

UNIVERSITÉ DE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Recherche Opérationnelle

**ETUDE DES ENSEMBLES SOMMETS-ARÊTES ET ARÊTES-
SOMMETS DOMINANTS DANS LES GRAPHS**

Par

Razika BOUTRIG

devant le jury composé de :

A. DERBALA	Maître de conférences, U. de Blida 1	Président
M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida 1	Directeur de thèse
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida 1	Examineur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinatrice
S. BOUROUBI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur

RESUME

L'objet principal de cette thèse est l'étude de la domination sommet-arête dans les graphes.

Etant donné un graphe connexe non trivial $G = (V, E)$, un sous ensemble $D \subseteq V$ est un dominant sommet-arête, abrégé *ve*-dominant, de G si chaque arête $e \in E$ est ou bien incidente à un sommet de D ou adjacente à une arête incidente à un sommet de D . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve*-dominant de G est appelé le nombre de *ve*-domination, noté par $\gamma_{ve}(G)$.

Dans cette thèse, nous présentons en premier lieu des relations liant la *ve*-domination avec quelques paramètres de domination, répondant ainsi à quatre questions posées dans la thèse de PhD de Lewis. On établit par la suite des bornes supérieures sur $\gamma_{ve}(G)$ et $i_{ve}(G)$, où on donne une borne supérieure sur $i_{ve}(G)$ en fonction de $\gamma_{ve}(G)$ pour tout graphe connexe non trivial et sans $K_{1,k}$, avec $k \geq 3$. Par ailleurs, on montre que le nombre de *ve*-domination indépendante est au plus égal à la moitié du nombre de domination totale pour tout graphe biparti, et on montre que $n/3$ est aussi une borne supérieure sur le nombre de *ve*-domination des graphes connexes d'ordre $n \geq 3$ et sans C_5 , améliorant une récente borne donnée pour les arbres. D'autre part, on caractérise les graphes G tels que $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$.

En second lieu, on introduit et on initie l'étude de la *ve*-domination totale dans les graphes dont le paramètre associé est noté $\gamma_{ve}^t(G)$. On montre que le problème de décision associé à la *ve*-domination totale est NP-complet pour les graphes bipartis. On montre par la suite que si T est un arbre d'ordre n différent d'une étoile avec ℓ feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{ve}^t(T) \leq (n - \ell + s)/2$. Par ailleurs, on caractérise les arbres atteignant cette borne supérieure. D'autre part, on établit une condition nécessaire pour les graphes connexes non triviaux G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ et on donne une caractérisation constructive des arbres T satisfaisant $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.

En dernier lieu, nous étudions d'une façon brève la domination arête-sommet. Un sous ensemble $F \subseteq E$ est un dominant arête-sommet, (abrégé *ev*-dominant) de G si tout sommet $v \in V$, est *ev*-dominé par au moins une arête de F . Le cardinal minimum d'un ensemble *ev*-dominant de G est appelé le nombre de *ev*-domination de G , noté $\gamma_{ev}(G)$.

ABSTRACT

The main object of this thesis is the study of the vertex-edge domination in graphs.

Given a nontrivial connected graph $G = (V, E)$, a subset $D \subseteq V$ is a vertex-edge dominating set (or simply a ve -dominating set), of G if for all edges $e \in E$, there exists a vertex in D that is either incident to e or incident to an edge that is adjacent to e . The minimum cardinality of a ve -dominating set of G is called the vertex-edge domination number, is denoted by $\gamma_{ve}(G)$.

Firstly, we present new relationships relating the ve -domination to some other domination parameters, answering in the affirmative four open questions posed in the 2007 PhD thesis by Lewis. We provide an upper bound for the independent ve -domination number in terms of the ve -domination number for every nontrivial connected $K_{1,k}$ -free graph, with $k \geq 3$, and we show that the independent ve -domination number is bounded above by the domination number for every nontrivial tree. Also, we establish an upper bound on the ve -domination number for connected C_5 -free graphs, improving a recent bound given for trees by Krishnakumari, Venkatakrishnan et Krzywkowski. Moreover, we give a characterization of graphs G such that $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$.

Secondly, we initiate the study of total vertex-edge domination whose corresponding parameter is denoted by $\gamma_{ve}^t(G)$. We show that determining the number $\gamma_{ve}^t(G)$ for bipartite graphs is NP-complete. Then we show that if T is a tree different from a star with order n , ℓ leaves and s support vertices, then $\gamma_{ve}^t(T) \leq (n - \ell + s)/2$. Moreover, we characterize the trees attaining this upper bound. Also we establish a necessary condition for graphs G such that $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ and we provide a characterization of all trees T with $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.

Finally, we study the edge-vertex domination. A subset $F \subseteq E$ is a edge-vertex dominating set (or simply a ev -dominating set), of G if for all vertices $x \in V$, there exists an edge in F that is either incident to x or adjacent to an edge that is incident to x . The minimum cardinality of a ev -dominating set of G is called the edge-vertex domination number, is denoted by $\gamma_{ev}(G)$.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes gratitudes, mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur en Mathématiques à l'université de Blida 1, qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, pour l'aide qu'il m'a apporté. Je le remercie également pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur **Ali Derbala**, Maître de conférences "classe A" à l'Université de Blida 1, qui me fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs **Abdelhafid Berrachedi**, **Mostafa Blidia**, **Isma Bouchema** et **ada Bouroubi** qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis sans doute de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je voudrais à la fin remercier profondément ma mère, mon père et ma famille, qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION..... 8

CHAPITRE 1. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHS..... 11

1.1 Définitions préliminaires..... 11

1.2 Quelques graphes particuliers..... 12

1.3 Invariants de graphes..... 14

1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes..... 15

1.4.1 Quelques types de domination..... 17

1.5 Complexité algorithmique..... 19

1.5.1 Problème et algorithme..... 19

1.5.2 Mesure de complexité..... 20

1.5.3 Classes de complexité..... 20

1.5.4 Problème de décision..... 21

1.5.5 Réduction polynômiale et problème NP-complet..... 21

CHAPITRE 2. ETAT DE L'ART SUR LA DOMINATION SOMMET-ARÊTE DANS
LES GRAPHS..... 23

2.1 Quelques résultats sur les paramètres de ve -domination..... 25

2.2 Domination sommet-arête double..... 29

2.2.1 Bornes supérieures..... 30

2.2.2 Bornes inférieures..... 30

2.3 Degré sommet-arête et arête-sommet..... 31

2.3.1 Propriétés des ve -degrés..... 31

2.3.2 Graphes ve -réguliers et Graphes ev -réguliers.....	32
2.3.3 Graphes ve -irréguliers et graphes ev -irréguliers.....	34
CHAPITRE 3. CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA VE-DOMINATION DANS LES GRAPHERS.....	35
3.1 Minimalité d'un ensemble ve -dominant.....	35
3.2 Relations entre des paramètres de la ve -domination et ceux de la domination.....	36
3.3 Bornes supérieures sur $\gamma_{ve}(G)$ et $i_{ve}(G)$	39
3.4 Bornes sur $\beta_{ve}(G)$ et $\Gamma_{ve}(G)$	48
3.5 Graphes G tels que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$	50
3.6 Caractérisation des arbres admettant un ve -dominant minimum unique.....	53
CHAPITRE 4. DOMINATION SOMMET- ARÊTE TOTALE.....	59
4.1 La NP-complétude.....	59
4.2 Bornes sur $\gamma_{ve}^t(G)$	62
4.3 Graphes G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$	68
4.4 Graphes G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = \gamma_t(G)$	74
CHAPITRE 5. LA DOMINATION ARÊTE-SOMMET DANS LES GRAPHERS.....	79
5.1 Bornes sur les paramètres de la ev -domination.....	80
5.2 Caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \gamma_{ev}(G)$	82
CONCLUSUON.....	88
RÉFÉRENCES.....	89

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Une étoile..... Une étoile double Une étoile subdivisée Une chenille	14
Figure 1.2	Un graphe couronne.....	14
Figure 1.3	Un graphe G , où $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$	16
Figure 3.1	Un graphe G , où $IR_{ve}(G) = 2k$ et $i(G) = 2k$	38
Figure 3.2	Un graphe G_3	41
Figure 3.3	Un graphe G , où $i_{ve}(G) = k + 1 \geq 3$ et $\gamma_t(G) = 2$	41
Figure 3.4	Un graphe H_k	42
Figure 4.1	Un graphe G , où $\gamma_{ve}^t(G) = 5$	59
Figure 4.2	NP-complétude pour graphe biparti.....	61
Figure 4.3	Un graphe H_4	63
Figure 5.1	Un cycle C_5 , où $\gamma_{ev}(C_5) = 2$ et $\gamma_i(C_5) = 3$	80

INTRODUCTION

La théorie des graphes étudie des structures mathématiques appelées graphes, utilisés pour modéliser les relations liant les objets d'une collection. Dans ce contexte, un graphe est un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes liant ces sommets. Plusieurs structures et relations naturelles, mais également artificielles, trouvent dans les graphes leur présentation adéquate. Citons, les réseaux de communications en informatique, les structures atomiques en chimie, les réseaux sociaux en sociologie, etc.. Les graphes apparaissent aussi comme un outil efficace dans d'autres domaines théoriques, par exemple la théorie des graphes algébrique s'intéresse à la théorie des groupes en mathématiques.

Historiquement, l'article de Leonhard Euler en 1736 est considéré comme le premier papier scientifique dans le domaine [1]. En 1813 et 1861, Cauchy et L'Huilier, respectivement, généralisent une formule découverte par Euler [2] (équation liant le nombre d'arêtes d'un graphe à son nombre de sommets et de facettes), ce qui a donné naissance à la topologie [3] [4]. Environ un siècle plus tard, Cayley fusionne des idées mathématiques et des résultats en chimie théorique obtenus par Pólya entre 1935 et 1937 et généralisés par De Bruijn en 1959, pour donner naissance à une bonne partie de la terminologie utilisée actuellement en théorie des graphes. En particulier, le mot "graphe" est introduit par Sylvester en 1878 pour mettre en évidence une analogie entre des structures algébriques et chimiques. Parmi les plus anciens problèmes étudiés en théorie des graphes, celui des sept ponts de Königsberg, étudié et résolu par Euler [5]. Ainsi que le problème du cavalier (un cavalier posé sur une case quelconque d'un échiquier doit visiter toutes les cases sans passer deux fois par la même case), posé par le poète indien Rudrata [6], étudié et résolu par le joueur et théoricien d'échecs arabe al-Adli ar-Rumi en 840 [7].

L'un des concepts intéressants de la théorie des graphes est celui de la domination. Les premiers problèmes qui marquent le début de la théorie de la domination sont les problèmes des jeux des échecs. Grâce à Claude Berge elle est devenue un domaine théorique en 1958, et ce n'est qu'à partir de 1977 qu'elle connaîtra son expansion grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi. Ses applications sont nombreuses et variées (réseaux de communications, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc..).

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires.

La majorité des recherches sur les paramètres associés à la domination, l'indépendance et l'irrédondance est concentrée soit sur les ensembles de sommets dominants les sommets du graphe ou les ensembles d'arêtes dominants les arêtes du graphe. En 1977 Alavi et al. [8] ont introduit des nouveaux invariants pour le recouvrement et le couplage, qu'ils ont appelé recouvrement total et couplage total, basés sur le mélange de sommets et d'arêtes. D'où, Peters a introduit les concepts de la domination sommet-arête et la domination arête-sommet, dans le chapitre 4 de sa thèse de PhD [9] en 1986. Il est à noter que peu de travaux ont été réalisés sur ces deux concepts qui font l'objet de notre étude dans cette thèse.

Dans la suite, nous donnons une brève présentation du contenu des différents chapitres de cette thèse.

Dans le premier chapitre, nous rappelons en premier les définitions de la théorie des graphes nécessaire à la compréhension de ce manuscrit. Nous donnons par la suite un aperçu sur la domination dans les graphes ainsi que les éléments essentiels de la théorie de complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons un état de l'art sur la domination sommet-arête dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants.

Notre contribution est répartie sur les trois derniers chapitres. Le troisième chapitre est consacré à la domination sommet-arête, où nous commençons par donner des relations liant la domination sommet-arête avec quelques paramètres de domination. Nous donnons une borne supérieure sur $i_{ve}(G)$ en fonction de $\gamma_{ve}(G)$ pour tout graphe connexe non trivial et sans $K_{1,k}$, avec $k \geq 3$. On montre que le nombre de ve -domination indépendante est borné par la moitié du nombre de domination totale pour tout graphe biparti. On montre que

$n/3$ est aussi une borne supérieure sur le nombre de ve -domination des graphes connexes d'ordre $n \geq 3$ et sans C_5 , améliorant une récente borne donnée pour les arbres. D'autre part, nous donnons une caractérisation des graphes connexes non triviaux pour lesquels $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$. Nous nous intéresserons par la suite à étudier l'unicité des ensembles ve -dominants dans les arbres où une caractérisation par construction des arbres possédant un unique ve -dominant minimum est donnée. Certains résultats de ce chapitre paraîtront dans un article accepté [10] dans la revue *Aequationes Mathematicae*.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons et étudions la ve -domination totale dans les graphes. On montre que le problème de décision associé à la ve -domination totale est NP-complet pour les graphes bipartis. On établit une condition nécessaire pour les graphes connexes non triviaux G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ et nous fournissons deux caractérisations des arbres T satisfaisant $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$ ou $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$.

Dans le chapitre cinq, on s'intéresse à la domination arête-sommet. Nous donnons des bornes sur les paramètres de la domination arête-sommet.

Enfin, on termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futures.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHERS

Nous rappelons dans ce chapitre les notions et terminologies utilisées le long de ce document. Dans la première partie, nous donnons quelques définitions de base de la théorie des graphes. Cependant, d'autres notions seront introduites au fur et à mesure selon leurs utilités dans les prochains chapitres. Dans la seconde partie, une brève présentation sur la domination dans les graphes sera donnée, où on présentera quelques paramètres de domination. Nous reprenons dans la troisième partie, les éléments essentiels de la théorie de la complexité algorithmique, en particulier les notions de la réduction polynômiale et de classes de complexité.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Chartrand et Zhang [11] et Haynes, Hedetniemi et Slater [12].

1.1 Définitions préliminaires

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E . Le cardinal de V est appelé ordre de G , noté souvent par n et le cardinal de E est appelé la taille de G , noté par m . Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de e . On dira dans ce cas que u est adjacent à v et que l'arête uv est incidente à ces deux sommets. Si l'arête $e = uu \in E$, alors e est dite une boucle. Un graphe G est simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

On définit le voisinage ouvert d'un sommet $v \in V$ par $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et son voisinage fermé par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé de S est $N_G[S] = N_G(S) \cup S$.

Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à S , noté $pn[v, S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont aucun autre voisin dans S autre que v , i-e: $pn[v, S] = \{u : N_G[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le degré d'un sommet $v \in V$ est $\deg_G(v) = \deg(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré nul est dit isolé et un sommet de degré un est dit pendant ou bien feuille, tandis que son voisin est dit sommet support. On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G , avec $|L(G)| = \ell(G)$ et par $S(G)$ l'ensemble des sommets supports de G , avec $|S(G)| = s(G)$. Pour un sommet support v , L_v est l'ensemble des sommets pendants voisins à v . Si $|L_v| = 1$, alors v est un sommet support faible, sinon ($|L_v| > 1$), v est un sommet support fort. Le degré minimum et maximum dans G , sont notés par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$, respectivement.

Une chaîne C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de C et les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de la chaîne C . Une chaîne est dite élémentaire (resp, simple) si tous ses sommets sont distincts (resp, les arêtes sont distinctes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n , est une chaîne élémentaire sans corde. Un cycle C_n est une chaîne élémentaire dont les extrémités sont confondues.

La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v) = d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v . L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$ et le diamètre de G est $Diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé centre.

1.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le sous-graphe induit par S noté $G[S]$ ou $\langle S \rangle$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S .

Pour un sous-ensemble $F \subseteq E$, le graphe partiel de G engendré par F noté G_F est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et F .

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

Un graphe complet d'ordre n , noté K_n , est un graphe dont tous les sommets sont adjacents deux à deux. Une clique est un sous-graphe complet d'un graphe G .

Un graphe complémentaire, noté \overline{G} , d'un autre graphe G , a le même ensemble de sommets que G et deux sommets sont voisins dans \overline{G} si et seulement si ils ne le sont pas dans G .

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si l'on peut partitionner V en V_1 et V_2 tels que $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent pas d'arêtes. Il est bien connu qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs C_{2k+1} . Si de plus tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2 , alors G sera dit un graphe biparti complet. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

Un arbre est un graphe connexe et sans cycles, souvent noté par T . Une étoile, noté par $K_{1,p}$ ($p \geq 1$), est un arbre à $p + 1$ sommets ayant au moins p sommets pendants. Une étoile double $S_{p,q}$ est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Une étoile subdivisée SS_q est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,q}$ par la subdivision de chaque arête une seule fois.

Une chenille $C(t_1, t_2, \dots, t_s)$ est un arbre dont la suppression de ses feuilles donne une chaîne u_1, u_2, \dots, u_s , où t_i est le nombre des feuilles adjacentes à u_i .

Un exemple des graphes sur les définitions précédentes est représenté dans la Figure 1.1.

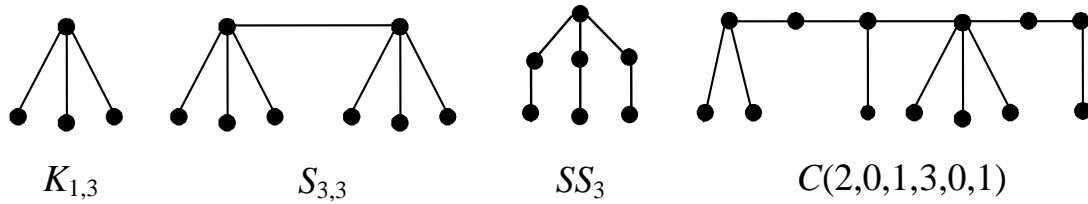


Figure 1.1.

Un graphe est sans griffes s'il ne contient pas de sous graphe $K_{1,3}$. Un graphe est triangulé si tout cycle de longueur au moins quatre contient une corde.

Un cactus est un graphe où toute arête appartient à au plus un cycle. Un cactus ayant un seul cycle est dit unicycle.

Un graphe est k -régulier si tous les sommets sont de même degré k .

La P_n -couronne d'un graphe G , noté par $G \circ P_n$, est un graphe d'ordre $n|V(G)|$ obtenu à partir de G en attachant une chaîne distincte P_n à chaque sommet $v \in V$ en ajoutant une arête entre v et une feuille de sa chaîne correspondante P_n . La couronne d'un graphe G , noté par $G \circ P_1$, est obtenue à partir de G , où chaque sommet de G est adjacent à un sommet pendent.

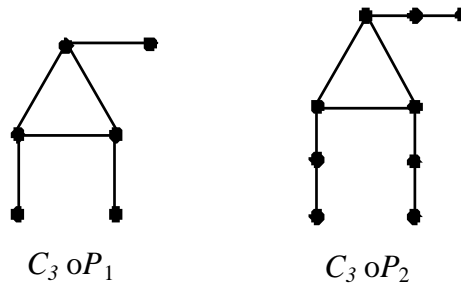


Figure 1.2.

1.3 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits isomorphes s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes

si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriété stable par isomorphisme. Les nombres de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Voici les définitions de quelques invariants de graphes utilisés dans cette thèse. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n .

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit stable (ou indépendant) de G si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal de G noté $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité) de G .

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit 2-stable (ou packing) dans G si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble de 2-stable de G noté $\rho(G)$ est appelé le nombre de 2-stabilité.

Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. On notera par $\beta_1(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G . Le couplage est dit parfait dans G si $\beta_1(G) = n/2$. Il est à noter que $\beta_1(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G (voir [13]).

Un recouvrement dans un graphe G sans sommets isolés est un sous-ensemble d'arêtes incidentes à tous les sommets de G .

1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit qu'un sous-ensemble A de V vérifiant une propriété P est minimal (resp. maximal) par rapport à P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie P .

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V vérifiant une propriété P est minimum ou de taille minimale (resp. maximum ou de taille maximale) par rapport à P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$).

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes. Un sous ensemble S de V est un dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé le nombre de domination et il est noté par $\gamma(G)$. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G est appelé le nombre de domination supérieur et il est noté par $\Gamma(G)$.

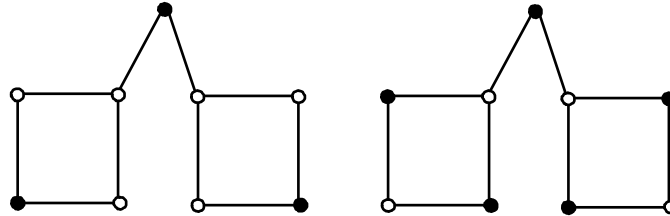


Figure 1.3 : Un graphe G , où $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \geq 1$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap S \neq \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{eme} siècle en Inde voir [14]. En 1862 De Jaenish [15] posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [16].

En 1958, Claude Berge [17] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [18] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'après

la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [19] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [20], [21], [22]). Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple: la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

En 1990, un numéro spécial de la revue *Discrete Mathematics* édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar (Voir [23]) ont inclus une liste de quelques 400 références. On dénombre actuellement plus d'une centaine types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 3000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater ([12], [24]).

1.4.1 Quelques types de domination

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement aux types de domination ayant un lien avec les types étudiés. Pour en savoir plus sur les types de domination, voir [12].

La notion de stabilité dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable S est maximal si et seulement si S est un stable et un dominant, et tout stable maximal est un ensemble dominant minimal. Par conséquent, on a pour tout graphe G ,

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller [26] ont donné une extension à cette chaîne d'inégalités en introduisant une nouvelle notion liée à la domination à savoir l'irrédondance définie comme suit:

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit irrédondant si pour tout sommet $x \in S$ on a, $N[x] - N[S - \{x\}] \neq \emptyset$. Dans ce cas, l'ensemble $N[x] - N[S - \{x\}]$ est appelé le voisinage privé de x relatif à S . Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant

maximal noté $ir(G)$ (resp. $IR(G)$) est appelé le nombre d'irrédondance (resp. le nombre d'irrédondance supérieur). Aussi, il est facile de voir ici que tout ensemble dominant minimal est un ensemble irrédondant. En conséquence, on a la célèbre chaîne d'inégalités de Cockayne, Hedetniemi et Miller [26] qui relie les six paramètres de domination pour tout graphe G :

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G) \quad (1.1)$$

Les paramètres $ir(G)$, $\gamma(G)$ et $i(G)$ (resp. $\beta_0(G)$, $\Gamma(G)$ et $IR(G)$) sont appelés les paramètres de domination inférieurs (resp. supérieurs).

Pour un graphe G , un ensemble S est dit $\gamma(G)$ -ensemble si S est un dominant et $|S| = \gamma(G)$. Il en sera similairement pour les autres paramètres.

La domination totale a été introduite par Cockayne, Dawes, et Hedetniemi dans [27]. Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans S , en d'autres termes $N(v) \cap S \neq \emptyset$ pour tous $v \in V$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G noté $\gamma_t(G)$ est appelé le nombre de domination totale de G . Pour plus de détails sur la domination totale, nous invitons le lecteur à consulter le récent ouvrage de Henning et Yeo [28] et le survey de Henning sur la domination totale [29].

La k -domination a été introduite par Fink et Jacobson en 1985 (pour plus de détails voir [30], [31]). Un sous ensemble S de V est dit k -dominant de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans S . Le nombre de k -domination noté par $\gamma_k(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble k -dominant de G .

