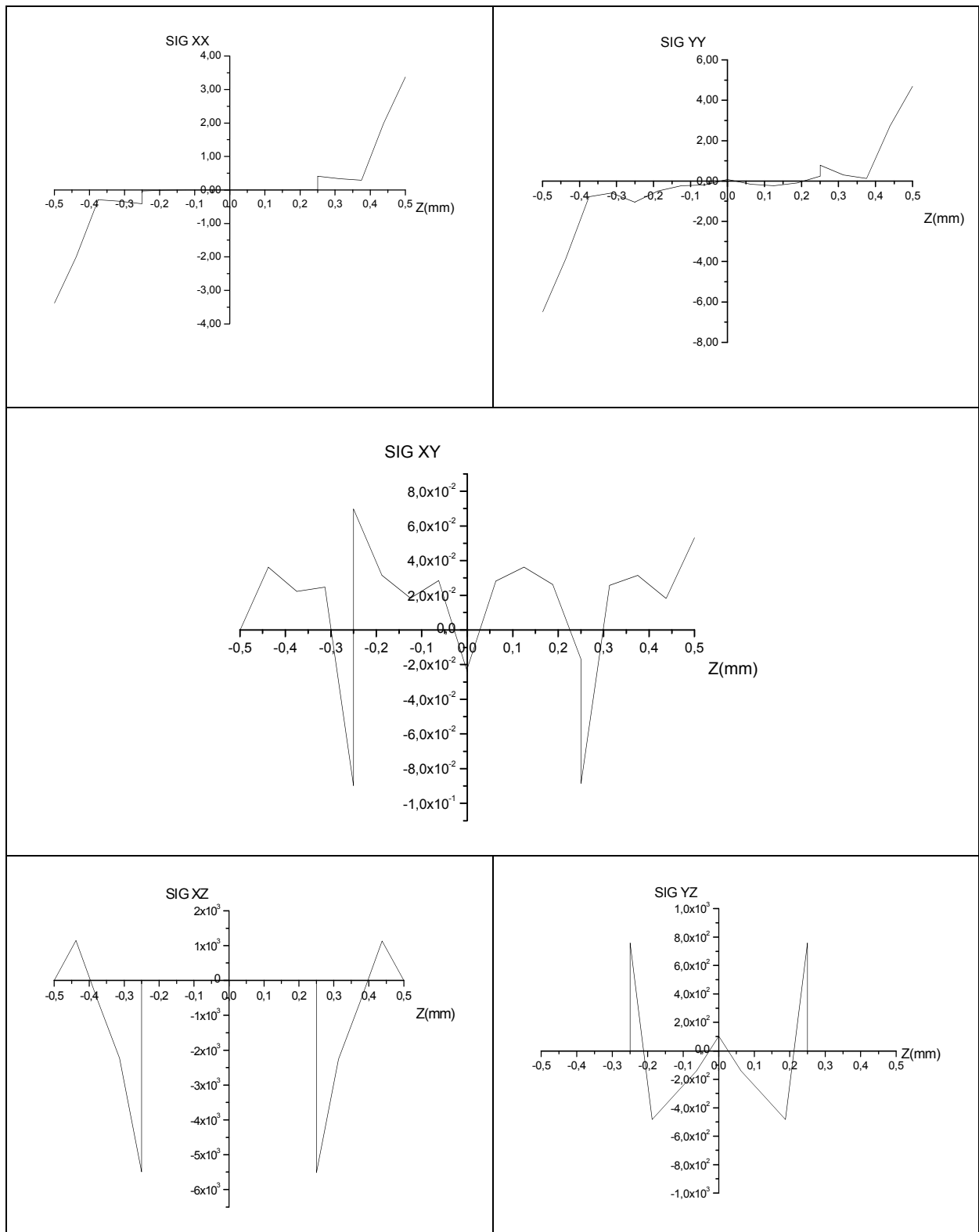


Figure 4.59 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF2.



### 5.3.H Modèle MTCF3 :

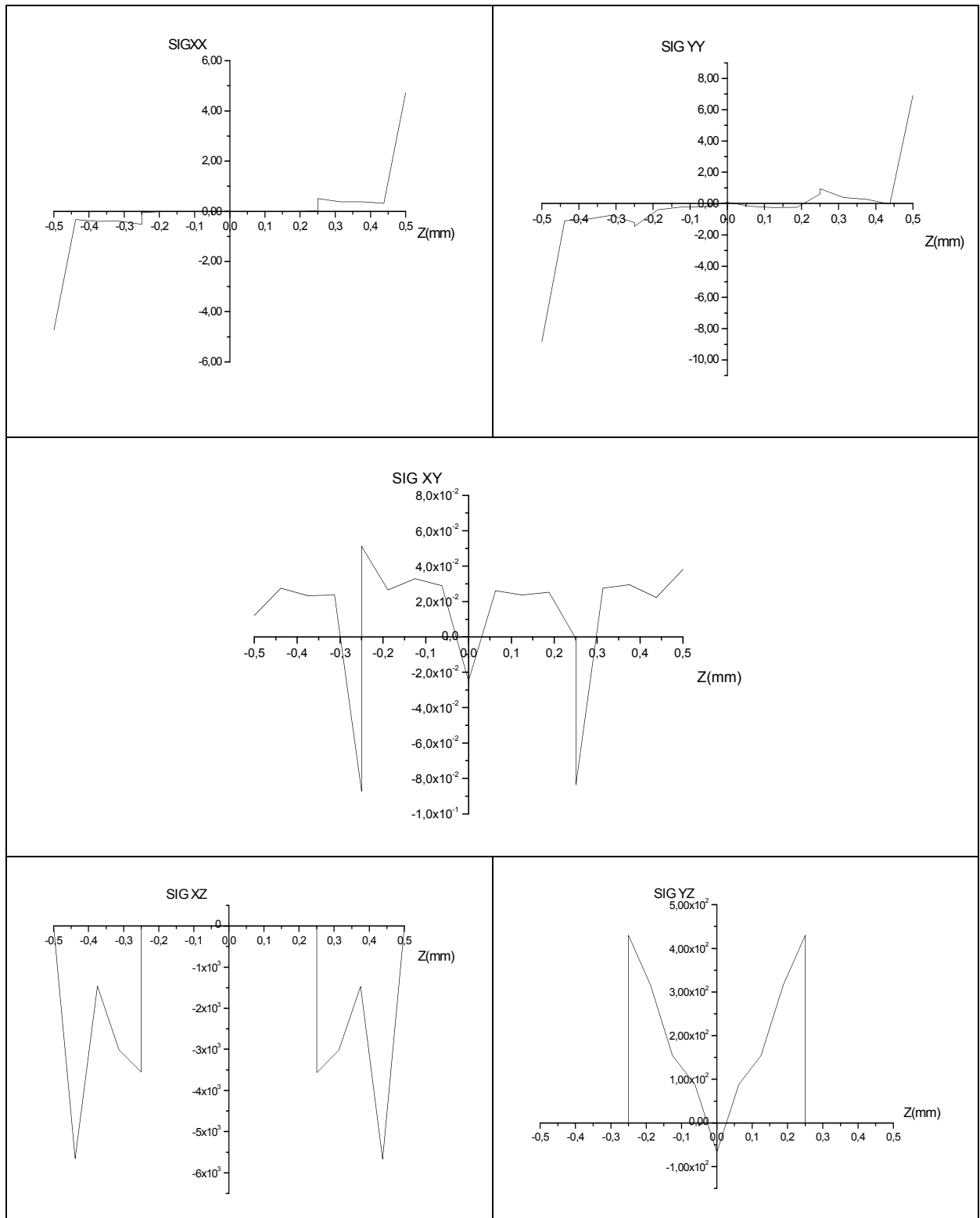


Figure 4.60 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique avec vieillissement modèle MTCF3.

### 5.3.1 Modèle MTCF4 :

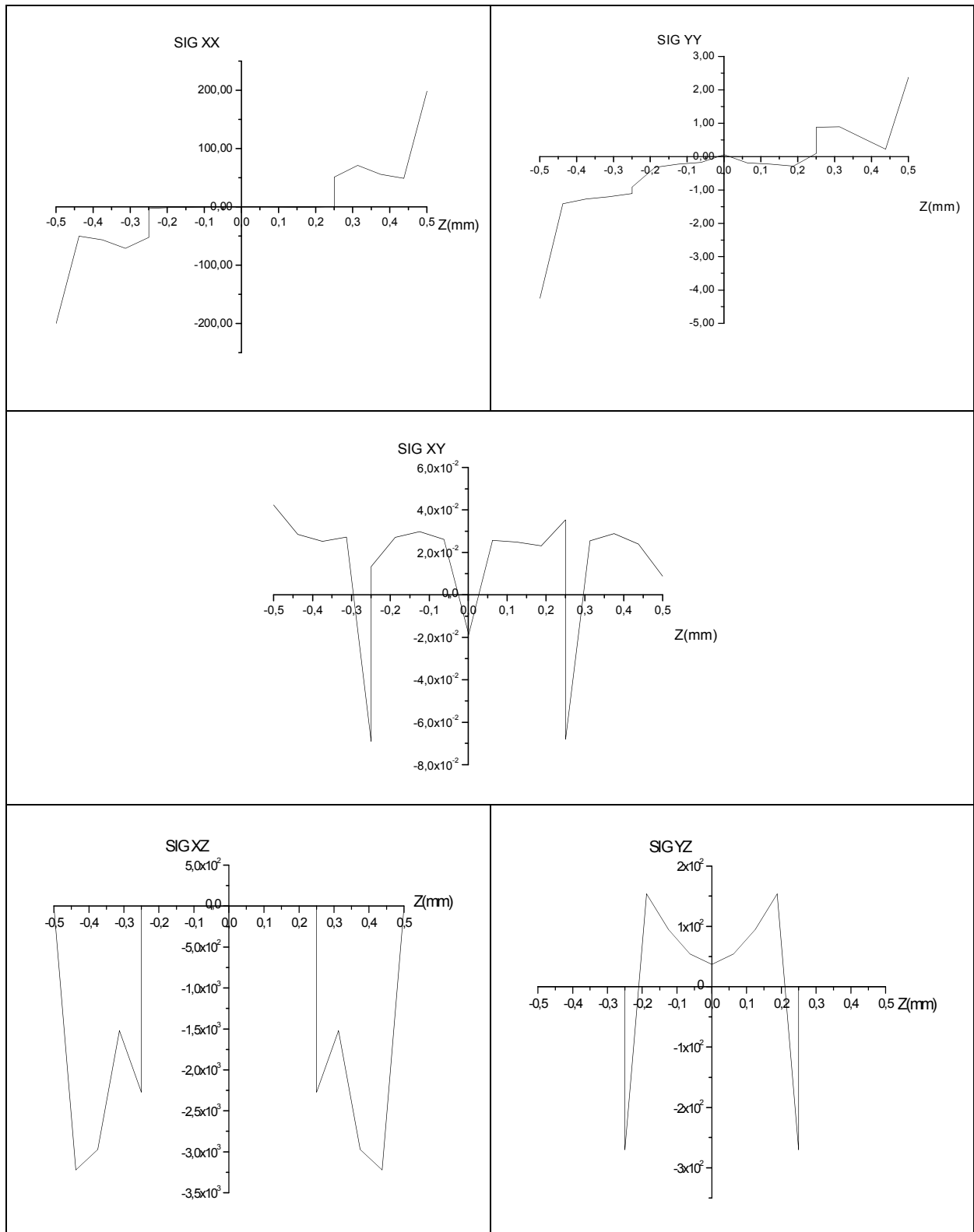


Figure 4.61 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF4.

### 5.3.J Modèle MTCF5 :

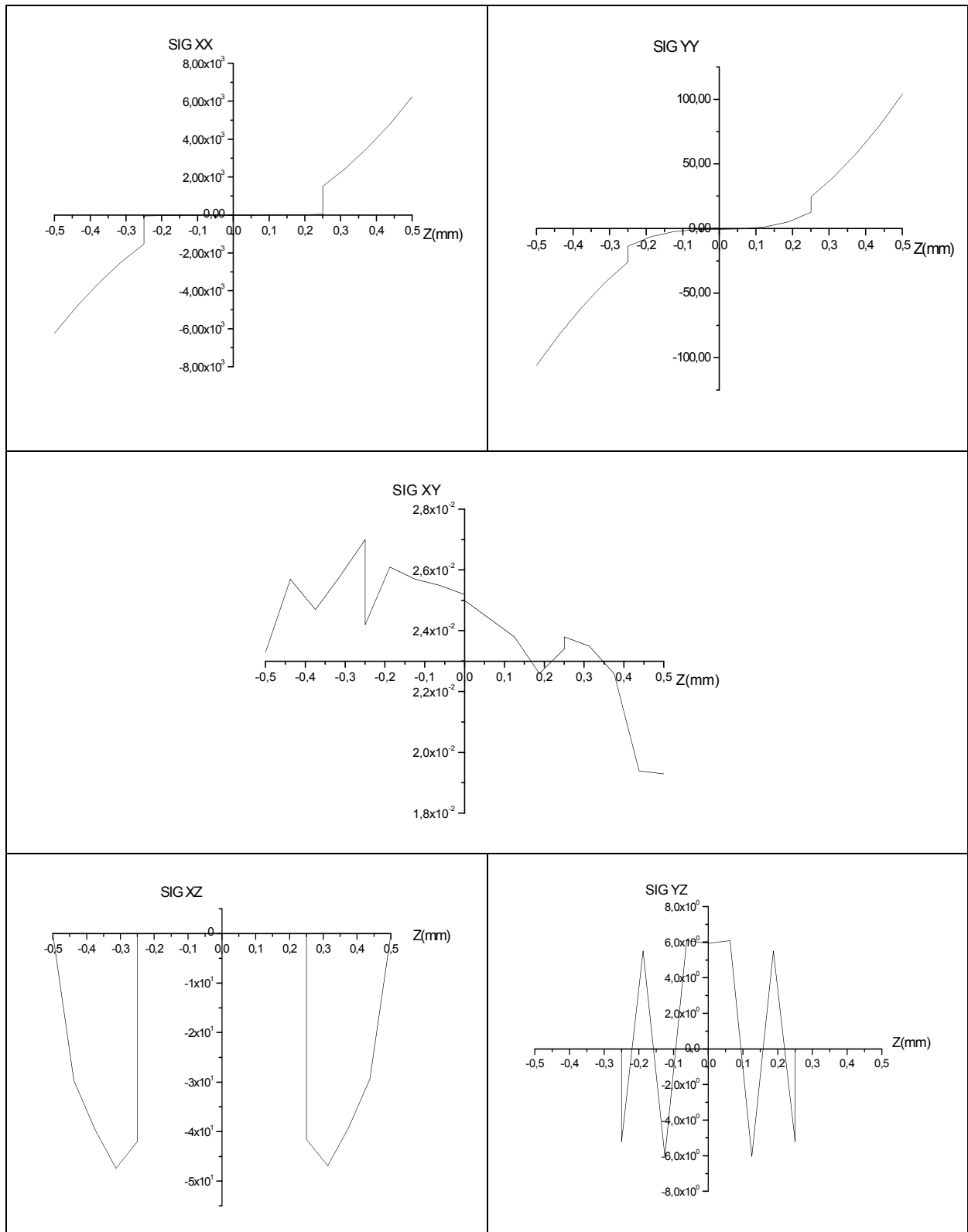


Figure 4.62 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique avec vieillissement modèle MTCF5.

Les figures 4.52 au 4.62 montrent le comportement d'un stratifié croisé qui a les mêmes caractéristiques des stratifiés de la section 5.1, dans cette dernière seul le mode de chargement hygrothermique été traité, cette fois ci on a ajoute un autre paramètre clé dans les simulations en plus des différents mode de chargement, c'est la prise en compte du vieillissement hygrothermique provoqué par la température et l'humidité, le modèle de TSAI a été utilisé comme expliquer dans le chapitre 2 pour calculer la chute des performances mécanique provoquée par les conditions environnementales, les simulations montrent une forte influence du vieillissement hygrothermique sur le comportement du stratifié, cette influence existe quel que soit le type de chargement hygrothermique appliquer sur le stratifié, l'état de contrainte du stratifié est entièrement influé par le vieillissement hygrothermique ,dans la section 5.1 on a remarqué que le chargement a une faible influence sur les contraintes de cisaillement, dans cette section une forte influence est remarquée du vieillissement hygrothermique sur les contraintes du cisaillement et cela est valable pour tous les types de chargement.

#### 5.4 Influence des paramètres de l'environnement sur le comportement des stratifiés (Environnement variable) avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique

Pour ce paragraphe on simule le comportement des stratifiés composites croisé selon les modèles cités dans le tableau 5.17 dans plusieurs environnements dans le but de voir l'influence de la température et humidité pour un stratifié en T300/5208 [0°/90°/90°/0°] d'épaisseur égale à 1mm avec  $a/h=4$  et  $a/b=1$ , les valeurs de température et concentration sont données par le tableau 4.19, avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique en utilisant le modèle de TSAI.

5.4.A Modèle MTC 2 :

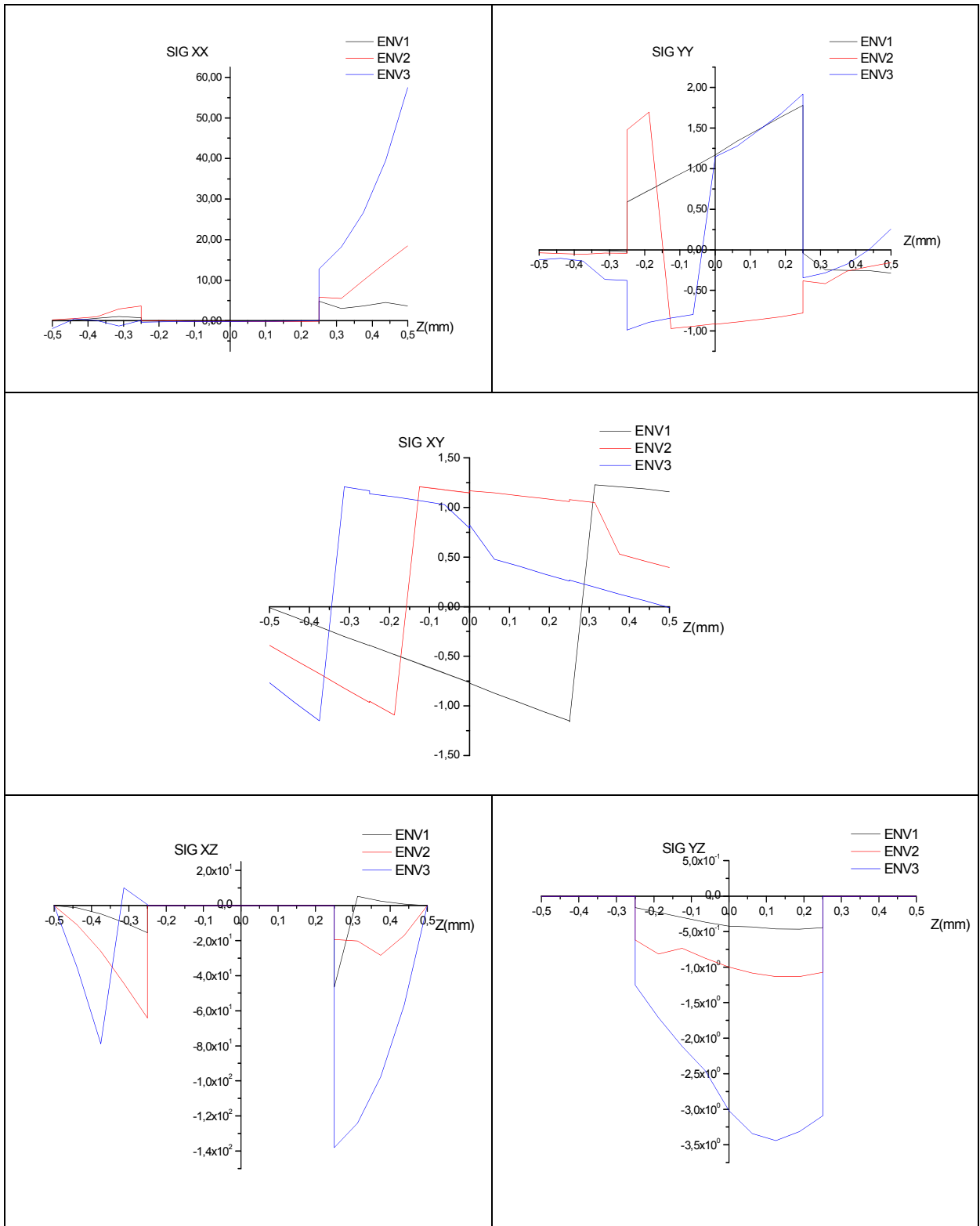


Figure 4.63 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissement- modèle MTC2.

### 5.4.B Modèle MTC 3 :

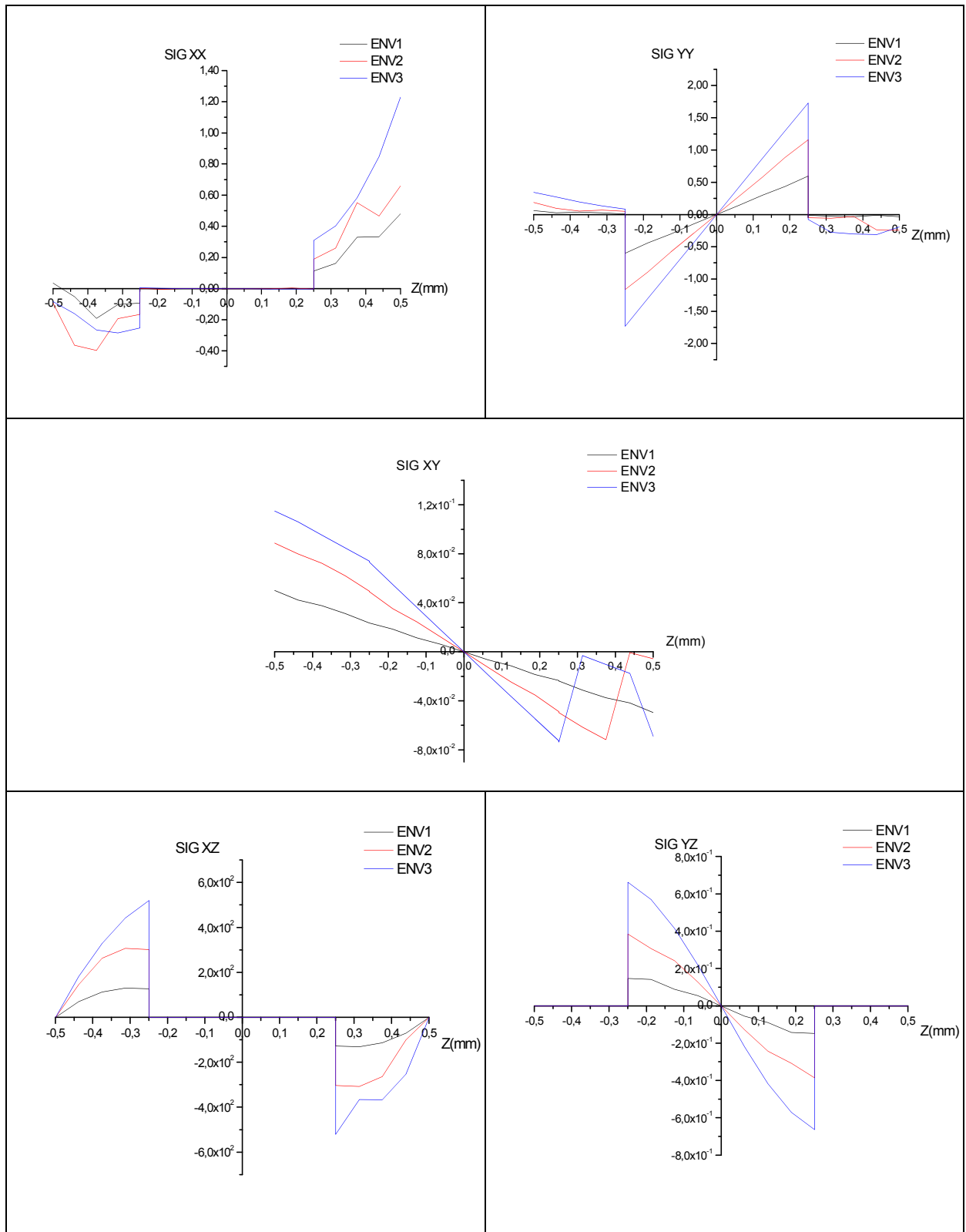


Figure 4.64 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC3.