Un autre type de domination est la domination Romaine dans les graphes, introduite par Cockayne et al. [32] en 2004, et motivée par un article de Steward dans Scientific American, intitulé "Defend the Roman Empire"[33]. Une fonction de domination Romaine (RDF) sur G est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$

est adjacent à au moins un sommet v avec $f(v) = 2$. Le poids de f est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ et le poids minimum de f est appelé le nombre de domination Romaine de G , noté $\gamma_R(G)$.

Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonnée de V induite par f . Alors on écrira $f = (V_0, V_1, V_2)$, où $\{V_i = v \in V : f(v) = i\}$ pour $i = 0, 1, 2$. Cockayne et al. [32] en 2004 ont introduit aussi le concept de la domination Romaine indépendante. Une fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ de domination Romaine sur G est dite une fonction de domination Romaine indépendante (IRDF) si l'ensemble $V_1 \cup V_2$ est indépendant. Le nombre de domination Romaine indépendante de G , noté par $i_R(G)$ est le poids minimum d'une fonction de domination Romaine indépendante f .

1.5 Complexité algorithmique

La complexité algorithmique est une théorie des mathématiques et de l'informatique. Elle classe les problèmes de calcul selon leur difficulté intrinsèque et étudie les relations entre les différentes classes. Un problème est considéré comme intrinsèquement difficile si sa résolution nécessite une importante mobilisation des ressources quel que soit l'algorithme utilisé. Plusieurs ressources peuvent être considérées, en particulier le temps de calcul. Nous rappelons les concepts fondamentaux en théorie de complexité.

1.5.1 Problème et algorithme

Les notions de problème et algorithme sont liées. Elles correspondent plus généralement aux notions philosophiques de question et réponse [34]. Un problème est une question abstraite à résoudre, et un problème algorithmique est un problème posé de façon mathématique, c'est à dire énoncé rigoureusement dans un langage des mathématiques. Par exemple, parmi les problèmes de graphe, citons : le couplage parfait, le plus court chemin entre deux sommets, la connexité, l'ensemble dominant minimum, etc..

Une instance du problème est obtenue en fixant l'entrée du problème. Un problème peut être considéré comme un ensemble, généralement infini, d'instances. Un algorithme est un ensemble de règles et techniques organisées, à exécuter pour résoudre un problème

donné. En démarrant d'un état initial (entrée), l'exécution des instructions de l'algorithme permet de passer par des états intermédiaires, et finir dans un état final. Le passage entre les états peut être déterministe (algorithme déterministe) ou non (algorithme stochastique). Le mot "algorithme" vient du nom du mathématicien Al Khawarizmi qui a écrit en 850, le premier traité algorithmique pour résoudre les équations linéaires et quadratiques.

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer un meilleur élément parmi un nombre fini d'éléments mais souvent très élevé. Pour ce type de problèmes, il est nécessaire de mesurer l'efficacité de tout algorithme mis en oeuvre.

1.5.2 Mesure de complexité

Le plus souvent, pour mesurer la difficulté d'un problème, on utilise le temps de calcul du meilleur algorithme. Évidemment, ce temps dépend de l'instance du problème et en particulier de la taille des données. La théorie de complexité mesure l'augmentation du temps de calcul en fonction de la taille de l'instance. L'efficacité de l'algorithme est mesurée pour le plus mauvais cas (la plus mauvaise instance), mais d'autres approches existent, par exemple l'efficacité en moyenne (mesure sur l'ensemble des instances).

1.5.3 Classes de complexité

Les classes de complexité sont des ensembles de problèmes ayant la même complexité selon un certain critère. La classe des problèmes les plus faciles est celle contenant ceux qu'on peut résoudre en temps constant, ce temps est noté $O(1)$. Par exemple le problème de "dire oui ou non un nombre est positif?". Il y a aussi la classe de ceux qu'on peut résoudre en temps linéaire en fonction de la taille de l'entrée, noté $O(n)$, ou en temps quadratique $O(n^2)$, etc..

Un problème est dit polynômial s'il peut être résolu en temps polynômial en fonction de la taille des données, i.e en $O(n^k)$, avec k un entier positif. La classe des problèmes polynômiaux est notée par P. Elle est considérée comme la modélisation mathématique de l'ensemble des problèmes faciles.

Une deuxième classe, notée NP, est l'ensemble des problèmes qu'il est possible de résoudre en temps polynômial, sauf que l'algorithme pour le faire, n'est pas nécessairement déjà conçu. De façon équivalente, un problème est dans la classe NP si on peut vérifier en temps polynômial, qu'une solution donnée est réalisable. Nous retrouvons dans cette classe, tous les problèmes classiques en théorie des graphes. Évidemment, $P \subseteq NP$.

1.5.4 Problème de décision

Les problèmes décisionnels sont très utilisés en théorie de complexité. Un problème de décision est un problème posé sous forme d'une question et ayant deux réponses possibles, "oui" ou "non". Par exemple, "est ce que un graphe donné est connexe ?". Il faut noter qu'un problème algorithmique non décisionnel, peut être transformé en un problème de décision.

Un problème de décision est dit appartenir à la classe P (classe facile), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Plusieurs problèmes de graphes appartiennent à P, citons : la connexité d'un graphe, le couplage parfait, le plus court chemin, le flot maximum, arbre de poids minimum, etc...

Un problème de décision est dit appartenir à la classe NP s'il existe, pour toute instance dont la réponse est "oui", un certificat vérifiable en temps polynomial en la taille des données. La classe NP (Non déterministe Polynomial) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe. Nous retrouvons dans cette classe, tous les problèmes classiques en théorie des graphes, citons : l'indépendance, la coloration et la domination, etc...

1.5.5 Réduction polynômiale et problème NP-complet

Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Il existe plusieurs réductions, la plus utilisée est la réduction polynômiale. Une réduction polynômiale d'un problème P_1 à un autre problème P_2 est une paire d'algorithmes polynomiaux dont l'un transforme chaque instance I_1 de P_1 en une instance I_2 de P_2 , et l'autre transforme une solution pour l'instance I_2 en une solution pour l'instance I_1 . l'intérêt de la réduction

polynômiale est que s'il existe un algorithme polynomial pour la résolution de P_2 , alors cet algorithme peut être converti en un algorithme polynomial pour résoudre P_1 .

Un problème de la classe NP est dit complet, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autres termes, s'il existait un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP, et on aurait l'égalité $P = NP$. Les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

Il est montré par Ladner [35] que si $P \neq NP$ alors ils existent des problèmes qui ne sont ni dans P, ni NP-complet, ils sont dits NP-intermédiaire.

Il existe un lien fort entre un problème de décision et un problème d'optimisation. En fait, la plupart des problèmes de décision ont une version d'optimisation et vice versa. Les problèmes d'optimisation associés aux problèmes de décision NP-complets sont qualifiés de NP-difficiles. Un problème NP-difficile (ou NP-dur) est un problème au moins aussi difficile qu'un problème NP-complet.

Pour une présentation plus complète, le lecteur peut consulter l'article de Cook [36], ou l'ouvrage de Garey et Johnson [37].

A noter que pour une sous classe de graphes \mathcal{H} d'une classe \mathcal{G} , si un problème \mathcal{Q} est NP-complet pour \mathcal{H} alors il l'est pour \mathcal{G} . Et, un algorithme qui résout \mathcal{Q} pour \mathcal{G} , le résout aussi pour \mathcal{H} . Notons que, dans les graphes, la taille d'une instance est $|V| + |E|$.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LA DOMINATION SOMMET-ARÊTE DANS LES GRAPHEs

Les concepts de la domination sommet-arête et domination arête-sommet ont été introduits en 1986 par Kenneth Peters [9] dans sa thèse de PhD, dirigée par Renu Laskar à l'université de Clemson, intitulée "*Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity*". Une vingtaine d'années après, ces deux concepts ont été étudiés dans une autre thèse de PhD "*Vertex-edge and Edge-vertex parameters in Graphs*" de Jason Lewis [38] et dirigée par Stephen T. Hedetniemi à la même université de Clemson. La recherche présentée dans la thèse de Lewis avait pour objectif l'extension de la définition de la domination, ainsi que l'extension des définitions de l'irrédondance et l'indépendance à des invariants sommet-arête et arête-sommet. Ainsi certains résultats obtenus et les réponses aux deux questions posées dans [38] ont été publiés en 2010 dans un seul article cosigné avec d'autres auteurs [39].

Dans ce chapitre, on donnera quelques résultats connus sur la *ve*-domination. Par ailleurs, nous présenterons deux travaux très récents, à savoir le travail de Chellali, Krishnakumari et Venkatakrisnan [40] concernant la domination sommet-arête double, et le travail de Chellali, Haynes, Hedetniemi et Lewis [41], sur le degré sommet-arête et le degré arête-sommet. A noter que les graphes considérés sont connexes non triviaux que l'on appellera graphes cnt.

Commençons par donner quelques définitions nécessaires sur la *ve*-domination dans les graphes.

Définition 2.1 ([38]). *On dit qu'un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ *ve*-domine l'arête $vw \in E$ si :*

1. vw est incidente à u , ou
2. vw est adjacente à une arête incidente à u .

En d'autres termes, un sommet u *ve-domine* toutes les arêtes incidentes à tout sommet dans $N_G[u]$.

Définition 2.2 ([38]). Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un *dominant sommet-arête*, abrégé *ve-dominant*, de G si pour toute arête $e \in E$, il existe un sommet $v \in S$ tel que v *ve-domine* e . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve-dominant* de G est appelé le nombre de *ve-domination* de G , noté $\gamma_{ve}(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble *ve-dominant minimal* de G , appelé le nombre de *ve-domination supérieur* de G , est noté par $\Gamma_{ve}(G)$.

Définition 2.3 ([38]). Un sous ensemble S de V est dit *dominant sommet-arête indépendant* (abrégé, *ve-dominant indépendant*) de G , si S est un *ve-dominant* et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arêtes. Le nombre de *ve-domination indépendante* de G , $i_{ve}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble *ve-dominant indépendant* de G et le nombre de *ve-domination indépendante supérieur* $\beta_{ve}(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble *ve-dominant indépendant minimal* de G .

Définition 2.4 ([38]). Un sommet $v \in S \subseteq V$ a une arête privée $e = uv \in E$ (relatif à l'ensemble S) si :

1. e est incidente à v , et
2. pour tout sommet $x \in S - \{v\}$, e n'est pas incidente à x et x n'est pas adjacent ni à u ou w ,

En d'autres termes, v *ve-domine* l'arête e et aucun autre sommet de S ne *ve-domine* e .

Définition 2.5 ([38]). Un sous ensemble S de V est dit *irrédondant sommet-arête* (ou tout simplement, *ve-irrédondant*) de G , si chaque sommet de S possède une arête privée. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un *ve-irrédondant maximal* de G noté $ir_{ve}(G)$ (resp. $IR_{ve}(G)$) est appelé le nombre de *ve-irrédondance* (resp. le nombre de *ve-irrédondance supérieur*).

On donne aussi des définitions sur la domination arête-sommet dans les graphes.

Définition 2.6 ([38]). *On dit qu'une arête $e = uv$ d'un graphe $G = (V, E)$ ev -domine un sommet $w \in V$ si:*

1. $u = w$ ou $v = w$, ou
2. uw ou vw est une arête de G .

Définition 2.7 ([38]). *Un sous ensemble $F \subseteq E$ est un dominant arête-sommet, abrégé ev -dominant, de G si pour tout sommet $v \in V$, il existe une arête $e \in F$ tel que e ev -domine v . Le cardinal minimum d'un ensemble ev -dominant de G est appelé le nombre de ev -domination de G , noté $\gamma_{ev}(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble ev -dominant minimal de G , appelé le nombre de ev -domination supérieur de G , est noté par $\Gamma_{ev}(G)$.*

2.1 Quelques résultats sur les paramètres de la ve -domination

Le problème de décision associé à la détermination des deux paramètres $\gamma_{ve}(G)$ et $i_{ve}(G)$ a été montré qu'il est NP-complet pour un graphe arbitraire par Lewis dans le chapitre 5 de sa thèse PhD [38]. En outre, il a montré que la détermination des paramètres de la ve -domination reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes bipartis ou triangulés. Ainsi, Lewis a prouvé aussi que les six paramètres de ve -domination sont solvables en temps linéaire pour les arbres. Rappelons que cnt veut dire: connexe non trivial.

Peters a présenté plusieurs résultats préliminaires sur le paramètre $\gamma_{ve}(G)$. Par la proposition suivante, il a caractérisé les graphes cnt ayant $\gamma_{ve}(G) = 1$.

Proposition 2.8 ([9]). *Soit G un graphe cnt d'ordre n . Alors $\gamma_{ve}(G) = 1$ si et seulement s'il existe un sommet $v \in V$ tels que tout sommet de G est à distance inférieure ou égale à deux par rapport à v et si $Y = \{u \in V : d_G(u, v) = 2\}$, alors Y est un ensemble indépendant.*

Voici quelques valeurs exactes de $\gamma_{ve}(G)$ dans des familles de graphes spécifiques données dans [9].

- Proposition 2.9** ([9]).
1. $\gamma_{ve}(K_n) = \gamma_{ve}(K_{n,m}) = \gamma_{ve}(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = 1$.
 2. Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_{ve}(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor$.
 3. Pour tout cycle C_n , $\gamma_{ve}(C_n) = \lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor$.

Lewis et al. [39] ont donné une condition nécessaire pour qu'un ve -dominant soit minimal dans un graphe cnt G .

Proposition 2.10 ([39]). *Tout ensemble ve -dominant minimal d'un graphe cnt G est aussi un ve -irrédondant maximal de G .*

Par conséquent, on a pour tout graphe cnt G ,

$$ir_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G) \leq \Gamma_{ve}(G) \leq IR_{ve}(G) \quad (1)$$

Par ailleurs, puisque tout ensemble ve -dominant indépendant d'un graphe cnt G est un ve -dominat minimal de G , on obtient pour tout graphe cnt,

$$\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \beta_{ve}(G) \leq \Gamma_{ve}(G) \quad (2)$$

En combinant les inégalités (1) et (2), les six paramètres de ve -domination pour tout graphe cnt G sont reliés par la chaîne d'inégalités suivantes, selon la célèbre chaîne d'inégalités (1.1) du Chapitre 1 établie par Cockayne, Hedetniemi et Miller [26].

Théorème 2.11 ([39]). *Pour tout graphe cnt G d'ordre n ,*

$$ir_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \beta_{ve}(G) \leq \Gamma_{ve}(G) \leq IR_{ve}(G).$$

Le fait que tout ensemble dominant est un ensemble ve -dominant de G , Peters en déduit que $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma(G)$ pour tout graphe cnt.

La comparaison entre les paramètres de domination et les paramètres de ve -domination a été faite par Lewis et al. [39].

Théorème 2.12 ([39]). *Pour tout graphe G ,*

1. $i_{ve}(G) \leq i(G)$.
2. $\beta_{ve}(G) \leq \beta_0(G)$.
3. $IR_{ve}(G) \leq IR(G)$.
4. $IR_{ve}(G) \leq \beta_1(G) \leq n/2$.

D'autre part, dans [39], Lewis et al. ont répondu à deux questions posées dans [38]. Ils ont montré que $ir_{ve}(G)$ et $ir(G)$ ainsi que $\Gamma_{ve}(G)$ et $\Gamma(G)$ sont incomparables.

Théorème 2.13 ([39]). *Soit G un graphe cnt. Alors le complément $V - S$ de tout ensemble ve -dominant minimal S est un ensemble ve -dominant, et donc $V - S$ est un ensemble dominant.*

Corollaire 2.14 ([39]). *Pour tout graphe cnt G , $\Gamma_{ve}(G) + \gamma(G) \leq n$.*

Soit $\Psi(G)$ le cardinal maximum des sommets d'un ensemble $S \subseteq V$ qui ne contient pas une enclave (une enclave est un sommet $v \in S$ tel que $N[v] \subseteq S$). Par cette définition, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 2.15 ([39]). *Pour tout graphe cnt G , $\Gamma_{ve}(G) \leq \Psi(G)$.*

Théorème 2.16 ([39]). *Soit G un graphe cnt. Alors le complément $V - S$ de tout ensemble dominant minimal S est un ensemble ve -dominant.*

Corollaire 2.17 ([39]). *Pour tout graphe cnt G , $\Gamma(G) + \gamma_{ve}(G) \leq n$.*

Une relation du type Nordhaus-Gaddum a été établie par Peters pour le nombre de ve -domination.

Théorème 2.18 ([9]). *Pour tout graphe cnt d'ordre n , $\gamma_{ve}(G) + \gamma_{ve}(\overline{G}) \leq n - \beta_0(G) + 2$.*

La proposition suivante donne une borne inférieure sur $\gamma_{ve}(G)$ en fonction de degré maximum Δ et de la taille m pour tout graphe cnt.

Proposition 2.19 ([39]). *Si G est un graphe cnt de taille m et de degré maximum Δ , alors $\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{m}{\Delta^2} \rceil$.*

Ainsi, pour les graphes k -réguliers, on obtient:

Corollaire 2.20 ([39]). *Si G est un graphe k -régulier, alors $\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{n}{2k} \rceil$.*

Corollaire 2.21 ([39]). *Pour tout graphe cubique, $\gamma_{ve}(G) \geq \lceil \frac{n}{6} \rceil$.*

Peters [9] a établi aussi une borne supérieure sur $\gamma_{ve}(G)$ en fonction de degré maximum Δ et de degré minimum δ .

Proposition 2.22 ([9]). *Pour tout graphe cnt G , de degré maximum Δ et de degré minimum δ ,*

$$\gamma_{ve}(G) \leq n - \Delta - \frac{\Delta * (\delta - 1)}{2} + 1.$$

Pour la suite, nous donnons la définition de la domination parfaite dans les graphes introduite par Bange et al. [42].

Définition 2.23. *Un ensemble de sommets S d'un graphe G est un dominant parfait de G si S est à la fois un dominant et un packing de G . En d'autres termes, tout sommet de V est dominé exactement une seule fois par S .*

Il est à noter que les ensembles dominants parfaits n'existent pas toujours, par exemple le cycle C_5 n'admet pas de tels ensembles. En [42], Bange et al. ont prouvé que si G admet un dominant parfait S , alors $|S| = \gamma(G)$, i.e, tout ensemble dominant parfait est un $\gamma(G)$ -ensemble.

Soit \mathcal{F} la famille des arbres T qui peut être obtenu à partir de l'union de $k \geq 1$ étoiles d'ordres au moins trois en ajoutant $(k - 1)$ arêtes joignant les feuilles des étoiles.

La caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de ve -domination et le nombre de domination sont égaux est obtenue dans [39] par le théorème suivant.

Théorème 2.24 ([39]). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\gamma_{ve}(T) = \gamma(T)$.
2. T a un ensemble dominant parfait S , dont chaque sommet de S est un sommet support de T .
3. $T \in \mathcal{F}$.

Dans sa thèse de PhD, Lewis [38] a posé les questions suivantes pour tout graphe cnt G d'ordre n , aux quelles nous répondrons dans le chapitre suivant.

1. Est ce que $IR_{ve}(G) + \gamma(G) \leq n$?
2. Est ce que $\Gamma_{ve}(G) + i(G) \leq n$?
3. Est ce que $IR(G) + \gamma_{ve}(G) \leq n$?
4. Est ce que $\Gamma(G) + i_{ve}(G) \leq n$?

Dans ce qui suit, on présentera des travaux récents sur la ve -domination.

2.2 Domination sommet-arête double

Dans un article soumis récemment [40], Chellali, Krishnakumari et Venkatakrisnan ont introduit et étudié la domination sommet-arête double. Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant sommet-arête double (ou simplement, un ve -dominant double) de G si toute arête de E est ve -dominé par au moins deux sommets de S . Le cardinal minimum d'un ensemble ve -dominant double de G est appelé le nombre de ve -domination double de G , noté $\gamma_{dve}(G)$.

Chellali et al. ont montré que le problème de décision associé à la ve -domination double est NP-complet pour les graphes bipartis. Par ailleurs, ils ont établi des bornes supérieures et inférieures dont en voici leurs principaux résultats.

2.2.1 Bornes supérieures

Proposition 2.25 ([40]). *Pour tout graphe G sans sommets isolés et sans triangles, $\gamma_{dve}(G) \leq \gamma_t(G)$.*

Corollaire 2.26 ([40]). *Si T est un arbre non trivial, alors $\gamma_{dve}(T) \leq \gamma_t(T)$.*

La proposition suivante donne une relation entre $\gamma_{dve}(G)$ et $\gamma_2(G)$ pour tout graphe cnt G .

Proposition 2.27 ([40]). *Pour tout graphe cnt G , $\gamma_{dve}(G) \leq \gamma_2(G)$.*

Corollaire 2.28 ([40]). *Pour tout graphe cnt, $\gamma_{dve}(G) \leq n - \delta + 1$.*

2.2.2 Bornes inférieures

Proposition 2.29 ([40]). *Pour tout graphe G ayant au moins une arête, $\gamma_{dve}(G) \geq \gamma_{ve}(G) + 1$, et cette borne est atteinte.*

D'autre part, les auteurs [40] donnent une caractérisation des arbres tel que $\gamma_{dve}(T) = \gamma_{ve}(T) + 1$ ou $\gamma_{dve}(T) = \gamma_{ve}(T) + 2$.

Proposition 2.30 ([40]). *Soit T un arbre non trivial. Alors $\gamma_{dve}(T) = \gamma_{ve}(T) + 1$ si et seulement si T est une étoile ou double étoile.*

Proposition 2.31 ([40]). *Un arbre satisfait $\gamma_{dve}(T) = \gamma_{ve}(T) + 2$ si et seulement si $T = C(t_1, t_2, \dots, t_k)$, où $k \in \{3, 4, 5, 6\}$, $t_1, t_k \geq 1$ et $t_3 = t_4 = 0$ si $k = 6$.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des Propositions 2.29, 2.30 et 2.31.

Corollaire 2.32 ([40]). *Si T est un arbre de diamètre au moins huit, alors $\gamma_{dve}(T) \geq \gamma_{ve}(T) + 3$.*

Une borne inférieure a été donnée dans [40] sur le nombre de ve -domination double pour les arbres non triviaux en fonction de n , ℓ et s . Cette borne est atteinte pour la famille d'arbres \mathcal{T} , caractérisée par les mêmes auteurs dans [40].

Soit \mathcal{T} la famille des arbres qui peut être obtenue à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où $T_1 \in \{P_3, P_4\}$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des deux opérations définies ci-dessous.

Opération \mathcal{O}_1 : Attacher un sommet en le joignant à un sommet support de T_i .

Opération \mathcal{O}_2 : Attacher une chaîne P_4 en joignant l'une de ses feuilles à une feuille de T_i dont le sommet support est faible.

Théorème 2.33 ([40]). *Si T est un arbre non trivial d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{dve}(T) \geq (n - \ell - s + 4) / 2$ avec l'égalité si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

2.3 Degré sommet-arête et degré arête-sommet

Dans un article récent [41], Chellali, Haynes, Hedetniemi et Lewis ont introduit des nouveaux concepts sur les degrés à savoir, le degré sommet-arête (ou tout simplement, *ve*-degré) et le degré arête-sommet (*ev*-degré). Le *ve*-degré d'un sommet x de G , noté $\deg_{ve}(x)$, est le nombre d'arêtes *ve*-dominées par x et le *ev*-degré d'une arête e , noté $\deg_{ev}(e)$ est le nombre de sommets *ev*-dominés par e .

2.3.1 Propriétés des *ve*-degrés

Evidemment, si G est un graphe d'ordre $n \in \{1, 2\}$, alors ses sommets ont un *ve*-degré au plus 1. Ainsi pour les graphes cnt d'ordre au moins trois, Chellali et al. ont donné les observations suivantes.

Observation 2.34 ([41]). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et de taille m , alors pour tout sommet $v \in V$, on a $2 \leq \deg_{ve}(v) \leq m$.*

Observation 2.35 ([41]). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et de taille m , et soit v un sommet de G . Alors:*

1) $\deg_{ve}(v) = 2$ si et seulement si $G = P_3$ ou v est une feuille dont le sommet support est de degré 2.

2) $\deg_{ve}(v) = m$ si et seulement si v *ve*-domine $E(G)$.

Similairement, les observations suivantes pour le ev -degrés sont obtenues.

Observation 2.36 ([41]). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors pour toute arête $e \in E$, on a $3 \leq \deg_{ev}(e) \leq n$.*

Observation 2.37 ([41]). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, et soit $e = uv$ une arête de G . Alors:*

a) $\deg_{ev}(e) = 3$ si et seulement si $G = K_3$ ou bien l'un de u et v est une feuille et l'autre est un son sommet support de degré 2.

b) $\deg_{ev}(e) = n$ si et seulement si uv ev -domine $V(G)$.

Analogiquement à la formule de la somme des degrés, Chellali et al. ont donné le résultat suivant.

Théorème 2.38 ([41]). *Pour tout graphe G ,*

$$\sum_{v \in V} \deg_{ve}(v) = \sum_{e \in E} \deg_{ev}(e) = \left(\sum_{v \in V} (\deg(v))^2 \right) - 3\eta(G).$$

où $\eta(G)$ représente le nombre de triangles dans G .

Corollaire 2.39 ([41]). *Pour tout graphe sans triangles G ,*

$$\sum_{v \in V} \deg_{ve}(v) = \sum_{e \in E} \deg_{ev}(e) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2.$$

Théorème 2.40 ([41]). *Soit G un graphe.*

i) *Si $\eta(G)$ est pair, alors le nombre de sommets de ve -degré impair est pair et le nombre d'arêtes de ev -degré impair est pair.*

ii) *Si $\eta(G)$ est impair, alors le nombre de sommets de ve -degré impair est impair et le nombre d'arêtes de ev -degré impair est impair.*

2.3.2 Graphes ve -réguliers et Graphes ev -réguliers

Un graphe G est dit ve -régulier si tous ses sommets ont le même ve -degré. Si $\deg_{ve}(v) = r$, alors on écrira r_{ve} -régulier. Un graphe G est dit ev -régulier si toutes ses arêtes ont le même ev -degré. Si $\deg_{ev}(e) = r$, alors on écrira r_{ev} -régulier.

On propose dans cette partie des caractérisations des graphes ve -réguliers, données dans [41].

Un sommet u dans un graphe G est dit simplicial si ses voisins $N(u)$ induisent un graphe complet. Chellali et al. ont caractérisé les graphes connexes ve -réguliers ayant au moins un sommet simplicial.

Proposition 2.41 ([41]). *Soit G un graphe connexe d'ordre n ayant au moins un sommet simplicial. Alors G est ve -régulier si et seulement si G est obtenu à partir d'un graphe complet K_p ($p \geq 1$) en ajoutant un ensemble non vide de sommets attachés à tous les sommets de K_p .*

Corollaire 2.42 ([41]). *Un arbre non trivial T est ve -régulier si et seulement si T est une étoile.*

Soit \mathcal{F} la famille des graphes bipartis connexes $G = (V_1, V_2, E)$ tels que tout sommet de V_1 est de degré 2 et tout sommet de V_2 est de degré 3. Le résultat suivant est une caractérisation des graphes r_{ve} -réguliers pour $1 \leq r \leq 6$. A noter que $K_{2,3} \in \mathcal{F}$.

Théorème 2.43 ([41]). *Soit G un graphe cnt. Alors:*

- 1- G est 1_{ve} -régulier si et seulement si $G = K_2 = K_{1,1}$.
- 2- G est 2_{ve} -régulier si et seulement si $G = P_3 = K_{1,2}$.
- 3- G est 3_{ve} -régulier si et seulement si $G = K_{1,3}$ ou $G = K_3$.
- 4- G est 4_{ve} -régulier si et seulement si $G = K_{1,4}$ ou $G = C_n$ avec $n \geq 4$.
- 5- G est 5_{ve} -régulier si et seulement si $G = K_{1,5}$ ou $G = K_4 - e$.
- 6- G est 6_{ve} -régulier si et seulement si $G = K_{1,6}$, $G = K_4$ ou $G \in \mathcal{F}$.

Soit \mathcal{F}' la famille des graphes dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles A et B tels que:

- i) tout sommet de A est de degré 2 et tout sommet de B est de degré 3.
- ii) A est un stable.
- iii) Si x est un sommet de B adjacent à un sommet y de B , alors x et y ont un seul sommet voisin z dans B .

Théorème 2.44 ([41]). *Soit G un graphe connexe d'ordre au moins 2. Alors:*

1- G est 2_{ev} -régulier si et seulement si $G = K_{1,1} = P_2$.

2- G est 3_{ev} -régulier si et seulement si $G = K_{1,2}$ ou K_3 .

3- G est 4_{ev} -régulier si et seulement si $G = K_{1,3}$, $G = K_4$, $G = K_4 - e$ ou $G = C_n$ avec $n \geq 4$.

4- G est 5_{ev} -régulier si et seulement si $G = K_{1,4}$, $G = K_5$, $G = K_5 - e$, $G = K_{1,2} + K_1$, $G = C_4 + K_1$ ou bien $G \in \mathcal{F}'$.

2.3.3 Graphes ve -irréguliers et graphes ev -irréguliers

Un graphe G est dit ve -irrégulier si tous les ve -degrés des sommets de G sont différents et un graphe G est dit ev -irrégulier si tous les ev -degrés des arêtes sont différents.

Par le résultat suivant, les auteurs [41] montrent qu'il n'existe pas un graphe de maille au moins 5 qui soit ve -irrégulier.

Proposition 2.45 ([41]). *Si G est un graphe de maille au moins 5, alors G n'est pas ve -irrégulier.*

Corollaire 2.46 ([41]). *Les arbres non triviaux ne sont pas ve -irréguliers.*

Corollaire 2.47 ([41]). *Si G est ve -irrégulier, alors il contient un cycle C_3 ou C_4 .*

Par ailleurs, les auteurs ont exhibé deux graphes ve -irrégulier, l'un biparti et l'autre contenant un triangle. Il est à noter que les ve -degrés dans le dernier graphe sont non seulement différents mais consécutifs.

Proposition 2.48 ([41]). *Aucun graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, n'est ev -irrégulier.*

Proposition 2.49 ([41]). *Il n'existe aucun arbre d'ordre $n \geq 6$ ayant $(n - 2)$ valeurs différentes des ev -degrés.*

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA ve -DOMINATION DANS LES GRAPHES

Dans ce chapitre, on exposera notre contribution sur l'étude de la ve -domination dans les graphes connexes non triviaux (cnt). Certains résultats présentés dans ce chapitre sont publiés dans un article accepté dans la revue (*Aequationes Mathematicae*) en collaboration avec Chellali, Haynes et Hedetniemi.

3.1 Minimalité d'un ensemble ve -dominant

On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ve -dominant soit minimal dans un graphe cnt G .

Proposition 3.1 ([10]). *Soit S un ensemble ve -dominant d'un graphe cnt G . Alors S est un ve -dominant minimal si et seulement si chaque sommet $v \in S$ a au moins une arête privée relatif à S .*

Preuve. Supposons que S est un ensemble ve -dominant minimal de G . Alors pour tout sommet $v \in S$, $S - \{v\}$ ne ve -domine pas G . D'où, il existe une arête e non ve -dominée par $S - \{v\}$, ce qui entraîne que e est une arête privée de v .

Inversement, supposons que S est un ensemble ve -dominant de G et que chaque sommet de S a une arête privée. Si S n'est pas minimal, alors il existe un sommet $v \in S$ tel que $S - \{v\}$ est ve -domine G . Ceci implique que chaque arête de G ve -dominée par $S - \{v\}$, contradiction avec le fait que v a une arête privée. On conclut que S est un ensemble ve -dominant minimal. □

Dans [39], Lewis et al. ont prouvé la propriété suivante pour les ensembles ve -irrédondants dans un graphe cnt G .

Proposition 3.2 ([39]). *Tout sommet d'un ensemble ve -irrédondant S dans un graphe cnt G a un voisin privé dans $V - S$.*

Puisque tout ensemble ve -dominant minimal d'un graphe cnt G est un ve -irrédondant maximal de G , on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 ([10]). *Tout sommet d'un ensemble ve -dominant minimal S dans un graphe cnt G a un voisin privé dans $V - S$.*

3.2 Relations entre des paramètres de la ve -domination et ceux de la domination

Nous donnons dans cette partie, des relations liant la ve -domination avec quelques paramètres de domination. Ces relations sont des réponses aux quatre questions posées par Lewis et qui sont mentionnées dans le Chapitre 2.

Rappelons d'abord le théorème qui relie les six paramètres de ve -domination dans tout graphe cnt.

Théorème 3.4 ([39]). *Pour tout graphe cnt G d'ordre n ,*

$$ir_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \beta_{ve}(G) \leq \Gamma_{ve}(G) \leq IR_{ve}(G) \leq n/2.$$

Notre premier résultat relie le nombre d'irrédondance supérieur et le nombre de ve -domination indépendante pour tous graphes cnt. Par ailleurs, on donne une caractérisation des graphes atteignant cette borne.

Théorème 3.5 ([10]). *Soit G un graphe cnt d'ordre n . Alors $IR(G) + i_{ve}(G) \leq n$, avec égalité si et seulement si G est une étoile.*

Preuve. Soit D un $IR(G)$ -ensemble. Alors $pn[v, D] \neq \emptyset$ pour tout $v \in D$. Comme G est un graphe cnt, tout sommet de D a un voisin dans $V - D$, et d'où, $V - D$ ve -domine G . Soit A un ensemble indépendant maximal dans $G[V - D]$ et $B = V - (D \cup A)$. Observons que A est un ensemble ve -dominant indépendant de $G[V - D]$.

Maintenant si $B = \emptyset$, alors puisque $A = V - D$, il s'ensuit que A est un ensemble ve -dominant indépendant de G . D'où, $i_{ve}(G) \leq |A| = |V| - |D|$, et le resultat est vérifié.

Donc on peut supposer que $B \neq \emptyset$. Soit $A' = N(A) \cap D$, et soit B' l'ensemble des sommets isolés dans $G[D - A']$, et soit $C = D - (A' \cup B')$. Notons que toute arête e incidente à un sommet de B' est aussi incidente à un sommet de $A' \cup B$, et d'où, e est ve -dominée par A .

Maintenant si $C = \emptyset$, alors A est un ensemble ve -dominant indépendant de G . D'où, $i_{ve}(G) \leq |A| < |V| - |D|$, et $IR(G) + i_{ve}(G) < n$.

Donc on peut supposer que $C \neq \emptyset$. Comme le sous graphe induit par C n'a pas des sommets isolés, tout sommet de C a un voisin privé dans B relatif à D . D'où, $|C| \leq |B|$. Soit C' un ensemble indépendant maximal dans $G[C]$. Il est clair que $|C'| < |C|$ et $C' \cup A$ est un ensemble ve -dominant indépendant de G . Donc, $i_{ve}(G) \leq |A \cup C'| < |A| + |C| \leq |A| + |B| = |V - D|$, et d'où $IR(G) + i_{ve}(G) < n$.

Supposons maintenant que $IR(G) + i_{ve}(G) = n$, et soit D un $IR(G)$ -ensemble. Alors $i_{ve}(G) = |V - D|$. En utilisant la même notation utilisée ci-dessus, on en déduit que $B = \emptyset$. D'où, $V - D = A$ est un $i_{ve}(G)$ -ensemble et $B' = C = \emptyset$. Notons que comme $B' = C = \emptyset$, ce qui implique que $A' = N(A) \cap D = D$. Observons que si un sommet $u \in D$ a au moins deux voisins dans $V - D$, alors $((V - D) - N(u)) \cup \{u\}$ est un ensemble ve -dominant indépendant de G de cardinal inférieur que $|V - D| = i_{ve}(G)$, contradiction. D'où, chaque sommet de D a exactement un voisin dans $V - D$. Soit D_2 l'ensemble des sommets isolés dans $G[D]$ et $D_1 = D - D_2$. Supposons d'abord que $D_1 \neq \emptyset$. Puisque tout sommet de D_1 a un voisin dans D_1 , alors ses voisins privés sont dans $V - D$. Ainsi, chaque sommet de D_1 a exactement un voisin, qui est son voisin privé, dans $V - D$. Comme $V - D$ est indépendant et G est connexe, on déduit que $D_2 = \emptyset$. Maintenant soit x et y deux sommets adjacents dans D_1 , et soit x' et y' leurs voisins privés dans $V - D$, respectivement. Alors $((V - D) - \{x', y'\}) \cup \{x\}$ est un ensemble ve -dominant indépendant de cardinal inférieur à $|V - D|$, contradiction. D'où, $D_1 = \emptyset$. Ceci implique que $D = D_2 \neq \emptyset$ et que D est un ensemble indépendant. Maintenant puisque G est connexe, alors tout sommet de D a exactement un seul voisin dans $V - D$, et $V - D = A$ est un $i_{ve}(G)$ -ensemble, on conclut que $|A| = 1$. Donc, G est une étoile.

Inversement, si G est une étoile d'ordre n , alors $IR(G) + i_{ve}(G) = n - 1 + 1 = n$, est évident. \square

Puisque pour tout graphe G , $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G)$ et $\Gamma(G) \leq IR(G)$, nous obtenons les inégalités suivantes comme un corollaire du théorème précédent, en répondant positivement aux questions 3 et 4 (voir la Page 29).

Corollaire 3.6 ([10]). *Si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR(G) + \gamma_{ve}(G) \leq n$ et $\Gamma(G) + i_{ve}(G) \leq n$, avec l'égalité si et seulement si G est une étoile.*

Théorème 3.7 ([10]). *Si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR_{ve}(G) + i(G) \leq n$.*

Preuve. Soit D un ensemble ve -irrédondant de G de cardinal maximum $IR_{ve}(G)$. De la Proposition 3.2, chaque sommet de D a au moins un voisin privé dans $V - D$. D'où, $V - D$ domine D . Soit A un ensemble indépendant maximal de $G[V - D]$, $B = (V - D) - A$ et $C = D - N(A)$. Notons que A domine B . Maintenant si $C = \emptyset$, alors A domine G , et le résultat est vérifié. D'où, on suppose que $C \neq \emptyset$. Par la Proposition 3.2, tout sommet de C a un voisin privé dans B , ce qui implique que $|C| \leq |B|$. Maintenant si C' est un ensemble indépendant maximal de $G[C]$, alors $A \cup C'$ est un ensemble indépendant maximal de G . Par conséquent, $i(G) \leq |A| + |C'| \leq |A| + |C| \leq |A| + |B| = |V| - |D|$. \square

Le graphe G d'ordre $n = 4k$ de la Figure 3.1 est un exemple, où $IR_{ve}(G) = 2k$ et $i(G) = 2k$.

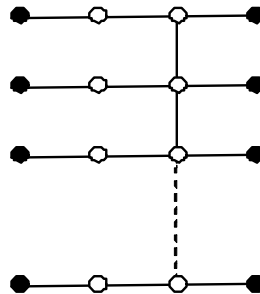


Figure 3.1: Un graphe G , où $IR_{ve}(G) = 2k$ et $i(G) = 2k$.

Comme $\gamma(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ve}(G) \leq IR_{ve}(G)$, des réponses affirmatives aux questions 1 et 2 (page 29) sont données par le corollaire suivant.

Corollaire 3.8 ([10]). *Si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR_{ve}(G) + \gamma(G) \leq n$ et $\Gamma_{ve}(G) + i(G) \leq n$.*

3.3 Bornes supérieures sur $\gamma_{ve}(G)$ et $i_{ve}(G)$

Dans cette sous-section, nous donnons des bornes supérieures sur $i_{ve}(G)$ et $\gamma_{ve}(G)$. D'après le Théorème 3.4, on a $i_{ve}(G) \leq n/2$ pour tout graphe cnt d'ordre n . En utilisant le Corollaire 3.3, on montre que cette borne est stricte.

Proposition 3.9 ([10]). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) < n/2$.*

Preuve. Soit $i_{ve}(G) = k$, et soit D un $i_{ve}(G)$ -ensemble. Si $n = 3$, alors $i_{ve}(G) = 1$, et le résultat est vérifié. Donc, soit $n \geq 4$, et supposons le contraire, que $i_{ve}(G) \geq n/2$. Théorème 3.4 implique que $i_{ve}(G) = k = n/2$. Ainsi, G est d'ordre pair et $|D| = |V - D| = k \geq 2$. Comme D est un ensemble ve -dominant minimal, d'après le Corollaire 3.3, tout sommet de D a un voisin privé dans $V - D$. Puisque $|V - D| = |D| = k$, alors tout sommet de D a exactement un voisin privé dans $V - D$, ce qui implique que tout sommet de $V - D$ a exactement un voisin dans D . Par ailleurs, puisque G est connexe et $n \geq 4$, alors le sous-graphe induit par $G[V - D]$ est connexe. Soit S un ensemble indépendant maximal de $G[V - D]$. Comme $G[V - D]$ est un graphe cnt, on a $|S| < |V - D| = k$. Mais puisque toute arête de G est incidente à un sommet de $V - D$, il s'ensuit que S est un ensemble ve -dominant indépendant de G de cardinal inférieur à $k = i_{ve}(G)$, d'où la contradiction. \square

Notre résultat suivant donne une borne sur $i_{ve}(G)$ en fonction de $\gamma_{ve}(G)$ pour graphes ne contenant pas de sous-graphes isomorphes à $K_{1,k}$, analogue au résultat de Bollobas et Cockayne [43].

Théorème 3.10 ([10]). *Si G est un graphe cnt, et sans $K_{1,k}$ pour $k \geq 3$, alors*

$$i_{ve}(G) \leq (k-2)\gamma_{ve}(G) - (k-3).$$

Preuve. Soit D un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble, et soit A un ensemble indépendant maximal de $G[D]$ et $B = D - A$. Si $B = \emptyset$, alors $D = A$ est à la fois un ve -dominant et indépendant, et d'où $i_{ve}(G) = \gamma_{ve}(G) = |D|$. Il est clair que le résultat est vérifié, car $i_{ve}(G) = \gamma_{ve}(G) \leq (k-2)\gamma_{ve}(G) - (k-3)$, pour $k \geq 3$.

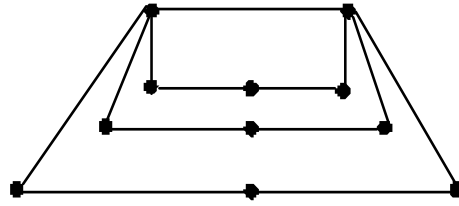
Maintenant supposons que $B \neq \emptyset$. On note que A est un ensemble ve -dominant indépendant de $G[D]$. Soit $B' = N(B) - N[A]$ et B'' un ensemble indépendant maximal dans $G[B']$. Comme A est un ensemble dominant indépendant de $G[D]$, nous avons $B' \subseteq V - D$. En outre, comme D est un ensemble ve -dominant minimum, on sait par le Corollaire 3.3 que tout sommet de B (et de A) a un voisin privé dans $V - D$, par rapport à l'ensemble D . Donc, B' , et d'où B'' , n'est pas vide. Puisque G ne contient pas $K_{1,k}$ comme sous-graphe induit et tout sommet de B a au moins un voisin dans A , alors chaque sommet de B a au plus $(k-2)$ voisins dans B'' . Ceci implique que $|B''| \leq (k-2)|B|$. Maintenant, en utilisant le fait que $B'' \cup A$ est un ensemble ve -dominant indépendant de G , nous obtenons:

$$\begin{aligned} i_{ve}(G) &\leq |A| + |B''| \\ &\leq |A| + (k-2)|B| \\ &\leq |A| + (k-2)|D| - (k-2)|A| \\ &\leq (k-2)|D| - (k-3)|A| \\ &\leq (k-2)\gamma_{ve}(G) - (k-3). \end{aligned} \quad \square$$

Comme conséquence du Théorème 3.10, nous obtenons le corollaire suivant analogue au célèbre résultat établi par Allan et Laskar [44] pour $i(G)$ et $\gamma(G)$.

Corollaire 3.11 ([10]). *Si G est un graphe sans griffes, alors $\gamma_{ve}(G) = i_{ve}(G)$.*

Il est à noter que la différence entre les deux paramètres $\gamma_{ve}(G)$ et $i_{ve}(G)$ peut être arbitrairement grande. En effet, considérons le graphe G_k obtenu à partir de $k \geq 2$ cycles C_5 partageant la même arête (Voir la Figure 3.2 pour une illustration du graphe G_3). Nous observons que $\gamma_{ve}(G_k) = 2$ et $i_{ve}(G_k) = k + 1$.

Figure 3.2: Graphe G_3 .

Notre prochain résultat montre que $2i_{ve}(G)$ est inférieur ou égal à $\gamma_t(G)$ pour les graphes cnt bipartis.

Théorème 3.12 ([45]). *Pour tout graphe cnt biparti G , $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \gamma_t(G)/2$.*

Preuve. Soient A et B les deux bipartitions de G , et soit D un $\gamma_t(G)$ -ensemble. Soit $A' = D \cap A$ et $B' = B \cap D$. Il est clair que A' et B' sont non-vides. Observons que chaque arête de G est incidente à un sommet de $A' \cup B'$ ou à un sommet dominé par $A' \cup B'$. Puisque tout sommet de B a un voisin dans A' , on en déduit que A' *ve-domine* toutes les arêtes de E . De même B' *ve-domine* toutes les arêtes de E .

Donc, $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \min\{|A'|, |B'|\} \leq |D|/2$. □

Corollaire 3.13 ([45]). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_{ve}(T) \leq i_{ve}(T) \leq \gamma_t(T)/2$.*

En général les deux paramètres $i_{ve}(G)$ et $\gamma_t(G)$ sont incomparables. En effet, soit G_i un graphe obtenu à partir de $k \geq 2$ triangles en identifiant un sommet de chaque triangle en un sommet x_i , et soit G un graphe formé par deux copies de G_1 et G_2 en attachant les deux sommets x_1 et x_2 par une arête (voir Figure 3.3). Alors on peut voir que $i_{ve}(G) = k + 1 > \gamma_t(G) = 2$.

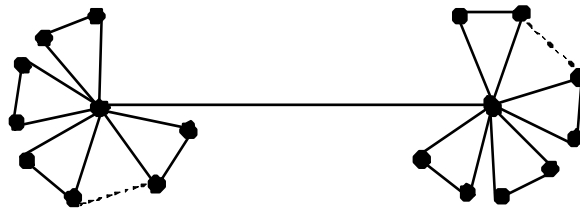


Figure 3.3.

Par ailleurs, la relation $2\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_t(G)$ n'est pas valide en général si G n'est pas biparti. Pour voir considérons un graphe H_k obtenu à partir de $k \geq 2$ cycles C_5 en ajoutant $2(k-1)$ nouveaux sommets, chacun attaché à un centre d'un cycle C_5 de sorte que ces nouveaux sommets avec tous les centres des cycles induisent une chaîne P_{3k-2} . (Voir la Figure 3.4 pour une illustration du graphe H_k). On observe que $\gamma_{ve}(H_k) = 2k$, $\gamma_t(H_k) = 3k$ et donc $2\gamma_{ve}(H_k) - \gamma_t(H_k) = k$.

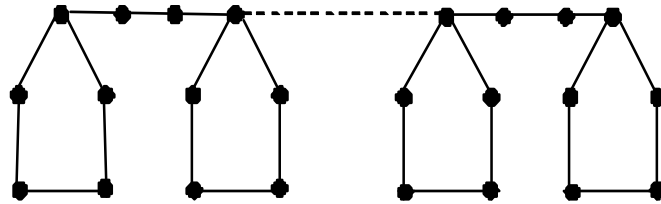


Figure 3.4.