### 5.4.C Modèle MTC4 :

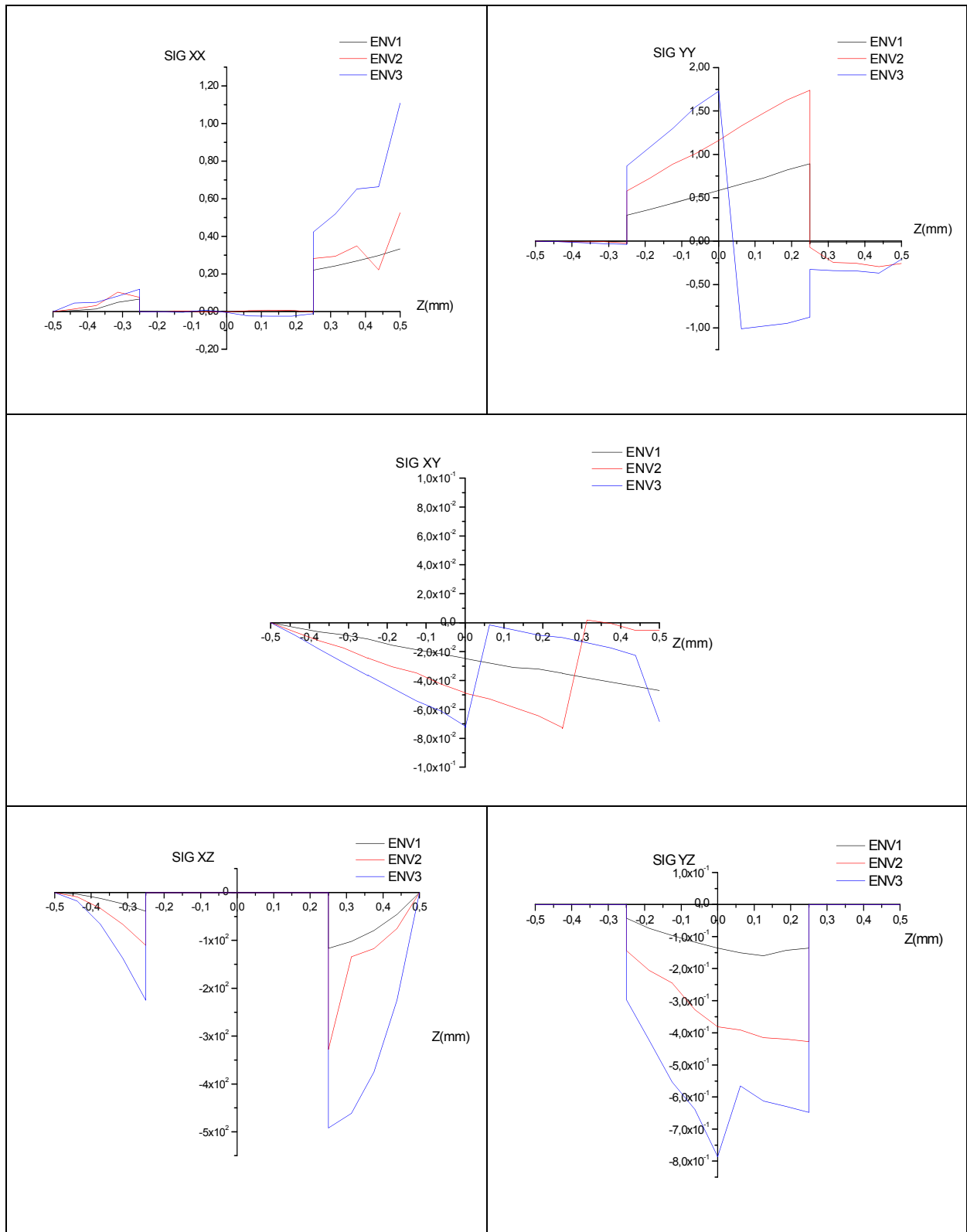


Figure 4.65 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissement- modèle MTC4.

### 5.4.D Modèle MTC5 :

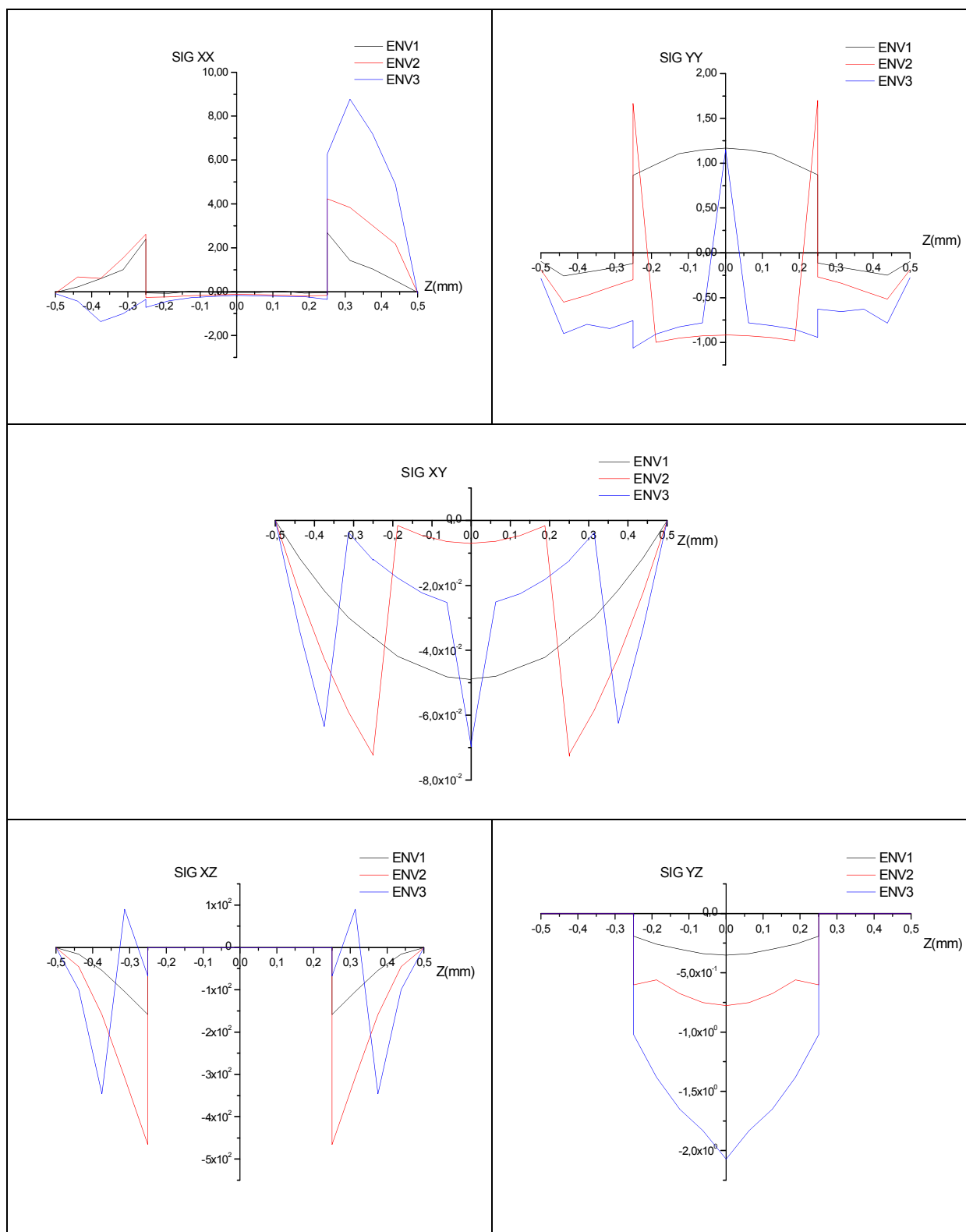


Figure 4.66 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC5.



### 5.4.E Modèle MTC6 :

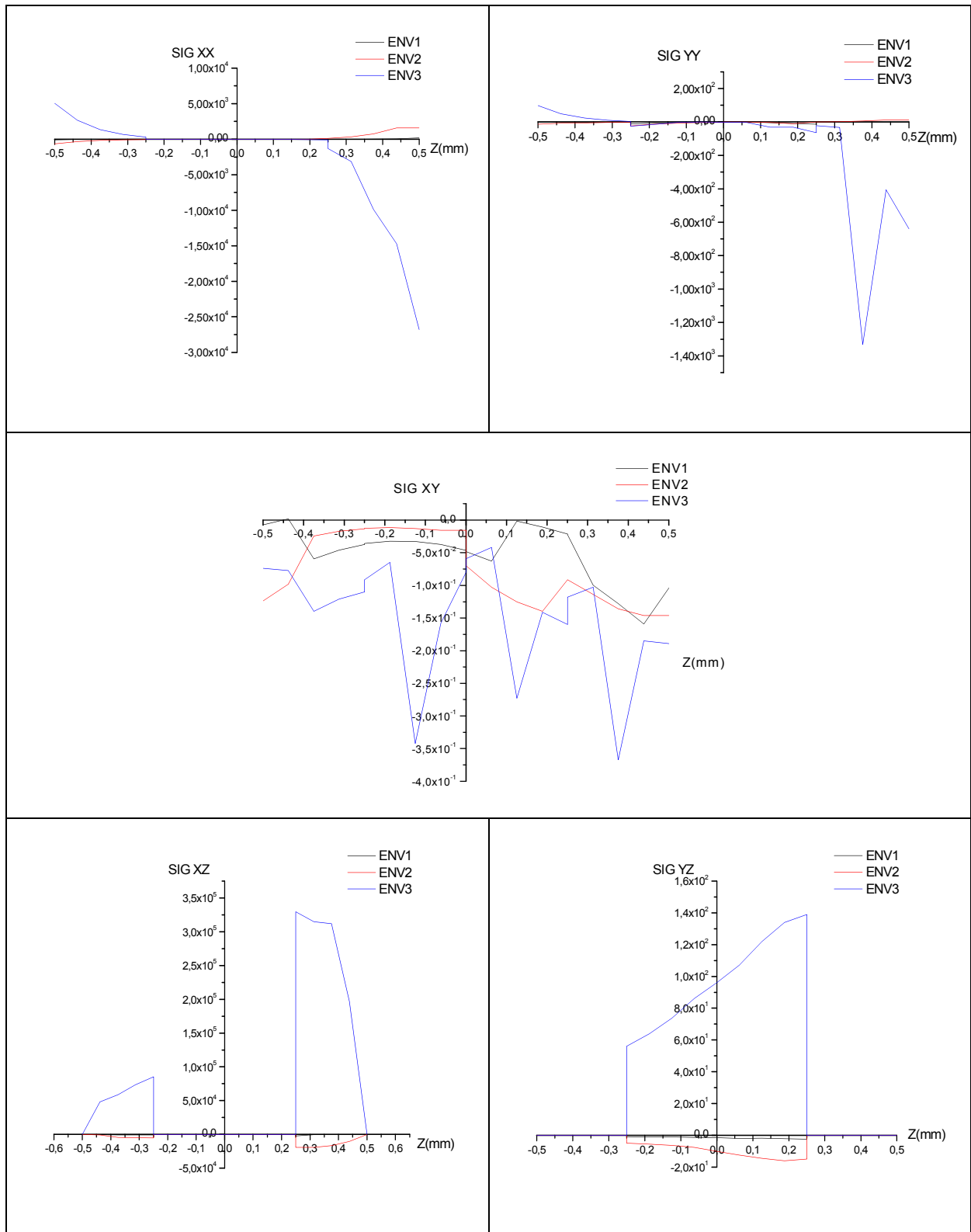


Figure 4.67 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTC6.

### 5.4.F Modèle MTCF1 :

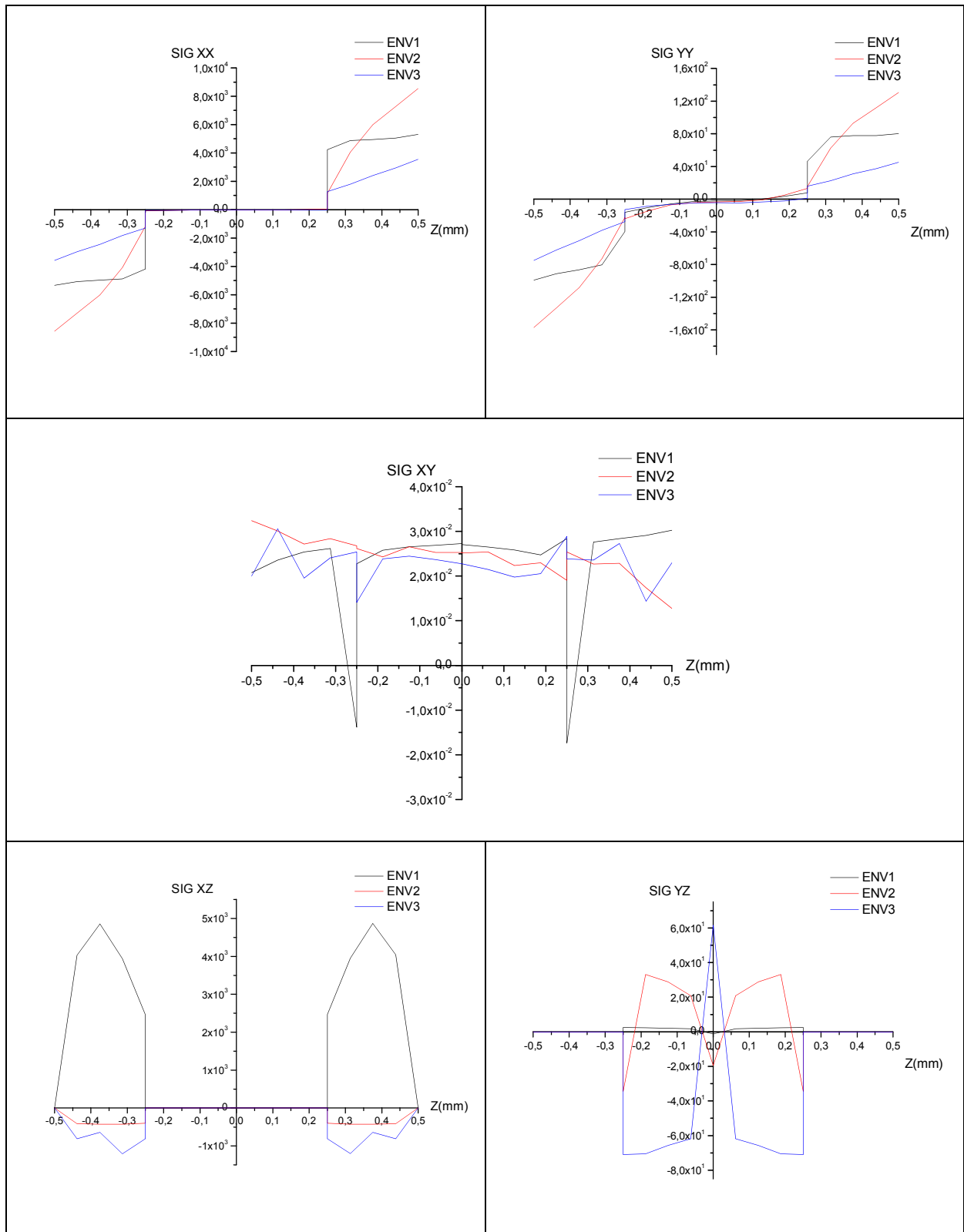


Figure 4.68 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF1.

### 5.4.G Modèle MTCF2 :

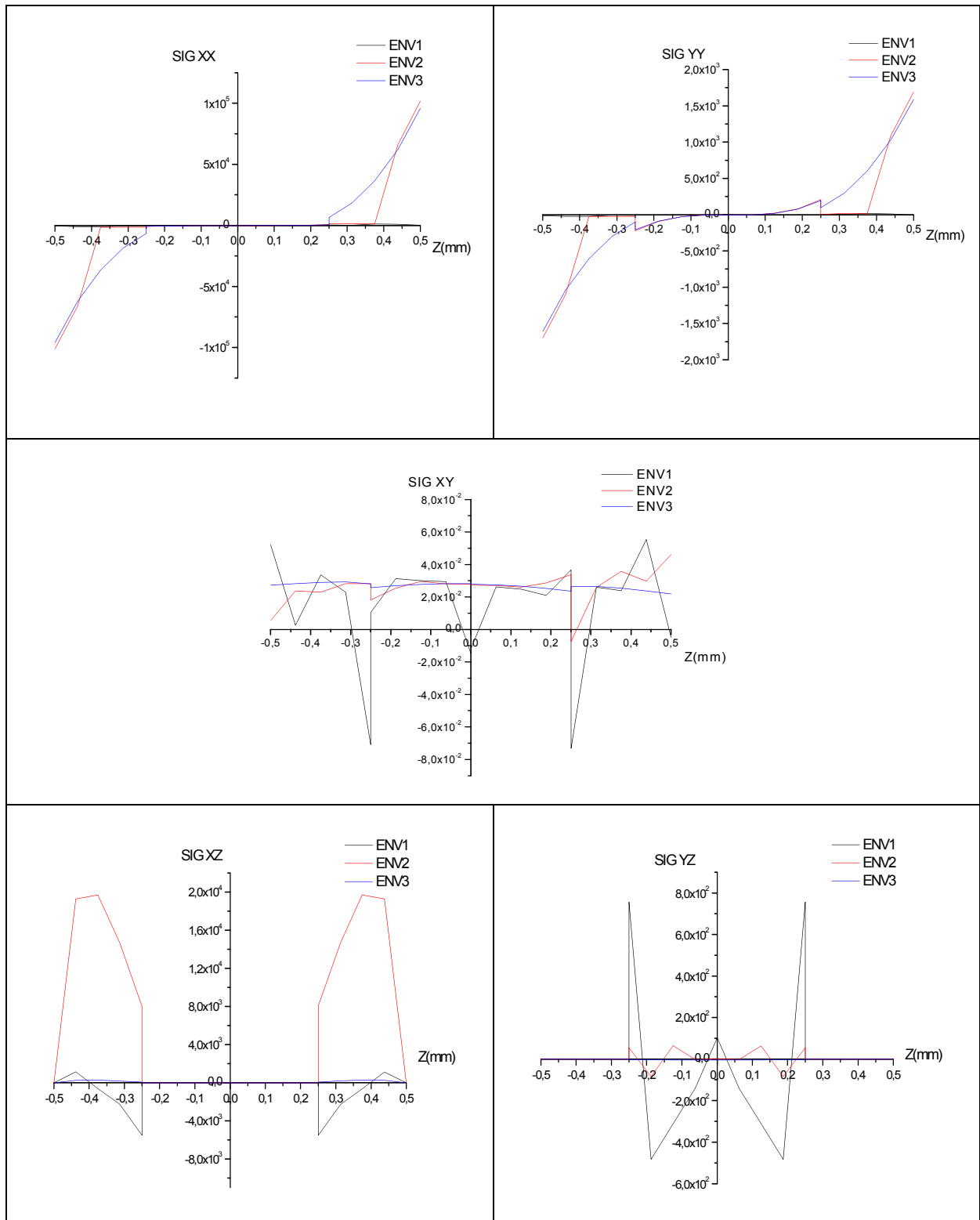


Figure 4.69 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF2.

### 5.4.H Modèle MTCF3 :

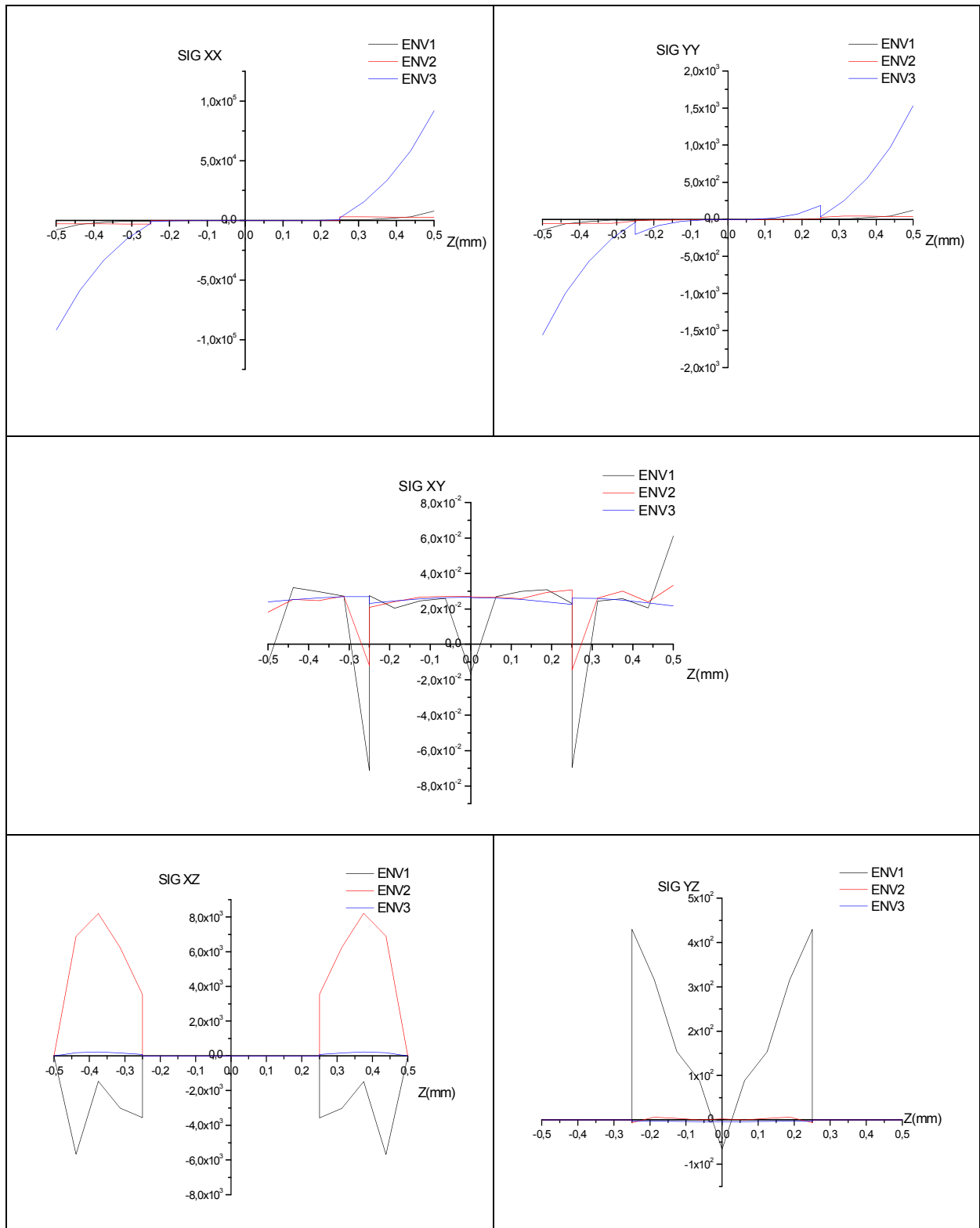


Figure 4.70 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différent environnement avec vieillissements- modèle MTCF3.