Théorème 3.14 ([43]). *Pour tout graphe G sans sommets isolés, $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.*

Selon les Théorèmes 3.12 et 3.14, nous obtenons les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.15 ([45]). *Pour tout graphe cnt biparti G , $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq \gamma(G)$.*

Corollaire 3.16 ([10]). *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_{ve}(T) \leq i_{ve}(T) \leq \gamma(T)$.*

Nous rappelons les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.17 ([39]). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_{ve}(T) = \gamma(T)$ si et seulement si T a un ensemble dominant parfait S , dont chaque sommet de S est un sommet support de T .*

Théorème 3.18 ([28]). *Un arbre T d'ordre $n \geq 2$ satisfaisant $\gamma_t(T) = 2\gamma(T)$ si et seulement si T a un ensemble dominant D tels que :*

- a) *Tout sommet de D est un sommet support de T .*
- b) *D est un packing.*

A partir des deux Théorèmes 3.17 et 3.18, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.19. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_{ve}(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $2\gamma(T) = \gamma_t(T)$.*

Voici un résultat qui sera utile pour la suite.

Théorème 3.20 ([46] et [47]). *Pour tout graphe G , $\beta_0(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$.*

Théorème 3.21. *Si G est un graphe connexe tel que $3 \leq \Delta(G) \leq 5$, alors $i_{ve}(G) \leq \frac{\Delta(G)}{2} \gamma_{ve}(G)$.*

Preuve. Soit G un graphe connexe tel que $3 \leq \Delta(G) \leq 5$. Parmi tous les $\gamma_{ve}(G)$ -ensembles, soit D celui qui contient le moins d'arêtes possibles. Notons que d'après le Corollaire 3.3, chaque sommet de D a un voisin privé dans $V - D$. Soit $v \in D$. Si v est un sommet isolé dans $G[D]$, alors $\deg_{G[D]}(v) = 0 < \Delta(G) - 2$. Supposons maintenant que v n'est pas un sommet isolé dans $G[D]$. Si v a un seul voisin $u \in V - D$, alors $D' = (D - \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble ve -dominant minimum avec $E(G[D']) < E(G[D])$, contradiction. Donc v a au moins deux voisins dans $V - D$, et d'où $\deg_{G[D]}(v) \leq \Delta(G) - 2$. On en déduit que $\Delta(G[D]) \leq \Delta(G) - 2$. Soit A l'ensemble des sommets isolés dans $G[D]$, et soit B l'ensemble de tous sommets de $G[D]$ qui appartiennent à une composante K_2 dans $G[D]$, et $C = D - (A \cup B)$. Donc tout sommet de B est de degré 1 dans $G[D]$, et tout sommet de C appartient à une composante d'ordre au moins trois. Soit X un ensemble indépendant maximum dans $G[C]$. Par le Théorème 3.20, $|X| \geq \frac{|C|}{\Delta(G[C])+1} \geq \frac{|C|}{\Delta(G)-1}$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in C - X$ tel que $\deg_{G[C]}(x) = 1$. Il est clair que $N(x) \cap X \neq \emptyset$. Soit $y \in N(x) \cap X$. Alors $(X - \{y\}) \cup \{x\}$ est un ensemble indépendant maximum de $G[C]$. Donc on peut supposer que pour tout sommet $x \in C - X$, $\deg_{G[C]}(x) \geq 2$. Ceci implique que tout sommet de $C - X$ a au plus $(\Delta(G) - 2)$ voisins dans $V - D$. Soit Y un sous ensemble de B contenant une seule feuille de chaque composante K_2 de $G[B]$. Alors $|Y| = \frac{|B|}{2}$. Soit $Z \subset N(D)$ contenant tous les sommets incidents aux arêtes non ve -dominées par $A \cup Y \cup X$. Notons que ces arêtes sont ve -dominées par les sommets de $(B - Y) \cup (C - X)$. Soit T un ensemble indépendant maximum de $G[Z]$.

Alors $|T| \leq |Z| \leq (\Delta(G) - 1)(|B| - |Y|) + (\Delta(G) - 2)(|C| - |X|) = (\Delta(G) - 1)\frac{|B|}{2} + (\Delta(G) - 2)(|C| - |X|)$.

Il est clair que T ve -domine toutes les arêtes non ve -dominées par $A \cup Y \cup X$. Donc $(A \cup Y \cup X \cup T)$ est un ensemble ve -dominant indépendant de G . Comme $3 \leq \Delta(G) \leq 5$, on obtient :

$$\begin{aligned}
i_{ve}(G) &\leq |A| + |Y| + |X| + |T| \\
&\leq |A| + \frac{|B|}{2} + |X| + (\Delta(G) - 1)\frac{|B|}{2} + (\Delta(G) - 2)(|C| - |X|) \\
&\leq |A| + \Delta(G)\frac{|B|}{2} + (\Delta(G) - 2)|C| - (\Delta(G) - 3)|X| \\
&\leq |A| + \Delta(G)\frac{|B|}{2} + (\Delta(G) - 2)|C| - \frac{(\Delta(G)-3)}{\Delta(G)-1}|C| \\
&= \gamma_{ve}(G) + (\Delta(G) - 2)\frac{|B|}{2} - \frac{(\Delta(G)-3)(\Delta(G)-2)}{\Delta(G)-1}|C| \\
&\leq \gamma_{ve}(G) + (\Delta(G) - 2)\frac{(|B|+|C|)}{2} \\
&\leq \frac{\Delta(G)}{2}\gamma_{ve}(G). \quad \square
\end{aligned}$$

Corollaire 3.22. *Pour tout graphe 3-régulier G , $i_{ve}(G) \leq \frac{\Delta(G)}{2}\gamma_{ve}(G)$.*

Dans un article récent, Krishnakumari et al. [48] ont établi une borne supérieure de $n/3$ sur le nombre de ve -domination pour tout arbre d'ordre n et ont caractérisé la famille des arbres atteignant cette borne supérieure. Les auteurs définissent cette famille \mathcal{F} des arbres $T = T_k$, comme suit. Soit T_1 la chaîne P_3 . Pour $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i en ajoutant une chaîne P_3 et en joignant l'une de ses feuilles à un sommet de T_i qui est adjacent à une chaîne P_2 ou P_3 . Notons que dans [48], un sommet v est dit adjacent à une chaîne P_n s'il y a un voisin de v , disons x , tel que le sous-arbre issu de T en supprimant l'arête vx et qui contient le sommet x comme une feuille, est une chaîne P_n .

Théorème 3.23 ([48]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(T) \leq n/3$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Rappelons la P_2 -couronne d'un graphe G est un graphe d'ordre $3|V|$ obtenu à partir de G en attachant une chaîne P_2 distincte à chaque sommet $v \in V$ en ajoutant une arête entre v et une feuille de sa chaîne correspondante P_2 . On note que tout arbre $T = T_k$,

pour $k \geq 2$, de la famille \mathcal{F} donnée par Krishnakumari et al. [48], a la propriété que tout sommet de $T_k \in \mathcal{F}$ est ou bien: (i) une feuille, (ii) un sommet support de degré deux, ou (iii) un sommet ayant exactement un sommet support dans ses voisins, i.e, adjacent à exactement une seule chaîne P_2 . Comme $T_1 = P_3$ peut être aussi considéré comme une P_2 -couronne de P_1 , les arbres de \mathcal{F} sont précisément, les P_2 -couronnes d'arbres.

Corollaire 3.24 ([10]). *Un arbre T d'ordre n satisfaisant $\gamma_{ve}(T) = n/3$ si et seulement si T est une P_2 -couronne d'un arbre H .*

Notre prochaine observation améliore la borne supérieure précédente. Soient $L(T)$ et $S(T)$ l'ensemble des feuilles et sommets supports d'un arbre T , respectivement. Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$ et $\text{diam}(T) \geq 3$ (en d'autres termes, T n'est pas une étoile), soit T^* l'arbre obtenu à partir de T en supprimant pour tout sommet support toutes ses feuilles sauf une de T . Il est clair que, T^* est d'ordre $n^* = n - |L(T)| + |S(T)| > 3$, et $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T^*)$.

Observation 3.25 ([10]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ et $\text{diam}(T) \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(T) \leq (n - |L(T)| + |S(T)|)/3$, avec égalité si et seulement si T^* est la P_2 -couronne d'un arbre non trivial H .*

Preuve. Soit T un arbre non trivial d'ordre n et $\text{diam}(T) \geq 3$. Il est clair que $n \geq 4$. Maintenant on considère l'arbre T^* . Il est évident que, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T^*)$. Puisque T^* est d'ordre $n^* > 3$, alors d'après le Théorème 3.23, $\gamma_{ve}(T^*) \leq n^*/3$ avec l'égalité si et seulement si T^* est la P_2 -couronne d'un arbre non trivial H . \square

D'après la Proposition 3.1, tout sommet v dans un ensemble ve -dominant minimal d'un graphe G a au moins une arête privée. Ces arêtes privées peuvent être incidentes au sommet v ou bien à un sommet adjacent à v . Pour la suite, on dira qu'un sommet v appartenant à un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble est de *Type-1* si toutes ses arêtes privées sont incidentes à v , et il est de *Type-2*, sinon.

Notre résultat suivant montre que $n/3$ est aussi une borne supérieure pour le nombre de ve -domination des graphes connexes d'ordre $n \geq 3$ et sans C_5 , ce qui améliore la borne donnée dans [48].

Théorème 3.26 ([10]). *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et sans C_5 , alors $\gamma_{ve}(G) \leq \frac{n}{3}$.*

Preuve. Parmi tous les $\gamma_{ve}(G)$ -ensembles, soit D un ayant le moins de sommets isolés possible dans $G[D]$. Nous allons montrer que $|V - D| \geq 2|D|$, ce qui prouve le théorème.

D'après la Proposition 3.1, tout sommet de D a au moins une arête privée. Notons qu'il est possible pour une arête privée de u soit adjacente à une arête privée de v pour deux sommets u et v de D . Soit D_i le sous ensemble de D contenant les sommets de Type- i pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Supposons qu'un sommet, disons u , de D_1 a un voisin dans D . Alors $D - \{u\}$ est un ensemble ve -dominant de cardinal inférieur que $\gamma_{ve}(G)$, contradiction. Donc, on conclut que D_1 est un ensemble indépendant et aucun sommet de D_1 n'a un voisin dans D_2 .

Pour un sommet $x \in D$, soit $pn_2(x, D)$ l'ensemble des sommets de $V - D$ qui sont incidents à une arête privée de x mais non incidents à une arête privée d'un autre sommet de $D - \{x\}$. Notons que $pn[x, D] \cap (V - D) \subseteq pn_2(x, D)$, et d'où, Corollaire 3.3 implique que $|pn_2(x, D)| \geq 1$ pour tout $x \in D$. Notre objectif est de construire un ensemble S_x pour chaque $x \in D$, tel que $|S_x| \geq 2$ et $S_x \cap S_y = \emptyset$ pour tout $y \in D - \{x\}$. Pour construire un tel ensemble, on commence par $S_x = pn_2(x, D)$. Si $|S_x| \geq 2$ pour tous $x \in D$, alors nous avons fini, c-à-d, $|V - D| \geq 2|D|$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in D$ tel que $|S_x| = 1$, et soit $S_x = \{x'\}$. On montre que ou bien on a une contradiction, ou qu'on peut ajouter un sommet v à S_x , c-à-d, on peut remplacer S_x avec $S_x \cup \{v\}$ tel que $S_x \cap S_y = \emptyset$ pour tout $y \in D - \{x\}$.

On considère deux cas.

Cas 1. $x \in D_1$. Puisque x n'a pas un voisin dans D , alors ou bien x est une feuille de G ou bien x a un voisin commun, disons w , avec un autre sommet $v \in D$. Supposons d'abord que x est une feuille de G . Comme G est connexe, x' a un autre voisin z , et nécessairement, $z \in V - D$. Par ailleurs, comme x est un sommet de Type-1, l'arête $x'z$ est ve -dominée par un voisin de z dans D . Mais alors $D' = (D - \{x\}) \cup \{z\}$ est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble avec moins de sommets isolés dans $G[D']$ que dans $G[D]$, contradiction.

D'où, on peut supposer que x n'est pas une feuille, c-à-d, x et v partagent un voisin commun $w \neq x'$. Puisque $x \in D_1$, il s'ensuit que $w \in V - D$. Par ailleurs, $(D - \{x\}) \cup \{w\}$

est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble avec moins de sommets isolés dans son sous-graphe induit que celui de D , contradiction avec le choix de D .

Cas 2. $x \in D_2$. Alors x a une arête privée uv tel que u et v sont dans $V - D$, c-à-d, au moins un de u et v est un voisin privé de x relatif à D . Si $u \neq x'$ et $v \neq x'$, alors $|S_x| \geq 2$, contradiction. D'où, on peut supposer que toutes les arêtes privées de x sont incidentes à x' . Considérons l'arête privée $x'v$ de x . Puisque $v \notin S_x$, ceci implique que $v \notin \text{pn}_2(x, D)$, il en résulte que v est incident à une arête privée d'au moins un sommet de $D - \{x\}$. Soit $Y = \{y_1, \dots, y_t\}$ le sous-ensemble de $D - \{x\}$ tel que chaque $y_i \in Y$ a une arête privée incidente à v . Par nos précédents commentaires, $Y \neq \emptyset$. Soit vw_i une arête privée de y_i pour chaque $y_i \in Y$. Notons que $v \notin N(y_i)$ pour tout $y_i \in Y$, parce que $x'v$ est une arête privée de x . Donc, $w_i \in \text{pn}[y_i, D]$ et $y_i \in D_2$.

Montrons d'abord que pour tout $y_i \in Y$, ou bien $|S_{y_i}| \geq 2$ ou bien on peut ajouter un sommet à S_{y_i} en créant un nouvel ensemble qui n'a pas un sommet commun avec tout S_a , où $a \in D - \{y_i\}$. Supposons le contraire, que $|S_{y_i}| = 1$, c-à-d, $S_{y_i} = \{w_i\}$, pour certains $y_i \in Y$. Supposons d'abord qu'il existe un sommet $z \in V - D$ pour lequel $N(z) \cap D = \{x, y_i\}$. Notons que $z \notin S_a$ pour tout $a \in D$. Par ailleurs, toute arête incidente à z est ve -dominée par x et y_i , de sorte qu'aucun de ces arêtes soient arêtes privées pour tout sommet de D . D'où, on peut ajouter z à S_{y_i} formant un nouvel S_{y_i} , et d'où, $|S_{y_i}| \geq 2$ et $S_{y_i} \cap S_a = \emptyset$ pour tout $a \in D - \{y_i\}$. Par ailleurs, comme $N(z) \cap D = \{x, y_i\}$, z n'est pas un candidat pour être ajouter à un autre S_{y_j} pour $j \neq i$. Ainsi, si $|S_{y_i}| = 1$, alors nous pouvons supposer qu'un tel sommet z n'existe pas.

Notons que x n'est pas adjacent à v ou à w_i , et y_i n'est pas adjacent à v ou x' . Si x' est adjacent à w_i , alors $(D - \{x, y_i\}) \cup \{x'\}$ est un ensemble ve -dominant de G de cardinal moins que $\gamma_{ve}(G)$, contradiction. D'où, on peut supposer que x' et w_i ne sont pas adjacents. Mais alors si x et y_i sont adjacents, le sous-graphe induit par $\{x, x', v, w_i, y_i\}$ est un cycle C_5 , contradiction. D'où, x n'est pas adjacent à y_i . Maintenant, $(D - \{x, y_i\}) \cup \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de G de cardinal moins que $\gamma_{ve}(G)$, contradiction.

Donc, pour chaque $y_i \in Y$, on a un ensemble S_{y_i} tels que $|S_{y_i}| \geq 2$ et $S_{y_i} \cap S_a = \emptyset$ pour tous $a \in D - \{y_i\}$. Par ailleurs, on note que $v \notin S_a$ pour tout $a \in D - \{x\}$. En d'autres termes, si $|S_x| = |S_y| = 1$ pour les sommets x et y de D , alors aucune arête privée de x

n'est adjacente à une arête privée de y . Maintenant on peut ajouter v à S_x de sorte que $|S_x| \geq 2$ et $S_x \cap S_a = \emptyset$ pour tous $a \in D - \{x\}$.

Dans les deux cas, on a montré que pour chaque sommet de D , on peut compter au moins deux sommets distincts dans $V - D$, c'est-à-dire, $|V - D| \geq 2|D|$. Par conséquent, $\gamma_{ve}(G) \leq n/3$. \square

Corollaire 3.27 ([10]). *Si G est un graphe biparti d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq n/3$.*

Corollaire 3.28 ([48]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{ve}(T) \leq n/3$.*

Observons que la condition "sans C_5 " est nécessaire pour l'énoncé du Théorème 3.26. Pour un exemple simple, on considère le cycle C_5 pour lequel $\gamma_{ve}(C_5) = 2 > 5/3$. Cependant, ceci est le seul exemple du graphe que nous avons trouvé pour lequel la borne du Théorème 3.26 n'est pas vérifiée. Nous le laissons comme un problème ouvert, soit de prouver que le théorème est vrai pour tous les graphes cnt d'ordre $n \geq 6$, ou bien de donner une famille de graphes comme un contre-exemple.

Il est également à noter que la borne donnée dans le Théorème 3.26 n'est pas valable pour le nombre de ve -domination indépendante $i_{ve}(G)$. En effet, soit G le graphe obtenu à partir de k ($k \geq 4$) chaînes P_5 en ajoutant toutes les arêtes entre les centres des chaînes. Il est clair que, G est sans C_5 , ayant $n = 5k$ sommets et $i_{ve}(G) = 2k - 1 > n/3$.

3.4 Bornes sur $\beta_{ve}(G)$ et $\Gamma_{ve}(G)$

D'après le Théorème 3.4, on a $\Gamma_{ve}(G) \leq n/2$ pour tout graphe cnt d'ordre n . Le résultat suivant est une caractérisation des graphes atteignant cette borne supérieure.

Théorème 3.29. *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors $\Gamma_{ve}(G) = n/2$ si et seulement si $G = H \circ K_1$ pour un graphe connexe H .*

Preuve. Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ tel que $\Gamma_{ve}(G) = n/2$, et soit D un $\Gamma_{ve}(G)$ -ensemble. Ainsi, G est d'ordre pair et $|D| = |V - D| = k \geq 1$. Comme D est un ensemble ve -dominant minimal, d'après le Corollaire 3.3, tout sommet de D a un voisin privé dans $V - D$. Puisque $|V - D| = |D| = k$, alors tout sommet de D a exactement un voisin privé dans $V - D$. Ceci implique que tout sommet de $V - D$ a aussi exactement un voisin dans D . Dans ce cas, tout sommet de D est de type-1. Supposons que D contient deux sommets adjacents x et y . Alors $D - \{x\}$ est un ensemble ve -dominant, ce qui contredit la minimalité de D . D'où D est un packing et donc chaque sommet de D est une feuille. Par ailleurs, puisque G est connexe et $n \geq 2$, alors le sous-graphe induit par $G[V - D]$ est connexe. D'où $G = H \circ K_1$ pour un graphe connexe H .

La condition suffisante est simple à voir. □

En général les deux paramètres $\gamma(G)$ et $\beta_{ve}(G)$ sont incomparables. En effet, si G est un cycle C_4 , on peut voir que $\gamma(C_4) = 2$ et $\beta_{ve}(C_4) = 1$. Dans ce qui suit, on donne un résultat qui montre que le nombre de ve -domination indépendante supérieur est borné inférieurement par le nombre de domination pour la classe des arbres.

On dit qu'une arête privée e d'un sommet v est de *Type-1* si e est incidente à v , et elle est de *type-2* sinon.

Théorème 3.30. *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma(T) \leq \beta_{ve}(T)$.*

Preuve. On utilise une induction sur l'ordre n de T . Il est clair que le résultat est vrai si $n \in \{2, 3\}$. Supposons que tout arbre non trivial T' d'ordre $n' < n$ satisfait $\gamma(T') \leq \beta_{ve}(T')$. Soit T un arbre d'ordre n . Puisque les étoiles (où $\beta_{ve}(T) = \gamma(T) = 1$) et les étoiles doubles (pour lesquelles $\beta_{ve}(T) = \gamma(T) = 2$), vérifient le résultat, on peut supposer que T est de diamètre au moins quatre.

Enracinons T à un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit u un sommet support à distance maximum de r et v le parent de u dans l'arbre enraciné. Soit u' une feuille adjacente à u . Notons par T_x le sous arbre induit par le sommet x et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Nous distinguons entre deux cas.

Cas 1. v est de degré deux. Soit T' un arbre obtenu à partir de T en supprimant u et tous ses voisins. Comme $\text{diam}(T) \geq 4$, le sous-arbre T' est non trivial. Aussi, tout

$\beta_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ve -dominant indépendant D de T en ajoutant u . Il est clair que chaque sommet de D a une arête privée. De la Proposition 3.1, D est minimal, et on obtient $\beta_{ve}(T) \geq \beta_{ve}(T') + 1$. D'autre part, tout $\gamma(T')$ -ensemble peut être étendu à un dominant de T en ajoutant u , alors $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Par induction, on a $\gamma(T') \leq \beta_{ve}(T')$, et d'où $\gamma(T) \leq \beta_{ve}(T)$.

Cas 2. v est de degré au moins trois. Alors tout fils de v est ou bien une feuille ou bien un sommet support. Soit T' un arbre obtenu à partir de T en supprimant u et ses feuilles. Montrons qu'il existe un $\beta_{ve}(T')$ -ensemble ne contenant pas le sommet v . Supposons le contraire, que v appartient à tout $\beta_{ve}(T')$ -ensemble. Alors v ve -domine toutes les arêtes de T_v . Notons que puisque tout $\beta_{ve}(T')$ -ensemble D' est indépendant, alors chaque sommet de D' a une arête privée de type-1. Soit D' un $\beta_{ve}(T')$ -ensemble. Si toutes les arêtes privées de v est de type-1, alors on peut remplacer v par son fils, contradiction. D'où v a une arête privée de type-2. Alors on peut aussi le remplacer par son voisin incident à cette arête privée, contradiction. Alors il existe un $\beta_{ve}(T')$ -ensemble D' qui ne contient pas le sommet v . Donc, $D = D' \cup \{u\}$ est un ve -dominant indépendant dont $u'u$ est une arête privée de u . De la Proposition 3.1, D est minimal, et d'où $\beta_{ve}(T) \geq \beta_{ve}(T') + 1$. De plus, tout $\gamma(T')$ -ensemble peut être étendu à un dominant de T en ajoutant u , alors $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Maintenant par induction, on a $\gamma(T') \leq \beta_{ve}(T')$. En utilisant les inégalités précédentes, on obtient l'inégalité désirée. \square

Corollaire 3.31. *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_{ve}(T) \leq i_{ve}(T) \leq \gamma(T) \leq \beta_{ve}(T) \leq \Gamma_{ve}(T)$.*

A noter que le résultat n'est pas valide pour β_{ve} et i dans les arbres car pour une double étoile $S_{k,k}$ ($k \geq 2$), on a $i(S_{k,k}) = k + 1 > \beta_{ve}(S_{k,k}) = 2$.

3.5 Graphes G tels que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$

Dans un récent travail établi par Chellali, Haynes et Hedetniemi [49] sur les deux paramètres $\gamma_R(G)$ et $i_R(G)$, où les auteurs ont donné un résultat sur une relation entre $\gamma_{ve}(G)$ et $\gamma_R(G)$. Nous reprenons ci-dessous leur preuve car elle nous sera utile pour la suite. Par

ailleurs, il est à noter que les auteurs ont fait une comparaison de cette nouvelle borne avec d'autres bornes qui existaient dans la littérature.

Théorème 3.32 ([49]). *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, $2\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_R(G)$.*

Preuve. Parmi toutes les $\gamma_R(G)$ -fonctions, soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(G)$ -fonction de G avec $|V_2|$ le plus grand possible, ce qui est équivalent à $|V_1|$ le plus petit possible. Rappelons que par le choix de f , V_1 est indépendant.