### 5.4.1 Modèle MTCF4 :

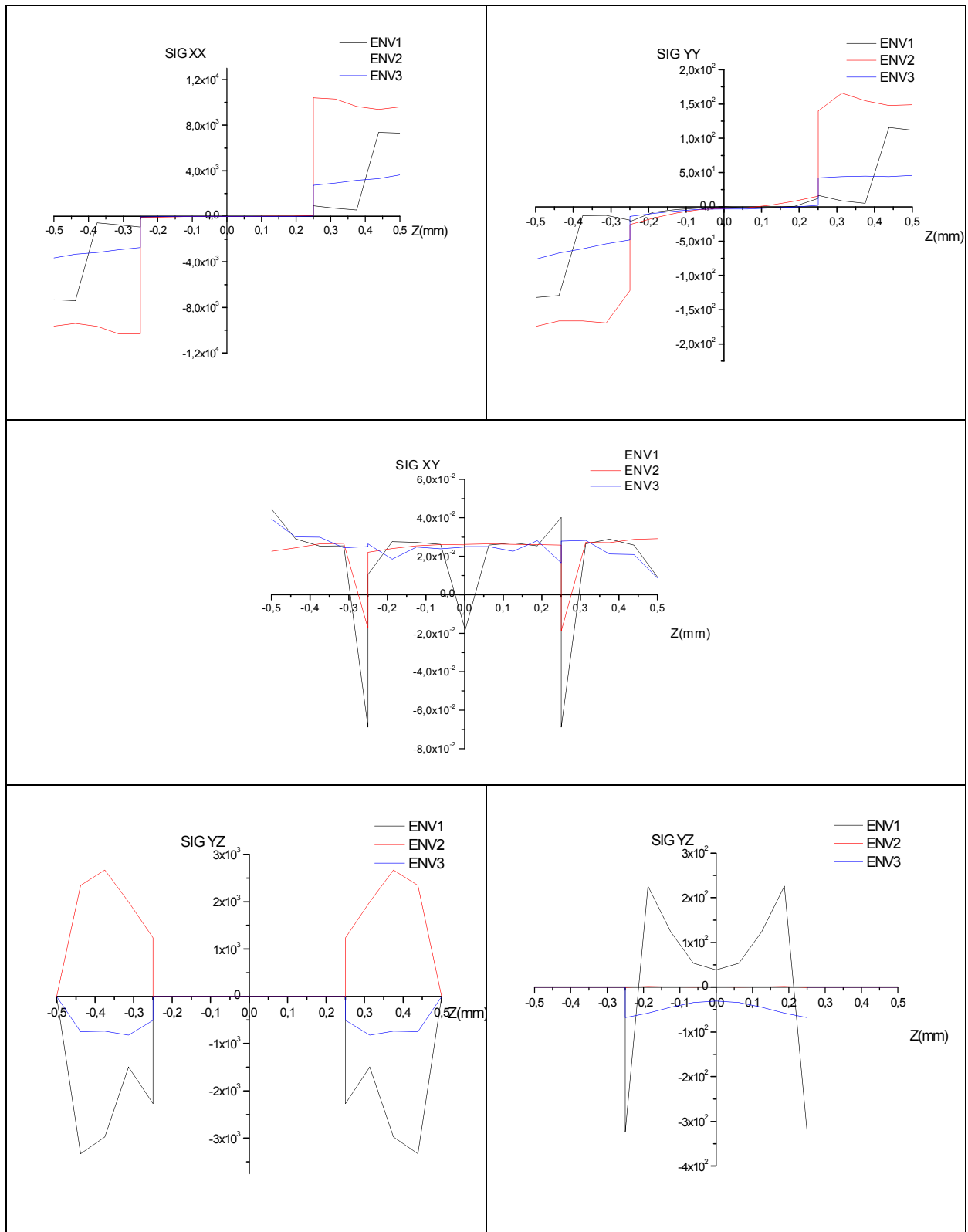


Figure 4.71 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique dans différent environnement avec vieillissements- modèle MTCF4.

### 5.4.J Modèle MTCF5 :

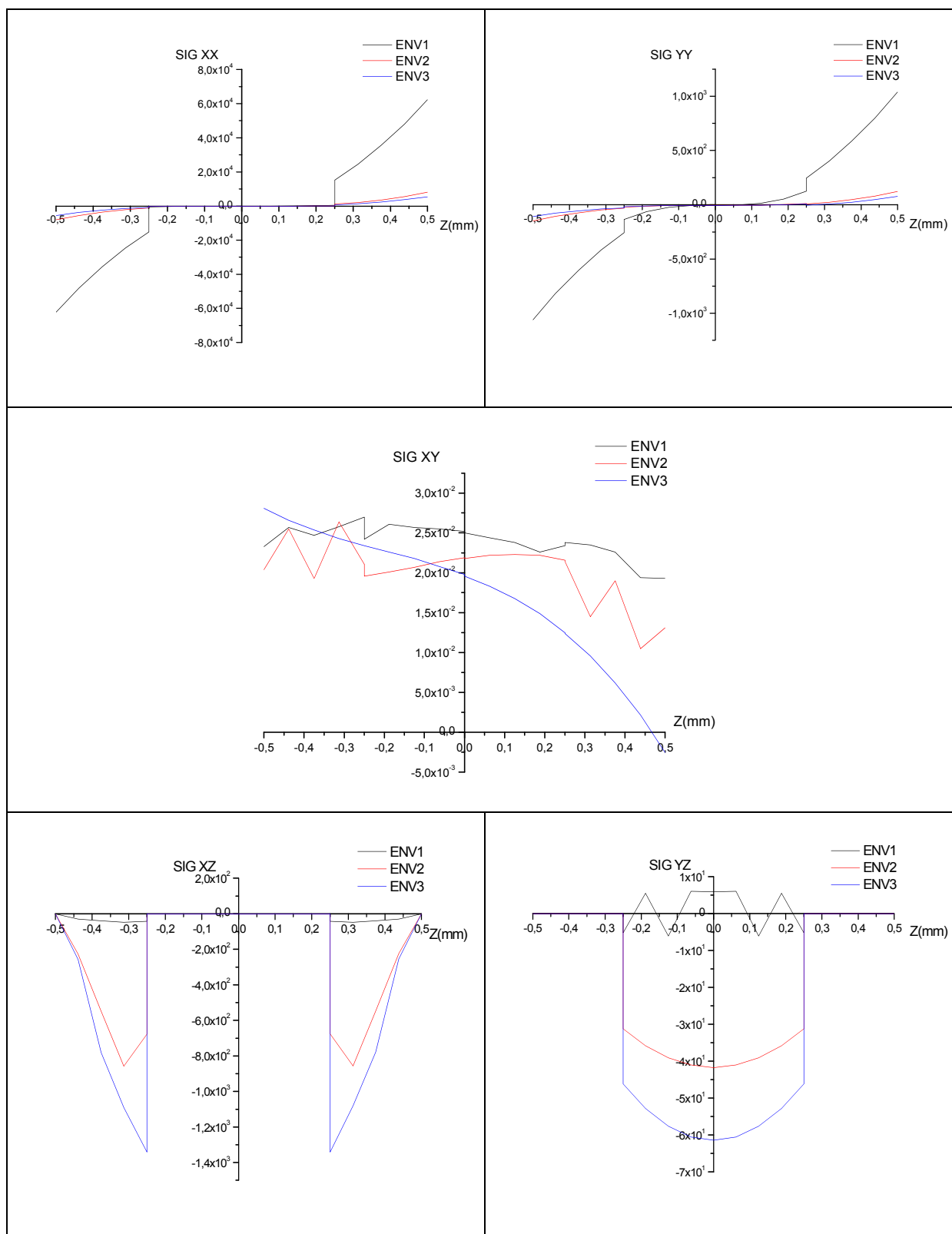


Figure 4.72 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique dans différents environnement avec vieillissements- modèle MTCF5.

Dans le but de voir l'influence des paramètres environnementaux sur le comportement des stratifiés vieilliss les simulations la section 5.2 ont été abordées avec la prise en compte du vieillissement hygrothermique dans 3 environnements différents expliqué par le tableau 4.19 ,les résultats de cette section sont présentés par les figures 4.63 au 4.72 ,les modèles MTC2-3-4-5-6 donnent un état de contrainte Maximal relatif à l'environnement 3 qui est le plus agressive avec une dégradation hygrothermique importante provoquée par cet environnement ,cette remarque est valable pour tout l'état de contrainte y compris les contraintes de cisaillement, pour le reste des modèles de chargement (MTCF1-2-3-4-5) où le comportement du stratifié est toujours dépendant de l'environnement mais l'environnement 03 ne correspond pas forcément à l'état max de contrainte et cela est dû à la distribution de la concentration imposée par la loi de FICK.

### 5.5 Influence du vieillissement hygrothermique sur le comportement des stratifiés Composites

Afin d'observer simultanément l'effet de la distribution de la température et l'humidité, le vieillissement hygrothermique, les simulations ci-dessous traitent cette idée avec des conditions de simulation données par le tableau 4.20.

N°	REF	Chargement mécanique	Environnement	$\Delta T$	$\Delta C$
3	MTC2	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C$	$C_0=0.01, C_1=0.02$
4	MTC3	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
5	MTC4	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
6	MTC5	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	$C_0=0.01$
7	MTC6	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C, T_2=20^\circ C$	$C_0=0.01, C_1=0.02, C_2=0.03$
8	MTCF1	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
9	MTCF2	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
10	MTCF3	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
11	MTCF4	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)
12	MTCF5	q0=100	ENV 1	$T_0=10^\circ C, T_1=15^\circ C, T_2=20^\circ C$	Lois de Fick (HR=40%,t=200H)

Tableau 4.20 : Données de simulation-section 5.5

### 5.5.A Modèle MTC 2 :

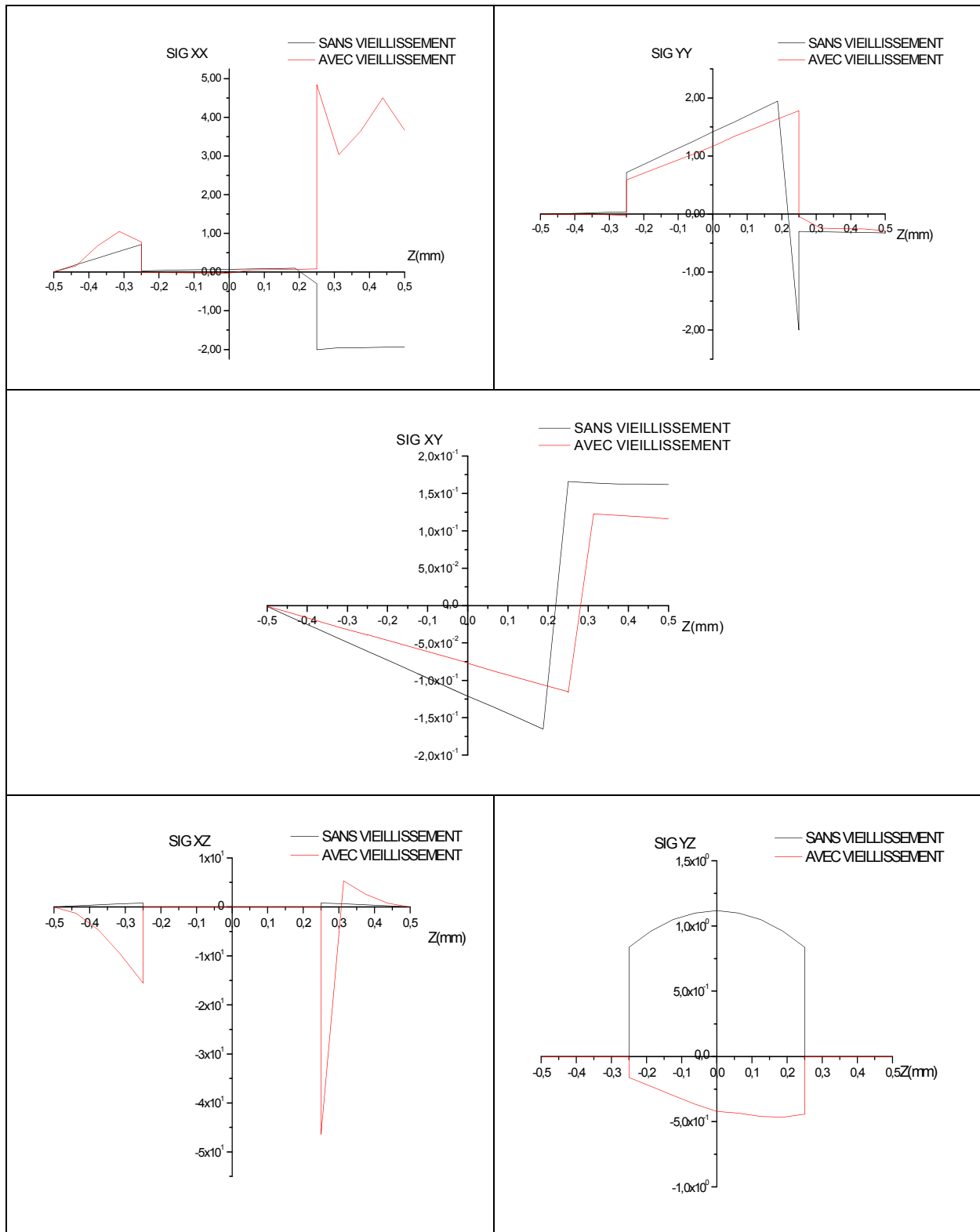


Figure 4.73 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC2.



5.5.B Modèle MTC 3 :

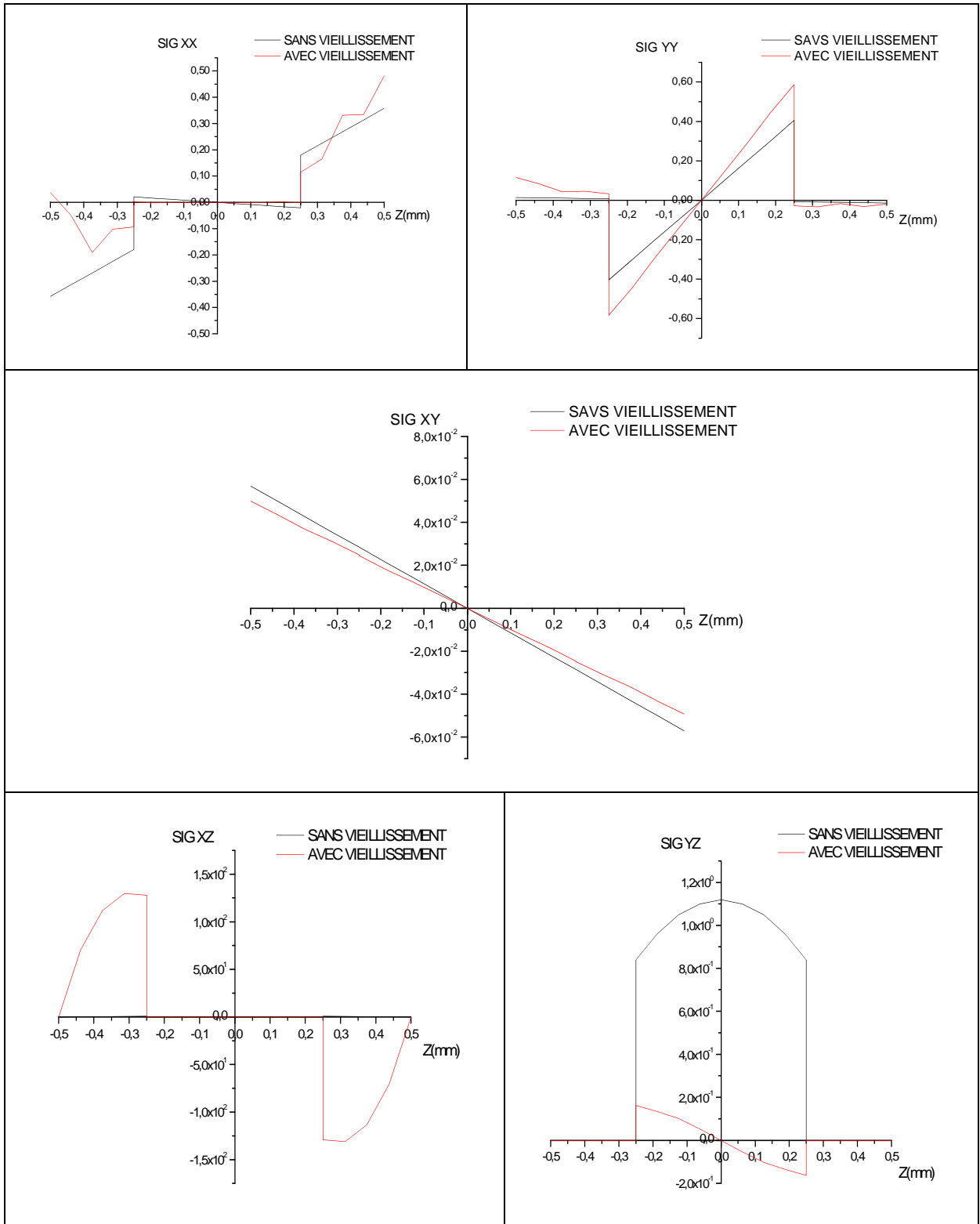


Figure 4.74 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC3.

5.5.C Modèle MTC 4 :

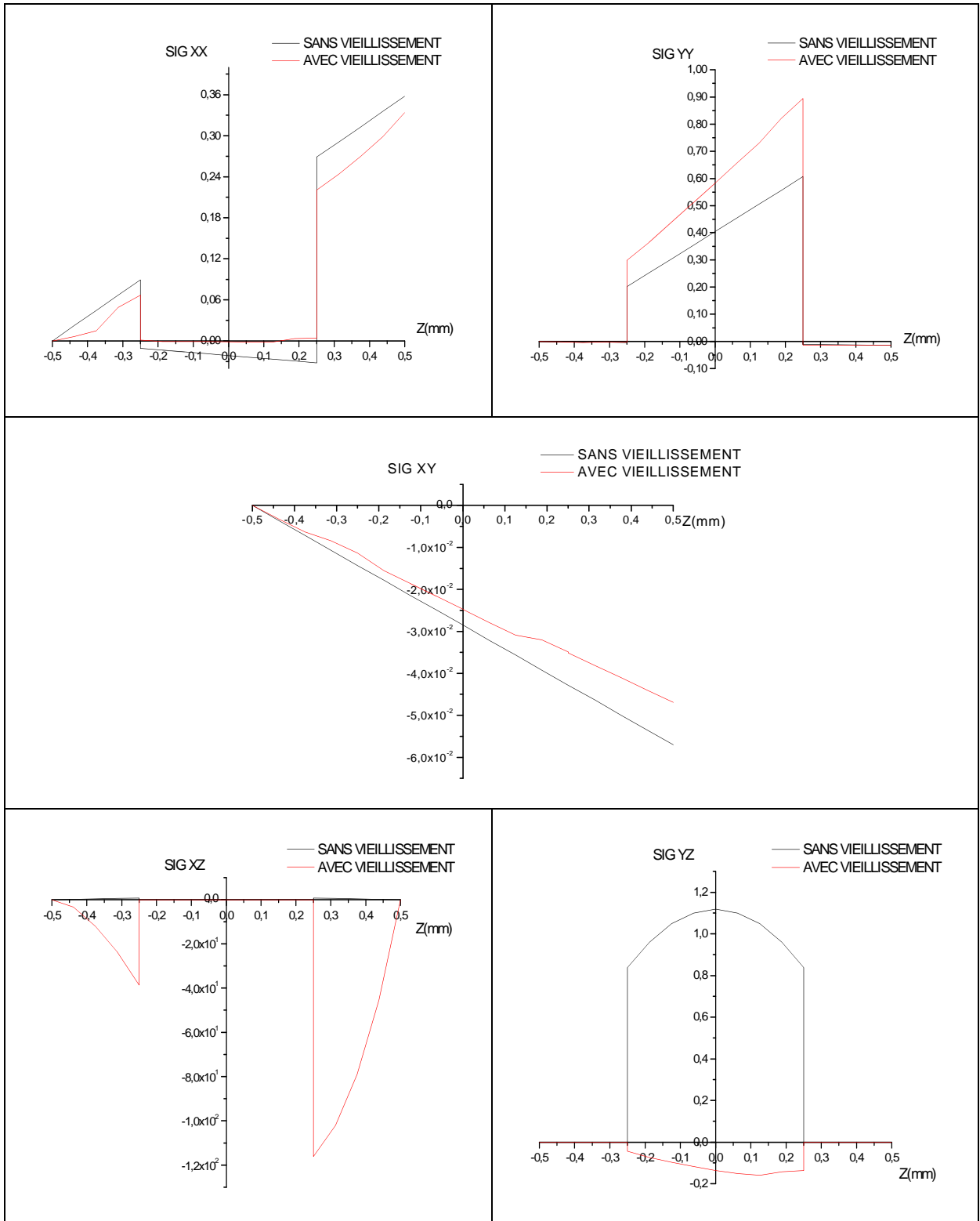


Figure 4.75 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC4.

### 5.5.D Modèle MTC5 :

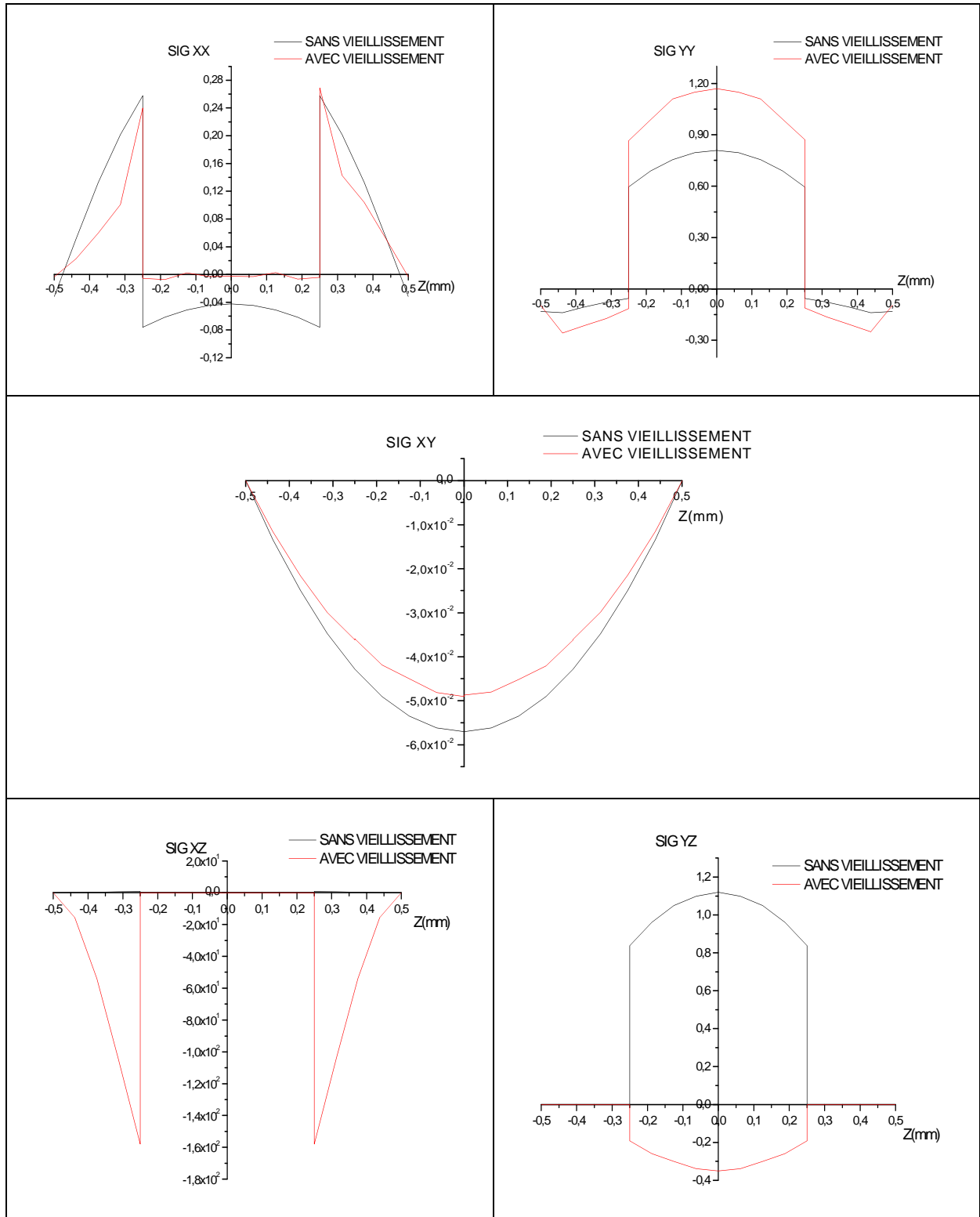


Figure 4.76 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC5.

### 5.5.E Modèle MTC6 :

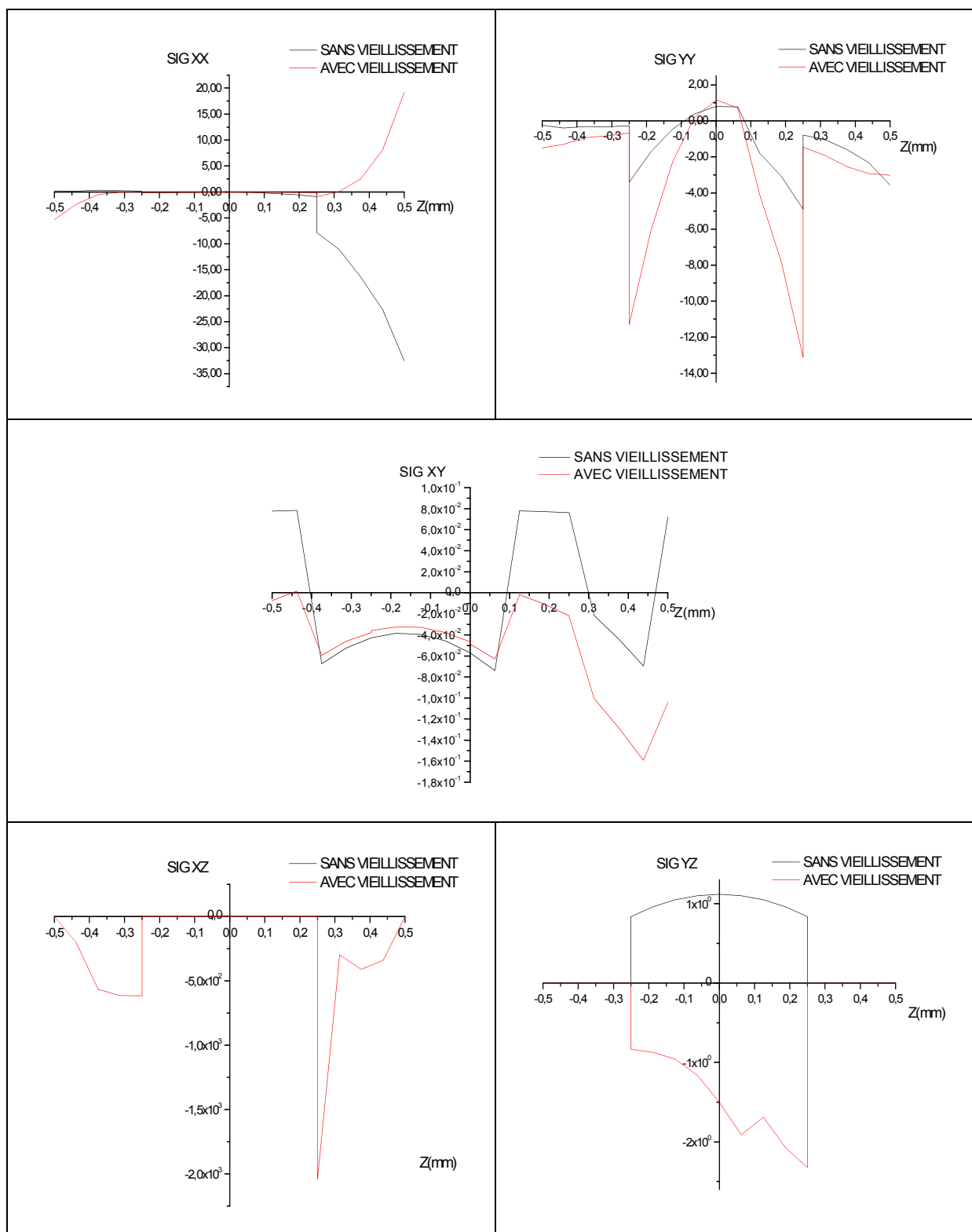


Figure 4.77 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique ENV1 avec et sans vieillissements- modèle MTC6.

### 5.5.F Modèle MTCF1 :

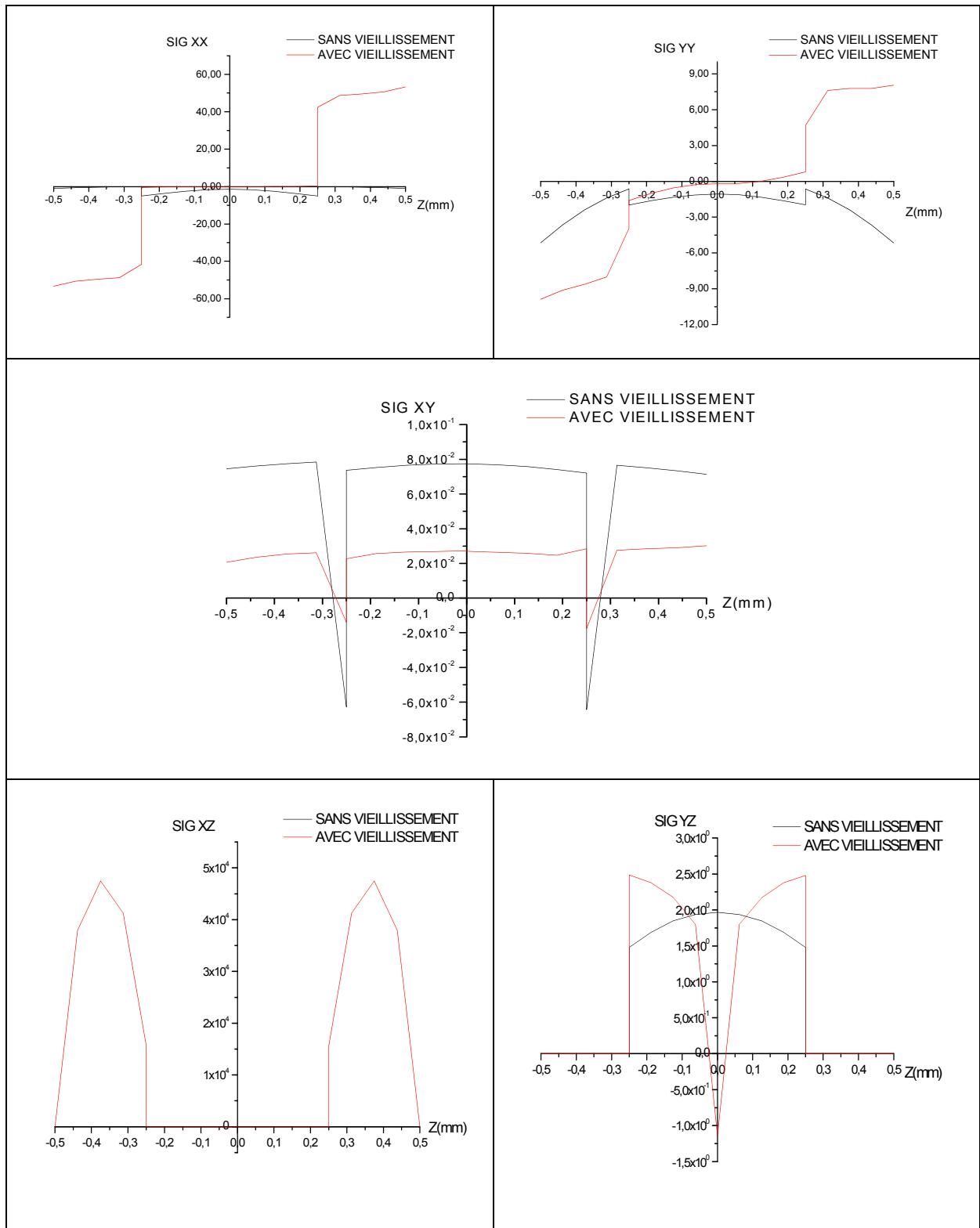


Figure 4.78 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF1.

### 5.5.G Modèle MTCF2 :

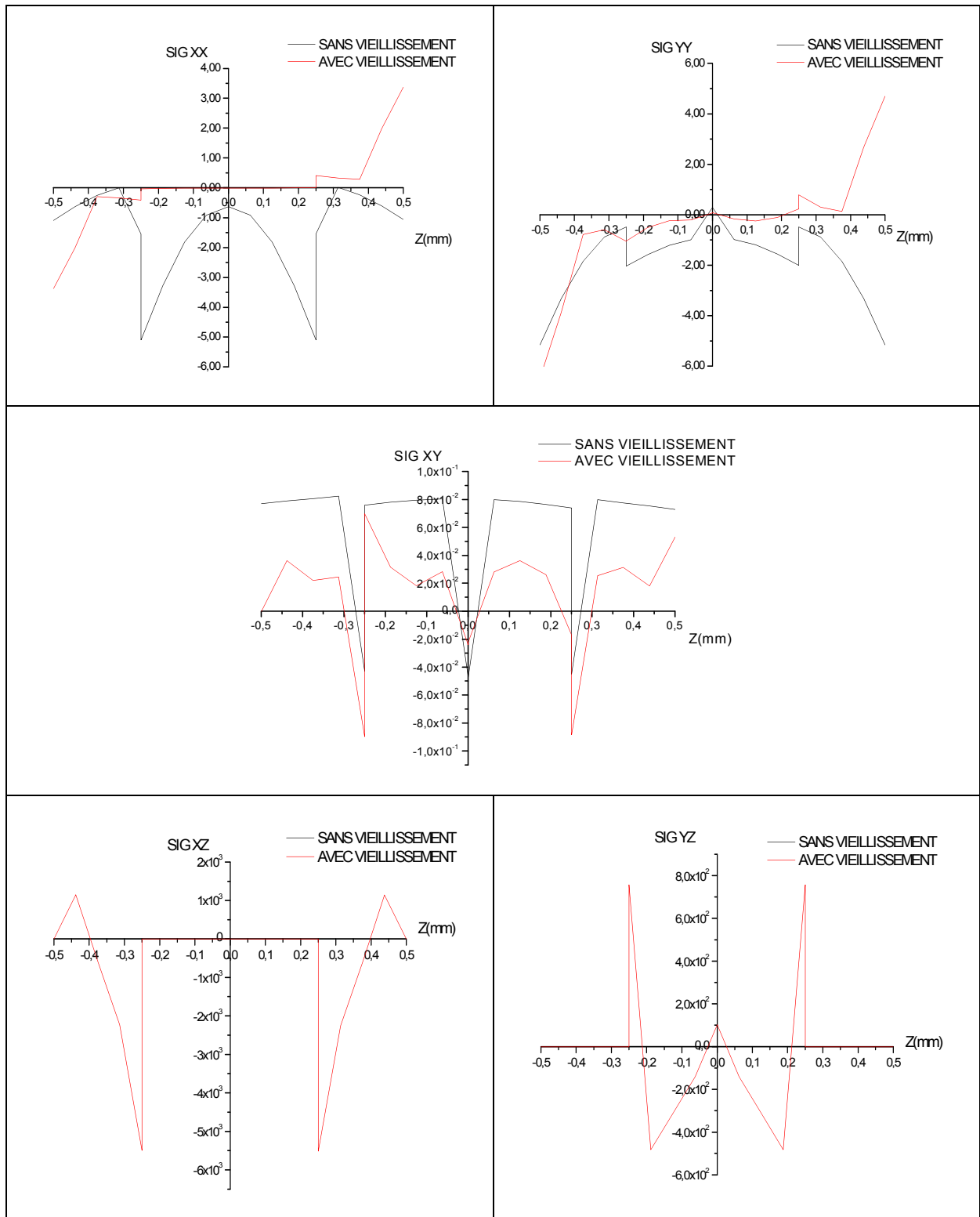


Figure 4.79 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF2.

5.5.H Modèle MTCF3 :

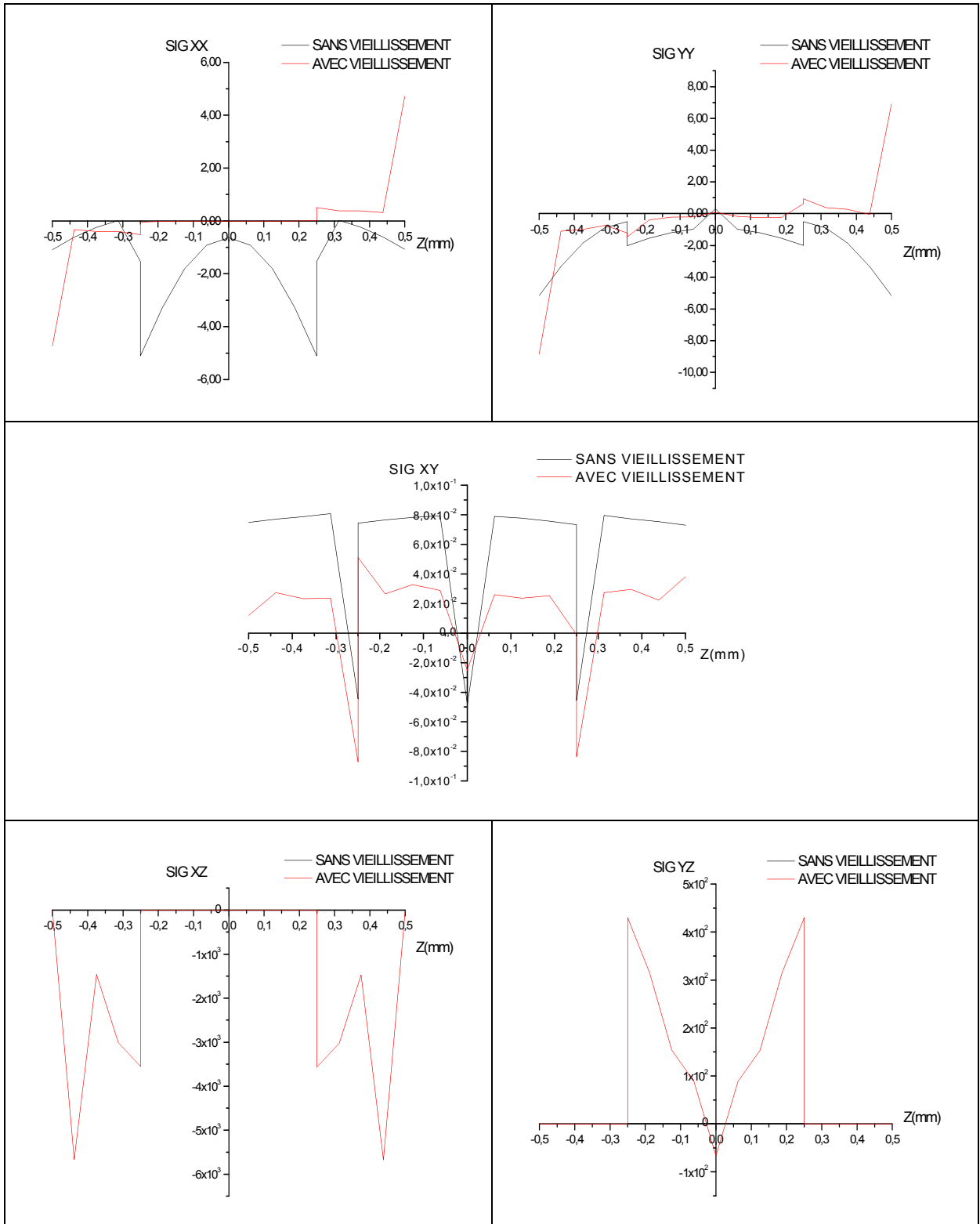


Figure 4.80 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF3.

### 5.5.1 Modèle MTCF4 :

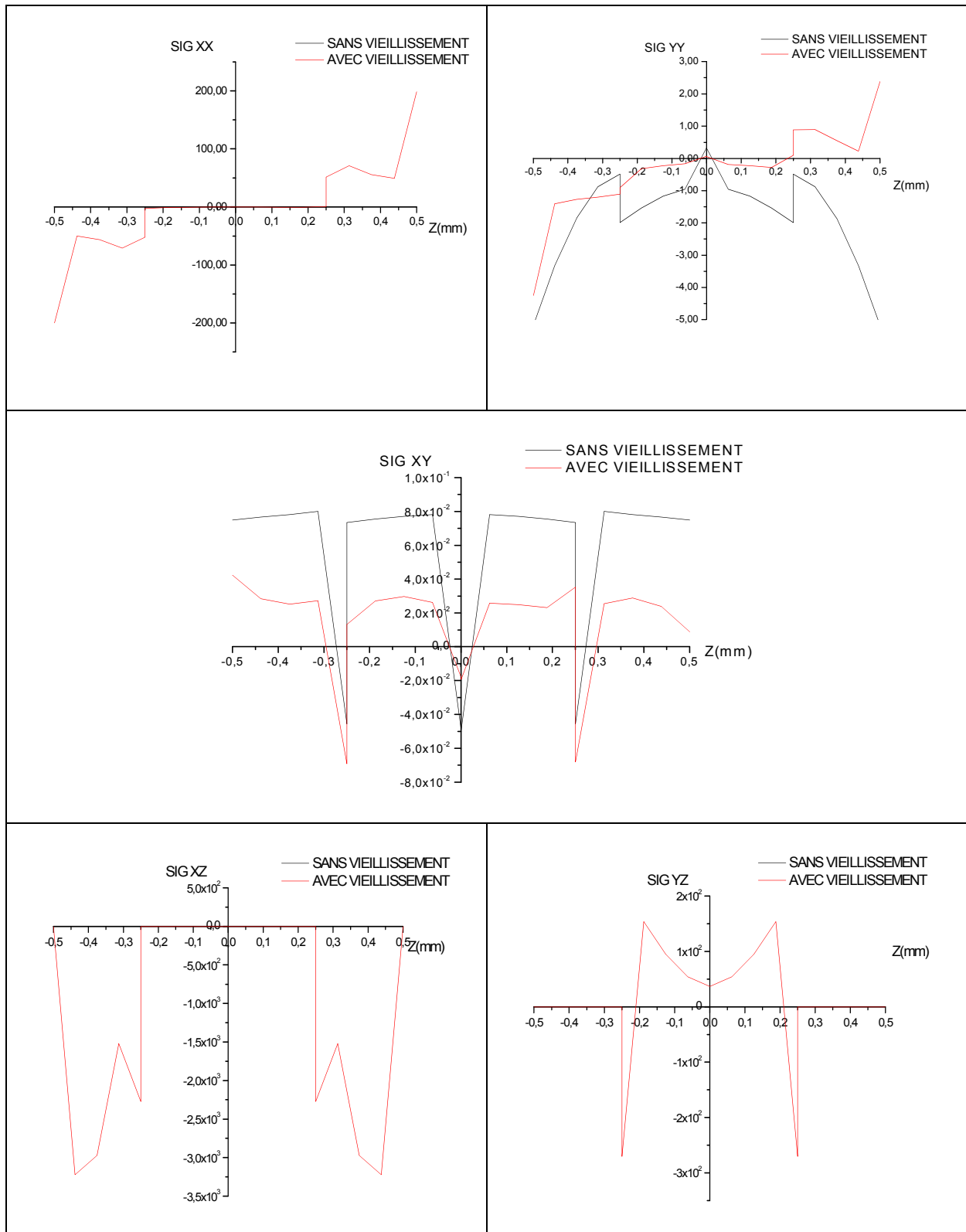


Figure 4.81 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF4.