Soit uv une arête de G . On sait que l'ensemble V_2 domine tout sommet de V_0 , car f est une fonction de domination Romaine. Ainsi, si u ou v est dans $V_0 \cup V_2$, alors V_2 ve -domine uv . Puisque V_1 est indépendant, alors au moins l'un de u et v est dans $V_0 \cup V_2$. Ceci implique donc que V_2 est un ensemble ve -dominant de G .

Ainsi, nous avons ce qui suit:

$$\gamma_{ve}(G) \leq |V_2| \leq |V_2| + \frac{|V_1|}{2} \leq \frac{2|V_2| + |V_1|}{2} = \frac{\gamma_R(G)}{2}.$$

D'où, $2\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_R(G)$. □

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$.

Théorème 3.33. *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ si et seulement si $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G)$.*

Preuve. Supposons que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(G)$ -fonction avec $|V_2|$ le plus grand possible. De la preuve du Théorème 3.32, et le choix de f , V_1 est indépendant, et on a égalité le long de la chaîne d'inégalités, c-à-d $\gamma_{ve}(G) = |V_2| = \frac{\gamma_R(G)}{2}$. Puisque $\frac{\gamma_R(G)}{2} = |V_2| + \frac{|V_1|}{2}$, on en déduit que $V_1 = \emptyset$. Ainsi, V_2 est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble. Par ailleurs, puisque V_2 domine G , $\gamma(G) \leq |V_2| = \gamma_{ve}(G)$. D'où $\gamma_{ve}(G) = \gamma(G)$.

Inversement, supposons que $\gamma(G) = \gamma_{ve}(G)$. Par le Théorème 3.32, on a $\gamma_R(G) \geq 2\gamma_{ve}(G) = 2\gamma(G)$. Puisque $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$, l'égalité $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ est obtenue. □

Dans [50], Hedetniemi, Rubalcaba, Slater et Walsh ont donné une relation entre $\gamma_t(G)$ et $\gamma_R(G)$ dans les graphes sans sommets isolés.

Théorème 3.34 ([50]). *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_t(G) \leq \gamma_R(G)$.*

Le théorème suivant de Chellali, Haynes et Hedetniemi [51], donne une caractérisation des graphes tels que $\gamma_R(G) = \gamma_t(G)$.

Théorème 3.35 ([51]). *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_R(G) = \gamma_t(G)$ si et seulement si $\gamma_t(G) = 2\gamma(G)$.*

Voici une condition nécessaire pour tout graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$.

Proposition 3.36. *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$, alors $\gamma_R(G) = \gamma_t(G)$.*

Preuve. Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G)$. Alors d'après le Théorème 3.34 et le Théorème 3.12, on en déduit que $\gamma_R(G) = \gamma_t(G)$. \square

Nous notons que la Proposition 3.36 n'est pas valable pour tout graphe. Pour voir, considérons le cycle C_5 , où $\gamma_R(G) = 2\gamma_{ve}(G) = 4$, mais $\gamma_R(G) > \gamma_t(G) = 3$.

Proposition 3.37. *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et sans C_i , pour $i \in \{3, 5\}$ satisfaisant $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$, alors il existe une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, telle que V_2 est un packing.*

Preuve. Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et sans C_i , pour $i \in \{3, 5\}$ tel que $2\gamma_{ve}(G) = \gamma_R(G)$, et soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_R(G)$ -fonction avec $|V_2|$ le plus grand possible. De la preuve du Théorème 3.33, on a $V_1 = \emptyset$. Supposons que V_2 n'est pas un packing. Alors il existe deux sommets x et y dans V_2 tel que $d_G(x, y) \leq 2$. Rappelons que V_2 est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble de G . Il est clair que toute arête privée de x est incidente à x . Maintenant, supposons que x et y sont adjacents. Puisque G est sans triangles, alors $V_2 - \{x\}$ ve -domine G , ceci implique que $\gamma_{ve}(G) < \frac{\gamma_R(G)}{2}$, contradiction. D'où, on peut supposer que $xy \notin E$ et que x et y ont un voisin commun, disons z . Comme G est sans C_5 , $V_2 - \{x, y\} \cup \{z\}$ est un ve -dominant de G , ce qui entraîne que $\gamma_{ve}(G) < \frac{\gamma_R(G)}{2}$, contradiction. D'où, V_2 est un packing. \square

Il est à noter que la propriété donnée dans la Proposition 3.37 n'est pas valable pour tout graphe cnt, pour un exemple simple, on considère le graphe C_5 pour lequel $2\gamma_{ve}(C_5) = \gamma_R(C_5) = 4$, mais V_2 n'est pas un packing.

Maintenant, on donne une caractérisation des arbres non triviaux satisfaisant $2\gamma_{ve}(T) = \gamma_R(T)$.

Théorème 3.38. *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

$$(i) \quad \gamma_R(T) = 2\gamma_{ve}(T).$$

$$(ii) \quad \gamma(T) = \gamma_{ve}(T).$$

$$(iii) \quad \gamma_R(T) = \gamma_t(T).$$

Preuve. $(i) \iff (ii)$ vient du Théorème 3.33.

Montrons que $(i) \iff (iii)$.

Supposons que $\gamma_R(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. La Proposition 3.36 implique que $\gamma_R(T) = \gamma_t(T)$.

Inversement, on suppose que $\gamma_R(T) = \gamma_t(T)$. Du Théorème 3.35, on a $\gamma_t(T) = 2\gamma(T)$. D'après le Corollaire 3.19, on en déduit que $2\gamma_{ve}(T) = 2\gamma(T) = \gamma_t(T) = \gamma_R(T)$. Donc $\gamma_R(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. \square

3.6 Caractérisation des arbres admettant un ve -dominant minimum unique

Nous nous intéresserons dans cette partie à l'unicité des ensembles ve -dominants minimum dans les graphes, en particulier on donne une caractérisation par construction des arbres ayant un ve -dominant minimum unique (ve -DMU).

Observation 3.39. *Pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 3$, il existe un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble qui ne contient aucun sommet pendant.*

Observation 3.40. *Si G est un graphe cnt admettant un ve -dominant minimum unique D , alors chaque sommet de D a au moins deux arêtes privées de type-2 n'ayant aucune extrémité commune dans $N(D)$.*

Preuve. Soit G un graphe cnt ayant un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble D unique. De la Proposition 3.1, tout sommet de D a au moins une arête privée. Supposons qu'il existe un sommet $v \in D$ ayant toutes ses arêtes privées sont de types-1. Soit $v' \neq v$ une extrémité d'une arête privée de v . Alors $(D - \{v\}) \cup \{v'\}$ est un ve -dominant minimum de G , ce qui contredit l'unicité de D . D'où chaque sommet de D a au moins une arête privée de type-2. En utilisant le même argument, on peut voir que tout sommet de D a au moins deux arêtes privées de types-2. Supposons maintenant qu'un sommet $u \in D$ a toutes ses arêtes privées de types-2 sont incidentes au même sommet u' adjacent à u . Alors $(D - \{u\}) \cup \{u'\}$ est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble de G , ce qui contredit l'unicité de D . Donc chaque sommet de D a au moins deux arêtes privées de type-2 n'ayant aucune extrémité commune dans $N(D)$. \square

Afin de caractériser les arbres T ayant un ve -dominant minimum unique, nous introduisons la famille \mathcal{T} des arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où $T_1 = P_5$ de centre x , $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit $A(T_1) = \{x\}$. Soit H_1 un arbre obtenu à partir d'une chaîne P_5 de centre v en attachant v à un nouveau sommet u . Soit H_2 un arbre obtenu à partir d'une chaîne P_5 de centre v et une chaîne $P_2 = u-w$ en ajoutant l'arête vu .

- **Opération \mathcal{O}_1** : Attacher un nouveau sommet à un sommet support de T_i . Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.
- **Opération \mathcal{O}_2** : Attacher un P_2 par l'une de ses feuilles à un sommet v de $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.
- **Opération \mathcal{O}_3** : Attacher un nouveau sommet à un sommet w de T_i ayant un voisin dans $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i)$.
- **Opération \mathcal{O}_4** : Attacher une copie de H_1 en ajoutant l'arête uw , où $w \in V(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.

- **Opération \mathcal{O}_5** : Attacher une chaîne P_5 de centre v en ajoutant l'arête vw , où w satisfait $\gamma_{ve}(T_i - w) \geq \gamma_{ve}(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.
- **Opération \mathcal{O}_6** : Attacher une chaîne $P_4 = u'-u-v-y$ en ajoutant l'arête yw , où w n'ayant aucun voisin dans $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{v\}$.

Lemme 3.41. *Si $T \in \mathcal{T}$, alors T admet un ve -dominant minimum unique.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{T}$. Alors T peut être obtenu à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$), où T_1 est une chaîne P_5 , $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir T_i par l'une des six opérations. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire l'arbre T . Si $k = 1$, alors $T_1 = P_5$ et donc $A(T)$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

Supposons que la propriété est valide pour tous les arbres $T \in \mathcal{T}$ pouvant être construit par une séquence de longueur $k - 1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, et $T' = T_{k-1}$. Par induction sur $T' \in \mathcal{T}$, $A(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Nous examinons les cas suivants.

Il est simple de voir que si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_1 , alors $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T')$ et $A(T') = A(T)$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_2 , alors il est clair que $A(T')$ est un ve -dominant de T , d'où $\gamma_{ve}(T) \leq |A(T')| = \gamma_{ve}(T')$. D'autre part, puisqu'il existe un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble S contient v , S ve -domine T' , et donc $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. Par conséquent, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T')$ et $A(T') = A(T)$ est un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. Par ailleurs l'unicité de $A(T')$ implique que $A(T)$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_3 . Puisque w a un voisin dans $A(T')$, alors $A(T')$ ve -domine T , et on obtient $\gamma_{ve}(T) \leq |A(T')| = \gamma_{ve}(T')$. Aussi, de l'Observation 3.39, comme T a un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble S ne contient aucune feuille, S ve -domine T' , et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. Donc $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T')$ et $A(T') = A(T)$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_4 . Alors $A(T') \cup \{v\}$ ve -domine T , et d'où $\gamma_{ve}(T) \leq |A(T')| + 1 = \gamma_{ve}(T') + 1$. D'autre part, v est dans tout $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. Soit S un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. Alors $S - \{v\}$ ve -domine T' , et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$.

Par conséquent, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Par hypothèse d'induction, $A(T') = S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Donc $S = A(T') \cup \{v\}$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_5 . Alors $A(T') \cup \{v\}$ ve -domine T , et d'où $\gamma_{ve}(T) \leq |A(T')| + 1 = \gamma_{ve}(T') + 1$. Maintenant on suppose que $\gamma_{ve}(T) < \gamma_{ve}(T') + 1$ et soit S un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. Comme v appartient à tout $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble, $v \in S$. Si $S - \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T' , alors $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1 < \gamma_{ve}(T')$, contradiction. Donc, $S - \{v\} = S'$ ne ve -domine pas T' . Comme toutes les arêtes de T' non incidentes à w sont ve -dominées par S' , S' est un ensemble ve -dominant de $T' - w$. Ceci implique que $\gamma_{ve}(T' - w) \leq \gamma_{ve}(T) - 1 < \gamma_{ve}(T') + 1 - 1$, et d'où $\gamma_{ve}(T' - w) < \gamma_{ve}(T')$, contradiction avec la construction, car w doit satisfaire $\gamma_{ve}(T' - w) \geq \gamma_{ve}(T')$. Par conséquent, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Par induction, $A(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Donc on peut voir que $S = A(T') \cup \{v\}$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble.

T est obtenu à partir de T' par l'opération O_6 . Dans ce cas $A(T') \cup \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T , et d'où $\gamma_{ve}(T) \leq |A(T')| + 1 = \gamma_{ve}(T') + 1$. Il est clair que v appartient à un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble, disons S . Alors $S - \{v\}$ ve -domine T' , et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Par conséquent, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Par hypothèse d'induction, $A(T') = S \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Donc on peut voir que $S = A(T') \cup \{v\}$ est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble. \square

Théorème 3.42. *Un arbre T d'ordre $n \geq 2$ admet un ve -dominant minimum unique si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}$, alors par Lemme 3.41, T admet un ve -dominant minimum unique. Pour montrer la nécessité, on procède par induction sur l'ordre n de l'arbre ve -DMU T . Puisqu'il n'existe pas un arbre du $\text{diam}(T) \leq 3$ admet un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble unique, alors soit $n \geq 5$ et $\text{diam}(T) \geq 4$. Il est facile de voir que P_5 est le plus petit arbre admettant un ve -DMU. Soit $n \geq 6$ et supposons que tout arbre non trivial T' d'ordre n' avec $2 \leq n' < n$ admettant un ve -DMU est dans \mathcal{T} . Soit T un arbre d'ordre n ayant un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble unique D .

S'il existe un sommet support dans T disons x adjacent à au moins deux sommets pendants, alors soit T' l'arbre obtenu de T en supprimant l'un des sommets pendants de

x . Il est simple de voir que $\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}(T)$. D'où D est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par hypothèse d'induction $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$, car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 . Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 , alors $T \in \mathcal{T}$. Par conséquent, on peut supposer que chaque sommet support de T est adjacent à exactement un seul sommet pendant.

Enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit u un sommet support à distance maximum de r . Soit v le parent de u , w le parent de v et x le parent de w dans l'arbre enraciné. Notons que $\text{deg}(w) \geq 2$, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Aussi, $u \notin D$ et $v \in D$. Considérons les cas suivants.

Cas 1. v est de degré trois. Alors tout fils de v est ou bien une feuille ou bien un sommet support.

Cas 1.1. v est un sommet support adjacent à une feuille v' . Soit $T' = T - \{v'\}$. Alors il est clair que $\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}(T)$. Puisque D est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble, alors D est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par hypothèse d'induction $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$, car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Cas 1.2. v n'est pas un sommet support. Alors tout fils de v est un sommet support. Supposons que $\text{deg}(v) \geq 4$, et soit $T' = T - T_u$. Comme $v \in D$, D ve -domine T' et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. D'autre part, tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble contient v , et un tel $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble est un ve -dominant de T , d'où $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T')$. Par conséquent $\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}(T)$. Comme D est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble et v appartient à tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble, ceci implique que D est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. D'où, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 et par suite on a $T \in \mathcal{T}$. Maintenant on suppose que $\text{deg}(v) = 3$. Si w est un sommet support adjacent à un sommet pendant w' , alors soit $T' = T - \{w'\}$. Il est simple de voir que $\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}(T)$, et que D est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 , alors $T \in \mathcal{T}$. Si $\text{deg}(w) = 2$, alors soit $T' = T - T_w$. Si $n' = 1$, alors T est isomorphe à H_2 et dans ce cas $T \in \mathcal{T}$, car il est obtenu à partir de $T_1 = P_5$ en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 . On suppose maintenant que $n' \geq 2$. Il est clair que $D - \{v\}$ ve -domine T' , et donc $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Par ailleurs, puisque tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T

en ajoutant le sommet v , $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. D'où, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Comme D est l'unique $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble, implique que $D \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$, car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_4 .

Finallement on suppose que $T_w - T_v$ contient un sommet support à distance un ou deux de w . Alors ou bien $w \in D$ ou un fils de w est dans D . Soit $T' = T - T_v$. Comme $D - \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T' , $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Aussi, tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet v , d'où $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Par conséquent, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Soit D' un $\gamma_{ve}(T' - w)$ -ensemble et supposons que $\gamma_{ve}(T' - w) < \gamma_{ve}(T')$. Alors $D' \cup \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T , et d'où $\gamma_{ve}(T) \leq |D'| + 1 < \gamma_{ve}(T') + 1$, contradiction. Donc w satisfait la condition $\gamma_{ve}(T' - w) \geq \gamma_{ve}(T')$. Ainsi $D \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. D'où, T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_5 et par suite on a $T \in \mathcal{T}$.

Cas 2. v est de degré deux. Soit $z \in N_T[w] - \{v\}$. Si $z \in D$, alors $(D - \{v\}) \cup \{u\}$ est un ve -dominant de T différent de D , contradiction avec l'unicité de D . Alors v est l'unique sommet de $N[w]$ appartenant à D . D'où tout fils de w différent de v est une feuille. Supposons que w est un sommet support adjacent à un sommet pendant w' . Soit $T' = T - \{w'\}$. Il est simple de voir que $\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}(T)$. D'où, D est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T peut être obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 , alors $T \in \mathcal{T}$. Dans ce qui suit, on suppose que $\deg(w) = 2$. Dans ce cas wx une arête privée de v , car sinon $(D - \{v\}) \cup \{u\}$ est un ve -dominant de T différent de D , contradiction. Par conséquent, aucun sommet de $N_T[x]$ appartient à D . Soit $T' = T - T_w$. Si $n' = 1$, alors $T = P_5$ et $T \in \mathcal{T}$. Donc $n' \geq 2$. Il est clair que $D - \{v\}$ ve -domine T' , et on a $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Aussi tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet v , d'où $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Donc, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$. Par conséquent, $D \cap V(T')$ est l'unique $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble. Par hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$, car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_6 . \square

CHAPITRE 4

DOMINATION SOMMET-ARÊTE TOTALE

Dans ce chapitre, on introduit et on étudie la domination sommet-arête totale dans les graphes. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un dominant sommet-arête total (ou simplement, *ve*-dominant total) de G , si S est un ensemble *ve*-dominant et le sous graphe induit par S n'a pas des sommets isolés, i.e, tout sommet de S a un voisin dans S . Le cardinal minimum d'un ensemble *ve*-dominant total de G est appelé le nombre de *ve*-domination totale de G , noté $\gamma_{ve}^t(G)$.

La figure suivante représente un graphe G avec $\gamma_{ve}^t(G) = 5$.

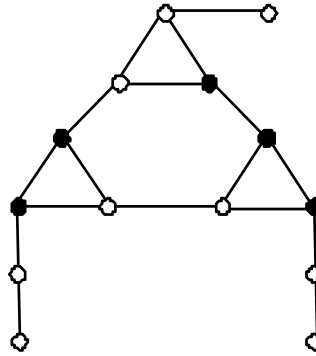


Figure 4.1: Un graphe G , où $\gamma_{ve}^t(G) = 5$.

4.1 La NP-complétude

Notre objectif dans cette sous-section est d'étudier la complexité du problème de décision suivant, associé à la *ve*-domination totale:

ve-DOMINATION TOTAL (ve-Dom Total)

Instance: Graphe $G = (V, E)$, un entier positif $k \leq |V|$.

Question: Est ce que G possède un ensemble ve -dominant total de cardinal au plus k ?

Nous montrons que ce problème est NP-complet en réduisant le problème NP-complet bien connu, 3-Couverture Exact (3CX) à ve -Dom Total.

3-COUVERTURE EXACT (3CX)

Instance: Un ensemble fini X avec $|X| = 3q$ et une collection C de sous ensembles de X à 3-éléments.

Question: Y a-t-il une sous-collection C' de C telle que chaque élément de X apparaît exactement dans un seul élément de C' ?

Théorème 4.1 ([45]). *Le problème ve -Dom Total est NP-complet pour les graphes bipartis.*

Preuve. ve -Dom Total est dans \mathcal{NP} , car on peut vérifier en temps polynômial qu'un ensemble de cardinal au plus k est un ensemble ve -dominant total. Voyons maintenant comment transformer toute instance de 3CX en une instance G du problème de ve -Dom Total de sorte que l'un a une solution si et seulement si l'autre possède une solution. Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ une instance arbitraire de 3CX.

Pour chaque $x_i \in X$, nous créons une chaîne $P_2 = x_i - y_i$. Soit $W = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ et F l'ensemble de toutes les arêtes $x_i y_i$. Pour chaque $C_j \in C$ nous construisons une chaîne d'ordre 5, $P_5^j : u_j - v_j - w_j - z_j - c_j$. Soit $Y = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$. Maintenant, pour obtenir un graphe G , on ajoute les arêtes $c_j x_i$ si $x_i \in C_j$. Il est clair que G est un graphe biparti. Soit H le sous-graphe de G induit par tous les $V(P_5^j)$. Posons $k = 2t + q$ (par exemple, l'ensemble de 12 sommets noirs de la Figure 4.2). Observons que tout ensemble ve -dominant total D de G qui contient au moins deux sommets de chaque chaîne P_5^j et d'où $|D \cap V(H)| \geq 2t$.

Supposons que l'instance X, C de 3CX possède une solution C' . Nous construisons un ensemble ve -dominant total D de G de poids k comme suit. Pour tout P_5^j , mettre w_j et z_j dans D . En plus, mettre c_j dans D pour tout $C_j \in C'$. Notons que puisque C' existe, son cardinal est précisément q , et d'où le nombre des c_j est q , ayant des voisins disjoints dans $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$. Comme C' est une solution pour 3CX, toute arête incidente à un sommet de W est ve -dominé par un sommet c_i . Par ailleurs, tout sommet de D a un voisin dans D

et toutes les arêtes de H sont ve -dominées par D . D'où, D est un ensemble ve -dominant total de G de cardinalité $2t + q = k$.

Inversement, supposons que G a un ensemble ve -dominant total D de cardinal k . On peut supposer, sans perte de généralité, que D ne contient aucun sommet y_i , sinon on peut le remplacer par x_i . Maintenant puisque $|D \cap V(H)| \geq 2t$, il s'ensuit que $|D \cap W| \leq q$. D'autre part, puisque $|F| = 3q$ et tout sommet de $W \cap D$ peut ve -dominer seulement une arête de F , on conclut que $D \cap Y \neq \emptyset$. Soit $r = |D \cap Y|$. Il est clair que $r \leq q$. Puisque chaque c_j a exactement trois voisins dans W , on déduit que $D \cap Y$ ve -domine au plus $3r$ arêtes de F . D'où $|D \cap W| \geq 3q - 3r$. Maintenant, en utilisant le fait que $|D| \leq k = 2t + q$ et $|D| = |D \cap V(H)| + |D \cap W| \geq 2t + r + 3q - 3r$, nous arrivons à $r \geq q$. Donc $r = q$ et d'où $|D \cap W| = 0$. Par conséquent, $C' = \{C_j : c_j \in D\}$ est une 3-couverture exacte pour C . \square

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

$$C_1 = \{x_1, x_3, x_4\}$$

$$C_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$$

$$C_3 = \{x_2, x_4, x_5\}$$

$$C_4 = \{x_2, x_4, x_6\}$$

$$C_5 = \{x_1, x_3, x_6\}.$$

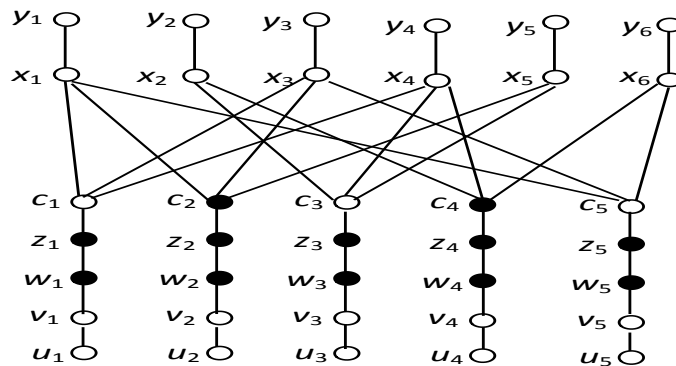


Figure 4.2: NP-complétude pour graphe biparti.

4.2 Bornes sur $\gamma_{ve}^t(G)$

Nous commençons par donner les valeurs exactes de $\gamma_{ve}^t(G)$ pour les chaînes P_n et les cycles C_n .