### 5.5.J Modèle MTCF5 :

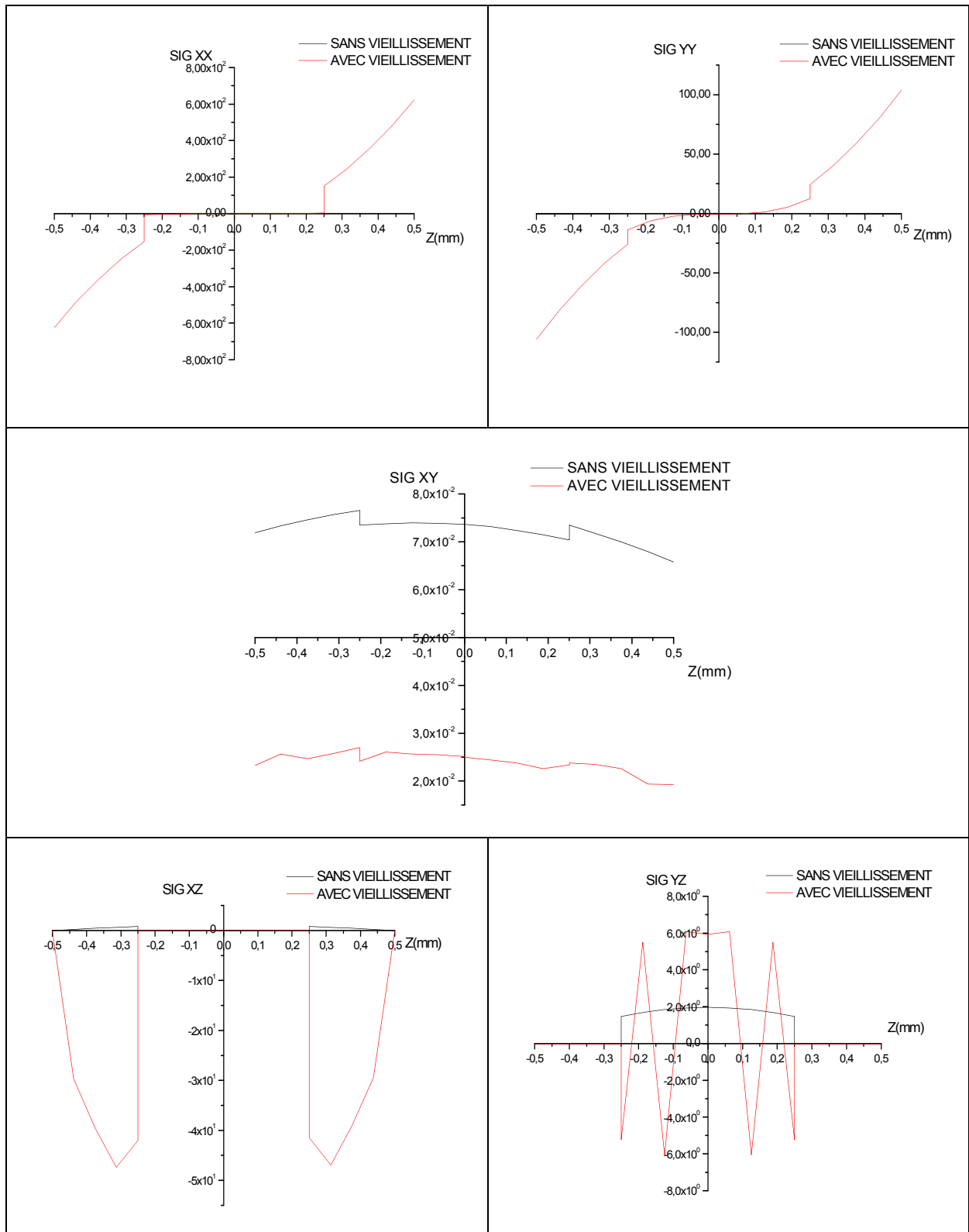


Figure 4.82 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV1 avec et sans vieillissement- modèle MTCF5.

Toujours dans le but de mettre en évidence l'influence de la dégradation hygrothermique, les simulations de la section précédente ( Section 5.5) sont refaites pour des conditions environnementales plus sévères présentées dans le tableau 4.21.

N°	REF	Chargement mécanique	Environnement	$\Delta T$	$\Delta C$
3	MTC2	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}, T_1=30^\circ\text{C}$	$C_0=0.04, C_1=0.05$
4	MTC3	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	$C_0=0.04$
5	MTC4	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	$C_0=0.04$
6	MTC5	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	$C_0=0.04$
7	MTC6	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=35^\circ\text{C}, T_1=40^\circ\text{C}, T_2=45^\circ\text{C}$	$C_0=0.06, C_1=0.07, C_2=0.08$
8	MTCF1	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}, T_1=30^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=65%,t=200H)
9	MTCF2	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=65%,t=200H)
10	MTCF3	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=65%,t=200H)
11	MTCF4	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=25^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=65%,t=200H)
12	MTCF5	$q_0=100$	ENV 4	$T_0=35^\circ\text{C}, T_1=40^\circ\text{C}, T_2=45^\circ\text{C}$	Lois de Fick (HR=65%,t=200H)

Tableau 4.21 : Données de simulation de l'environnement 4.

5.5.K Modèle MTC 2 :

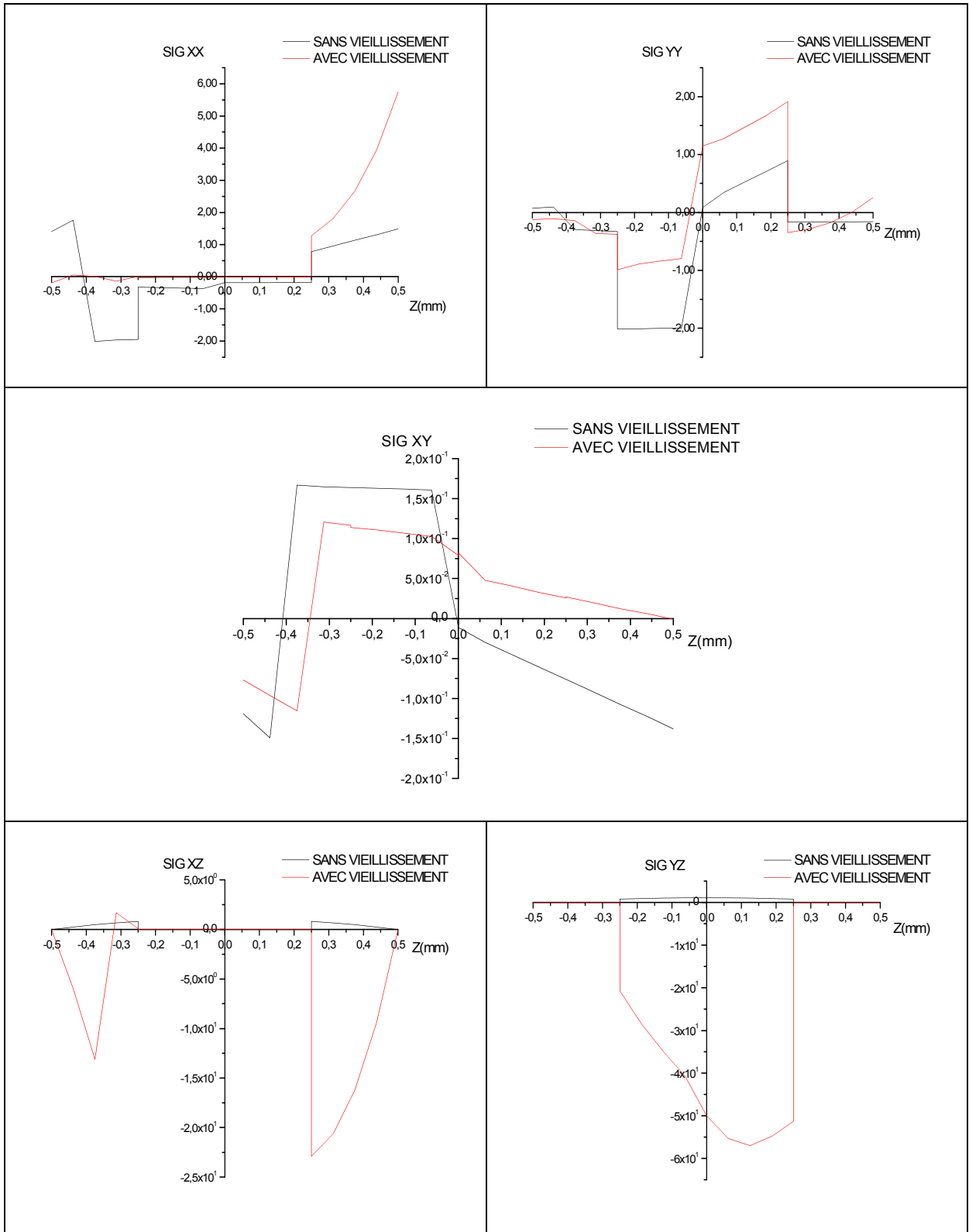


Figure 4.83 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC2.

5.5.L Modèle MTC 3 :

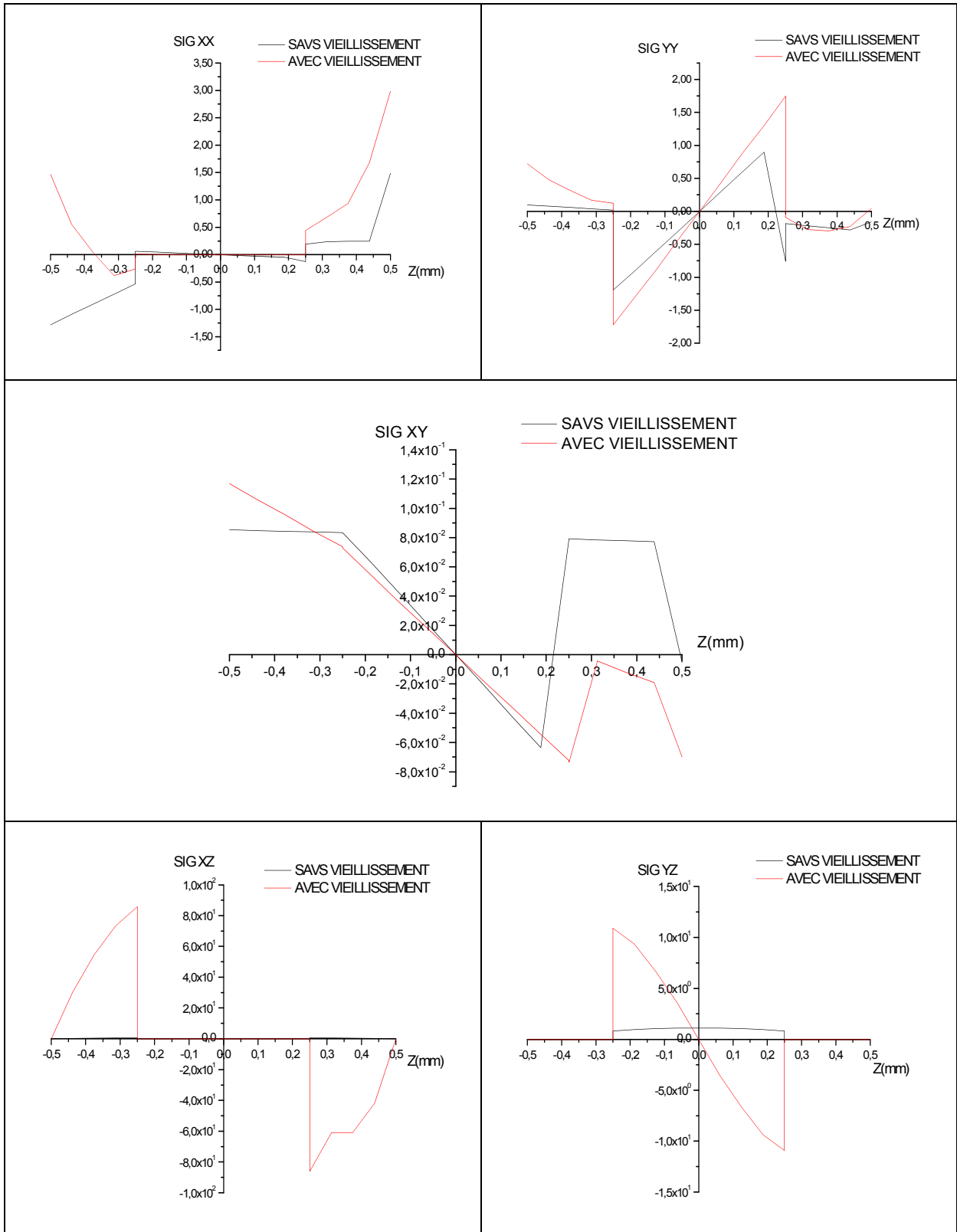


Figure 4.84 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC3

### 5.5.M Modèle MTC4 :

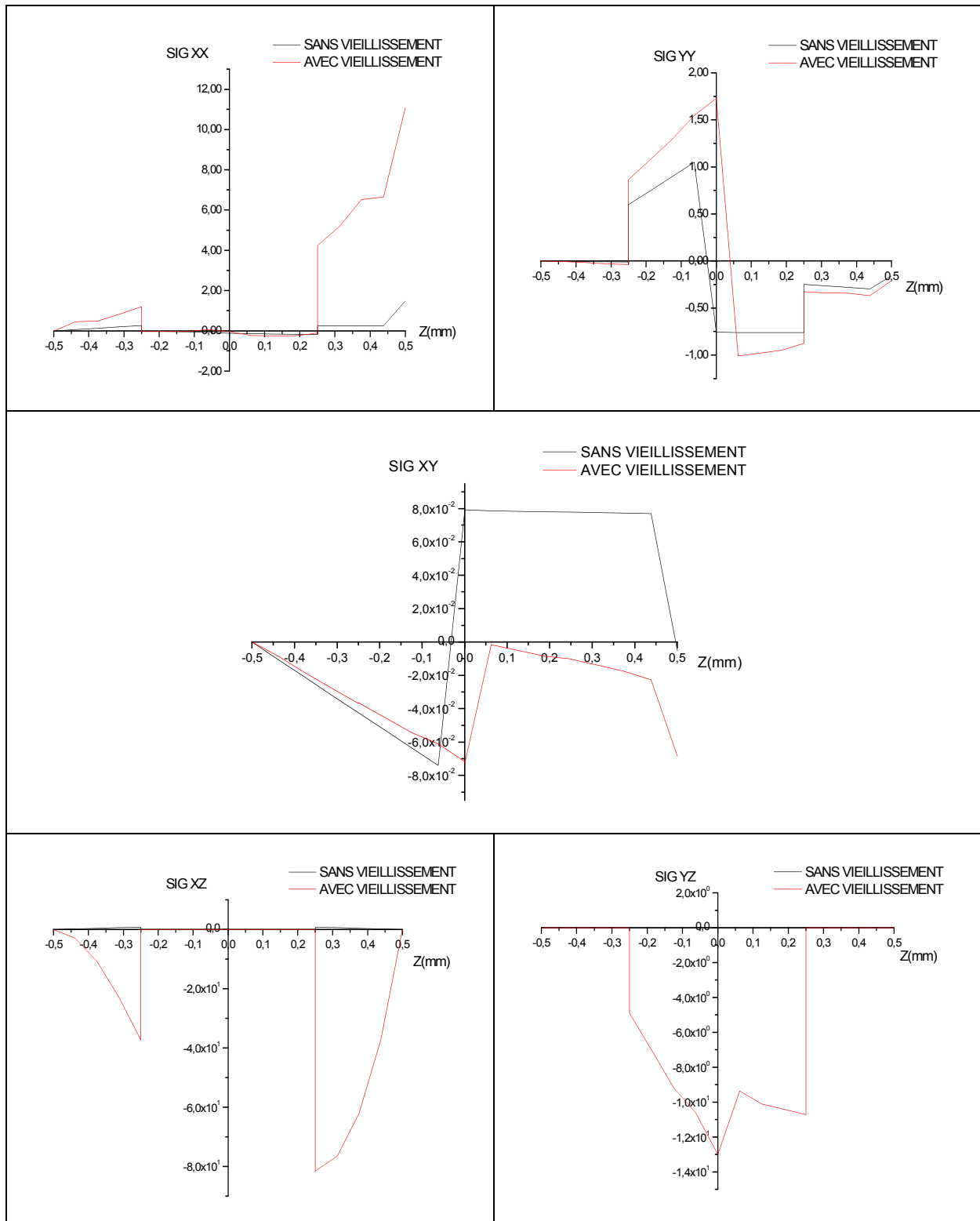


Figure 4.85 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC4.

### 5.5.N Modèle MTC5 :

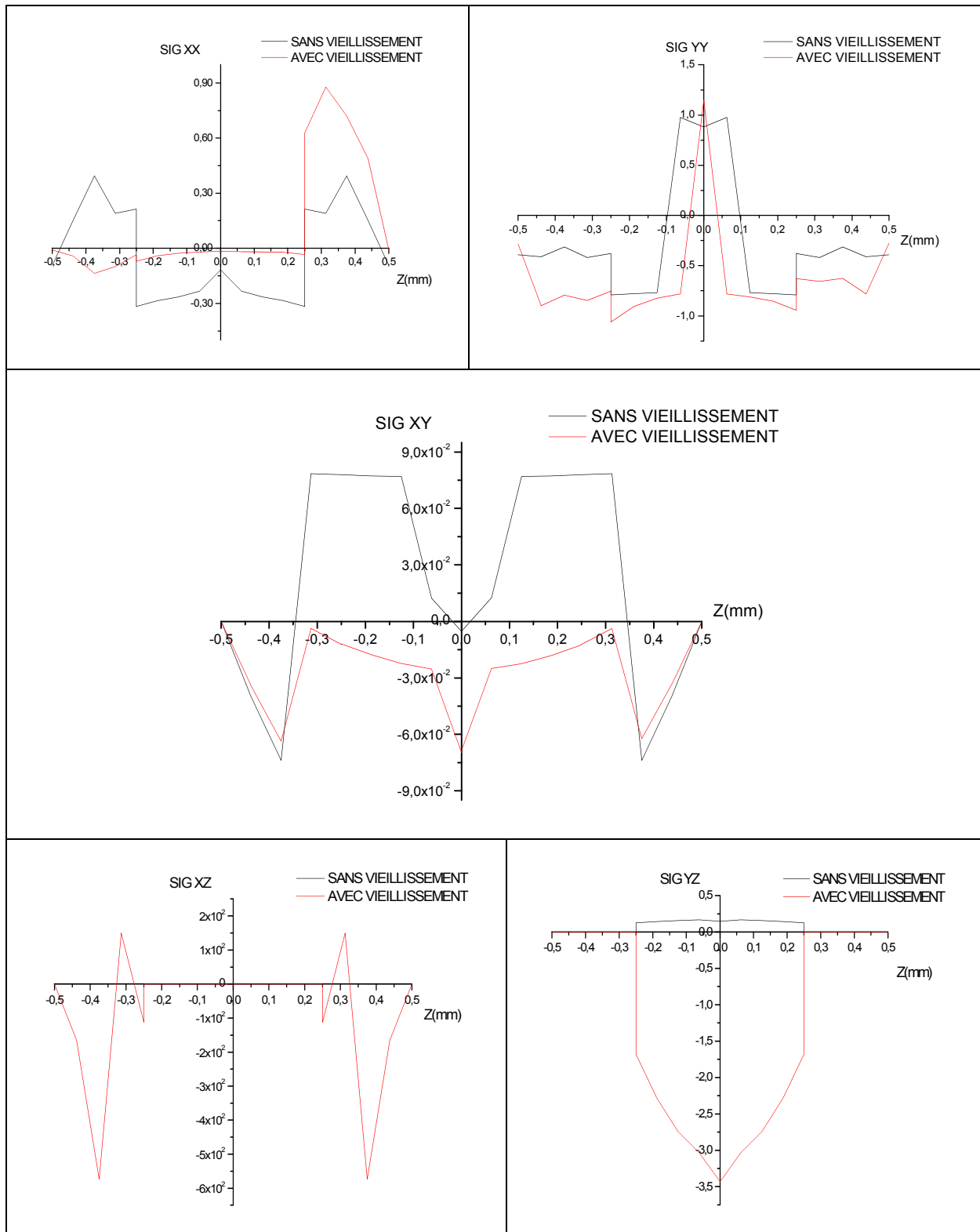


Figure 4.86 Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC5.

### 5.5.O Modèle MTC6 :

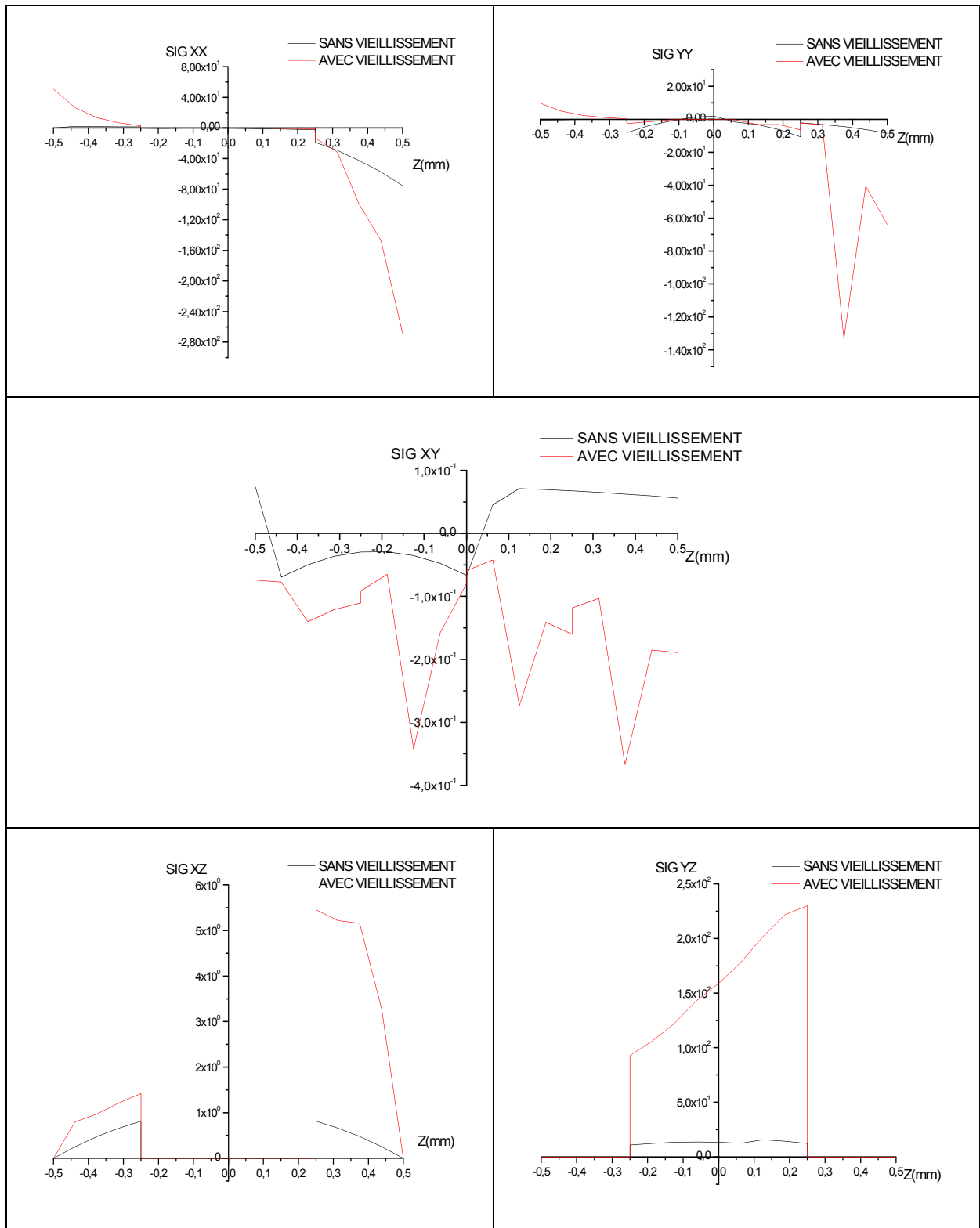


Figure 4.87 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTC6.

### 5.5.P Modèle MTCF1 :

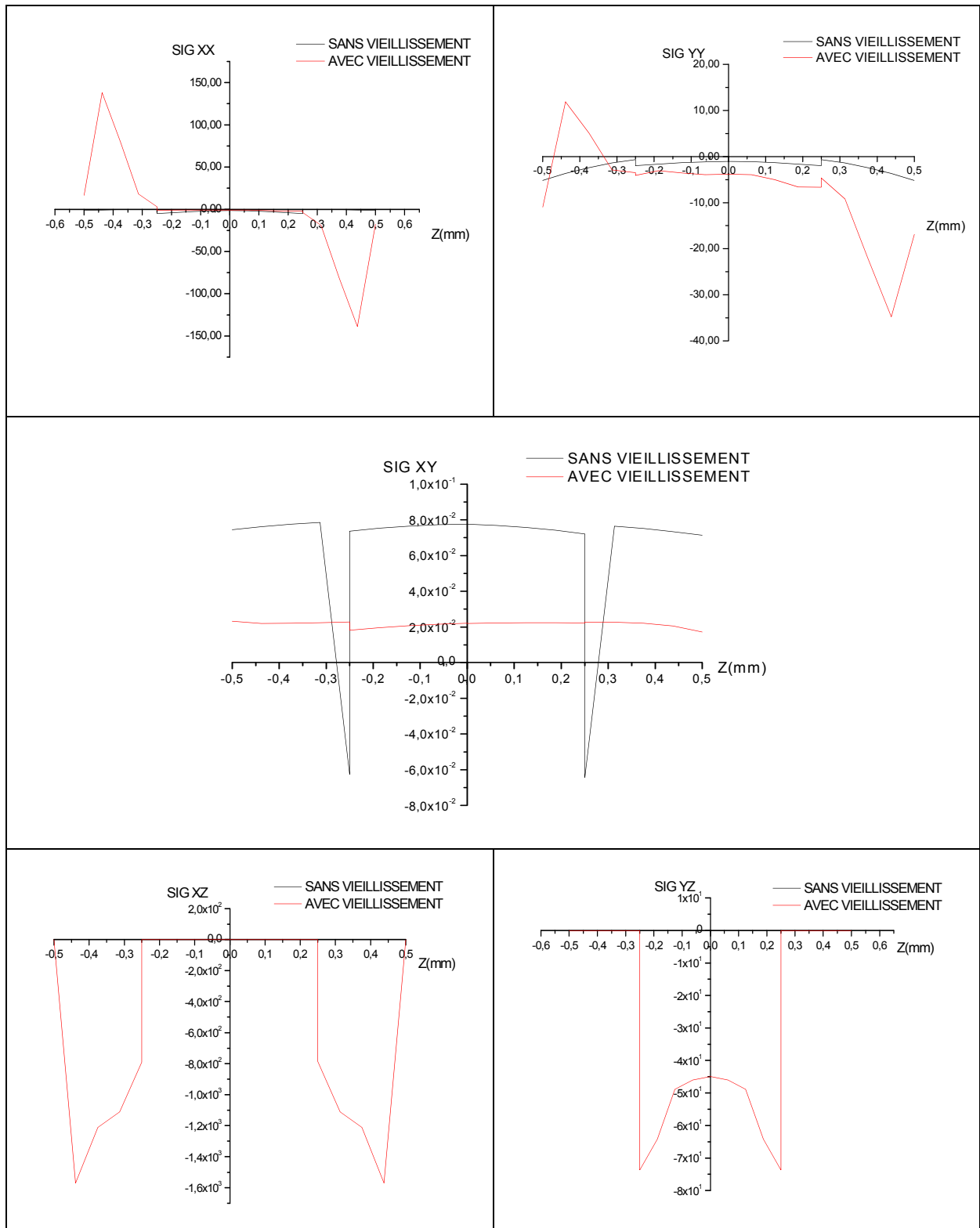


Figure 4.88 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF1.



### 5.5.Q Modèle MTCF2 :

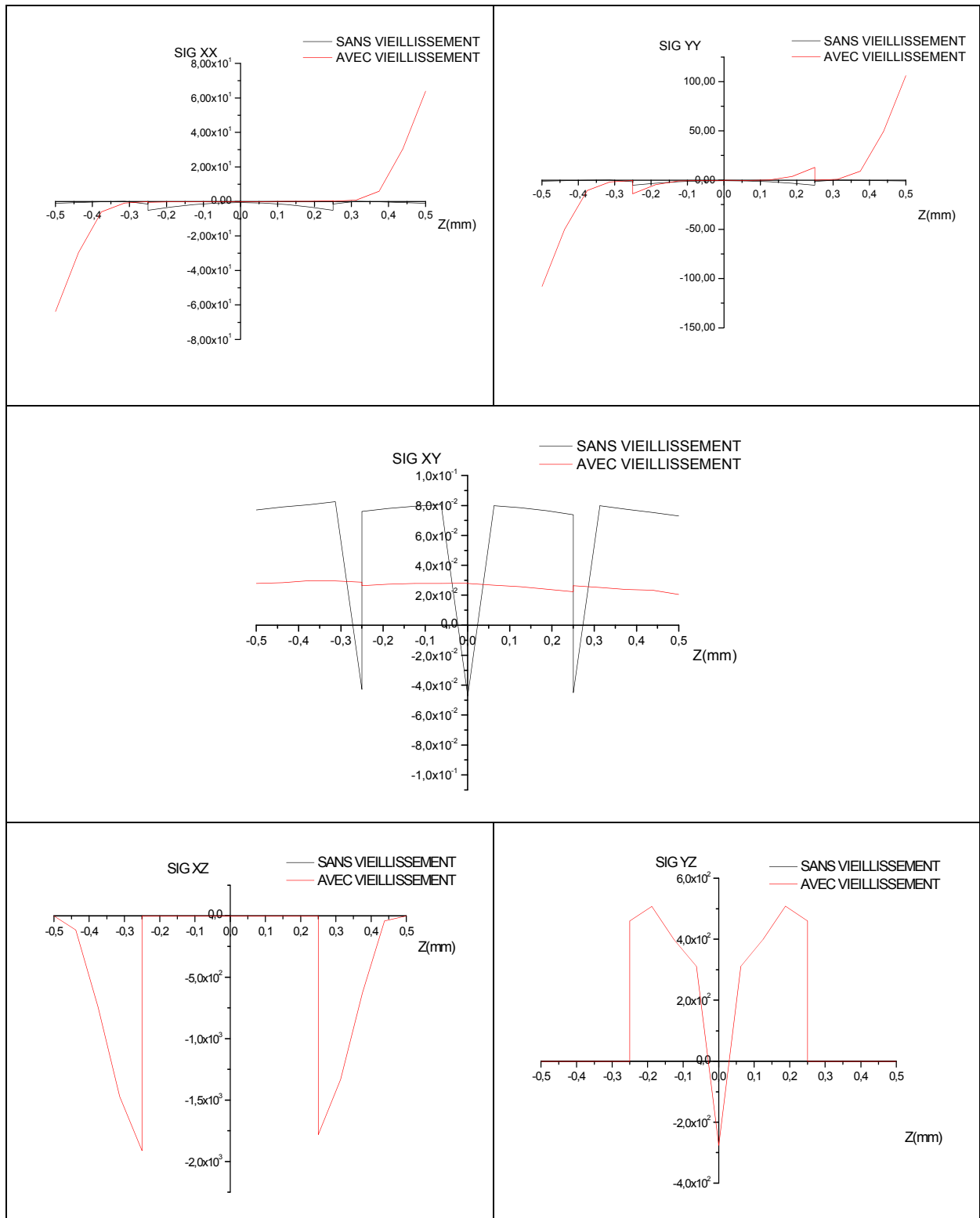


Figure 4.89 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF2.

5.5.R Modèle MTCF3 :

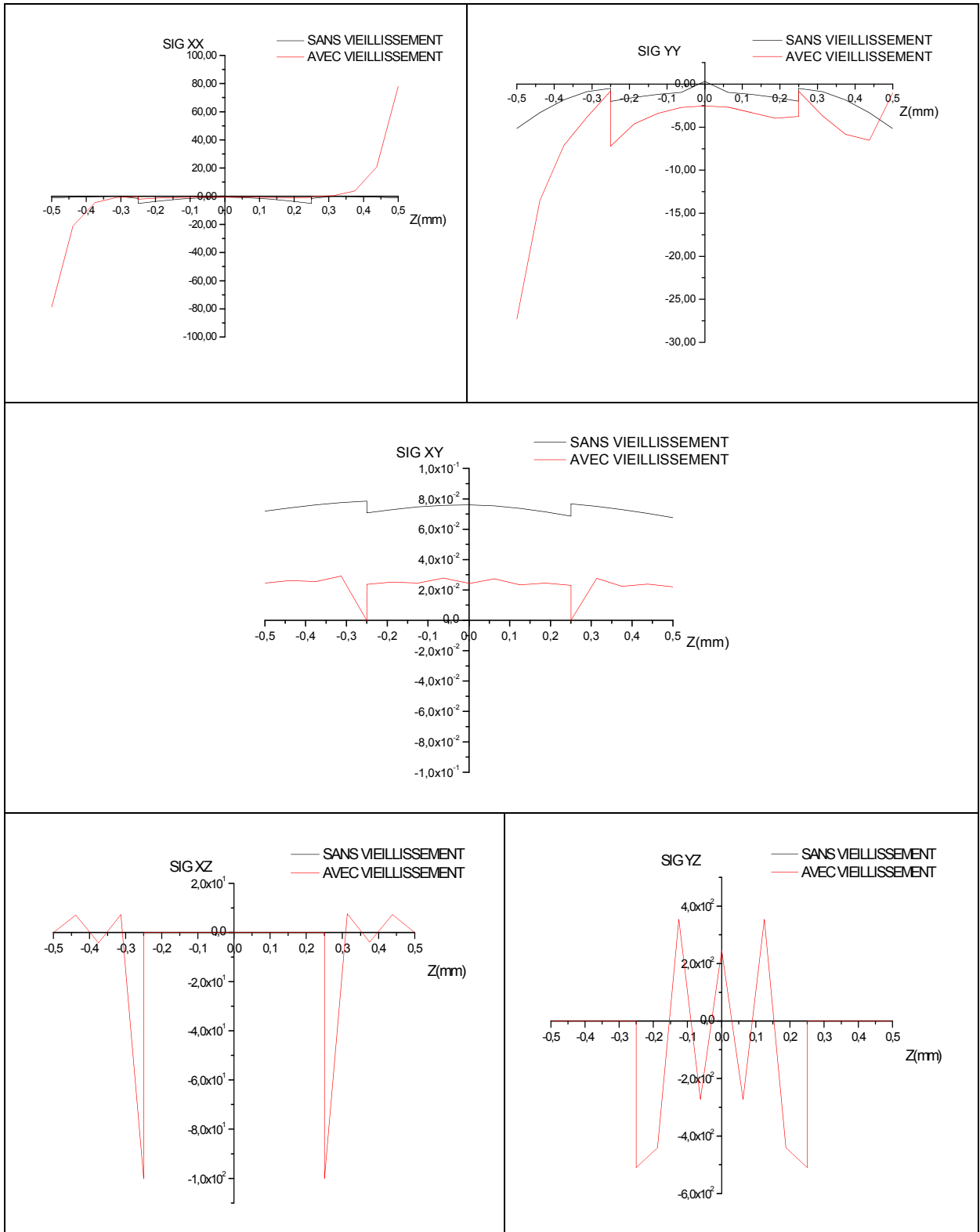


Figure 4.90 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF3.

### 5.5.S Modèle MTCF4 :

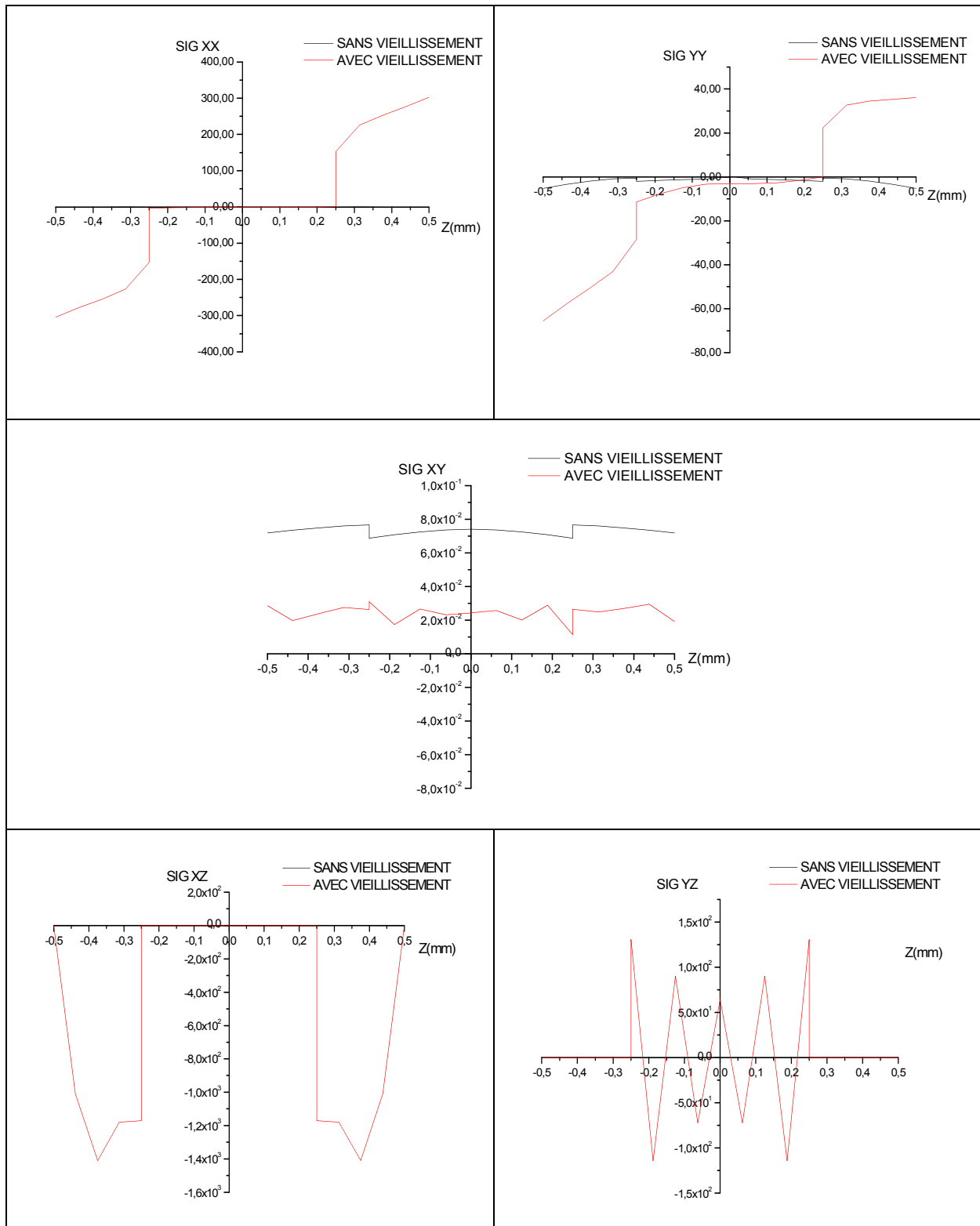


Figure 4.91 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF4.

5.5.T Modèle MTCF5 :

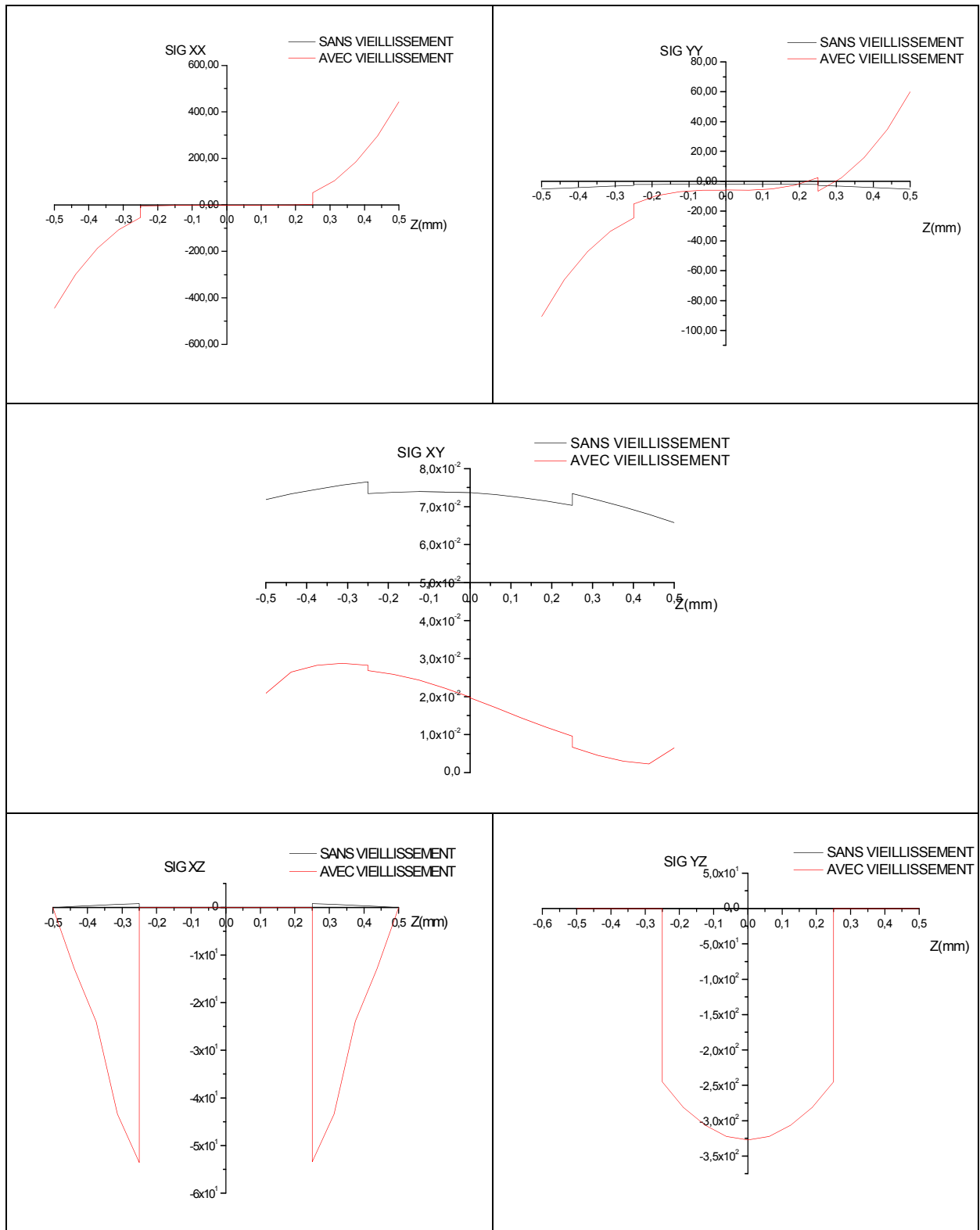


Figure 4.92: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique ENV4 avec et sans vieillissement- modèle MTCF5.

Les figures 4.73 au 4.82 présentent des simulations du comportement d'un stratifié croisé en composite qui a les mêmes caractéristiques mécanique et géométriques de la section précédente, les graphes présentés superposent l'état de contrainte pour le cas de la prise en compte du vieillissement hygrothermique avec le cas échéant, les conditions de simulation sont présentées dans les tableaux 4.20, les résultats montrent une augmentation des contraintes dans le cas du vieillissement par rapport à l'état de contrainte du matériau non vieillis, cette augmentation de l'état de contrainte est expliquée par la chute de rigidité du matériau suite au vieillissement provoqué par la température et l'humidité et modéliser par le modèle de TSAI, on remarque également que les contraintes de cisaillements sont influées par le vieillissement hygrothermique contrairement à ce qui a été remarqué dans les sections précédente où ces dernières sont peu influé par la température et l'humidité, les figures 4.83-4.92 traitent le même cas précédent mais avec des conditions environnementales plus agressive expliquées dans le tableau 4.21, les résultats montrent un état de contrainte plus élevé par rapport à la section précédente et cela est expliqué par la chute considérable des caractéristiques mécaniques provoquée par les conditions environnementales de l'environnement 4.

#### 5.6. Prise en compte des paramètres géométriques dans le comportement des stratifiés

Dans cette section on s'intéresse aux paramètres géométrique et leur influence sur le comportement des stratifiés croisées, le rapport longueur-largeur est utilisé comme valeur paramétrique.

5.6.A Modèle MTC5 :

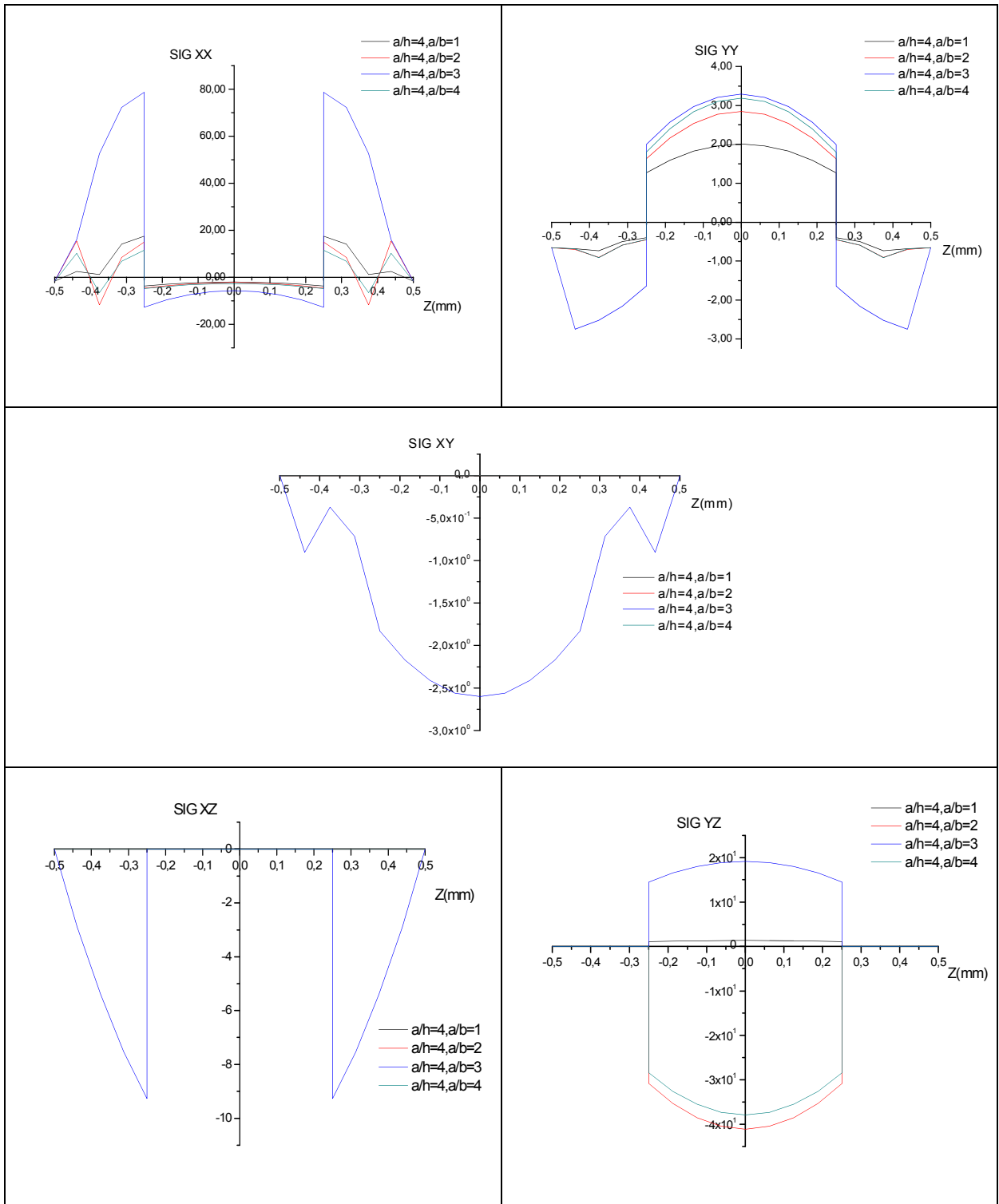


Figure 4.93 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTC5 avec différents rapport géométriques.