Proposition 4.2. *Pour tout cycle C_n ,*

$$\gamma_{ve}^t(C_n) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. Soient C_n un cycle tel que $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et D un $\gamma_{ve}^t(C_n)$ -ensemble de cardinal q . Chaque deux sommets adjacents dans D peuvent ve -dominer au plus 5 arêtes de C_n . Alors $5\frac{q}{2} \geq m$, et d'où $q \geq \frac{2m}{5}$. Ceci implique que $\gamma_{ve}^t(C_n) \geq 2\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Notons que $m = n$. On suppose d'abord que $m \equiv 1 \pmod{5}$. Alors D doit contenir au moins $2\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + 1$ sommets, et d'où $\gamma_{ve}^t(C_n) \geq 2\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + 1$. D'autre part, $\{v_{5i-2}, v_{5i-1}, v_{n-1} \mid i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{5} \rfloor - 1\}$ est un ensemble ve -dominant total de C_n de cardinal $2\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + 1$. D'où $\gamma_{ve}^t(C_n) \leq 2\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + 1$, et donc $\gamma_{ve}^t(C_n) = 2\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + 1 = 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1$.

Si $m \equiv 4 \pmod{5}$, alors $\{v_{5i-2}, v_{5i-1} \mid i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{5} \rfloor\}$ est un ensemble ve -dominant total de C_n de cardinal $2\lceil \frac{m}{5} \rceil$ et d'où $\gamma_{ve}^t(C_n) \leq 2\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Par conséquent, $\gamma_{ve}^t(C_n) = 2\lceil \frac{m}{5} \rceil$.

Dans les autres cas, il est possible de voir que $\{v_{5i-2}, v_{5i-1}, v_{n-1}, v_n \mid i = 1, \dots, \lfloor \frac{m}{5} \rfloor - 1\}$ est un ensemble ve -dominant total de C_n de cardinal $2\lceil \frac{m}{5} \rceil$. D'où $\gamma_{ve}^t(C_n) \leq 2\lceil \frac{m}{5} \rceil$, et donc, $\gamma_{ve}^t(C_n) = 2\lceil \frac{m}{5} \rceil$. \square

Proposition 4.3. *Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 3$,*

$$\gamma_{ve}^t(P_n) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5} \\ 2\lceil \frac{n-1}{5} \rceil & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$, et soit D un $\gamma_{ve}^t(P_n)$ -ensemble de cardinal q . Supposons que les sommets de P_n sont notés par v_1, v_2, \dots, v_n . Chaque deux sommets adjacents dans D peuvent ve -dominer au plus 5 arêtes. Notons que $m = n - 1$.

En utilisant des argument similaires à ceux utilisés pour la preuve précédente et en remplaçant m par $n - 1$, on obtient le résultat. \square

L'observation suivante est simple à établir.

Observation 4.4 ([45]). *Pour tout graphe cnt G , $\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_{ve}^t(G) \leq \gamma_t(G)$.*

Il est à noter que la différence entre deux de ces paramètres peut être arbitrairement grande. En effet, considérons le graphe H_k obtenu à partir de $k \geq 2$ (avec k pair) chaînes P_5 en ajoutant $k-1$ nouveaux sommets, chacun attaché à deux centres des chaînes P_5 de sorte que ces nouveaux sommets avec tous les centres des chaînes induisent une chaîne P_{2k-1} (voir la Figure 4.2 pour une illustration du graphe H_4). Nous observons que $\gamma_{ve}(H_k) = k$, $\gamma_{ve}^t(H_k) = 2k - 1$ et $\gamma_t(H_k) = 3k$.

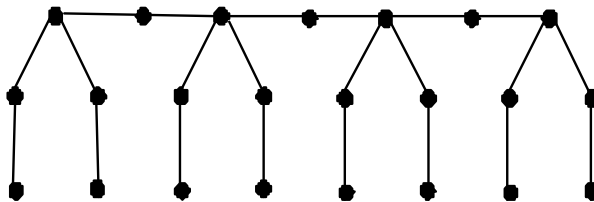


Figure 4.2: Graphe H_4 .

Dans ce qui suit, nous donnons une autre borne supérieure pour le nombre de ve -domination totale en termes du nombre de ve -irrédondance.

Proposition 4.5. *Si G est un graphe cnt, alors $\gamma_{ve}^t(G) \leq 2ir_{ve}(G)$.*

Preuve. Soit S un $ir_{ve}(G)$ -ensemble. On sait que chaque sommet de S a une arête privée. Soit $S' \subseteq N(S)$ un sous-ensemble qui contient pour tout sommet $x \in S$ un seul sommet incident à une arête privée de x . Alors $|S| = |S'|$. Soit $S'' = S \cup S'$ et montrons que S'' est un ensemble ve -dominant total de G . Il est clair que $G[S'']$ est sans sommets isolés. Supposons que S'' n'est pas un ve -dominant de G . Alors il existe une arête uv non ve -dominée par S'' et d'où $u, v \notin N[S'']$. Il s'ensuit que $S \cup \{u\}$ est un ensemble ve -irrédondant, ce qui contredit la maximalité de S . D'où S'' est un ve -dominant total de G . Par conséquent, $\gamma_{ve}^t(G) \leq 2ir_{ve}(G)$. \square

Corollaire 4.6 ([45]). *Si G est un graphe connexe non trivial, alors $\gamma_{ve}^t(G) \leq 2\gamma_{ve}(G)$.*

De l'Observation 4.4 et le Corollaire 4.6, on peut s'interroger si les deux bornes supérieures $\gamma_t(G)$ et $2\gamma_{ve}(G)$ sont comparables ou non.

Nous fournissons deux exemples de graphes montrant que la différence $\gamma_t(G) - 2\gamma_{ve}(G)$ aussi bien que $2\gamma_{ve}(G) - \gamma_t(G)$ peut être arbitrairement large. Soit F_k le graphe connexe obtenu à partir de k chaînes P_5 en ajoutant $k - 1$ arêtes entre les centres des chaînes. Alors $\gamma_t(F_k) - 2\gamma_{ve}(F_k) = 3k - 2k = k$. D'autre part, considérons k cycles C_5 et soit x_1, x_2, \dots, x_k , k sommets tels que chaque x_i appartient à un cycle C_5 différent. Alors on définit le graphe G_k obtenu à partir de ces k cycles C_5 en ajoutant $k - 1$ arêtes, chacun lié deux sommets consécutifs parmi x_1, x_2, \dots, x_k . Il est clair que, $2\gamma_{ve}(G_k) - \gamma_t(G_k) = 2(2k) - 3k = k$. Il est à noter que nous avons montré que $2\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_t(G)$, pour tout graphe biparti G (voir le Théorème 3.12 de la Page 41).

Nous tournons maintenant notre attention à la classe des arbres T pour lesquels nous fournirons une borne supérieure pour le nombre de ve -domination totale en termes de leur ordre. Par ailleurs, nous caractériserons tous les arbres atteignant cette borne supérieure. Nous devons d'abord rappeler la définition suivante.

La P_3 -couronne d'un graphe G , notée par $G \circ P_3$, est le graphe d'ordre $4|V(G)|$ obtenu à partir de G en attachant une chaîne P_3 distincte à chaque sommet $v \in V(G)$ en ajoutant une arête entre v et une feuille de sa chaîne correspondante P_3 .

Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 4$ et $\text{diam}(T) \geq 3$ (en d'autres termes, T n'est pas une étoile), soit T^* l'arbre obtenu à partir de T en supprimant pour tout sommet support de T toutes ses feuilles sauf une. Il est clair que, T^* est d'ordre $n^* = n - \ell + s > 3$, et $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T^*)$.

Observation 4.7. *Pour tout graphe connexe G de diamètre au moins trois, il existe un $\gamma_{ve}^t(G)$ -ensemble (resp., $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble) qui ne contient aucune feuille de G .*

Théorème 4.8 ([45]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$ et $\text{diam}(T) \geq 3$ avec ℓ feuilles et s sommets supports, alors $\gamma_{ve}^t(T) \leq (n - \ell + s)/2$ avec égalité si et seulement si $T^* = H \circ P_3$.*

Preuve. Soit $T^* = H \circ P_3$. Il est clair que tous les sommets de H et ses voisins dans T^* forment un $\gamma_{ve}^t(T^*)$ -ensemble de cardinal $(n - \ell + s)/2$. L'égalité $\gamma_{ve}^t(T) = (n - \ell + s)/2$ résulte du fait que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T^*)$.

Pour prouver la nécessité, on utilise une induction sur l'ordre n de T . Si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une étoile double avec $\gamma_{ve}^t(T) = 2 = (n - \ell + s)/2$. Dans ce cas $T^* = P_4$ qui peut être considéré comme $P_1 \circ P_3$.

Soit $n \geq 5$, et supposons que tout arbre T' de diamètre au moins trois et d'ordre n' , avec $4 \leq n' < n$, ayant ℓ' feuilles et s' sommets supports satisfait $\gamma_{ve}^t(T') \leq (n' - \ell' + s')/2$ avec égalité seulement si $T'^* = H' \circ P_3$ pour un arbre H' . Soit T un arbre d'ordre n et de diamètre au moins quatre avec ℓ feuilles et s sommets supports.

Si un sommet support, disons x , de T est adjacent à deux feuilles ou plus, alors soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant une feuille adjacente à x . Alors $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_{ve}^t(T)$, $n' = n - 1$, $\ell' = \ell - 1$ et $s' = s$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , nous obtenons $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T') \leq (n' - \ell' + s')/2 = (n - \ell + s)/2$. Par ailleurs si $\gamma_{ve}^t(T) = (n - \ell + s)/2$, alors $\gamma_{ve}^t(T') = (n' - \ell' + s')/2$, et d'où $T'^* = H' \circ P_3$ pour un arbre H' . Puisque T^* est isomorphe à T'^* , on conclut que $T^* = H' \circ P_3$. Dans la suite on peut supposer que tout sommet support de T est adjacent à exactement une feuille, c-à-d, $\ell = s$.

Nous maintenant enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum $\text{diam}(T) \geq 4$. Notons que r est une feuille. Soit u un sommet support à distance maximum de r . Soient v le parent de u , w le parent de v et x le parent de w dans l'arbre enraciné. Notons que w est de degré au moins deux. Notons par T_x le sous arbre induit par un sommet x et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Considérons les deux cas suivants.

Cas 1. $\deg_T(v) \geq 3$. Donc tout fils de v est ou bien une feuille ou bien un sommet support de degré 2.

Supposons d'abord que v a un fils $b \neq u$ qui est un sommet support. Soit $T' = T - T_b$. Alors $\text{diam}(T') \geq 4$, $n' = n - 2 \geq 4$ et $\ell' = s'$. Par l'Observation 4.7, il existe un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble qui contient v , et il est clair qu'un tel $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble est un ensemble ve -dominant total de T . D'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. Par induction sur T' , on a

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') \leq n'/2 < n/2.$$

Supposons maintenant que v est un sommet support adjacent à une feuille v' . Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant le sommet v' . Il est clair que, $\text{diam}(T') \geq 3$, $n' = n - 1 \geq 4$ et $\ell' = s'$. Par l'Observation 4.7, il existe un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble contenant v et un tel $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble reste un ensemble ve -dominant total de T . Donc $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$, et par induction sur T' , on a

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') \leq n'/2 < n/2.$$

Cas 2. $\deg_T(v) = 2$. On distingue les deux sous cas suivants.

Sous cas 2.1. $\deg_T(w) \geq 3$. Si $r = x$, alors $\{v, w\}$ est un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble et il est clair que $\gamma_{ve}^t(T) = 2 < n/2$. D'où, on peut supposer que $x \neq r$.

Supposons que w est un sommet support et soit w' l'unique feuille voisin de w . Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant w' . Alors $\text{diam}(T') \geq 4$, $n' = n - 1 \geq 4$ et $\ell' = s'$. Il est clair aussi que $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$ et par induction sur T' , on a $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') \leq n'/2 < n/2$. Dorénavant, nous supposons que w n'est pas un sommet support de T .

Supposons que le sous arbre $T_w - T_v$ contient un sommet support qui est à distance deux de w . Soit $T' = T - T_v$. Alors $\text{diam}(T') \geq 4$, $n' = n - 3 \geq 4$ et $\ell' = s'$. Par l'Observation 4.7, soit S un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble contenant w . Alors $S \cup \{v\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 1$. Par induction sur T' , on obtient

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 1 \leq n'/2 + 1 = (n - 1)/2 < n/2.$$

Ainsi on peut supposer que tout sommet support de T_w autre que u est à distance un de w , c-à-d, tout fils de w différent de v est un sommet support. Soit $z \neq v$ un fils de w , et soit $T' = T - T_z$. Alors $\text{diam}(T') \geq 4$, $n' = n - 2 \geq 4$ et $\ell' = s'$. Par ailleurs, T' a un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble contenant v et w , et un tel ensemble est un ve -dominant total de T . D'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , on obtient

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') \leq n'/2 = (n - 2)/2 < n/2.$$

Sous cas 2.2. $\deg_T(w) = 2$. Si $r = x$, alors $T = P_5$ et dans ce cas $\gamma_{ve}^t(T) = 2 < (n - \ell + s)/2$. D'où $x \neq r$. Soit y le parent de x dans l'arbre enraciné.

Supposons d'abord que $\deg_T(x) = 2$. Soit $T' = T - T_x$. Si $n' \in \{1, 2\}$, alors $T \in \{P_6, P_7\}$ et donc pour les deux situations, $\gamma_{ve}^t(T) < (n - \ell + s)/2$. Si $n' = 3$, alors $T = P_8$, car aucun sommet support n'est adjacent à plus d'une feuille. Dans ce cas, $\gamma_{ve}^t(P_8) = 4 = n/2$, et d'où $T = P_8$ peut être considérée comme $P_2 \circ P_3$. On suppose maintenant que $n' \geq 4$. Notons que $\text{diam}(T') \geq 4$. Si $\deg_T(y) = 2$, alors $n' = n - 5$, $\ell' = \ell$ et $s' \leq s$. Puisque tout $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant total de T en ajoutant v et w , on a $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. En utilisant l'induction sur T' , on trouve que

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \leq (n' - \ell' + s')/2 + 2 \leq (n - \ell + s - 1)/2 < n/2.$$

Maintenant, supposons que $\deg_T(y) \geq 3$. Alors $n' = n - 5$ et $\ell' = s'$. Si S' est un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble, alors $S' \cup \{v, w\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Par induction sur T' , nous obtenons

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \leq n'/2 + 2 = (n - 1)/2 < n/2.$$

Enfin, on suppose que $\deg_T(x) \geq 3$. Soit $T' = T - T_w$. Comme nous avons supposé que tout sommet de T est adjacent exactement à une seule feuille, $n' = n - 4 \geq 4$. D'où $\text{diam}(T') \geq 3$ et $\ell' = s'$. Aussi, $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$ car tout $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant total de T en ajoutant v et w . Maintenant en utilisant l'induction sur T' , on a

$$\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \leq n'/2 + 2 = n/2.$$

Par ailleurs, si $\gamma_{ve}^t(T) = n/2$, alors on a l'égalité le long de cette chaîne d'inégalités. En particulier, $\gamma_{ve}^t(T') = n'/2$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , on obtient que $T' = H' \circ P_3$ pour un arbre H' . Nous allons montrer que $x \in V(H')$. Supposons le contraire que $x \notin V(H')$. Pour tout sommet $a_i \in V(H')$, soit $a_i^1 - a_i^2 - a_i^3$ la chaîne P_3 attachée à a_i par l'arête $a_i a_i^1$. Comme $x \notin V(H')$, le sommet x appartient à une chaîne $P_3 : a_j^1 - a_j^2 - a_j^3$. De plus, comme x n'est pas une feuille, $x \in \{a_j^1, a_j^2\}$. Rappelons que $V(H')$ avec tous les a_i^1 's forment un ensemble ve -dominant total minimum de T' . Notons un tel $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble par D . Si $|V(H')| = 1$, alors T' est une chaîne P_4 , et d'où $\{v, w, x\}$ est un ensemble ve -dominant total de T de taille inférieure que $n/2 = 4$, contradiction. D'où on peut supposer

que $|V(H')| \geq 2$. Dans ce cas, si $x = a_j^1$, alors soit $D_1 = (D - \{a_j\}) \cup \{v, w\}$ et si $x = a_j^2$, alors soit $D_2 = (D - \{a_j^1\}) \cup \{v, w\}$. Quelle que soit la situation qui se produira, D_1 ou D_2 est un ensemble ve -dominant total de T de taille inférieure à $n/2$, contradiction. On conclut que $x \in V(H')$ et c'est clair dans ce cas que $T = H \circ P_3$, où H est un arbre induit par $V(H') \cup \{x\}$. \square

4.3 Graphes cnt G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$

Nous avons vu que le nombre de ve -domination totale est majoré par deux fois le nombre de ve -domination. Dans ce qui suit, on donne une condition nécessaire pour les graphes cnt G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$. On dit qu'une arête d'un graphe G est pendante, si elle est incidente à une feuille.

Voici d'abord un résultat qui sera utile pour la suite.

Proposition 4.9 ([10]). *Tout sommet d'un ensemble ve -dominant minimal S d'un graphe cnt G a un voisin privé dans $V - S$.*

Théorème 4.10 ([45]). *Soit G un graphe cnt tel que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$. Alors pour tout $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble D on a:*

- i) D est un ensemble packing.
- ii) Si $|D| \geq 2$, alors $|\text{pn}(v, D)| \geq 2$ pour tout $v \in D$.

Preuve. Soit G un graphe cnt tel que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$. Pour prouver (i), soit D un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble. Rappelons que par la Proposition 4.9, tout sommet de D a un voisin privé dans $V - D$. Soit D' l'ensemble des voisins privés dans $V - D$ choisi de telle sorte que chaque sommet de D a exactement un voisin privé dans D' . Supposons maintenant que D contient deux sommets adjacents x et y . Soit $x', y' \in D'$ les voisins privés de x et y , respectivement. Il est clair que $D \cup D' - \{x', y'\}$ est un ensemble ve -dominant total de G de cardinal $2\gamma_{ve}(G) - 2$, contradiction. D'où D est indépendant. Maintenant si D est un packing, alors nous avons fini. Ainsi, supposons que deux sommets de D , disons x et y , ont un voisin commun dans $V - D$, disons z . Soit $x', y' \in D'$ les voisins privés de x et

y , respectivement. Alors $\{z\} \cup D \cup D' - \{x', y'\}$ est un ensemble ve -dominant total de G de cardinal $2\gamma_{ve}(G) - 1$, contradiction. La preuve de (i) est complète.

(ii)- Supposons que $|D| \geq 2$. Par la Proposition 4.9, $|\text{pn}(v, D)| \geq 1$ pour tout $v \in D$. Supposons que $|\text{pn}(v, D)| = 1$ pour un sommet v de D , et soit $\text{pn}(v, D) = \{x\}$. Observons que toute arête de G ve -dominée seulement par v est aussi ve -dominée par x . Comme G est connexe et D est un ensemble packing d'ordre au moins deux, soit P la plus courte chaîne de x à un sommet de $D - \{v\}$, disons u . Alors T a une longueur de deux ou trois, car autrement une arête dans P n'est pas ve -dominée par D . Si P a une longueur de deux, alors c'est clair que $\{x\} \cup D - \{v\}$ est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble qui n'est pas un ensemble packing, ceci contredit (i). D'où P a une longueur trois, disons $P : x-x'-x''-u$. Alors, une nouvelle fois $\{x'\} \cup D - \{v\}$ est un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble qui n'est pas un ensemble packing, contradiction. Donc on obtient (ii). \square

Corollaire 4.11. *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq n/3$.*

Preuve. Soit D un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble. Si $|D| = 1$, alors $\gamma_{ve}(G) \leq n/3$ car $n \geq 3$. Si $|D| \geq 2$, alors d'après le Théorème 4.10, $|\text{pn}(v, D)| \geq 2$ pour tout $v \in D$. D'où $|V - D| \geq 2|D|$, et donc $\gamma_{ve}(G) \leq n/3$. \square

Corollaire 4.12. *Si G est un graphe cnt tel que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$, alors $\gamma_{ve}(G) = i_{ve}(G)$.*

Preuve. Supposons que G est un graphe cnt tel que $\gamma_{ve}^t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$ et soit D un $\gamma_{ve}(G)$ -ensemble. Par (i), D est indépendant. D'où $\gamma_{ve}(G) \leq i_{ve}(G) \leq |D| = \gamma_{ve}(G)$, et l'égalité est obtenue. \square

Notons que la réciproque du Corollaire 4.12 n'est pas vraie et ceci peut être vu en prenant le cycle C_5 , où $\gamma_{ve}(C_5) = i_{ve}(C_5) = \gamma_{ve}^t(C_5) = 2$.

Notre objectif dans ce qui suit est de caractériser tous les arbres T tels que $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. A cet effet, nous définissons la famille \mathcal{T} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) d'arbres tel que $T_1 = K_{1,t}$ ($t \geq 1$),

$T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit H l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ de centre x et une chaîne $P_2 = u-v$ en ajoutant l'arête xu .

- **Opération \mathcal{O}_1** : Supposons que y est un sommet de T_i appartenant à un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble. Alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant p nouveaux sommets et q étoiles avec $p + q \geq 1$ et ajoutant des arêtes liant y aux nouveaux sommets et aux centres des étoiles.
- **Opération \mathcal{O}_2** : Supposons que y est un sommet de T_i ayant un voisin t appartenant à un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble. Alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant p ($p \geq 1$) nouveaux sommets, que l'on attache à y .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Supposons que y est un sommet de T_i tel que y ou son voisin t appartient à un $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble. Alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i et une copie de H et un nouveau sommet w en ajoutant les arêtes vw et wy .
- **Opération \mathcal{O}_4** : Supposons que y est un sommet de T_i de degré au moins deux n'appartenant à aucun $\gamma_{ve}(T_i)$ -ensemble et satisfaisant $\gamma_{ve}^t(T_i - y) \geq \gamma_{ve}^t(T_i)$. Alors T_{i+1} est obtenu à partir de T_i et une copie de H en ajoutant l'arête yv .

Lemme 4.13 ([45]). *Si $T \in \mathcal{T}$, alors $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.*

Preuve. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire T . Il est clair que la propriété est vraie pour $T_1 = K_{1,t}$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de \mathcal{T} construits avec $k - 1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, et $T' = T_{k-1}$. Par induction sur T' , $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$. Examinons les cas suivants.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_1 , alors il est clair que $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T')$ (car y appartient à un $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble). D'autre part, comme T a un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble

qui ne contient aucun sommet ajouté pour l'opération \mathcal{O}_1 , $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$. Ceci implique que $\gamma_{ve}^t(T) \leq 2\gamma_{ve}(T) \leq 2\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.

Supposons que T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_2 . Puisque tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble contenant t ve -domine T , on obtient $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T')$. Aussi, par l'Observation 4.7, puisque T a un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille adjacente à y , un tel $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble total ve -domine T' , et d'où $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$. Donc $\gamma_{ve}^t(T) \leq 2\gamma_{ve}(T) \leq 2\gamma_{ve}(T') = \gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_3 , alors tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble contenant y ou t peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet u . D'où $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Maintenant soit S un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille (par l'Observation 4.7). Sans perte de généralité, supposons que $u, v \in S$. Si $w \in S$, alors on peut le remplacer dans D par un sommet de T' . Ainsi, on peut supposer que $w \notin S$. Alors $S - \{u, v\}$ est un ensemble ve -dominant total de T' , ce qui implique que $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2$. Donc, $\gamma_{ve}^t(T) \leq 2\gamma_{ve}(T) \leq 2\gamma_{ve}(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T') + 2 \leq \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.

Finalement on suppose que T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_4 . Comme vu précédemment, tout $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant de T en ajoutant le sommet u , et donc $\gamma_{ve}(T) \leq \gamma_{ve}(T') + 1$. Aussi, tout $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant total de T en ajoutant les sommets u et v , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Maintenant, supposons que $\gamma_{ve}^t(T) < \gamma_{ve}^t(T') + 2$, et soit S un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille. Sans perte de généralité, $u, v \in S$. Si $S - \{u, v\}$ total ve -domine T' , alors $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2 < \gamma_{ve}^t(T')$, ce qui est impossible. Donc $S - \{u, v\} = S'$ n'est pas un ve -dominant total de T' . Comme toutes les arêtes de T' non incidentes à y sont total ve -dominées par S' , S' est un ensemble ve -dominant total de $T' - y$. Il s'ensuit que $\gamma_{ve}^t(T' - y) \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2 < \gamma_{ve}^t(T') + 2 - 2$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T' - y) < \gamma_{ve}^t(T')$, ceci contredit le fait que y satisfait $\gamma_{ve}^t(T' - y) \geq \gamma_{ve}^t(T')$. On conclut que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Donc, $\gamma_{ve}^t(T) \leq 2\gamma_{ve}(T) \leq 2\gamma_{ve}(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. \square

Théorème 4.14 ([45]). *Soit T un arbre non trivial. Alors $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}$, alors par le Lemme 4.13, $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. Pour montrer la nécessité, on utilise une induction sur l'ordre n de T . Il est clair que, si $n \in \{2, 3\}$, alors T est une étoile et $T \in \mathcal{T}$. Soit $n \geq 4$, et supposons que tout arbre T' d'ordre n' avec $2 \leq n' < n$ satisfaisant $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$ est dans \mathcal{T} .

Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$. Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile appartenant à \mathcal{T} . Si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une étoile double qui appartient à \mathcal{T} car il est obtenu à partir de T_1 en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 . D'où on peut supposer que T est de diamètre au moins quatre.

Enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$, et soit u un sommet support à distance maximum de r . Soit v le parent de u , w le parent de v et x le parent de w dans l'arbre enraciné. Notons que w est de degré au moins deux, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit D un $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille et ayant le moins de sommets supports possible. Alors $u \notin D$ et $v \in D$. Aussi par le Théorème 4.10, v est le seul sommet de $N_T[w]$ appartenant à D . Rappelons que T_b est le sous arbre induit par un sommet b et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Nous considérons les deux cas suivants.

Cas 1. v est de degré au moins trois. Alors tout fils de v est ou bien une feuille ou un sommet support. Soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant tous les descendants de v sauf $V(T_u)$. Comme $v \in D$, D ve -domine T' et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. D'autre part, par l'Observation 4.7, il existe un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble qui contient v , et un tel $\gamma_{ve}^t(T')$ -set reste un ensemble ve -dominant total pour T . D'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. Maintenant, en combinant les inégalités précédentes et en utilisant le fait que $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$, nous obtenons $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T) \geq 2\gamma_{ve}(T') \geq \gamma_{ve}^t(T') \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Par conséquent, $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$ et D est un $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble contenant v . Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$ parce qu'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Cas 2. v est de degré deux. Supposons d'abord que le sous arbre $T_w - T_v$ contient un sommet support, disons w' , qui est à distance un ou deux de w . Alors par l'Observation 4.7, D contient ou bien w ou un fils de w pour ve -dominer les arêtes pendantes incidentes à w' . Mais cela contredit le fait que v est le seul sommet de $N_T[w]$ appartenant à D . On en déduit que w est ou bien un sommet support ou w est de degré deux. Considérons

chaque situation séparément.

Cas 2.1. w est un sommet support. Soit L_w l'ensemble des feuilles adjacentes à w , et soit $T' = T - L_w$. Il est clair que, comme $v \in D$, D est resté un ensemble ve -dominant de T' et d'où $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. Par l'Observation 4.7, soit S un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble qui contient v . Puisque S total ve -domine T , on obtient que $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. D'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T) \geq 2\gamma_{ve}(T') \geq \gamma_{ve}^t(T') \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Donc $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$. Maintenant par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 , on obtient que $T \in \mathcal{T}$.

Cas 2.2. w est de degré deux. Notons que T_w est isomorphe à H . Puisque D est un packing (par le Théorème 4.10) et $v \in D$, on en déduit que $x \notin D$. Si $r = x$, alors T est obtenu à partir d'une chaîne $(T' : v-w-x)$ en ajoutant une étoile de centre u et l'arête uv . D'où l'opération \mathcal{O}_1 est réalisée et ainsi $T \in \mathcal{T}$. Dans ce qui suit, on suppose que $x \neq r$. Soit y le parent de x dans l'arbre enraciné.

Supposons d'abord que x est un sommet support, et soit $T' = T - L_x$. Comme $v \in D$ et aucun sommet de $N_T[w] - \{v\}$ n'appartient à D , toutes les arêtes incidentes aux sommets de L_x sont ve -dominées par un sommet, disons x' , de $D \cap (N(x) - (L_x \cup \{w\}))$. Maintenant, il est clair que D est un ensemble ve -dominant de T' et $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T)$. Aussi, par l'Observation 4.7, il existe un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble S qui contient v et w . Un tel ensemble S est aussi un ensemble ve -dominant total de T , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. Donc on a $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T) \geq 2\gamma_{ve}(T') \geq \gamma_{ve}^t(T') \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Ceci implique que $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$, et par hypothèse d'induction, on a $T' \in \mathcal{T}$. Comme x est un sommet ayant x' comme un voisin appartenant à un $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble (par exemple D), nous obtenons que $T \in \mathcal{T}$ parce qu'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 .

Supposons maintenant que $\deg_T(x) = 2$. Notons que comme D est un packing et $v \in D$, l'arête xy est ve -dominée par un sommet de $N[y] - \{x\}$. Soit $T' = T - T_x$. Si T' est trivial, alors c'est clair que, $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}(T) = 2$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \neq 2\gamma_{ve}(T)$, contradiction. D'où T' est non trivial. Comme $D - \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T' , $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Aussi, si S' est un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble, alors $S' \cup \{v, w\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Il s'ensuit que $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T) \geq 2\gamma_{ve}(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Donc $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$ et par

induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Notons que $D - \{v\}$ est un $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble qui contient ou bien y ou l'un de ses voisins dans T' . Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 , ce qui implique que $T \in \mathcal{T}$.

Enfin, supposons que $\deg_T(x) \geq 3$ et x n'est pas un sommet support. Soit $T' = T - T_w$. Comme $D - \{v\}$ est un ensemble ve -dominant de T' , $\gamma_{ve}(T') \leq \gamma_{ve}(T) - 1$. Aussi, on peut facilement voir que $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. D'où $\gamma_{ve}^t(T) = 2\gamma_{ve}(T) \geq 2\gamma_{ve}(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Ainsi, nous devons avoir l'égalité le long de la chaîne d'inégalités ci-dessus, ce qui implique que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T') + 2$, $\gamma_{ve}(T) = \gamma_{ve}(T') + 1$ et $\gamma_{ve}^t(T') = 2\gamma_{ve}(T')$. Par induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{T}$. Rappelons que comme tout $\gamma_{ve}(T)$ -ensemble est un packing de T , x n'appartient à aucun $\gamma_{ve}(T')$ -ensemble D' (sinon $D' \cup \{v\}$ ve -domine T et n'est pas un packing). Par ailleurs, soit D'' un $\gamma_{ve}^t(T' - x)$ -ensemble et supposons que $\gamma_{ve}^t(T' - x) < \gamma_{ve}^t(T')$. Alors $D'' \cup \{v, w\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , ceci implique que $\gamma_{ve}^t(T) \leq |D''| + 2 < \gamma_{ve}^t(T') + 2$, contradiction. Donc, x est un sommet satisfaisant en outre la condition $\gamma_{ve}^t(T' - x) \geq \gamma_{ve}^t(T')$. Maintenant puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_4 , on en déduit que $T \in \mathcal{T}$. \square

4.4 Graphes cnt G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = \gamma_t(G)$

Rappelons d'abord le résultat suivant établi dans le Chapitre 3.

Théorème 4.15 ([10]). *Pour tout graphe biparti connexe d'ordre au moins deux G , $2\gamma_{ve}(G) \leq \gamma_t(G)$.*

Théorème 4.16. *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$ tel que $\gamma_{ve}^t(G) = \gamma_t(G)$, alors $\gamma_t(G) = 2\gamma_{ve}(G)$.*

Preuve. Puisque on a $2\gamma_{ve}(G) \geq \gamma_{ve}^t(G) = \gamma_t(G)$, alors l'égalité est ainsi obtenue par le Théorème 4.15. \square

Corollaire 4.17. *Si T est un arbre non trivial tel que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$, alors $\gamma_t(T) = 2\gamma_{ve}(T)$.*

La réciproque n'est pas vraie. Il suffit de considérer la chaîne P_6 , où $\gamma_t(P_6) = 2\gamma_{ve}(P_6) = 4$ mais $\gamma_{ve}^t(P_6) = 2 < \gamma_t(P_6)$.

Notre objectif dans ce qui suit est de caractériser tous les arbres T tels que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. On commence par donner l'observation suivante.

Observation 4.18. *Si T est un arbre de diamètre au moins trois, alors il existe un $\gamma_t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille.*

Nous définissons la famille \mathcal{F} de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) d'arbres, où $T_1 = K_{1,t}$ ($t \geq 1$), $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit H_1 l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ de centre x et une chaîne $P_3 = u-v-w$ en ajoutant l'arête xu . Soit H_2 l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ de centre x et une chaîne $P_2 = u-v$ en ajoutant l'arête xu .

- **Opération \mathcal{O}_1** : Attacher p nouveaux sommets à un sommet y appartenant à un $\gamma_t(T_i)$ -ensemble.
- **Opération \mathcal{O}_2** : Attacher une copie de H_1 en joignant w à un sommet y appartenant à un $\gamma_t(T_i)$ -ensemble.
- **Opération \mathcal{O}_3** : Attacher une copie de H_2 en joignant v à un sommet y de T_i de degré au moins deux tel que y n'appartient à aucun $\gamma_t(T_i)$ -ensemble et satisfait $\gamma_{ve}^t(T_i - y) \geq \gamma_{ve}^t(T_i)$.

Lemme 4.19. *Si $T \in \mathcal{F}$, alors $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$.*

Preuve. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire T . Il est clair que, la propriété est vraie pour $T_1 = K_{1,t}$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de \mathcal{F} construits avec $k-1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, et $T' = T_{k-1}$. Par induction sur T' , $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_t(T')$. Nous examinons les cas suivants.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_1 , alors il est clair que $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T')$ (car y appartient à un $\gamma_t(T')$ -ensemble). D'autre part, comme T a un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble

qui ne contient aucun sommet ajouté par l'opération \mathcal{O}_1 , $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$. Ceci entraîne que $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') = \gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_2 , alors tout $\gamma_t(T')$ -ensemble contenant y ou t peut être étendu à un ensemble dominant total de T en ajoutant les sommets u et x . D'où $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2$. Maintenant soit S un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille (par l'Observation 4.7). Sans perte de généralité, supposons que $u, v \in S$. Si $w \in S$, alors on peut le remplacer dans D par un sommet de T' , et d'où on peut supposer que $w \notin S$. Alors $S - \{u, v\}$ est un ensemble ve -dominant total de T' , ce qui implique que $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2$. Donc, $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T') + 2 \leq \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$.

Finalement, on suppose que T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 . Tout $\gamma_t(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble dominant total de T en ajoutant les sommets u et x , et d'où $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2$. Aussi, tout $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ve -dominant total de T en ajoutant u et v , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Maintenant, supposons que $\gamma_{ve}^t(T) < \gamma_{ve}^t(T') + 2$, et soit S un $\gamma_{ve}^t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille. Sans perte de généralité, $u, v \in S$. Si $S - \{u, v\}$ total ve -domine T' , alors $\gamma_{ve}^t(T') \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2 < \gamma_{ve}^t(T')$, contradiction. Donc $S - \{u, v\} = S'$ n'est pas un ve -dominant total de T' . Puisque toutes les arêtes de T' non incidentes à y sont total ve -dominées par S' , alors S' est un ensemble ve -dominant total de $T' - y$. Il s'ensuit que $\gamma_{ve}^t(T' - y) \leq \gamma_{ve}^t(T) - 2 < \gamma_{ve}^t(T') + 2 - 2$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T' - y) < \gamma_{ve}^t(T')$, ceci contredit le fait que y satisfait $\gamma_{ve}^t(T' - y) \geq \gamma_{ve}^t(T')$. On conclut que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Donc, $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_t(T) \leq \gamma_t(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T') + 2 = \gamma_{ve}^t(T)$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. \square

Théorème 4.20. *Soit T un arbre non trivial. Alors $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{F}$, alors par le Lemme 4.19, $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. Pour montrer la nécessité, on procède par induction sur l'ordre n de T . Il est clair que, si $n \in \{2, 3\}$, alors T est une étoile et $T \in \mathcal{F}$. Soit $n \geq 4$, et supposons que tout arbre T' d'ordre n' avec $2 \leq n' < n$ satisfaisant $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_t(T')$ est dans \mathcal{F} .

Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile appartenant à \mathcal{F} . Si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une étoile double qui appartient à \mathcal{F} car il est obtenu à partir de T_1 en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 . D'où on peut supposer que T est de diamètre au moins quatre.

Enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$, et soit u un sommet support à distance maximum de r . Soit v le parent de u , w le parent de v et x le parent de w dans l'arbre enraciné. Notons que w est de degré au moins deux, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit D un $\gamma_t(T)$ -ensemble qui ne contient aucune feuille. Il est à noter que D contient tous les sommets supports de T . Alors $u \in D$ et $v \in D$. Ainsi, $w \notin D$, car sinon, on a $D - \{u\}$ est un ve -dominant total de T , ce qui contredit le fait que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. Rappelons que T_b le sous arbre induit par un sommet b et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Considérons les deux cas suivants.

Cas 1. v est de degré au moins trois. Alors tout fils de v est ou bien une feuille ou un sommet support. Si v a un fils support v' , alors $v' \in D$ et dans ce cas $D - \{v'\}$ est un ve -dominant total de T , ce qui contredit le fait que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. D'où tout fils de v autre que u est une feuille. Soit $T' = T - L_v$. Comme $u, v \in D$, D total domine T' et d'où $\gamma_t(T') \leq \gamma_t(T)$. D'autre part, par l'Observation 4.7, il existe un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble qui contient v , et un tel $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble reste un ensemble ve -dominant total de T . D'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T')$. Maintenant, en combinant les inégalités précédentes et en utilisant le fait que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$, on obtient que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T) \geq \gamma_t(T') \geq \gamma_{ve}^t(T') \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Par conséquent, $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_{ve}^t(T)$ et D est un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble contenant v . Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{F}$. Donc $T \in \mathcal{F}$ parce qu'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Cas 2. v est de degré deux. Puisque $w \notin D$, alors w n'est pas un sommet support et aussi w n'a pas un fils support. Supposons que le sous arbre $T_w - T_v$ contient un sommet support, disons w' , qui est à distance deux de w . Alors $w' \in D$, et d'où $(D - \{u, w'\}) \cup \{w\}$ est un ve -dominant total de T de cardinal moins que D , contradiction avec $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. On en déduit que w est de degré deux. Notons que T_w est isomorphe à H_2 . Maintenant on suppose que $x \in D$. Soit $x' \neq w$ le voisin de x dans D . Si le sous graphe induit par $D - \{x\}$ ne contient pas un sommet isolé, alors $(D - \{u, x\}) \cup \{w\}$ total ve -domine

T de cardinal moins que D , contradiction avec $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. D'où aucun sommet de $N(x') \setminus \{x\}$ n'est dans D , et dans ce cas $(D - \{u, x'\}) \cup \{w\}$ est un ve -dominant total de T de cardinal moins que $|D|$, contradiction avec $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T)$. On en déduit que $x \notin D$. Si $r = x$, alors T est obtenu à partir d'une chaîne $(T' : v-w-x)$ en ajoutant une étoile de centre u et l'arête uv . Il est clair que $\gamma_{ve}^t(T) = 2$ et $\gamma_t(T) = 3$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \neq \gamma_t(T)$. Dans ce qui suit, on suppose que $x \neq r$. Soit y le parent de x dans l'arbre enraciné.

Supposons maintenant que $\deg_T(x) = 2$. Alors $y \in D$. Soit $T' = T - T_x$. Si T' est trivial, alors c'est clair que, $\gamma_{ve}^t(T) = 2$, $\gamma_t(T) = 4$, et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \neq \gamma_t(T)$, contradiction. D'où T' est non trivial. Puisque $D - \{u, v\}$ est un ensemble dominant total de T' , alors $\gamma_t(T') \leq \gamma_t(T) - 2$. Aussi, si S' est un $\gamma_{ve}^t(T')$ -ensemble, alors $S' \cup \{v, w\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , et d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. Il s'ensuit que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T) \geq \gamma_t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Donc $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_t(T')$ et par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{F}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 , il s'ensuit que $T \in \mathcal{F}$.

Enfin, supposons que $\deg_T(x) \geq 3$ et x n'est pas un sommet support. Soit $T' = T - T_w$. Comme $D - \{u, v\}$ total domine T' , $\gamma_t(T') \leq \gamma_t(T) - 2$. D'autre part, on peut facilement voir que $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 2$. D'où $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_t(T) \geq \gamma_t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T') + 2 \geq \gamma_{ve}^t(T)$. Ainsi, nous devons avoir l'égalité le long de la chaîne d'inégalités ci-dessus, ce qui implique que $\gamma_{ve}^t(T) = \gamma_{ve}^t(T') + 2$, $\gamma_t(T) = \gamma_t(T') + 2$ et $\gamma_{ve}^t(T') = \gamma_t(T')$. Par induction sur T' , nous avons $T' \in \mathcal{F}$. A noter que x est dans aucun $\gamma_t(T')$ -ensemble, sinon si on suppose qu'il existe un $\gamma_t(T')$ -ensemble D' contenant x , et soit y le voisin de x dans D' , alors $D' - \{y\} \cup \{v, w\}$ est un ve -dominant total de T , d'où $\gamma_{ve}^t(T) \leq \gamma_{ve}^t(T') + 1 < \gamma_{ve}^t(T') + 2$, contradiction. Par ailleurs, soit D'' un $\gamma_{ve}^t(T' - x)$ -ensemble et supposons que $\gamma_{ve}^t(T' - x) < \gamma_{ve}^t(T')$. Alors $D'' \cup \{v, w\}$ est un ensemble ve -dominant total de T , ceci implique que $\gamma_{ve}^t(T) \leq |D''| + 2 < \gamma_{ve}^t(T') + 2$, contradiction. Donc, x est un sommet satisfaisant la condition $\gamma_{ve}^t(T' - x) \geq \gamma_{ve}^t(T')$. Maintenant puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 , on en déduit que $T \in \mathcal{F}$. \square

CHAPITRE 5

LA DOMINATION ARÊTE-SOMMET DANS LES GRAPHS

Ce chapitre est consacré à l'étude de la domination arête-sommet dans les graphes introduite par Peters. Donnons d'abord quelques définitions des ensembles dominants arêtes-sommets dans les graphes.

Définition 5.1. *Un sous ensemble $F \subseteq E$ est un dominant arête-sommet, (abrégé *ev-dominant*) de G si tout sommet $v \in V$, est *ev-dominé* par au moins une arête de F . Le cardinal minimum d'un ensemble *ev-dominant* de G est appelé le nombre de domination arête-sommet (ou tout simplement *ev-domination*) de G , noté $\gamma_{ev}(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble *ev-dominant minimal* de G appelé le nombre de *ev-domination supérieure* de G est noté par $\Gamma_{ev}(G)$.*

Définition 5.2 ([38]). *Un sous ensemble F de E est dit dominant arête-sommet indépendant (abrégé, *ev-dominant indépendant*) de G , si F est un *ev-dominant* dont toutes ses arêtes non adjacentes deux à deux. Le nombre de *ev-domination indépendante* de G , $i_{ev}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble *ev-dominant indépendant* de G et le nombre de *ev-domination indépendante supérieure* $\beta_{ev}(G)$, est le cardinal maximum d'un ensemble *ev-dominant indépendant minimal* de G .*

Définition 5.3 ([38]). *Une arête $e = uv \in F \subseteq E$ a un sommet privé $w \in V$ (relatif à l'ensemble F) si :*

1. *e est incidente à w , et*
2. *pour toute arête $e' = xy \in F - \{e\}$, e' n'est pas incidente à w et w n'est pas adjacent ni à x ou y ,*

*En d'autres termes, e *ev-domine* le sommet w et aucune autre arête de F *ev-domine* w .*

Définition 5.4 ([38]). *Un sous ensemble F de E est dit irrédondant arête-sommet (ou tout simplement, ev -irrédondant) de G , si chaque arête de F possède un sommet privé. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ev -irrédondant maximal de G noté $ir_{ev}(G)$ (resp. $IR_{ev}(G)$) est appelé le nombre de ev -irrédondance (resp. le nombre de ev -irrédondance supérieur).*

5.1 Bornes sur les paramètres de la ev -domination

Proposition 5.5. *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_{ev}(G) \leq \gamma_t(G) - 1$.*

Preuve. Soit S un $\gamma_t(G)$ -ensemble. Puisque $G[S]$ est sans sommets isolés, alors il existe un recouvrement minimal F dans $G[S]$. Chaque composante connexe de $G[F]$ est une étoile et donc $G[F]$ est une forêt. Par conséquent, $|F| < |S|$. Par ailleurs, il est clair que F ev -domine G , et ainsi $\gamma_{ev}(G) \leq \gamma_t(G) - 1$. \square

Le graphe G de la Figure 5.1 est un exemple, où $\gamma_{ev}(G) = \gamma_t(G) - 1$.

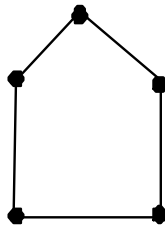


Figure 5.1: Un cycle C_5 tel que $\gamma_{ev}(C_5) = 2$ et $\gamma_t(C_5) = 3$.

Avant de poursuivre l'étude, il est nécessaire de rappeler le théorème qui relie les six paramètres de ev -domination dans un graphe cnt.

Théorème 5.6 ([38]). *Pour tout graphe cnt G d'ordre n ,*

$$ir_{ev}(G) \leq \gamma_{ev}(G) \leq i_{ev}(G) \leq \beta_{ev}(G) \leq \Gamma_{ev}(G) \leq IR_{ev}(G) \leq n/2.$$

Lewis [38] a montré que les deux paramètres $\gamma_{ev}(G)$ et $i_{ev}(G)$ sont égaux pour tout graphe cnt G .

Théorème 5.7 ([38]). *Pour tout graphe cnt G , $\gamma_{ev}(G) = i_{ev}(G)$.*

Notre prochain résultat relie le nombre d'irrédondance supérieur au nombre de ev -domination indépendante pour tout graphe cnt.

Théorème 5.8. *Si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR(G) + i_{ev}(G) \leq n$.*

Preuve. Soit D un $IR(G)$ -ensemble. Alors $pn[v, D] \neq \emptyset$ pour tout $v \in D$. Comme G est un graphe cnt, tout sommet de D a un voisin dans $V - D$. Soit $D' \subseteq D$ un ensemble qui contient les sommets de D ayant un voisin privé dans $V - D$, et soit D'' l'ensemble des voisins privés de D' dans $V - D$.

Il est à noter que si un sommet $x \in V - D$ n'a pas un voisin dans D , alors x est adjacent à un sommet de D'' , sinon $D \cup \{x\}$ est un irrédondant de G , contradiction.

Soit $E' = E(G[D', D''])$. Soit $S \subset V - (D \cup D'')$ tel que chaque sommet de S ayant un voisin dans D . Soit E'' un ensemble d'arêtes contenant pour chaque sommet de S une arête incidente à lui dont l'autre extrémité est dans D . Alors $E^* = E' \cup E''$ ev -domine G , avec $|E^*| \leq |V - D|$. Par ailleurs, puisque $\gamma_{ev}(G) = i_{ev}(G)$, alors $IR(G) + i_{ev}(G) \leq n$. \square

Corollaire 5.9. *Si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR(G) + \gamma_{ev}(G) \leq n$ et $\Gamma(G) + i_{ev}(G) \leq n$.*

Dans [38], Lewis a donné les deux résultats suivants.