5.6.B Modèle MTCF5 :

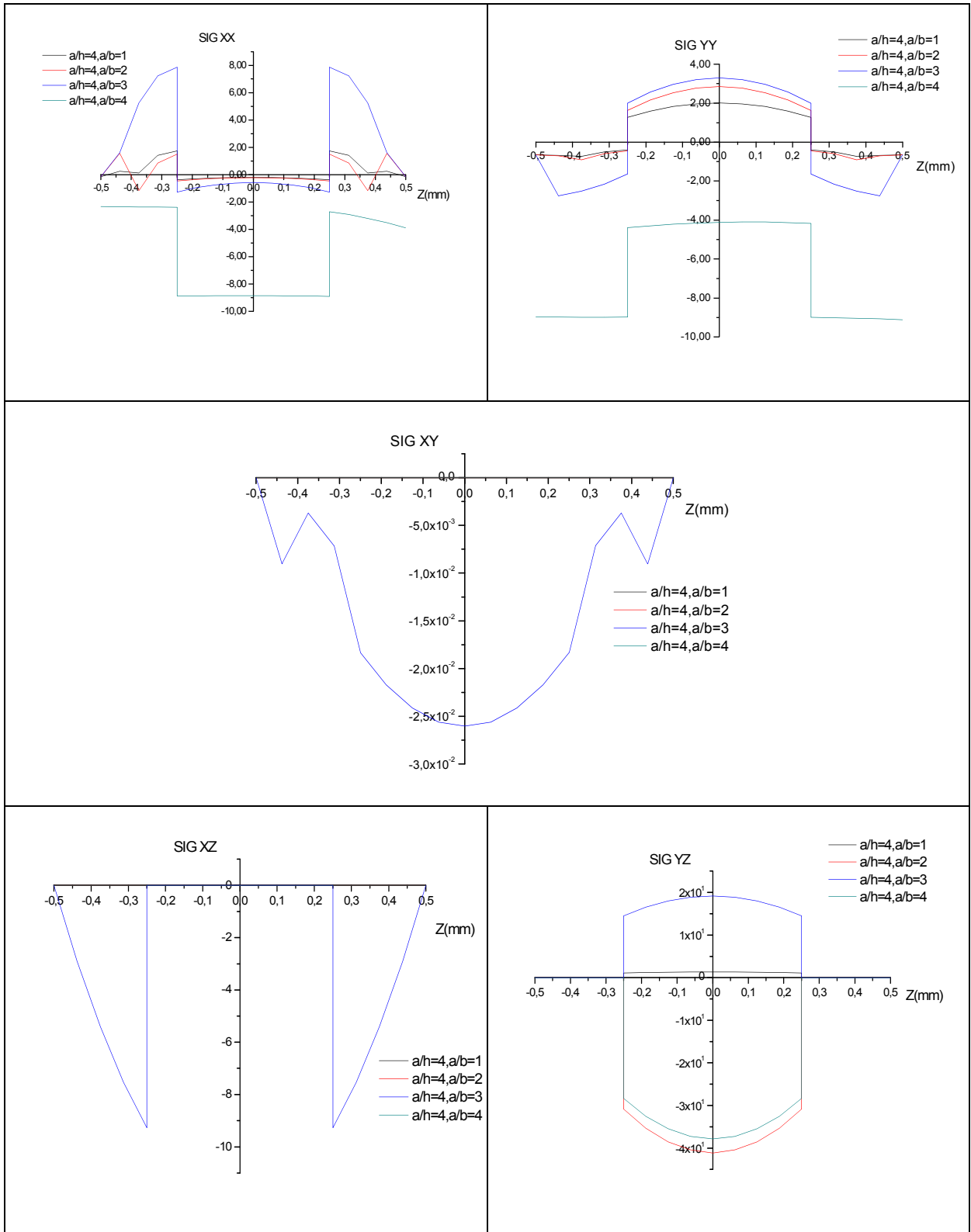


Figure 4.94 : Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5 avec différents rapport géométriques.

## 5.7. Prise en compte des paramètres géométriques et la dégradation hydrothermique dans le comportement des stratifiés

Les simulations de la section précédente sont traitées avec la prise en compte de la dégradation Hydrothermique.

### 5.7.A Modèle MTC5 :

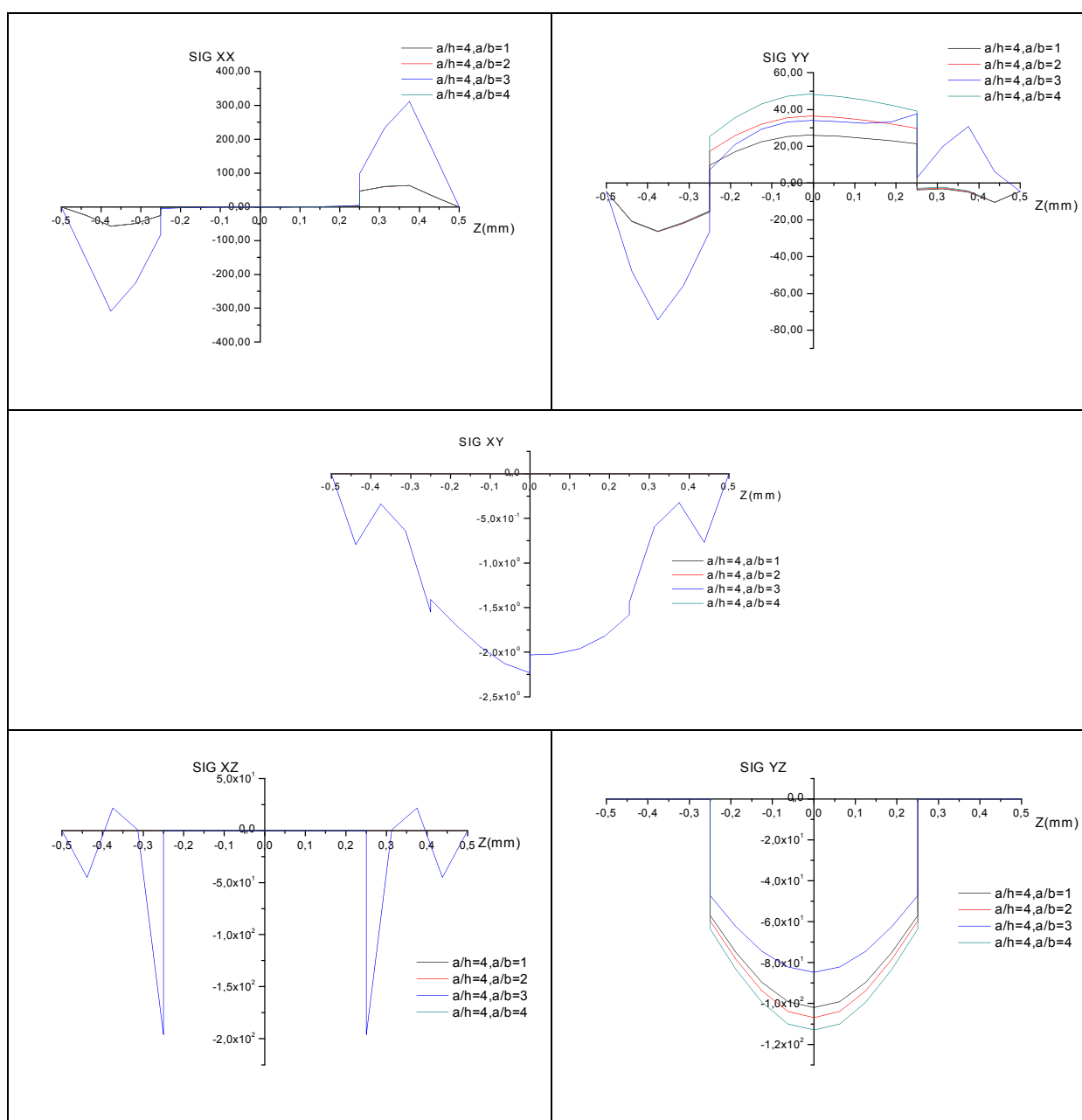


Figure 4.95 : Etat de contrainte sous chargement hydrothermique- modèle MTC5 avec différents rapport géométriques et vieillissement.



5.7.B Modèle MTCF5 :

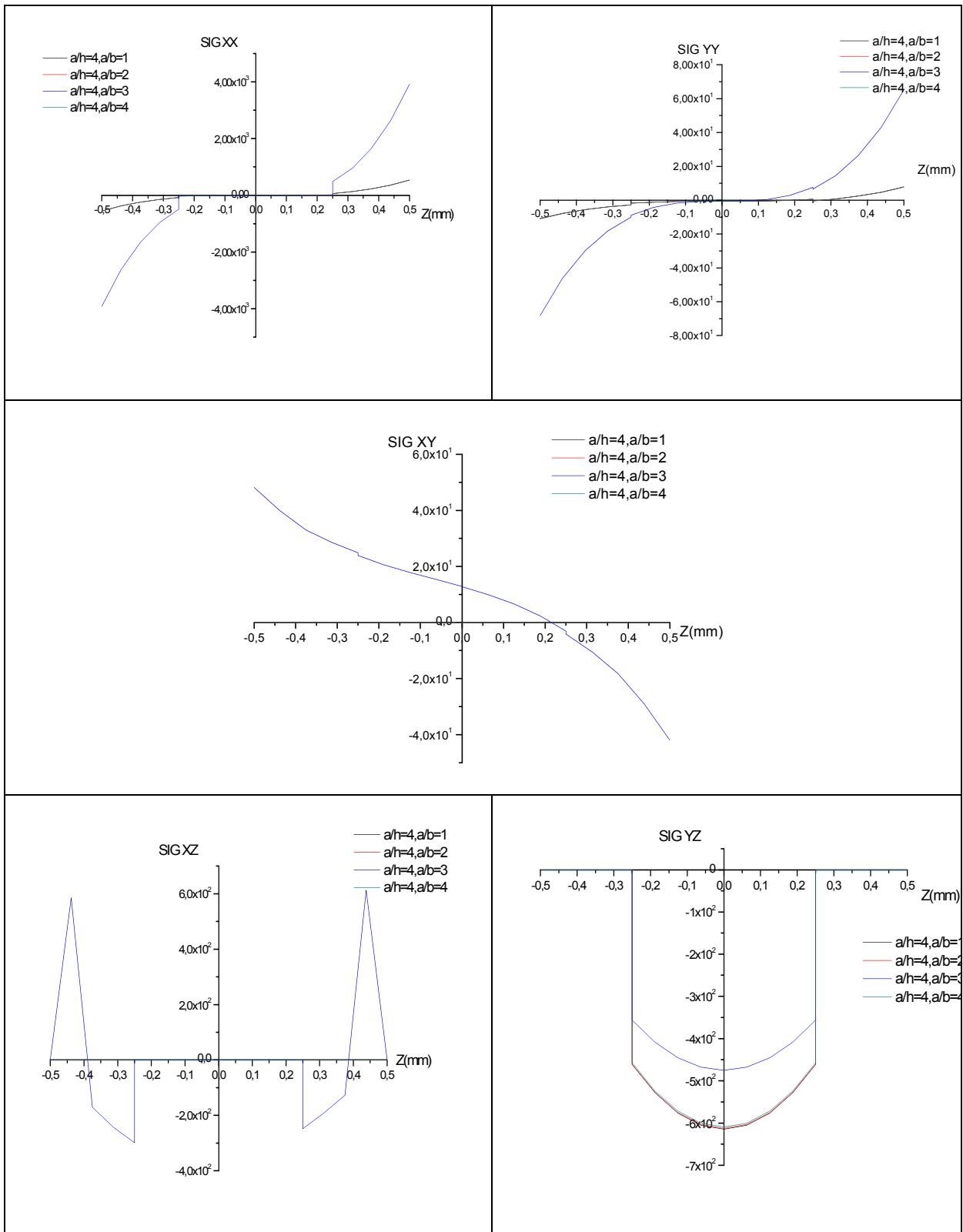


Figure 4.96: Etat de contrainte sous chargement hygrothermique- modèle MTCF5 avec différents rapport géométriques et vieillissement.

Les figures 4.93 et 4.94 présentent des simulations faites pour un stratifié croisé, dans cette section on traite l'influence des paramètres géométriques sur le comportement, pour simplifier l'étude, seul le mode de chargement MTC5 et MTCF5 sont traités, les résultats du model MTC5 montrent clairement l'influence du rapport longueur/largeur sur l'état de contrainte en général, pour le cas de Sig xx et Sig yy les états de contrainte sont proches avec un état max correspondant à un rapport  $a/b=3$ , pour le cas de Sig xy et Sig xz et Sig yz l'état de contrainte est dominé par le cas du rapport géométrique  $a/b=3$ , pour le cas du chargement MTCF5 l'état de contrainte max Sig xx, Sig yy correspond à un rapport géométrique particulier  $a/h=a/b=4$ , la contrainte Sig xy et Sig xz est dominé par l'état correspond à un rapport  $a/b=3$ , les figures 4.95 et 4.96 traitent le même cas du stratifié de la section précédente avec une hypothèse supplémentaire qui est la prise en compte de la dégradation hygrothermique dans les simulations, les commentaires de la section précédentes sont applicable à cette section, seul les allures des graphes et l'ordre de grandeur des contraintes ont changés.

## CONCLUSION GENERALE

Au cours de ce travail, nous avons étudié le comportement des plaques composites épaisses avec les différents modèles qui permet de modéliser le comportement de ces dernières, nous avons aussi quantifié l'état de contrainte résultant d'un chargement hygro-thermo-mécanique, différentes conditions environnementales ont été utilisé, la chute des performances mécaniques a été prise en compte localement pour le calcul et l'analyse de la nouvelle configuration des performances mécanique après la dégradation, l'influence des paramètres géométrique de la plaque composites a été aussi inclus dans l'étude.

L'objectif recherche été de mieux comprendre les effets des conditions environnementales (température et humidité) à différents échelles dans le matériau, identifier l'évolution des performances mécanique et l'évolution de l'état de contrainte, un modèle semi-empirique développé par TSAI a été mis en place dans le code de calcul pour quantifier la chute et la dégradation des caractéristiques mécanique, ce modèle traite la dégradation au niveau micromécanique séparément pour la fibre et la matrice, l'étude bibliographique des phénomènes hygrothermique a permis d'interpréter les résultats du vieillissement obtenus par simulation numérique.

Les simulations du comportement des plaques épaisses sous chargement hygro-thermo-mécanique ont été faite en utilisant plusieurs cas de profil de température et d'humidité (linéaire, parabolique....etc) suivant l'épaisseur du stratifié, un autre cas de distribution de concentration a été utilise c'est le cas de la distribution donnée par la loi de Fick, les paramètres de diffusion ont été considérés pour chaque environnement dans le quel travail notre stratifié.

L'originalité du travail réside dans l'utilisation de plusieurs sous programme pour évaluer le comportement des contraintes avec la prise en compte des chutes des performances mécanique, le sous-programme DIFF détermine les profils de concentration pour les utilisés localement aux calculs des contraintes de nature hygroscopique, le sous-programme TSAILOC évalue la chute des caractéristiques mécaniques à travers l'épaisseur en prenant en considération la valeur de la concentration et température en chaque nœud de sous couche.

Les équations qui décrivent le comportement des contraintes ont été établies pour différents cas de profil de concentration et température.

Le code calcul appelé AGING-THICK-COMP-MAT établi durant cette étude nous a permis de simuler les contraintes pour différents environnements en terme de température et humidité et différents profils de température et concentration .

Le modèle de TSAI utilisé a augmenté l'exactitude des résultats obtenus, par l'évaluation des chutes des différentes caractéristiques mécaniques pour la matrice et la fibre.

L'utilisation des profils de concentration donnés par l'équation de Fick a amélioré les résultats et a donné une correspondance à la physique du comportement.

Les contraintes hygrothermique atteignent des valeurs importantes, donc il est indispensable de les prendre en considération durant les phases d'engineering.

Le code calcul développé AGING-THICK-COMP-MAT permet de simuler le comportement des contraintes résiduelles pour n'importe quel environnement en termes de température et humidité.

Nous souhaitons dans le futur aborder le comportement des stratifiés composites en tenant en compte les déformations hygrothermiques et le vieillissement dans le sens transversale.

Une étude sur la fatigue, d'une structure composite soumise à des chargements hygrothermiques peut aussi être faite.

## LISTE DES SYMBOLES

[A] :	Matrice de rigidité en membrane
[B] :	Matrice de rigidité en membrane-flexion-torsion
[D] :	Matrice de rigidité en flexion
[E] :	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion et gauchissement.
[H] :	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion et gauchissement.
[F] :	Matrice de rigidite en gauchissement.
C (z,t) :	Concentration dans le temps suivant z
C0 :	Concentration initiale
Cs :	Concentration à la saturation
D :	Diffusivité
E <sub>fx</sub> :	Module longitudinal de Young dans la direction de la fibre
E <sub>fx</sub> <sup>0</sup> :	Module longitudinal de Young de la fibre à la température de référence
E <sub>fy</sub> :	Module transversal de Young dans la direction de la fibre
E <sub>fy</sub> <sup>0</sup> :	Module transversal de Young de la fibre à la température de référence
E <sub>x</sub> :	Module longitudinal de Young dans le pli
E <sub>x</sub> <sup>0</sup> :	Module longitudinal de Young dans le pli à la température de référence
E <sub>y</sub> :	Module transversal de Young dans le pli
E <sub>y</sub> <sup>0</sup> :	Module transversal de Young dans le pli à température de référence
E <sub>m</sub> :	Module de Young de la matrice
E <sub>m</sub> <sup>0</sup> :	Module de Young de la matrice à la température de référence
E <sub>L</sub> :	Module d'élasticité longitudinal
E <sub>T</sub> :	Module d'élasticité transversal
E <sub>a</sub> :	Energie d'activation de la diffusion
G <sub>fx</sub> :	Module de cisaillement de la fibre
G <sub>fx</sub> <sup>0</sup> :	Module de cisaillement de la fibre à la température de référence
G <sub>m</sub> :	Module de cisaillement de la matrice
G <sub>m</sub> <sup>0</sup> :	Module de cisaillement de la matrice à la température de référence
G <sub>xy</sub> :	Module de cisaillement dans le pli dans le repere xy

$G_{xy}^0$ :	Module de cisaillement du stratifié à la température de référence
$G_{LT}$ :	Module de cisaillement
HR :	Humidité relative
LTT' :	Repère local du stratifié
$M_t$ :	Masse d'humidité absorbée à l'instant t
$M_S$ :	Masse à la saturation
M :	Point matériel appartenant au plan moyen
$M_x, M_y$ :	Moments fléchissant dans la direction x et dans la direction y.
$M_x^{HT}, M_y^{HT}$ :	Moments hygrothermique dans la direction x et y.
$N_x, N_y$ :	Efforts résultant dans la direction x et dans la direction y.
$N_x^{HT}, N_y^{HT}$ :	Efforts hygrothermique respectivement dans la direction x et y.
$Q_{xz}, Q_{yz}$ :	Résultantes en force transversale dans les plans (xz), (yz).
$\Phi(z)$ :	Fonction de forme du champ de déplacement
[Q] :	Matrice de rigidité.
$Q_{ij}$ :	Constantes de rigidité dans le repère LT
$Q'_{ij}$ :	Constantes de rigidité dans le repère xy
R :	Constante des gaz
S :	Résistance au cisaillement longitudinal
[S] :	Matrice de souplesse
[T] :	Matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celle du repère global.
[T'] :	Matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celle du repère global.
Topr :	Température d'utilisation
Tg :	Température de transition
$Tg^0$ :	Température de transition à la température de référence
Trm :	Température de référence
$T^*$ :	Température adimensionnelle
$V_f$ :	Fraction volumique des fibres
$V_m$ :	Fraction volumique de la matrice
X :	Résistance de tension longitudinale
X' :	Résistance de compression longitudinale
x, y, z :	Repère global du stratifié
Y :	Résistance de tension transversale

$Y'$ :	Résistance de compression transversal
$a, c, f, h, b, e$ :	Constantes empiriques
$h$ :	Epaisseur du stratifié
$h_k$ :	Epaisseur du pli d'ordre $k$
$i$ :	Numéro de la sous couche (Noeud)
$e_k$ :	Epaisseur de la couche $k$
$dz$ :	Epaisseur de la sous couche
$k$ :	Numéro du pli
$n$ :	Nombre total des plis
$t$ :	Temps
$t_i$ :	Epaisseur de la sous couche
$u$ :	Déplacement du point $M$ suivant l'axe $x$ .
$v$ :	Déplacement du point $M$ suivant l'axe $y$ .
$w$ :	Déplacement du point $M$ suivant l'axe $z$ .
$u_0$ :	Déplacement du point $M$ dans le plan moyen suivant l'axe $x$ .
$v_0$ :	Déplacement du point $M$ dans le plan moyen suivant l'axe $y$ .
$w_0$ :	Déplacement du point $M$ dans le plan moyen suivant l'axe $z$ .
$\Psi_x, \Psi_y$ :	Rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes $y$ et $x$ .
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ :	Déformations de cisaillement dans les plans $(xy)$ , $(xz)$ et $(yz)$
$z_i$ :	Cote du $i$ ème sous couche par rapport au plan moyen
$z_k$ :	Cote du pli d'ordre $k$
$\theta$ :	Angle de rotation de l'axe $X$ par rapport à l'axe $L$
$\alpha_L$ :	Coefficient de dilatation thermique longitudinal
$\alpha_T$ :	Coefficient de dilatation thermique transversal
$\beta_L$ :	Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinale
$\beta_T$ :	Coefficient d'expansion hygroscopique transversal
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ :	Coefficient de dilatation thermique suivant $x, y$ , et le plan $xy$
$\beta_x, \beta_y, \beta_{xy}$ :	Coefficient d'expansion hygroscopique suivant $x, y$ , et le plan $xy$
$\nu_{LT}$ :	Coefficient de poisson dans le repère $LT$
$\nu_{xy}$ :	Coefficient de poisson dans le repère $XY$
$\nu_f$ :	Coefficient de poisson de la fibre
$\nu_f^0$ :	Coefficient de poisson de la matrice à la température de référence



$\nu_m$ :	Coefficient de poisson de la matrice
$\nu_m^0$ :	Coefficient de poisson de la matrice à la température de référence
$[\sigma_{ij}], \sigma(M)$ :	Tenseur des contraintes
$\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$ :	Contraintes suivant L,T et le plan LT
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ :	Contraintes suivant les axes ox, oy, et la plan xy
$\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ :	Déformations en membrane
$\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ :	Déformations en courbure
$\varepsilon_L, \varepsilon_T, \varepsilon_{LT}$ :	Déformations linéaires respectivement suivant les axes L,T,et le planLT
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ :	Déformations linéaires respectivement suivant les axes x,y,et xy
$\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zz}$ :	Déformations linéaires respectivement suivant les plans xz,yz,et zz.
$\gamma$ :	Déformations en cisaillement
$\Delta C$ :	Humidité d'opération – humidité de cuisson
$\Delta T$ :	Température d'opération – température de cuisson

## BIBLIOGRAPHIE

1. Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", London: Philosophical trans. of the Royal Society, (1888).
2. Kirchoff G., "Vorlesungen iiber Mathematische Physik, Mechanik", 1876.
3. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", ASME J Appl Mech, VOL 18-1951, 31-38.
4. Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions Vol 12, 69–77.
5. PM, Wung., "A transverse deformation theory of laminated composite plates", Computers and Structures, 1991; Vol 41 N°4, 821-833.
6. F. Auricchio., "Refined First Order shear deformation theory models for composite laminates", J of applied mechanics, 2003 Vol 70, 381-390.
7. Qi Yunqian, "A refined first order shear deformation theory and its justification by plane strain bending problem of laminated plates", J Solid Structures, 1996; Vol 1, 49-64.
8. ME Fares., "Non linear bending analysis of composite laminated plates using a refined first order theory", Composite Structure, 1999; 46: 257-266.
9. RB Nelson., "A refined theory for laminated orthotropic plates", J Applied Mechanics, 1974, 177-183.
10. Ambartsumian SA. On the theory of bending plates. Izv Otd Tech Nauk AN SSSR 1958; 5: 69–77.
11. Soldatos KP, Timarci T. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. Compos Struct 1993; 25: 165–71.

12. Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", ASME Journal of Applied Mechanics, (1984), 745–752.
13. Reddy, J.N. et Phan, N.D., "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory", International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1985), 2201–2219.
14. Reddy, J.N., "Theory and analysis of elastic plates", Philadelphia: Taylor & Francis, (1999).
15. Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", Int J Numer Method Eng, (2000), 47(41–43):663–684.
16. JN Reddy., "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", J Solid Structures, 1984; Vol 20 N°10, 881-896.
17. JN Reddy., "A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells", J Engineering sciences, 1985; Vol 23 N°3, 319-330.
18. Touratier M. An efficient standard plate theory. Int J Eng Sci 1991;29(8):901–16.
19. Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. Int J Solids Struct 2003;40:1525–46.
20. Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mech 1992;94:195–200.
21. Krishna Murty, A.V., "Higher-order theory for vibrations of thick plates", AIAA Journal, (1977), 1823–1824.
22. Krishna Murty, A.V., "Toward of consistent plate theory", AIAA Journal, (1986), 1047–1048.
23. Krishna Murty, A.V., "Flexural of composite plates", Composite Structures, (1987), 161–177.
24. Levinson, M., "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", Mechanics Research Communications, (1980), 343–350.

25. Metin Aydogdu. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures* 2009;88:94-101.
26. Hildebrand FB, Reissner E, Thomas GB. Notes of the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. KACA Technical Note no. 1833. 1949.
27. Whitney JM, Sun CT. A refined theory for laminated anisotropic, cylindrical shells. *ASME J Appl Mech* 1974;41:471-6.
28. Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A higher order theory of plate deformation: Part 1. Homogeneous plates; *ASME J Appl Mech* 1977;18:31-8.
29. K H Lo., "A high order theory of plate deformation", Part 2. Laminated plates *J Applied Mechanics*, 1977, 669-676.
30. T.Kant., "analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory ", *Composite Structure*, 2002;56: 329-344.
31. Carrera, E. et Petrolo, M., "Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates", (2010), 48(12).
32. Carrera, E ,D'Ottavio, M , "Variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells", *AIAA Journal*, (2010), 48(9).
33. Aydogdu, M., "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, (2009), 94–101.
34. El Meiche, N.Tounsi, A.Ziane, N.Mechab,EA. Adda Bedia, "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, (2011), 237–247.
35. RP.Shimpi, "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*,Vol 40-N°1 (2002), 137–146.
36. AJM.Ferreira., "Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics ", *Computers & Structures* 2005;83:2225–2237.
37. JL.Mantari., "Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using higher order shear deformation theory ", *Composite Structures* 2011;94:37–49.

38. B.Mechab., "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates on higher order shear deformation theory by the new function under thermo mechanical loading ", Composite Part B 2012;43:1453–1458.
39. S Ait Yahia., "cisaillement transversal des plaques epaisses en materiaux composites reposant sur une base elastique ", 1er seminaire national de genie civil sur materiaux et protection de l'environnement 2012.
40. H. Ait Attmane , "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", International Journal of Mechanics and Materials, 2010;6:113–121.
41. A.Mahi., "A new simple shear deformation theory for free vibration analysis of isotropic and FGM plates under different boundary conditions ", Multidiscipline modeling in materials & structures, 2015;33: 437-470.
42. Karama, M., Afaq, K. et Mistou, S., "Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", International Journal of Solids and Structures, 2003;40:1525-1546.
43. N S Putcha, "A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates ", Computers and Structures, 1986;Vol 22 N°4, 529-538.
44. Ngo Nhu Khoa., "Finite element analysis of laminated composite plates using high order shear deformation theory ", Vietnam Journal of Mechanics , 2007;Vol 29 N°1, 47-57.
45. Sang Jin Lee., " Finite element analysis of laminated composite plates using high order shear deformation theory with assumed strains " Latin American journal of solid and structures, 2013;Vol 10 N°3, 821-833.
46. Theofanis S., "higher order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates ", Composite Structure, 2009;87: 23-35.
47. wu.Zhen, "Refined laminated composite plate element based on global local hogher order shear deformation theory", Composite Structure, 2005;70: 135-152.
48. Wu Zhen., "A study of global local higher order theories for laminated composite plates ", Composite Structure, 2007;79: 44-54.
49. T.prevez., "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory ", Composite Structure, 2005;71: 414-422.

50. Guiping zou., "A semi analytical solution for the dynamic response of thick composite plates in Hamilton systems", Finite element in analysis and design, 1996;21: 201-212.
51. B N Singh., "Nonlinear bending response of laminated composite plates on nonlinear elastic foundation with uncertain system properties ", Engineering Structures, 2008;30: 1101-1112.
52. Ahmet sinan oktem., "Fourreir solution to a thick cross ply levy type clamped plate problem ", Composite Structure, 2007;79: 481-492.
53. PY.Tabakov., "A three dimensional analysis of laminated orthotropic plates ", Composite structures, 2005;71: 453-462.
54. WQ.Chen., "Three dimensional exact analysis of angle ply laminates in cylindrical bending with interfacial damage via state space method ", Composite structures, 2004;64: 275-283.
55. AK.Noor., "Three dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates ", ASME Journal , 1990;57: 182-188.
56. H.Matsunaga., "A comparison between 2D single layer and 3D layerwise theories for computing interlaminar stresses of laminated composite and sandwich plates subjected to thermal loading ", Composite structures, 2004;64: 161-177.
57. AE.Bogdanovitch., "Three dimensional analysis of thick composite plates with multiple layers", composite part B , 1997;35: 345-357.
58. P.Malekzadeh., "Three dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load", composite structure, 2009;90: 105-114.
59. AR.Mojdehi., "Three dimensional static & dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov galerkin method ", Engineering analysis with boundary elements , 2011;35: 1168-1180.
60. Le chung shiau., "Thermal buckling behavior of composite laminated plates", Composite Structure, 2010;92: 508-514
61. K.Swaminathan., "Thermal analysis of FGM plates a critical review of various modeling techniques and solution methods ", Composite Structure, 2017;160: 43-60.
62. M.Gigliotti., "On the maximum curvatures of 0/90 plates under thermal stress ", Composite Structure, 2005;68: 177-184.

63. BP.Patel, "Thermo flexural analysis of thick laminates of bimodulus composite materials ", Composite Structure, 2004;63: 11-20.
64. Zhen Wu, "Thermomechanical buckling of laminated composite and sandwich plates using global local higher order theory ", Mechanical sciences, 2007;49: 712-721.
65. A.Avci, "Thermal bickling of hybrid laminated composite plates with hole", Composite Structure, 2005;68: 247-254.
66. O.Sinan, "Thermal buckling of hybrid angle ply laminated composite plates with hole", Composite Structure, 2005;65: 1780-1790.
67. O.Sayman, "Elastic plastic stress analisys of symmetric aluminium metal matrix composite laminated plates under thermal loads varying linearly ", Composite part B, 2005;36: 61-72.
68. O.Sayman, "Elastic plastic and residual stress in symmetric thermoplastic laminated plates under a linear thermal loads ", Composite part B, 2005;36: 61-72.
69. O.Sayman, "Elastic plastic thermal stress analisys of aluminuim matrix composite beams under a parabolically temperature distribution ", Composite science & technology, 2001;61: 2129-2137.
70. JN.Reddy, "Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates ", J Thermal Stresses, 1980;4: 475-493.
71. O.Sayman, "An elastic plastic thermal stress analysis of aluminium metal matrix composite beams ", Composite structures, 2001;53: 419-425
72. O.Sayman, "Material nonlinear behaviour of laminated metal matrix composite plates supported at edges under uniform transverse loading ", Composite science & technology, 2002;62: 1913-1923.
73. N.Rastogi, "Thermal stresses in aluminium to composite double lap bonded joints ", J Engineering software, 1998;29: 273-281.
74. Wu.zhen, "A refined five unknown hogher order model including transverse normal hygrothermal deformation", Composite Structure, 2016;152: 546-557.
75. SH.Lo, "Hygrothermal effects of multilayered composite plates using a refined higher order theory ", Composite Structure, 2010;92: 633-646.

76. J.jedidi, "design of accelerated hygrothermal cycles on polymer matrix composites in the case of a supersonic aircraft ", Composite Structure, 2005;68: 429-437.
77. S.Youssef, "A multi scale analysis of composite structures , application to the design of accelerated hygrothermal cycles ", Composite structures, 2008;82: 302-309.
78. M.gigliotti, "Assessment of approximate models to evaluate transient and cyclical hygrothermoelastic stress in composite plates ", Journal of solid & structures, 2007;44: 733-759.
79. O.Sayman, "Analysis of multi layered composite cylinders under hygrothermal loading", Composite part A, 2005;36: 923-933.
80. F.Jacquemin, "Modeling of the moisture concentration field due to cyclical hygrothermal conditions in thick laminated pipes ", European Journal of mechanics, 2002;21: 845-855.
81. F.Jacquemin, "The effects of cyclic hygrothermal conditions on the stresses near the surface of a thick composite pipe ", Composite science & technology, 2002;62: 567-570.
82. F.Jacquemin, "A closed form solution for the internal stresses in thick composite cylinders induced by cyclical environmental conditions ", Composite Structure, 2002;58: &1-9.
83. VVS.Rao, "Dynamic response of multidirectional composites in hygrothermal environments ", Composite Structure, 2002;58: &1-9.
84. BP.Patel, "Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher order theory ", Composite Structure, 2002;56: 25-34.
85. AK.Upadhyay, "Nonlinear flexural response of laminated composite plates under hygro thermo mechanical loading ", Commun nonlinear sci number sumulat, 2010;15: 2634-2650.
86. NVS.Naidu, "Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells in hygrothermal environments ", Composite Structure, 2005;69: 387-395.
87. Lal.Achchhe, "stochastic post buckling analysis of laminated composite cylindrical shell panel subjected to hygrothermo mechanical loading ", composite structures, 2011;93: 1187-1200.
88. A.Megueni, "Evolution of the stress intensity factor for patched crack with bonded hygrothermal aged composite repair ", Materials & design, 2007;28: 287-293.



89. AM.Zenkour., "Hygrothermal analysis of antisymmetric cross-ply laminates using a refined plate theory ", *J of mechanical master design*, 2014;10: 213-226.
90. AM.Zenkour., "The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations ", *Mechanical sciences*, 2009;51: 869-880.
91. AM.Zenkour., "Hygro thermo mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations ", *Composite structures*, 2010;93: 234-238.
92. AM.Zenkour., "Analytical solution for bending of cross ply laminated plates under thermo meckanical loading ", *Composite Structure*, 2004;65: 367-379.
93. AM.Zenkour., "Buckling of fober reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories ", *J Engineering Mathematics*, 2004;50: 75-93.
94. AM.Zenkour., "Hygrothermal effects on the bending of angle ply composite plates using a sinusoidal theory ", *Composite Structure*, 2012;94: 3685-3696.
95. N.Boualem., "Accelerated aging of unidirectional hybrid composites under the long term elevated temperature and moisture concentration ", *Theorical & applied frature mechanics*, 2011;82: 302-309.
96. Z.Sereir., "The evolution of transverse stresses in hybrid composites under hygrithermal loading ", *Materials & design*, 2011;32: 3120-3126.
97. M.Mulheron,FR.Jones,JE.Baily"Moisture induced thermal strains in glass fibre reinforced plastic composites" *Fibre science and technology,Applied science publishers,Barking* 1986, Vol:25,n°02,119-131.
98. A. Tounsi , E. Adda Bedia. " Some observations on the evolution of transversal hygroscopic stresses in laminated composites plates: Effect of anisotropy". *International Journal of Composites Structures*;59:445–54,2003.
99. Z. Sereir, E.A. Adda-Bedia and A. Tounsi "Effect of temperature on the hygrothermal behaviour of unidirectional laminated plates with asymmetrical environmental conditions" *Composite Structures, Volume 72, Issue 3, Pages 383-392, March 2006.*
100. J. Crank *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, London, 1975.
101. M.R VanLandingham, RF .Eduljee, and J.W.Gillespie, " Moisture Diffusion in Epoxy Systems" , *Journal of Applied Polymer Science*, Vol 71, pp.387-798, 1999.

102. J. Mercier, « Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites », *thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Paris, 2006.
103. Sylvain Popineau, Thèse de Doctorat « Ecole des Mines de Paris » Spécialité "Sciences et Génie des Matériaux" Durabilité en milieu humide d'assemblages structuraux colles type aluminium/composite, novembre 2006.
104. H.S. Kim, X. M. Wang and N.A.H Nik Abdullah, "Effect of temperature on fatigue crack growth in the polymer ABS", *J fatigue & fracture of engineering materials & structures*, vol 17.n°3, pp361-367, 1994.
105. Walid trabelsi, These Docteur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Spécialité "Mécanique et Matériaux" Vieillissement de matériaux composites carbone/époxy pour applications aéronautiques, décembre 2006
106. G.S. Springer, "Moisture Content of Composites Under Transient Conditions", *Journal of Composite Materials*, vol 11,1977.
107. S. W. Tsai, "Composites Design" *Think Composites*, Dayton, Paris, Tokyo, 1987.
108. A.Benkhedda, Thèse de magister «étude hygrothermomecanique des matériaux composites a matrice polymere », université de Blida, institut d'aéronautique, 2001
109. N. Boualem, Z. Sereir, Accelerated aging of unidirectional hybrid composites under the long-term elevated temperature and moisture concentration, *Theor. Appl. Fract. Mech.* (2011), doi:[10.1016/j.tafmec.2011.01.007](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2011.01.007)
110. Z.Serir, E A Adda Bedia, Use of hybrid composites for the reduction of hygroscopic stresses at the edge of plates exposed to the symmetrical environmental conditions, *Materials and design*, vol 28, pp 448-458, 2007.
111. E. Adda Bedia, W.S. Han and G. Verchery, "An asymptotic characterisation of the moisture diffusion in polymer matrix composites with cyclic environmental conditions", *Journal of Composites structures* –Elsevier (UK), Vol 49 (3), pp 269-274, 2000.
112. A. Benkeddad, "Conception d'un Logiciel d'Analyse des Plaques stratifiées avec Prise en Compte des Contraintes Hygrothermiques transitoires", *Thèse de l'Université de Bourgogne*, 1994.
113. E. Adda Bedia « Méthodes de résolution pour la diffusion de l'humidité sous les conditions d'environnement cycliques », *thèse Ecole nationale Supérieure des Mines de Saint- Etienne*, 1994.

114. F. Jacquemin « Modélisation et simulation des contraintes internes dans les structures tubulaires composites épaisses » *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale des Mines, Saint Etienne, 2000.
115. A. Tounsi, E. Adda Bedia, " Simplified method for prediction on transient hygroscopic stresses in polymer matrix composites with symmetric environmental conditions" *Applied Composites Structures* Elsevier (UK), edited by PWR Beaumont, Kluwer Academic publishers, Vol (10) pp. 1-18, 2003.
116. A. Tounsi, E. Adda Bedia, A. Benachour, "New computational method for prediction of transient hygroscopic stresses during moisture desorption in laminated composite plate with different degree of anisotropy", *Journal of thermoplastic Composite Material*, Vol 18, January 2005
117. A.Tounsi, E. Adda Bedia and G. Verchery "Influence of anisotropy on the transient hygroscopic stresses in polymer matrix composites with cyclic environmental conditions" *Composite Structures, Volume 55, Issue 4, Pages 393-405, March 2002*
118. A.Tounsi, M.Bouazza, E. Adda Bedia, "Computation of transient hygroscopique stresses in unidirectional laminated composite plates with cyclic and asymmetrical environmental conditions", *Journal of Mechanics & Material in Design*, Springer Edited by Springer, Vol 1, pp 271-286, 2005.
119. A. Tounsi, M. Bouazza , SA Meftah, E. Adda Bedia, " On the transient hygroscopic stresses in polymer matrix laminated composites plates with cyclic and unsymmetric environmental conditions", *International Journal of polymers and polymers composites*, Rapra technology LTD (UK),Vol 13,issue n° 5, pp 489-504,2005.
120. A Tounsi, E. Adda Bedia, Z. Sereir, H. Benhassaini "Effect of fibre orientation and cyclic environmental conditions on the non-mechanical residual stresses in resin matrix composite panels" , *The Arabian Journal for science engineering*, Volume 28, Number 1A, pp 1-21, 2003.
121. A.Benkhedda, Thèse de doctorat «Etude hygrothermique des matériaux composites a matrice polymère avec la prise en compte de l'effet du vieillissement lors de la désorption en transitoire », université de Blida, département d'aéronautique , juillet 2008.
122. B.F. Boukhoulda, E. Adda-Bedia and K. Madani, "The effect of the fibre orientation angle in composite materials on moisture absorption and material degradation after hygrothermal ageing" *Journal of of Composites structures* Elsevier (UK), Vol 74, issue n°4, pp 406-418, 2006.

123. Z. Sereir, E. Adda Bedia , A. Tounsi, "Effect of the accelerated moisture diffusivity on the hygrothermal behavior laminated plate with symmetrical environmental conditions", *Journal of thermal stresses*, Taylor & Francis Edition, Vol 28, pp 889-908, 2005.
124. O.Ishai, "Environmental Effects on Deformation, Strength and degradation Unidirectional Glass Fiber Reinforced Plastics, Experimental Study", vol 15, n°7, p 491-499, 1976.
125. G.S. Springer, "Moisture Content of Composites Under Transient Conditions", *Journal of Composite Materials*, vol 11, 1977.
126. P. Peyser and W. D. Bascom, *Journal of Materials Science* 16, 75-83 , 1981.
127. R.J. Morgan, J.E. O'Neal, D.L. Fanter, "The Effect of Moisture on the Physical and Mechanical Integrity of Epoxies", *Journal of Material Science*, vol 15, p 751-764, 1980.
128. J.Verdu, "Traite des matières plastiques : vieillissement physique, Techniques de l'ingénieur, A3151, 1990.
129. M. E. R. Shanahan, *Journal of Applied Polymer Science* 69, 363-369 (1997).
130. A.C. Loos, G.S. Springer, "Moisture absorption of graphite-epoxy composites immersed in liquids and in humid air", *J. Composites Materials*, vol. 13, p 131, 1979.
131. Y.J.Weitsman, Ya-J.Guo, "A correlation between fluid-induced damage and anomalous fluid sorption in polymeric composites", *Composites Sc. & Technology* 62, pp.889- 908, 2002.
132. Y.J. Weitsman , Effects of fluids on polymeric composites. A review. In *Polymer Matrix Composites*, edited by R. Talreja, Pergamon, pages 369–401, 1998.
133. B.Dewimille, A.R. Bunsell The modelling of hygrothermal aging in glass fibre reinforced epoxy composites , *Journal of Physics D*, 15, p2079, 1982.
134. C.H.Shen et G.S.Springer "Moisture absorption and desorption of composite materials", C.H.Shen, G.S. Springer, *Environmental effects on composites materials*, ed. G.S. Springer, Technomic Publishing Co., Lancaster, PA, 1981.
135. B. Dewimille, A.R. Bunsell "The modelling of hygrothermal aging in glass fibre reinforced epoxy composites" , *Journal of Physics D*, 15, p2079, 1982.

136. N.Dubois, "Caractérisation et modélisation du vieillissement de matériaux composites", stage Mastère, Septembre 2003.
137. YJ.Weitsman, "Moisture in composites, sorption and damage", fatigue of composites materials, Elsevier Science Pub., 1991, pp385-429.
138. B.Dewimille, "Vieillissement hygrothermique d'un matériau composite fibres de verre-resine epoxyde", these ENSMP, Juillet 1981.
139. D.Leveque, A.Schieffer, "Analyse multi echelle des effets du vieillissement sur la tenue mécanique des composites a matrice organique", ONERA, Revue des composites et des matériaux avances, Vol. 12, , pp.139-162, 2002.
140. M.D Issac and O. Ishai, «*Engineering Mechanics of Composite Materials* », Oxford university press pp189-252 , 1994.
141. J.M Berthelot, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures", Masson, Paris ,1992.
142. G.Stab, "Laminar composite". London: Butterworth-Heinemann; 1999.
143. R.M Jones, "Mechanics of Composite Material", *Hemisphere Publishing Corporation*, New York ,1975.
144. C.Chamis, "Simplified composite micromechanical equations for hygrothermal, and mechanical properties". *SAMPE 14-23*, Quart 1984;15.
145. RF.Gibson , " Principles of Composite Materials, Mechanics" , *McGraw Hill*, New York ,1994.
146. RM .Christinsen, "Mechanics of composite Materials", *John Wiley*, New York 1979.
147. I.Ghorbel, " Mecanismes d'endommagement des tubes verre-resine pour le transport d'eau chaude" influence de la ductilité de la matrice, *thèse de doctorat* Ecole des Mines de Paris, Juillet 1990.
148. C.H. Shen and G. Springer, "Moisture absorption and desorption of composite materials", *J. of composite materials*, Vol.10, pp.2-20, January 1976.
149. JN.Reddy, "Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis", *CRC Press*, second edition 2004.

150. JN Reddy, DH Robbins JR, "Theories and computational models for composite laminates", *American society of mechanical engineering* pp.147-169, June 1994.

151. F. R. Jones, M. A. Shah, M. G. Bader, and L. Boniface, in "The Analysis of Residual Dicyandiamide (DICY) and Its Effects on the Performance of GRP in Water and Humid Environments", London, 4.443-4.456 (1987).

152. AM.Zenkour., "Thermal effects on the bending response of fiber reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory ", *J Acta Mechanica*, 2004;171: 171-187.