Théorème 5.10 ([38]). *Pour tout graphe cnt G , $IR_{ev}(G) \leq \beta_1(G) \leq n/2$.*

Théorème 5.11 ([38]). *Pour tout $IR_{ev}(G)$ -ensemble F dans un graphe cnt G , il existe un couplage F' avec $|F| = |F'|$.*

L'idée de la preuve du Théorème 5.11, construit un tel couplage à partir d'un $IR_{ev}(G)$ -ensemble F en utilisant les sommets privés des arêtes de F .

D'après le Théorème 5.6, on a $IR_{ev}(G) \leq n/2$ pour tout graphe cnt d'ordre n . Le résultat suivant est une caractérisation des graphes atteignant cette borne supérieure.

Théorème 5.12. *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors $IR_{ev}(G) = n/2$ si et seulement si $G = H \circ K_1$, où H est un graphe connexe quelconque.*

Preuve. Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ tel que $IR_{ev}(G) = n/2$. Donc, G est d'ordre pair. Par le Théorème 5.10, on a $IR_{ev}(G) = \beta_1(G)$, et donc G admet un couplage parfait. Soit $F = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k\}$ un $IR_{ev}(G)$ -ensemble. Sans perte de généralité, on peut supposer que les sommets u_i sont distincts.

Soit F^* un couplage maximum du graphe engendré par les arêtes de F . Si $|F^*| = |F|$, alors F^* est un couplage parfait. Dans ce cas, toute arête de F est incidente à une feuille (du fait que chaque arête de F possède un sommet privé). Sans perte de généralité, on supposera que tous les u_i sont des feuilles. De la connexité de G , alors le sous-graphe induit par $G[\{v_1, v_2, \dots, v_k\}]$ est connexe. D'où $G = H \circ K_1$, où H est un graphe connexe quelconque. Supposons maintenant que $|F^*| < |F|$. Sans perte de généralité, il existe un v_i adjacent à au moins 2 sommets u_j . Dans ce cas, en utilisant le principe de la preuve du Théorème 5.11, on peut étendre F^* pour avoir un couplage F' tel que $|F'| = |F|$. En effet, supposons que v_i est adjacent à u_1, u_2, \dots, u_j (avec $j \geq 2$) et $v_iu_1 \in F^*$. Puisque toute arête de F possède un sommet privé, alors soit w_1, w_2, \dots, w_j les sommets privés des arêtes v_iu_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, j\}$. Il est clair que $v_iw_\ell \notin E$ et $u_\ellw_\ell \in E$, $\forall \ell \in \{1, \dots, j\}$. Ainsi, l'ensemble F' contiendra les arêtes u_\ellw_ℓ pour $\ell \in \{2, \dots, j\}$ mais dans ce cas puisque $|F'| = n/2$, le sommet w_1 ne sera pas saturé par F' , d'où la contradiction.

La condition suffisante est simple à voir. □

Puisque pour tout graphe cnt G , $\beta_{ev}(G) \leq \Gamma_{ev}(G) \leq IR_{ev}(G)$, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 5.13 ([10]). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors $\Gamma_{ev}(G) = n/2$ et $\beta_{ev}(G) = n/2$ si et seulement si $G = H \circ K_1$, où H est un graphe connexe quelconque.*

5.2 Caractérisation des graphes tels que $\gamma_{ev}(G) = \gamma(G)$

Peters a observé que $\gamma_{ev}(G) \leq \gamma(G)$ pour tout graphe cnt. Dans ce qui suit, on donne une condition nécessaire pour les graphes cnt G tels que $\gamma_{ev}(G) = \gamma(G)$.

Théorème 5.14. *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ tel que $\gamma_{ev}(G) = \gamma(G)$, alors tout $\gamma(G)$ -ensemble est indépendant, i-e: $\gamma(G) \equiv i(G)$.*

Preuve. Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ tel que $\gamma_{ev}(G) = \gamma(G)$. Supposons qu'il existe un $\gamma(G)$ -ensemble D qui n'est pas indépendant, et soit x et y deux sommets adjacents dans D . A noter que d'après la connexité de G et la minimalité de D , tout sommet de D possède un voisin dans $V - D$. Soit E' l'ensemble d'arêtes obtenu en prenant pour tout sommet $z \in D - \{x, y\}$ une seule arête qui lui est incidente et dont l'autre extrémité est dans $V - D$. Il est clair que $|E'| = |D| - 2$ et que $E' \cup \{xy\}$ est un ev -dominant de G de cardinal $|D| - 1$, contradiction. Par conséquent, tout $\gamma(G)$ -ensemble est indépendant et donc $\gamma(G) \equiv i(G)$. \square

La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie et ceci peut être vu en prenant la chaîne P_8 , où tout $\gamma(P_8)$ -ensemble est indépendant, mais $\gamma_{ev}(P_8) = 2$ et $\gamma(P_8) = 3$.

Notre objectif dans ce qui suit est de caractériser tous les arbres T tels que $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$. On commence par donner les deux observations suivantes.

Observation 5.15. *Si G est un graphe connexe d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma(G)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Observation 5.16. *Si G est un graphe connexe de diamètre au moins trois, alors il existe un $\gamma_{ev}(G)$ -ensemble qui ne contient aucune arête pendante.*

Soit \mathcal{T} la famille de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) d'arbres tel que $T_1 = K_{1,t}$ ($t \geq 1$), $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit H l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ de centre u et une chaîne $P_2 = v-w$ en ajoutant l'arête uv .

- **Opération \mathcal{O}_1** : Ajouter une étoile de centre u en attachant u à un sommet v de T_i n'appartenant pas à un $\gamma(T_i)$ -ensemble et satisfaisant $\gamma_{ev}(T_i - v) \geq \gamma_{ev}(T_i)$.

- **Opération \mathcal{O}_2** : Ajouter une étoile d'ordre au moins 3 de centre u en attachant une de ses feuilles v à un sommet support w de T_i .
- **Opération \mathcal{O}_3** : Ajouter une étoile d'ordre au moins 3 de centre u en attachant une de ses feuilles v à un sommet w de T_i n'appartenant pas à un $\gamma(T_i)$ -ensemble et satisfaisant $\gamma_{ev}(T_i - w) \geq \gamma_{ev}(T_i)$.
- **Opération \mathcal{O}_4** : Ajouter une copie de H en attachant w à un sommet x appartenant à un $\gamma(T_i)$ -ensemble.

Lemme 5.17. *Si $T \in \mathcal{T}$, alors $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$.*

Preuve. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire T . Il est clair que, la propriété est vraie pour $T_1 = K_{1,t}$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de \mathcal{T} construits avec $k-1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, et $T' = T_{k-1}$. Par induction sur T' , $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$. Examinons les cas suivants.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_1 , alors soit D' un $\gamma(T')$ -ensemble qui ne contient pas le sommet v . D'où $D' \cup \{u\}$ est un dominant de T , $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Aussi, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv , et d'où $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma_{ev}(T') + 1$. Maintenant, supposons que $\gamma_{ev}(T) < \gamma_{ev}(T') + 1$. Soit S un $\gamma_{ev}(T)$ -ensemble. Sans perte de généralité, $uv \in S$. Ainsi, on peut supposer qu'aucune arête incidente à v différent de uv est dans S . Si $S - \{uv\}$ ev -domine T' , alors $\gamma_{ev}(T') \leq \gamma_{ev}(T) - 1 < \gamma_{ev}(T')$, ce qui est impossible. Donc $S - \{uv\} = S'$ n'est pas un ev -dominant de T' . Puisque tous les sommets de T' non adjacents à v sont ev -dominés par S' , alors S' est un ensemble ev -dominant de $T' - v$. Il s'ensuit que $\gamma_{ev}(T' - v) \leq \gamma_{ev}(T) - 1 < \gamma_{ev}(T') + 1 - 1$, et d'où $\gamma_{ev}(T' - v) < \gamma_{ev}(T')$, ceci contredit le fait que v satisfait $\gamma_{ev}(T' - v) \geq \gamma_{ev}(T')$. On conclut que $\gamma_{ev}(T) = \gamma_{ev}(T') + 1$. Donc, $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma(T) \leq \gamma(T') + 1 = \gamma_{ev}(T') + 1 = \gamma_{ev}(T)$, et d'où $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$.

Supposons que T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_2 . Alors tout $\gamma(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble dominant de T en ajoutant u , et d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Par l'Observation 5.16, il existe un $\gamma_{ev}(T)$ -ensemble D qui contient uv et $vw \notin D$. Donc, le sommet w et ses feuilles sont ev -dominés par une arête autre que uv ,

et d'où $D - \{uv\}$ ev -domine T' . Alors $\gamma_{ev}(T') \leq \gamma_{ev}(T) - 1$. Donc $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma(T) \leq \gamma(T') + 1 = \gamma_{ev}(T') + 1 \leq \gamma_{ev}(T)$, et d'où $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_3 , alors soit D' un $\gamma(T')$ -ensemble qui ne contient pas le sommet w , et d'où $D' \cup \{u\}$ est un dominant de T , $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Aussi, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv , et d'où $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma_{ev}(T') + 1$. Maintenant, supposons que $\gamma_{ev}(T) < \gamma_{ev}(T') + 1$. Soit S un $\gamma_{ev}(T)$ -ensemble. Sans perte de généralité, $uv \in S$. Ainsi, on peut supposer qu'aucune arête incidente à w est dans S . Si $S - \{uv\}$ ev -domine T' , alors $\gamma_{ev}(T') \leq \gamma_{ev}(T) - 1 < \gamma_{ev}(T')$, ce qui est impossible. Donc $S - \{uv\} = S'$ n'est pas un ev -dominant de T' . Comme tous les sommets de T' non adjacents à w sont ev -dominés par S' , S' est un ensemble ev -dominant de $T' - w$. Il s'ensuit que $\gamma_{ev}(T' - w) \leq \gamma_{ve}^t(T) - 1 < \gamma_{ev}(T') + 1 - 1$, et d'où $\gamma_{ev}(T' - w) < \gamma_{ev}(T')$, ceci contredit le fait que y satisfait $\gamma_{ev}(T' - w) \geq \gamma_{ev}(T')$. On conclut que $\gamma_{ev}(T) = \gamma_{ev}(T') + 1$. Donc, $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma(T) \leq \gamma(T') + 1 = \gamma_{ev}(T') + 1 = \gamma_{ev}(T)$, et d'où $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$.

Supposons que T est obtenu à partir de T' par l'opération \mathcal{O}_4 . Soit D' un $\gamma(T')$ -ensemble qui contient x . Alors $D' \cup \{u\}$ est un ensemble dominant de T , et d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. Par l'Observation 5.16, il existe un $\gamma_{ev}(T)$ -ensemble D qui contient uv et sans perte de généralité $vw, wx \notin D$. Donc, $D - \{uv\}$ ev -domine T' . Alors $\gamma_{ev}(T') \leq \gamma_{ev}(T) - 1$. Donc $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma(T) \leq \gamma(T') + 1 = \gamma_{ev}(T') + 1 \leq \gamma_{ev}(T)$, et d'où $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$. \square

Théorème 5.18. *Soit T un arbre non trivial. Alors $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}$, alors par le Lemme 5.17, $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$. Pour montrer la nécessité, on utilise une induction sur l'ordre n de T . Il est clair que si $n \in \{2, 3\}$, alors T est une étoile et $T \in \mathcal{T}$. Soit $n \geq 4$, et supposons que tout arbre T' d'ordre n' avec $2 \leq n' < n$ satisfaisant $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$ est dans \mathcal{T} .

Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$. Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile appartenant à \mathcal{T} . Si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une étoile double sachant que $\gamma_{ev}(T) = 1$ et $\gamma(T) = 2$. D'où on peut supposer que T est de diamètre au moins quatre.

Enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum, $\text{diam}(T) \geq 4$, et soit u un sommet support à distance maximum de r . Soit v le parent de u , w le parent de v et x le parent de w dans l'arbre enraciné. Notons que w est de degré au moins deux, car $\text{diam}(T) \geq 4$. Soit D un $\gamma(T)$ -ensemble qui contient tous les sommets supports. Alors $u \in D$. Rappelons que T_b est le sous arbre induit par un sommet b et ses descendants dans l'arbre enraciné T . Nous considérons les deux cas suivants.

Cas 1. v est de degré au moins trois. Alors tout fils de v est ou bien une feuille ou un sommet support. Si v est un sommet support, alors $v \in D$, ce qui contredit que tout $\gamma(T)$ -ensemble est indépendant. D'où tout fils de v est un sommet support. Soit $T' = T - T_u$. Comme v est dominé par son fils différent de u , $D - \{u\}$ domine T' et d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. D'autre part, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv . D'où $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma_{ev}(T') + 1$. Maintenant, en combinant les inégalités précédentes et en utilisant le fait que $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T)$, on obtient $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T) \geq \gamma(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T)$. Par conséquent, $\gamma_{ev}(T) = \gamma_{ev}(T') + 1$, $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$ et $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$. Par ailleurs, soit D' un $\gamma_{ev}(T' - v)$ -ensemble et supposons que $\gamma_{ev}(T' - v) < \gamma_{ev}(T')$. Alors $D' \cup \{uv\}$ est un ensemble ev -dominant de T , ceci implique que $\gamma_{ev}(T) \leq |D'| + 1 < \gamma_{ev}(T') + 1$, contradiction. Donc, v est un sommet satisfaisant la condition $\gamma_{ev}(T' - v) \geq \gamma_{ev}(T')$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur T' , $T' \in \mathcal{T}$. Donc $T \in \mathcal{T}$ parce qu'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Cas 2. v est de degré deux. On distingue les trois sous-cas suivants.

Cas 2.1. w est un sommet support. Dans ce cas $w \in D$. Soit $T' = T - T_v$. Alors $D - \{u\}$ est un dominant de T' , et d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. Aussi, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv , et d'où $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma_{ev}(T') + 1$. Donc on a $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T) \geq \gamma(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T)$. Ceci implique que $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$. Par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 , on obtient que $T \in \mathcal{T}$.

Cas 2.2. Supposons qu'il existe un sommet support dans $V(T_w - T_v)$, disons w' , qui est à distance un ou deux de w . Alors, D contient w' . Soit $T' = T - T_v$. Alors $D - \{u\}$ est un dominant de T' et d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. D'autre part, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv . D'où $\gamma_{ev}(T) \leq$

$\gamma_{ev}(T') + 1$. Donc on a $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T) \geq \gamma(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T)$. Ceci implique que $\gamma_{ev}(T) = \gamma_{ev}(T') + 1$, $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$ et $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$. Par ailleurs, soit D' un $\gamma_{ev}(T' - w)$ -ensemble et supposons que $\gamma_{ev}(T' - w) < \gamma_{ev}(T')$. Alors $D' \cup \{uv\}$ est un ensemble ev -dominant de T , ceci implique que $\gamma_{ev}(T) \leq |D'| + 1 < \gamma_{ev}(T') + 1$, contradiction. Donc, w est un sommet satisfaisant la condition $\gamma_{ev}(T' - w) \geq \gamma_{ev}(T')$. Maintenant par induction sur T' , on a $T' \in \mathcal{T}$. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_3 , nous obtenons que $T \in \mathcal{T}$.

Cas 2.3. w est de degré deux. $w \notin D$ et $x \in D$. Notons que T_w est isomorphe à H . Si $r = x$, alors T est obtenu à partir d'une chaîne $(T' : v-w-x)$ en ajoutant une étoile de centre u et l'arête uv . D'où l'opération \mathcal{O}_1 est réalisée et ainsi $T \in \mathcal{T}$. Dans ce qui suit, on suppose que $x \neq r$. Soit $T' = T - T_w$. Alors $D - \{u\}$ domine T' , et d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - 1$. D'autre part, tout $\gamma_{ev}(T')$ -ensemble peut être étendu à un ensemble ev -dominant de T en ajoutant l'arête uv . D'où $\gamma_{ev}(T) \leq \gamma_{ev}(T') + 1$. Donc on a $\gamma_{ev}(T) = \gamma(T) \geq \gamma(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T') + 1 \geq \gamma_{ev}(T)$. Ceci implique que $\gamma_{ev}(T') = \gamma(T')$ et $D - \{u\}$ est un $\gamma(T')$ -ensemble contenant x . Par hypothèse d'induction, on a $T' \in \mathcal{T}$, nous obtenons que $T \in \mathcal{T}$ parce qu'il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_4 . □

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, divers problèmes d'aspect théoriques liés à la ve -domination ont été traités. Notre travail a été motivé par le fait que peu de travaux sont réalisés sur ce sujet relativement à d'autres paramètres de domination et aussi par le fait des nombreuses questions laissées ouvertes, principalement, dans la thèse de PhD de Lewis. Les résultats obtenus sont nombreux et variés (bornes, relations, caractérisations et complexité).

Nous avons introduit la ve -domination totale, où des résultats intéressants sont obtenus. ■ Il nous semble que cette notion mérite d'être étudiée plus profondément.

Les travaux réalisés durant cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Dans ce sens, nous proposons quelques questions citées ci-dessous :

1. Dans le chapitre 3, on a prouvé que si G est un graphe cnt d'ordre n , alors $IR(G) + i_{ve}(G) \leq n$. Est ce que $IR(G) + \beta_{ve}(G) \leq n$?
2. Il est connu que pour tout graphe G , $IR(G) \leq \Psi(G)$. Est ce que $\Psi(G) + i_{ve}(G) \leq n$ et $\Psi(G) + i_{ev}(G) \leq n$?
3. Caractériser tous les arbres non triviaux tels que $i_{ve}(T) = \gamma(T)$?
4. Caractériser tous les arbres non triviaux tels que $i_{ve}(T) = \beta_{ve}(T)$?
5. Etablir des bornes sur $\gamma_{ve}^t(G)$?
6. Caractériser les graphes cnt G tels que $\gamma_{ve}^t(G) = \gamma_{ve}(G)$?
7. Caractériser les graphes cnt G tels que $IR(G) + i_{ev}(G) = n$?

RÉFÉRENCES

- [1] G. Alexanderson, Euler et Königsberg's bridges : a historical view. Bulletin of the American Mathematical Society, 43 (4), (2006), 567.
- [2] P. R. Cromwell, Polyhedra. Cambridge University Press, (1999), 189-190.
- [3] A. L. Cauchy, Recherche sur les polyèdres-premier mémoire. Journal de l'école Polytechnique 9, Cahier 16, (1813), 66-86.
- [4] S. A. J. L'Huilier, Mémoire sur la polyèdrométrie. Annales de Mathématiques, 3, (1861), 169-189.
- [5] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 8, (1741), 128-140.
- [6] C. Rajendran, Caturanga movements described in Rudrata's Kavyalankara. Working-Papers "Indian Views", Ffrderkreis Scach-Geschichtsforschung e.V., (2001).
- [7] G. Martin, The arab role in the development of Chess Online, (2009).
- [8] Y. Alavi, M. Behzad, L. M. Lesniak-Foster et E. A. Nordhaus, Total matchings and total coverings of graphs. J. Graph Theory, 1(2):135-140, 1977.
- [9] J.W. Peters, Theoretical and Algorithmic Results on Domination and Connectivity, Ph.D. Thesis, Clemson University, 1986.
- [10] R. Boutrig, M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi, Vertex-edge domination in graphs. Aequationes Mathematicae, 90 (2016), 355-366.
- [11] G. Chartrand et P. zhang, Introduction of graph theory. Mc Graw Hill, New York (2004).
- [12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. Marcel Dekker New York, 1998.

- [13] J. Edmonds, Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math*, 17 (1965), 449-467.
- [14] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990), 3-9.
- [15] C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs. Petrograde (1862).
- [16] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards: A brief survey, dans *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 1995, pp. 507-528.
- [17] C. Berge, *Théorie de graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.
- [18] O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).
- [19] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7(1977) 247-261.
- [20] K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. *SIAM J. Comput*, 11(1982) 191-199.
- [21] R. Laskar et K. Peters, Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).
- [22] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* Vol. 5, No 3, september 1984.
- [23] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 3-9.
- [24] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [25] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Decker, Inc. New York, 1998.

- [26] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi et D.J. Miller, Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull*, 21(1978), 461-468.
- [27] E.J. Cockayne, R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks*, 10 (1980) 211-219.
- [28] M.A. Henning et A.Yeo, Hypergraphs with large transversal number and with edge sizes at least three. *J. Graph Theory*, 59 (2008),326-348.
- [29] M.A. Henning, A survey of selected recent results on total domination in graphs. *Discrete Math*, 309 (2009), 32-63.
- [30] J.F. Fink et M.S. Jacobson, n -domination in graphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, Wiley, New York, 283-300 (1985).
- [31] J.F. Fink et M.S. Jacobson, On n -domination in graphs, n -dependence and forbidden subgraphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, Wiley, New York, 301-311 (1985).
- [32] E.J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi et S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs. *Discrete Mathematics*, 278 (2004) 11-22.
- [33] I. Steward, Defend the Roman Empire!. *Sci. Amer.* 281 (1999) 136-139.
- [34] J. Somerville, Collingwood's Logic of Question and Answer. *The Monist*, 72, (1989), 526-541.
- [35] R. E. Ladner, On the structure of polynomial time reducibility. *Journal of the ACM*, 22 (1) (1975) 151-171.
- [36] S. Cook, The complexity of theorem proving procedures. *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, 22 (1) (1971) 151-158.
- [37] M.R. Garey et D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.

- [38] J.R. Lewis, Vertex-edge and Edge-vertex Domination in Graphs. Ph.D. Thesis, Clemson University, 2007.
- [39] J.R. Lewis, S.T. Hedetniemi, T.W. Haynes et G.H. Fricke, Vertex-edge domination. *Util. Math*, **81** (2010) 193–213.
- [40] M. Chellali, B. Krishnakumari et Y.B. Venkatakrishnan, Double vertex-edge domination, soumis.
- [41] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et T.M. Lewis, On *ve*-degrees and *ev*-degrees in Graphs, soumis.
- [42] D.W. Bange, A.E. Barkaukas et P.J. Slater, Efficient dominating sets in graphs. *In Applications of Discrete Mathématique*, R.D. Ringeisen et F.S. Roberts, editors, SIAM, Philadelphia (1988) 189-199.
- [43] B. Bollobas et E.J. Cockayne, Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *J. Graph Theory*, **3** (1979) 241–249.
- [44] R.B. Allan et R. Laskar, On domination and independent domination numbers of a graph. *Discrete Mathematics*, 23 (1978) 73-76.
- [45] R. Boutrig et M. Chellali, Total vertex-edge domination. *International Journal of Computer Mathematics*, soumis en juin 2015.
- [46] Y. Caro, New results on the independence number. Technical report, Tel-Aviv University, 1979.
- [47] V.K. Wei, A lower bound on the stability number of a simple graph. Technical memorandum, TM 81-11217-9, Bell laboratories, 1981.
- [48] B. Krishnakumari, Y.B.Venkatakrishnan et M. Krzywkowski, Bounds on the vertex-edge domination number of a tree. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I* **352** (2014) 363–366.
- [49] M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi, Lower Bounds on the Roman and Independent Roman Domination Numbers. *App. Ana. Discrete Mathematics*, accepté.

- [50] S.T. Hedetniemi, R.R. Rubalcaba, P.J. Slater et M. Walsh, Few Compare to the Great Roman Empire. *Congressus*, 217 (2013) 129-136.
- [51] M. Chellali, T.W. Haynes et S.T. Hedetniemi, Roman and Total Domination. *Quaestiones Mathematicae*, 38 (2015) 749-757.